UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

MATHEUS MENDES RODRIGUES

PRINCÍPIO DO MÁXIMO RELACIONADO AO CRESCIMENTO DE VOLUME

FORTALEZA
2022

MATHEUS MENDES RODRIGUES

PRINCÍPIO DO MÁXIMO RELACIONADO AO CRESCIMENTO DE VOLUME

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto.

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

R614p Rodrigues, Matheus Mendes.
Princípio do máximo relacionado ao crescimento de volume / Matheus Mendes Rodrigues. – 2022.
43 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2022.
Orientação: Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto..

1. Princípio do máximo (Matemática). 2. Variedades riemannianas. 3. Crescimento de volume. 4. Subvariedades mínimas. 5. Hipersuperfícies com curvatura média constante. I. Título.

CDD 510

MATHEUS MENDES RODRIGUES

PRINCÍPIO DO MÁXIMO RELACIONADO AO CRESCIMENTO DE VOLUME

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Geometria Diferencial.

Aprovada em: 10/06/2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz
Neto. (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Jonatan Floriano Silva.
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Fábio Reis dos Santos.
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

À minha família, por sua capacidade de acreditar em mim e investir em mim.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto, por me orientar em minha dissertação de mestrado.

Aos meus pais e minha família, que nos momentos de minha ausência, dedicados ao estudo superior, sempre me fizeram entender que o futuro é feito a partir da constante dedicação no presente!

Agradeço a todos os meus professores, por me proporcionarem o conhecimento não apenas racional, mas a manifestação do caráter e afetividade da educação no processo de formação profissional, pelo tanto que se dedicaram a mim, não somente por terem me ensinado, mas por me terem feito aprender.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

"Sonhar o sonho impossível, sofrer a angústia implacável, pisar onde os bravos não ousam, reparar o mal irreparável, amar um amor casto à distância, enfrentar o inimigo invencível, tentar quando as forças se esvaem, alcançar a estrela inatingível: essa é a minha busca."

(CERVANTES, 1605)

RESUMO

Nesta dissertação, apresentamos uma nova forma do princípio do máximo para funções suaves em uma variedade riemanniana M, completa e não compacta, possuindo um campo vetorial limitado X satisfazendo que seu produto interno com o gradiente de uma função f é maior ou igual a zero em M e que seu divergente é maior ou igual a af fora de um conjunto compacto apropriado, sendo a uma constante positiva, e sob a hipótese de M ter crescimento de volume polinomial ou exponencial. Utilizaremos tal princípio para obter alguns resultados tipo-Bernstein para hipersuperfícies imersas em uma variedade riemanniana e munidas com um campo de Killing, assim como alguns resultados sobre a existência e o tamanho de subvariedades mínimas em uma variedade riemanniana munida com um campo vetorial conforme fechado.

Palavras-chave: princípio do máximo(matemática); variedades riemannianas; crescimento de volume; resultados tipo-Bernstein; hipersuperfícies com curvatura média constante; subvariedades mínimas.

ABSTRACT

In this Dissertation, it is presented a new form of maximum principle for smooth functions on a complete noncompact Riemannian manifold M for which there exists a bounded vector field X such that its inner product with the gradient of a function f is greather than or equal to zero on M and its divergent is greather than or equal af outside a suitable compact subset of M, for some positive constant a , under the assumption that M has either polynomial or exponential volume growth. We then use it to obtain some Bernstein-type results for hypersurfaces immersed into a Riemannian manifold endowed with a Killing vector field, as well as to obtain some results on the existence and the size of minimal submanifolds immersed into a Riemannian manifold endowed with a closed conformal vector field.

Keywords: maximum principle; riemannian manifolds; volume growth; bernstein-type results; constant mean curvature hypersurfaces; minimal submanifolds.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Várias versões do princípio do máximo aparecem naturalmente em diferentes áreas da Geometria Diferencial, devido ao fato que aspectos da Geometria Diferencial são modelados analiticamente por operadores diferenciais parciais elípticos, lineares ou quasi-lineares, em que variadas formas do princípio do máximo desempenham um papel crucial no desenvolvimento da teoria. Veja, por exemplo, as monografias recentes [3] ou [12] como evidências dessa afirmação.

Em artigo recente [1], foi derivada uma nova forma do princípio do máximo que é apropriada para o controle do comportamento de campos vetoriais com divergente não negativo em variedades riemannianas completas e não compactas. Tal princípio é análogo ao fato de que, nessas variedades, uma função subarmônica não negativa e que se anula no infinito é, na realidade, nula em todo ponto (Teorema 2.2 em [1]).

No primeiro capítulo, introduzimos os resultados preliminares sobre variedades suaves que serão usados ao longo da dissertação. No segundo capítulo, derivamos o princípio do máximo para funções suaves f em uma variedade Riemanniana M completa e não compacta, tendo como hipótese a existência de um campo vetorial limitado X em M, tal que $\langle \nabla f, X\rangle \geq 0$ em M e $\mathrm{div}(X) \geq af$ fora de um conjunto compacto adequado, para alguma constante $a > 0$, e assumindo que M tem crescimento de volume polinomial ou exponencial.

No terceiro capítulo, apresentamos aplicações do princípio do máximo a resultados tipo-Bernstein em hipersuperfícies imersas em variedades riemannianas munidas com campos de Killing, permitindo a extensão de alguns dos resultados encontrados em [1] para o caso de segunda forma fundamental limitada (e substituindo o comportamento da aplicação normal de Gauss da hipersuperfície no infinito por uma estimativa sobre o tamanho da função suporte em M.

Por fim, no capítulo 4, aplicamos o princípio do máximo para conseguir resultados sobre a existência e o tamanho de subvariedades mínimas imersas em uma variedade Riemanniana munida de um campo conforme fechado e, em particular, contida em um *produto warped* riemanniano. Mais particularmente, provamos uma generalização, a espaços ambiente *warped*, do fato de que não existe subvariedade mínima completa e não compacta com imagem contida em uma bola euclidiana e tendo crescimento de volume polinomial; provamos, também, uma generalização do fato de que o mesmo ocorre para subvariedades mínimas não compactas contidas em um semiespaço aberto do espaço hiperbólico e sendo limitadas por uma horoesfera.

2 PRELIMINARES

Nesta dissertação, precisaremos utilizar vários fatos sobre variedades suaves e variedades riemannianas. O mais das vezes, tais fatos são resultados padrão, tratados em quaisquer bons textos elementares sobre tais assuntos. Nesse sentido, sugerimos as referências [5], [10] e [11].

Aqui, para a comodidade do leitor, discorremos sobre alguns conceitos e resultados que ou não são tratados explicitamente nas fontes acima ou não são abordados num primeiro contato. As demonstrações não apresentadas podem ser encontradas nessas referências.

Em tudo o que segue, M^n é uma variedade Riemanniana n-dimensional com métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e conexão de Levi-Civita ∇.

2.1 A regra de Leibniz em variedades

Se M^n é orientada, com elemento de volume dM, e $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função suave com suporte compacto, definimos a integral de f em M pondo

$$\int_M f\,dM = \sum_{j=1}^{k} \int_{U_j} \phi_j f\,dM, \tag{2.1}$$

em que $\{(\phi_j, U_j); 0 \leq j \leq k$ é uma partição da unidade em M, tal que $U_0 = M \setminus \operatorname{supp} f$ e U_j é domínio de uma carta positiva $\varphi_j : U_j \to \mathbb{R}^n$, para $1 \leq j \leq k$. Não é difícil mostrar que o segundo membro de (2.1) independe da partição da unidade escolhida.

Recorde, também, que $\int_{U_j} \phi_j f\,dM$ é definida como a integral múltipla

$$\int_{U_j} \phi_j f\,dM = \int_{\varphi_j(U_j)} (\phi_j f) \circ \varphi_j^{-1} \sqrt{\det g}\,dx,$$

em que $g = (g_{ij})$ é a matriz de Gram da métrica na carta φ_j, e que o segundo membro da última igualdade acima independe da carta positiva escolhida, graças ao Teorema de mudança de variáveis em integrais múltiplas.

Se $F : M \times [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função suave, precisamos provar, para uso futuro, a seguinte versão da *regra de Leibniz* de diferenciação sob o sinal da integral.

Proposição 2.1. Seja M uma variedade Riemanniana orientada. Se $F : M \times [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função suave e com suporte compacto, então

$$\frac{d}{dt} \int_M F(\cdot,t) dM = \int_M \frac{\partial F}{\partial t}(\cdot,t) dM.$$

Demonstração. Nos apoiaremos na validade da regra de Leibniz para funções suaves $G : U \times [a,b] \to \mathbb{R}$, em que $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto. Nas notações da discussão anterior, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_M F(\cdot,t)dM &= \sum_{j=1}^{k} \frac{d}{dt}\int_{\varphi_j(U_j)} (\phi_j F(\cdot,t)) \circ \varphi_j^{-1}\sqrt{\det g}\,dx \\
&= \sum_{j=1}^{k} \int_{\varphi_j(U_j)} \frac{\partial}{\partial t}((\phi_j F(\cdot,t)) \circ \varphi_j^{-1})\sqrt{\det g}\,dx \\
&= \sum_{j=1}^{k} \int_{\varphi_j(U_j)} \left(\phi_j \frac{\partial F}{\partial t}(\cdot,t)\right) \circ \varphi_j^{-1}\sqrt{\det g}\,dx \\
&= \int_M \frac{\partial F}{\partial t}(\cdot,t)dM.
\end{aligned}$$

□

2.2 Referenciais geodésicos

Em uma variedade Riemanniana M, denotemos por γ_v a geodésica maximal de M que *parte de p com velocidade v*, isto é, tal que $\gamma_v(0) = p$ e $\gamma_v'(0) = v$.

Se $\mathscr{U} \subset TM$ é o subconjunto de TM formado pelos vetores v tais que γ_v está definida pelo menos no intervalo $[0,1]$, pode-se provar que $\mathscr{U}$ é aberto e, para todo $p \in M$, o subconjunto $\mathscr{U}_p := \mathscr{U} \cap T_pM$ é estrelado em relação a 0.

A *aplicação exponencial* de M é a aplicação $\exp : \mathscr{U} \to M$ tal que

$$\exp(v) = \gamma_v(1),$$

para todo $v \in \mathscr{U}$. Pode ser mostrado que exp é uma aplicação suave, o que permite definir a *aplicação exponencial de M em p* como a aplicação suave $\exp_p : \mathscr{U}_p \to M$, tal que

$$\exp_p(v) = \gamma_v(1),$$

para todo $v \in \mathscr{U}_p$. Nesse caso, pode-se mostrar que

$$\gamma_v(t) = \exp_p(tv),$$

para todo t tal que o segundo membro esteja definido.

Para todo $p \in M$, pode-se mostrar que existe um $r > 0$ tal que a bola $B(0;r) \subset T_pM$ está contida em $\mathscr{U}_p$ e a restrição de $\exp_p$ a $B(0;r)$ é um difeomorfismo sobre um aberto U_p de M contendo p. Nesse caso, diz-se que U_p é uma *bola normal centrada em p*.

Teorema 2.2. Se M é uma variedade Riemanniana n-dimensional e $p \in M$, então existem uma vizinhança U de p e um referencial ortonormal $(e_1, \ldots, e_n)$ definido em U e *geodésico em* p, isto é, tal que $(\nabla e_i)_p = 0$ para todo i.

Demonstração. Seja U_p uma bola normal centrada em p e $(e_1(p), \ldots, e_n(p))$ uma base ortonormal de T_pM. Para $q = \exp_p(v) \in U_p$, definimos $e_i(q)$ como o transporte paralelo de $e_i(p)$ ao longo da geodésica $\exp_p(tv)$. A demonstração da existência de bolas normais e a dependência suave das soluções de EDOs em relação às condições iniciais garantem que os campos e_i em U_p são suaves. As propriedades do transporte paralelo garante que eles formam uma base ortonormal em cada ponto $q \in U_p$.

