



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO

GABRIEL APARECIDO PINTO ROCHA

**ABORDAGENS TEÓRICO E PRÁTICA PARA O ENSINO DA ÓPTICA
GEOMÉTRICA NO ENSINO MÉDIO**

FORTALEZA

2022

GABRIEL APARECIDO PINTO ROCHA

ABORDAGENS TEÓRICO E PRÁTICA PARA O ENSINO DA ÓPTICA
GEOMÉTRICA NO ENSINO MÉDIO

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Física do Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Rocha Paschoal.

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

R573a Rocha, Gabriel Aparecido Pinto.
Abordagens teórico e prática para o ensino da Óptica Geométrica no Ensino Médio / Gabriel Aparecido
Pinto Rocha. – 2022.
61 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,
Curso de Física, Fortaleza, 2022.

Orientação: Prof. Dr. Alexandre Rocha Paschoal.

1. Óptica Geométrica. 2. Ensino Médio. 3. Teoria. 4. Experimentação. I. Título.

CDD 530

GABRIEL APARECIDO PINTO ROCHA

ABORDAGENS TEÓRICO E PRÁTICA PARA O ENSINO DA ÓPTICA
GEOMÉTRICA NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao
Curso de Graduação em Licenciatura em
Física do Centro de Ciências da Universidade
Federal do Ceará, como requisito parcial à
obtenção do grau de Licenciado em Física.

Aprovada em: 15/07/2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Alexandre Rocha Paschoal (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Alves de Lima Júnior
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Carlos William de Araújo Paschoal
Universidade Federal do Ceará (UFC)

A Deus, ao mestre Jesus, a Maria de Nazaré.

A minha mãe Reinilda Carneiro Pinto.

A todos que compõem o jardim de minha vida.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Deus por ter presenteado a nós com a vida, o livre-arbítrio, a oportunidade de sonhar e construir nosso destino. Ao querido amigo Jesus Cristo juntamente com meu Anjo Guardião pelo carinho.

A minha mãe e meu irmão Daniel pelo companheirismo, dedicação, amor, afabilidade.

Aos meus amigos por cada encontro, cada gesto de amor, carinho e abraço.

A pró Regina, pró Célia, pró Wanessa Façanha. Aos queridos professores: Nick God, Antônio Gomes Souza Filho, José Alves de Lima Júnior.

A Kelly, a Manu, ao inestimável Ivan Alecrim bem como ao Grupo Cometa de Educação.

A Casa de Oração Maria de Nazaré, a Comunhão Espírita de Brasília, ao Centro Espírita Antônio de Pádua, ao Centro Espírita Jesus de Nazaré e ao Centro Espírita Francisco de Assis.

Ao Prof. Dr. Alexandre Rocha Paschoal, pela excelente orientação, cordialidade e companheirismo.

As professoras Margarete e Lucilene, por ter concedido o espaço da EEEP Joaquim Albano para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores participantes da banca examinadora José Alves de Lima Júnior e Carlos Willian de Araújo Paschoal pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

RESUMO

A Óptica estuda o comportamento da luz. Existem duas teorias para explicar tais fenômenos. A Corpuscular enquanto que a outra denomina-se Ondulatória. O presente trabalho é voltado para a Óptica Geométrica, então nele é estudado as propriedades da luz por meio da Teoria Corpuscular além de como levar a alunos do Ensino Médio tais princípios. Para tanto, fez necessário a união de aulas teóricas com aulas práticas das quais em um primeiro momento focou em seis experimentos básicos cujo objetivo foi de permitir aos alunos assimilarem aqueles conteúdos discutidos na Teoria, ademais verifica-los em tempo real. O segundo momento decorre com a construção de um microscópio caseiro simples capaz de fornecer um aumento total de oitenta e oito vezes em relação ao objeto que se queira analisar. Durante o desenvolvimento os estudantes receberam alguns materiais de apoio: apresentação de PowerPoint com às Leis da Reflexão e Refração, Espelhos Planos, Espelhos Esféricos, Lentes Delgadas e Instrumentos Óticos. Dois PDF's para apresentar as cinco possibilidades de formação de imagens em Espelhos Côncavos, mas Lentes Convergentes. Outra formação de imagens única em Espelhos Convexos e Lentes Divergentes. Enfim, um arquivo o qual expõe o processo de construção de imagens por microscópios compostos. A fabricação do microscópio caseiro simples ocorreu com harmonia, sucesso. As amostras escolhidas a fim de serem observadas pelos jovens foram: folhas de mato, papelão cortado e papel colorido. Com esse equipamento constatou-se por exemplo que a folha de mato apresenta pontinhos brancos além de apresentar a cor verde clara diferente quando comparada com aquilo perceptível a “olho nu”: somente a cor verde escura. Logo, os objetivos do trabalho são alcançados tendo em vista a realização dos experimentos bases e construção do microscópio, assim como a aprendizagem de conhecimento por parte dos alunos no que concerne a Óptica Geométrica.

Palavras-chave: óptica geométrica; ensino médio; teoria; experimentação.

ABSTRACT

Optics studies the behavior of light. There are two theories to explain such phenomena. The Corpuscular while the other is called Undulatory. The theoretical work is good for Geometric Optics so studied through Theory in addition to taking as school principles the students of teaching such principles. Therefore, it was necessary to combine theoretical classes with practical classes, the first of which focused on six basic experiments whose objectives were to allow students to assimilate those contents discussed in theory, in addition to them in real time. The second moment involves the construction of an environment of total simplicity capable of providing an eighty-fold increase in relation to the object if you want to analyze it. During the students' development, he received some support materials: PowerPoint presentation with Laws of Reflection and Refraction, Flat Mirrors, Spherical Mirrors, Thin Lenses and Optical Instruments. Two PDFs to present themselves as five possibilities of image formation in Concave Mirrors, but Convergent Lenses. Another unique image formation in Convex Mirrors and Divergent Lenses. Finally, a file which displays the process of building images by composite photos. Homemade manufacturing. simple executed with harmony, success As chosen in order to be observed by the young people were: leaves of grass, cut cardboard and colored paper. With this material for the presentation of material presented: only the green color as an example that whites in addition to a perceptible light green color differs when "naked-appearing eye" Therefore, the objectives of the work are sought with a view to carrying out the experiments foundations and construction of the work, as well as the learning of knowledge by the students.

Keywords: geometric optics; high school; theory; experimentation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Frentes e raios de ondas.....	16
Figura 2 – Narciso, óleo sobre tela, Caravaggio	17
Figura 3 – Raio incidente, refletido e refratado.....	18
Figura 4 – Leis da reflexão e refração.....	19
Figura 5 – Espelho plano.....	19
Figura 6 – Formação de imagem em espelho plano.....	20
Figura 7 – Espelhos Esféricos.....	21
Figura 8 – Elementos geométricos de espelho esférico.....	22
Figura 9 – Formação de imagens nos espelhos esféricos.....	22
Figura10 – Lentes de bordas grossas e lentes de bordas finas.....	25
Figura11 – Elementos geométricos de uma lente esférica.....	26
Figura12 – Lentes delgadas convergentes e divergentes.....	26
Figura13 – Formação de imagens em lentes delgadas convergentes e divergentes.....	27
Figura13 – Formação de imagens em lentes delgadas convergentes e divergentes.....	28
Figura13 – Formação de imagens em lentes delgadas convergentes e divergentes.....	29
Figura14 – Microscópio Composto.....	30
Figura15 – Formação de imagem no microscópio composto.....	31
Figura16 – EEEP Joaquim Antônio Albano.....	32
Figura17 – Experimento I.....	36
Figura18 – Vela.....	37
Figura19 – Experimento II.....	37
Figura19 – Experimento II.....	38
Figura20 – Experimento III.....	38
Figura20 – Experimento III.....	39

Figura20 – Experimento III.....	40
Figura21 – Experimento IV.....	41
Figura22 – Experimento V.....	42
Figura22 – Experimento V.....	43
Figura22 – Experimento V.....	44
Figura23 – Experimento VI.....	46
Figura24 – Válvula de embalagem.....	47
Figura25 – Construção do microscópio caseiro simples.....	49
Figura25 – Construção do microscópio caseiro simples.....	50
Figura26 – Folhas de mato.....	51
Figura27 – Papelão cortado.....	52
Figura28 – Marcador de texto.....	53
Figura29 – Construção de imagens no espelho plano.....	54
Figura30 – Construção de imagens em espelhos esféricos.....	59
Figura31 – Foco de um espelho esférico.....	60
Figura32 – Formação de imagem em uma lente delgada.....	61

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Respostas do formulário 1.....	34
Tabela 2 – Respostas do formulário 2.....	35

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

n	Índice de Refração da Luz
c	Velocidade de propagação da luz no vácuo
v	Velocidade de propagação da luz em um meio material
y	Altura do objeto
y'	Altura da imagem formada
p	Distância Objeto
q	Distância Imagem
F	Foco do Espelho
R	Raio de Curvatura
s	Distância Objeto

LISTA DE SÍMBOLOS

%	Porcentagem
θ_a	Ângulo de incidência
θ_b	Ângulo de refração
sin	Função seno
!	Fatorial
=	Igual
+	Mais
▲	Triângulo

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	16
2.1	Reflexão e Refração	17
2.2	Espelhos Planos	19
2.3	Espelhos Esféricos	21
2.4	Lentes Delgadas	25
2.5	Microscópio Composto	30
3	METODOLOGIA	32
4	DESENVOLVIMENTO E RESULTADOS	33
5	CONCLUSÃO	53
	REFERÊNCIAS	54
	APÊNDICE A – FORMAÇÃO DE IMAGENS EM ESPELHOS PLANO..	56
	APÊNDICE B – FORMAÇÃO DE IMAGENS EM ESPELHOS ESFÉRICOS	57
	APÊNDICE C – FORMAÇÃO DE IMAGENS EM LENTES DELGADAS	60

1 INTRODUÇÃO

Entende-se a Óptica como área da Física dedicada ao estudo do comportamento da luz, suas características. Em 500 a.C. Havia na Grécia dois pensamentos acerca de como as pessoas tinham a percepção de visualizar o mundo que as rodeiam. O primeiro, intitulado de Teoria Táctil defende: o olho é responsável por emitir raios ou partículas as quais são refletidas pelos objetos. A segunda argumenta que os materiais emitiam algo capaz de ser percebido pelo olho. A Física Clássica surge no século XVII fruto da Renascença. Em tal período aceita-se a luz representada por raios vistos como corpúsculos. Isaac Newton associa-os com vibrações internas e inerentes ora controladas por meio das ondas em propagação [1]. A Óptica Geométrica ressoa com a Teoria Corpuscular da Luz. Com isso, os conceitos e aplicabilidade da Reflexão e Refração da Luz permitiram à sociedade compreender como uma imagem é formada em instrumentos ópticos como a luneta, a lupa, o olho humano, o telescópio refrator, câmera fotográfica, microscópio composto. Por outro lado, a Teoria Ondulatória ganha ênfase com os estudos da interferência e difração liderados respectivamente por Thomas Young e Augustin Fresnel. A partir do desenvolvimento da descrição das ondas eletromagnéticas baseado nas Equações de Maxwell efeitos ondulatórios são explicados de forma única. É importante destacar que a luz foi constatada como uma onda eletromagnética em 1888 através de Hertz quando demonstrou propriedades das ondas de rádio análogas as da luz [2].

