



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
INSTITUTO UFC VIRTUAL**

**CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA**

**ALLISSON GUILHERME MOREIRA DE PAULA**

**ABORDAGEM INTRODUTÓRIA DA EQUAÇÃO DE CONDUÇÃO DO CALOR  
LINEAR E NÃO LINEAR**

**RUSSAS, CE  
2020**

ALLISSON GUILHERME MOREIRA DE PAULA

ABORDAGEM INTRODUTÓRIA DA EQUAÇÃO DE CONDUÇÃO DO CALOR LINEAR  
E NÃO LINEAR

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado à Universidade Federal do  
Ceará, como parte dos requisitos para  
obtenção do título de licenciado em  
Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Anderson Feitoza  
Leitão Maia.

RUSSAS

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

M836a Moreira de Paula, Allisson Guilherme.

Abordagem introdutória da equação de condução do calor linear e não linear / Allisson  
Guilherme Moreira de Paula. – 2020.  
50 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Instituto  
UFC Virtual, Curso de Matemática, Fortaleza, 2020.

Orientação: Prof. Dr. Anderson Feitoza Leitão Maia.

1. Equação do calor. 2. Lei de Fourier. 3. Separação de Variáveis. I. Título.

CDD 510

---

ALLISSON GUILHERME MOREIRA DE PAULA

ABORDAGEM INTRODUTÓRIA DA EQUAÇÃO DE CONDUÇÃO DO CALOR LINEAR  
E NÃO LINEAR

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado à Universidade Federal do  
Ceará, como parte dos requisitos para  
obtenção do título de licenciado em  
Matemática.

Aprovado em: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_\_\_.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Anderson Feitoza Leitão Maia (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Jorge Carvalho Brandão  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus, pela força e persistência que o Senhor me deu, de tal modo que fez tudo tornar-se possível até aqui.

Em segundo, sou extremamente grato à Leidiana Sousa, minha namorada, por ter-me sido essencial em todas as etapas do curso, me enchendo de força de vontade e de ânimo, sempre com ótimas palavras e sempre me apoiando.

Agradeço também à instituição da Universidade Federal do Ceará, por também colaborar, dotada de ótimas didáticas e, melhores ainda, professores, torna possível o sonho acadêmico para muitas pessoas.

Sou grato a todo o corpo docente que acompanhou toda a minha caminhada durante o curso, em especial ao professor Francisco Júnior Holanda Gadelha, coordenador do pólo, por tanto apoiar e se mobilizar para que fosse tudo possível, além deste, tenho a necessidade de ressaltar algumas personalidades também especiais.

Devo grandes agradecimentos ao meu orientador professor doutor Anderson Feitoza Leitão Maia, não só pelas ótimas orientações e ensinamentos, mas também pela paciência e acompanhamento nesta última etapa, mostrando-me sempre que tudo é possível e devidamente simples, independente das condições de contorno da situação.

Também preciso ressaltar minha grande gratidão ao professor e tutor presencial Luís Fernando de Araújo, por ter sido um dos pilares centrais que estruturou o curso para minha turma até onde foi possível, sempre se mobilizando de todas as maneiras possíveis a fim que tudo pudesse ser realizado da melhor forma.

Agradeço também às grandes amizades que tenho e que conquistei neste caminho, acredito que tudo é possível com o apoio sincero de amigos.

Por fim, tenho infinita gratidão à minha mãe, Evileuda Firmiano, por sê-la, com toda sua humildade e carinho, sempre me apoiou e me deu forças pra continuar com fé e vontade.

“O estudo profundo da natureza é a fonte  
mais rica de descobertas matemáticas”  
(Jean Baptiste Joseph Fourier)

## RESUMO

A equação da condução do calor é uma Equação Diferencial Parcial (EDP) que deduz o comportamento do fenômeno de propagação do calor em processo de difusão em sólidos, de modo que, por meio dela, torna-se possível aferir a variação da temperatura em diferentes posições do sólido, em função da variação do tempo de difusão do calor. Além da objetividade de modelar o fenômeno de difusão do calor, esta equação também tem bastante influência em outros campos da ciência, sendo também utilizada na matemática, na estatística, na mecânica, engenharia civil, etc. O presente trabalho busca abordar a equação da condução do calor homogênea e a deduzir a partir dos estudos sintetizados inicialmente por Jean Baptiste Joseph Fourier. Além das devidas deduções da equação e exemplificação de aplicação da mesma, será demonstrado também o método de obtenção da solução clássica da equação da condução do calor homogêneo unidimensional através do método de Separação de Variáveis, para as condições de contorno de Dirichlet, com temperaturas fixas nas extremidades e para as condições de contorno de Neumann, com derivadas do fluxo de calor fixas nas extremidades.

**Palavras-chaves:** Equação do calor, Lei de Fourier, Separação de Variáveis.

## **ABSTRACT**

The heat conduction equation is a Partial Differential Equation (PDE) that deduces the behavior of the heat propagation phenomenon in the process of diffusion in solids, so that, through it, it is possible to measure the temperature variation in different positions of the solid, depending on the variation of the heat diffusion time. In addition to the objectivity of modeling the phenomenon of heat diffusion, this equation also has a lot of influence in other fields of science, being also used in mathematics, statistics, mechanics, civil engineering, etc. The present work seeks to approach the equation of homogeneous heat conduction and to deduce from the studies synthesized initially by Jean Baptiste Joseph Fourier. In addition to the appropriate deductions from the equation and exemplification of its application, the method of obtaining the classic solution of the one-dimensional homogeneous heat conduction equation through the Variable Separation method will also be demonstrated for the Dirichlet boundary conditions, with fixed temperatures at the ends and for the Neumann boundary conditions, with heat flow derivatives fixed at the ends.

**Keywords:** Heat equation, Fourier's Law, Separation of Variables.



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EDP	Equação Diferencial Parcial
EDO	Equação Diferencial Ordinária

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\alpha$	Coeficiente de difusividade térmica
$u$	Temperatura
$u_t$	Derivada de primeira ordem de $u$ em relação a $t$
$u_{xx}$	Derivada de segunda ordem de $u$ em relação a $x$
$K$	Condutividade térmica
$c_e$	Calor específico
$C$	Capacidade térmica
$Q$	Quantidade de calor total
$q$	Quantidade de calor na posição
$q_{rec}$	Quantidade de calor recebida
$q_{ced}$	Quantidade de calor cedida
$t$	Tempo
$h$	Coeficiente de condutividade externa
$\rho$	Densidade
$\alpha$	Coeficiente de difusividade térmica
$T'(t)$	Derivada de primeira ordem em relação a $t$
$X''(x)$	Derivada de segunda ordem em relação a $x$
$\lambda$	Constante de separação
$u(x, t)$	Temperatura $u$ , na posição $x$ , no instante $t$
$\frac{\partial u}{\partial t}$	Variação da temperatura em relação ao tempo
$\frac{\partial u}{\partial x}$	Derivada de primeira ordem de $u$ em relação a $x$
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	Derivada de segunda ordem de $u$ em relação a $x$

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>ESTUDO INICIAL</b> .....	<b>14</b>
<b>2.1</b>	<b>Definições preliminares</b> .....	<b>14</b>
<b>2.1.1</b>	<b>Condutividade térmica</b> .....	<b>14</b>
<b>2.1.2</b>	<b><i>Equação Fundamental da Calorimetria</i></b> .....	<b>14</b>
<b>2.1.3</b>	<b><i>Equações Diferenciais Parciais (EDPs)</i></b> .....	<b>15</b>
<b>2.1.4</b>	<b><i>Lei de Fourier</i></b> .....	<b>15</b>
<b>2.1.5</b>	<b><i>Equação do fluxo de calor</i></b> .....	<b>16</b>
<b>2.1.6</b>	<b><i>Princípio da Superposição Generalizado</i></b> .....	<b>16</b>
<b>2.2</b>	<b>Teoremas essenciais</b> .....	<b>16</b>
<b>3</b>	<b>HISTÓRICO DA EQUAÇÃO</b> .....	<b>18</b>
<b>3.1</b>	<b>Uma breve contextualização</b> .....	<b>18</b>
<b>3.2</b>	<b>Formulações antecedentes da equação da condução do calor</b> .....	<b>19</b>
<b>4</b>	<b>AS EQUAÇÕES DO CALOR</b> .....	<b>22</b>
<b>4.1</b>	<b>Equação do calor linear</b> .....	<b>22</b>
<b>4.2</b>	<b>Equação do calor em sólidos tridimensionais</b> .....	<b>25</b>
<b>5</b>	<b>RESOLUÇÕES DA EQUAÇÃO</b> .....	<b>31</b>
<b>5.1</b>	<b>Denotação da equação do calor unidimensional</b> .....	<b>31</b>
<b>5.2</b>	<b>Método de Separação de Variáveis</b> .....	<b>31</b>
<b>5.3</b>	<b>Condições de contorno de Dirichlet</b> .....	<b>33</b>
<b>5.3.1</b>	<b>Condições de contorno de Dirichlet caso <math>\lambda &gt; 0</math></b> .....	<b>34</b>
<b>5.3.2</b>	<b>Condições de contorno de Dirichlet caso <math>\lambda = 0</math></b> .....	<b>35</b>
<b>5.3.3</b>	<b>Condições de contorno de Dirichlet caso <math>\lambda &lt; 0</math></b> .....	<b>35</b>
<b>5.4</b>	<b>Condições de contorno de Neuman</b> .....	<b>38</b>
<b>5.4.1</b>	<b>Condições de contorno de Neumann caso <math>\lambda &gt; 0</math></b> .....	<b>40</b>
<b>5.4.2</b>	<b>Condições de contorno de Neumann caso <math>\lambda = 0</math></b> .....	<b>41</b>
<b>5.4.3</b>	<b>Condições de contorno de Neumann caso <math>\lambda &lt; 0</math></b> .....	<b>42</b>
<b>6</b>	<b>APLICAÇÕES DA EQUAÇÃO</b> .....	<b>46</b>
<b>6.1</b>	<b>Aplicações na engenharia civil</b> .....	<b>46</b>
<b>6.1.1</b>	<b><i>Transferência de calor em paredes compostas por tijolos maciços</i></b> ....	<b>46</b>
<b>6.1.2</b>	<b><i>Distribuição da temperatura em estruturas metálicas</i></b> .....	<b>47</b>
<b>6.2</b>	<b>Aplicações na geologia</b> .....	<b>48</b>