Por fim, se $\gamma_j(t) = \exp_p(te_j)$, então o paralelismo de e_i ao longo de γ_j garante que

$$(\nabla_{e_j} e_i)_p = \nabla_{\gamma_j'(0)} e_i = \frac{De_i}{dt}\bigg|_{t=0} = 0.$$

□

2.3 Campos vetoriais completos

Uma variedade Riemanniana M é *completa* se o domínio de sua aplicação exponencial é todo o fibrado tangente TM. É possível provar o resultado fundamental a seguir.

Teorema 2.3 (Hopf-Rinow)**.** Os itens abaixo são equivalentes:

(a) M é uma variedade completa.

(b) Os conjuntos fechados e limitados de M são compactos.

(c) M é um espaço métrico completo.

(d) O domínio maximal das geodésicas de M é toda a reta real.

(e) Existe $p \in M$ tal que o domínio de $\exp_p$ é todo o espaço tangente T_pM.

Além disso, em uma variedade Riemanniana completa M, dados dois pontos quaisquer p e q, existe pelo menos uma geodésica com velocidade unitária, que liga esses dois pontos e cujo comprimento é igual à distância $d(p,q)$ entre p e q.

A partir de agora, suporemos que $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle, \nabla)$ é uma variedade Riemanniana completa.

Se X é um campo vetorial suave em M, existem um aberto $D \subset M \times \mathbb{R}$ tal que

$$D = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times I_p,$$

com $I_p \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto contendo 0, e uma função $\theta : D \to M$ satisfazendo as seguintes condições:

(a) $\frac{d}{dt}\theta(p,t) = X(\theta(p,t))$.

(b) A curva $\lambda_p(t) := \theta(p,t) : I_p \to M$ é maximal, ou seja, não se consegue um intervalo aberto I que contenha propriamente I_p e tal que $\lambda'(t) = X(\lambda(t))$ em I.

(c) Se $s \in I_p$ então $I_{\theta(p,t)} = I_p - s$.

(d) Para cada $t \in \mathbb{R}$ o conjunto $M_t = \{p \in M : (p,t) \in D\}$ é aberto e $\theta_t(\cdot) = \theta(\cdot,t) : M_t \to M_{-t}$ é um difeomorfismo com inversa θ_{-t}.

(e) Para cada $(p,t) \in D$, tem-se que $(\theta(.,t))_* X(p) = (\theta_t)_* X(p) = X(\theta(p,t))$.

(f) Para $h \in I_{\theta(p,t)}$ tem-se que $\theta(\theta(p,t),h) = \theta(p,t+h)$.

Tal aplicação θ é o *fluxo maximal* do campo X.

Nas notações do item (b), dizemos que $\lambda(\cdot) = \theta(p,\cdot)$ é a *curva integral maximal* de X partindo de p.

Se X é um campo vetorial em M com fluxo maximal θ, dizemos que X é *completo* se θ tiver domínio $M \times \mathbb{R}$. A esse respeito, o resultado de nosso interesse é o seguinte

Teorema 2.4. Se M é uma variedade Riemanniana completa e X é um campo vetorial suave em M tal que $\|X\| < C < +\infty$, então X é completo.

Demonstração. Seja $\lambda : I \to M$ a curva integral maximal partindo de p e assuma, por contradição, que $I \cap [0,+\infty) = [0,a)$, com $a > 0$. Para $0 < t < a$, tem-se

$$d(\lambda(t),\lambda(0)) \leq \int_0^t |\lambda'(s)|ds = \int_0^t |X(\lambda(s))|ds \leq Ct,$$

uma vez que $\lambda_{|[0,t]}$ é uma curva suave ligando $\lambda(0)$ to $\lambda(t)$. Da mesma forma, obtemos a estimativa

$$d(\lambda(s),\lambda(t)) \leq c|s-t|,\ \forall s,t \in [0,a). \tag{2.2}$$

Agora, tome uma sequência qualquer $(t_k)_{k\geq 1}$ em $[0,a)$, convergindo para a. A estimativa (2.2) mostra que $\lambda(t_k)$ é uma sequência de Cauchy. Uma vez que a variedade M é completa, segue do Teorema de Hopf-Rinow que $\lambda(t_k)$ converge para um ponto q. Novamente de (2.2), tal ponto q não depende da sequência t_k, de forma que $\lim_{t\to a-}\lambda(t) = q$.

Como $X : M \to TM$ é em particular contínuo, segue que $X(q) = \lim_{k\to+\infty} X(\lambda(t_k))$. Seja $\gamma : (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \to M$ uma curva integral de X satisfazendo $\gamma(a) = q$. Fixe $t_0 \in (a-\varepsilon, a)$ e seja $\psi : (0, a+\varepsilon) \to M$ be given by $\psi_{|[0,t_0]} = \lambda$ e $\psi_{|[t_0,t_0+\varepsilon)} = \gamma$; a unicidade de soluções de

EDOs assegura que ψ é uma curva integral de X que estende λ para além de a, o que é uma contradição.

Por fim, um argumento análogo se aplica para mostrar que a curva integral maximal de X partindo de p está definida para valores negativos arbitrários do parâmetro. $\square$

2.4 Campos de Killing

Sejam X e Y campos vetoriais suaves, θ o fluxo de X, ω um tensor suave em M e f uma função real suave em M. Definimos suas *derivada de Lie* no ponto $p \in M$ como segue:

$$\mathscr{L}_X Y = \lim_{t \to 0} \frac{(\theta_{-t})_* Y_{\theta_t(p)} - Y_p}{t}; \tag{2.3}$$

$$\mathscr{L}_X \omega = \lim_{t \to 0} \frac{(\theta_t)^* \omega_{\theta_{-t}(p)} - \omega_p}{t}; \tag{2.4}$$

$$\mathscr{L}_X f = \frac{df(\theta(t))}{dt} = Xf.$$

Em (2.3), é possível provar que $\mathscr{L}_X Y = [X,Y]$. Também, em (2.4), é possível provar que $\mathscr{L}_X \omega$ é um tensor suave, de mesmo tipo de ω. Ademais, para 2-tensores covariantes ω, vale a seguinte fórmula:

$$(\mathscr{L}_X \omega)(Y,Z) = X(\omega(Y,Z)) - \omega(\mathscr{L}_X Y, Z) - \omega(Y, \mathscr{L}_X Z), \tag{2.5}$$

para todos $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 2.5 (campos de Killing)**.** Seja $Y \in \mathfrak{X}(M)$ um campo com fluxo maximal θ. Dizemos que Y é um *campo de Killing* se $\theta(.,t)^* \langle \cdot, \cdot \rangle_p = \theta_t^* \langle \cdot, \cdot \rangle_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$, para todos $t \in \mathbb{R}$ e $p \in M$ tais que (t,p) pertença ao domínio de θ.

Pode-se provar que a condição de um campo suave X em M ser de Killing é equivalente ao fato de $\mathscr{L}_Y \langle \cdot, \cdot \rangle = 0$. A partir daí, e com o auxílio de (2.5), tem-se a seguinte

Proposição 2.6. [equação de Killing] Um campo Y em M é de Killing se, e só se, para todos $X,Z \in \mathfrak{X}(M)$, vale a *equação de Killing*:

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle = 0.$$

Demonstração. Inicialmente, note que

$$
\begin{aligned}
(\mathscr{L}_Y\langle\cdot,\cdot\rangle)(X,Z) &= Y\langle X,Z\rangle - \langle \mathscr{L}_Y X, Z\rangle - \langle X, \mathscr{L}_Y Z\rangle \\
&= \langle \nabla_Y X, Z\rangle + \langle X, \nabla_Y Z\rangle - \langle [Y,X], Z\rangle - \langle X, [Y,Z]\rangle \\
&= \langle \nabla_Y X - [Y,X], Z\rangle + \langle X, \nabla_Y Z - [Y,Z]\rangle \\
&= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\mathscr{L}_Y\langle\cdot,\cdot\rangle = 0$ se, e só se, $\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle = 0$ para todos $X, Z \in \mathfrak{X}(M)$. □

Um caso particular de campo de Killing é aquele de um campo *paralelo*, isto é, um campo suave Y tal que $\nabla Y = 0$, em que ∇Y denota a aplicação $X \mapsto \nabla_X Y$.

2.5 Grupos de Lie

Um *grupo de Lie* é uma variedade suave G que também é um grupo no sentido algébrico, tal que a multiplicação

$$
\begin{aligned}
m: \quad G\times G &\longrightarrow G \\
(a,b) &\longmapsto ab
\end{aligned}
$$

e a inversão

$$
\begin{aligned}
i: \quad G &\longrightarrow G \\
a &\longmapsto a^{-1}
\end{aligned}
$$

são aplicações suaves.

Um *subgrupo de Lie* de um grupo de Lie G é um subgrupo algébrico H de G, munido com uma topologia e uma estrutura suave que tornam H um grupo de Lie e a inclusão $\iota : H \to G$ uma imersão.

Dados um grupo de Lie G com multiplicação $m : G\times G \to G$ e $g \in G$, definimos a *translação à esquerda* $L_g : G \to G$ como a aplicação $L_g(\cdot) = m(g,\cdot)$. Evidentemente, L_g é suave e tem $L_{g^{-1}}$ como inversa, de sorte que ela é um difeomorfismo de G. Da mesma forma, definimos a *translação à direita* $R_g : G \to G$ como a aplicação $R_g(\cdot) = m(\cdot, g)$. Como com translações à esquerda, mostra-se que R_g é um difeomorfismo de G.

A *álgebra de Lie* de um grupo de Lie G, denotada $\mathrm{Lie}(G)$, é o subconjunto de $\mathfrak{X}(G)$ formado pelos campos suaves X tais que $(L_g)_*(X) = X$ para todo $g \in G$. Nesse caso, diz-se que X é um campo *invariante à esquerda* em G.

Se e é a identidade de um grupo de Lie G, é possível provar que os campos $X \in \mathrm{Lie}(G)$ são aqueles tais que, para algum $v \in T_eG$, tem-se

$$X_g = ((L_g)_*)_e(v), \tag{2.6}$$

para todo $g \in G$. Essa caracterização de $\mathrm{Lie}(G)$ permite identificar $\mathrm{Lie}(G)$ e T_eG.

Por outro lado, o resultado fundamental sobre a álgebra de Lie de um grupo de Lie é o objeto do seguinte

Teorema 2.7. A álgebra de Lie de um grupo de Lie G é fechada para o colchete de Lie de campos de vetores. Em símbolos, se $X,Y \in \mathrm{Lie}(G)$, então $[X,Y] \in \mathrm{Lie}(G)$.

Dado um grupo de Lie G, definimos uma *subálgebra de Lie* de $\mathrm{Lie}(G)$ como um subespaço vetorial $\mathfrak{h}$ de $\mathrm{Lie}(G)$ fechado para o colchete de campos de vetores. De posse desse conceito, temos o seguinte *Teorema de realização* de subgrupos de Lie.

Teorema 2.8. Se G é um grupo de lie e h é uma subálgebra de $\mathrm{Lie}(G)$, então existe um único subgrupo de Lie em G cuja a álgebra de Lie é $\mathfrak{h}$.

Para os propósitos dessa dissertação, a classe de grupos de Lie de nosso interesse é isolada na seguinte

Definição 2.9 (Grupo Riemanniano)**.** Um grupo de Lie G, munido com uma métrica Riemanniana, é um *grupo riemanniano* se L_g e R_g forem isometrias, para todo $g \in G$. Nesse caso, diz-se também, alternativamente, que a métrica Riemanniana de G é *biinvariante*.

Se G é um grupo riemanniano, e $X,Y \in \mathrm{Lie}(G)$, então, para $g \in G$, segue de (2.6) que

$$\langle X,Y\rangle_g = \langle ((L_g)_*)_e(X_e), ((L_g)_*)_e(Y_e)\rangle_g = \langle X_e, Y_e\rangle.$$

Assim, a função $g \mapsto \langle X,Y\rangle_g$ é constante.

