



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

ÁTILA ANDRADE DE OLIVEIRA

SOBRE CARACTERÍSTICA DE EULER, LINKS E CONJUNTOS
SEMI-ALGÉBRICOS

FORTALEZA

2020

ÁTILA ANDRADE DE OLIVEIRA

SOBRE CARACTERÍSTICA DE EULER, LINKS E CONJUNTOS SEMI-ALGÉBRICOS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Topologia e Singularidades.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes.

FORTALEZA

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- O52s Oliveira, Átila Andrade de.
Sobre característica de Euler, links e conjuntos semi-algébricos / Átila Andrade de Oliveira. – 2020.
41 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2020.
Orientação: Prof. Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes.
1. Teorema de Sullivan. 2. Geometria algébrica. 3. Característica de Euler. I. Título.

CDD 510

ÁTILA ANDRADE DE OLIVEIRA

SOBRE CARACTERÍSTICA DE EULER, LINKS E CONJUNTOS SEMI-ALGÉBRICOS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Topologia e Singularidades.

Aprovada em: 21/07/2020.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Alexandre César Gurgel
Fernandes (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Edson Sampaio
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Rodrigo Mendes Pereira -
Universidade da Integração Internacional da
Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Prof. Dr. Nivaldo de Góes Grulha Júnior
UUniversidade de São Paulo (USP)

Este trabalho é dedicado com todo amor e carinho a meu pai e maior herói do mundo Audisio Lima de Oliveira, meu eterno Dr. Pai.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Ao Prof. Dr. Alexandre César Gurgel Fernandes por me orientar e me guiar ao longo de toda essa jornada.

Ao meu pai, Audisio Lima de Oliveira e toda minha família. .

Aos colegas da pós graduação em matemática por transformarem cafés em teoremas junto comigo.

Todos os professores e servidores do Departamento de Matemática e a Universidade Federal do Ceará pelo trabalho de levar a luz do conhecimento.

“E logo Jesus, estendendo a mão, segurou-o, e disse-lhe: Homem de pouca fé, por que duvidaste?” (BÍBLIA, 2015, p. 1475)

RESUMO

O objetivo central deste trabalho é apresentar uma prova para o Teorema de Sullivan. O qual enuncia que a característica de Euler do link de um conjunto algébrico em qualquer ponto é um número inteiro par. Para tanto, inicialmente precisaremos abordar várias ferramentas de geometria semi-algébrica, geometria algébrica, álgebra e topologia. Dentre outras coisas gostaríamos de estender a noção de característica de Euler a conjuntos semi-algébricos não localmente compactos, bem como estudar a topologia local de certos conjuntos. Também pretendemos definir conjuntos de Euler e culminar com o Teorema de Sullivan já citado, mostrando que todo conjunto algébrico é de Euler.

Palavras-chave: teorema de Sullivan; geometria algébrica; característica de Euler.

ABSTRACT

Our goal on this work is to show a proof of Sullivan's Theorem, who say that Euler characteristic of link on an algebraic set at any point is even. On the process we will study semi-algebraic geometry, algebraic geometry, algebra and topology and introduce a notion that extends the definition of Euler characteristic to semi-algebraic sets, so we will define Euler sets and culminate that every algebraic set is an Euler set.

Keywords: Sullivan's Theorem; Algebraic geometry; Euler charecteristic.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – O matemático polonês Stanisław Łojasiewicz.	10
Figura 2 – O conjunto V e $\pi_1(V)$	13
Figura 3 – O gráfico de Q e $\pi_1(V)$	13
Figura 4 – Gráfico da função seno.	14
Figura 5 – D.A.C de \mathbb{R}^2	17
Figura 6 – Simplexos de dimensão 0,1,2 e 3 respectivamente	18
Figura 7 – Exemplos de triangulações.	19
Figura 8 – Descrição pictográfica.	21
Figura 9 – Cúspide horizontal	26
Figura 10 – Hiperbolóide de duas folhas	26
Figura 11 – A curva dada por $y^2 - x^2(x + 1) = 0$	26
Figura 12 – Parabolóide hiperbólico	26
Figura 13 – Descrição pictográfica.	29

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
1.1	Preliminares	11
1.1.1	<i>Princípio de Tarski-Seidenberg</i>	11
2	CONJUNTOS SEMI-ALGÉBRICOS REAIS	12
2.1	Definições e primeiros resultados	12
2.2	Decomposição de Conjuntos Semi-Algébricos	16
2.3	Triangulação	18
2.3.1	<i>Lema de Seleção da Curva</i>	19
2.4	Dimensão Via D.A.C	20
2.5	Trivialização	20
2.6	Links	22
2.7	A Homologia de Borel-Moore e a Característica de Euler	23
3	CONJUNTOS ALGÉBRICOS REAIS	26
3.1	Topologia de Zariski e Variedade algébrica afim	26
3.2	Compactificação de Alexandroff em Conjuntos Algébricos Reais	29
3.3	Conjuntos algébricos não singulares	30
3.4	Classe Fundamental	31
3.5	Conjuntos de Euler	33
4	FUNÇÕES CONTRUTÍVEIS	34
4.1	O Anel das funções contrutíveis em Conjuntos semi-algébricos	34
4.2	Integração de funções construtíveis	34
4.3	Operador Link	36
4.4	Funções Algebricamente construtíveis	38
	REFERÊNCIAS	41

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho, temos o objetivo central de dar uma demonstração para o Teorema de Sullivan, o qual diz que o link de um ponto em um conjunto algébrico possui característica de Euler par. Tal resultado tem sua importância ligada à própria importância da ferramenta característica de Euler e ao estudo de conjuntos algébricos. Ao longo deste processo desejamos apresentar alguns resultados interessantes, e ferramentas.

No segundo Capítulo, desejamos introduzir a geometria semi-algébrica, a qual busca estudar mais profundamente sistemas envolvendo igualdades e desigualdades polinomiais, introduziremos o conceito de conjunto semi-algébrico real, bem como suas propriedades topológicas e geométricas. Sendo o Princípio de Tarski-Seidenberg e o Teorema de Lojasiewicz dignos de atenção. Ainda neste Capítulo abordaremos o teorema da triangulação de conjuntos semi-algébricos e mostraremos uma aplicação para este, com o Lema de Seleção da Curva, introduziremos uma noção de dimensão para os conjuntos semi-algébricos, apresentaremos uma prova para o importantíssimo Teorema da Estrutura Cônica Local. Concluiremos o Capítulo com a definição de link de conjuntos semi-algébricos em um ponto e estendemos a definição de característica de Euler de conjuntos semi-algébricos localmente compactos para conjuntos semi-algébricos.

Figura 1 – O matemático polonês Stanisław Łojasiewicz.



Fonte:<http://www.pas.va/content/accademia/en/academicians/deceased/lojasiewicz.html>

O terceiro Capítulo terá a tarefa de versar sobre conjuntos algébricos reais, objeto central deste trabalho. Em um primeiro momento desejamos definir e expor as propriedades topológicas mais imediatas de tais conjuntos, onde desejaremos construir para estes algo semelhante ao que faremos no segundo Capítulo para conjuntos semi-algébricos, construiremos então para

estes uma noção de dimensão, propriedades geométricas, neste Capítulo teremos como resultado central a demonstração do Teorema de Sullivan para dimensão 1, bem como a definição de conjuntos de Euler. Por fim, no quarto e último Capítulo, introduziremos as funções construtíveis que juntamente com o operador link e o pushforward serão as ferramentas principais para a demonstração do Teorema de Sullivan. No mais, desejamos ao longo do texto manter a concisão perdendo o mínimo de clareza possível, a maioria das figuras foi concebida e elaborada com auxílio do software geogebra.

1.1 Preliminares

1.1.1 Princípio de Tarski-Seidenberg

Teorema 1.1.1 *Dado um sistema polinomial de equações e inequações nas variáveis $T = (T_1, \dots, T_p)$ e X com coeficientes em \mathbb{R} da forma*

$$S(T, X) = \begin{cases} S_1(T, X) \bullet_1 0 \\ \dots \\ S_m(T, X) \bullet_m 0 \end{cases}$$

Onde $\bullet_i \in \{=, \neq, \leq, \geq\} \forall i \in \{1, \dots, m\}$. Então existe um algoritmo tal que este produz uma lista $C_1(T), \dots, C_k(T)$ de sistemas de igualdades e desigualdades polinomiais em T com coeficientes em \mathbb{R} tal que: $\forall t \in \mathbb{R}^p$ $S(t, X)$ possui solução real $\Leftrightarrow C_j(t)$ é satisfeito.

2 CONJUNTOS SEMI-ALGÉBRICOS REAIS

Neste capítulo introduziremos a noção básica de conjunto semi-algébrico real. Nosso objetivo nesse capítulo será introduzir os conceitos geométricos e topológicos ligados aos conjuntos semi-algébricos, bem como o estudo de teoremas estruturais como: Decomposição Celular, Triangulação, Trivialização e Estrutura Cônica Local. Bem como conceito mais importante neste trabalho a serem abordado neste capítulo.

2.1 Definições e primeiros resultados

Um conjunto semi-algébrico $X \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto satisfazendo uma combinação booleana de equações ou inequações polinomiais com coeficientes reais. Em outras palavras, os semi-algébricos formam a menor classe de subconjuntos de \mathbb{R}^n , a qual denotaremos por \mathbf{SA}_n , tais que :

1. Se $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, então $\{x \in \mathbb{R}^n : P(x) = 0\} \in \mathbf{SA}_n$ ou $\{x \in \mathbb{R}^n : P(x) > 0\} \in \mathbf{SA}_n$;
2. $X \in \mathbf{SA}_n$ e $Y \in \mathbf{SA}_n \Rightarrow X \cup Y \in \mathbf{SA}_n, X \cap Y \in \mathbf{SA}_n$ e $(\mathbb{R}^n - X) \in \mathbf{SA}_n$.