<b>6.2.1</b>	<b><i>Distribuição da temperatura no solo</i></b> .....	<b>48</b>
<b>7</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	<b>51</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>52</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Este é um trabalho de revisão e incremento bibliográfico acerca da equação da condução do calor. O objetivo geral deste trabalho é alimentar o acervo científico acerca desta derivada parcial muito conhecida e colaborar com a compreensão e aplicação da mesma. Especificamente, objetiva-se neste trabalho abordar e discorrer brevemente sobre a equação da condução homogênea do calor em suas formas unidimensional e tridimensional, a fim de que seja compreendida sua formulação, resolução e aplicação.

Motivado pela sua necessidade tanto no campo da matemática e da física como também em aplicações práticas e em tecnologias, notou-se a necessidade de explanação acerca desta equação derivada parcial que, assim como outras EDPs, descreve fenômenos importantes da natureza.

Na ocasião deste trabalho, o fenômeno a ser tomado como objeto de estudo é o calor e especificamente a sua dinâmica de propagação em corpos com a variação do tempo.

No capítulo 2 será feita uma revisão da literatura a respeito de assuntos que precedem e que, em função disto, estruturam a compreensão a respeito da equação e a ser abordada posteriormente. No capítulo 3 busca-se contextualizar historicamente a equação da propagação do calor, discorrendo sobre os físicos e pensadores da época, o foco será dado a Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), sua busca e suas tentativas e progressos na formulação da equação do calor. O capítulo 4 é destinado à dedução das equações de condução do calor unidimensional,  $u_t = \alpha \cdot u_{xx}$ , e tridimensional,  $u_t = \alpha(u_{xx} \cdot u_{yy} \cdot u_{zz})$ . Os métodos resolutivos da equação homogênea do calor unidimensional através do método de separação de variáveis, bem como as condições de contorno mais empregadas, condições de contorno de Dirichlet e de Neumann, serão abordados no Capítulo 5. O capítulo 6 dará alguns exemplos de aplicações desta equação diferencial parcial e, por fim, o capítulo 7 conclui o trabalho e dá perspectivas de abordagens futuras.

## 2 ESTUDO INICIAL

Este capítulo é destinado a mostrar e recordar alguns conceitos e equações que servirão como base para o que será apresentado posteriormente, ou seja, será feito um estudo preliminar de conceitos que são pré requisitos para a compreensão da Equação do Calor.

### 2.1 Definições preliminares

#### 2.1.1 Condutividade térmica

A condutividade térmica é uma característica específica de cada material e caracteriza a capacidade do mesmo de transferir calor através da sua extensão, ou seja, materiais com alta condutividade térmica conduzem a energia térmica mais rapidamente do que materiais com baixa condutividade.

Em um material isolado, a condutividade  $K$  pode ser quantificada pela quantidade de calor  $Q$  transmitido através de uma espessura  $L$ , numa direção normal à superfície de área  $A$ , devido a uma variação de temperatura  $\Delta u$ , como descrita na equação:

$$K = \frac{\Delta Q}{A \cdot \Delta u} \cdot \frac{L}{\Delta u}$$

#### 2.1.2 Equação Fundamental da Calorimetria

A propriedade do calor específico ( $c_e$ ) é definida como a quantidade de energia térmica necessária para que uma unidade de massa de um material sofra variação de uma unidade na sua temperatura.

A propriedade da capacidade térmica ( $C$ ) é definida como a quantidade de energia térmica necessária para que um corpo sofra variação de uma unidade na sua temperatura, assim sendo, a capacidade térmica é diretamente proporcional ao calor específico e é definida por

$$C = m \cdot c_e$$

Ambas as propriedades acima são formalmente apresentadas com a fórmula da Equação Fundamental da Calorimetria

$$Q = m \cdot c_e \cdot \Delta u$$

onde Q é a quantidade de calor necessária, m é a massa do corpo e  $\Delta u$  é a variação da temperatura no corpo.

### 2.1.3 Equações Diferenciais Parciais (EDPs)

Uma EDP de ordem  $m > 0$  é uma equação envolvendo uma função  $u$  desconhecida e de  $n$  variáveis, com  $n \geq 2$ , donde  $m$  é a maior ordem das derivadas parciais de  $u$ , ou seja, pode ser deduzida em uma igualdade do tipo:

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right) = 0$$

### 2.1.4 Lei de Fourier

Supondo um cilindro de material homogêneo isolado na superfície lateral, de diâmetro suficientemente pequeno em relação ao seu comprimento, de modo que o aquecimento se dá somente no sentido axial, ou seja, pelas extremidades do cilindro.

Considerando  $A$  a área da seção transversal desse cilindro, a temperatura é constante na área de uma seção e varia de acordo com a posição da seção na barra em decorrência dos fenômenos de propagação do calor. Tomando duas seções, uma seção de posição  $x$  e outra de posição  $x + \Delta x$ , de áreas  $A$ , adjacentes no cilindro, de temperaturas constantes  $u(x, t)$  e  $u(\Delta x, t)$  e distância  $\Delta x$  entre as elas, pela Lei de Fourier do resfriamento, a quantidade de calor  $Q$  transferida da seção de maior temperatura para a seção de menor temperatura, é dada por

$$Q = K \cdot A \frac{|u(\Delta x, t) - u(x, t)|}{\Delta x}$$

sendo  $K$  a constante de condutividade térmica do material do cilindro.

### 2.1.5 Equação do fluxo de calor

A partir da Lei de Fourier, considerando ainda as seções anteriores de posição  $x$  e  $x + \Delta x$ , sejam estas seções suficientemente próximas uma da outra, ou seja, com  $\Delta x$  tendendo a zero, tem-se assim a transmissão instantânea, chamada de fluxo, de uma quantidade  $q$  de calor na posição  $x$  no cilindro e no instante  $t$ , em resumo,  $q(x, t)$ . Então, o fluxo será

$$q(x, t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -K \cdot A \frac{|u(\Delta x, t) - u(x, t)|}{\Delta x} = -K \cdot A \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|u(\Delta x, t) - u(x, t)|}{\Delta x}.$$

Resolvendo a equação acima, obtém-se a equação geral de fluxo do calor

$$q(x, t) = -K \cdot A \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}.$$

Nota: admite-se o símbolo de subtração pois o fluxo do calor dá-se da posição de maior para a menor temperatura, no sentido de diminuição da mesma.

### 2.1.6 Princípio da Superposição Generalizado

Se os termos de uma sequência  $\{u_n\}_1^\infty$  são soluções da equação diferencial linear homogênea:  $L[u] = 0$  (ordinária ou derivadas parciais), então a série  $\sum u_n$  também é solução da equação, caso o cálculo das derivadas de  $u$ , que aparecem na equação, possa ser feito mediante derivação termo a termo na série

## 2.2 Teoremas essenciais

Esta seção destina-se a organizar e expor teoremas e resoluções matemáticas que serão utilizadas no desenvolver das deduções das equações seguintes.

### Teorema 2.2.1



Seja  $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida em  $B((x_0, y_0), r)$  tal que  $f_x, f_y, f_{xy}$  também estejam definidas em  $B((x_0, y_0), r)$ .

Sabendo que, além do supracitado, há a região definida em  $(x_0, y_0)$ , então:

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

Embora o teorema que foi citado acima se refira somente a igualdade das derivadas parciais de segunda ordem mistas de uma função real de duas variáveis, este pode ser estendido para funções do tipo  $f: A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  com  $m \geq 3$ , desde que as hipóteses sejam analogamente formuladas.

Além disso, o teorema pode ser aplicado a fim de que sejam obtidas igualdades de derivadas parciais de ordem superior a dois. Assim sendo, tem-se que a função  $f: A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  com  $m \geq 3$  tem derivadas parciais de ordem suficientemente altas e assim vale, por exemplo, as igualdades:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial z^2 \partial y} = \frac{\partial^4 f}{\partial z \partial x \partial z \partial y}$$

### Teorema 2.2.2

Sejam  $f(x)$  e  $f_n(x)$ , com  $(n = 1, 2, 3, \dots)$  funções contínuas por partes definidas em um intervalo não vazio  $I \in \mathbb{R}$ . Supondo que para cada  $x$ , exista  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ . Assuma ainda que existe uma função  $g(x) \geq 0$  contínua por partes tal que  $|f_n(x)| \leq g(x)$ , e a integral de  $g(x)$  no intervalo  $I$  é finita. Assim sendo, tem-se que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_I f(x) dx.$$

### 3 HISTÓRICO DA EQUAÇÃO

Com o intuito de compreender as teorias que antecedem a equação da difusão do calor e da sua formação como ela nos é apresentada hoje, tanto será realizada uma abordagem histórica, ou seja, buscar compreender as equações e formulações anteriores que compuseram e moldaram por fim a equação do calor na forma atual, como também será abordado sucintamente o contexto da época.