Durante cinco a seis meses, a cidade de Rjukan, localizada em um vale da Noruega, não recebe luz solar por ser bem distante do equador. Entretanto, a instalação de espelhos grandes em montanhas encontradas ao lado do vilarejo permitiram durante essa época do ano a iluminação de uma pequena área [3]. A Terapia Fotodinâmica utilizada no tratamento do câncer de pele não-melanoma onde células cancerígenas são destruídas sem provocar danos aquelas saudáveis, também reduz os efeitos colaterais quando comparado com o tratamento feito por meio da radioterapia [4].

Estes exemplos são confiáveis a afirmar o quão o conhecimento da Óptica nos seus dois aspectos: clássico e quântico contribuíram para o desenvolvimento da sociedade. Logo, por esta relevância, optou-se pelo seu estudo como tema chave ao desenvolvimento do presente trabalho voltado em como levar conceitos básicos da Óptica Geométrica a alunos do Ensino Médio. Para tanto, somou-se teoria e prática onde, após duas aulas teóricas os alunos participantes em três dias realizaram seis experimentos baseados nas referências [5,6], concomitante aos tópicos debatidos nas aulas. Enfim, a produção de um microscópio caseiro

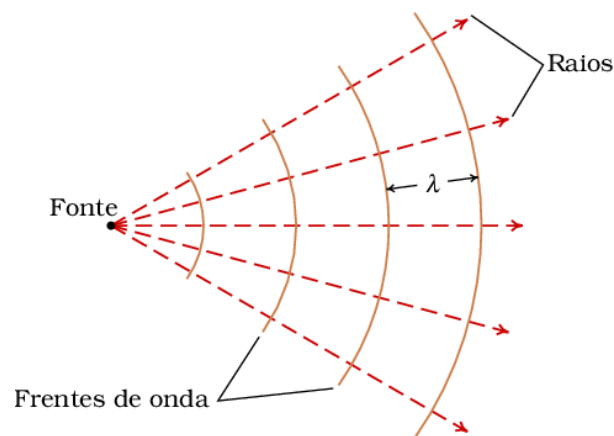
simples [7], bem como a análise de algumas amostras por parte dos estudantes feitos em dois dias. Deste ponto de partida, pretende-se que após a confecção dos experimentos, os discentes saibam compreender os princípios ópticos envolvidos na formação de imagens em espelhos planos e esféricos, os motivos pelos quais uma imagem é ampliada quando observada por um microscópio, ademais construir o microscópio caseiro simples [7], apreciar, esmiuçar as informações existentes no mundo micro. É importante ressaltar que o trabalho teve seu desenvolvimento na Escola Estadual de Ensino Profissionalizante Joaquim Antônio Albano localizada na Rua Júlio Siqueira, n 390, bairro Dionísio Torres, Fortaleza - CE. O motivo da escolha desta presente instituição decorre do autor ter conhecido o ambiente escolar em todos os aspectos durante as atividades de estágio obrigatório presente na grade do curso de Física – Licenciatura da Universidade Federal do Ceará.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

As propagações de uma onda podem ter suas direções representadas por duas formas. Através do conceito de frentes de ondas ou por meio de raios. No caso da onda luminosa optar-se-á pelo segundo modelo. Eles são entendidos na Teoria Corpuscular como trajetórias das partículas. Na Teoria Ondulatória enuncia-os como uma linha imaginária descrita ao longo da direção de propagação da onda. À Ótica Geométrica utiliza-se dessa abordagem para descrever o comportamento da luz por meio da reflexão, refração, entender como, estes dois fenômenos associam-se contribuindo na formação de imagens em espelhos planos, esféricos, lentes delgadas [8]. Uma vez de posse de tais informações, é possível ajustá-las de tal forma a construir equipamentos capazes de ampliar um objeto em até trezentas vezes o seu tamanho original: o microscópio composto [9].

Na Figura 1 observa-se uma fonte de onda esférica e as frentes de ondas propagando-se radialmente. Os raios de ondas são as setas com origem do centro da esfera, passando em linha reta através das frentes ondulatórias.

Figura 1: frentes e raios de ondas



Fonte referência [10].

2.1 Reflexão e Refração:

A pintura Narciso (Figura 2), pertencente a Caravaggio (1571-1610) do pintor italiano da Escola Literária Barroco demonstra uma consequência da reflexão da luz. O rapaz vê a si próprio na superfície da água. Segundo a mitologia grega, Narciso não aceitou o amor da ninfa Eco, assim, foi condenado por Nêmesis para apaixonar-se por sua própria imagem refletida em certo lago [9].

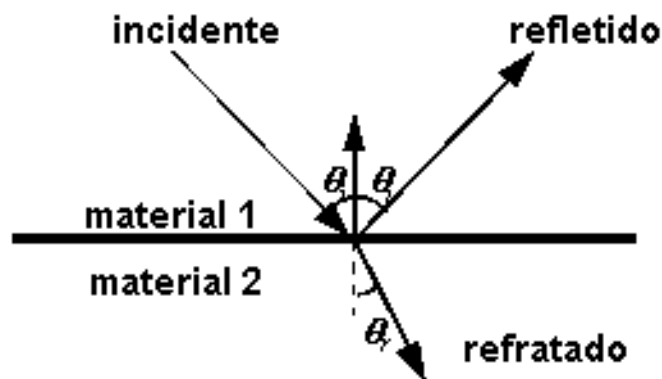
A onda luminosa, quando passa a se propagar em um meio diferente do original, será parcialmente refletida e transmitida para este. Na pintura ao lado, pode-se representar os raios luminosos advindos de Narciso tal qual expressa-se na Figura 3. Considere o material 1 como o ar e o material 2 como a superfície plana da água. Enuncia-se a reflexão da luz como a propriedade que o raio luminoso volta a se propagar no mesmo meio após incidir em uma superfície. A refração ocorre quando o raio, ao incidir na superfície, é transmitido para um segundo material, passando a deslocar-se nele [2].

Figura 2: Narciso, óleo sobre tela, Caravaggio.



Fonte: referência [11].

Figura 3: raio incidente, refletido e refratado.



Fonte: referência [12].

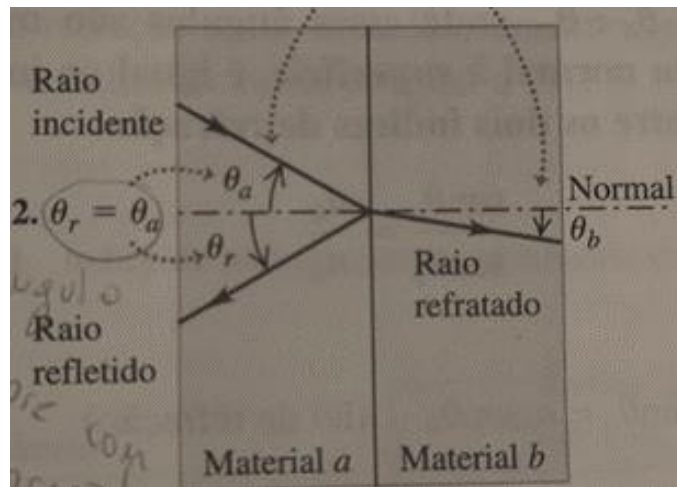
Uma grandeza escalar importante para o estudo da Óptica Geométrica é o índice de refração da luz, compreendido pela razão entre a velocidade da luz no vácuo, c , e a velocidade de propagação da luz no material, v [8]:

$$n = \frac{v}{c} \quad (1)$$

Os raios incidente, refletido, refratado e a normal estão contidos em um único plano. Além disso, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. Tais aspectos compreendem um conjunto o qual converge para a Lei da Reflexão. Já a Lei da Refração informa que o raio refratado e a normal também estão no mesmo plano. Ademais, a razão entre o seno do ângulo de incidência e de refração equivale ao inverso da razão entre os índices de refração dos dois meios envolvidos [8], conforme a Figura 4 e a equação a seguir [7].

$$\frac{\sin \theta_a}{\sin \theta_b} = \frac{n_b}{n_a} \rightarrow \sin \theta_a n_a = \sin \theta_b n_b \quad (2)$$

Figura 4: leis da reflexão e refração.



Fonte: Young, Hugh D. São Paulo: Addison Wesley, 2009. p.5.

2.2 Espelhos Planos:

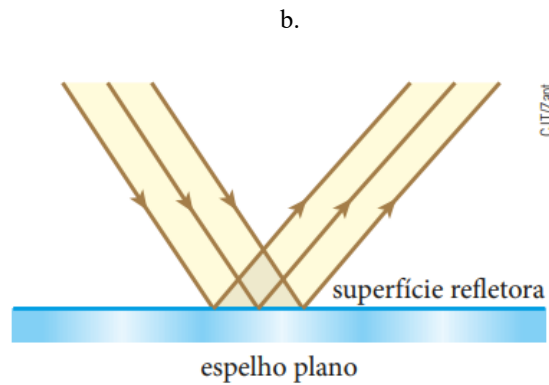
Qualquer superfície plana, polida, ou seja, que não apresenta rugosidades e com um alto poder refletor, constitui-se um espelho plano (Figura 5). Eles podem ser fabricados a partir do polimento de chapas metálicas ou por uma lâmina de vidro hialino com faces paralelas. Nesta situação, uma das faces é coberta por nitrato de prata fixada por uma camada de cobre [9].

Figura 5: espelho plano.

a.



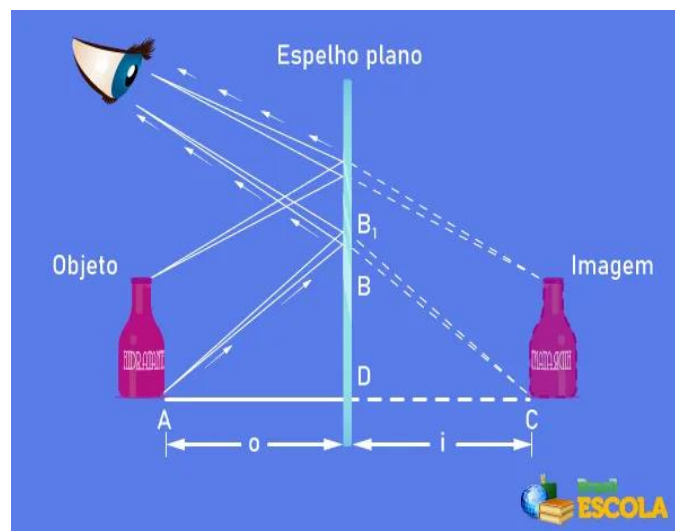
Fonte: referência [13].



Fonte: Villas Bôas, Newton. São Paulo: Saraiva, 2016. p 195.

A imagem formada por um espelho plano apresenta as seguintes características: virtual, direita, do mesmo tamanho e simétrica ao objeto. Diz-se que uma imagem é virtual quando ela é formada pelo prolongamento dos raios emergentes e estes não passam pelo mesmo local onde o objeto está localizado. Direita quando ela está na mesma direção do objeto e no mesmo sentido (Figura 6).

Figura 6: formação de imagem em espelhos planos.