Proposição 2.1.1 (*Caracterização de conjuntos Semi-Algébricos*)

Todo conjunto semi-algébrico de \mathbb{R}^n é a união finita de conjuntos do tipo $\{x \in \mathbb{R}^n : P(x) = 0 \text{ e } Q_1(x) > 0 \text{ e } \dots \text{ e } Q_l(x) > 0\}$, Onde $l \in \mathbb{N}$ e $P, Q_1, \dots, Q_l \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$.

Seja \mathcal{A} a classe de uniões finitas de conjuntos do tipo descrito acima, mostraremos que $\mathcal{A} \subset \mathbf{SA}_n$. De fato temos que:

1. $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \Rightarrow \{x \in \mathbb{R}^n : P(x) = 0\} \in \mathcal{A}$ e $\{x \in \mathbb{R}^n : P(x) > 0\} \in \mathcal{A}$, pois $(\{x \in \mathbb{R}^n : P(x) = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : P(x) > 0\}) \in \mathcal{A}$;
2. Tome $X \in \mathcal{A}$ e $Y \in \mathcal{A}$, de modo que:

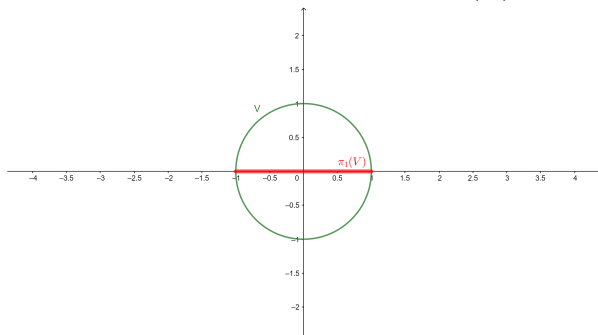
$$X = \bigcup_{i=1}^s \bigcap_{j=1}^{r_i} \{x \in \mathbb{R}^n : P_{i,j}(x) \bullet_{i,j} 0\} \text{ e } Y = \bigcup_{l=1}^t \bigcap_{k=1}^{r_l} \{x \in \mathbb{R}^n : P_{l,k}(x) \bullet_{l,k} 0\}$$

onde $\bullet_{i,j}, \bullet_{l,k} \in \{<, =, >\}$, Agora, faça $X_i = \bigcap_{j=1}^{r_i} \{x \in \mathbb{R}^n : P_{i,j}(x) \bullet_{i,j} 0\}$ e $Y_l = \bigcap_{k=1}^{r_l} \{x \in \mathbb{R}^n : P_{l,k}(x) \bullet_{l,k} 0\}$, logo $X \cup Y = (\bigcup_{i=1}^s X_i) \cup (\bigcup_{l=1}^t Y_l) = X_1 \cup \dots \cup X_s \cup Y_1 \cup \dots \cup Y_t$, agora faça $X_{s+1} = Y_1, \dots, X_{s+t} = Y_t$ logo $X \cup Y = \bigcup_{\alpha=1}^{s+t} X_{\alpha}$, onde cada X_{α} é uma interseção finita de conjuntos da forma $\{x \in \mathbb{R}^n : P_{\alpha,\beta}(x) \bullet_{\alpha,\beta} 0\}$ onde $\bullet_{\alpha,\beta} \in \{<, =, >\}$. Analogamente mostramos que \mathcal{A} é fechado para as operações de interseção finita e complemento, de forma que $\mathcal{A} \subset \mathbf{SA}_n$.

Pela minimalidade de \mathbf{SA}_n temos que $\mathcal{A} = \mathbf{A}$. Os conjuntos da forma X_α definidos no resultado anterior, são chamados **semi-alg\u00e9bricos b\u00e1sicos**. Note que dado $X \in \mathbf{SA}_n$ sempre podemos escolher uma representa\u00e7\u00e3o de $X = \bigcup_{i=1}^s \bigcap_{j=1}^{r_i} \{x \in \mathbb{R}^n : P_{i,j}(x) \bullet_{i,j} 0\}$, onde $\bullet_{i,j} \in \{=, >\}$. De fato, pois $\{x \in \mathbb{R}^n : P(x) \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : -P(x) \geq 0\}$ e $\{x \in \mathbb{R}^n : P(x) \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : P(x) = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : P(x) > 0\}$. Os subconjuntos semi-alg\u00e9bricos n\u00e3o vazios de \mathbb{R} s\u00e3o uni\u00f5es finitas de pontos e uni\u00f5es finitas de intervalos abertos. De fato, pela Proposi\u00e7\u00e3o 2.1, temos que $X \in \mathbf{SA}_1 \Rightarrow X = \bigcup_{i=1}^s \bigcap_{j=1}^{r_i} \{x \in \mathbb{R} : P_{i,j}(x) \bullet_{i,j} 0\}$ onde $\bullet_{i,j} \in \{=, >\}$, note que os conjuntos n\u00e3o vazios $\{x \in \mathbb{R} : P_{i,j}(x) = 0\}$ e $\{x \in \mathbb{R} : P_{i,j}(x) > 0\}$ s\u00e3o pontos ou uni\u00f5es de intervalos, de modo que a interse\u00e7\u00e3o finita deles, s\u00e3o pontos ou intervalos.

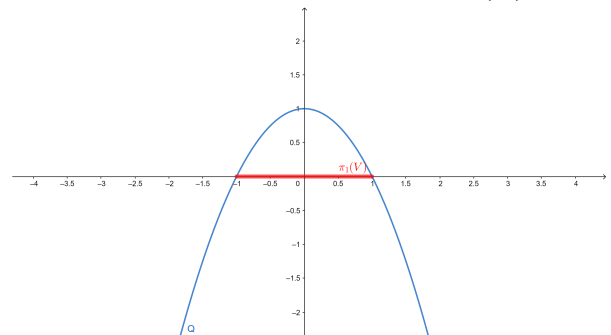
$X \in \mathbf{SA}_n, Y \in \mathbf{SA}_m \Rightarrow (X \times Y) \in \mathbf{SA}_{n+m}$, para tanto usamos as representa\u00e7\u00f5es obtidas na proposi\u00e7\u00e3o anterior. Considere o polin\u00f4mio $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $P(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, e seja $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : P(x, y) = 0\}$, agora considere a proje\u00e7\u00e3o can\u00f4nica na primeira coordenada $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\pi_1(x, y) = x$, notemos que V \u00e9 o conjunto dos zeros do polin\u00f4mio P , e note tamb\u00e9m que o conjunto $\pi_1(V) = [-1, 1]$ n\u00e3o \u00e9 o conjunto dos zeros de nenhum polin\u00f4mio real $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pois o conjunto dos zeros de qualquer polin\u00f4mio n\u00e3o nulo Q descrito acima \u00e9 no m\u00e1ximo finito e $[-1, 1]$ \u00e9 n\u00e3o enumer\u00e1vel. Por outro lado, $\pi_1(V) = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \geq 0\}$ onde $Q(x) = -x^2 + 1$, o pr\u00f3ximo teorema generaliza tal fen\u00f4meno.

Figura 2 – O conjunto V e $\pi_1(V)$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 3 – O gr\u00e1fico de Q e $\pi_1(V)$



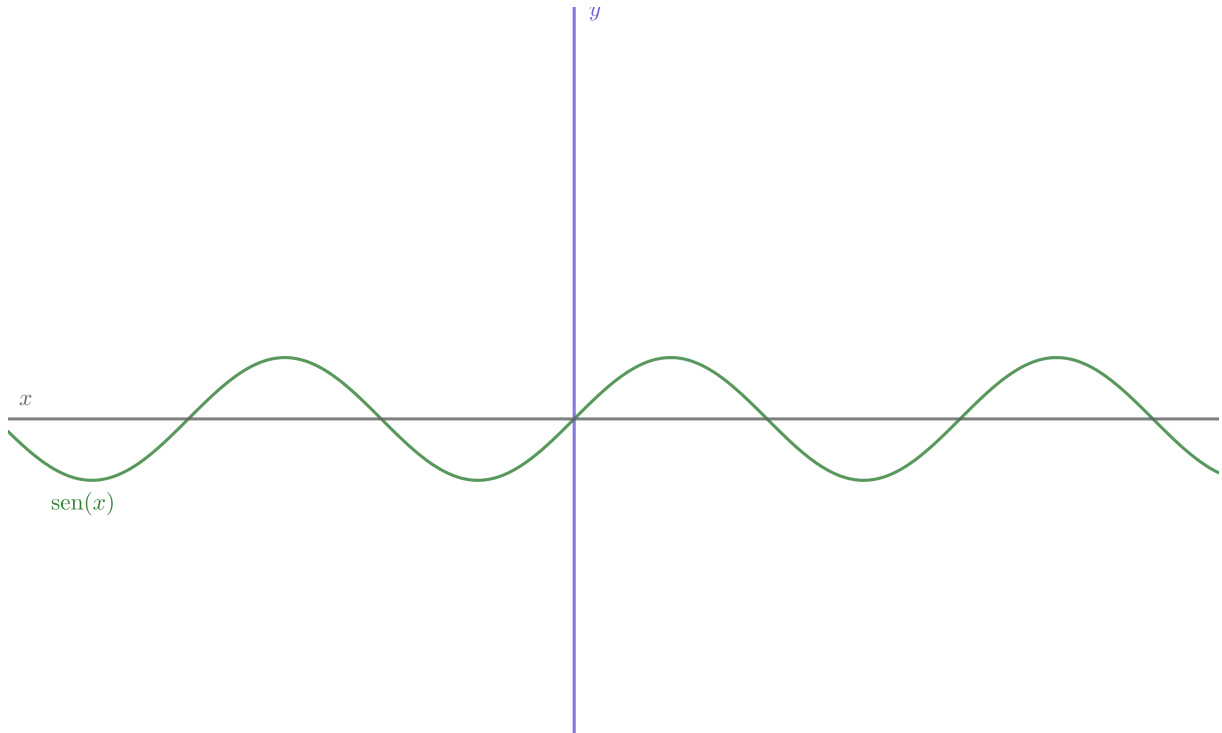
Fonte: Elaborado pelo autor.