#### 3.1 Uma breve contextualização

Durante o século XVIII, com a construção e uso constante de máquinas térmicas, notou-se a necessidade de voltarem os olhares para a compreensão dos fenômenos relacionados a temperatura e com isso, houve a intensificação dos estudos físico-mecânico do comportamento do calor.

Neste contexto, a mecânica teve alta divulgação e ganhos com o paradigma newtoniano, a matemática estava formalizada e em evolução a partir das contribuições vários pensadores, como Euler e Lagrange, e a termodinâmica, dada a nova necessidade com a disseminação das máquinas térmicas, estava em desenvolvimento e em busca de novas teorias, com fortes contribuições de Joule, Carnot e Thomson.

Ainda neste período, alguns estudiosos voltaram suas atenções para o estudo do comportamento da temperatura, mas com especificidade na compreensão dos fenômenos da transmissão por difusão do calor em corpos. Dentre tais estudiosos, será dada ênfase a Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830), que aperfeiçoou os conhecimentos sobre a difusão do calor, estruturou as noções matemáticas e apresentou uma dedução inicial da equação da condução do calor como ela é formulada nos tempos atuais.

Durante o estudo e o desenvolvimento das conjecturas e fórmulas iniciais que com o tempo e aperfeiçoamento moldaram a atual equação da condução do calor,

Fourier contou com outras teorias e pensamentos de físicos e matemáticos, tais como a lei do resfriamento de Isaac Newton, publicações de Jean Baptiste Biot sobre o fenômeno de transferência do calor, dentre outros estudos da época.

O estudo teórico do desenvolvimento da equação da condução do calor elaborada por Fourier, com suas conjecturas e formulações que antecederam a equação do calor, nos permite compreender quais as problemáticas vividas durante a compreensão e dedução da condução do calor em meios lineares ou tridimensionais e assim, compreender os fenômenos da transmissão do calor, bem como as suas aplicações.

### **3.2 Formulações antecedentes da equação da condução do calor**

Antes de se alcançar a notação atual que descreve a equação da propagação do calor, Joseph Fourier admitiu inúmeras concepções e tentativas de obtenção de uma formulação para a difusão do calor, com suas respectivas falhas ou limitações.

A primeira tentativa de Fourier de explicar a propagação do calor, embasada na teoria das cordas vibrantes, foi de arranjar um número finito de corpos discretos em linha reta e analisar a propagação do calor neles, de modo que pudesse se analisar como as temperaturas eram distribuídas em função do tempo e, a partir disso, desenvolver uma lei matemática que demonstrasse. O físico não deu continuidade a tal primeira tentativa por não obter a solução matemática que buscava.

Apoiado em publicações de Jean Baptiste Biot sobre o estudo dos fenômenos de distribuição de temperatura, Fourier retomou sua busca por uma solução matemática para a difusão do calor, desta vez, utilizou-se de uma barra linear de ferro que fora aquecida em uma de suas extremidades. Apoiado na lei do resfriamento de Newton e na utilização de diferentes coeficientes de condutividade para as diferentes difusões, internas e externas à barra, o físico analisou a troca de calor de cada seção da barra, tanto com as seções adjacentes como com o meio e conjecturou a equação como sendo

$$K \frac{\partial^2 u}{\partial x} = hu$$

onde  $x$  é a largura de uma referida seção;  $K \partial^2 u$  expressava a quantidade de calor absorvido por uma seção, donde  $K$  é o coeficiente de condutividade interno e  $\partial u$  a diferença de temperatura entre duas seções adjacentes;  $hu$  demonstrava a quantidade de calor perdida para o ambiente, onde  $h$  é o coeficiente de condutividade externa e  $u$  a diferença entre as temperaturas da seção e o ambiente.

Entretanto, no que diz respeito à equação anteriormente citada, notou-se uma implicação que haveria de ser contornada: o diferencial da variável  $u$  era de segunda ordem, enquanto que o diferencial da variável  $x$  era de primeira ordem. Tal implicação foi posteriormente contornada por Fourier substituindo  $K$  por  $\frac{K}{\partial x}$ , visto que, quanto menor for a largura da seção, mais facilmente o calor fluirá internamente. A partir disto, fez a seguinte modificação tornando a equação homogênea e livrando-se da implicação anterior:

$$\frac{K}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x} = hu \Rightarrow K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = hu \Rightarrow K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu = 0$$

Tal formulação de Fourier aborda a propagação da temperatura unidirecionalmente nas seções de uma barra, mas em seu estado estacionário, ou seja, a distribuição da temperatura em função unicamente da posição da seção na barra, levando em consideração somente o movimento do calor na barra, sem levar em consideração o tempo decorrido da propagação.

Tempos depois, motivado pela necessidade de ampliação da equação de modo que não mais fosse aplicada somente no estado estacionário, mas sim com a extensão para o estado variável, estado este, em que a temperatura é dada em função tanto da posição da seção na barra, como também em função do tempo  $t$ , equacionando assim

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu.$$

Para dar continuidade às experimentações e conjecturas, utilizou o raciocínio que aplicou à barra de maneira unidirecional e o aplicou em modelos sólidos considerando suas três dimensões, estendendo assim, a equação anterior para a seguinte forma tridimensional da mesma equação:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - hu$$

onde  $x$ ,  $y$  e  $z$  referem-se aos eixos do objeto em três dimensões.

Embora grande fosse o avanço para a compreensão do fenômeno de propagação do calor e formulação de uma equação do mesmo obtido por Joseph Fourier com a equação diferencial parcial de distribuição da temperatura no estado variável apresentada acima, ainda havia equívocos nas duas equações, unidimensional e tridimensional, que deveriam ser sanados futuramente, equívocos do tipo: a não consideração da densidade e do calor específico do material sob efeito da temperatura e presença do termo  $hu$ , que se refere ao calor cedido para o ambiente. Quanto a esta perda para o meio, embora obviamente exista, a difusão de calor para o ambiente se dá de maneira diferente em corpos lineares e volumétricos, bem como, também depende das respectivas condutividades.

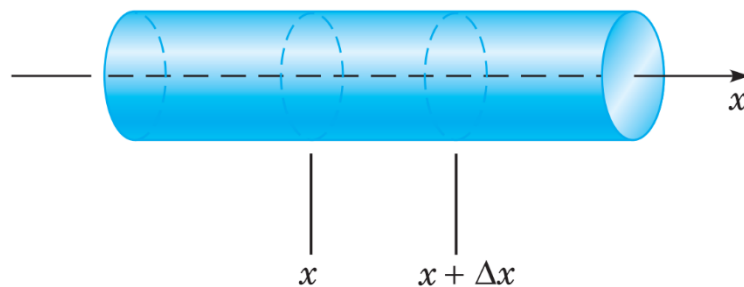
## 4 AS EQUAÇÕES DO CALOR

Neste capítulo será apresentada a equação do calor na sua forma correta e finalizada anos depois por Joseph Fourier que a publicou em sua obra intitulada *Théorie Analytique de la Chaleur* (Teoria Analítica do Calor).

### 4.1 Equação do calor linear

Para a dedução da equação do calor linear, será utilizado como referência o livro *Elementary Differential Equation*.

Analisando uma barra cilíndrica de material homogêneo e delimitando na mesma duas seções de sua área, como mostrada na figura:



Fonte: Adaptado de (BOYCE; DiPRIMA, 2012)

Considerando que sua extremidade esquerda tem temperatura maior que a extremidade direita, isso é, a propagação se dá da esquerda para a direita.

Daí, considerando a delimitação na barra dada pelas seções  $x$  e  $x + \Delta x$ , a quantidade  $Q$  de calor absorvido por essa delimitação na barra, pode ser compreendida como a subtração da quantidade  $q(x, t)$  de calor que flui pela seção  $x$  (calor recebido) menos a quantidade  $q(x + \Delta x, t)$  de calor que flui pela seção  $x + \Delta x$  (calor perdido, ou seja,

$$Q = q(x, t) - q(x + \Delta x, t)$$

A partir da Lei de Fourier e da Equação do Fluxo de calor, sabe-se que:

$$q(x, t) = -K \cdot A \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad ; \quad q(x + \Delta x, t) = -K \cdot A \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x}.$$

Aplicando as equações acima no calor  $Q$  absorvido,

$$Q = q(x, t) - q(x + \Delta x, t)$$

$$Q = -K \cdot A \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \left( -K \cdot A \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} \right)$$

$$Q = K \cdot A \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - K \cdot A \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

$$Q = K \cdot A \left( \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right).$$

Como o que interessa é o estado variável em função da variação do tempo, para a quantidade  $Q$  total de calor absorvido em uma variação de tempo  $\Delta t$ , basta fazer o produto

$$Q \cdot \Delta t = K \cdot A \cdot \Delta t \left( \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)$$

Pela equação fundamental da calorimetria, a quantidade de calor  $Q \cdot \Delta t$  recebida em um intervalo de tempo  $\Delta t$ , pode ser expressa como

$$Q \cdot \Delta t = m \cdot c_e \cdot \Delta u$$

$$\Delta u = \frac{Q \cdot \Delta t}{m \cdot c_e} \Rightarrow \Delta u = \frac{Q \cdot \Delta t}{A \cdot \Delta x \cdot \rho \cdot c_e}$$

sendo  $\rho$  a densidade do material do cilindro,  $c_e$  o seu calor específico e  $\Delta u$  a variação da temperatura.

