



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM FÍSICA

GABRIEL SILVÉRIO SANTIAGO

**EMARANHAMENTO QUÂNTICO: QUANTIFICADORES DE CORRELAÇÃO EM
SISTEMAS QUÂNTICOS BIPARTIDOS**

FORTALEZA

2022

GABRIEL SILVÉRIO SANTIAGO

EMARANHAMENTO QUÂNTICO: QUANTIFICADORES DE CORRELAÇÃO EM
SISTEMAS QUÂNTICOS BIPARTIDOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Física do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S226e Santiago, Gabriel Silvério.

Emaranhamento Quântico : Quantificadores de Correlação em Sistemas Quânticos
Bipartidos / Gabriel Silvério Santiago. – 2022.
35 f.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro
de Ciências, Curso de Física, Fortaleza, 2022.

Orientação: Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho.

1. Quantificador de Emaranhamento. 2. Critério de Separabilidade. 3. Emaranhamento. 4.
Informação Quântica. I. Título.

CDD 530

GABRIEL SILVÉRIO SANTIAGO

EMARANHAMENTO QUÂNTICO: QUANTIFICADORES DE CORRELAÇÃO EM
SISTEMAS QUÂNTICOS BIPARTIDOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso de Graduação em Física do Centro
de Ciências da Universidade Federal do Ceará,
como requisito parcial à obtenção do grau de
bacharel em Física.

Aprovada em: 13/07/2022

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa
Filho (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Ramos Gonçalves
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dr. Valber da Silva Gomes

À minha família, que sempre providenciou apoio essencial para meus estudos. Em especial aos meus pais e irmãos, que por muitas vezes me deram a esperança para seguir. À minha namorada, pelo amor incondicional e aos meus amigos que me apoiaram em toda a minha jornada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais Roberto e Rocilda, à minha "segunda mãe" Maci e aos meus irmãos Rafael e Letícia, pelo amor incondicional, carinho, companherismo e por estarem presentes nos momentos mais difíceis da minha vida, sempre me impulsionando em direção aos meus objetivos.

Agradeço à minha namorada Tâmya, por todo o seu amor, cuidado e compreensão durante todos esses anos, sem dúvidas você foi fundamental em todas as minhas conquistas.

Agradeço ao meu tio Humberto, à minha tia Rose, e as minhas primas Vanessa e Débora por todo o suporte dado para que pudesse realizar esse sonho.

Agradeço ao meu falecido avô Humberto e à minha falecida avó Albaniza, por seu amor sem limites e por tudo o que me ensinaram.

Agradeço ao meu primo Anderson, à minha tia Fatinha, à minha tia Haussiria e ao Moarcir, por todas as lições, conselhos e boas risadas.

Agradeço aos meus amigos João Gabriel, Patriky, Haroldo e Douglas cujas conversas, conselhos e amizade me fizeram uma pessoa melhor.

Agradeço ao colega de pesquisa e amigo, Wagner, por todas as longas conversas sobre a pesquisa, sobre a física e sobre a vida, sem dúvidas essenciais para que conseguisse seguir em frente.

Agradeço aos amigos que fiz durante o curso: Lucas, Thiago, Willian, Jackson, João Pedro, Isaac, Nadson e tantos outros, cujas discussões, conversas e boas risadas foram fundamentais para que seguisse no curso.

Agradeço à professora Dra. Hilma Helena por ter me mostrado o quão fascinante é a área de Informação Quântica e por toda a sua paciência.

Agradeço ao colega Dr. Valber da Silva, por todo o seu empenho e paciência em corrigir esse trabalho e por todos os seus ensinamentos nessa área.

Agradeço ao Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho, por me orientar neste trabalho e pelas reuniões semanais, fundamentais para uma melhor compreensão da física e do que é ser um Físico.

Agradeço ao CNPq pelo financiamento da minha bolsa de Iniciação Científica, fundamental para o desenvolvimento deste trabalho.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo a introdução dos principais quantificadores e detectores de emaranhamento em sistemas quânticos bipartidos. Para isso, fez-se necessária a introdução de alguns conceitos básicos, tais como: Matriz densidade, entropia de Von Neumann, operações LOCC, entre outros. Posteriormente, foi realizada a definição para o emaranhamento de um sistema quântico, no contexto da Teoria da Informação Quântica. Além disso, discutiu-se acerca dos quantificadores e detectores de emaranhamento, seus requisitos, suas definições, limitações e aplicações. Por fim, foi possível encontrar o valor máximo no cálculo da entropia de emaranhamento de um estado puro maximamente emaranhado e determinar o intervalo em que um estado de Werner é emaranhado efetuando a aplicação do Critério de Peres-Horodecki.

Palavras-chave: quantificador de emaranhamento; critério de separabilidade; emaranhamento; informação quântica.

ABSTRACT

This article has the goal of introducing the main quantifiers and entanglement detectors in bipartite quantum systems. In order to do that, it was necessary to introduce a few basic concepts, such as: Density matrix, Von Neumann entropy, LOCC operations, among others. Afterwards, a discussion was made about a quantum system's entanglement, its requirements, definitions, limitations and applications. Finally, it was possible to find the maximum value in the calculation of the entropy of entanglement for a maximally entangled pure state and also find out the interval in which a Werner state is entangled, by applying the Peres-Horodecki Criterion.

Keywords: entanglement quantifier; separability criterion; entanglement; quantum information.

LISTA DE SÍMBOLOS

\otimes	Produto Tensorial
$Tr(\rho)$	Traço da Matriz densidade ρ
\mathcal{H}	Espaço de Hilbert
$dim(\mathcal{H})$	Dimensão do Espaço de Hilbert
$S(\rho)$	Entropia de Von Neumann
$H(\{p_i\})$	Entropia de Shannon
$E(\rho)$	Quantificador de Emaranhamento
$E_{en}(\rho)$	Entropia de Emaranhamento
$E_C(\rho)$	Custo de Emaranhamento
$E_F(\rho)$	Emaranhamento de Formação
$E_D(\rho)$	Emaranhamento de Destilação
$C(\rho)$	Concorrência de Wootters
ρ_W	Estado de Werner