Seja $A \in \mathbf{SA}_n$ um conjunto semi-alg\u00e9brico. Uma aplica\u00e7\u00e3o $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ser\u00e1 chamada de semi-alg\u00e9brica se o gr\u00e1fico de f for um conjunto semi-alg\u00e9brico.

A fun\u00e7\u00e3o seno n\u00e3o \u00e9 semi-alg\u00e9brica. Com efeito, note que a reta $0x$ intersepta o gr\u00e1fico da fun\u00e7\u00e3o seno em uma quantidade infinita de pontos. Se o gr\u00e1fico da fun\u00e7\u00e3o seno fosse semi-alg\u00e9brico a interse\u00e7\u00e3o dele com a reta $0x$ seria semi-alg\u00e9brico, mas como tal interse\u00e7\u00e3o consiste em uma quantidade infinita de pontos isolados, a interse\u00e7\u00e3o n\u00e3o pode ser semi-alg\u00e9brica.

Todas as funções polinomiais são funções semi-algébricas

Figura 4 – Gráfico da função seno.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Teorema 2.1.2 (Tarski-Seidenberg)

Sejam $A \in \mathbf{SA}_{n+1}$ e $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ a projeção nas primeiras n coordenadas. Então $\pi(A) \in \mathbf{SA}_n$

Como $A \in \mathbf{SA}_{n+1}$ temos pela Proposição 1.1 que A é uma união finita de conjuntos da forma $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : P(x) = 0 \text{ e } Q_1(x) > 0 \text{ e } \dots \text{ e } Q_l(x) > 0\}$. Segue do princípio de Tarski-Seidenberg (\star) que existe uma combinação booleana $\mathcal{C}(X_1, \dots, X_n)$ de igualdades e desigualdades polinomiais, de tal sorte que o conjunto $\pi(A) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \exists x_{n+1} \in \mathbb{R} : (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in A\}$ satisfaz $\mathcal{C}(x_1, \dots, x_n)$, logo, por definição $\pi(A) \in \mathbf{SA}_n$.

Proposição 2.1.3 Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação polinomial, i.e. $F = (F_1, \dots, F_m)$ onde $F_i \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$. Se $A \in \mathbf{SA}_m$, então $F^{-1}(A) \in \mathbf{SA}_n$.

Note que $A \in \mathbf{SA}_m$ é uma união finita de conjuntos do tipo $\{y \in \mathbb{R}^m : P(y) = 0 \text{ e } Q_1(y) > 0 \text{ e } \dots \text{ e } Q_l(y) > 0\}$ onde $l \in \mathbb{N}$ e $P, Q_1, \dots, Q_l \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_m]$, note que a pré imagem da união é a união das pré imagens, logo $F^{-1}(A)$ é uma união de conjuntos do tipo $\{x \in \mathbb{R}^n : (P \circ F)(x) =$

0 e $(Q_1 \circ F)(x) > 0$ e ... e $(Q_l \circ F)(x) > 0$ onde $l \in \mathbb{N}$ e $P \circ F, Q_1 \circ F, \dots, Q_l \circ F \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, de modo que $F^{-1}(A) \in \mathbf{SA}_n$

Todo subconjunto algébrico de \mathbb{R}^n é também um subconjunto semi-algébrico de \mathbb{R}^n . Com efeito, recorde que $X \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto semi-algébrico de \mathbb{R}^n se existem $P_1, P_2, \dots, P_m \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ de tal sorte que $X = \{x \in \mathbb{R}^n : P_1(x) = \dots = P_m(x) = 0\}$. Tome $X_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : P_1(x) = 0\}, \dots, X_m = \{x \in \mathbb{R}^n : P_m(x) = 0\}$, por (1) temos que $X_1, \dots, X_m \in \mathbf{SA}_n$, além disso $X = \bigcap_{i=1}^m X_i$, logo $X \in \mathbf{SA}_n$, por (2).

Corolário 2.1.1 *Se $A \in \mathbf{SA}_{n+k}$ e $\pi : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ a projeção nas primeiras n coordenadas. Então $\pi(A) \in \mathbf{SA}_n$*

Segue do Teorema de Tarski-Seidenberg e indução sobre k .

Corolário 2.1.2 *$A \in \mathbf{SA}_m$ e $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação polinomial $\Rightarrow f(A) \in \mathbf{SA}_n$*

Considere o conjunto :

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} : f(x) = y\} \in \mathbf{SA}_{n+m}$$

e note que $f(A)$ é a projeção de $\text{Graf}(f)$ em \mathbb{R}^n .

Corolário 2.1.3 *Seja $A \in \mathbf{SA}_n$, denotaremos por \bar{A} o fecho de A em \mathbb{R}^n , nessas condições $\bar{A} \in \mathbf{SA}_n$.*

Note que $\bar{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon > 0 \exists y \in A : \|x - y\|^2 < \varepsilon^2\}$ e pode ser escrito como

$$\bar{A} = \mathbb{R}^n - \left(\pi_1(\{(x, \varepsilon) \in \mathbb{R}^{n+1} : \varepsilon > 0\}) - \pi_2(\{(x, \varepsilon, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \oplus \mathbb{R}^n : y \in A \text{ e } \varepsilon^2 - \sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2 > 0\}) \right)$$

onde π_1 e π_2 representam as projeções nas primeiras e nas últimas n -coordenadas respectivamente, note que $\forall \varepsilon > 0$ o conjunto $\pi_2(\{(x, \varepsilon, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \oplus \mathbb{R}^n : y \in A \text{ e } \varepsilon^2 - \sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2 > 0\})$ é semi-algébrico, o que completa a prova.

Teorema 2.1.4 *Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, uma aplicação semi-algébrica, onde $A \in \mathbf{SA}_n$, então $f(A) \in \mathbf{SA}_m$. Dado $B \in \mathbf{SA}_m$, onde $B \subset f(A)$, então $f^{-1}(B) \in \mathbf{SA}_n$.*

Tome Considere o conjunto $G = \text{graf}(f)$ veja, $f(A) = \pi_m(G \cap (A \times B))$ e $f^{-1}(B) = \pi_n(G \cap (A \times B))$, onde π_m é a projeção nas últimas m coordenadas e π_n é a projeção nas primeiras n coordenadas, caso $A \in \mathbf{SA}_n$ por Tarski-Seidenberg segue que $f(A) \in \mathbf{SA}_m$, caso $B \in \mathbf{SA}_m$ por Tarski-Seidenberg segue que $f^{-1}(B) \in \mathbf{SA}_n$.

2.2 Decomposição de Conjuntos Semi-Algébricos

Nesta seção abordaremos um pouco da geometria e topologia dos conjuntos semi-algébricos. Sendo os mais importantes o teorema da decomposição cilíndrica e o teorema de Lojasiewicz que afirma que um conjunto semi-algébrico possui uma quantidade finita de componentes conexas. Uma decomposição algébrica cilíndrica (abreviaremos como D.A.C) de \mathbb{R}^n é uma sequência, $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$, onde, $1 \leq k \leq n$ \mathcal{C}_k é uma partição finita de \mathbb{R}^k em conjuntos semi-algébricos (que chamaremos de células) satisfazendo as seguintes propriedades:

1. Cada célula $C \in \mathcal{C}_1$ é um ponto ou um intervalo aberto
2. Para cada k , $1 \leq k < n$ e para cada $C \in \mathcal{C}_k$ existe uma quantidade finita de funções semi-algébricas contínuas $\xi_{C,1} < \dots < \xi_{C,l_C} : C \rightarrow \mathbb{R}$, e o cilindro $C \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{k+1}$ é uma união disjunta de células de \mathcal{C}_{k+1} que são:

- a) Ou gráficos de uma das funções $\xi_{C,j}$, para $j = 1, \dots, l_C$:

$$A_{C,j} = \{(x', x_{k+1}) \in C \times \mathbb{R} : \xi_{C,j}(x') = x_{k+1}\}$$

- b) Ou Faixas de cilindros limitados por cima e por baixo, por gráficos de funções do tipo $\xi_{C,j}$ e $\xi_{C,j+1}$ para $j = 0, \dots, l_C$, convencionaremos $\xi_{C,0} = -\infty$ e $\xi_{C,l_C+1} = +\infty$

$$B_{C,j} = \{(x', x_{k+1}) \in C \times \mathbb{R} : \xi_{C,j}(x') < x_{k+1} < \xi_{C,j+1}(x')\}$$

Vamos exibir uma D.A.C para \mathbb{R}^2 , considere $C_0 = \{0\}$, $C_1 = (0, +\infty)$ e $C_2 = (-\infty, 0)$