Daí, tem-se que a variação  $\Delta u$  da temperatura pode ser escrita como a diferença

$$\Delta u = u(x + \Delta x, t + \Delta t) - u(x + \Delta x, t)$$

Então, pode-se notar da seguinte forma:

$$\Delta u = \frac{Q \cdot \Delta t}{A \cdot \Delta x \cdot \rho \cdot c_e} \Rightarrow u(x + \Delta x, t + \Delta t) - u(x + \Delta x, t) = \frac{Q \cdot \Delta t}{A \cdot \Delta x \cdot \rho \cdot c_e} \Rightarrow$$

$$Q \cdot \Delta t = [u(x + \Delta x, t + \Delta t) - u(x + \Delta x, t)]A \cdot \Delta x \cdot \rho \cdot c_e$$

Ora, retomando a equação anterior,

$$Q \cdot \Delta t = K \cdot A \cdot \Delta t \left( \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)$$

tendo o termo  $Q \cdot \Delta t$  em igualdade, pode-se então deduzir que

$$Q \cdot \Delta t = Q \cdot \Delta t$$

$$[u(x + \Delta x, t + \Delta t) - u(x + \Delta x, t)]A \cdot \Delta x \cdot \rho \cdot c_e = K \cdot A \cdot \Delta t \left( \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)$$

Por fim, ao considerar esta última equação, a dividindo-a por  $\Delta x \cdot \Delta t$  e analisando o limite da mesma quando  $\Delta x$  tende a 0 e  $\Delta t$  tende a zero, então

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{K}{\rho \cdot c_e} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Sendo esta finalmente a equação da condução do calor linear, ou equação da difusão do calor unidimensional, onde,  $K$ ,  $\rho$  e  $c_e$  são, respectivamente, a constante de condutividade térmica, a densidade e o calor específico do material.

Além da forma supracitada, a equação da condução do calor também pode ser dada na forma

$$u_t = \alpha \cdot u_{xx}$$



Sendo

$$\alpha = \frac{K}{\rho \cdot c_e}.$$

O termo  $\alpha$ , é chamado de difusividade térmica e é uma constante na equação que depende unicamente do material do cilindro, visto que o termo  $\alpha$  é dado pelo quociente da condutividade térmica do material, pelo produto da densidade e o calor específico do mesmo material.

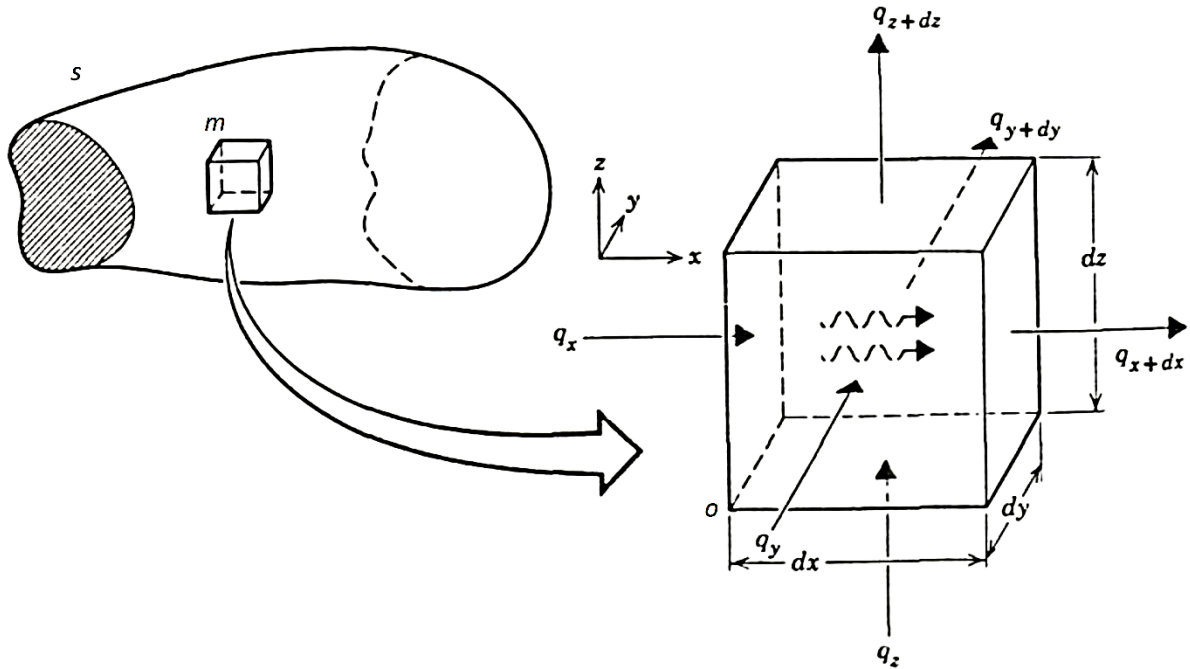
## 4.2 Equação do calor em sólidos tridimensionais

Na seção anterior, ao analisar o comportamento da temperatura em uma barra cilíndrica de espessura desprezível em relação ao seu comprimento, foi realizado o desenvolvimento da equação do calor na sua forma unidimensional, considerando somente a propagação no eixo  $x$ , ou seja, a difusão do calor no comprimento do material.

Nesta seção, será desenvolvida a equação da propagação do calor em sólidos tridimensionais, isto é, a equação que define a difusão do calor nos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  de um sólido.

Para o desenvolvimento e dedução da equação difusiva do calor em sólidos tridimensionais, será utilizada como referência a obra *Théorie Analytique de la Chaleur*, de Joseph Fourier.

Considere inicialmente um sólido  $s$  em processo de difusão de calor. Deste sólido, seja destacada uma molécula  $m$  na forma de um cubo perfeito, de material homogêneo, de dimensões infinitesimais e que, por ser parte de  $s$ , evidentemente também está em processo de difusão de calor. Na origem  $o$  deste cubo, são dados os eixos de coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  e são dadas por  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$  as distâncias das laterais do mesmo. Tal descrição está figurada na imagem a seguir:



Nota: denomina-se por  $x$ ,  $y$  e  $z$  as faces que passam pelo ponto de origem ( $o$ ) e por  $x + dx$ ,  $y + dy$  e  $z + dz$  as faces respectivamente opostas àquelas que passam pela origem.

Neste sólido cúbico  $m$ , em todas as três dimensões, o sentido do fluxo do calor se dá das faces  $x$ ,  $y$  e  $z$ , para as faces  $x + dx$ ,  $y + dy$  e  $z + dz$ , isto é, o calor em  $m$  é recebido pelas faces  $x$ ,  $y$  e  $z$  e é cedido pelas faces  $x + dx$ ,  $y + dy$  e  $z + dz$ .

A representação do fluxo de calor é dada pela variável  $q$ , donde  $q_x$  é a quantidade de calor recebida pela face  $x$  e  $q_{x+dx}$  é a quantidade de calor cedida pela face  $x + dx$ . O mesmo vale para  $q_y$  e  $q_z$  como a quantidade de calor recebida por estas faces e para  $q_{y+dy}$  e  $q_{z+dz}$  como a quantidade de calor perdida pelo cubo por estas respectivas faces.

Tal como na seção anterior, a quantidade  $Q$  total de calor absorvida pode ser obtida ao subtrair a quantidade total de calor recebida pelas faces  $x$ ,  $y$  e  $z$ , da quantidade total de calor cedida pelas faces  $x + dx$ ,  $y + dy$  e  $z + dz$ . Ou seja, sendo

$$q_{rec} = q_x + q_y + q_z$$

$$q_{ced} = q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz}$$

Então, o calor total  $Q$  absorvido será

$$Q = q_x + q_y + q_z - (q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz})$$

$$Q = q_{rec} - q_{ced}$$

Daí, deve-se analisar individualmente a quantidade de calor recebida e cedida por cada face da molécula.

Inicialmente, para calcular o calor recebido:

Pela Lei de Fourier e pela equação do fluxo de calor, a quantidade  $q_x$  de calor recebida pela face  $x$  em um intervalo  $dt$  de tempo é dada por

$$q_x = -K \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{du}{dx} dt$$

Note que o produto das distâncias  $dy \cdot dz$  equivale à área da face  $x$ , satisfazendo a equação do fluxo de Fourier.