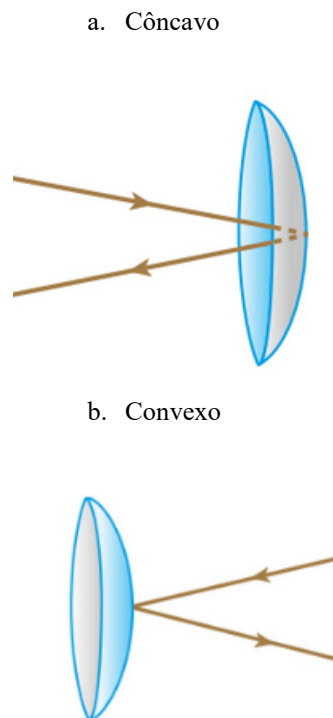


Fonte: referência [14].

2.3 Espelhos Esféricos:

Compreende-se por espelhos esféricos qualquer casca esférica polida com excelente poder refletor. Tais espelhos são classificados em côncavo quando a superfície refletora é voltada para dentro da casca esférica, ou convexos quando a superfície refletora é voltada para fora da esfera [8], (Figura 7). Com espelhos côncavos, tem-se imagens maiores e com convexos um campo visual maior [9].

Figura 7: espelhos esféricos.

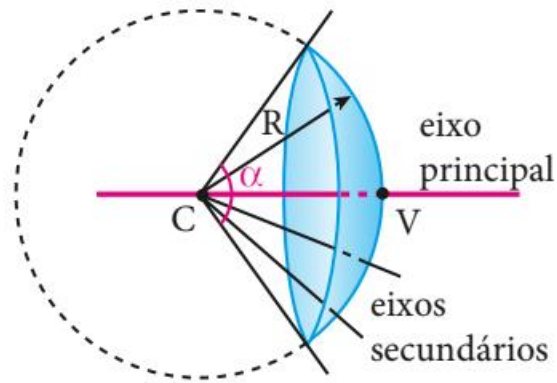


Fonte: Villas Bôas, Newton. São Paulo: Saraiva, 2016. p 209.

Considere o espelho esférico côncavo da figura 15 para a partir dele estudar o processo de formação de imagens. Antes, porém, é necessário estar a par de alguns conceitos: **C**, centro de curvatura do espelho, corresponde ao centro da esfera que originou o espelho; **V**, vértice, polo do espelho; **CV**, eixo principal do espelho, reta que passa pelo centro de curvatura e vértice; **α** , abertura do espelho, ângulo compreendido entre o centro de curvatura do espelho e lados cujos pontos são diametralmente opostos; **R**, raio de curvatura, raio da esfera donde o espelho é oriundo; **Plano frontal** quando é perpendicular ao eixo principal do

espelho e **Eixos secundário**, retas às quais passam pelo Centro de Curvatura [9]. Tome a Figura 8 como exemplo.

Figura 8: elementos geométricos de espelho esférico.

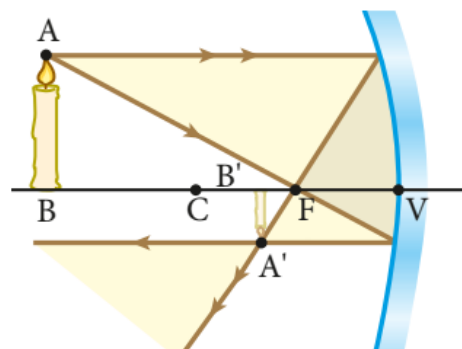


Fonte: Villas Bôas, Newton. São Paulo: Saraiva, 2016. p 209.

A distância da imagem formada por um espelho esférico está associada com a distância que o objeto está em relação ao espelho e seu raio de curvatura. Para os espelhos côncavos existem cinco possibilidades de formação de imagens e nos convexos apenas uma [9] conforme exposto na Figura 9.

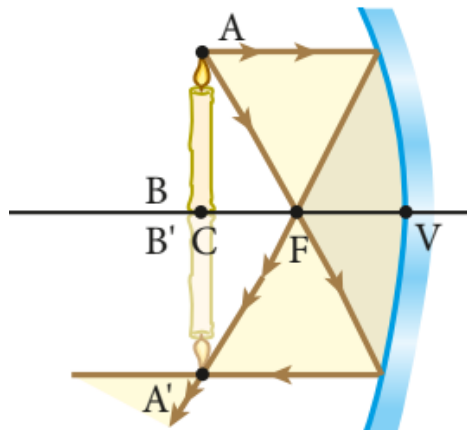
Figura 9: formação de imagens nos espelhos esféricos.

a. Espelho côncavo



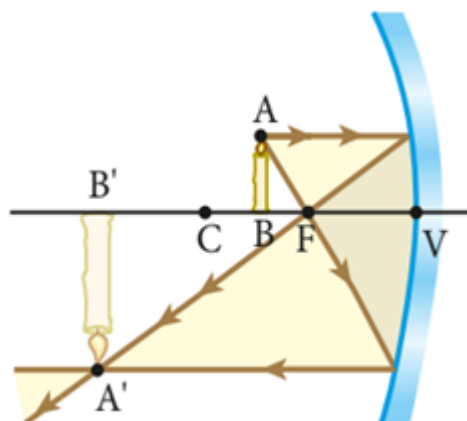
Se o objetivo estiver antes do centro de curvatura, a imagem será **real**, ou seja, formada pelo cruzamento dos próprios raios refletidos e não por meio de seus prolongamentos, **invertida** que quer dizer: de cabeça para baixo em relação ao objeto. E **menor**.

Real, invertida e do mesmo tamanho.

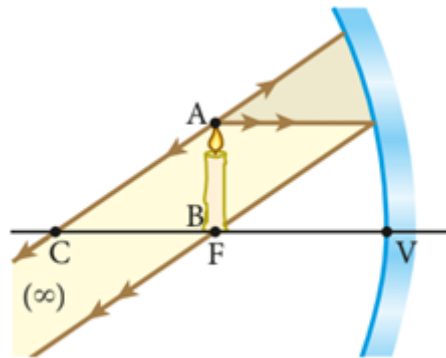


Se o objetivo estiver sobre o centro de curvatura.

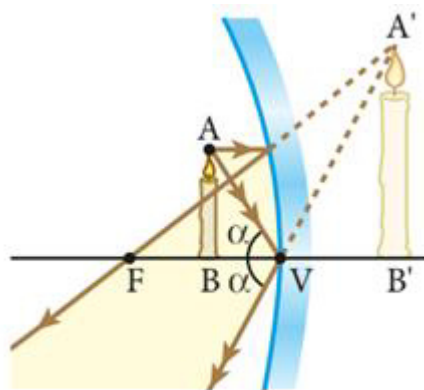
Real, invertida e maior.



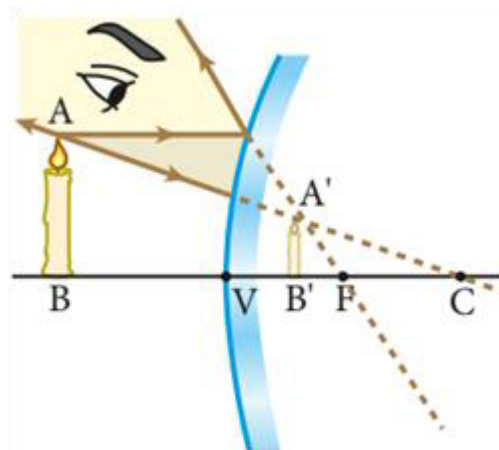
Se o objetivo estiver entre o centro de curvatura e o foco.

Imprópria.

Se o objetivo estiver sobre o foco.

Virtual, direita e maior.

Se o objetivo estiver entre o foco e vértice.

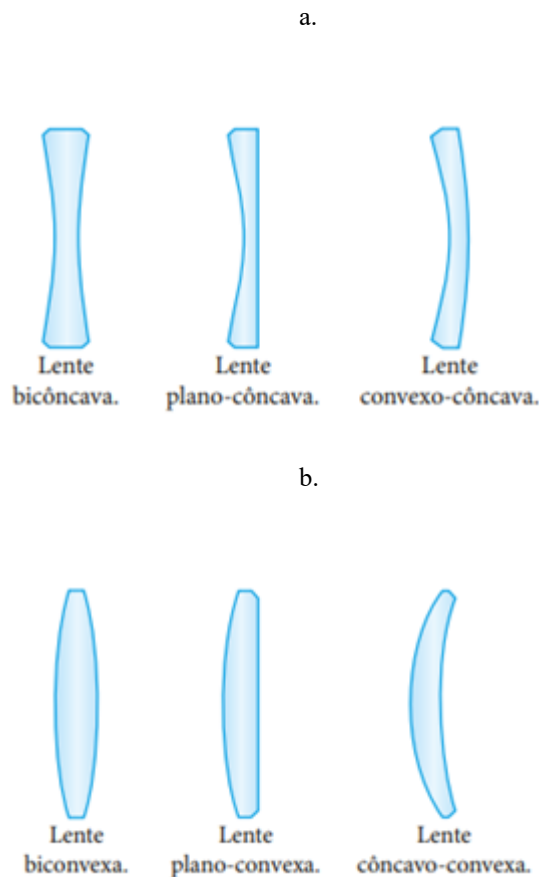
b. Espelho convexo

Esse espelho forma apenas uma espécie de imagem com as seguintes características: **virtual, direita e menor.**

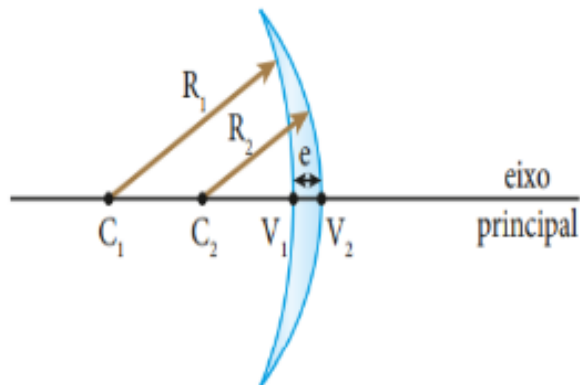
2.4 Lentes Delgadas:

Lentes são formadas por duas superfícies refratoras, uma deve ser esférica e a outra tanto pode ser esférica como plana. São constituídas de vidro, cristal ou acrílico. Quando a distância que separa as superfícies refratoras pode ser desprezada, classifica-as como lente delgadas. Ademais, são agrupadas em lentes de bordas finas ou bordas grossas quando compara-se a espessura da região periférica com a região central [8,9]. Isto é ilustrado pela Figuras 10. Os elementos geométricos de uma lente esférica estão dispostos na Figura 11.

Figura10: lentes de bordas grossas (a) e lentes de bordas finas (b)



Fonte: Villas Bôas, Newton. São Paulo: Saraiva, 2016. p 247.

Figura11: elementos geométricos de uma lente esférica

Fonte: Villas Bôas, Newton. São Paulo: Saraiva, 2016. p 247.

C_1 e C_2 , **centros de curvaturas** das faces da lente.

R_1 e R_2 **raios de curvatura** das faces da lente.