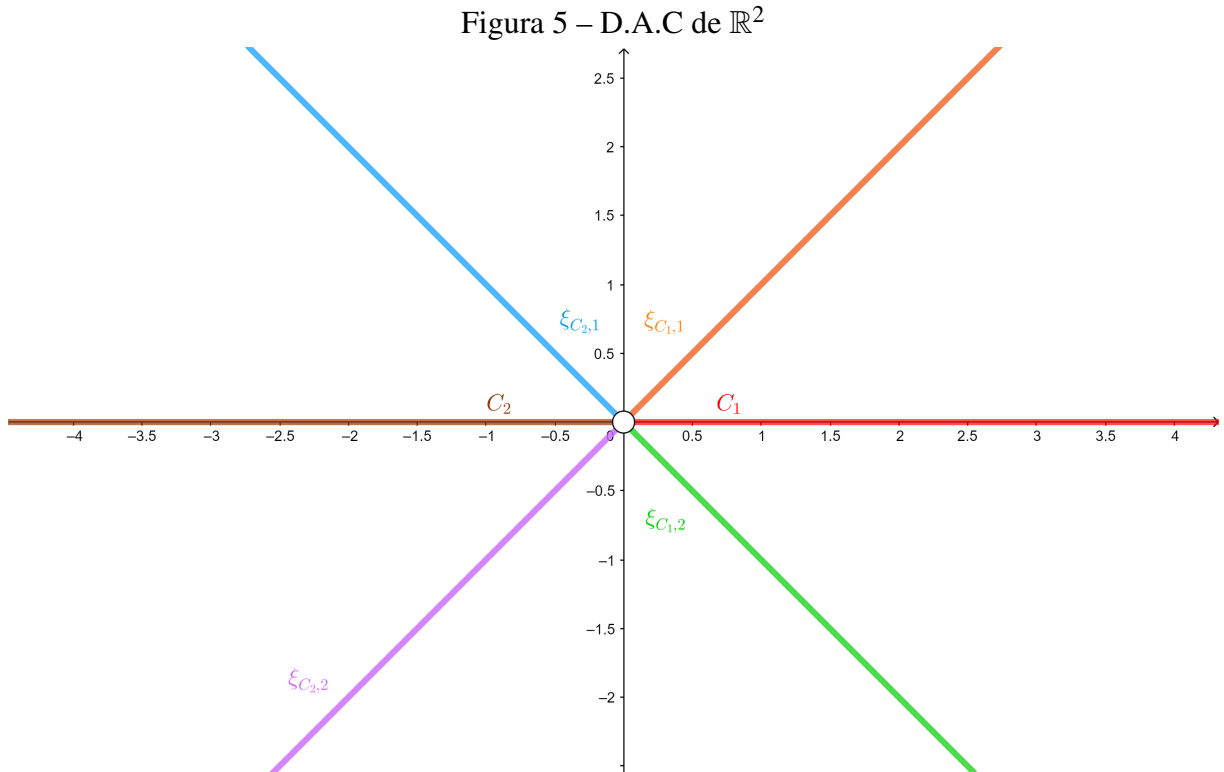
e as seguintes funções :

- $\xi_{C_0,1} : C_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\xi_{C_0,1}(0) = 0$
- $\xi_{C_1,1} : C_1 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\xi_{C_1,1}(x) = x$
- $\xi_{C_1,2} : C_1 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\xi_{C_1,2}(x) = -x$
- $\xi_{C_2,1} : C_2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\xi_{C_2,1}(x) = -x$
- $\xi_{C_2,2} : C_2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\xi_{C_2,2}(x) = x$

Note que cada ponto de \mathbb{R}^2 se encontra compreendido ou em um gráfico de uma das funções descritas acima, ou em uma faixa entre os gráficos.

Lema 2.2.1 *Cada célula da D.A.C é semi-algebricamente homeomorfa a um cubo aberto do tipo $(0, 1)^n$ (convencionaremos que $(0, 1)^0$ é um único ponto)*

(Indução sobre n), o ponto chave para essa demonstração é a seguinte observação: Usando a notação acima, o gráfico de cada $A_{C,j}$ é semi-algebricamente homeomorfo a C e cada faixa $B_{C,j}$ é



Fonte: Elaborado pelo autor.

semi-algebricamente homeomorfa a $C \times (0, 1)$. No caso $A_{C,j}$, o homeomorfismo é simplesmente $\varphi : C \rightarrow A_{C,j}$ e $\varphi(x') = (x1, \xi_{C,j}(x'))$ no caso $B_{C,j}$ peguemos, $\psi : C \times (0, 1) \rightarrow B_{C,j}$, onde

$$\psi(x', t) = \begin{cases} (x', (1-t)\xi_{C,j}(x') + t\xi_{C,j+1}(x')) & \text{se } 0 < j < l_C \\ \left(x', \frac{t-1}{t} + \xi_{C,1}(x')\right) & \text{se } j = 0, l_C \neq 0 \\ \left(x', -\frac{1}{t} + \frac{1}{1-t}\right) & \text{se } j = l_C = 0 \\ \left(x', \frac{t}{1-t} + \xi_{C,l_C}(x')\right) & \text{se } j = l_C \neq 0 \end{cases}$$

A D.A.C mostra que cada semi-

algébrico $S \in \mathbb{R}^n$ é a união disjunta de conjuntos semi-algéblicos C_1, \dots, C_p , tal que cada C_i é semi-algebricamente homeomorfo ao cubo $(0, 1)^{d_i}$. Cada C_i é obviamente conexo. O que nos leva ao

Teorema 2.2.1 (Lojasiewicz)

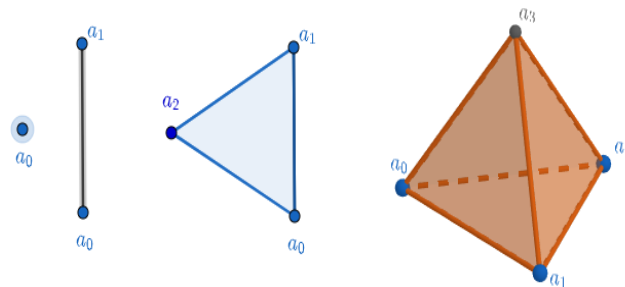
Todo conjunto semi-algéblico $S \subset \mathbb{R}^n$ possui uma quantidade finita de componentes conexas.

Além disso, é localmente conexo.

2.3 Triangulação

O objetivo central desta seção é introduzir o conceito de triangulação, em particular o poderoso Teorema da Triangulação de conjuntos semi-algéblicos, e exibir uma aplicação interessante do mesmo, o Lema da Seleção da Curva. Sejam $a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$ pontos independentes. O simplexo k -dimensional σ que tem estes pontos como vértices é o conjunto $\sigma = \langle a_0, \dots, a_k \rangle$ de todas as combinações convexas $p = \sum_{i=0}^k \lambda_i a_i$ com $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$, ou seja é a envoltória convexa do conjunto $\{a_0, \dots, a_k\}$.

Figura 6 – Simplexos de dimensão 0,1,2 e 3 respectivamente



Fonte: Elaborado pelo autor.

Uma aplicação $f : \sigma \rightarrow \mathbb{R}^k$ é chamada linear se $f(\sum_{i=0}^k \lambda_i a_i) = \sum_{i=0}^k \lambda_i f(a_i)$ para quaisquer $(k+1)$ -uplas de números reais não negativos λ_i tais que $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$. Um poliedro é um subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$, no qual foi especificada uma coleção finita de simplexos de \mathbb{R}^n , chamados de simplexos de K , de modo que as condições abaixo são satisfeitas:

1. Todo ponto de K pertence a algum de seus simplexos (ou seja, K é a união de seus simplexos);
2. Toda face de um simplexo de K é ainda um simplexo de K ;
3. Se s e t são simplexos de K a interseção entre eles é: o vazio, ou uma face comum a s e t .

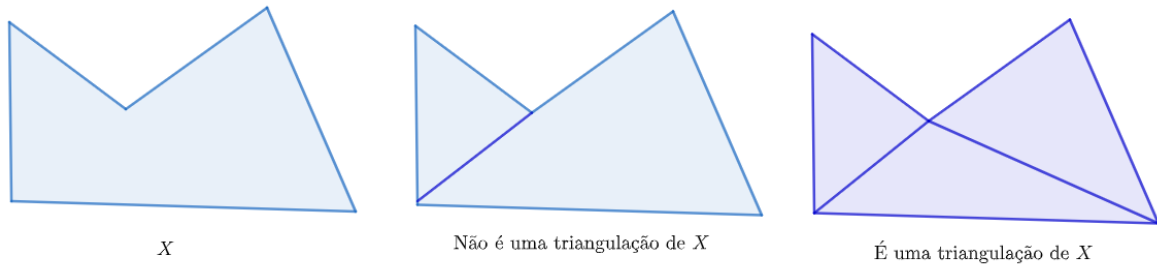
Seja $Y \subset \mathbb{R}^n$. Uma triangulação de Y é um homeomorfismo do tipo

$$\phi : Y \rightarrow K$$

para algum poliedro $K \subset \mathbb{R}^m$

Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um poliedro compacto. Uma aplicação contínua $f : K \rightarrow \mathbb{R}^k$ é chamada linear por partes, se f for linear em cada um dos simplexos de K . Decorre imediatamente que

Figura 7 – Exemplos de triangulações.



Fonte: Elaborado pelo autor.

uma aplicação linear por partes é semi-algébrica.