É possível mostrar que uma métrica Riemanniana $\langle\cdot,\cdot\rangle$ em um grupo de Lie G é biinvariante se, e só se, ela satisfaz a *identidade de Weyl*:

$$\langle [X,Y],Z\rangle = \langle X,[Y,Z]\rangle, \tag{2.7}$$

para todos $X,Y,Z \in \mathrm{Lie}(G)$.

Teorema 2.10. Se G é um grupo riemanniano e $X,Y \in \mathrm{Lie}(G)$, então $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]$.

Demonstração. Para $X,Y,Z \in \mathrm{Lie}(G)$, a fórmula de Koszul para a conexão de Levi-Civita, juntamente com a constância das funções $g \mapsto \langle X,Y\rangle_g$, $g \mapsto \langle Y,Z\rangle_g$ e $g \mapsto \langle X,Z\rangle_g$ e a identidade de Weyl, dão

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle &= X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle - \langle [Y,Z],X\rangle + \langle [Z,X],Y\rangle + \langle [X,Y],Z\rangle \\ &= -\langle Y,[Z,X]\rangle + \langle [Z,X],Y\rangle + \langle [X,Y],Z\rangle \\ &= \langle [X,Y],Z\rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle 2\nabla_X Y - [X,Y], Z\rangle = 0$$

para todo $Z \in \mathrm{Lie}(G)$ e, daí, para todo $Z \in \mathfrak{X}(G)$. Mas aí, segue que $2\nabla_X Y - [X,Y] = 0$. $\square$

Se G é um grupo de Lie, o *centro* de sua álgebra de Lie é o conjunto dos $Y \in \mathrm{Lie}(G)$ tais que $[X,Y] = 0$ para todo $X \in \mathrm{Lie}(G)$.

Segue imediatamente do Teorema anterior que, se Y estiver no centro da álgebra de Lie de um grupo riemanniano, então Y é paralelo. Realmente, para $X \in \mathrm{Lie}(G)$, tem-se

$$2\nabla_X Y = [X,Y] = 0,$$

de sorte que $\nabla_X Y = 0$ para todo $X \in \mathrm{Lie}(G)$ e, daí, para todo $X \in \mathfrak{X}(G)$. Portanto, $\nabla Y = 0$.

Mais geralmente, temos a seguinte consequência do Teorema anterior.

Corolário 2.11. Em um grupo riemanniano, os elementos da álgebra de Lie são campos de Killing de comprimento constante.

Demonstração. Se G é um grupo riemanniano e $Y \in \mathrm{Lie}(G)$, já sabemos que $\langle Y,Y\rangle$ é constante em G. Então, para $X,Z \in \mathrm{Lie}(G)$, segue do Teorema anterior e da identidade de Weyl que

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle = \frac{1}{2}\big(\langle [X,Y],Z\rangle + \langle X,[Z,Y]\rangle\big) = \frac{1}{2}\big(\langle X,[Y,Z]\rangle - \langle X,[Y,Z]\rangle\big) = 0.$$

Assim, $\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle = 0$ para todos $X,Z \in \mathrm{Lie}(G)$ e, daí, para todos $X,Z \in \mathfrak{X}(G)$. Logo, Y é um campo de Killing de G. $\square$

2.6 Submersões Riemannianas

Se $f : \overline{M}^m \to M^n$ é uma submersão, ou seja, f_* é sobrejetivo em todos os pontos, e $p \in M$, dizemos que $F_p := f^{-1}(p)$ é a *fibra de f sobre p*. A forma local das submersões garante que F_p é uma subvariedade mergulhada de $\overline{M}$, de dimensão $m-n$.

Para $\overline{p} \in F_p$, temos que $T_{\overline{p}}F_p = \ker((f_*)_{\overline{p}} : T_{\overline{p}}\overline{M} \to T_pM)$. O complemento ortogonal $(T_{\overline{p}}F_p)^{\perp}$ de $T_{\overline{p}}F_p$ em $T_{\overline{p}}\overline{M}$ é denominado o *subespaço horizontal de $\overline{M}$ em $\overline{p}$.* Como $(f_*)_{\overline{p}} : T_{\overline{p}}\overline{M} \to T_pM$ é sobrejetiva, Álgebra Linear elementar garante que

$$(f_*)_{\overline{p}}\big|_{(T_{\overline{p}}F_p)^{\perp}} : (T_{\overline{p}}F_p)^{\perp} \to T_pM \tag{2.8}$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais entre o subespaço horizontal de $\overline{M}$ em $\overline{p}$ e o espaço tangente T_pM.

Se $f : \overline{M}^m \to M^n$ é uma submersão e $X \in \mathfrak{X}(M)$, então, para cada $\overline{p} \in \overline{M}$, existe um único vetor $Y_{\overline{p}} \in (T_{\overline{p}}F_p)^{\perp}$ tal que $(f_*)_{\overline{p}}(Y_{\overline{p}}) = X_p$. Isso define um campo Y em $\overline{M}$, denominado o *levantamento horizontal* de X, e pode-se mostrar que Y é suave.

Definição 2.12. Uma submersão $f : \overline{M}^m \to M^n$, entre variedades riemannianas $\overline{M}^m$ e M^n, é *Riemanniana* se a aplicação (2.8) for uma isometria, para todo $\overline{p} \in \overline{M}$.

Se $f : \overline{M}^m \to M^n$ for uma submersão Riemanniana e $Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ for o levantamento horizontal de $X \in \mathfrak{X}(M)$, é claro que $\|Y\| = \|X\|$.

3 O PRINCÍPIO DO MÁXIMO

Seja M uma variedade riemanniana conexa, orientada, completa e não compacta de dimensão n. Denotamos por $B(p,t)$ a bola centrada em p e de raio t. Como M é completa, temos que $\exp_p$ tem como domínio todo o T_p^n; logo, é fácil ver que a fronteira de $B(p,t)$ está contida em $\exp_p(\mathbb{S}^{n-1})$, portanto, tem medida nula. Assim, $\mathrm{Vol}(B(p,t))$ existe para todos p e t.

Dada uma função $\alpha : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$, dizemos que M tem crescimento de volume como α em p quando $\mathrm{Vol}(B(p,t)) = O(\alpha(t))$.

Teorema 3.1. Se $\alpha \in C^1$ é tal que $\limsup\limits_{t\to+\infty} \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} = L < +\infty$ então se M tem crescimento de volume como α em um ponto p, então ele tem crescimento de volume como α em todo ponto.

Demonstração. Seja $q \in M$ e $d = d(p,q)$, devemos mostrar que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Vol}(B(p,t))}{\alpha(t)} = 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Vol}(B(q,t))}{\alpha(t)} = 0.$$

Para isso, observamos que, para $t > d$, tem-se $q \in B(p,t)$. Além disso, se $x \in B(q,t-d)$, então

$$d(x,p) \leq d(x,q) + d(q,p) < (t-d) + d = t,$$

ou seja, $x \in B(p,t)$ e, consequentemente, $B(q,t-d) \subset B(p,t)$. Assim sendo, $\mathrm{Vol}(B(q,t-d)) \leq \mathrm{Vol}(B(p,t))$.

Portanto,

$$\frac{\mathrm{Vol}(B(p,t))}{\alpha(t)} \geq \frac{\mathrm{Vol}(B(q,t-d))}{\alpha(t)} = \frac{\mathrm{Vol}(B(q,t-d))}{\alpha(t-d)} \frac{\alpha(t-d)}{\alpha(t)}.$$

Agora, vemos que $\frac{\alpha(t-d)}{\alpha(t)} = e^{\log(\alpha(t-d)) - log(\alpha(t))}$. Pelo Teorema do valor médio, isso é igual a $e^{-d\frac{\alpha'(z_t)}{\alpha(z_t)}}$, para algum $z_t \in (t-d,t)$. Por hipótese, temos que $L = \limsup\limits_{t\to\infty} \alpha'(t)/\alpha(t)$, para algum L real, portanto existe T tal que, para todo $z > T$, tem-se $L+1 > \alpha'(z)/\alpha(z)$. Assim, tomando $t > T+d$, ocorre que $e^{-d\frac{\alpha'(z_t)}{\alpha(z_t)}} > e^{-d(L+1)} = C > 0$. Consequentemente,

$$\frac{\mathrm{Vol}(B(p,t))}{\alpha(t)} \geq C \frac{\mathrm{Vol}(B(q,t-d))}{\alpha(t-d)} > 0,$$

para todo $t > T+d$.

Como $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{Vol(B(p,t))}{\alpha(t)} = 0$, concluímos que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Vol}(B(q,t-d))}{\alpha(t-d)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Vol}(B(q,t))}{\alpha(t)} = 0.$$

Em particular, isso ocorre quando α é um polinômio ou da forma $e^{\beta t}$, pois, para $P(t)$ polinômio, $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{P'(t)}{P(t)}=0$, pois o grau de P' é menor do que o de P; no caso de $e^{\beta t}$, temos que esse limite é igual a β. □

Definição 3.2. Dizemos que o subconjunto Ω de M é estável com relação ao fluxo de $X\in\mathfrak{X}(M)$ se $\Psi_t(\Omega)\subset\Omega$ para todo $t\geq 0$, onde Ψ denota o fluxo maximal de X. Em particular, isso sempre ocorre para $\Omega=M$.

Teorema 3.3. Seja M uma variedade riemanniana conexa, orientada, completa e não compacta, e seja $X\in\mathfrak{X}(M)$ um campo vetorial limitado, com $\|X\|\leq c<+\infty$. Suponha, adicionalmente, que existe $K\subset M$ compacto tal que M/K é estável com relação a X. Tomando $f\in C^\infty(M)$ com $\langle\nabla f,X\rangle\geq 0$ em M e $\operatorname{div}(X)\geq af$ em M/K, para algum $a>0$, tem-se que:

(a) Se o crescimento de volume de M é polinomial, então $f\leq 0$ em M/K.

(b) Se o crescimento de volume de M é exponencial, digamos como $e^{\beta t}$, então $f\leq\frac{c\beta}{a}$ em M/K.

Demonstração. Lembramos que, pelo Teorema 2.4, como M é completa e X é um campo vetorial limitado, seu fluxo $\{\Psi_t\}$ está definido para todo t real.

Suponha que exista $p\in M/K$ com $f(p)>0$. Tomemos α e r satisfazendo que $0<\alpha<f(p)$ e $B=B(p,r)$ contida no interior de $A_\alpha=\{x\in M/K|f(x)>\alpha\}$. Definamos, para $t\geq 0$,

$$\phi(t)=\operatorname{Vol}(\Psi_t(B))=\int_{\Psi_t(B)}dV=\int_B\Psi_t^*dV.$$

Como Ψ_t é de classe C^∞, com inversa Ψ_{-t} também de classe C^∞, concluímos que $\Psi_t(B)$ é compacto com interior não vazio, logo, seu volume é positivo e, daí, $\phi(t)>0$.

Como B é compacta, segue da regra de Leibniz que

$$\phi'(t_0)=\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\int_{\Psi_{t_0+t}(B)}dV=\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\int_{\Psi_{t_0}(B)}\Psi_t^\star(dV)=\int_{\Psi_{t_0}(B)}\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\Psi_t^\star(dV).$$

Agora, $\Psi_t^\star(dV)=a(t)dV$, para alguma função suave $t\mapsto a(t)$. Tomemos, poi,s em uma vizinhança de p, um referencial geodésico $\{E_i\}_{i=1}^n$. Como $a(t)=dV(\Psi_{t\star}(E_1),\ldots,\Psi_{t\star}(E_n))$, podemos escrever $\Psi_{t\star}(E_{ip})=a^{ji}(t)E_{j\Psi_t(p)}$, sendo $a^{ij}(t)=\langle\Psi_{t\star}(E_{ip}),E_{j\Psi_t(p)}\rangle$.