Agora, de maneira análoga, as quantidades de calor recebidas pelas faces  $y$  e  $z$  no mesmo intervalo de tempo são respectivamente equivalentes a

$$q_y = -K \cdot dx \cdot dz \cdot \frac{du}{dy} dt$$

$$q_z = -K \cdot dx \cdot dy \cdot \frac{du}{dz} dt$$

Desta forma, a quantidade total  $q_{rec}$  de calor recebida por esta molécula em um intervalo de tempo  $dt$  é

$$q_{rec} = -K \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{du}{dx} dt - K \cdot dx \cdot dz \cdot \frac{du}{dy} dt - K \cdot dx \cdot dy \cdot \frac{du}{dz} dt.$$

Para a quantidade de calor perdida pela face  $q_{x+dx}$  em um intervalo de tempo  $dt$ , ainda pela Lei de Fourier e com a equação do fluxo de calor,

$$q_{x+dx} = -K \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{du}{dx} dt - K \cdot dy \cdot dz \cdot d\left(\frac{du}{dx}\right) dt.$$

Analogamente, as quantidades de calor cedidas respectivamente pelas faces  $q_{y+dy}$  e  $q_{z+dz}$  equivalem a

$$q_{y+dy} = -K \cdot dx \cdot dz \cdot \frac{du}{dy} dt - K \cdot dx \cdot dz \cdot d\left(\frac{du}{dy}\right) dt$$

$$q_{z+dz} = -K \cdot dx \cdot dy \cdot \frac{du}{dz} dt - K \cdot dx \cdot dy \cdot d\left(\frac{du}{dz}\right) dt.$$

A quantidade  $q_{ced}$  de calor cedida pelo cubo, em um intervalo  $dt$  de tempo equivale a

$$q_{ced} = -K \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{du}{dx} dt - K \cdot dy \cdot dz \cdot d\left(\frac{du}{dx}\right) dt - K \cdot dx \cdot dz \cdot \frac{du}{dy} dt - K \cdot dx \cdot dz \cdot d\left(\frac{du}{dy}\right) dt - K \cdot dx \cdot dy \cdot \frac{du}{dz} dt - K \cdot dx \cdot dy \cdot d\left(\frac{du}{dz}\right) dt.$$

Por fim, o calor total  $Q$  absorvido pela molécula  $m$  se dá subtraindo o calor cedido do calor recebido.

Após as devidas anulações dos termos opostos na subtração,

$$Q = K \cdot dy \cdot dz \cdot d\left(\frac{du}{dx}\right) dt + K \cdot dx \cdot dz \cdot d\left(\frac{du}{dy}\right) dt + K \cdot dx \cdot dy \cdot d\left(\frac{du}{dz}\right) dt$$

$$Q = K \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right) dt.$$

Daí, de posse do calor total, para dar-se a variação da temperatura  $\Delta u$ , deve-se dividir o valor do calor total pela capacidade térmica  $C$  da molécula cúbica em questão, então,

$$\Delta u = \frac{Q}{C}$$

Nos termos da molécula em questão, a capacidade térmica pode ser definida da seguinte forma:

$$C = m \cdot c_e$$

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V$$

$$V = dx \cdot dy \cdot dz$$

$$m = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

$$C = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot c_e.$$

Então, sendo

$$Q = K \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dt$$

$$C = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot c_e$$

A equação de condução do calor em sólidos tridimensionais pode ser deduzida por

$$\Delta u = \frac{Q}{C}$$

$$\Delta u = \frac{K \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dt}{\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot c_e}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{K \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)}{\rho \cdot c_e}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{K}{\rho \cdot c_e} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

onde,  $K$ ,  $\rho$  e  $c_e$  são, respectivamente, a constante de condutividade térmica, a densidade e o calor específico do material.

Esta é a equação final denominada por Joseph Fourier como a Equação geral da propagação do calor nos sólidos.

Esta equação também é comumente descrita na forma

$$u_t = \alpha(u_{xx} \cdot u_{yy} \cdot u_{zz}).$$

## 5 RESOLUÇÕES DA EQUAÇÃO

Dado no capítulo anterior a devida dedução e formulação da equação da condução do calor, o objetivo deste capítulo será discorrer a respeito do método mais comum de resolução da equação na sua forma homogênea e, além disto, serão mostrados os tipos de condições de contorno que são requeridos para a resolução desta equação diferencial parcial.

### 5.1 Denotação da equação do calor unidimensional

No que diz respeito à equação da condução do calor linear homogênea, pode-se denotá-la das seguintes formas:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

Ou

$$u_t = \alpha \cdot u_{xx}.$$

Sendo  $u(x, t)$  a temperatura na posição  $x$  no instante  $t$ , com  $x \in [0, L]$  e o tempo  $t \geq 0$ , onde  $L$  corresponde ao comprimento da barra.

Para resolver tal tipo de equação diferencial parcial será utilizado o método de Separação de Variáveis.

### 5.2 Método de Separação De Variáveis

Em termos gerais, o método de Separação de Variáveis consiste em utilizar-se métodos algébricos que nos permitam reescrever a equação diferencial parcial de tal modo que as variáveis distintas estejam em lados distintos da igualdade da equação.

Dada a equação diferencial parcial da condução do calor como denotada na seção anterior

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}.$$

O método algébrico para separação das variáveis da mesma será admitir que a solução dela é da forma

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Substituindo esta solução na equação do calor,

$$\frac{\partial(X(x)T(t))}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{\partial^2(X(x)T(t))}{\partial x^2}$$

No primeiro membro da igualdade acima,  $X(x)$  é constante na derivada em relação a  $t$ . Analogamente, no segundo membro da igualdade,  $T(t)$  é uma constante. Assim sendo,

$$X(x) \cdot \frac{\partial T(t)}{\partial t} = \alpha \cdot T(t) \cdot \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}$$

$$X(x) \cdot T'(t) = \alpha \cdot T(t) \cdot X''(x)$$

Organizando as variáveis  $x$  e  $t$ :

$$\frac{T'(t)}{\alpha \cdot T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Como o primeiro membro independe da variável  $x$  e o segundo membro independe de  $t$ , é dada então a equação diferencial parcial devidamente separada por suas variáveis.

Tem-se também que, pela independência citada, ambos os membros independem das variáveis  $x$  e  $t$  e são numericamente iguais a uma constante  $\lambda$ , isto é,

$$\frac{T'(t)}{\alpha \cdot T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda.$$

Nota: a constante  $\lambda$  é chamada Constante de separação.



Daí, separadas as variáveis e dada a constante de separação  $\lambda$ , são dadas as seguintes equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \quad \Rightarrow \quad X''(x) - \lambda \cdot X(x) = 0$$

$$\frac{T'(t)}{\alpha \cdot T(t)} = \lambda \quad \Rightarrow \quad T'(t) - \lambda \cdot \alpha \cdot T(t) = 0$$

De posse destas EDOs, é necessário definir as condições de contorno, donde são dados os dois seguintes possíveis tipos:

- a) Condições de contorno de Dirichlet – condição de contorno com valor fixo: caso em que a temperatura é constante nas extremidades da barra;
- b) Condições de contorno de Neumann – condição de contorno com derivada fixa: caso em que o fluxo de calor é constante nas extremidades da barra.

### 5.3 Condições de contorno de Dirichlet

Como já mencionado, as condições de contorno de Dirichlet admitem temperaturas constantes nas extremidades da barra. Considere o problema de valor inicial e de fronteira, onde a temperatura no início e no fim da barra equivalem a zero e que

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} & , \quad 0 < x < L \quad , \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & , \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x) & , \quad x \in [0, L] \end{cases}$$

Pelo Método de Separação de Variáveis, ao considerar a solução na forma  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , obtém-se as EDOs

$$X''(x) - \lambda \cdot X(x) = 0$$

$$T'(t) = \alpha \cdot \lambda \cdot T(t)$$

Impondo as condições de fronteira tem-se que

$$u(0, t) = 0 \Rightarrow X(0)T(t) = 0$$

$$u(L, t) = 0 \Rightarrow X(L)T(t) = 0$$

Das equações acima, caso  $T(t) = 0$ , então tem-se a solução trivial nula para toda temperatura  $u(x, t) = 0$ , pois  $u(x, t) = X(x)T(t)$ . Descartando a solução trivial  $T(t) = 0$ , então,

$$X(0) = X(L) = 0.$$

Gerando um problema de auto-valores ou problema espectral de *Sturm-Liouville*, com diferencial linear  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ . O problema de auto-valores é

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda \cdot X(x) \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

Para tal, deve-se analisar os possíveis valores da constante de separação  $\lambda$ , seja  $\lambda > 0$ ;  $\lambda = 0$  ou  $\lambda < 0$ , com o intuito de buscar quais os valores que satisfazem o problema dado, descartando-se os resultados triviais.

### 5.3.1 Condições de contorno de Dirichlet Caso $\lambda > 0$

Considerando  $\lambda > 0$ , seja  $\lambda = \beta^2$ , substituindo no problema tem-se que:

$$X''(x) - \beta^2 \cdot X(x) = 0$$

O conjunto fundamental de soluções é  $\{e^{\beta \cdot x}, e^{-\beta \cdot x}\}$  e a solução geral de  $X(x)$  é dada por

$$X(x) = C_1 \cdot e^{\beta \cdot x} + C_2 \cdot e^{-\beta \cdot x}$$

Com as condições de contorno,  $X(0) = X(L) = 0$ , é dado o sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 \cdot e^{\beta \cdot L} + C_2 \cdot e^{-\beta \cdot L} = 0 \end{cases}$$

Daí,  $C_1 \cdot (e^{2\beta \cdot L} - 1) = 0$ , então

$$C_1 = C_2 = 0$$

O que implica na solução trivial  $X \equiv 0$ .

### 5.3.2 Condições de contorno de Dirichlet caso $\lambda = 0$

Caso  $\lambda = 0$ , então

$$X''(x) - 0 \cdot X(x) = 0 \Rightarrow X''(x) = 0 \Rightarrow X(x) = C_3 \cdot x + C_4$$

$$X(0) = 0 \Rightarrow C_3 \cdot 0 + C_4 = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$X(L) = 0 \Rightarrow C_3 \cdot L + C_4 = 0 \Rightarrow C_3 \cdot L + 0 = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

Novamente, se  $C_3 = C_4 = 0$ , então tem-se novamente a solução trivial onde  $X \equiv 0$ .