Teorema 2.3.1 (Teorema da Triangulação Semi-Algébrica)

Seja $A \in SA_n$ um compacto e B_1, \dots, B_k subconjuntos semi-algébricos de A . Então existe um poliedro $K \subset \mathbb{R}^n$ e um homeomorfismo semi-algébrico $h : K \rightarrow A$, de tal sorte que B_k é a imagem por h de uma união de simplexos abertos de K . (Neste caso dizemos que h é uma triangulação de A compatível com os B_i , onde $1 \leq i \leq k$).

Ver : COSTE, Michel. **An Introduction to Semialgebraic Geometry**

2.3.1 Lema de Seleção da Curva

Teorema 2.3.2 Seja $A \in SA_n$. Seja $x \in \bar{A}$, $x \notin A$. Então existe uma aplicação contínua semi-algébrica $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma(0) = x$ e $\gamma((0, 1]) \subset A$

Sem perda de generalidade podemos supor A limitado, pois se não for consideraremos o conjunto $A \cap B_1(x)$ onde $B_1(x)$ é a bola unitária centrada em x , então \bar{A} é compacto e semi-algébrico, pelo Teorema da Triangulação, existe um poliedro K e um homeomorfismo semi-algébrico $h : K \rightarrow \bar{A}$, tal que $x = h(a)$, onde $a \in K$ é um vértice, e A é a imagem por h da união de alguns simplexos abertos de K . Em particular como $x \in \bar{A}$ e $x \notin A$, então deve existir um simplexo $\sigma \in K$ que possui a como um de seus vértices e tal que $h(int(\sigma)) \subset A$. Agora tome uma parametrização do segmento que liga a ao baricentro de σ tal que $\delta : [0, 1] \rightarrow \sigma$ tal que $\delta(0) = a$ e $\delta((0, 1]) \subset int(\sigma)$, tomando $\gamma = h \circ \delta$ o resultado segue.

2.4 Dimensão Via D.A.C

A decomposição algébrica cilíndrica é uma forma de decompor um conjunto semi-algébrico S em uma união finita de células que são semi-algebricamente homeomorfas a cubos abertos do tipo $(0, 1)^d$. Baseado nisso, estamos exibindo uma noção de dimensão para conjuntos semi-algébricos, o resultado a seguir (bem) define esse conceito.

Proposição 2.4.1 *Sejam $S \in \mathbf{SA}_n$ e $S = \bigcup_{i=1}^p C_i$ onde cada C_i é semi-algebricamente homeomorfo a $(0, 1)^{d_i}$, definiremos a dimensão de S , como sendo $\max\{d_i : i = 1, 2, \dots, p\}$; esta definição, não depende da decomposição.*

Seja $S = \bigcup_{i=1}^p C_i$ e $S = \bigcup_{j=1}^p D_j$ duas decomposições semi-algébricas de S então existe uma outra decomposição $S = \bigcup_{k=1}^r E_k$ onde $\bigcup_{k=1}^r E_k$ refina as duas decomposições dadas, de modo que cada C_i e D_j é uma união finita de E_k . Vamos comparar as dimensões de C_i , D_j e E_k , enquanto subvariedades de \mathbb{R}^n , como $E_k \subset C_i \Rightarrow \dim(E_k) \leq \dim(C_i)$ se E_k possui a maior dimensão entre todas as células de C_i , então E_k é aberto em C_i , e tem a mesma dimensão de C_i , de modo que $\overline{C_i - E_k}$ contém apenas $C_i - E_k$ e células com dimensão menores do que E_k e portanto disjuntos de E_k . Segue que o máximo das dimensões do C_i é igual ao máximo das dimensões dos E_k e pelas mesmas razões, igual ao máximo das dimensões do D_j . Segue imediatamente da definição de dimensão de conjunto semi-algébrico que a dimensão de uma união finita de conjuntos semi-algébricos é o máximo das dimensões dos conjuntos, a dimensão do produto cartesiano finito de conjuntos semi-algébrico é a soma das dimensões dos conjuntos.

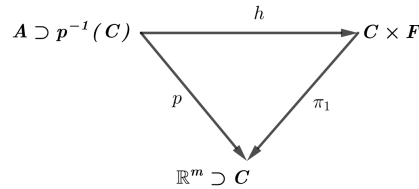
2.5 Trivialização

Aqui, queremos apresentar uma prova para o teorema muito importante na teoria da topologia local de conjuntos semi-algébricos chamado o Teorema da Estrutura Cônica Local que diz um fato importante sobre a topologia local dos conjuntos semi-algébricos. Para tanto utilizaremos outro forte teorema, o da Trivialização Semi-Algébrica de Hardt.

Uma aplicação semi-algébrica $p : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ é dita ser semi-algebricamente trivial sobre um conjunto $C \in \mathbf{SA}_m$ se existir um conjunto semi algébrico F e um homeomorfismo semi-algébrico $h : p^{-1}(C) \rightarrow C \times F$ de modo que a composição de h com a projeção $\pi_1 : C \times F \rightarrow C$ é igual a restrição de p a $p^{-1}(C)$. Diremos que um uma trivialização h é compatível com um conjunto semi-algébrico $B \subset A$ se existir um conjunto semi-algébrico $G \subset F$ tal que

$$h(B \cap p^{-1}(C)) = C \times G.$$

Figura 8 – Descrição pictográfica.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Teorema 2.5.1 (Teorema da Trivialização semi-algébrica de Hardt)

Seja $A \in SA_n$ e seja $p : A \rightarrow \mathbb{R}^k$, uma aplicação semi-algébrica contínua, então existe uma partição de \mathbb{R}^k em conjuntos semi-algébricos C_i onde $1 \leq i \leq m$ tal que p é semi-algébricamente trivial sobre cada C_i . Mais do que isso, se B_1, \dots, B_k são subconjuntos semi-algébricos de A , então podemos nos questionar se cada trivialização $h_i : p^{-1}(C_i) \rightarrow C_i \times F_i$ é compatível com todos os B_j .

Vea prova em: BENEDETTI, Riccardo; RISLER, Jean-jacques. **Real algebraic and semi-algebraic sets**, pg

Teorema 2.5.2 (Teorema da Estrutura Cônica Local)

Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe um homeomorfismo semi-algébrico $h : \overline{B}_\varepsilon(a) \cap A \rightarrow a \star (S_\varepsilon(a) \cap A)$, onde $a \in A \in SA_n$ é ponto não isolado e $a \star (S_\varepsilon(a) \cap A)$ é o cone de vértice a e base $S_\varepsilon(a) \cap A$, tal que $\|h(x) - a\| = \|x - a\|$ e $h|_{S_\varepsilon(a) \cap A} = id$.

Aplique o teorema anterior para a função $p : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $p(x) = \|x - a\|$, onde obteremos uma trivialização de p sobre uma partição finita de \mathbb{R} . Podemos assumir que

essa partição possui um membro no intervalo $(0, \delta)$. Escolhendo ε de tal sorte que $0 < \varepsilon < \delta$. Note que $p^{-1}(\varepsilon) = (S_\varepsilon(a) \cap A)$, teremos o seguinte homeomorfismo semi-alg\u00e9brico

$$g : p^{-1}((0, \delta)) \rightarrow (0, \delta) \times (S_\varepsilon(a) \cap A)$$

tal que $g(x) = (\|x - a\|, g_1(x))$, onde $g_1|_{S_\varepsilon(a) \cap A} = id$. Agora defina $h : \overline{B}_\varepsilon(a) \cap A \rightarrow C_\varepsilon$ por

$$h(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\|x - a\|}{\varepsilon}\right) a + \frac{\|x - a\|}{\varepsilon} g_1(x) & \text{caso } x \in S_\varepsilon(a) \cap A, \\ h(a) = a. \end{cases}$$

Podemos checar que h satisfaz a propriedade do teorema. E sua inversa \u00e9 :

$$\begin{cases} h^{-1}(\lambda a + (1 - \lambda)x) = g^{-1}((1 - \lambda)\varepsilon, x) & \text{para } \lambda \in [0, 1], x \in S_\varepsilon(a) \cap A \\ h^{-1}(a) = a \end{cases}$$

2.6 Links

A ideia por tr\u00e1s do conceito de link semi-alg\u00e9brico \u00e9 estudar a topologia local de um conjunto semi-alg\u00e9brico, gra\u00e7as ao resultado principal da se\u00e7\u00e3o anterior podemos fazer isso. Seja $A \in \mathbf{SA}_n$ localmente compacto e seja $a \in A$ um ponto n\u00e3o isolado, ent\u00e3o definiremos o link de a em A como $lk(a, A) = A \cap S_\varepsilon(a)$, onde ε \u00e9 suficientemente pequeno para que seja v\u00e1lida a conclus\u00e3o do Teorema da Estrutura C\u00f4nica Local. Pelo Teorema da Estrutura C\u00f4nica Local, dado $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ para $\varepsilon \ll 1$ temos que $A \cap S_\varepsilon(a)$ \u00e9 homeomorfo a $A \cap S_{\varepsilon_1}(a)$. Sejam $A \in \mathbf{SA}_n$ e $K \subset A$ um subconjunto compacto semi-alg\u00e9brico de A . Definiremos o link de K em A como $lk(K, A) = f^{-1}(\varepsilon) \cap A$ onde f \u00e9 uma fun\u00e7\u00e3o $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua semi-alg\u00e9brica, positiva e pr\u00f3pria, com $f^{-1}(0) = K$.