Definindo $a_i(t)$ como o vetor $(a^{i1}(t),...,a^{in}(t))$ e usando as propriedade da n-forma dV, obtemos $\Psi_t^\star(dV) = det(a_i(t),...,a_n(t))dV$, logo,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|_{t=0}\Psi_t^\star(dV) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\det(a_i(t),...,a_n(t))dV \\
&= [\det(a_1'(0),a_2(0),...,a_n(0)) + \det(a_1(0),a_2'(0),...,a_n(0)) + \\
&\quad \ldots + \det(a_1(0),a_2(0),...,a_n'(0))]dV.
\end{aligned}
$$

Para $t_0 = 0$, temos que a_i é o vetor canônico e_i, pois $\Psi_0 = I$. Assim,

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\Psi_t^\star(dV) = [a'^{11}(0) + a'^{22}(0) + ... + a'^{nn}(0)]dV.$$

Agora, calculemos $a'^{ii}(0)$. Como $a^{ii}(t) = \langle \Psi_{t\star}(E_{ip}), E_{i\Psi_t(p)}\rangle$, temos que

$$a_{ii}'(0) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\langle \Psi_{t\star}(E_{ip}), E_{i\Psi_t(p)}\rangle = \langle \frac{D}{dt}\Psi_{t\star}(E_{ip}), E_{i\Psi_t(p)}\rangle + \langle \Psi_{t\star}(E_{ip}), \frac{D}{dt}E_{i\Psi_t(p)}\rangle.$$

A curva em que se está derivando acima é $\Psi(p,.)$, com $\frac{d}{dt}\Psi(p,t) = X_{\Psi(p,t)} = x^i E_{i\Psi(p,t)}$. Lembrando que tomamos um referencial geodésico em p, ou seja, $(\nabla_{E_i}E_j)_p = 0$, para todo i e j, vemos que $\frac{D}{dt}E_i = x^i\nabla_{E_i}E^i = 0$. Para calcular $\frac{D}{dt}\Psi_{t\star}(E_{ip})$, tomemos uma curva γ tal que $\gamma(0) = p$ e $\dot\gamma(0) = E_i$. Assim,

$$\frac{D}{dt}\Psi_{t\star}(E_{ip}) = \frac{D}{dt}\frac{d}{ds}\Psi(\gamma(s),t) = \frac{D}{ds}\frac{d}{dt}\Psi(\gamma(s),t) = \frac{D}{ds}X_{\Psi(\gamma(s),t)}.$$

No ponto $s = 0$ e em $t = 0$, temos que

$$\frac{D}{ds}X_{\Psi(\gamma(s),t)} = \nabla E_i(x^jE_j) = x^j\nabla_{E_i}E_j + E_i(x^j)E_j = E_i(x^j)E_j.$$

Com isso, concluímos que

$$a_{ii}'(0) = E_i(\langle X, E_i\rangle) = \langle \nabla_{E_i}X, E_i\rangle + \langle X, \nabla_{E_i}E_i\rangle = \langle \nabla_{E_i}X, E_i\rangle,$$

portanto,

$$\sum_{i=1}^n a_{ii}'(0) = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i}X, E_i\rangle = \operatorname{div}(X).$$

Consequentemente,

$$\phi'(t_0) = \int_{\Psi_{t_0}(B)} \operatorname{div}(X)dV. \tag{3.1}$$

Como $\frac{d}{dt}f(\Psi_t(x)) = \langle \nabla f, X\rangle_{\Psi_t(x)} \geq 0$, temos que $f(\Psi_t(x)) \geq f(\Psi_0(x)) = f(x) > \alpha$ para todo $t > 0$ e $x \in A_\alpha$. Como M/K é estável pelo fluxo de X, temos que $\Psi_t(A_\alpha) \subset A_\alpha$.

A desigualdade $\operatorname{div}(X) \geq af$, junto com a equação (3.1) e o fato que $\Psi_t(B) \subset \Psi_t(A_\alpha) \subset A_\alpha \subset M/K$, trazem que

$$\phi'(t) \geq \int_{\Psi_t(B)} af dV \geq a\alpha \int_{\Psi_t(B)} dV = a\alpha\phi(t),$$

para todo $t > 0$. Em particular $\phi'(t) > 0$ para $t > 0$, logo, $\phi(t) \geq \phi(0) = \operatorname{Vol}(B) > 0$. Assim, podemos integrar a desigualdade $\frac{\phi'(t)}{\phi(t)} \geq a\alpha$ no intervalo $[0,t]$ e encontrar que

$$\phi(t) \geq \operatorname{Vol}(B)e^{a\alpha t},\ \textit{para todo } t \geq 0. \tag{3.2}$$

Como $\Psi_s(x)$ é uma curva ligando x e $\Psi_t(x)$ e $\|X\| < c$, temos

$$d(x, \Psi_t(x)) \leq \int_0^t \|\frac{d}{ds}\Psi_s(x)\| ds = \int_0^t \|X_{\Psi_s(x)}\| \leq \int_0^t c = tc.$$

Portanto, para todo $x \in B$ temos

$$d(p, \Psi_t(x)) \leq d(\Psi_t(x), x) + d(x, p) \leq ct + r,$$

o que equivale a $\Psi_t(B) \subset B(p, ct + r)$, para todo $t \geq 0$. Isso, junto com a equação (3.2), resulta em

$$\operatorname{Vol}(B(p, ct + r)) \geq \operatorname{Vol}(\Psi_t(B)) = \phi(t) > \operatorname{Vol}(B)e^{a\alpha t}, \forall t \geq 0.$$

Substituindo, na fórmula acima, $s = ct + r$ e $C = \operatorname{Vol}(B)e^{\frac{-a\alpha r}{c}} > 0$ temos que

$$\operatorname{Vol}(B(p, s)) > Ce^{\frac{a\alpha s}{c}}, \forall s \geq r. \tag{3.3}$$

Suponha que M tem crescimento de volume polinomial. Então, a equação (3.3) não pode ser verdadeira para todo $s \geq r$, logo, nossa suposição inicial de que $f(p) > 0$ para algum $p \in M/K$ é falsa, ou seja, $f \leq 0$ em M/K.

Por outro lado, se o volume de M tem crescimento como $e^{\beta t}$ e existe $p \in M/K$ tal que $f(p) > \frac{c\beta}{a}$, então poderíamos repetir o raciocínio acima, com $\frac{c\beta}{a} < \alpha < f(p)$, e teríamos novamente que (3.3) não poderia ser verdadeira para todo $s \geq r$. Assim, $f \leq \frac{c\beta}{a}$ em M/K. $\square$

Observação 3.4. A hipótese de estabilidade de M/K sob o fluxo de X é necessária, pois, se $M = \mathbb{R}^2$, podemos tomar $X = \nabla f$, onde f é igual a $K_n(|x|)$ em $|x| > 1$ e K_n é a n-ésima função de Bessel modificada de segundo tipo. Recorde que K_n é solução da EDO

$$t^2 y''(t) + t y'(t) - (t^2 + n^2) y(t) = 0,$$

e é estritamente positiva e limitada, com derivada limitada; além disso, para $t \geq 1$, tem-se $K_n'(t) < 0$. Assim sendo, temos que, para $|x| > 1$

$$\nabla f = K_n'(|x|)\frac{x}{|x|} \;\; \Delta f = K_n''(|x|) + \frac{K_n'(|x|)}{|x|}.$$

Utilizando que

$$|x|^2 K_n''(|x|) + |x| K_n'(|x|) = (|x|^2 + n^2) K_n(t),$$

temos

$$\operatorname{div} X = \Delta f = (1 + \frac{n^2}{|x|^2}) K_n(|x|) \geq (1 + n^2) K_n(|x|).$$

Como $X = \nabla f = K_n'(|x|)\frac{x}{|x|}$ é radial em $\mathbb{R}^2/B(0,1)$, é fácil ver que o fluxo de X é da forma $\Psi(p,t) = f_p(t)\frac{p}{|p|}$. Realmente, basta tomar f_p solução da equação $f_p' = K_n'(f_p(t))$, com $f_p(0) = |p|$, a qual existe pelo Teorema de existência e unicidade das EDO; como $K_n' < c < 0$ no conjunto $\overline{B(0,2)}/B(0,1)$, temos que

$$f_p(t) - f_p(0) = \int_0^t f_p'(s) ds < tc.$$

Tomando $|q| = 1$, se o fluxo estiver definido para $|t| < \varepsilon$, sabemos que, para p suficientemente próximo, ele também estará definido para $|t| < \varepsilon$ Assim, $f_p(\frac{\varepsilon}{2}) < |p| - \frac{\varepsilon |c|}{2}$ e, tomando p com norma suficientemente próxima de 1, conseguimos que $\Psi(p, \frac{\varepsilon}{2}) \notin \mathbb{R}^2/\overline{B(0,1)}$, ou seja, não é estável pelo fluxo de X. Contudo, $\mathbb{R}^2$ tem crescimento de volume polinomial (pois $\mathrm{Vol}(B(p,r)) = r^2\pi$), X é limitado com f satisfazendo $\langle \nabla f, X \rangle \geq 0$ em M, e $\operatorname{div}(X) \geq (1+n^2) f$ em $\mathbb{R}^2/\overline{B(0;1)}$, com f positiva nesse conjunto. Para mais informação e demostrações sobre as propriedades das soluções da equação de Bessel ver [15].

4 RESULTADOS TIPO-BERNSTEIN PARA HIPERSUPERFÍCIES

Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade Riemanniana munida com um campo de Killing Y. Seja $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana conexa, orientável e não compacta M^n, e a orientemos tomando um campo vetorial normal unitário N.

Neste capítulo, usaremos o item (a) do Teorema 3.3 para estudar o comportamento de φ. O objetivo principal é estender alguns dos resultados de [1] para o caso em que a segunda forma fundamental é limitada, substituindo o comportamento de N no infinito por uma estimativa sobre o tamanho da função suporte $\eta = \langle N, Y\rangle$ ao longo de M.

Começaremos calculando $\nabla\eta$. Para isso, seja $A_N(.) = -\overline{\nabla}_{(.)}N$ o operador de Weingarten de φ com respeito a N. Fixados $p \in M$ e $v \in T_pM$, a fórmula de Killing, junto com a simetria de A no ponto p, nos dão

$$\begin{aligned}\langle\nabla\eta, v\rangle = v(\eta) &= \langle\overline{\nabla}_v N, Y\rangle + \langle N, \overline{\nabla}_v Y\rangle\\ &= -\langle A_N(v), Y^\top\rangle - \langle\overline{\nabla}_N Y, v\rangle\\ &= \langle -A_N(Y^\top) - \overline{\nabla}_N Y, v\rangle.\end{aligned}$$

Como isso é valido para todo $v \in T_p(M)$ e, pela equação de Killing, $\langle\overline{\nabla}_N Y, N\rangle = 0$, ou seja, $\overline{\nabla}_N Y \in T_p(M)$, concluímos que

$$\nabla\eta = -A_N(Y^\top) - \overline{\nabla}_N Y. \tag{4.1}$$

Se Y tiver norma 1, então, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que $\eta \leq 1$, com a igualdade ocorrendo ao longo de M se, e somente se, $Y = N$ ao longo de M, caso em que M seria uma variedade integral da distribuição $\langle Y\rangle^\perp$. Além disso, para $p \in M$ e $u, v \in T_p(M)$, a fórmula de Killing nos permite calcular

$$\langle A_{Np}(v), u\rangle = -\langle\overline{\nabla}_v N, u\rangle = -\langle\overline{\nabla}_v Y, u\rangle = \langle v, \overline{\nabla}_u Y\rangle = -\langle A_{Np}(u), v\rangle.$$

Como A_N é simétrico, concluímos que $A_N = 0$, portanto, M é totalmente geodésica em $\overline{M}$.

Para o resultado a seguir, recorde que uma variedade Riemanniana com métrica $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e tensor de Ricci, Ric, é dita *de Einstein* quando existe uma constante k tal que

$$\mathrm{Ric} = k\langle\cdot,\cdot\rangle.$$

Também, dizemos (veja [6] ou [7]) que Y é uma *direção canônica* de φ se $Y^\top$ é uma direção principal de A_N.