### 5.3.3 Condições de contorno de Dirichlet caso $\lambda < 0$

Considerando  $\lambda < 0$ , seja  $\lambda = -\beta^2$ ,  $\beta \neq 0$ , substituindo no problema tem-se que:

$$X''(x) + \beta^2 \cdot X(x) = 0$$

Para o problema acima, eliminando o termo complexo, encontra-se a equação característica

$$r^2 + \beta^2 = 0$$

Com solução geral dada por

$$X(x) = C_5 \cdot \cos(\beta x) + C_6 \cdot \text{sen}(\beta x).$$

Com as condições de contorno,  $X(0) = X(L) = 0$ ,

$$X(0) = 0 \Rightarrow C_5 \cdot \cos(0) + C_6 \cdot \text{sen}(0) = 0$$

$$C_5 \cdot 1 + C_6 \cdot 0 = 0 \Rightarrow C_5 = 0$$

$$X(L) = 0 \Rightarrow C_5 \cdot \cos(\beta L) + C_6 \cdot \text{sen}(\beta L) = 0 \Rightarrow 0 + C_6 \cdot \text{sen}(\beta L) = 0$$

$$C_6 = 0 \quad \text{ou} \quad \text{sen}(\beta L) = 0$$

Como, caso  $C_6 = 0$ , resultaria novamente em uma solução trivial, então

$$\text{sen}(\beta L) = 0.$$

Daí, sabe-se que

$$\text{sen}(\beta L) = 0 \Leftrightarrow \beta L = n \cdot \pi \Leftrightarrow \beta = \frac{n \cdot \pi}{L}.$$

Nota: Se  $\lambda = -\beta^2$  e  $\beta = \frac{n \cdot \pi}{L}$ , então tem-se que  $\lambda = -\left(\frac{n \cdot \pi}{L}\right)^2$ .

Ora, sendo  $C_5 = 0$  e  $\beta = \frac{n \cdot \pi}{L}$ , então

$$X(x) = C_5 \cdot \cos(\beta x) + C_6 \cdot \text{sen}(\beta x)$$

$$X_n(x) = C_6 \cdot \text{sen}\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right)$$

Tornando então possível a resolução do problema para  $X(x)$ , com  $\lambda < 0$ .

Agora, sendo  $\lambda < 0$  e sabendo que  $\lambda = -\left(\frac{n \cdot \pi}{L}\right)^2$ , deve-se encontrar a solução de T em

$$T'(t) = \alpha \cdot \lambda \cdot T(t)$$

$$T'(t) = -\left(\frac{n \cdot \pi}{L}\right)^2 \cdot \alpha \cdot T(t)$$

Para esta equação diferencial ordinária, a solução será na forma

$$T_n(t) = C_7 \cdot e^{-\left(\frac{n \cdot \pi}{L}\right)^2 \cdot \alpha \cdot t}$$

Então,

$$X_n(x) = C_6 \cdot \text{sen}\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \quad e \quad T_n(t) = C_7 \cdot e^{-\left(\frac{n \cdot \pi}{L}\right)^2 \cdot \alpha \cdot t}$$

Retornando a forma da equação a  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , tem-se:

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

$$u_n(x, t) = C_6 \cdot \text{sen}\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \cdot C_7 \cdot e^{-\left(\frac{n \cdot \pi}{L}\right)^2 \cdot \alpha \cdot t} \quad , \quad \forall n \geq 1$$

Aplicando o Princípio da Superposição,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot e^{-\left(\frac{n \cdot \pi}{L}\right)^2 \cdot \alpha \cdot t} \cdot \text{sen}\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right)$$

Nota: as constantes  $C_6$  e  $C_7$  foram aglomeradas às constantes geradas pelo Princípio da Superposição e unidas em  $b_n$ .

Para encontrar o valor de  $b_n$ , pode ser obtido a partir da seguinte condição dada anteriormente:

Se  $u(x, 0) = \phi(x)$ , então

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \text{sen}\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \cdot e^{-\left(\frac{n \cdot \pi}{L}\right)^2 \cdot \alpha \cdot 0}$$

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \text{sen}\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) =$$

A função  $\phi(x)$  acima, corresponde à série de Fourier em senos de  $\phi$ . Pela ortogonalidade da função seno, pode-se definir  $b_n$  como

$$b_n = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L \phi(x) \cdot \text{sen}\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) dx.$$

Então, para as condições de contorno de Dirichlet, a solução do problema de valor inicial dado será descrita por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \text{sen}\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \cdot e^{-\left(\frac{n \cdot \pi}{L}\right)^2 \cdot \alpha \cdot t}$$

Com,

$$b_n = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L \phi(x) \cdot \text{sen}\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) dx.$$

#### 5.4 Condições de contorno de Neumann

Como já mencionado, as condições de contorno de Neumann admitem fluxos constantes nas extremidades da barra. Considere o problema de valor inicial e de fronteira, onde a função derivada do fluxo de calor no início e no fim da barra equivalem a zero e que

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & , \quad 0 < x < L \quad , \quad t > 0 \\ \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = 0 & , \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & , \quad x \in [0,L] \end{cases}$$

Novamente, pelo Método de Separação de Variáveis, ao considerada a solução na forma  $u(x,t) = X(x)T(t)$ , obtêm-se as mesmas equações diferenciais ordinárias:

$$X''(x) - \lambda \cdot X(x) = 0$$

$$T'(t) = \alpha \cdot \lambda \cdot T(t)$$

Ao impor as novas condições de fronteira tem-se que

$$u_x(0,t) = 0 \Rightarrow X'(0)T(t) = 0$$

$$u_x(L,t) = 0 \Rightarrow X'(L)T(t) = 0$$

Ainda como nas condições de contorno de Dirichlet, das equações acima, caso  $T(t) = 0$ , então seria dada a solução trivial nula para toda temperatura  $u(x,t) = 0$ , pois  $u(x,t) = X(x)T(t)$ . Então, descartando a solução trivial  $T(t) = 0$ , tem-se que

$$X'(0) = X'(L) = 0$$

Agora, é necessário desenvolver as equações diferenciais ordinárias encontradas

$$X''(x) - \lambda \cdot X(x) = 0$$

$$T'(t) = \alpha \cdot \lambda \cdot T(t)$$

Iniciando pela EDO de  $X$ , serão analisados os possíveis valores de  $\lambda$ .

#### 5.4.1 Condições de contorno de Neumann caso $\lambda > 0$

Considerando  $\lambda > 0$ , seja  $\lambda = \beta^2$ , substituindo no problema:

$$X''(x) - \beta^2 \cdot X(x) = 0$$

O conjunto fundamental de soluções é  $\{e^{\beta \cdot x}, e^{-\beta \cdot x}\}$  e a solução geral de  $X(x)$  é dada por

$$X(x) = C_1 \cdot e^{\beta \cdot x} + C_2 \cdot e^{-\beta \cdot x}$$

Neste caso, para aplicar as condições de contorno de Neumann, deve-se derivar  $X(x)$ .

$$X'(x) = C_1 \cdot \beta \cdot e^{\beta \cdot x} - C_2 \cdot \beta \cdot e^{-\beta \cdot x}$$

Com as condições de contorno,  $X'(0) = X'(L) = 0$ ,

$$X'(0) = C_1 \cdot \beta \cdot e^{\beta \cdot 0} - C_2 \cdot \beta \cdot e^{-\beta \cdot 0} = 0 \implies C_1 \cdot \beta - C_2 \cdot \beta = 0$$

$$X'(L) = C_1 \cdot \beta \cdot e^{\beta \cdot L} - C_2 \cdot \beta \cdot e^{-\beta \cdot L} = 0$$

Daí, tem-se o sistema de equações

$$\begin{cases} C_1 \cdot \beta - C_2 \cdot \beta = 0 \\ C_1 \cdot \beta \cdot e^{\beta \cdot L} - C_2 \cdot \beta \cdot e^{-\beta \cdot L} = 0 \end{cases}$$

Pela primeira equação,

$$C_1 = C_2$$



Substituindo na segunda equação,

$$C_1 \cdot \beta \cdot e^{\beta \cdot L} - C_1 \cdot \beta \cdot e^{-\beta \cdot L} = 0$$

$$C_1(\beta \cdot e^{\beta \cdot L} - \beta \cdot e^{-\beta \cdot L}) = 0$$

$$C_1 = C_2 = 0 \quad \text{ou} \quad \beta \cdot e^{\beta \cdot L} - \beta \cdot e^{-\beta \cdot L} = 0$$

Porém,

$$\beta \cdot e^{\beta \cdot L} - \beta \cdot e^{-\beta \cdot L} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\beta \cdot L} = e^{-\beta \cdot L}$$

$$\beta \cdot L = -\beta \cdot L$$

A igualdade acima só é possível se  $\beta = 0$  e  $\lambda = 0$ , porém supõe-se inicialmente  $\lambda > 0$ , então

$$C_1 = C_2 = 0$$

O que implica na solução trivial  $X \equiv 0$ .