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	13
2.1	O operador densidade	13
2.1.1	<i>Estado Puro</i> \times <i>Estado Misto</i>	13
2.1.2	<i>Operador Densidade Reduzido</i>	15
2.2	Entropia de Shannon X Entropia de Von Neumann	15
2.3	Operações LOCC	17
3	EMARANHAMENTO E SUAS MEDIDAS	18
3.1	Detectando o Emaranhamento	18
3.1.1	<i>Cr�terio de Peres-Horodecki (Cr�terio PPT)</i>	19
3.1.2	<i>Cr�terio de Redu�o</i>	20
3.1.3	<i>Entanglement Witness</i>	20
3.2	Quantificadores de Emaranhamento	21
3.2.1	<i>Para Estados Puros</i>	22
3.2.1.1	<i>Entropia de Emaranhamento</i>	22
3.2.2	<i>Para Estados Mistos</i>	23
3.2.2.1	<i>Emaranhamento de Forma�o</i>	23
3.2.2.2	<i>Emaranhamento Destil�vel</i>	24
3.2.2.3	<i>Custo de Emaranhamento</i>	24
4	RESULTADOS	26
4.1	Entropia de Emaranhamento de um estado puro	26
4.2	Cr�terio PPT em um estado de Werner	27
5	CONCLUS�ES	29
	REFER�NCIAS	31
	AP�NDICE A – Matriz Densidade para Estados Puros	33

1 INTRODUÇÃO

O século XX foi um período revolucionário na história da física, em que houveram mudanças de paradigma essenciais para a estruturação da ciência moderna tal qual conhecemos hoje. Uma série de conclusões "absurdas" começaram a surgir em consequência da análise de fenômenos atômicos, a partir do ponto de vista clássico, como por exemplo a "Catástrofe do Ultravioleta". Com o maior entendimento das teorias atômicas e seus fenômenos (tais como o Efeito Compton e o Efeito Fotoelétrico), percebeu-se que estas não poderiam ser explicadas pela teoria física vigente (aquela que nos referimos atualmente como Teoria Clássica), dessa maneira tornou-se necessária a adoção de uma nova teoria capaz de elucidar essas questões de maneira satisfatória. (NIELSEN; CHUANG, 2000).

Essa nova teoria teve sua primeira contribuição datada do ano de 1900 quando o físico Max Planck apresentou o trabalho intitulado "*On the Theory of the Energy Distribution Law of the Normal Spectrum*" (PLANCK, 1900), em que propôs a hipótese da quantização da energia como solução para a distribuição de energia observada no espectro contínuo da radiação de corpo negro. Porém, foi apenas na segunda década do século passado, que houve o surgimento da teoria moderna da Mecânica Quântica (MQ), sendo esta encarada como o alicerce para a construção de teorias físicas modernas (NIELSEN; CHUANG, 2000).

Por outro lado, mesmo com a notória acertividade dessa teoria, esta possuía conceitos extremamente contraintuitivos e que, por conta disso, levaram diversos físicos a discordarem com relação a sua interpretação física. O conceito que gerou o debate mais acalorado no surgimento da MQ foi com relação à natureza indeterminada e probabilística de sua teoria, mesmo quando temos posse de todo o conhecimento possível acerca de um determinado sistema. Dessa maneira, houve uma cisão na maneira de interpretar essa característica inerente da MQ, resultando em duas correntes de pensamento distintas (GRIFFITHS; SCHROETER, 2018):

1. Visão Ortodoxa
2. Visão Realista

Foi nesse interim que as ideias e interpretações da teoria da MQ endossada pela visão ortodoxa, foram defendidas por Einstein, Podolsky e Rosen (EPR), no artigo de 1935 intitulado "*Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*" (EINSTEIN *et al.*, 1935). Os autores não aceitavam a visão probabilística da MQ, acreditando que esta deveria ser uma decorrência do fato de que sua teoria seria incompleta e que deveria haver alguma formulação mais geral que a teoria quântica. Alicerçado nas considerações desses autores,

David Bohm propôs uma descrição determinística da teoria, em que ao considerar um conjunto de variáveis locais denominadas *Variáveis Ocultas*, poderíamos determinar com precisão o comportamento de sistemas quânticos e que levaria, em tese, aos mesmos resultados propostos pela interpretação Copenhage (BOHM, 1952a; BOHM, 1952b). Acreditava-se, portanto, que a incerteza que surgia da teoria quântica seria fruto de uma necessidade prática e não uma manifestação da natureza em nível quântico.

Apenas em 1964, John Stewart Bell, foi capaz de demonstrar que a teoria da Mecânica Quântica não poderia ser descrita por meio de uma teoria de variáveis ocultas locais. Em seu artigo “*On the Einstein Podolsky Rosen Paradox*” (BELL, 1964), Bell constatou que qualquer teoria de variáveis ocultas e locais deve obedecer à uma desigualdade, a *Desigualdade de Bell*. Porém, no mesmo artigo foi comprovado que a teoria da MQ viola tal resultado, sendo então considerada como uma teoria essencialmente não-local. Ao conceito de não-localidade observada a partir da violação da Desigualdade de Bell, foi associada a ideia de emaranhamento (GOMES, 2018). Atualmente é um tópico central na teoria da informação quântica, visto que é utilizado como recurso para que diversas tarefas de computação quântica sejam realizadas de maneira mais rápida ou mais segura quando comparadas com aquelas executadas de maneira clássica.

Neste trabalho, será feita uma introdução ao estudo do emaranhamento, desde a sua definição até a sua quantificação em sistemas quânticos específicos. No capítulo 2, serão apresentados conceitos essenciais para a formulação do emaranhamento, tais como as definições de estados puros e mistos, além da descrição de sistemas quânticos compostos e operações LOCC. No capítulo 3, será definido o conceito do emaranhamento e sua correlação com as operações LOCC. Além disso, serão enunciados alguns métodos para a detecção de emaranhamento e os principais quantificadores utilizados para sistemas bipartidos, ressaltando suas limitações e comentando sua aplicabilidade. Por fim, no capítulo 4, será feita a quantificação de emaranhamento de um estado puro maximamente emaranhado e será executada a aplicação de um método de detecção de emaranhamento em um estado de Werner.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 O operador densidade

Com o desenvolvimento da Mecânica Quântica, percebeu-se que a descrição de estados quânticos utilizando vetores de estado não é adequado para descrever sistemas quânticos mais complexos, visto que não contempla, por exemplo, o que foi definido como mistura estatística de estados. Imagine que não possuímos informação completa acerca de um determinado estado $|\psi\rangle$, de tal forma que, o estado desse determinado sistema é previsto apenas estatisticamente, ou seja, possui uma probabilidade p_k de ocorrência de um determinado estado $|\psi_k\rangle$. De que forma poderemos descrever o estado que representa esse sistema?