Proposi\u00e7\u00e3o 2.6.1 *O tipo de topologia semi-alg\u00e9brica do link $lk(K, A)$ n\u00e3o depende de ε ou da escolha de f .*

Pelo Teorema de Hardt, existe uma trivializa\u00e7\u00e3o semi-alg\u00e9brica de f sobre um intervalo $(0, \varepsilon_1]$, compat\u00edvel com A . Isso mostra que $f^{-1}(\varepsilon) \cap A$ \u00e9 semi-alg\u00e9bricamente homeomorfo a $f^{-1}(\varepsilon_1) \cap A$ para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$.

Seja N uma vizinhan\u00e7a compacta de K em A . Podemos tomar uma triangula\u00e7\u00e3o semi-alg\u00e9brica de $f|_N$. Ent\u00e3o podemos assumir que existe um poliedro L e uma fun\u00e7\u00e3o n\u00e3o negativa f linear em

cada simplexo de L , mais que isso, $K = f^{-1}(0)$ é uma união de simplexos fechados de L . Então, dado $\varepsilon > 0$ com $\varepsilon \ll 1$, $f^{-1}(\varepsilon) \cap A$ é homeomorfa linear por partes a um PL -link de K em L . Da unicidade da triangulação semi-algébrica e da unicidade de PL -links, logo a topologia semi-algébrica de $lk(K, A)$ não depende da escolha de f . Para explicar em qual sentido nos referimos a "unicidade" da triangulação semi-algébrica, inicialmente enunciaremos o seguinte teorema:

Teorema 2.6.2 *Considere P e Q dois poliedros compactos. Se P e Q forem semi-algébricamente homeomorfos, então existe um homeomorfismo linear por partes entre eles.*

Ou seja, se A é um compacto semi-algébrico de sorte que $h_1 : K_1 \rightarrow A$ e $h_2 : K_2 \rightarrow A$ são triangulações semi-algébricas de A , então existe um homeomorfismo linear por partes entre K_1 e K_2 , esse é o sentido da "unicidade" mencionada anteriormente, unicidade a menos de homeomorfismo linear por partes.

Este resultado mostra que o tipo de topologia semi-algébrica do link é invariante por homeomorfismos semi-algébricos, ou seja dado $h : A \rightarrow B$ homeomorfismo semi-algébrico temos que $lk(K, A)$ é semi-algébricamente homeomorfo a $lk(h(K), B)$.

2.7 A Homologia de Borel-Moore e a Característica de Euler

Denotaremos por $H_i^{BM}(A; \mathbb{Z}/2)$ a homologia de Borel-Moore para conjuntos semi-algébricos localmente compactos (com coeficientes em $\mathbb{Z}/2$), com a seguinte propriedade, se A é compacto então $H_i^{BM}(A; \mathbb{Z}/2) = H_i(A; \mathbb{Z}/2)$, se A não for compacto, podemos tomar um semi-algébrico aberto que é o mergulho de A em um semi-algébrico compacto B , e esse mergulho induz um isomorfismo de $H_i^{BM}(A; \mathbb{Z}/2)$ no grupo de homologia relativa $H_i(B, B - A; \mathbb{Z}/2)$. Se F é semi-algébrico fechado e $F \subset A$, (A semi-algébrico localmente compacto) então F e $A - F$ são localmente compactos e temos a sequência exata longa :

$$\dots H_{i+1}^{BM}(A - F; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_i^{BM}(F; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_i^{BM}(A; \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_i^{BM}(A - F; \mathbb{Z}/2) \dots$$

Note que, temos $H_d^{BM}((-1, 1)^d; \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2$ e $H_i^{BM}((-1, 1)^d; \mathbb{Z}/2) = 0$ se $i \neq d$, mergulhando $(-1, 1)^d$ na esfera menos um ponto. Se A é um semi-algébrico localmente compacto, definiremos $\chi(A) = \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbb{Z}/2} H_i^{BM}(A; \mathbb{Z}/2)$. Temos $\chi((-1, 1)^d) = (-1)^d$, segue da sequência exata longa que dado A semi-algébrico localmente compacto e $F \subset A$ semi-algébrico fechado, então $\chi(A) = \chi(F) + \chi(A - F)$.

A característica de Euler do link é um invariante topológico semi-algébrico. O Teorema de Hardt mostra que $lk(K, A)$ é o retrato por deformação de $f^{-1}((0, \varepsilon)) = f^{-1}([0, \varepsilon] - K)$. Onde f é um homeomorfismo semi-algébrico. Temos que:

$$\chi(lk(K, A)) = \chi(K) - \chi(A, A - K).$$

Lema 2.7.1 *Sejam $A \in \mathbf{SA}_n$ localmente compacto e $A = \sqcup_{i=1}^k C_i$, uma decomposição celular de A em células C_i semi-algêbricamente homeomorfas a $(-1, 1)^{d_i}$ onde $1 \leq i \leq k$, então*

$$\chi(A) = \sum_{i=1}^k (-1)^{d_i}$$

Seja $\dim A = d$ e seja $A^{<d}$ a união de todas as células de dimensão menores do que d . $A^{<d}$ é fechado, as células de dimensão exatamente d são as componentes conexas de $A - A^{<d}$. Usando a propriedade de aditividade mencionada acima temos que:

$$\chi(A) = (-1)^d \text{card}(\{k; d_k = d\}) + \chi(A^{<d}).$$

Por indução sobre k , o lema está provado.

Teorema 2.7.1 *A característica de Euler com suporte em conjuntos semi-algêbricos localmente compactos pode ser estendida unicamente a um invariante por homeomorfismo semi-algébrico (ainda denotado por χ) para todos os semi-algêbricos, satisfazendo:*

1. $\chi(A \sqcup B) = \chi(A) + \chi(B)$

2. $\chi(A \times B) = \chi(A) \times \chi(B)$

1. (Existência) Seja $A = \sqcup_k C_k$, uma decomposição celular de A em células C_i semi-algêbricamente homeomorfas a $(-1, 1)^{d_i}$ onde $1 \leq i \leq k$, se A é localmente compacto temos $\tilde{\chi}(A) = \chi(A) = \sum_{i=1}^k (-1)^{d_i}$, se A não for localmente compacto definimos $\tilde{\chi}(A) = \sum_{i=1}^k (-1)^{d_i}$ e mostraremos que nesse caso $\tilde{\chi}$ esta bem definida e satisfaz as propriedades 1 e 2. Da boa definição de $\tilde{\chi}$, seja $A = \sqcup_k C_k$ e $A = \sqcup_l D_l$ então tome um refinamento dessas decomposições $A = \sqcup_j E_j$. onde cada C_k e D_l e uma união disjunta finita de E_j , precisamos mostrar que a soma $\sum_{i=1}^k (-1)^{d_i}$ não muda após o refinamento, como cada C_k é localmente compacto, podemos usar o lema anterior $(-1)^{d_k} = \tilde{\chi}(C_k) = \sum_{E_j \subset C_k} (-1)^{\dim E_j} \Rightarrow \tilde{\chi}(A) = \chi(A) = \sum_{i=1}^k (-1)^{d_i} = \sum_{j=1}^k (-1)^{\dim E_j}$
 $(-1)^{d_l} = \tilde{\chi}(D_l) = \sum_{E_j \subset D_l} (-1)^{\dim E_j} \Rightarrow \tilde{\chi}(A) = \chi(A) = \sum_{i=1}^l (-1)^{d_i} = \sum_{j=1}^l (-1)^{\dim E_j}$ do fato

dos E_j refinar tanto os C_k quanto os D_l temos que a soma é a mesma. Claramente $\tilde{\chi}$ é invariante por homeomorfismo semi-algébrico, pois este leva D.A.C em D.A.C, preservando a dimensão das células. A aditividade para união disjunta $A \sqcup B$ é obtida tomando uma partição semi-algébrica de $A \sqcup B$ de modo que A e B sejam uniões de células semi-algébricas. A propriedade do produto $A \times B$ é obtida da mesma forma tomando uma partição tal que $A \times B$ é particionado por células $C \times D$ onde $C \subset A$ e $D \subset B$ onde C e D são células semi-algébricas de A e B respectivamente

2. (Unicidade) Suponha que existam $\tilde{\chi}$ e $\tilde{\chi}$ que cumpram as propriedades 1 e 2, e seja tal que $\tilde{\chi}(A) = \tilde{\chi}(A) = \chi(A)$, para todo A semi-algébrico e localmente compacto. Nesse caso, dado um A semi-algébrico qualquer, tomaríamos uma partição semi-algébrica dele $A = \sqcup_k C_k$ de modo que pela compacidade local dos conjuntos C_i temos: $\tilde{\chi}(A) = \tilde{\chi}(\sqcup_k C_k) = \sum_{i=1}^k \tilde{\chi}(C_i) = \sum_{i=1}^k \tilde{\chi}(C_i) = \tilde{\chi}(\sqcup_k C_k) = \tilde{\chi}(A)$.

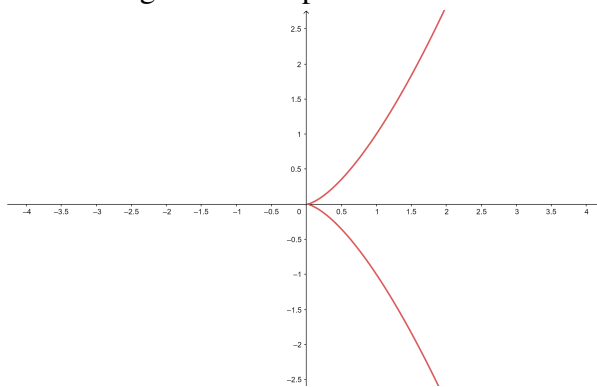
3 CONJUNTOS ALGÉBRICOS REAIS

3.1 Topologia de Zariski e Variedade algébrica afim

Basicamente aqui, gostaríamos de expor uma teoria visando compreender as primeiras propriedades algébricas (e geométricas) dos conjuntos algébricos. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$, diremos que X é algébrico se existem uma quantidade finita de polinômios P_1, \dots, P_m tal que $X = \{x \in \mathbb{R}^n : P_1(x) = P_2(x) = \dots = P_m(x) = 0\}$. Note que com conjuntos algébricos reais, podemos tomar um único polinômio P tal que $X = P^{-1}(0)$, para tanto, tome $P = P_1^2 + \dots + P_m^2$.