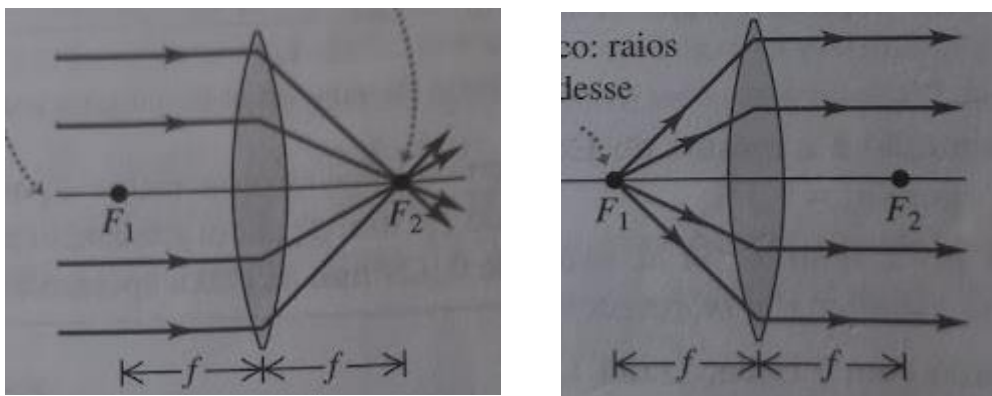
$\overline{C_1 C_2}$, **eixo principal** da lente.

$\overline{V_1 V_2}$, **espessura** da lente.

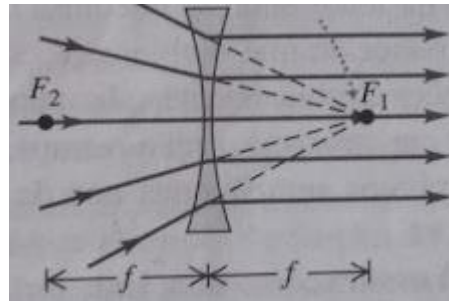
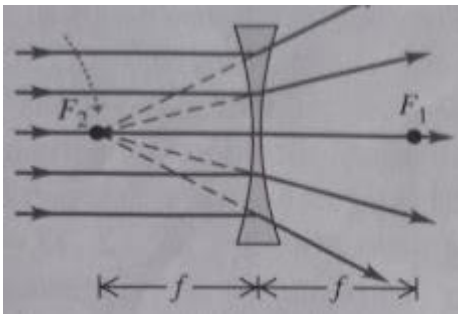
Embora não estejam explícitos na figura acima, ainda existem: F_1 , **primeiro foco**, F_2 , **segundo foco** e f , **distância focal**. **Centro Óptico**: ponto do eixo ótico em que um raio luminoso trafega sem sofrer desvio angular. **Pontos antiprincipais**: pontos onde a distância para o eixo ótico da lente equivale ao dobro de sua distância focal. Se os feixes de luz que passam paralelos ao eixo da lente, são refratados para o outro lado convergindo para F_2 , ademais formando imagem real neste local, tal lente é denominada de lente convergente. Já para lentes divergentes todo raio luminoso paralelo ao eixo da mesma após a incidência é refratado com divergência [8]. As Figuras 12 demonstram o exposto.

Figura 12: lentes delgadas convergentes (a) e divergentes (b)

a.



b.



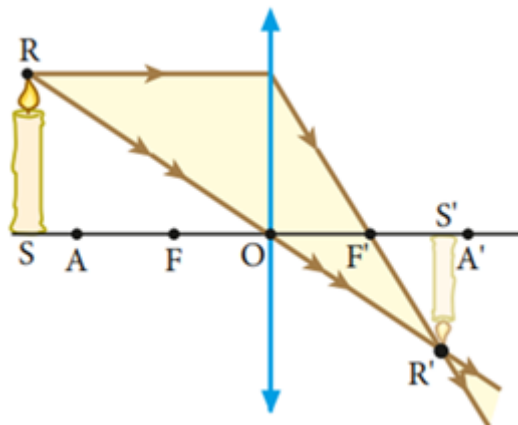
Fonte: Young, Hugh D. São Paulo: Addison Wesley, 2009. p. 52,54.

Conforme um objeto seja posicionado em relação a uma lente convergente há cinco exemplos para a formação de imagens ou apenas um exemplo caso a lente seja divergente [9]. Essas situações são detalhadas na Figura 13.

Figura 13: formação de imagens em lentes delgadas convergentes (a) e divergentes (b)

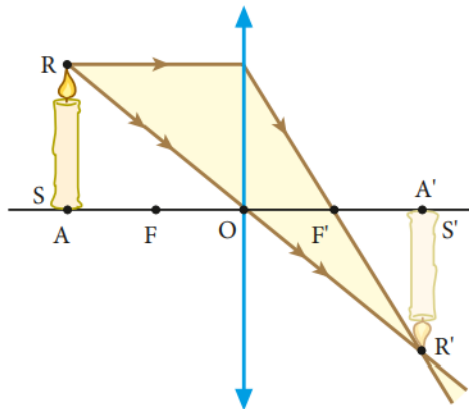
a.

Real, invertida e menor.



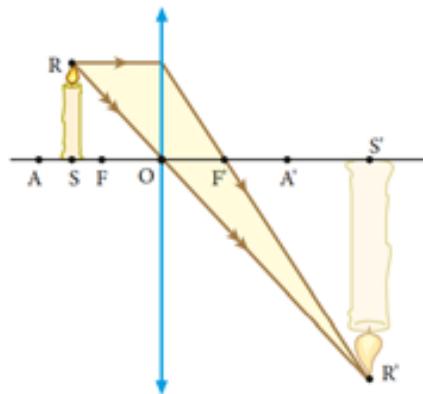
Se o objeto estiver à esquerda do ponto antiprincipal objeto, **A**.

Real, invertida e do mesmo tamanho.



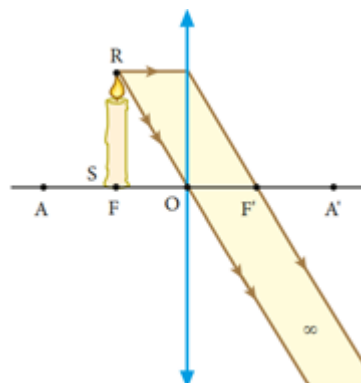
Se o objeto estiver sobre o ponto antiprincipal objeto.

Real, invertida e maior.



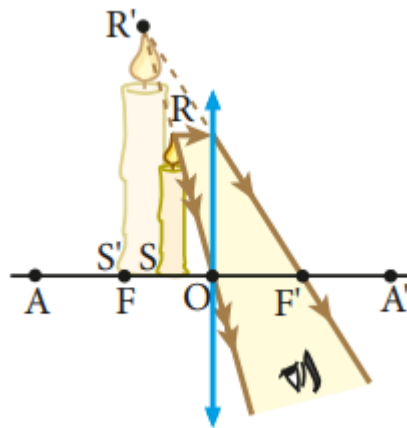
Se o objeto estiver entre o ponto antiprincipal objeto e o primeiro foco, F_1 .

Imprópria.



Se o objeto estiver no primeiro foco, F_1 .

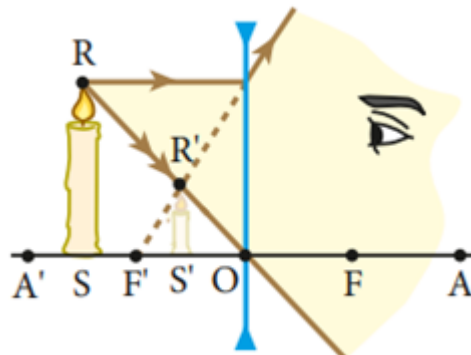
Virtual, direita e maior.



Se o objeto estiver entre primeiro foco, F_1 e o centro óptico.

b.

Virtual, direita e menor.



Fonte: Villas Bôas, Newton. São Paulo: Saraiva, 2016. p 251-242.

2.5 Microscópio Composto:

Os microscópios ou microscópios compostos (Figura 14) são instrumentos óticos que fornecem grandes ampliações angulares, havendo poder de aumento de até 300 vezes [9]. Seus principais elementos são: a lente objetiva que forma uma **imagem real**, a lente ocular a qual produz uma figura **virtual e maior**, enfim, fonte de luz.

Figura 14: microscópio Composto.



Fonte: referência [15].

Para que o dispositivo em questão consiga fornecer o aumento angular dois fatores são levados em conta (Figura 14). O primeiro deles é a ampliação transversal m_1 fornecida pela lente objetiva,

$$m_1 = -\frac{s_1'}{f_1} \quad (3)$$

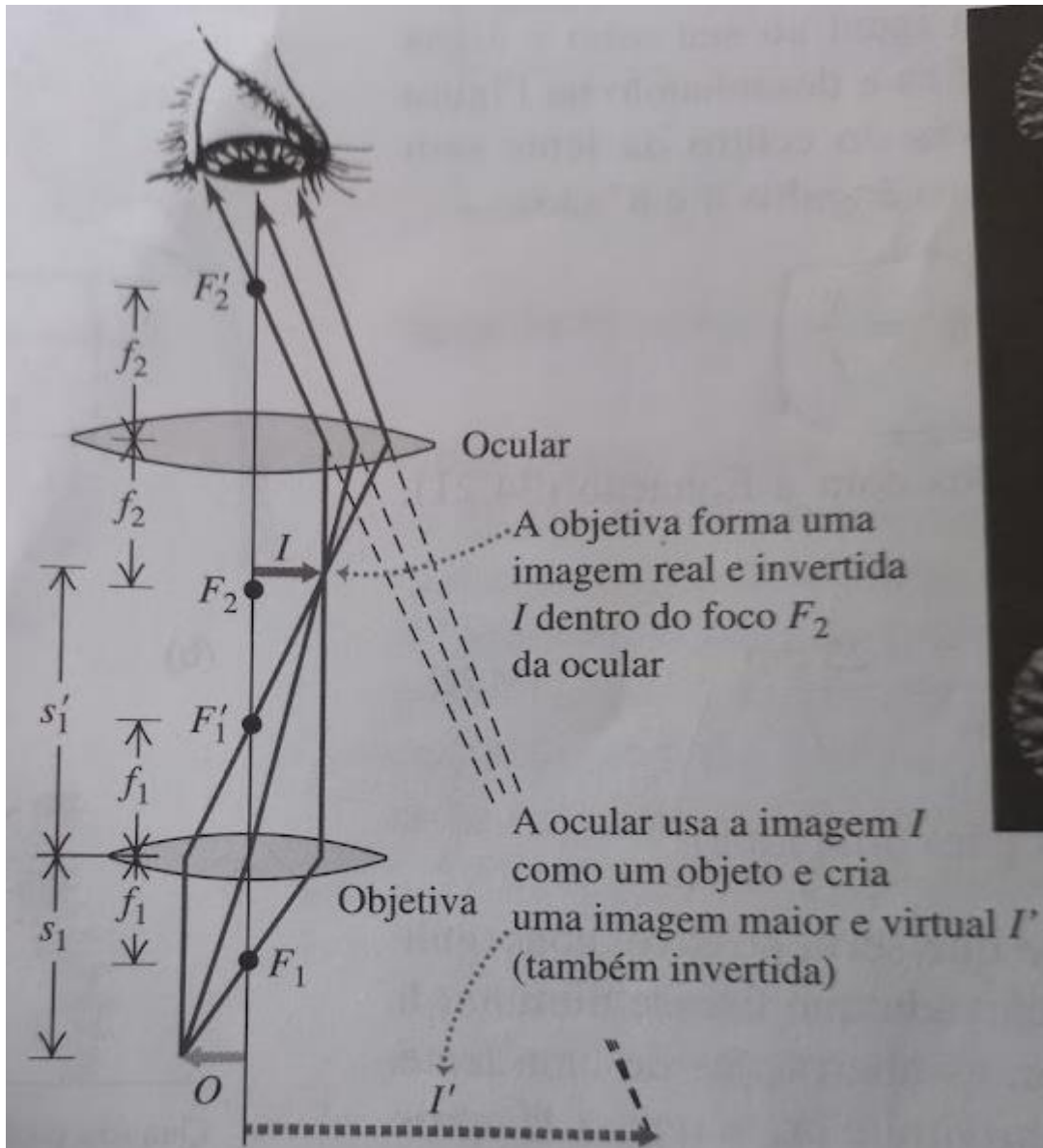
O segundo fator será a ampliação angular M_2 entregue pela lente ocular,

$$m_2 = \frac{25 \text{ cm}}{f_2} \quad (4)$$

O produto destes dois fatores culmina-se na ampliação angular total M fornecida pelo microscópio composto [8],

$$M = \frac{25 \text{ cm} \cdot s_1'}{f_1 f_2} \quad (5)$$

Figura 15: formação de imagem no microscópio composto.