#### 5.4.2 Condições de contorno de Neumann caso $\lambda = 0$

Caso  $\lambda = 0$ , então

$$X''(x) - 0 \cdot X(x) = 0 \Rightarrow X''(x) = 0 \Rightarrow X'(x) = C_3 \Rightarrow X(x) = C_3 \cdot x + C_4$$

Pelas condições de contorno  $X'(0) = X'(L) = 0$ ,

$$X'(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0 \Rightarrow X(x) = C_4$$

$$X'(L) = 0 \Rightarrow C_3 = 0 \Rightarrow C_3 \cdot L + C_4 = 0 \Rightarrow X(x) = C_4$$

Obtendo então, para  $\lambda = 0$ , a solução constante

$$X(x) = C_4.$$

### 5.4.3 Condições de contorno de Neumann caso $\lambda < 0$

Considerando  $\lambda < 0$ , seja  $\lambda = -\beta^2$ ,  $\beta \neq 0$ , substituindo no problema:

$$X''(x) + \beta^2 \cdot X(x) = 0$$

Para o problema acima, eliminando o termo complexo, é dada a equação característica

$$r^2 + \beta^2 = 0$$

Com solução geral dada por

$$X(x) = C_5 \cdot \cos(\beta x) + C_6 \cdot \text{sen}(\beta x).$$

Para aplicar-se as condições de contorno, novamente deve-se derivar:

$$X'(x) = -C_5 \cdot \beta \cdot \text{sen}(\beta x) + C_6 \cdot \beta \cdot \cos(\beta x)$$

Com as condições de contorno,  $X'(0) = X'(L) = 0$ ,

$$X'(0) = -C_5 \cdot \beta \cdot \text{sen}(0) + C_6 \cdot \beta \cdot \cos(0)$$

$$X'(0) = -C_5 \cdot \beta \cdot 0 + C_6 \cdot \beta \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_6 \cdot \beta = 0$$

$$C_6 = 0$$

$$X'(L) = -C_5 \cdot \beta \cdot \text{sen}(\beta L) + C_6 \cdot \beta \cdot \cos(\beta L) = 0$$

$$X'(L) = -C_5 \cdot \beta \cdot \text{sen}(\beta L) + 0 \cdot \beta \cdot \cos(\beta L) = 0 \quad \Rightarrow \quad -C_5 \cdot \beta \cdot \text{sen}(\beta L) = 0$$

$$C_5 = 0 \quad \text{ou} \quad \beta \cdot \text{sen}(\beta L) = 0$$

Se  $C_5 = 0$ , então resultaria novamente uma solução nula trivial, então

$$\beta \cdot \text{sen}(\beta L) = 0$$

Como  $\beta \neq 0$ , então

$$\text{sen}(\beta L) = 0$$

Daí, sabe-se que

$$\text{sen}(\beta L) = 0 \Leftrightarrow \beta L = n \cdot \pi \Leftrightarrow \beta = \frac{n \cdot \pi}{L}.$$

Nota: Novamente, se  $\lambda = -\beta^2$  e  $\beta = \frac{n \cdot \pi}{L}$ , então  $\lambda = -\left(\frac{n \cdot \pi}{L}\right)^2$ .

Ora, sendo  $C_6 = 0$  e  $\beta = \frac{n \cdot \pi}{L}$ , então

$$X(x) = C_5 \cdot \cos(\beta x) + C_6 \cdot \text{sen}(\beta x)$$

$$X_n(x) = C_5 \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right)$$

Tornando então possível a resolução do problema para  $X(x)$ , com  $\lambda < 0$ .

Agora, sendo  $\lambda < 0$  e sabendo que  $\lambda = -\left(\frac{n \cdot \pi}{L}\right)^2$ , deve-se encontrar a solução de T em

$$T'(t) = \alpha \cdot \lambda \cdot T(t)$$

Sabe-se pela seção 5.3 que a solução desta EDO é na forma

$$T_n(t) = C_7 \cdot e^{-\left(\frac{n \cdot \pi}{L}\right)^2 \cdot \alpha \cdot t}$$

Então,

$$X_n(x) = C_5 \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \quad e \quad T_n(t) = C_7 \cdot e^{-\left(\frac{n \cdot \pi}{L}\right)^2 \cdot \alpha \cdot t}$$

Retornando a forma da equação a  $u(x, t) = X(x)T(t)$ :

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

$$u_n(x, t) = C_5 \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \cdot C_7 \cdot e^{-\left(\frac{n \cdot \pi}{L}\right)^2 \cdot \alpha \cdot t}, \quad \forall n \geq 1$$

Aplicando novamente o Princípio da Superposição, tem-se que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot e^{-\left(\frac{n \cdot \pi}{L}\right)^2 \cdot \alpha \cdot t} \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right)$$

Nota: as constantes  $C_5$  e  $C_7$  foram aglomeradas às constantes geradas pelo Princípio da Superposição e unidas em  $c_n$ .

Para encontrar o valor de  $c_n$ , será feito a partir da seguinte condição dada anteriormente:

Se  $u(x, 0) = \phi(x)$ , então

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \cdot e^{-\left(\frac{n \cdot \pi}{L}\right)^2 \cdot \alpha \cdot 0}$$

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) =$$

A função  $\phi(x)$  acima, corresponde à uma série de Fourier em senos de  $\phi$ . Pela ortogonalidade da função seno, pode-se definir  $c_n$  como

$$c_n = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L \phi(x) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) dx.$$

Tem-se também que, para  $c_0$ , pela integral do cosseno,

$$c_0 = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L \phi(x) dx$$

Por fim, para as condições de contorno de Neumann, a solução do problema de valor inicial dado será descrita por:

$$u(x, t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \cdot e^{-\left(\frac{n \cdot \pi}{L}\right)^2 \cdot \alpha \cdot t}$$

Com,

$$c_n = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L \phi(x) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) dx \quad e \quad c_0 = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L \phi(x) dx.$$

O que pode se observar após a explanação desses métodos de resolução é que a solução de equações diferenciais parciais envolvendo a equação do calor é de alta complexidade devido ao alto grau de tecnicidade e o processo se torna mais inacessível quando trabalhado com equações não lineares como a equação dos meio porosos, como descrita no livro (VÁZQUEZ, 2007).

## 6 APLICAÇÕES DA EQUAÇÃO

Como, no capítulo anterior, foram deduzidos os métodos básicos resolutivos da equação, este capítulo será destinado a discorrer sucintamente a respeito da aplicabilidade da equação da condução do calor através de alguns exemplos, a fim de demonstrar o uso prático da teoria abordada neste trabalho.

### 6.1 Aplicações na engenharia civil

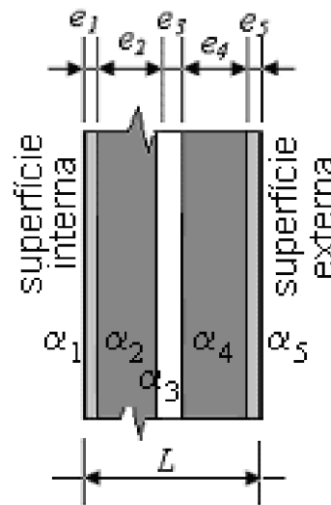
Inicialmente, pode-se citar algumas contribuições da aplicação dos conhecimentos sobre a propagação do calor no campo da engenharia civil: seja na temperatura da estrutura metálica, no isolamento térmico ou no planejamento do conforto térmico, a difusão da temperatura é influente na construção civil.

Além da evidente aplicação da teoria da condução do calor de maneira discreta quando leva-se em consideração que a energia térmica está praticamente sempre em processo de difusão nos elementos construtivos, tem-se também aplicações diretas em casos específicos, alguns exemplos serão citados nas duas seções seguintes .

#### ***6.1.1 Transferência de calor em paredes compostas por tijolos maciços***

Como exemplo, com o intuito de verificar o melhor desempenho térmico com relação ao isolamento, a investigação do comportamento do fluxo de calor e da variação da temperatura em paredes e suas estruturas de vedação se dá através da equação do fluxo de calor e a equação geral da condução do calor.

Desta forma, na imagem abaixo é dada uma parede de espessura total  $L$  composta por diferentes tipos de materiais, com diferentes espessuras  $e_i$  e diferentes coeficientes  $\alpha_i$  de difusividade térmica:



Fonte: Rupp, R. F. (2009).

O problema da transferência do calor em propagação por essa parede pode ser solucionado através da equação

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \alpha_i \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} & , \quad 0 < x < L & , \quad t > 0 \\ u(0, t) = u_1(t) & , \quad u(L, t) = u_2(t) & , \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(t) & , \quad x \in ]0, L[ \end{cases}$$

Sendo  $\alpha_i$  a difusividade térmica dos materiais das respectivas partições finitas de espessuras  $e_i$ , com  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ;  $u$  é a temperatura;  $t$  é o tempo;  $x$  é a direção que se dá a transferência do calor;  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$  são as condições de contorno respectivamente interna e externa, em temperatura fixa, configurando as condições de contorno de Dirichlet;  $u_0(t)$  é a condição de temperatura inicial.

### 6.1.2 Distribuição da temperatura em estruturas metálicas

Além da consideração da influência da temperatura no conforto térmico e nas evidentes dilatações sofridas pela estrutura de uma edificação em situações comuns, também leva-se em consideração os estudos sobre a temperatura em situações de risco de incêndio.

Quando uma edificação está em ocorrência de um incêndio, a distribuição das tensões nas seções da estrutura geradas a partir da incidência do fogo, é de maneira não uniforme, porém, a ruptura e o colapso da estrutura se dão nas seções onde, em razão de altas temperaturas, os esforços internos são maiores.

Objetivando a segurança, a fim de evitar o colapso estrutural em situações de incêndio, estudos são desenvolvidos a fim de que seja conhecida a propagação do calor na estrutura durante o sinistro, de modo que se possa aferir as seções da estrutura que possuam as maiores temperaturas em função do tempo e, em função disto, sejam mais vulneráveis. Estas seções mais vulneráveis, por sua vez, devem ter proteção extra ao calor, ou métodos de dissipação do mesmo. Para avaliar a transferência do calor nestes perfis metálicos e analisar os pontos sob efeito de altas temperaturas, utiliza-se a Lei de Fourier, a equação do fluxo e da condução do calor.