Não podemos representar esse estado por meio de uma combinação linear (vetor de estado):

$$|\psi\rangle = \sum_k c_k |\psi_k\rangle \rightarrow k \in \mathbb{N}^*. \quad (2.1)$$

Isso se deve ao fato de que a natureza probabilística do caso em que estamos trabalhando não surge por meio do fenômeno de superposição, mas sim por conta da falta de informação (ignorância) que temos acerca desse sistema. Para que possamos representar estados em que não possuímos completa informação, foi proposto o operador ρ , dado por:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (2.2)$$

Que caracterizaria não somente a mistura estatística de estados puros que comentamos, mas qualquer estado quântico de interesse, em especial aqueles descritos por meio de um vetor de estado. Esse operador recebeu o nome de *Operador Densidade* ou ainda *Matriz Densidade*.

2.1.1 Estado Puro \times Estado Misto

Definição 2.1.1 ((COHEN-TANNOUJJI *et al.*, 2020)) *Um sistema é dito estar em um Estado Puro quando podemos representá-lo através de um vetor de estado $|\psi\rangle$.*

Ou seja, possuímos informação completa acerca do estado que representa o sistema analisado. Todo estado que não pode ser representado por meio de um vetor de estado é definido

como um *Estado Misto*. Porém, é importante ressaltar que podemos realizar a descrição completa de um Estado Puro através do uso de matrizes densidade. Para isso, provamos no Apêndice A que as condições abaixo são válidas para essa nova abordagem:

1. Condição de Normalização: $\text{Tr}[\rho] = 1$
2. Valor Esperado de um operador \hat{A} : $\langle \hat{A}(t) \rangle = \text{Tr}[\hat{A}\rho(t)]$
3. Evolução Temporal: $\frac{d}{dt}(\rho(t)) = \frac{1}{i\hbar} [H(t), \rho(t)]$

De uma maneira mais formal, pode-se afirmar que:

- Um operador densidade $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ definido sobre um espaço de estados \mathcal{H} é o operador densidade de um ensemble $\{p_i |\psi_i\rangle\}$, se e somente se satisfizer as condições abaixo (GUIMARAES, 2012):

1. $\text{Tr}[\rho] = 1 \rightarrow$ Normalização
2. $\rho \geq 0 \rightarrow$ Positividade

Uma vez que ρ satisfaz a condição de positividade, deve existir uma decomposição espectral associada a ele (NIELSEN; CHUANG, 2000):

$$\rho = \sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i| \quad (2.3)$$

Onde $|i\rangle$ são os vetores ortogonais da base e λ_i são os autovalores reais e não-negativos de ρ . Por conta da condição de normalização imposta à matriz densidade, teremos uma condição de normalização também presente em seus autovalores: $\sum_i \lambda_i = 1$.

Um exemplo de estado misto bastante estudado na literatura é o *Estado de Werner*. Para um sistema bipartido, este pode ser definido como a mistura entre um estado puro maximamente emaranhado $|\Psi\rangle$, com probabilidade associada p e um estado maximamente misturado, com probabilidade associada $(1 - p)$. Nesse caso (GHASEMIAN; TAVASSOLY, 2021):

$$\rho_W = p |\Psi\rangle \langle \Psi| + \frac{(1-p)}{4} \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}. \quad (2.4)$$

Em que:

- $|\Psi\rangle$ é um estado puro maximamente emaranhado.
- $\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}$ é um estado maximamente misturado de dimensão 4.

Vale ressaltar que, p não será interpretado apenas como uma probabilidade de ocorrência, mas sim como um parâmetro para o estado de Werner. Podemos perceber que, quando $p = 1$ o estado

de Werner será um estado puro maximamente emaranhado e quando $p = 0$ o mesmo será um estado maximamente misturado.

2.1.2 Operador Densidade Reduzido

É bastante comum, no estudo da Teoria da Informação Quântica, que nos deparemos com sistemas constituídos de mais de uma "parte", ou seja, mais de um sistema físico individual. Nomeamos estes de *Sistemas Compostos*. De maneira mais formal, um sistema composto representado pelo operador densidade $\rho_{1,2,\dots,n}$ é aquele definido sobre o espaço de estados $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$ formado pelo produto tensorial do espaço de estado de cada sistema físico individual (GUIMARAES, 2012). Sistemas compostos formados por apenas dois sistemas físicos individuais são denominados de *Sistemas Bipartites* (ou bipartidos).

Quando estudamos sistemas compostos e, em particular, sistemas bipartites, é comum analisarmos apenas uma das "partes" desse sistema. Se ρ_{AB} é a matriz densidade que representa o sistema bipartite, poderemos definir um operador densidade ρ_A que descreverá o estado apenas do subsistema A e outro ρ_B que descreverá o estado apenas do subsistema B. Denominaremos os operadores ρ_A e ρ_B como *matrizes densidade reduzidas* e são definidas como (GUIMARAES, 2012):

$$\begin{aligned}\rho_A &= \text{Tr}_B[\rho_{AB}] \\ \rho_B &= \text{Tr}_A[\rho_{AB}]\end{aligned}\tag{2.5}$$

Mas, por que motivo utilizaremos as matrizes densidade reduzidas para descrever o subsistema de um determinado estado? Isso se deve ao fato de que o traço parcial é a única operação que gera uma descrição correta para medições realizadas no subsistema de um sistema composto (NIELSEN; CHUANG, 2000).

2.2 Entropia de Shannon X Entropia de Von Neumann

Quando analisamos fenômenos probabilísticos, é natural nos indagarmos sobre a quantidade de informação que podemos extrair de um determinado evento, antes que qualquer medição seja feita sobre ele. Uma das tentativas de realizar essa quantificação é dada por (MAZIERO, 2015):

$$I = \frac{1}{p}.\tag{2.6}$$

Onde p representa a probabilidade associada ao evento analisado, ou seja, quanto mais improvável é determinado evento, mais informações extrairemos dele ao realizarmos uma determinada medição. Uma das restrições que deveremos fazer acerca dessa medida é de que ela seja aditiva para eventos independentes, ou seja, para dois eventos independentes 1 e 2 espera-se que a informação total obtida sobre eles seja:

$$I_{12} = I_1 + I_2. \quad (2.7)$$

Como é sabido da teoria das probabilidades, quando temos a probabilidade associada a eventos independentes:

$$p_{12} = p_1 p_2 \quad (2.8)$$

Dessa maneira fica evidente que não poderemos utilizar a definição previamente enunciada para quantificar a informação, uma vez que $\frac{1}{p_1 p_2} \neq \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$. Portanto, a definição foi reformulada para que obedecesse à propriedade da aditividade, resultando em:

$$I = \log_2 \left(\frac{1}{p} \right) = -\log_2(p) \quad (2.9)$$

Para o caso geral em que teremos uma variável aleatória X que poderá assumir um conjunto discreto e finito de valores $\{x_i\}_{i=1}^k$ com probabilidades $\{p_i\}_{i=1}^k$ associadas, recaímos na função denominada *Entropia de Shannon* (MAZIERO, 2015):

$$H(\{p_i\}) = -\sum_{i=1}^k p_i \log_2(p_i) \quad (2.10)$$

A extensão desse conceito para o escopo da Mecânica Quântica é bastante direta, uma vez que os autovalores da matriz densidade que representam um determinado estado formam uma distribuição de probabilidades. Dessa maneira, consideraremos a Entropia de Shannon da distribuição de probabilidades obtida a partir dos autovalores de ρ , logo:

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \ln(\rho)) = -\sum_{i=1}^n \lambda_i \ln(\lambda_i) \quad (2.11)$$

Em que $S(\rho)$ é denominado de Entropia de Von Neumann. Agora, serão mostradas as principais propriedades para a entropia de Von Neumann (GOMES, 2018):

- $S \geq 0$, anulando-se apenas no caso de estados puros.
- Possui um valor máximo de $\ln d$, em que d é a dimensão do espaço de Hilbert sobre o qual estamos descrevendo o estado em questão. Esse valor só será atingido quando o sistema estiver no estado maximamente misturado $\frac{\mathbb{I}}{d}$.
- É invariante sobre operações unitárias U , ou seja, $S(U\rho U^\dagger) = S(\rho)$.
- Se um sistema bipartido ρ_{AB} é puro, temos que $S(\rho_A) = S(\rho_B)$.
- (Propriedade da Subaditividade) Dado um determinado sistema bipartido, descrito por ρ_{AB} , devemos ter que $S(\rho_{AB}) \leq S(\rho_A) + S(\rho_B)$. A igualdade é atingida apenas para estados descorrelacionados, ou seja, $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$.
- (Desigualdade Triangular) Dado um determinado sistema bipartido, descrito por ρ_{AB} , devemos ter que $S(\rho_{AB}) \geq |S(\rho_A) - S(\rho_B)|$. A igualdade ocorre apenas para estados puros.

2.3 Operações LOCC

Suponha que temos um sistema bipartido, representado pela matriz densidade ρ_{AB} e definida sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Imagine agora que dividimos esse sistema entre dois laboratórios distantes, de tal forma que cada laboratório possua um dos subsistemas ρ_A ou ρ_B . Podemos então definir que, qualquer operação realizada em apenas um dos subsistemas será uma *Operação Local* (CUNHA, 2005).

Imagine agora que esse mesmo sistema quântico é distribuído entre dois laboratórios distantes e que estes estão restritos a realizarem apenas medições locais em cada subsistema. Porém, cada laboratório pode estabelecer comunicação com o outro através de canais clássicos (Através de celular, computador, correio, jornal, entre outros), para que possam "combinar" uma sequência de operações locais e comunicar os resultados obtidos após cada medição. Operações quânticas implementadas dessa maneira são denominadas Operações Locais com Comunicação Clássica, ou ainda, LOCC (CHITAMBAR *et al.*, 2012). Esse tipo de restrição é importantíssima, pois permite, além de outras coisas, a criação de estados que estarão correlacionados de maneira puramente clássica.

3 EMARANHAMENTO E SUAS MEDIDAS

Em 1935, Schrodinger cunhou o termo *emaranhamento* e o caracterizou como o traço característico da mecânica quântica (SCHRÖDINGER, 1936). A partir de 1964 e após as proposições realizadas por John Bell (BELL, 1964), o conceito de emaranhamento passou a ser utilizado como um importante recurso para a teoria da informação quântica, sendo amplamente adotado em processos de comunicação e processamento de informação (FRIIS *et al.*, 2019).

No que diz respeito a estados puros, seu conceito está intimamente ligado à não-localidade de Bell, de tal maneira que é preciso que um estado quântico seja necessariamente emaranhado para observarmos correlações não-locais associadas a ele (GOMES, 2018). Podemos então entender o emaranhamento como o conjunto de correlações não-clássicas existente em sistemas quânticos.

Correlações clássicas, no contexto da informação quântica, podem ser definidas como aquelas que podem ser geradas por operações LOCC (*Local Operation and Classical Communication*). Se observarmos um sistema quântico e acharmos correlações que não podem ser simuladas classicamente, então nós às atribuímos a efeitos quânticos, um exemplo disso aparece em estados que violam uma desigualdade tipo Bell. Ou seja, o emaranhamento pode ser definido como o tipo de correlação que não pode ser criada apenas via LOCC (PLENIO; VIRMANI, 2007). É o fato dos estados emaranhados apresentarem correlações não-clássicas que faz com que eles sejam um recurso que pode ser usado em diferentes tarefas dentro da computação quântica.

Nesse contexto, como este é um conceito crucial para a teoria da informação quântica, deveremos ser capazes de solucionar dois problemas:

1. Determinar se dado estado quântico possui ou não emaranhamento;
2. Determinar o "grau" de emaranhamento do estado em questão.

Mostraremos agora, como é possível detectar se o estado com o qual estamos trabalhando é ou não emaranhado.

3.1 Detectando o Emaranhamento

Primeiramente, deveremos dar ao emaranhamento uma definição matemática. Com esse fim, é comum definirmos o emaranhamento a partir de sua contrapositiva, a separabilidade (FRIIS *et al.*, 2019). Logo:

- Um estado puro de um sistema bipartido, definido no espaço de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ é denominado separável se, e somente se, pudermos escrevê-lo como um produto de estados:

$$|\psi\rangle_{AB} \equiv |\phi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B; \quad (3.1)$$

- Um estado misto de um sistema bipartido, definido no espaço de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ é denominado separável se, e somente se, pudermos escrevê-lo como uma mistura probabilística de estados puros separáveis:

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i |\phi_i\rangle \langle \phi_i|_A \otimes |\chi_i\rangle \langle \chi_i|_B. \quad (3.2)$$

Dessa maneira, um estado, puro ou de mistura, é dito emaranhado se, e somente se, o mesmo não é separável. Um dos problemas centrais da teoria do emaranhamento surge no fato de que uma determinada matriz densidade pode ser decomposta em estados puros de infinitas maneiras diferentes. Neste caso, para concluir que um dado estado é emaranhado deveremos nos certificar que dentre o infinito número de decomposições não existe nenhuma decomposição que resulte em um produto de estados. Por esse motivo, os métodos utilizados para a detecção de emaranhamento (critérios de separabilidade) apresentam formas explícitas para a sua detecção apenas quando analisamos sistemas específicos.

Os critérios de separabilidade devem, quando aplicados a um determinado estado ρ , fornecer uma das respostas abaixo:

- ρ é emaranhado;
- ρ é separável;
- Esse critério não é o suficiente para determinar se ρ é emaranhado ou não.