Fonte: Young, Hugh D. São Paulo: Addison Wesley, 2009. p.68.

3 METODOLOGIA:

Para que os objetivos pretendidos com a realização desse trabalho fossem alcançados, utilizou-se da união entre teoria e prática. Como a proposta é trabalhar a Óptica Geométrica no Ensino Médio, selecionou-se doze alunos da segunda série matriculados na Escola de Ensino Estadual Profissionalizante Joaquim Antônio Albano sediada na Rua Júlia Siqueira, 390 – Dionísio Torres, em Fortaleza- CE. (Figura 16)

Figura 16: EEEP Joaquim Antônio Albano.



Fonte: referência [16].

No que concerne à parte teórica foram lecionadas duas aulas expositivas-dialogadas tendo como ponto de partida uma diagnose a fim de conhecer o quanto de Óptica os estudantes já sabiam, além de apresentá-los aos conceitos básicos da Óptica Geométrica. Em seguida os estudantes realizaram seis experimentos [5,6], cuja finalidade permeia a eles vivenciarem os assuntos abordados nas aulas teóricas bem como de prepará-los para a última atividade do projeto: a construção de um microscópio composto simples, além da análise de objetos comuns do cotidiano comparando-os como são suas percepções a “olho nu” e através do aumento angular fornecido pelo dispositivo ora fabricado [7]. Concomitante as essas etapas foram disponibilizados formulários por meio do Google Forms na perspectiva dos

alunos registrarem suas observações como também receber deles um retorno para alguns questionamentos levantados.

4 DESENVOLVIMENTO E RESULTADOS:

A primeira etapa ocorreu com duas aulas teóricas acerca da Óptica geométrica. Para tanto, primeiro foi disponibilizado o seguinte formulário aos discentes:

- 1. O que você compreende por Ótica?*
- 2. Você sabe dar um exemplo de como a Ótica é usada nos consultórios dos dentistas?*
- 3. Você sabe dar um exemplo de como a Ótica é usada no trânsito?*
- 4. Você sabe dar um exemplo de como a ótica possibilitou o estudo das células?*

Pretendia-se avaliar os conhecimentos prévio deles acerca do assunto a ser estudado como também se conheciam aplicabilidades no cotidiano. De outro lado, usou-se uma apresentação de *Slides* com figuras e tópicos. Assim, elucidou-se sobre o conceito de luz, reflexão e refração, espelhos planos, espelhos esféricos, lentes delgadas, o olho humano, a lupa, ademais o microscópio composto. Outro formulário foi disponibilizado. Buscava saber qual o posicionamento deles sobre como o uso de experimentos podem ajudar ou não a assimilação dos conteúdos enquanto sonda o nível de satisfação quanto a aula teórica. O mesmo está disposto logo abaixo:

- 1. Você acredita que experimentos podem ajudá-lo a entender de forma melhor o assunto estudado? Por quê?*

As Tabelas 1 e 2 constam as respostas capturadas dos formulários 1 e 2, respectivamente:

Tabela 1: Respostas do formulário 1.

Pergunta 1:	Pergunta 2:
Não entendo nada sobre ótica.	Espelho odontológico.
Estudo da visão, receptores de cor dos glóbulos oculares, reflexos.	Espelho bucal.
não sei direito, mas, me lembra algo relacionado a reflexo, luz, reflexão.	Não.
Nada.	No espelho odontológico que os próprios dentistas usam.
Visão.	Em consultas.
Visão, olho, tudo. Reflexo compreendo o básico.	Acredito que pelo Espelho Bucal.
Me lembra uma palavra que vem de óculos, lente ou lupa.	Na lupa que eles usam.
Não compreendo muita coisa... Apenas sei adjetivos sobre o assunto.	
Compreendo que seja algo como "efeito" de reflexo, espelhamento ou algo do gênero.	
Algo sobre o estudo da visão, dos reflexos, da luz em geral.	
Visão.	
Trabalha e tem como base a visão.	
Pergunta 3:	Pergunta 4:
O retrovisor.	Com os microscópios e a visão.
Semáforos, retrovisores.	Não sei.
Retrovisor.	Com os microscópios e a visão
Não.	Para fazer os microscópios.
Óculos, retrovisor.	Não sei.
Sim, no trânsito é usada para ver melhor os sinais, pedestres e tudo mais.	Pelo microscópio.
Talvez usado no farol, retrovisor pelo que eu lembre.	Não.
Visão...	Na criação de microscópios.
Através do retrovisor.	Através da utilização de microscópios.
Pelo retrovisor, que dá para ver o reflexo.	Com microscópios.
Retrovisor.	Graças ao avanço da microscopia.
As luzes dos farol, retrovisores, reflexos dos	Possibilitou o estudo das células procariótica e

carros.	eucariótica.
	Usando os aparelhos para ver as células chamado microscópio

Fonte: Autor e alunos participantes do projeto.

Conforme as respostas, é evidente que a maioria dos estudantes conhecem algo bem superficial sobre a Óptica e suas aplicações, mas compreendem que ela está relacionada com o estudo da luz, suas propriedades.

Tabela 2: Respostas do formulário 2.

Pergunta 1:
Sim, pois a prática faz a gente ter uma certeza a mais do conteúdo visto.
Sim. Seria uma aplicação do que foi estudado.
Sim, pois botando em prática a teoria, é possível entender melhor.
Sim, pois você pode ver a teoria na prática de como funciona mesma.
Sim, na prática é objetiva.
Sim, dá pra entender melhor o funcionamento.
Sim, se torna mais dinâmico.
Porque põe em prática a parte teórica, facilitando o entendimento sobre o assunto.
Sim, porque na prática o conteúdo fixa mais.
Sim, pois estarei colocando em prática aquilo que aprendi na prática.
Sim, porque é uma forma de aprender melhor..

Fonte: Autor e alunos participantes do projeto.

Segundo essas respostas é notório o quanto para eles o uso de experimentos facilita a compreensão dos assuntos, o aprendizado, bem como deixa as aulas mais dinâmicas.

A segunda parte foi desenvolvida por meio de seis experimentos realizados em quatro aulas distribuídas em dois dias. Parte dos materiais foram trazidos pelo autor do trabalho enquanto que apenas um kit de reflexão da luz e de espelhos planos foi emprestado pelo professor Nildo Loila Dias do laboratório de Óptica do Departamento de Física da UFC. A sequência adotada é: primeiro cita-se os materiais necessários para realizar os experimentos,

demonstra-se como os faz. Depois, os alunos executam-nos. Enfim, explica-se a parte teórica relacionada com aquela experiência. Por sua vez, eles anotam as explicações no roteiro que receberam.

O experimento I [6] tratou de comprovar a lei da reflexão de que o ângulo de incidência é idêntico ao ângulo de reflexão. Os materiais necessários para fazer o experimento são: um espelho, um laser, um disco graduado. Coloca-se o espelho no centro do disco graduado e sobre a linha vertical. Ao fazer a luz emitida pelo laser incidir no espelho olha-se com qual ângulo θ ela está incidindo. Depois, olha-se o ângulo de reflexão está idêntico a θ . A Figura 17 demonstra a sua composição.

Figura 17: experimento I.

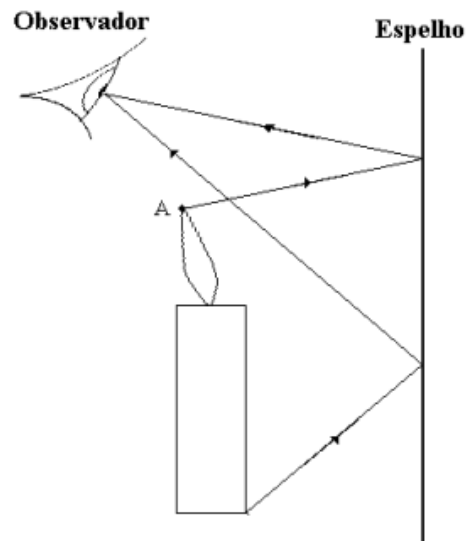


Fonte: Próprio autor.

O segundo e terceiro experimentos buscaram demonstrar a propriedade dos espelhos planos de formarem imagens cuja distância à imagem é a mesma distância que o objeto encontra-se do espelho. Os materiais são [6]: espelho plano semitransparente em acrílico, caneta e retrato de uma vela (Figura 18). Coloca-se o espelho alinhado com a linha vertical. Em seguida usando a caneta e olhando para a imagem formada no espelho faz-se o desenho

da mesma. A Figura 19 demonstra primeiro uma estudante realizando a prática e depois o desenho feito.

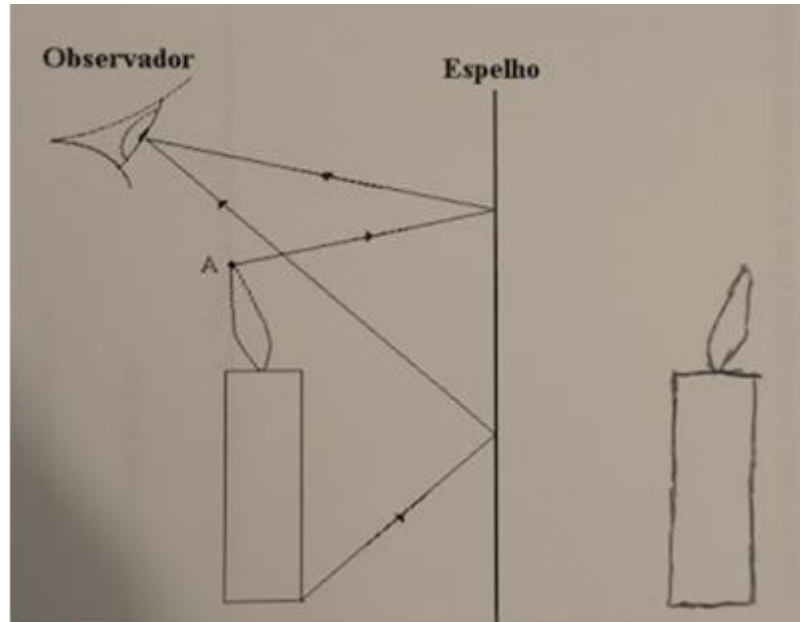
Figura 18: vela.