Teorema 4.1. Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade Riemanniana de Einstein, orientada e munida de um campo de Killing Y unitário. Seja $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade conexa, orientável, completa e não compacta M^n em $\overline{M}^{n+1}$, orientada pela escolha de um campo normal unitário N. Suponha que M tem curvatura média contante e segunda forma fundamental limitada. Se M tem crescimento de volume polinomial, Y é paralelo ou uma direção canônica de φ e a função suporte $\eta = \langle N, Y \rangle$ satisfaz a condição de crescimento

$$\eta \geq \frac{1}{|A_N|^2 + 1} \tag{4.2}$$

em M, então M é uma variedade integral da distribuição $\langle Y \rangle^{\perp}$. Em particular, M é totalmente geodésica em $\overline{M}$.

Demonstração. Como anteriormente, tomamos $\eta = \langle N, Y \rangle$. Seja $Y^{\top}$ a projeção ortogonal de Y em M, e defina $X = A_N(Y^{\top})$ e $f = 1 - \eta$.

Se Y é paralelo, então a equação (4.1) resulta em $\nabla \eta = -A_N(Y^{\top}) = -X$. Se Y é uma direção canônica de A_N, digamos $A_N(Y^{\top}) = \lambda Y^{\top}$, então a equação (4.1), juntamente com o fato de que $\overline{\nabla}_N Y$ não tem componente ortogonal e $\|Y\| = 1$, resulta em

$$\begin{aligned}
\langle \nabla \eta, X \rangle &= \langle -X - \overline{\nabla}_N Y, X \rangle = -\|X\|^2 - \langle \overline{\nabla}_N Y, \lambda Y^{\top} \rangle \\
&= -\|X\|^2 - \lambda \langle \overline{\nabla}_N Y, Y \rangle = -\|X\|^2 - \lambda \frac{1}{2} N \langle Y, Y \rangle \\
&= -\|X\|^2.
\end{aligned}$$

Em qualquer caso, temos que $\langle \nabla f, X \rangle = \|X\|^2 \geq 0$.

Por outro lado, para qualquer campo de Killing Y, temos

$$\operatorname{div}_M(X) = -\operatorname{Ric}_{\overline{M}}(Y^{\top}, N) + Y^{\top}(nH) + \eta \|A_N\|^2,$$

em que $\operatorname{Ric}_{\overline{M}}$ e H o tensor de Ricci de $\overline{M}$ e a curvatura média de φ.

De fato, fixado $p \in M$ e sendo $(e_1, \ldots, e_n)$ um referencial ortonormal em uma vizinhança de p, geodésico em p e diagonalizando A_N em p, temos em p que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}_M(A_N Y^{\top}) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} A_N Y^{\top}, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle -\overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{Y^{\top}} N, e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{R}(Y^{\top}, e_i) N - \overline{\nabla}_{Y^{\top}} \overline{\nabla}_{e_i} N - \overline{\nabla}_{[e_i, Y^{\top}]} N, e_i \rangle \\
&= -\operatorname{Ric}_{\overline{M}}(Y^{\top}, N) + Y^{\top}(nH) + \sum_{i=1}^{n} \langle A e_i, \overline{\nabla}_{e_i} Y^{\top} \rangle \\
&= -\operatorname{Ric}_{\overline{M}}(Y^{\top}, N) + Y^{\top}(nH) + \langle N, Y \rangle |A_N|^2.
\end{aligned}$$

Como H é constante e $\overline{M}$ é Einstein, temos que

$\mathrm{div}_M(X) = \eta \|A_N\|^2.$

Portanto a equação (4.2) é equivalente à desigualdade $\mathrm{div}_M(X) \geq f$ em M.

Agora, uma vez que $\|Y\| = 1$ e A_N é limitado, temos que X é limitado. Como M tem crescimento de volume polinomial, concluímos, pelo Teorema 3.3, que $f \leq 0$ em M. Entretanto, como $f \geq 0$, segue que $f = 0$ em M e, assim, $Y = N$ ao longo de M. Consequentemente, M é uma variedade integral de $\langle Y \rangle^{\perp}$, logo, é totalmente geodésica. □

Seja G é um grupo Riemanniano cuja métrica é Einstein, podemos aplicar o Teorema anterior a G para obter o seguinte

Corolário 4.2. Seja G^{n+1} um grupo de Lie riemanniano cuja métrica é Einstein. Seja $\varphi : M^n \to G^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta M em G, orientada pela escolha de um campo normal unitário N. Assuma que M tem curvatura média constante e que a segunda forma fundamental com respeito a N é limitada. Assuma também que existe um elemento não trivial $Y \in \mathrm{Lie}(G)$, que pertence ao centro de $\mathrm{Lie}(G)$ ou é uma direção principal de φ. Se M tem crescimento de volume polinomial e a função suporte $\eta = \langle N, Y \rangle$ satisfaz (4.2), então M é uma classe lateral de um subgrupo de Lie de G de codimensão 1.

Demonstração. O Teorema 4.1 afirma que M é uma variedade integral da distribuição $\langle Y \rangle^{\perp}$ e é totalmente geodésica em G. Como a distribuição $\langle Y \rangle^{\perp}$ é gerada por campos vetoriais invariantes à esquerda, temos que, para $p \in G$ e $q \in \mathrm{Im}(\varphi)$, a variedade imersa $L_{pq^{-1}} \circ \varphi$ contém p e é claramente uma variedade integral com respeito a $\langle Y \rangle^{\perp}$. Assim, essa distribuição é integrável.

Consequentemente, se $X, Z \in \langle Y \rangle^{\perp}$ e $p \in G$, então, tomando uma variedade integral M' passando por p, temos que $[X,Z]_p \in T_p(M') = \langle Y \rangle_p^{\perp}$. Assim, $\langle Y \rangle^{\perp}$ é involutiva, e os elementos da álgebra de Lie que são perpendiculares a Y formam uma subálgebra de $\mathrm{Lie}(G)$. Pelo Teorema 2.8, existe um subgrupo de Lie H de G, que passa pela identidade e tem $\mathrm{Lie}(G) \cap \langle Y \rangle^{\perp}$ como álgebra de Lie. Em particular, o espaço tangente de H é gerado por $\langle Y \rangle^{\perp}$.

Se M' contiver a identidade, então ambos H e M' são variedades integrais da distribuição $\langle Y \rangle^{\perp}$. Pelo Teorema de Frobenius e pela conexidade de M', tais variedades coincidem. Em geral, se $q \in M'$, então o argumento acima garante que $L_{g^{-1}}(M') = H$ e, daí, $M' = gH$. Em particular, $\mathrm{Im}(\varphi) = gH$, de sorte que M é igual a uma classe lateral de H, que tem codimensão 1. □

O próximo Corolário aplica o Teorema anterior ao caso em que temos uma hipersuperfície com curvatura média contante em $\mathbb{R}^{n+1}$. Isso pode ser visto como uma extensão parcial de um famoso resultado de Schoen, Simon e Yau ([14] ou [16]) para o caso de curvatura escalar limitada.

Corolário 4.3. Seja M^n uma variedade Riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta, com curvatura escalar limitada e crescimento de volume polinomial. Assuma que $\varphi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ é uma imersão com curvatura média constante, e seja N um campo vetorial normal unitário ao longo de M. Se existe um vetor unitário Y em $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\eta = \langle Y, N\rangle$ satisfaz (4.2) ao longo de M, então M é um hiperplano ortogonal a Y.

Demonstração. Se A_N é o operador de *Weingarten* relativo a N, temos pela equação de Gauss que

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z,T\rangle = \langle R(X,Y)Z,T\rangle - \langle B(X,Z),B(Y,T)\rangle + \langle B(X,T),B(Y,Z)\rangle.$$

Notando que

$$\begin{aligned}\langle B(X,Z),B(Y,T)\rangle &= \langle \langle B(X,Z),N\rangle N, \langle B(Y,T),N\rangle N\rangle\\ &= \langle A_N(X),Z\rangle\langle A_N(Y),T\rangle\end{aligned}$$

, e calculando $\langle B(X,Y),B(Z,T)\rangle$ de forma análoga, obtemos

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z,T\rangle = \langle R(X,Y)Z,T\rangle - \langle A_N(X),Z\rangle\langle A_N(Y),T\rangle + \langle A_N(X),T\rangle\langle A_N(Y),Z\rangle.$$

Como A_N é autoadjunto, o Teorema Espectral garante a existência de uma base ortonormal $(z_1,...,z_{n-1})$ formada por autovetores. Assim, existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tal que $\langle A_N(z_i),z_j\rangle = \lambda_i\langle z_i,z_j\rangle$, para todos $1 \leq i,j \leq n-1$. Tomando $X = Z = z_i$ e $Y = T = z_j$ e lembrando que em $\mathbb{R}^{n+1}$ tem-se $\overline{R} = 0$, segue que

$$0 = \langle R(z_i,z_j)z_i,z_j\rangle - \lambda_i\lambda_j + \lambda_i\lambda_j\delta_{i,j}.$$

Somando ambos os lados para todos os i, j possíveis, obtemos

$$0 = \sum_{i,j}\langle R(z_i,z_j)z_i,z_j\rangle - (\sum_i \lambda_i)^2 + \sum_i \lambda_i^2 = n(n-1)R - n^2H^2 + |A_N|^2.$$

Assim,

$$|A_N|^2 = n^2H^2 - n(n-1)R,$$

em que R é a curvatura escalar de M e H é a curvatura média de φ com relação a N. Então, como R é limitada e H é contante tem-se que A_N é limitada.

Olhando $\mathbb{R}^n$ como um grupo, munido com a operação usual de soma de vetores, é fácil ver que $\mathbb{R}^{n+1}$ é Einstein e que o campo vetorial constante Y está na centro da álgebra de Lie. Assim, basta aplicar o Corolário 4.2 a $\varphi(M)$ para concluir que M é a translação do subespaço vetorial ortogonal a Y. $\square$

Agora, estenderemos o Teorema 4.1 para o caso de curvatura média de ordem maior que 1. Como anteriormente, tomemos uma imersão isométrica $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ de uma variedade Riemanniana conexa e orientável em uma variedade Riemanniana orientada, e orientemos M pela escolha de um campo vetorial normal unitário N, com operador de Weingarten associado A_N.

Seguindo a Seção 3 de [2], define-se a r-ésima transformação de newton $T_r : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, recursivamente, por $T_0 = I$ e $T_r = S_r I - A_N T_{r-1}$ para $1 \leq r \leq n$, onde I é o operador identidade e $S_r(p)$ é a r-ésima soma simétrica elementar dos autovalores de A_{Np}.

Por indução, temos que

$$T_r = S_r I - S_{r-1} A_N + ... + (-1)^{r-1} S_1 A_N^{r-1} + (-1)^r A_N^r.$$

Em particular $T_n = P_{A_N}(A_N)$, onde P_{A_N} é o polinômio característico de A_N; portanto, $T_n = 0$ pelo Teorema de Cayley-Hamilton.