Para a descrição dos Critérios de Separabilidade, será assumido que ρ_{AB} é um estado bipartido de tal forma que ρ_{AB} atua no espaço $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ e ainda que $\dim(\mathcal{H}_A) = M$ e $\dim(\mathcal{H}_B) = N \geq M$.

3.1.1 Critério de Peres-Horodecki (Critério PPT)

A transposição parcial da matriz densidade ρ_{AB} que representa um sistema bipartido é calculada pela transposição de apenas um dos subsistemas de ρ_{AB} . Dessa maneira:

$$(\rho_{m\mu, n\nu})^{T_A} = \rho_{n\mu, m\nu}, \quad (3.3)$$

Onde os índices latinos são referentes ao subsistema A e os índices gregos são referentes ao subsistema B. Poderemos então demonstrar que, para um estado separável ρ_{sep} qualquer, deveremos ter que (BRUSS, 2002):

$$\begin{aligned} (\rho_{sep})^{T_A} &\geq 0; \\ (\rho_{sep})^{T_B} &\geq 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Além disso, para sistemas de dimensão baixa (2X2 e 2X3), essa é uma condição necessária e suficiente para a separabilidade. Porém, para sistemas de maior dimensão, a positividade da transposição parcial (PPT) é apenas uma condição necessária para a separabilidade.

3.1.2 Critério de Redução

De acordo com esse critério, se ρ_{AB} é separável, teremos que (BRUSS, 2002):

$$\begin{aligned} \rho_A \otimes \mathbb{I} - \rho &\geq 0; \\ \rho_B \otimes \mathbb{I} - \rho &\geq 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Onde:

- ρ_A é a matriz densidade reduzida para o subsistema A;
- ρ_B é a matriz densidade reduzida para o subsistema B.

Assim como no critério anterior, esse é um critério necessário e suficiente para sistemas 2x2 ou 2x3. Para sistemas de maior dimensão, esta é uma condição apenas necessária para a separabilidade.

3.1.3 Entanglement Witness

Um método bastante utilizado para a detecção de emaranhamento é o *Entanglement Witness*, que consiste na aplicação de um observável representado pelo operador hermitiano W, de tal forma que (FADEL *et al.*, 2021):

$$\begin{aligned} \text{Tr}(W\sigma) &\geq 0 \rightarrow \text{Para todos os estados separáveis } \sigma \\ \text{Tr}(W\sigma) &< 0 \rightarrow \text{Para todos os estados emaranhados } \sigma \end{aligned} \tag{3.6}$$

Em que pese o fato desse método ser capaz de certificar se um dado estado é ou não emaranhado, este não é capaz de produzir nenhuma informação acerca do "grau" de emaranhamento de cada estado. Dessa maneira, se:

$$0 > \text{Tr}(W\sigma_1) > \text{Tr}(W\sigma_2), \quad (3.7)$$

Não podemos inferir que σ_2 é mais emaranhado que σ_1 . Logo, fica evidente que deveremos definir alguma função capaz de quantificar o emaranhamento de determinado sistema, de tal maneira que seremos capazes de ordenar a quantidade de emaranhamento de quaisquer dois estados. Tais funções são denominadas Quantificadores de Emaranhamento e serão definidas a seguir.

3.2 Quantificadores de Emaranhamento

Qualquer função que busque quantificar o emaranhamento presente em determinado estado quântico ρ deve obedecer aos requisitos listados abaixo (BRUSS, 2002):

1. A medida de emaranhamento é um mapa que atua levando matrizes densidade em números reais positivos, ou seja:

$$\rho \rightarrow E(\rho) \in \mathbb{R}. \quad (3.8)$$

2. Para um estado puro maximamente emaranhado, a medida de emaranhamento deve ser dada por $E(\rho) = \ln d$, sendo d a dimensão do espaço de Hilbert. (Normalização).
3. O quantificador deve ser nulo para estados separáveis.
4. O emaranhamento do estado não pode aumentar sob LOCC (*local operations and classical communication*), ou seja:

$$E(\rho) \geq \sum_i p_i E\left(\frac{A_i \rho A_i^\dagger}{p_i}\right) \quad (3.9)$$

- $A_i \rightarrow$ É o operador de Kraus que descreve o protocolo LOCC.
 - $p_i = \text{Tr}(A_i \rho A_i^\dagger)$ é a probabilidade de obter a medida "i".
5. Para quaisquer dois estados diferentes, a diferença entre suas medidas de emaranhamento tende a zero no limite em que tende a zero a distância entre esses dois estados. (Continuidade).
 6. Para quaisquer dois estados ρ e σ , o emaranhamento do produto tensorial não deve ser maior que a soma dos emaranhamentos de cada estado. Podendo ser expressa pela relação: $E(\rho \otimes \sigma) \leq E(\rho) + E(\sigma)$. (Subaditividade).

7. A medida de emaranhamento deve obedecer à relação: $E(\lambda\rho + (1 - \lambda)\sigma) \leq \lambda E(\rho) + (1 - \lambda)E(\sigma)$, para $0 < \lambda < 1$. (Convexidade).

As condições acima expostas trazem uma série de problemas para a definição dessas funções. O primeiro deles é que não conseguimos definir unicamente uma função que satisfaça a essas condições, por esse motivo é comum encontrarmos na literatura uma série de quantificadores diferentes, cada um associado a um determinado uso prático. Esse problema é acentuado quando falamos de estados multipartidos, reflexo da complexidade de classificar as LOCC e na falta de um único estado maximamente emaranhado (FADEL *et al.*, 2021). Outro grande problema é que as definições da grande maioria dos quantificadores de emaranhamento envolvem extremizações que são difíceis de lidar analiticamente, pois requerem um conhecimento total sobre o estado em questão (WOOTTERS, 1998). Por conta disso, é comum encontrarmos na literatura resultados analíticos de quantificadores associados a estados específicos ou tipos de estados específicos.

Dessa maneira, faremos a seguir a definição de alguns quantificadores de emaranhamento para estados bipartidos puros e mistos.

3.2.1 Para Estados Puros

3.2.1.1 Entropia de Emaranhamento

Dado um estado bipartido puro ρ_{AB} , cujos subsistemas são denotados por A e B, as matrizes densidade reduzidas são tais que:

$$\begin{aligned}\rho_A &= \text{Tr}_B(\rho_{AB}) \\ \rho_B &= \text{Tr}_A(\rho_{AB})\end{aligned}\tag{3.10}$$

Podemos então definir a entropia de emaranhamento, como (VEDRAL *et al.*, 1997):

$$E_{en}(\rho_{AB}) \equiv S(\rho_A) = S(\rho_B)\tag{3.11}$$

Alguns resultados importantes para esse quantificador, são:

- Para estados puros separáveis: $E_{en}(\rho_{AB}) = 0$.
- Para estados puros maximamente emaranhados: $E_{en}(\rho_{AB}) = \ln(2)$.
- Para estados mistos, essa medida falha em distinguir correlações clássicas de quânticas, logo não deve ser empregado nesses estados.