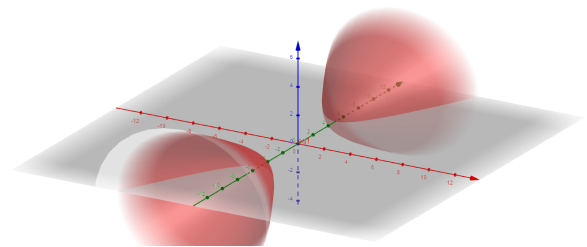
- a curva dada como os zeros de $y^2 - x^2(x+1) = 0$.
- A cúspide horizontal dada como $x^2 - y^3 = 0$
- O parabolóide hiperbólico, dado por $z + \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 0$
- hiperbolóide de duas folhas dado como $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{5} - \frac{z^2}{4} - 1 = 0$

Figura 9 – Cúspide horizontal



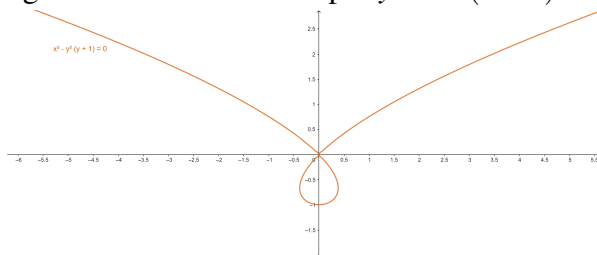
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 10 – Hiperbolóide de duas folhas



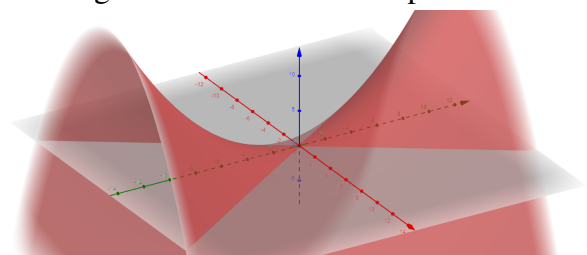
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 11 – A curva dada por $y^2 - x^2(x+1) = 0$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 12 – Parabolóide hiperbólico



Fonte: Elaborado pelo autor.

A topologia de Zariski sobre \mathbb{R}^n é aquela cujos conjuntos fechados são os conjuntos algébricos de \mathbb{R}^n , $A \subset \mathbb{R}^n$ denotaremos por \overline{A}^Z o fecho de Zariski de A , definido pelo menor

conjunto algébrico a conter A .

Um conjunto algébrico X é dito ser irredutível se ele não puder ser escrito como a união de dois conjuntos algébricos estritamente contidos nele, caso contrário ele é dito ser redutível. **Notação:** Seja X um conjunto algébrico de \mathbb{R}^n . Denotaremos por $\mathcal{P}(x)$ o anel das funções polinomiais em X . Se U é um aberto da topologia de Zariski contido em X , denotaremos por $\mathcal{R}(U)$ o anel das funções regulares em U i.e o anel dos quocientes da forma P/Q onde P e Q são funções polinomiais em X e Q não tem zeros em U , se X for irredutível $\mathcal{P}(x)$ é um domínio de integridade e $\mathcal{R}(U)$ é seu corpo de frações. Para $V \subset \mathbb{R}^n$, denotaremos por $I(V) \subset \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ e definiremos $I(V)$ como:

$$I(V) = \{P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]; \forall x \in V \ P(x) = 0\}$$

$I(V)$ é ideal de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$. V é um conjunto algébrico se, e somente se, $V = Z(I(V))$, onde $Z(I(V))$ são os zeros comuns aos polinômios de $I(V)$.

Proposição 3.1.1 V é um conjunto algébrico irredutível se, e somente se, $I(V)$ é um ideal primo.

Suponha que $I(V)$ não seja primo, então existem $P_1, P_2 \notin I(V)$ e $P_1 P_2 \in I(V)$, então $V = (V \cap V(P_1)) \cup (V \cap V(P_2))$, onde $V(P_1)$ e $V(P_2)$ são os conjuntos algébricos sobre os quais P_1 e P_2 se anulam respectivamente, mas $(V \cap V(P_1)) \subsetneq V$ (o mesmo para $V(P_2)$), então V é redutível. Reciprocamente se $V = V_1 \cup V_2$ com $V_1 \subsetneq V$ e $V_2 \subsetneq V$ então, $I(V_i) \subsetneq I(V)$ com $i = 1$ ou $i = 2$. Tome $P_i \in I(V_i)$ e $P_i \notin I(V)$, então $P_1 P_2 \in I(V)$, logo $I(V)$ não é primo.

Lema 3.1.1 *Seja \mathcal{C} uma coleção não vazia de ideais de um anel noetheriano R . Então \mathcal{C} possui um elemento maximal, i.e \mathcal{C} possui um ideal que não está contido estritamente em nenhum outro. Em outras palavras, toda cadeia crescente de ideais de um anel noetheriano estabiliza em algum momento.*

Escolha (usando o axioma da escolha) um ideal de cada subconjunto de \mathcal{C} , e seja I_0 o ideal escolhido para o próprio \mathcal{C} , defina $\mathcal{C}_1 = \{I \in \mathcal{C}; I \supsetneq I_0\}$ e seja I_1 o ideal escolhido para esse subconjunto, agora defina $\mathcal{C}_2 = \{I \in \mathcal{C}; I \supsetneq I_1\}$ e seja I_2 o ideal escolhido para esse subconjunto, repita esse processo indefinidamente, desejamos mostrar que $\exists n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para o qual $\mathcal{C}_n = \emptyset$ suponha que não, e tome $I = \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$, isto é um ideal de R e como R é noetheriano, I é finitamente gerado, portanto, sejam a_1, \dots, a_r os geradores de I , cada $a_i \in I_n$ para $n \gg 1$ temos $I = I_n$ logo, $I_{n+1} = I_n$, absurdo.

Teorema 3.1.2 *Seja $V \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto algébrico, então existem únicos V_1, V_2, \dots, V_m conjuntos algébricos irredutíveis, tais que $V = \bigcup_{i=1}^m V_i$ e $V_i \not\subseteq V_j$ para $i \neq j$.*

Considere

\mathcal{C} o conjunto dos conjuntos algébricos que não são uma união finita de conjuntos algébricos irredutíveis, desejamos mostrar que $\mathcal{C} = \emptyset$, suponha que não, seja V o elemento maximal de \mathcal{C} , logo V é redutível e portanto $V = V_1 \cup V_2$ com $V_i \subsetneq V$, pelo lema anterior podemos supor que $V_i \notin \mathcal{C}$ logo $V_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} V_{i,j}$, onde cada $V_{i,j}$ é irredutível, mas nesse caso $V = \bigcup_{i,j} V_{i,j}$, contradição. (unicidade) Seja V conjunto algébrico, sabemos que $V = \bigcup_{i=1}^m V_i$, onde cada V_i é irredutível, desconsidere os conjuntos tais que $V_i \subset V_j$ para $i \neq j$, em seguida tome outra representação $V = \bigcup_j^m W_j$. Temos que $V_i = \bigcup_j^m (W_j \cap V_i)$, então $V_i \subset W_{j_i}$ para algum j_i , similarmente $W_{j_i} \subset V_k$, logo $V_i \subset V_k$ mas como convencionamos, temos $i = k$ logo $V_i = W_{j_i}$ analogamente todo $W_j = V_{i_j}$. Seja $V = \bigcup_i^m V_i$, onde V é conjunto algébrico e cada V_i é conjunto algébrico irredutível, nesse caso, chamamos cada V_i de componente irredutível de V .

Uma aplicação regular $f : U \rightarrow V$ entre abertos da topologia de Zariski contidos em conjuntos algébricos é uma aplicação onde cada função coordenada é uma função regular. Se f é bijeção, tal que f^{-1} é regular, dizemos que f é biregular.

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto algébrico, definiremos a dimensão de X como a dimensão de krull de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]/I(V)$ i.e o comprimento máximo de uma cadeia de ideais primos de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]/I(V)$. Seja X irredutível e seja $k(X)$ o corpo de frações de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]/I(V)$, a dimensão de X é o grau de transcendência do corpo $k(X)$ sobre \mathbb{R} , se $X = \bigcup_{i=1}^r X_i$ onde X_i são componentes irredutíveis de X , então $\dim X = \max \dim X_i$.