Como A_N é diagonalizável e T_r é um polinômio de A_N, temos que toda base que diagonaliza A_N também diagonaliza T_r. Além disso, por indução é fácil ver que se λ_i são os autovalores de A_N, então a matriz diagonalizada de T_r é

$$T_{r(i,i)} = \sum_{i_1 < ... < i_r, i_j \neq i} \lambda_{i_1} ... \lambda_{i_r}.$$

Realmente, assumindo a validade da fórmula acima para T_r, basta calcular:

$$\begin{aligned}
T_{r+1(i,i)} &= S_{r+1} I_{(i,i)} - (A_N T_r)_{(i,i)} \\
&= \sum_{i_1 < ... < i_{r+1}} \lambda_{i_1} ... \lambda_{i_{r+1}} - \lambda_i T_{r(i,i)} \\
&= \sum_{i_1 < ... < i_{r+1}} \lambda_{i_1} ... \lambda_{i_{r+1}} - \lambda_i \sum_{k_1 < ... < k_r, k_i \neq j} \lambda_{k_1} ... \lambda_{k_r} \\
&= \sum_{i_1 < ... < i_{r+1}, i_j \neq i} \lambda_{i_1} ... \lambda_{i_{r+1}}.
\end{aligned}$$

A partir desse fato, conseguimos estabelecer as seguintes fórmulas, para $1 \leq r \leq n$:

$$
\begin{aligned}
&(a)\ \operatorname{tr}(T_r) = (n-r)S_r.\\
&(b)\ \operatorname{tr}(A_N T_r) = (r+1)S_{r+1}.\\
&(c)\ \operatorname{tr}(A_N^2 T_{r-1}) = S_1 S_r - (r+1)S_{r+1}.
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

De fato, calculando

$$\operatorname{tr}(T_r) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i_1<\ldots<i_r, i_i\neq j} \lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_r}\right),$$

percebemos que o termo $\lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_r}$, com $i_1 < \ldots < i_r$, se repete exatamente $n-r$ vezes. Calculando

$$\operatorname{tr}(A_N T_r) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i_1<\ldots<i_r, i_i\neq j} \lambda_j\lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_r}\right),$$

o termo $\lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_{r+1}}$, com $i_1 < \ldots < i_{r+1}$, se repete exatamente $r+1$ vezes. Por fim, calculamos

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tr}(A_N^2 T_{r-1}) &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i_1<\ldots<i_{r-1}, i_i\neq j} \lambda_j^2\lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_{r-1}}\right)\\
&= \sum_{i_1<\ldots<i_r}\left(\sum_{j\in(i_1,\ldots,i_r)} \lambda_j\lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_r}\right)\\
&= \sum_{i_1<\ldots<i_r} \lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_r}\left(\sum_{j\in(i_1,..,i_r)} \lambda_j\right)\\
&= \left(\sum_{i_1<\ldots<i_r} \lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_r}\right)S_1 - \sum_{i_1<\ldots<i_r}\sum_{j\notin(i_1,\ldots,i_r)} \lambda_j\lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_r}\\
&= S_r S_1 - \sum_{i_1<\ldots<i_r}\left(\sum_{j\notin(i_1,\ldots,i_r)} \lambda_j\lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_r}\right)\\
&= S_r S_1 - (r+1)S_{r+1}.
\end{aligned}
$$

Em particular, pondo $r=1$ nas relações acima, obtemos

$$\operatorname{tr}(T_1) = (n-1)S_1 = (n-1)H,$$

e

$$|A_N|^2 = \operatorname{tr}(A_N^2) = S_1^2 - 2S_2.$$

Agora, tome um campo de Killing Y em $\overline{M}$ e denote por $Y^\top$ a a projeção ortogonal de Y em M. É possível demonstrar a seguinte fórmula (ver fórmula (8.4) de [2]), para $0 \leq r \leq n$:

$$\operatorname{div}(T_r Y^\top) = \langle \operatorname{div}_M(T_r), Y\rangle + \operatorname{tr}(A_N T_r)\langle N, Y\rangle, \tag{4.2}$$

em que $\text{div}(T_r)$ é o campo em M dado por

$$\text{div}_M(T_r) = \text{tr}(\nabla T_r). \tag{4.3}$$

Também pode-se mostrar (veja o Lema (3.1) de [2]) que, se $(e_1, ..., e_n)$ é um referencial ortonormal local em M, então

$$\langle \text{div}_M(T_r), V \rangle = \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{R}(N, T_{r-1}e_i)e_i, A_N^{j-1} V \rangle,$$

em que $\overline{R}$ é o operador de curvatura de $\overline{M}$. Em particular, se $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante, então a fórmula acima garante que $\text{div}_M(T_r) = 0$ em M.

Agora precisaremos do seguinte resultado.

Lema 4.4. Nas notações da discussão acima, se $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante e Y é um campo de Killing, então, para $0 \leq r \leq n$, temos que

$$\text{div}_M(A_N T_{r-1} Y^\top) = \langle \nabla S_r, Y^\top \rangle + \text{tr}(A_N^2 T_{r-1}) \langle N, Y \rangle.$$

Demonstração. Como $A_N T_{r-1} = S_r I - T_r$, temos que:

$$\begin{aligned}
\text{div}_M(A_N T_{r-1} Y^T) &= \text{div}_M(S_r Y^T) - \text{div}_M(T_r Y^T) \\
&= \langle \nabla S_r, Y^T \rangle + S_r \, \text{div}_M(Y^T) - \text{div}_M(T_r Y^T).
\end{aligned}$$

Levando em conta que $\text{div}_M(T_r) = 0$ e utilizando as equações (4.2) e as relações (4.1), vem que

$$\begin{aligned}
\text{div}_M(A_N T_{r-1} Y^\top) &= \langle \nabla S_r, Y^\top \rangle + S_r \, \text{tr}(A_N) \langle N, Y \rangle - \text{tr}(A_N T_r) \langle N, Y \rangle \\
&= \langle \nabla S_r, Y^\top \rangle + (S_1 S_r - (r+1) S_{r+1}) \langle N, Y \rangle \qquad (4.4) \\
&= \langle \nabla S_r, Y^\top \rangle + \text{tr}(A_N^2 T_{r-1}) \langle N, Y \rangle.
\end{aligned}$$

$\square$

Estamos finalmente em condições de generalizar o Teorema 4.1.

Teorema 4.5. Seja $\overline{M}$ uma variedade Riemanniana orientada, com curvatura seccional constante e munida com um campo de Killing Y de norma unitária. Seja $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade conexa, orientável, completa e não compacta, orientada pela escolha de um campo normal unitário N. Assuma que a segunda forma fundamental de φ é limitada, que T_{r-1} é não negativo e que $\text{tr}(T_r)$ é constante em M, para algum $1 \leq r < n$. Se M tem crescimento de volume polinomial, Y é paralelo ou uma direção canônica de φ e a função suporte $\eta = \langle N, Y\rangle$ satisfaz

$$\eta \geq \frac{1}{tr(A_N^2 T_{r-1})+1} \tag{4.5}$$

em M, então M é uma variedade integral da distribuição $\langle Y\rangle^{\perp}$. Em particular M é totalmente geodésica em $\overline{M}$.

Demonstração. Tomando novamente $f = 1-\eta$, temos $f \geq 0$, com igualdade se, e somente se, $N = Y$ ao longo de M. Seja $X = A_N T_{r-1} Y^{\top}$.

Como na prova do Teorema 4.1, se Y é paralelo, então $\nabla\eta = -A_N Y^T$. Se Y é uma direção canônica de φ, então, pelo fato de T_{r-1} ser um polinômio em A_N, temos que $A_N T_{r-1} Y^T = \mu Y^T$ para uma função μ em M. Como anteriormente,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla\eta, X\rangle &= \langle -A_N Y^{\top} - \overline{\nabla}_N Y, X\rangle \\
&= -\langle A_N Y^{\top}, A_N T_{r-1} Y^{\top}\rangle - \langle \overline{\nabla}_N Y, \mu Y^{\top}\rangle \\
&= -\langle Y^{\top}, A_N^2 T_{r-1} Y^{\top}\rangle - \mu\langle \overline{\nabla}_N Y, Y\rangle \\
&= -\langle A_N^2 T_{r-1} Y^{\top}, Y^{\top}\rangle,
\end{aligned}$$

onde, na última igualdade, utilizamos o fato de que $\overline{\nabla}_N Y$ não tem componente ortogonal e $\|Y\| = 1$. Então, em qualquer um dos casos acima, temos

$$\langle \nabla f, X\rangle = -\langle \nabla\eta, X\rangle = \langle A_N^2 T_{r-1} Y^{\top}, Y^{\top}\rangle.$$

Como T_{r-1} é autoadjunta e não negativa, ela tem uma raiz quadrada Q_{r-1}, a qual também comuta com A_N. Assim, Q_{r-1} é autoadjunta e, a partir dos cálculos acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \nabla f, X\rangle &= \langle (A_N Q_{r-1})^2 Y^{\top}, Y^{\top}\rangle = \langle (A_N Q_{r-1}) Y^{\top}, (A_N Q_{r-1})^* Y^{\top}\rangle \\
&= \langle (A_N Q_{r-1}) Y^{\top}, (A_N Q_{r-1}) Y^{\top}\rangle = \|A_N Q_{r-1} Y^{\top}\|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Por outro lado, como $tr(T_r)$ é constante, temos que S_r é constante, portanto a equação (4.4) implica

$$\operatorname{div}_M(X) = \operatorname{tr}(A_N^2 T_{r-1})\langle N, Y\rangle.$$

Portanto, a equação (4.5) é equivalente a $\operatorname{div}_M(X) \geq f$ em M.

Como A_N é limitado em M (pois a segunda forma fundamental é limitada em M), temos que $A_N T_{r-1}$ também é limitado em M (pois T_{r-1} é um polinômio em A_N). Então, a partir de $\|Y\| = 1$, concluímos que $X = A_N T_{r-1} Y^\top$ é limitado em M. Como M tem crescimento de volume polinomial o Teorema 3.3 implica que $f \leq 0$ em M, e o resto segue como na prova do Teorema 4.1. $\square$

5 SOBRE A EXISTÊNCIA E O TAMANHO DE SUBVARIEDADES MÍNIMAS

Ao longo de todo este capítulo, a menos que se diga o contrário, $\overline{M}^m$ é uma variedade Riemanniana m-dimensional com métrica $\overline{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle$ e conexão de Levi-Civita $\overline{\nabla}$. Lembramos que um campo vetorial Y é *conforme*, com fator conforme $\phi \in C^\infty(\overline{M})$, se

$$\mathscr{L}_Y(\overline{g}) = 2\phi\overline{g}.$$

Proposição 5.1. Se Y é um campo vetorial conforme, com fator conforme $\phi \in C^\infty(\overline{M})$, então, para todo $Z \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, temos que $\langle \overline{\nabla}_Z Y, Z \rangle = \phi \langle Z, Z \rangle$. Em particular, o divergente de Y é dado por $\mathrm{div}_{\overline{M}} Y = m\phi$.

Demonstração. Sendo θ o fluxo de Y, temos que

$$\begin{aligned} 2\phi(p)\overline{g}_p(Z_p, Z_p) = \mathscr{L}_p(\overline{g})(Z_p, Z_p) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\theta_t^* \overline{g}_{\theta(p,t)} - \overline{g}_p)(Z_p, Z_p) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\overline{g}_{\theta(p,t)}(\theta_{t*}Z_p, \theta_{t*}Z_p) - \overline{g}_p(Z_p, Z_p)). \end{aligned}$$

Sendo γ uma curva tal que $\gamma(0) = p$ e $\frac{d}{ds}\gamma(s) = Z(\gamma(s))$, e definindo $g(t,s) = \theta_t(\gamma(s))$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\overline{g}_{\theta(p,t)}(\theta_{t*}Z_p, \theta_{t*}Z_p) - \overline{g}_p(Z_p, Z_p)) &= \frac{D}{dt}\bigg|_{t=0} \overline{g}(\theta_{t*}Z_p, \theta_{t*}Z_p) \\ &= \frac{D}{dt}\bigg|_{t=0} \overline{g}(\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \theta_t(\gamma(s)), \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \theta_t(\gamma(s))) \\ &= 2\overline{g}_p(Z_p, [\frac{D}{dt}\frac{d}{ds}\theta_t(\gamma(s))(0,0)]). \end{aligned}$$

Por fim, basta observar que

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt}\frac{d}{ds}\theta_t(\gamma(s))(0,0) &= \frac{D}{ds}|_{s=0}(\frac{d}{dt}\theta_t(\gamma(s))(0,s)) \\ &= \frac{D}{ds}|_{s=0}(Y(\gamma(s))) = \nabla_{\frac{d\gamma}{ds}(0)} Y = (\nabla_Z Y)_p. \end{aligned}$$

Agora, a expressão para o divergente de Y é imediata. $\square$

Precisaremos também do seguinte

Lema 5.2. Sejam $\overline{M}$ uma variedade Riemanniana com métrica $\overline{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle$ e Y um campo conforme em $\overline{M}$, com fator conforme ϕ. Se $\varphi : M^n \to \overline{M}^m$ com $m > n$, é uma imersão isométrica e $X = Y_{|M}^\top$ é a projeção ortogonal de Y em M, então:

$$\mathrm{div}_M(X) = n(\phi_{|M} + \langle Y_{|M}, \overrightarrow{H} \rangle), \tag{5.1}$$

onde $\overrightarrow{H}$ é o vetor curvatura média de φ.