3.2.2 Para Estados Mistos

3.2.2.1 Emaranhamento de Formação

Dado o operador densidade ρ_{AB} de um estado bipartido misto, considere todas as possibilidades de decomposição desse estado em uma base de estados puros $|\psi_i\rangle$, com probabilidades p_i (combinação convexa de estados puros), tais que:

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (3.12)$$

Para cada estado puro, o emaranhamento $E(|\psi_i\rangle)$ é definido como a entropia de Von Neumann associada a qualquer um dos subsistemas A ou B (POPESCU; ROHRLICH, 1997):

$$E(|\psi_i\rangle) = -\text{Tr}(\rho_A \ln \rho_A) = -\text{Tr}(\rho_B \ln \rho_B) \quad (3.13)$$

Em que, ρ_A e ρ_B são as matrizes densidades reduzidas. O emaranhamento de formação de um estado misto ρ_{AB} é definido como a média do emaranhamento para cada estado puro da decomposição, minimizado sobre todas as decomposições de ρ_{AB} :

$$E(\rho) \equiv \min \sum_i p_i E(|\psi_i\rangle) \quad (3.14)$$

É necessário fazer essa minimização, visto que a decomposição desse estado misto não é única. Como não temos qualquer informação adicional sobre o processo de decomposição do estado, deveremos considerar todas as possíveis decomposições. Por envolver um processo de extremização, esse é um quantificador não-operacional, ou seja, de difícil aplicação (CUNHA, 2005).

Porém, para alguns estados específicos, podemos escrever, analiticamente, uma fórmula para o emaranhamento de formação, assim como fez Wootters em seu artigo (WOOTTERS, 1998), onde definiu uma fórmula analítica para o cálculo do emaranhamento de formação de um sistema geral de dois qubits:

$$E_F(\rho_{AB}) = f(C(\rho)) \quad (3.15)$$

Onde:

- $f(x)$ é uma função definida como:

$$f(x) = -\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{2} \log_2 \left(\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{2} \right) - \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{2} \log_2 \left(\frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{2} \right) \quad (3.16)$$

- $C(\rho)$ é denominada *Concorrência* ou *Concorrência de Wootters* e é definida como:

$$C(\rho) = \max \{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\} \quad (3.17)$$

Vale ressaltar que os coeficientes λ_i são os autovalores, em ordem decrescente, da matriz hermitiana $R \equiv \sqrt{\sqrt{\rho} \tilde{\rho} \sqrt{\rho}}$.

3.2.2.2 Emaranhamento Destilável

Pode ser entendido como o número de estados maximamente emaranhados que podem ser purificados (produzidos) a partir de um determinado número de estados ρ_{AB} menos emaranhados e utilizando para isso apenas protocolos de LOCC (CUNHA, 2005). Considerando que possuímos um número m de cópias do estado ρ_{AB} e que a partir dessas cópias é possível destilar n estados maximamente emaranhados, poderemos definir o Emaranhamento Destilável como:

$$E_D \equiv \sup_{LOCC} \left(\frac{n}{m} \right) \quad (3.18)$$

Onde a maximização exposta na equação acima 3.18, é realizada sobre todos os possíveis protocolos LOCC que levam as cópias de ρ_{AB} nos estados maximamente emaranhados. Dessa maneira, fica evidente que esta medida dependerá do protocolo de purificação em particular. Além disso, outro problema para a definição de uma fórmula geral para esse quantificador é com relação a extremização (no caso uma maximização) realizada (VEDRAL *et al.*, 1997).

3.2.2.3 Custo de Emaranhamento

Para o custo de emaranhamento, temos o processo inverso, dado que a partir de um determinado número n' de estados maximamente emaranhados pode-se construir m' cópias do estado ρ_{AB} e utilizando para isso apenas LOCC. Dessa maneira, pode-se definir o custo de emaranhamento como a razão entre n' e m' , minimizado sobre todos os protocolos LOCC

(CUNHA, 2005):

$$E_C = \inf_{LOCC} \left(\frac{n'}{m'} \right) \quad (3.19)$$

Por envolver um processo de extremização, esse é mais um protocolo não-operacional, ou seja, apesar da sua definição precisa e utilidade em determinadas demonstrações é um protocolo pouco prático para ser utilizado em um exemplo (CUNHA, 2005).

4 RESULTADOS

Nesse capítulo faremos os cálculos acerca de um quantificador de emaranhamento, bem como de um método de detecção de emaranhamento, discutidos durante o capítulo 3. Para o cálculo do quantificador de emaranhamento, foi escolhida a entropia de emaranhamento e utilizamos como exemplo de cálculo um estado puro. Para o método de detecção de emaranhamento, foi utilizado o critério PPT em um estado misto específico, o estado de Werner.

4.1 Entropia de Emaranhamento de um estado puro

Utilizaremos o estado puro bipartido abaixo como exemplo de cálculo para a Entropia de Emaranhamento:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |01\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Por se tratar de um estado puro, é natural a escolha da entropia de emaranhamento, definida em 3.11, como quantificador. Nesse caso, a matriz densidade associada a esse estado é dada por:

$$\rho_{AB} = |\Psi\rangle\langle\Psi| \quad (4.2)$$

Expandindo essa expressão, obteremos que:

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2}(|10\rangle\langle 10| - |10\rangle\langle 01| - |01\rangle\langle 10| + |01\rangle\langle 01|) \quad (4.3)$$

Em notação matricial:

$$\rho_{AB} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

De onde podemos facilmente constatar que as matrizes densidade reduzidas ρ_A e ρ_B , são:

$$\rho_A = \rho_B = \frac{1}{2} (|1\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 0|) \quad (4.5)$$

Ou ainda, podemos escrevê-las em notação matricial como:

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB}) = \begin{pmatrix} \text{Tr} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{Tr} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{Tr} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{Tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Nesse caso:

$$\rho_A = \rho_B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Os autovalores associados a essas matrizes, são: $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$. Dessa maneira, poderemos finalmente calcular a entropia de emaranhamento, como:

$$E_{en}(\rho_{AB}) = S(\rho_A) = -\text{Tr}(\rho_A \ln(\rho_A)) = -\sum_{i=1}^n \lambda_i \ln(\lambda_i) \quad (4.7)$$

Portanto:

$$E_{en}(\rho_{AB}) = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2) \quad (4.8)$$

Fato que já era esperado, uma vez que esse estado é conhecido na literatura por ser maximamente emaranhado (KRAMMER, 2005).