Fonte: Loiola Dias, Nildo. Instituto UFC Virtual, Universidade Federal do Ceará.

Figura 19: experimento II.





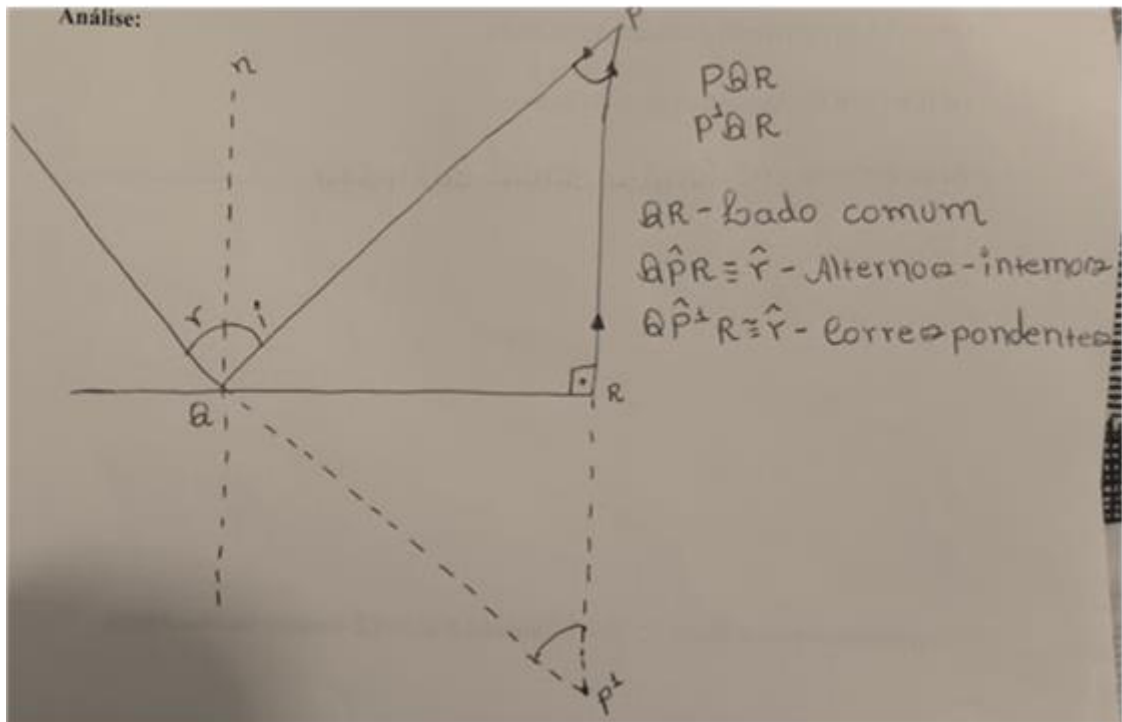
Fonte: autor e alunos participantes do projeto.

O experimento 3 (Figura 20) [5] têm como materiais: espelho plano, trena e dois objetos quaisquer desde que sejam iguais. Põe-se um dos objetos na frente do espelho. Com o uso da trena mede-se essa distância. O outro objeto deve ser posto atrás do espelho com a mesma distância do primeiro. Observar-se-á que a imagem do objeto 1 formada pelo espelho está na mesma posição que o segundo objeto. Os materiais semelhantes selecionados foram duas massas de cem gramas.

Figura 20: experimento III

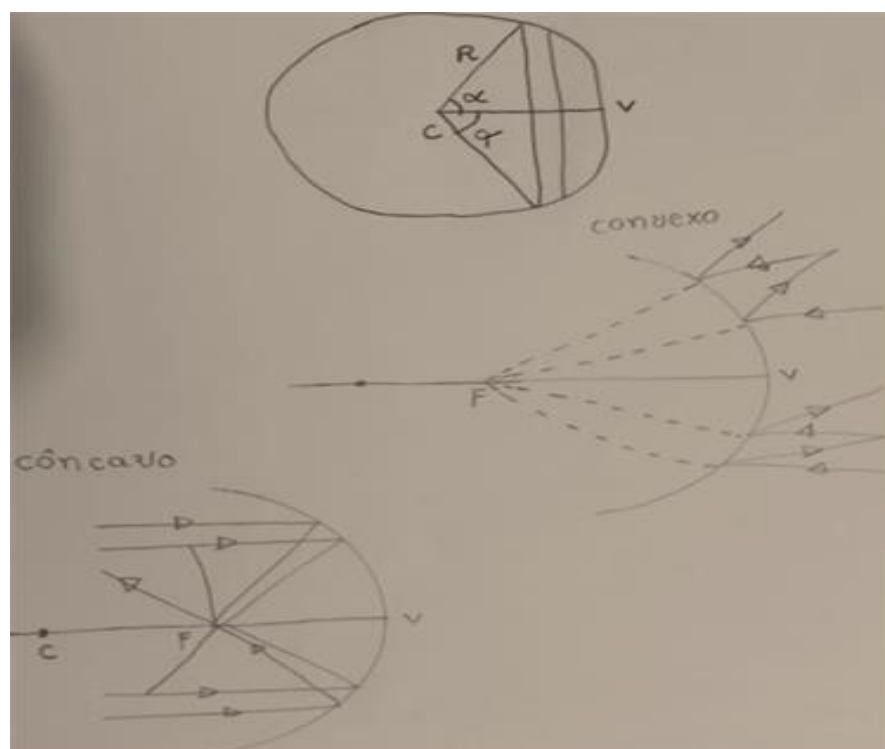






Fonte: autor e alunos participantes do projeto.

O quarto experimento [5] (Figura 21) versa em estudar o comportamento dos raios luminosos quando estes incidem em espelhos esféricos côncavos e convexos. Os itens necessários são: lanterna, pente, colher grande ou concha metálica bem polida. O prosseguimento para tais experimentos são: colocar o pente frente a lanterna de modo que a luz incidente passe pelos seus dentes e cheguem a colher. No objeto côncavo os raios refletidos convergem enquanto que no convexo eles divergem. O mesmo observa-se com a concha metálica. Sua parte interna assemelha-se a um espelho côncavo e a externa como um espelho convexo.

Figura 21: experimento IV

Fonte: autor e alunos participantes do projeto.

O quinto experimento [5] (Figura 22) é voltado para a formação de imagens por espelhos côncavos e convexos. Além da colher metálica usa-se de fato um espelho côncavo e outro convexo. Os estudantes posicionam a colher metálica cuja a parte interna está voltada para eles, olham para o espelho côncavo na distância máxima que conseguirem em relação aos seus olhos. Quando aproximam a colher ou o espelho deles mesmos, vão percebendo que inicialmente a imagem de seus rostos estão invertidos e menores, depois é aumentada, some e surge novamente, mas agora direita e maior. No momento posterior, os jovens utilizaram a parte externa da colher voltada para eles bem como um espelho convexo. Perceberam que independente da distância a imagem formada apresenta sempre a mesma forma.

Figura 22: experimento V.







Fonte: autor e alunos participantes do projeto.

No sexto experimento [5] (Figura 23) trabalhou-se com lentes esféricas delgadas convergentes e divergentes. As etapas permeiam conforme o experimento anterior, salvo que em vez deles observarem a imagem de seus rostos usaram uma caneta como objeto. Para a lente esférica convergente, conforme aproximavam a caneta da mesma, notaram diferentes características nas imagens formadas, enquanto para a lente divergente a imagem permaneceu sempre com as mesmas características, independente da distância entre a caneta para com a lente.

Figura 23: Experimento VI.

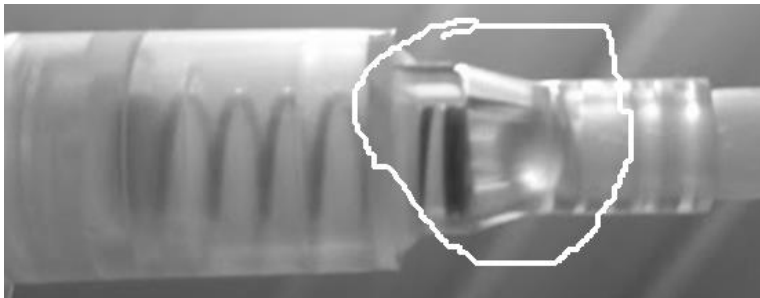


Fonte: próprio autor.

Para esses dois últimos experimentos entregou-se aos alunos um material em PDF, o qual expõe os cinco casos de formação de imagens para espelhos côncavos e lentes convergentes bem como uma única possibilidade relacionada aos espelhos convexos, mas também lentes divergentes.

A última etapa culminou na fabricação de um microscópio caseiro simples [7]. Os materiais utilizados estão dispostos a seguir: lente esférica de vidro encontrada em válvulas de embalagens para sabonetes líquidos ou hidratantes corporais (Figura 24), papelão, régua, estilete, palito de dente roliço, grampo de papel, prendedor de roupas, fita adesiva e laminas para microscópios. Estas encontradas no laboratório de ciências da presente instituição

Figura 24: Válvula de embalagem.



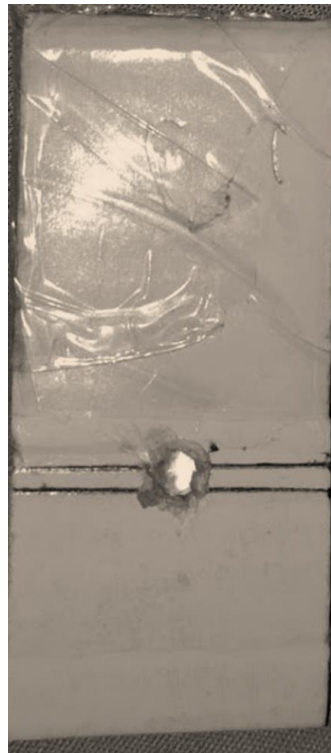
Fonte: próprio autor.

Em busca de construir tal equipamento é necessário dimensionar no papelão as dimensões que se queira. Neste trabalho foi adotado 12 cm por 6 cm e a construção foi realizada com o auxílio de uma régua e lápis. Na sequência retira da válvula de embalagem a lente esférica, afere seu diâmetro com o uso também da régua. A lente esférica selecionada apresenta diâmetro de 4 mm. Corta-se o papelão conforme a área escolhida e depois dobra-o. Quando esta etapa ocorre têm as seguintes grandezas: 6 cm por 3 cm. Próximo a parte superior do papelão, ademais tendendo para a região central faz um furo quadrado com o papelão dobrado e de diâmetro inferior ao da lente, pois evita de a mesma escorregar quando estiver realizando as medidas. Abre o papelão, insere a lente no orifício aberto, a fim de garantir uma segurança maior, grampeia um dos lados do dispositivo próximo a lente com grampo de papel. Dobra-o, envolve-o com fita adesiva. A lamínula pode ser grudada ao microscópio com um prendedor de roupas com o objetivo de facilitar o manuseio. O palito de dente pode ser usado com a finalidade de controlar a distância entre a amostra, mas também dar uma ênfase na imagem formada. Diferente de um Microscópio Composto esse apresenta apenas uma lente, a objetiva que fornece de acordo com a referência [7] uma ampliação de 88 vezes. A Figura 25 representa algumas etapas da construção do microscópio caseiro pelos alunos além do produto já finalizado.