Demonstração. Fixe um referencial ortonormal $(e_1,...,e_n)$ em um aberto U de M. Tomando $l = m-n$ e diminuindo o aberto U, se necessário, podemos tomar um referencial ortonormal $(N_1,...,N_l)$ para $\mathfrak{X}(U)^{\perp}$. Portanto, $X = Y - \sum_{i=1}^{l} \langle Y, N_i\rangle N_i$ em U.

Sendo ∇ a conexão de Levi-Civita em M, segue que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}_M(X) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} X, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{e_i} X, e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{e_i} Y, e_i\rangle - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l} \langle \overline{\nabla}_{e_i} \langle Y, N_j\rangle N_j, e_i\rangle \\
&= n\phi - \sum_{j=1}^{l} \langle Y, N_j\rangle \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{e_i} N_j, e_i\rangle.
\end{aligned}$$

Denotando por A_j o operador de Weingerten de φ na direção N_j, temos que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}_M(X) &= n\phi + \sum_{j=1}^{l} \langle Y, N_j\rangle \sum_{i=1}^{n} \langle A_j(e_i), e_i\rangle \\
&= n\phi + \sum_{j=1}^{l} \langle Y, N_j\rangle tr(A_j) \\
&= n\phi + \langle Y, \sum_{j=1}^{l} N_j tr(A_j)\rangle \\
&= n\phi + \langle Y, n\overrightarrow{H}\rangle.
\end{aligned}$$

□

Continuando com a discussão de alguns fatos preliminares, seja B^k outra variedade Riemanniana, $\pi : \overline{M} \to B$ uma submersão Riemanniana e $Z \in \mathfrak{X}(B)$, com levantamento horizontal $\widetilde{Z}$. Dada uma função suave $h : B \to \mathbb{R}$, denotemos $\widetilde{h} = h \circ \pi : \overline{M} \to \mathbb{R}$.

Denotemos por Dh o gradiente de h em B e por $\overline{\nabla}\widetilde{h}$ o gradiente de $\widetilde{h}$ em $\overline{M}$. Seja, ainda, $K = \widetilde{Dh}$ é o levantamento horizontal de Dh.

Para $W \in N(\pi_*)$, ocorre que

$$\langle \overline{\nabla}\widetilde{h}, W\rangle = W(\widetilde{h}) = W(h\circ\pi) = \pi_*(W)(h) = 0,$$

ou seja, $\overline{\nabla}\widetilde{h} \in N(\pi_*)^{\perp}$. Além disso, para $V \in N(\pi_*)^{\perp}$ temos que

$$\langle \overline{\nabla}\widetilde{h}, V\rangle = V(\widetilde{h}) = V(h\circ\pi) = \pi_*(V)(h) = \langle Dh, \pi_*(V)\rangle = \langle \pi_*(K), \pi_*(V)\rangle = \langle K, V\rangle.$$

Consequentemente, $\overline{\nabla}\widetilde{h} = K = \widetilde{Dh}$.

No contexto acima, se $\varphi : M^n \to \overline{M}^m$ for uma imersão isométrica, tomemos $f = \widetilde{h} \circ \varphi$. Se ∇f denota o gradiente de f em M, então podemos mostrar, de forma análoga, que

$$\nabla f = (\widetilde{\overline{\nabla} h})^\top = (\widetilde{Dh})^\top. \tag{5.2}$$

Agora, assumamos que exista uma função suave $g : B \to [0, +\infty)$ e um campo vetorial $Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ tais que

$$\overline{\nabla}\widetilde{h} = \widetilde{g}Y.$$

Então com f como acima e $X = (Y_{|M})^\top$, a relação (5.2) dá-nos $\nabla f = \tilde{g}_{|M} X$, logo,

$$\langle \nabla f, X \rangle = \tilde{g}_{|M} \|X\|^2 \geq 0. \tag{5.3}$$

Além do mais, se Y for conforme com fator conforme ϕ, então segue de (5.1) que

$$\mathrm{div}_M(X) \geq af \iff n(\phi_{|M} + \langle Y_{|M}, \overrightarrow{H} \rangle) \geq a\widetilde{h}_{|M}. \tag{5.4}$$

Em particular, isso é automaticamente verdadeiro se φ for mínima e $n\phi \geq a\tilde{h}$ ao longo de M.

Estamos finalmente em condições de enunciar o resultado principal deste capítulo.

Teorema 5.3. Sejam $\pi : \overline{M} \to B^k$ uma submersão Riemanniana e $Y \in \mathfrak{X}(M)$ um campo conforme com fator conforme ϕ. Suponha que existam funções suaves $g : B \to \mathbb{R}$ e $h : B \to (0, +\infty)$ tais que $\overline{\nabla}\widetilde{h} = \widetilde{g}Y$. Seja $\varphi : M^n \to \overline{M}^m$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana orientada, completa e não compacta em $\overline{M}$, tal que $\widetilde{g}_{|M} \geq 0$, $n\phi_{|M} \geq a\widetilde{h}_{|M}$ e $\|Y_{|M}\| \leq c$, para alguma constante positiva c. Assim:

(a) Se M tiver crescimento de volume polinomial, então φ não pode ser mínima.

(b) Se M tiver crescimento de volume exponencial, digamos como $e^{\beta t}$, e φ for mínima, então $\widetilde{h}_{|M} \leq \frac{c\beta}{a}$.

Demonstração. A maior parte do trabalho já foi feito na discussão anterior: se $f = \widetilde{h}_{|M}$ e $X = (Y_{|M})^\top$, temos que $\|X\| \leq \|Y_{|M}\| \leq c$ e, de (5.3), $\langle \nabla f, X \rangle \geq 0$ em M. Além do mais, se φ for mínima, então (5.4) e nossas hipóteses implicam que $\mathrm{div}_M(X) \geq af$ em M. Agora, consideraremos separadamente os casos (a) e (b):

(a) O Teorema 3.3 afirma que $f \leq 0$ em M, o que é uma contradição, pois h é positiva em B.

(b) Segue imediatamente do Teorema 3.3.

□

Especializemos o resultado anterior a *produtos warped*.

Mais precisamente, tomamos uma variedade Riemanniana $(m-1)$-dimensional Σ^{m-1}, com métrica $d\sigma^2$, e um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, munido com a métrica usual dt^2. Definimos $\overline{M}^m = \Sigma \times I$, e denotamos por $\pi_\Sigma : \overline{M} \to \Sigma$ e $\pi_I : \overline{M} \to I$ as projeções canônicas. Se $h : I \to (0, +\infty)$ é uma função suave e $\widetilde{h} = h \circ \pi_I : \overline{M} \to I$, então

$$\bar{g} := \widetilde{h}^2 \pi_\Sigma^* d\sigma^2 + \pi_I^* dt^2$$

é uma métrica em $\overline{M}$. Munido com uma tal métrica, dizemos que $\overline{M}$ é um *produto warped* (*torcido*, em Inglês) de Σ e I, com *função warping* $\tilde{h}$. Resumimos essa construção escrevendo

$$\overline{M} = \Sigma \times_{\widetilde{h}} I.$$

Como T_pI é ortogonal a $T_p\Sigma$ em relação a $\bar{g}$, temos que $\pi_I : \overline{M} \to I$ é uma submersão Riemanniana.

Denotemos por ∂_t o campo vetorial canônico em I e por $\widetilde{\partial_t}$ seu levantamento horizontal a $\overline{M}$. Se

$$Y = \widetilde{h}\widetilde{\partial_t},$$

afirmamos que Y é um campo conforme com fator conforme $\phi = \widetilde{h}'$.

Realmente, se θ é o fluxo de Y, então $\theta((p_1,t_1),t) = (p_1, t_1 + s_{t_1}(t))$, onde s_{t_1} é solução da EDO com valores iniciais $\widetilde{h}(p_1, s_{t_1}(t)) = h(s_{t_1}(t)) = s'_{t_1}(t)$ e $s_{t_1}(0) = t_1$ sendo $s(t_1,t) = s_{t_1(t)}$ uma função suave satisfazendo que $s(s(t_1,t_2),t) = s(t_1, t+t_2)$. Calculemos θ_{t*} no ponto (p_1,t_1): para $v \in T_{p_1}(\Sigma)$, tomemos uma curva γ tal que $\gamma(0) = p_1$ e $\frac{d\gamma}{dt}(0) = v$. Assim, a curva (γ, t_1) passa por (p_1,t_1) com velocidade $(v,0)$, de forma que

$$\theta_{t*}(v,0) = \frac{d}{ds}|_{t=0}\theta_t(\gamma(s),t_1) = \frac{d}{ds}(\gamma(s), s_{t_1}(t)) = (v,0).$$

Além disso, temos que

$$\theta_{t*}(0,k) = \frac{d}{dx}\theta_t(p_1, t_1 + xk) = \frac{d}{dx}(p_1, s(t_1+xk,t)) = (0, \frac{d}{dx}s(t_1+xk,t)).$$

Como $\widetilde{h} > 0$, temos que s_{t_1} é invertível; portanto,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}s(t_1+xk,t) &= \frac{d}{dx}s(s(t_1, s_{t_1}^{-1}(t_1+xk)),t) = \frac{d}{dx}s(t_1, t + s_{t_1}^{-1}(t_1+xk)) \\ &= h'(s(t_1,t))\frac{1}{s'_{t_1}(0)} = \frac{h'(s(t_1,t))}{h'(t_1)},\end{aligned}$$

logo,

$$(\theta_{t*}(v,k))_{(p_1,t_1)} = (v, k\frac{h'(s(t_1,t))}{h'(t_1)}).$$

Agora, podemos calcular a derivada de Lie da métrica no ponto (p_1,t_1):

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}_Y(\widetilde{h}^2\pi_\Sigma^* d\sigma^2 \times \pi_I^*(dt))((v_1,k_1),(v_2,k_2)) = \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[(\widetilde{h}^2\pi_\Sigma^* d\sigma^2 \times \pi_I^*(dt))(\theta_{t*}(v_1,k_1),\theta_{t*}(v_2,k_2)) - (\widetilde{h}^2\pi_\Sigma^* d\sigma^2 \times \pi_I^*(dt))((v_1,k_1),(v_2,k_2))] \\
&= \lim_{t\to 0}\left[\widetilde{h}^2(t_1+t)d\sigma^2(v_1,v_2) + k_1k_2\left(\frac{h'(s(t_1,t))}{h'(t_1)}\right)^2 - \widetilde{h}^2(t_1)d\sigma^2(v_1,v_2) - k_1k_2\right] \\
&= 2d\sigma^2(v_1,v_2)h''(t_1) + \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}k_1k_2\left[\left(\frac{h'(s(t_1,t))}{h'(t_1)}\right)^2 - 1\right] \\
&= 2d\sigma^2(v_1,v_2)h''(t_1) + 2k_1k_2h''(t_1) \\
&= (2\widetilde{h}(\widetilde{h}d\sigma^2 + dt^2)_{(p_1,t_1)})((v_1,k_1),(v_2,k_2)),
\end{aligned}$$

conforme afirmado.

Além disso, se $g = \frac{h'}{h}$, então

$$\overline{\nabla}\widetilde{h} = \widetilde{h}'\widetilde{\partial}t = \widetilde{g}\widetilde{h}\widetilde{\partial}t = \widetilde{g}Y. \tag{5.5}$$

com $\widetilde{g} = g\circ\pi_I : \overline{M} \to \mathbb{R}$.

De posse dos fatos discutidos acima, podemos enunciar e demonstrar a seguinte consequência do Teorema anterior.

Corolário 5.4. Seja $\overline{M} = \Sigma \times_h I$ um produto warped. Tomamos uma imersão isométrica $\varphi : M^n \to \overline{M}^m$, de uma variedade Riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta M^n em $\overline{M}^m$, tal que $\widetilde{h} \le \frac{n}{a}\widetilde{h}'$ e $\widetilde{h} \le c$ em $\varphi(M)$, para alguma constante positiva c.