4.2 Critério PPT em um estado de Werner

Agora será feito um exemplo do uso de um dos critérios de separabilidade para o caso de um estado misto. Para tal, será utilizado o estado de Werner bipartido de dimensão 4, descrito pela matriz densidade abaixo (GHASEMIAN; TAVASSOLY, 2021):

$$\rho_W = p|\Psi\rangle\langle\Psi| + \frac{(1-p)}{4}\mathbb{I}_4. \quad (4.9)$$

Em notação matricial, poderemos escrevê-la como:

$$\rho_W = \begin{pmatrix} \frac{(1-p)}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1+p)}{4} & \frac{-p}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-p}{2} & \frac{(1+p)}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-p)}{4} \end{pmatrix}$$

Sua transposição parcial, será tal que:

$$(\rho_W)^{T_B} = \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Portanto, teremos que:

$$(\rho_W)^{T_B} = \begin{pmatrix} \frac{(1-p)}{4} & 0 & 0 & \frac{-p}{2} \\ 0 & \frac{(1+p)}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1+p)}{4} & 0 \\ \frac{-p}{2} & 0 & 0 & \frac{(1-p)}{4} \end{pmatrix}$$

Aplicando o critério PPT, observamos que para o estado de Werner seja separável, o mesmo deve obedecer à inequação abaixo:

$$(\rho_W)^{T_B} \geq 0 \quad (4.11)$$

Ou seja, para que o Estado de Werner seja emaranhado, deve existir pelo menos um autovalor associados à transposição parcial $(\rho_W)^{T_B}$ que seja negativo. Podemos constatar que seus autovalores serão:

- $\lambda_1 = \frac{(1-3p)}{4}$.
- $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \frac{(p+1)}{4}$.

Nesse caso, para definirmos uma condição mínima de emaranhamento, utilizaremos o menor autovalor associado, ou seja, λ_1 . Dessa maneira, como este deve admitir valores negativos, é necessário que $p > \frac{1}{3}$. Por fim, é possível afirmar que ρ_W será emaranhado se, e somente se $p > \frac{1}{3}$.

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho, descrevemos o conceito de emaranhamento para sistemas quânticos bipartidos. Para isso, iniciamos com a descrição de estados quânticos a partir do formalismo das matrizes densidade, mostrando que existem alguns estados que não podem ser descritos por meio de um vetor de estado e diferenciando os conceitos de *Estado Puro* e *Estado Misto*. Em seguida, detalhamos o que seriam sistemas quânticos compostos e, em especial, *Sistemas Bipartites* (ou bipartidos). Nesse interim, fez-se necessária a adoção do conceito de *matrizes densidade reduzidas*, essenciais quando estamos interessados em analisar apenas uma das "partes" de um sistema composto. Ademais, motivamos a formulação da *Entropia de Von Neumann*, como uma extensão da *Entropia de Shannon* para o contexto da Mecânica Quântica, bem como citamos alguns resultados importantes envolvendo essa medida.

Definimos o conceito de emaranhamento como um tipo de correlação entre sistemas quânticos que não pode ser criada apenas via LOCC e então enunciamos os dois problemas envolvendo essa grandeza: A detecção e a quantificação de emaranhamento em um estado quântico. Para tal, adotamos uma descrição matemática para o emaranhamento a partir de sua contrapositiva, a separabilidade.

Com relação à detecção do emaranhamento, vimos que os métodos adotados para tal são denominados *Critérios de Separabilidade* e, devido ao fato dessa determinação ser extremamente complexa em um contexto geral, é comum encontrarmos na literatura diversas medidas distintas aplicadas nos mais variados casos. Porém, mencionamos que é imprescindível que o método adotado seja capaz de retornar 3 resultados possíveis: O estado é emaranhado, o estado não é emaranhado ou o método empregado não é suficiente. Ressaltamos que mesmo detectando o emaranhamento, ao utilizar esses métodos, nada podemos afirmar com relação ao "grau" de emaranhamento presente no sistema.

No que diz respeito ao cálculo do "grau" de emaranhamento discutimos acerca dos 7 requisitos essenciais para qualquer função que busque quantificar o emaranhamento. Em seguida, demos ênfase ao problema da impossibilidade de definição de uma função única para a quantificação do emaranhamento e ao problema da determinação de uma fórmula analítica para tal função. Ademais, comentamos a respeito das funções mais recorrentes na literatura para a quantificação de emaranhamento de um sistema bipartido, puro ou misto.

Por fim, quantificamos o emaranhamento para um estado puro maximamente emaranhado, obtendo o valor máximo esperado para a função de quantificação e aplicamos o Critério

de Peres-Horodecki em um estado de Werner, determinando o intervalo no qual o mesmo é emaranhado.

REFERÊNCIAS

- BELL, J. S. On the einstein podolsky rosen paradox. **Physics Physique Fizika**, v. 1, n. 3, p. 195–200, 11 1964.
- BOHM, D. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden"variables. i. **Physical Review**, v. 85, n. 2, p. 166–179, 1 1952.
- BOHM, D. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden"variables. ii. **Physical Review**, v. 85, n. 2, p. 180–193, 1 1952.
- BRUSS, D. Characterizing Entanglement. **Journal of Mathematical Physics**, v. 43, n. 9, p. 4237–4251, 9 2002.
- CHITAMBAR, E.; LEUNG, D. W.; MANINSKA, L.; OZOLS, M. A.; WINTER, A. J. Everything you always wanted to know about locc (but were afraid to ask). **Communications in Mathematical Physics**, v. 328, p. 303–326, 2012.
- COHEN-TANNOUJDI, C.; DIU, B.; LALOË, F. **Quantum Mechanics**. [S.l.]: Wiley-Vch, 2020. v. 1.
- CUNHA, M. de O. T. **Emaranhamento: caracterização, manipulação e consequências**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2005.
- EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 47, p. 777–780, May 1935.
- FADEL, M.; USUI, A.; HUBER, M.; FRIIS, N.; VITAGLIANO, G. Entanglement quantification in atomic ensembles. **Physical Review Letters**, v. 127, n. 1, 3 2021.
- FRIIS, N.; VITAGLIANO, G.; MALIK, M.; HUBER, M. Entanglement certification from theory to experiment. **Nature Reviews Physics**, Nature Publishing Group, v. 1, n. 1, p. 72–87, 2019.
- GHASEMIAN, E.; TAVASSOLY, M. K. Generation of werner-like states via a two-qubit system plunged in a thermal reservoir and their application in solving binary classification problems. **Scientific Reports**, v. 11, n. 1, 2 2021.
- GOMES, V. da S. **Não-Localidade Baseada em Realismo**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2018.
- GRIFFITHS, D. J.; SCHROETER, D. F. **Introduction of Quantum Mechanics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2018.
- GUIMARAES, G. M. **Não-localidade em sistemas quânticos**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2012.
- KRAMMER, P. Quantum entanglement : Detection , classification , and quantification. In: . [S.l.: s.n.], 2005.
- MAZIERO, J. Understanding von neumann’s entropy. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 37, 02 2015.

- NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. **Quantum Computation and Quantum Information: physics and effects.** [S.l.: s.n.], 2000.
- PLANCK, M. On the theory of the energy distribution law of the normal spectrum. 1900.
- PLENIO, M. B.; VIRMANI, S. An introduction to entanglement measures. **Quantum Information Computation**, v. 7, n. 1, p. 1–51, 1 2007.
- POPESCU, S.; ROHRLICH, D. On the measure of entanglement for pure states. **Phys. Rev. A**, v. 56, n. 5, p. R3319 – R3321, 11 1997.
- SCHRÖDINGER, E. Probability relations between separated systems. **Cambridge University Press**, v. 32, n. 3, p. 446–452, 10 1936.
- VEDRAL, V.; PLENIO, M.; RIPPIN, M.; KNIGHT, P. L. Quantifying entanglement. **Physical Review Letters**, v. 78, n. 12, 3 1997.
- WOOTTERS, W. K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. **Physical Review Letters**, v. 80, n. 10, 3 1998.

APÊNDICE A – MATRIZ DENSIDADE PARA ESTADOS PUROS

Nesse apêndice serão demonstradas 3 relações importantíssimas envolvendo a descrição de estados puros por meio de matrizes densidade. Dessa maneira, em todos os cálculos aqui presentes, faremos uso das relações abaixo:

- $|\psi\rangle = c_i |u_i\rangle$.
- $\rho = |\psi\rangle \langle\psi|$.

Assim como foi mencionado na fundamentação teórica 2, a condição de normalização para uma matriz densidade é tal que:

$$\text{Tr}(\rho) = 1. \quad (\text{A.1})$$

Por outro lado, lembre-se que:

$$\rho = |\psi\rangle \langle\psi| = \sum_i \sum_j c_i c_j^* |u_i\rangle \langle u_j|. \quad (\text{A.2})$$

Portanto, é possível afirmar que:

$$\text{Tr}(\rho) = \sum_i c_i^* c_i = \sum_i |c_i|^2. \quad (\text{A.3})$$

Porém, observe que:

$$\langle\psi|\psi\rangle = \sum_i \sum_j c_i c_j^* \langle u_j | u_i \rangle = \sum_i \sum_j c_i c_j^* \delta_{ij} = \sum_i |c_i|^2. \quad (\text{A.4})$$

Por fim, foi demonstrado que, para estados puros, a condição de normalização para a matriz densidade só é satisfeita se, e somente se, a condição de normalização para o vetor de estado também for obedecida. Ou seja:

$$\text{Tr}(\rho) = 1 \iff \langle\psi|\psi\rangle = 1. \quad (\text{A.5})$$

Agora, realizaremos um raciocínio análogo para a formulação do valor esperado associado a um observável \hat{A} , utilizando para isso o formalismo das matrizes densidade. Vale ressaltar que, estamos tratando de estados puros no desenvolvimento dos cálculos. Assim como

foi mencionado na fundamentação teórica 2, o valor esperado associado ao observável \hat{A} é tal que:

$$\text{Tr}(\rho\hat{A}) = \langle \hat{A} \rangle. \quad (\text{A.6})$$

Portanto, desenvolvendo a expressão associada ao traço:

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_j \langle u_j | \rho \hat{A} | u_j \rangle = \sum_j \langle u_j | \rho \left(\sum_i |u_i\rangle \langle u_i| \right) \hat{A} | u_j \rangle = \sum_j \sum_i \langle u_j | \rho | u_i \rangle \langle u_i | \hat{A} | u_j \rangle. \quad (\text{A.7})$$

Utilizando o fato de que $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$, deveremos ter que:

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_j \sum_i \langle u_j | \psi \rangle \langle \psi | u_i \rangle \langle u_i | \hat{A} | u_j \rangle. \quad (\text{A.8})$$

Como $\langle u_j | \psi \rangle$ é apenas um número, teremos:

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_j \sum_i \langle \psi | u_i \rangle \langle u_i | \hat{A} | u_j \rangle \langle u_j | \psi \rangle = \langle \psi | \left(\sum_i |u_i\rangle \langle u_i| \right) \hat{A} \left(\sum_j |u_j\rangle \langle u_j| \right) | \psi \rangle. \quad (\text{A.9})$$

Portanto:

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle. \quad (\text{A.10})$$

Por fim, foi demonstrado que:

$$\text{Tr}(\rho\hat{A}) = \langle \hat{A} \rangle \iff \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \langle \hat{A} \rangle. \quad (\text{A.11})$$

A última relação que buscamos formular é aquela associada à evolução temporal de um estado puro descrito a partir do formalismo das matrizes densidade. Assim como foi mencionado na fundamentação teórica 2, a evolução temporal de uma matriz densidade é tal que:

$$\frac{d}{dt}(\rho(t)) = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}(t), \rho(t)]. \quad (\text{A.12})$$

Logo, expandindo a expressão do comutador acima:

$$\frac{d}{dt}(\rho(t)) = \frac{1}{i\hbar} (\hat{H}(t)\rho(t) - \rho(t)\hat{H}(t)) = \left(\frac{1}{i\hbar} \hat{H} |\psi\rangle \right) \langle\psi| + |\psi\rangle \left(-\frac{1}{i\hbar} \langle\psi| \hat{H} \right). \quad (\text{A.13})$$

Por outro lado, observe que:

$$\frac{d}{dt}(\rho(t)) = \frac{d}{dt}(|\psi\rangle \langle\psi|) = \frac{d}{dt}(|\psi\rangle) \langle\psi| + |\psi\rangle \frac{d}{dt}(\langle\psi|). \quad (\text{A.14})$$

Portanto, é fácil ver que:

$$i\hbar \frac{d}{dt}(|\psi\rangle) = \hat{H} |\psi\rangle. \quad (\text{A.15})$$

Por fim, foi demonstrado que:

$$\frac{d}{dt}(\rho(t)) = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}(t), \rho(t)] \iff i\hbar \frac{d}{dt}(|\psi\rangle) = \hat{H} |\psi\rangle. \quad (\text{A.16})$$