## **6.2 Aplicações na geologia**

A equação da distribuição do calor pode ser expandida a nível global, a fim de que seja estimada, por exemplo, as condições climáticas da Terra em função da passagem do tempo, levando em consideração as temperaturas e difusões por meio do solo e das águas.

Além disto, tem-se também o emprego da equação do calor unidimensional por parte de Lord Kelvin (William Thomson) na sua tentativa de aferir a idade da Terra.

### **6.2.1 Distribuição da temperatura no solo**

A modelagem matemática da equação da condução do calor proposta por Fourier foi utilizada por ele próprio e por outros físicos como William Thomson (1824-1927) e Siméon Denis Poisson (1781–1842) para avaliar a variação da temperatura do solo terrestre.

Inicialmente propõe-se a Terra como um espaço semi-infinito  $R^3$ , com  $x > 0$ , onde a temperatura depende unicamente da variação da profundidade  $x$ , desprezando quaisquer pequenas influências que não seja o comprimento  $x$ . Dito isto, pode-se associar o problema da variação da temperatura neste comprimento à equação da condução do calor em uma barra semi-infinita isolada nas laterais, com  $x > 0$  sendo a superfície.



Associando assim o problemas, tem-se então a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad t \in R \quad , \quad x > 0$$

Com a condição de fronteira inicial dado por

$$u(0, t) = f(t) \quad , \quad t \in R$$

Donde  $f(t)$  é uma função periódica de período T que pode ser diário ou anual.

Por tratar-se de uma função periódica pode-se expandir tal função em termos da série de Fourier

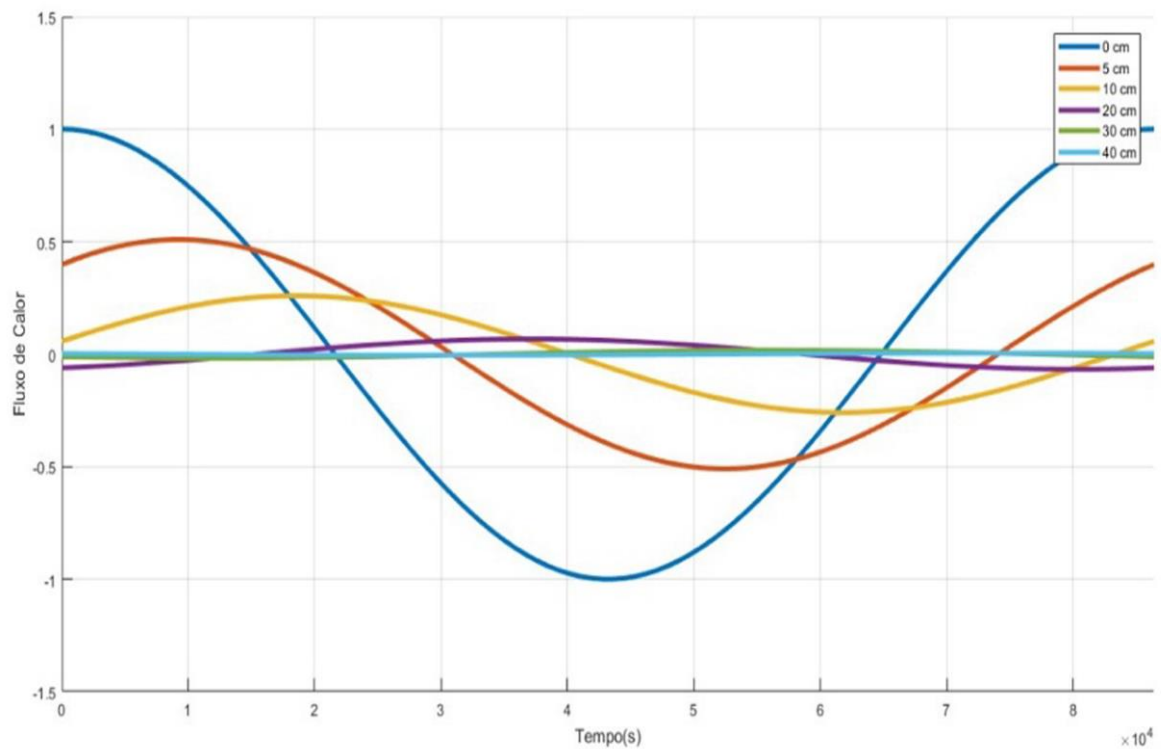
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n \cdot e^{2 \cdot \pi \cdot int/T}$$

$$d_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{2 \cdot \pi \cdot int/T} dt \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Os resultados desta análise da temperatura do solo foram descritos por Araújo e Lima (2019, p. 4)

Pode-se notar que o fluxo de calor é maior nas camadas mais rasas do solo nos períodos da manhã e início da tarde. Já no período do final da tarde até a noite, o módulo do fluxo de calor  $|u(x, t)|$  ainda é maior próximo da superfície, porém é negativo, indicando perda de calor. É possível observar que quanto maior a profundidade, menor o módulo do fluxo de calor e sua variação ao longo do dia, como ocorre em  $x = 30$  e  $x = 40$  cm que apresentam as curvas do fluxo de calor praticamente constantes iguais a zero.

Assim, pode-se notar o comportamento da transferência do calor no solo para diferentes níveis de profundidade da seguinte forma:



Fonte: Araújo e Lima (2019).

A imagem acima descreve o fluxo de calor em diferentes profundidades do solo, no decorrer do período de um dia.

É importante ressaltar que, além dos exemplos supracitados neste capítulo de aplicações da equação do calor, ainda há a possibilidade de várias outras utilizações da mesma, outros exemplos e aplicações podem ser encontrados nos livros (KOLODNER, 1956), (CANNON, 1984), (VÁZQUEZ, 2007) e (ÇENGEL; GHAJAR, 2015).

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A equação diferencial parcial da propagação do calor é de suma importância para modelar problemas de vários campos da ciência que envolvam essa dinâmica de difusão térmica, além disto, a equação do calor também desenvolve novos conhecimentos na matemática, com as equações parabólicas em derivadas parciais, na probabilidade e na matemática financeira, com a modelagem de passeios aleatórios.

Tendo esta importância em vista e também a importância histórica da equação do calor e dado o seu alto grau de complexidade, dá-se então a necessidade de dedução e explanação da formação deste modelo de Fourier e necessidade também de descrever as formas de solução desta equação para diferentes tipos de aplicações e condições de contorno, como realizado neste trabalho.

Foram apresentadas soluções clássicas para o modelo unidimensional, linear e homogêneo da equação do calor e também deduzido o modelo tridimensional da equação. Este estudo pode ser continuado em trabalhos posteriores com o uso de modelagem de computação gráfica auxiliado por *softwares* ou sensores para visualização clara da dinâmica de propagação do calor em materiais e modelagens virtuais. Ainda há muito o que se estudar a respeito da equação geral do calor, principalmente em situações não-homogêneas, meios e materiais ortotrópicos e meios porosos, além disso, também há a necessidade de estudo e abordagem da equação geral do calor aplicada a sólidos de diferentes geometrias, que resulta em séries trigonométricas, chamadas séries de Fourier, por ser ele o precursor do estudo desta equação e destas séries.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAÚJO, J. P; LIMA, G. S. *Um estudo das variações da temperatura do solo via equação do calor*. Artigo. Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 41, nº 3, 2019.

BLEECKER, D; CSORDAS, G. *Basic Partial Differential Equations*. [S.I.]: Chapman and Hall, 1995.

BOYCE, W. E; DiPRIMA, R. C. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. 10nd. ed. John Wiley & Sons, New York, 2012.

CANNON, J. R. *The one-dimensional heat equation* (No. 23). Cambridge University Press, 1984.

ÇENGEL, Y. A; GHAJAR, A. J. *Heat and mass transfer: fundamentals & applications*. 5nd. Ed. McGraw-Hill Education, New York, 2015.

EL BADIA, A; HA-DUONG, T. *On an inverse source problem for the heat equation. Application to a pollution detection problem*. Journal of inverse and ill-posed problems, 10(6), 585-599, 2002.

FIGUEIREDO, D. G. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. Editora IMPA, Rio de Janeiro, 2009, 4ª ed.

IÓRIO, V. *EDP: Um Curso de Graduação*. Brasília: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2005.

Jean, B.J. Fourier, *Théorie Analytique de la Chaleur*. Firmin Didot, Paris, 1822.

KOLODNER, I. I. *Free boundary problem for the heat equation with applications to problems of change of phase*. Comm. Pure Appl. Math, 9, 1-31, 1956.

ÖZİŞİK, M. N. *Heat Conduction*. 2nd. ed. New York: John Wiley & Sons, 1993.

ÖZİŞİK, M. N; ORLANDE, H. R. B. *Inverse Heat Transfer: Fundamentals and applications*. New York: Taylor & Francis, 2000.

RUPP, R. F. *Análise da transferência de calor em paredes compostas por tijolos maciços*. Trabalho de conclusão de curso. Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, 2009.

VÁZQUEZ, J. L. *The porous medium equation: mathematical theory*. Oxford University Press, 2007.

YOUNG, H. D; FREEDMAN, R. A. *Física II*. [S.I.]: Pearson Educación, 2008.