(a) Se M tem crescimento de volume polinomial, então M não pode ser mínima em $\overline{M}$.

(b) Se M tem crescimento de volume exponencial, digamos como $e^{\beta t}$, e M é mínima, então $\beta \ge a$.

Demonstração. Definindo $Y = \widetilde{h}\widetilde{\partial}t$ e $g = \frac{h'}{h}$, sabemos que Y é conforme, com fator fator conforme $\phi = \widetilde{h}'$, e (5.5) implica que $\overline{\nabla}\widetilde{h} = \widetilde{g}Y$. Além do mais, nossas hipóteses garantem que $\widetilde{g} \ge \frac{n}{a} > 0$, $n\phi - a\widetilde{h} \ge 0$ e $\|Y\| \le c$ em M. Assim o item (a) é uma consequência imediata do Teorema 5.3.

Quanto ao item (b), assuma, por contradição, que $\beta < a$. Então, concluímos do Teorema 5.3 que $\widetilde{h} \le \frac{c\beta}{a}$ em $\varphi(M)$. Como $\widetilde{h} > 0$ temos que $\beta > 0$. Assim, podemos aplicar o item (b) novamente, mas dessa vez com $\frac{c\beta}{a}$ no lugar de c, para concluir que $\widetilde{h} \leq c\left(\frac{\beta}{a}\right)^2$ em $\varphi(M)$. Repetindo esse processo, concluímos por indução que, para todo l natural, vale $\widetilde{h} \leq c\left(\frac{\beta}{a}\right)^l$ em $\varphi(M)$. Se fosse $0 < \beta < a$, teríamos $\frac{\beta}{a} < 1$; então, fazendo $l \to +\infty$, ficaríamos com

$$\widetilde{h} \leq \lim_{l\to+\infty} c\left(\frac{\beta}{a}\right)^l = 0$$

em $\varphi(M)$, o que é um absurdo. Logo, $\beta \geq a$. $\square$

Fechamos este capítulo analisando dois casos particulares do Corolário anterior.

Corolário 5.5. Sejam $(\Sigma^{m-1}, d\sigma^2)$ uma variedade Riemanniana $(m-1)$-dimensional e $\overline{M} = \Sigma \times_t (0,+\infty)$ o produto warped correspondente à função warping $h(t) = t$. Seja $\varphi : M^n \to \overline{M}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta em $\overline{M}$, tal que $\varphi(M) \subset \Sigma \times (0,R)$, para algum $R > 0$.

(a) Se M tem crescimento de volume polinomial, então φ não pode ser mínima.

(b) Se M tem crescimento de volume exponencial, digamos como $e^{\beta}t$, e φ é mínima, então $R \geq \frac{n}{\beta}$.

Demonstração. Observe que nas notações do Corolário anterior, $\widetilde{h} = t$ e $\widetilde{h}' = 1$. Logo, $\widetilde{h} \leq \frac{n}{a}\widetilde{h}'$ e $\widetilde{h} \leq c$ em M, com $a = \frac{n}{R}$ e $c = R$; Então, o o Corolário 5.4 implica o item (a) e também o item (b), pois $\beta \geq \frac{n}{R}$ é o mesmo que $R \geq \frac{n}{\beta}$. $\square$

O resultado anterior se aplica, em particular, ao caso de imersões isométricas limitadas no espaço euclidiano. De fato, seja $\varphi : M^n \to \mathbb{R}^m$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta em $\mathbb{R}^m$, tal que $\varphi(M) \subset B(0,R)$, para algum R positivo. Tomando qualquer $S > R$ e compondo φ com uma translação (que depende de S), se necessário, podemos supor que $\varphi(M) \subset B(0,S)$ e $0 \notin \varphi(M)$. Agora, olhando para $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ como o produto warped

$$\mathbb{R}^m \setminus \{0\} = \mathbb{S}^{m-1} \times_t (0,+\infty)$$

(por meio da isometria $\phi(v,t) = vt$), observamos que a imersão isométrica

$$\varphi : M \to \mathbb{R}^m/\{0\} = \mathbb{S}^{m-1} \times_t (0,+\infty)$$

é tal que $\varphi(M) \subset \mathbb{S}^{m-1} \times (0,S)$. Assim sendo, pelo Corolário 5.5, com $\mathbb{S}^{m-1}$ fazendo o papel de $(\Sigma, d\sigma^2)$, concluímos que, se M tem crescimento de volume polinomial, então φ não pode ser mínima; por outro lado, se M tem crescimento de volume exponencial, digamos como $e^{\beta t}$, e φ é mínima, então $S \geq \frac{n}{\beta}$. Mas, como isso ocorre para todo $S > R$, temos que $R \geq \frac{n}{\beta}$.

Para o que segue, recorde que o *Laplaciano* de uma função $u : M \to \mathbb{R}$ de classe C^2 é o divergente do gradiente de u.

Definição 5.6. Uma variedade Riemanniana M é *estocasticamente completa* quando, para toda função $u : M \to \mathbb{R}$ de classe C^2 com $u^* := \sup_M u < +\infty$ e todo $\gamma < u^*$, tivermos

$$\inf_{\Omega_\gamma} \Delta u \leq 0,$$

onde $\Omega_\gamma = \{x \in M : u(x) > \gamma\}$.

Nesse contexto, estimativas para o limite inferior para a curvatura média de uma imersão isométrica limitada são bem conhecidas e válidas sob a hipótese de completude estocástica (veja, por exemplo, a proposição 5.2 de [3]). Nesse ponto, é interessante mencionar que uma variedade Riemanniana satisfazendo certas condições de crescimento de volume é estocasticamente completa. Mais precisamente, em [9] (veja também o Teorema 9.1 em [8]) A. Grigor'yan provou que toda variedade Riemanniana completa satisfazendo

$$\int^{\infty} \frac{t}{\log V(t)} dt = +\infty$$

é estocasticamente completa. Aqui, $V(t)$ denota o volume da bola geodésica de raio t e com um centro fixado. Em particular, essa condição é satisfeita quando M tem crescimento de volume exponencial quadrático (isto é, como $e^{\beta t^2}$). Contudo, uma das vantagens do Corolário 5.4 é que ele se aplica ao caso de produtos warped como espaço ambiente, sem nenhuma suposição geométrica sobre $(\Sigma, d\sigma^2)$.

Nesse sentido, tomando a função warping $h(t) = e^t$ obtemos o seguinte

Corolário 5.7. Seja $(\Sigma, d\sigma^2)$ uma variedade Riemanniana de dimensão $m-1$ e seja $\overline{M} = \Sigma \times_{e^t} \mathbb{R}$ o produto warped correspondente à função warping $h(t) = e^t$. Seja $\varphi : M^n \to \overline{M}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana conexa, orientável, completa e não compacta M em $\overline{M}$, tal que $\varphi(M) \subset \Sigma \times (-\infty, b)$, para algum b real.

(a) Se M tem crescimento de volume polinomial, então φ não pode ser mínima.

(b) Se M tem crescimento de volume exponencial, digamos como $e^{\beta t}$, e φ é mínima, então $\beta \geq n$.

Demonstração. Nesse caso, temos $\tilde{h}(t) = \tilde{h}' = e^t$, de sorte que, nas notações do Teorema 5.3, temos $\tilde{h} \leq \frac{n}{a}\tilde{h}'$ em $\overline{M}$ para $a = n$. Além do mais, a condição de que $\varphi(M) \subset \Sigma \times (-\infty, b)$ para algum b real é equivalente a $\tilde{h} \leq c$ em M para algum c positivo. Portanto, o resultado segue como consequência do Teorema 5.3. $\square$

Ainda em relação ao Corolário anterior, tomando $(\Sigma, d\sigma^2)$ como $\mathbb{R}^{m-1}$ e olhando para o espaço hiperbólico como o produto warped

$$\mathbb{H}^m = \mathbb{R}^{m-1} \times_{e^t} \mathbb{R},$$

em que t é a função coordenada padrão de $\mathbb{R}$, vemos que os conjuntos $\mathbb{R}^{m-1} \times \{t\}$ são as horoesferas. Assim, o resultado anterior vale para imersões isométricas em horobolas $\mathbb{R}^{m-1} \times (-\infty, t)$ de $\mathbb{H}^m$.

Como no caso Euclidiano, limites inferiores para a curvatura média assumindo completude estocástica ou uma limitação apropriada são conhecidos para imersões isométricas em horobolas (Veja por exemplo [13] e, mais recentemente, [4]). Contudo, novamente, uma dos vantagens de nossos resultados é que eles não se aplicam somente a imersões isométricas no espaço hiperbólico, mas sim a produtos warped com função warping $h(t) = e^t$ e sem nenhuma suposição geométrica quanto a $(\Sigma, d\sigma^2)$.

6 CONCLUSÃO

Nesse trabalho vimos diversas aplicações e consequências do principio do máximo relativo ao crescimento de volume, sendo notável a diversidade de áreas em que ele se aplica, como em resultados tipo-Bernstein, hipersuperfícies com curvatura média constante, grupos de Lie e produtos warped ficando claro a importância do estudo do crescimento de volume para a construção do conhecimento sobre a geometria Riemanniana.

REFERÊNCIAS

[1] ALÍAS, L. J.; CAMINHA, A.; NASCIMENTO, F. Y. do. A maximum principle at infinity with applications. **J. Math. Anal. Appl**, v. 474, p. 242–247, 2019.

[2] ALÍAS, L. J.; LIRA, J. H. de; MALACARNE, J. M. Constant higher order mean curvature hypersurfaces in riemannian spaces. **Inst. Math. Jussieu**, v. 5, p. 527–562, 2006.

[3] ALÍAS, L. J.; MASTROLIA, P.; RIGOLI, M. **Maximum Principles and Geometric Applications**. New York, NY: Springer, 2006.

[4] BESSA, G. P.; LIRA, J. H. de; PIGOLA, S.; SETTI, A. G. Curvature estimates for submanifolds immersed into horoballs and horocylinders. **J. Math. Anal. Appl**, v. 431, p. 1000–1007, 2015.

[5] CARMO, M. P. do. **Riemannian Geometry**. Boston, MA: Birkhäuser, 1992.

[6] DILLEN, F.; FASTENAKELS, J.; VEKEN, J. Van der. Surfaces in S2xR with a canonical principal direction. **Ann. Global Anal. Geom**, v. 35, p. 381–396, 2009.

[7] GARNICA, E.; PALMAS, O.; RUIZ-HERNÁNDEZ, G. Hypersurfaces with a canonical principal direction. **Diff. Geom. Appl**, v. 30, p. 382–391, 2012.

[8] GRIGOR'YAN, A. Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the brownian motion on riemannian manifolds. **Bull. Amer. Math. Soc**, v. 36, p. 135–249, 1999.

[9] GRIGOR'YAN, A. On stochastically complete manifolds. **Engl. Transl. Soviet Math. Dokl**, v. 34, p. 310–313, 1987.

[10] LEE, J. M. **Introduction to Riemannian Manifolds**. New York, NY: Springer, 2009.

[11] LEE, J. M. **Introduction to Smooth Manifolds**. New York, NY: Springer, 2001.

[12] PIGOLA, S.; SETTI, A. G. Global divergence theorems in nonlinear pdes and geometry. **Ensaios Matemáticos**, v. 26, 2014.

[13] QIU, H. An estimate for the mean curvature of submanifolds contained in a horoball. **Acta Math. Sci. Ser. B (Engl. Ed.)**, v. 33, p. 1561–1570, 2013.

[14] SCHOEN, R.; SIMON, L.; YAU, S. T. Curvature estimates for minimal hypersurfaces. **Acta Math**, v. 134, p. 275–288, 1975.

[15] SIMMONS, G. F. **Differential Equations With Applications And Historical Notes**. Boca Raton, FL: CRC Press, 2017.

[16] XIN, Y. **Minimal Submanifolds and Related Topics**. Singapore: World Scientific Pub. Co, 2003.