Figura 25: construção do microscópio caseiro simples (a) e microscópio caseiro simples (b).

a.





Fonte: autor e alunos participantes do projeto.

As amostras escolhidas por meio dos participantes foram: folhas de mato (Figura 26), papelão cortado (Figura 27), marcador de página (Figura 28). Eles estudaram-nas quando elas são observadas através do microscópio caseiro.

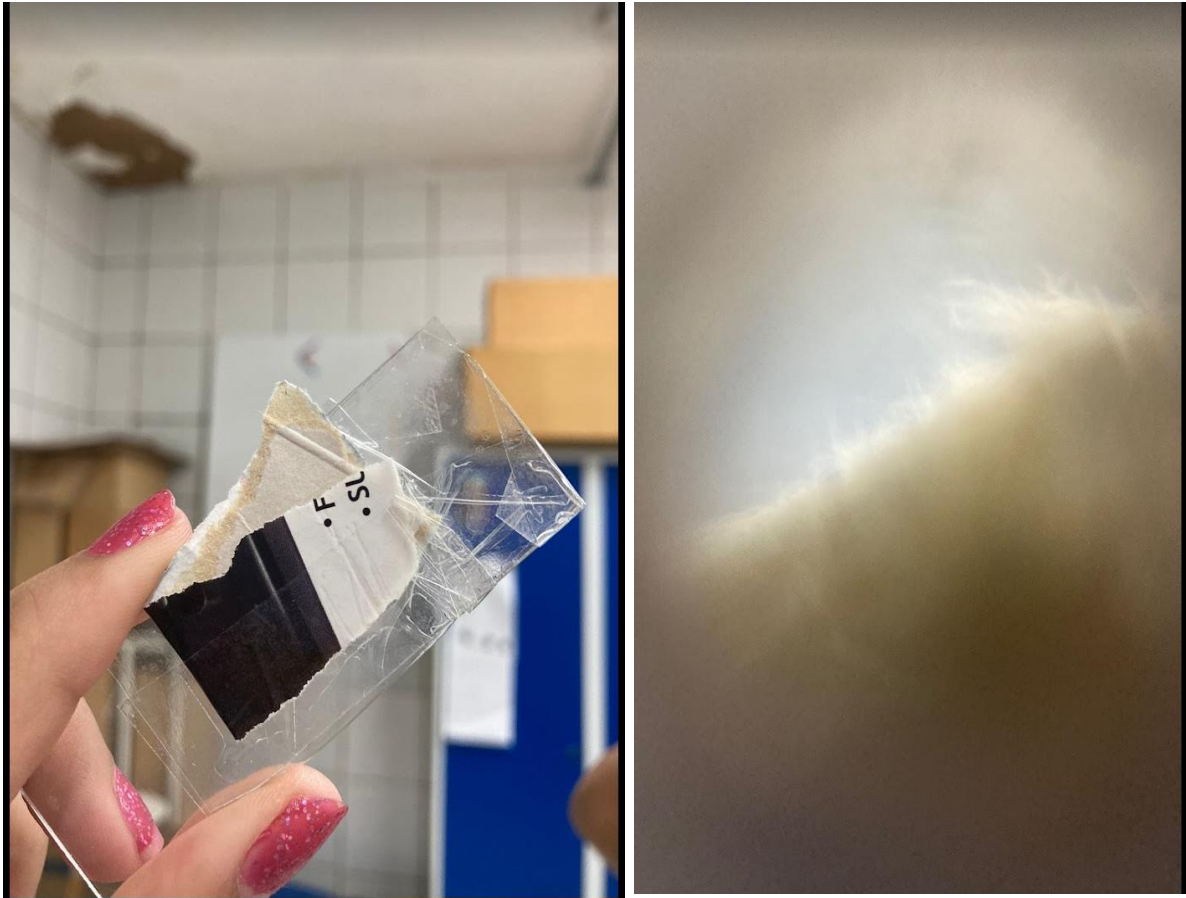
Figura 26: folhas de mato.



Fonte: aluno participante do projeto.

Escolhemos primeiramente uma folha, que a "olho nu" parecia totalmente lisa e escura, mas quando vimos a imagem através do microscópio, podemos ver vários pontinhos brancos e um verde mais vivo.

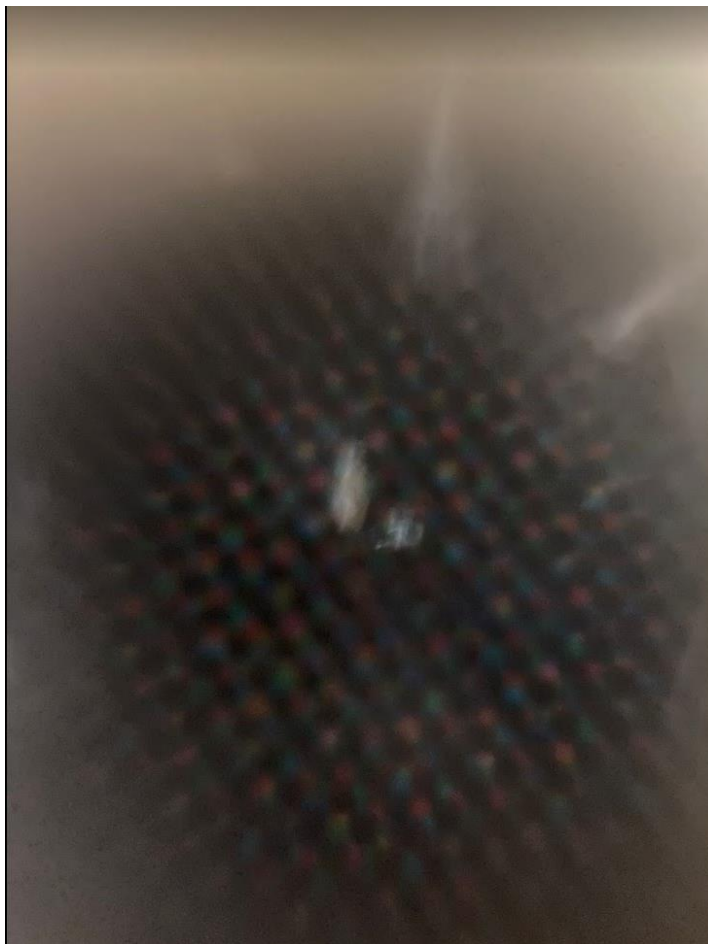
Figura 27: papelão cortado.



Fonte: aluno participante do projeto.

Folha de papel rasgada, que a "olho nu" parecia apenas fissurada, mas quando vimos a imagem através do microscópio, podemos ver várias de suas fibras.

Figura 28: marcador de página.



Fonte: aluno participante do projeto.

Marcador de página, que a "olho nu" parecia totalmente escura, mas quando vimos a imagem através do microscópio, podemos ver vários pontinhos de diversas cores como azul, vermelho e um verde.

4 CONCLUSÃO

A proposta deste trabalho foi levar conceitos básicos da Óptica Geométrica aos alunos de Ensino Médio por meio de aulas teóricas, mas também da realização de experimentos. Os objetivos foram alcançados pois, com as aulas teóricas os estudantes assimilaram os conceitos-propriedades de reflexão e refração da luz, como um espelho plano forma uma imagem, os espelhos esféricos côncavos e convexos, lentes convergentes, divergentes e o funcionamento do microscópio composto simples. Tudo isso, amplificado por meio da realização dos experimentos, da construção do microscópio caseiro simples, bem como as análises desenvolvidas por eles.

REFERÊNCIAS

- [1] MANNHEIMER, Walter A. **Microscopia dos Materiais**. Rio de Janeiro: E-papers, 2002.
- [2] NUSSENZVEIG, Herch Moysés. **Curso de Física Básica**. 1.ed. São Paulo:Blucher, 1998. v.4.
- [3] GLOBO COMUNICAÇÃO E PARTICIPAÇÕES S.A.G1.Cidade passa a receber luz do sol após instalar espelhos em montanha. Disponível em: <https://g1.globo.com/mundo/noticia/2013/10/cidade-passa-receber-luz-do-sol-apos-instalar-espelhos-em-montanha.html> Acesso em: 17 jun. 2022.
- [4] JORNAL DA USP.Terapia fotodinâmica: a luz que pode ajudar no tratamento do câncer de pele. Disponível em: <https://jornal.usp.br/ciencias/ciencias-exatas-e-da-terra/terapia-fotodinamica-a-luz-que-pode-ajudar-no-tratamento-do-cancer-de-pele/>. Acesso em: 14 jul. 2022.
- [5] PERUZZO, Jucimar. **Experimentos da física básica: termodinâmica, ondulatória e óptica**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2012.
- [6] LOIOLA DIAS, Nildo. Instituto UFC Virtual, Universidade Federal do Ceará.
- [7] DIOGO Soga et al. Um Microscópio Caseiro Simplificado. **Revista Brasileira do Ensino de Física**, v.39, n. 4, e4506, 2017.
- [8] YOUNG, Hugh D. **Física IV: ótica e física moderna**.12º ed. São Paulo: Addison Wesley, 2009.
- [9] VILLAS Bôas, Newton. **Física: termologia, ondulatória, óptica**. 3. ed. São Paulo: Saraiva. 2016. v.2.
- [10] UNIVERSIDADE DO PORTO. Disponível em:<https://def.fe.up.pt/fisica3/ondas2/index.html>. Acesso em:16 jun. 2022.
- [11] HISTÓRIA DAS ARTES.Disponível em: <https://www.historiadasartes.com/sala-dos-professores/narciso-caravaggio/>. Acesso em: 21 jun. 2022.
- [12] UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL. Disponível em: <http://www.if.ufrgs.br/tex/fis01043/20022/Antonio/assunto2.htm>. Acesso em: 21 jun. 2022.
- [13] TERUMA. Disponível em: <https://teruma.com.br/produtos/espelho-jateado-com-led>. Acesso: 24 jun. 2022.
- [14] BRASIL ESCOLA. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/fisica/espelhos-planos.htm>. Acesso em: 27 jun. 2022.
- [15] PREPARA ENEM. Disponível em: <https://www.preparaenem.com/fisica/microscopio-composto.htm>. Acesso em: 03 jun. 2022.

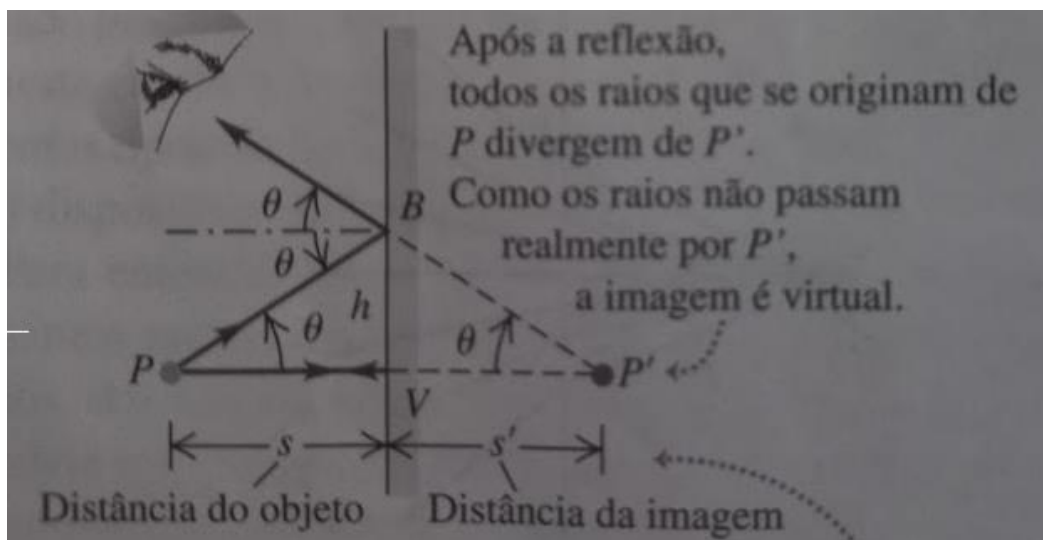
[16] GOOGLE MAPS. Disponível em:

<https://www.google.com.br/maps/uv?pb=!1s0x7c748ea35637fef%3A0x7eb2e63b55439b21!3m1!7e115!4shttps%3A%2F%2Flh5.googleusercontent.com%2Fp%2FAF1QipNAG1N4VzbdofTtTMH9ngdw84GF9lewpt9Zxscyu%3Dw284-h160-k-no!5seeep%20joaquim%20ant%C3%B4nio%20albano%20-%20Pesquisa%20Google!15sCgIgAQ&imagekey=!1e2!2sP8phAOVKMV1SLs9QnTVROA&hl=pt-BR&sa=X&ved=2ahUKEwiNrOyegf74AhXlq5UCHet2AzUQoip6BAhAEAM>. Acesso em: 21 jun. 2022.

APÊNDICE A – FORMAÇÃO DE IMAGENS EM ESPELHOS PLANOS

Nota-se um ponto P (Figura 29). Dele emana dois raios luminosos que incidem no espelho plano: PB e PV . Estes formam um ângulo θ , são refletidos com o mesmo ângulo em relação a normal. O prolongamento deles para trás do espelho faz com que os mesmos se cruzem em um ponto P' . Neste local, forma-se a imagem virtual do ponto P . Ainda na Figura 29, tome s como a distância do ponto P ao espelho e s' como distância da imagem de P ao espelho. Como a linha que une os pontos P e P' são perpendiculares ao espelho, ademais o ângulo θ de incidência é semelhante ao de reflexão pode-se concluir que os triângulos \widehat{BPV} e $\widehat{BP'V}$ são congruentes. Portanto, a distância P e P' são iguais em relação ao espelho. Esta análise considerou um objeto pontual, logo não possui nenhuma dimensão.

Figura 30: construção de imagem no espelho plano.



Fonte: Young, Hugh D. São Paulo: Addison Wesley, 2009. p.38.

APÊNDICE B – FORMAÇÃO DE IMAGENS EM ESPELHOS ESFÉRICOS

Para que espelhos esféricos formem imagens nítidas, é necessário que os mesmos apresentem pequena abertura angular, assim os raios refletidos formam com o eixo principal ângulos pequenos e medidos em radianos, mas também cruzam o eixo principal em apenas um ponto. Esses raios são chamados de aproximação paraxial e permitem simplificar os ângulos conforme exposto na Equações 4

$$\sin(\Theta) = \Theta - \frac{\Theta^3}{3!} + \dots \approx \Theta \cos(\Theta) = 1 - \frac{\Theta^2}{2!} + \dots \approx 1 \tan(\Theta) = \Theta + \frac{\Theta^3}{3} + \dots \approx \Theta \quad (6)$$

A Figura 31 é um suporte que permite deduzir a equação para formação de imagens por espelhos esféricos. Por meio dela, infere-se: $QV \equiv q$. $PV \equiv p$.

P emana um raio luminoso PS que forma um ângulo Θ com o eixo principal e é incidido pelo espelho com um ângulo Θ_1 . É refletido em Q com este mesmo ângulo. A Lei dos Senos aplicada no $\triangle CSP$ permite escrever a seguinte relação:

$$\frac{p - R}{\sin(\Theta_1)} = \frac{R}{\sin(\Theta)} \quad (7)$$

Através dos ângulos internos em um triângulo e observando $\triangle SQP$ tem que $\pi - (\Theta + 2\Theta_1)$.

Com isto e a Lei dos senos tem:

$$\frac{R - q}{\sin(\Theta_1)} = \frac{R}{\sin(\Theta + 2\Theta_1)} \quad (8)$$

Levando em conta a condição de raios paraxiais as duas equações acima tornam-se respectivamente:

$$\frac{p - R}{R} \cong \frac{\Theta_1}{\Theta} \quad (9)$$

$$\frac{R - q}{R} \cong \frac{\Theta_1}{\Theta + 2\Theta_1} = \frac{\frac{\Theta_1}{\Theta}}{1 + 2\frac{\Theta_1}{\Theta}} \quad (10)$$

ao substituir 1 em 2 tem-se:

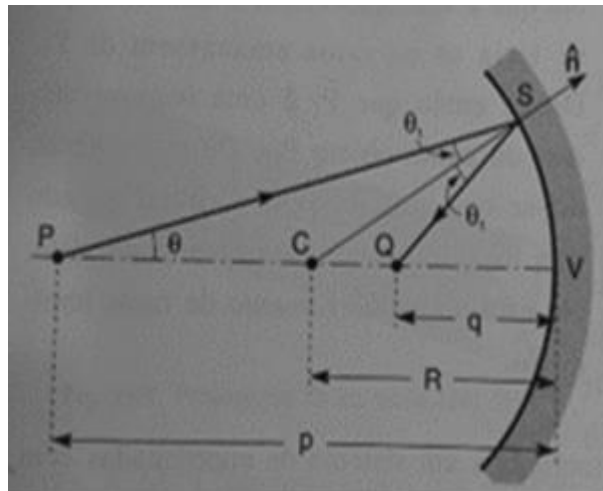
$$\frac{q}{R} = \frac{\frac{p}{R}}{-1 + 2\frac{p}{R}} \rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R} \quad (11)$$

entre o vértice do espelho e seu centro de curvatura existe o foco do espelho, ponto onde os raios incidentes paralelos convergem (Figura 32). A distância do foco para o espelho, designada por f é [2] $\frac{R}{2}$

assim, a Equação 3 pode ser reescrita como

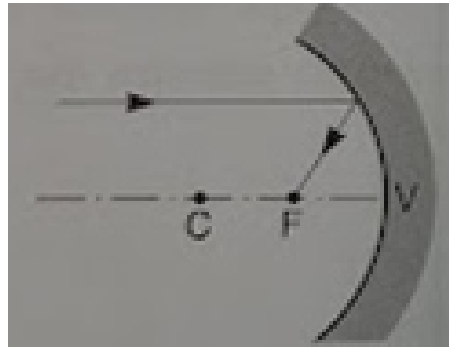
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad (12)$$

Figura 31: construção de imagens em espelhos esféricos.



Fonte: Nussenzveig, Herch Moysés. São Paulo: Blucher, 1998.p 18.

Figura 32: foco de um espelho esférico.



Fonte: Nussenzweig, Herch Moisés. São Paulo: Blucher, 1998, p 20.

APÊNDICE C – FORMAÇÃO DE IMAGENS EM LENTES DELGADAS

A equação que governa como ela está relacionada com a distância do material e distância focal da lente é deduzida com o auxílio da figura 33.

Figura 33: formação de imagem em uma lente delgada.

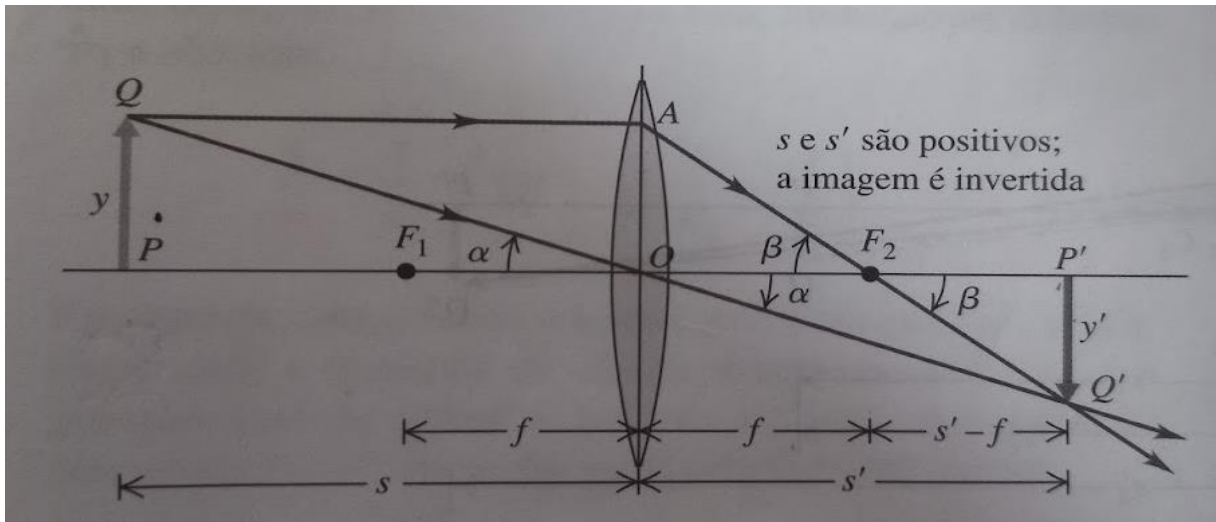


Figura 33. Fonte: Young, Hugh D. São Paulo: Addison Wesley, 2009. p.53.

Considera-se: s , distância do objeto e s' distância imagem. Os dois ângulos α e β são idênticos. Ademais, o raio luminoso **QA** é paralelo ao eixo óptico antes de ser refratado, após passar pelas lentes viaja pelo segundo foco **F₂**. O raio **QQQ'** desloca-se pelo centro da lente, é refratado, mas não sofre nenhum desvio porque supõem-se que as duas superfícies responsáveis por formar a lente são tão próximas, ademais paralelas. Aliado a estes fatores, a semelhança de triângulos permite as seguintes observações:

PQO e **P'Q'O** são triângulos retângulos, logo

$$\frac{y}{s} = -\frac{y'}{s'} \rightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \quad (13)$$

OAF_2 e $P'Q'F_2$ são triângulos retângulos, logo

$$\frac{y}{f} = -\frac{y'}{s' - f} \rightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{s' - f}{f} \quad (14)$$

Igualando as equações 11 e 12, dividindo por s' , mas também usando da Álgebra tem [7]:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad (15)$$