Teorema 3.1.3 *O espaço projetivo real $P_n(\mathbb{R})$ é uma variedade afim e há um isomorfismo biregular entre ele e o conjunto algébrico real em $\mathbb{R}^{(n+1)^2}$*

Mergulharemos o $P_n(\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^{(n+1)^2}$ através do morfismo $\phi : P_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{(n+1)^2}$ onde

$$\phi(x_0, \dots, x_n) = \left(\frac{x_j x_k}{\sum_{i=0}^n x_i^2} \right)_{0 \leq j, k \leq n}$$

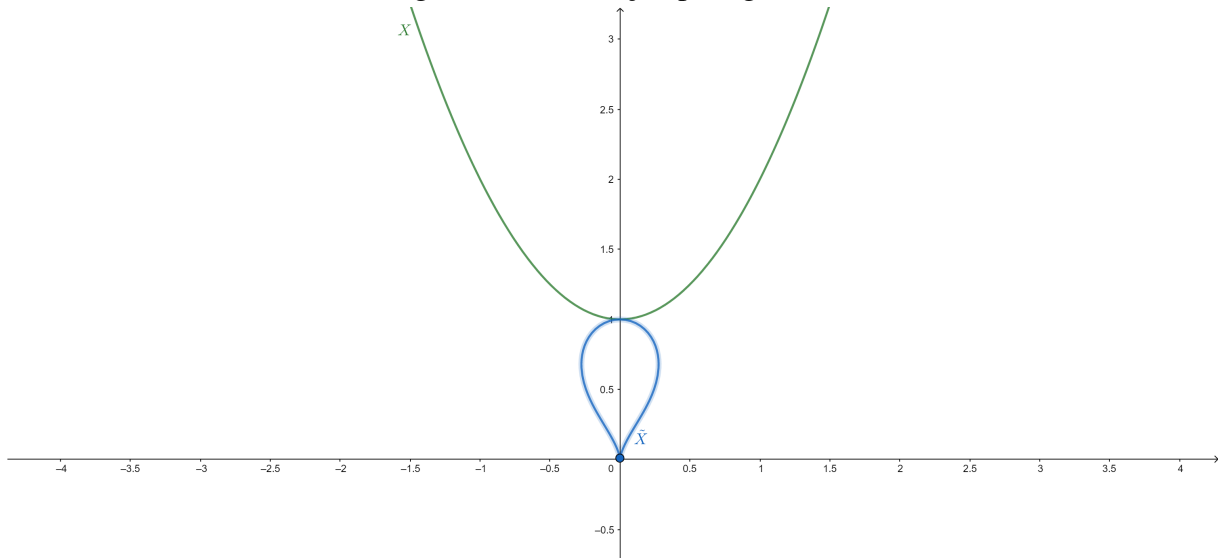
A imagem do mergulho é o conjunto algébrico real V de pontos $(y_{j,k})_{0 \leq j, k \leq n} \in \mathbb{R}^{(n+1)^2}$ tal que $\sum y_{j,j} = 1$, $y_{j,k} = y_{k,j}$ e $\sum_k y_{j,k} y_{k,l} = y_{j,l}$ (essas equações significam que $y_{j,k}$ são as entradas da matriz de uma projeção ortogonal de uma linha em \mathbb{R}^{n+1}). A pré imagem de um ponto $(y_{j,k}) \in V$ tal que $y_{j,j} \neq 0$ é $(y_{0,j}, y_{1,j}, \dots, y_{n,j})$

3.2 Compactificação de Alexandroff em Conjuntos Algébricos Reais

Proposição 3.2.1 *Seja X um conjunto algébrico real não compacto. Então existe um conjunto algébrico compacto \tilde{X} com um ponto distinguido ∞_X tal que X é birregulamente isomorfo a $\tilde{X} - \{\infty_X\}$.*

Podemos assumir sem perda de generalidade que $X \subsetneq \mathbb{R}^n$ de modo que $0 \notin X$, (caso $X = \mathbb{R}^n$ usaremos a projeção estereográfica). Usaremos a aplicação inversão definida por $i : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ tal que $i(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$, note que i é um isomorfismo birregul, portanto $i(X)$ é um fechado de Zariski de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ e $\tilde{X} = i(X) \cup \{0\} = \overline{i(X)}$, onde $\overline{i(X)}$ denota o fecho de $i(X)$ na topologia usual de \mathbb{R}^n , logo \tilde{X} é compacto. Considere o conjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 1 - y = 0\}$ e $\tilde{X} = i(X) \cup \{0\}$

Figura 13 – Descrição pictográfica.



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.3 Conjuntos algébricos não singulares

Um ponto $x \in X$ é dito não singular se existem polinômios P_1, \dots, P_k e uma vizinhança de Zariski $U \ni x$ tal que $X \cap U = \{y \in U : P_1(y) = \dots = P_k(y) = 0\}$ e os gradientes de P_i são linearmente independentes em x . Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é não singular se todos os seus pontos forem não singulares.

Teorema 3.3.1 (Hironaka) *Seja X um conjunto algébrico real. Então existe um conjunto algébrico não singular \tilde{X} , uma aplicação própria $p : \tilde{X} \rightarrow X$ e um subconjunto algébrico $Y \subset X$, tal que $\dim(Y) < \dim(X)$ e $p|_{\tilde{X}-p^{-1}(Y)}$ é um isomorfismo birregular sobre $X - Y$.*

Para mais informações sobre resolução de singularidades e Teorema de Hironaka ver: THE HIRONAKA THEOREM ON RESOLUTION OF SINGULARITIES (Or: A proof we always wanted to understand). Hauser, Herwing

3.4 Classe Fundamental

Para o lema seguinte iremos nos utilizar do seguintes resultados da Teoria de Resultantes

Teorema 3.4.1 (*Caracterização do Resultante*)

Considere $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tal que \mathbb{K} é um anel comutativo com unidade, onde $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ e $Q(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$ e sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_{n_0} \in \mathbb{K}$ e $\beta_1, \dots, \beta_{m_0} \in \mathbb{K}$ as raízes (contadas de acordo com suas multiplicidades) de P e Q respectivamente, então podemos considerar o resultante de P e Q denotado por $Res(P, Q)$ como:

$$Res(P, Q) = a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^{n_0} \prod_{j=1}^{m_0} (\alpha_i - \beta_j)$$

Para definição formal e mais informações sobre o Teorema ver : Resultant and Discriminant of Polynomials. Janson, Svant

Teorema 3.4.2 *Nas condições do resultado anterior temos que $Res(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P$ e Q possuem um fator comum não constante em $\mathbb{K}[X]$*

Lema 3.4.1 *Sejam $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ um polinômio irreduzível que se anula na origem, e $Q \in \mathbb{R}[X, Y]$ um polinômio qualquer. Suponha que as curvas $P(x, y) = 0$ e $Q(x, y) = 0$ possuam infinitos pontos de interseção em uma vizinhança da origem, então P divide Q . Em particular se Q for irreduzível com P e Q não associados, então em uma vizinhança suficientemente pequena de um ponto dado as duas curvas respectivas só podem se interceptar nesse ponto.*

Se a curva $P(x, y) = 0$ contém infinitos pontos de interseção com o eixo vertical $x = x_0$, o polinômio $P(x, y)$ deve ser divisível por $(x - x_0)$ e como assumimos P irreduzível e se anula na origem, isso implica que P é múltiplo constante de x , tornando o lema óbvio, logo, sem perda de generalidade podemos supor que $P(x, y) = 0$ intercepta cada linha vertical, uma quantidade finita de vezes. Se $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$, os polinômios $P(x_0, y)$ e $Q(x_0, y)$ vistos como elementos de $\mathbb{R}[Y]$, possuem uma raiz comum em y_0 e portanto $Res(P(x_0, y), Q(x_0, y))$ se anula, como elementos de \mathbb{R} . Suponha por absurdo que as curvas $P(x, y) = 0$ e $Q(x, y) = 0$ possuem um número infinito de interseções em uma vizinhança da origem. Olhemos o resultante de $P, Q \in \mathbb{R}[X][Y]$ como um elemento de $\mathbb{R}[X]$. O resultante se anula para uma quantidade infinita de valores para x_0 e portanto é identicamente nulo, portanto P, Q possuem um fator comum não constante em $\mathbb{R}[X][Y] \simeq \mathbb{R}[X, Y]$, como P é irreduzível isso mostra que P divide Q .

Teorema 3.4.3 (Teorema de Sullivan para dimensão 1)

Seja $P(x,y)$ um polinômio real irredutível, considere a curva algébrica $P(x,y) = 0$, o link de $P(x,y) = 0$ em qualquer ponto possui característica de Euler par.

Para tanto basta provar que o link de $P(x,y) = 0$ consiste em um número par de pontos, sem perda de generalidade podemos supor que P se anula na origem e considerar o link de P na origem. Seja

$$P(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij}x^i y^j.$$

Considere n o grau de P (o qual é por definição é o valor máximo de $i + j$ para o qual $a_{ij} \neq 0$), note que como P é irredutível, ele não é divisível por x (note que para $P(x,y) = x$ o lema é obvio) então os coeficientes do tipo $a_{0,j}$ não são 0. Fixe r e tome a seguinte parametrização para o círculo de raio r e centrado na origem (menos o ponto $(0,-r)$): $x = r \frac{2t}{1+t^2}$; $y = r \frac{1-t^2}{1+t^2}$ em seguida substitua em $P(x,y)$ e multiplique o resultado por $(1+t^2)^n$ e obteremos:

$$\phi_{2n,r}(t) = \sum_{i,j} a_{ij}r^{i+j}(2t)^i(1-t^2)^j(1+t^2)^{n-i-j}.$$

esse polinômio em t possui em $(\sum_j (-1)^j a_{0,j}r^j)t^{2n}$ seu monômio de maior grau, que certamente não se anula para $0 \neq r \ll 1$, de modo que $\phi_{2n,r}(t)$ possui grau igual a $2n$. A prova termina se mostrarmos que todas as raízes de $\phi_{2n,r}(t)$ são simples para $r \ll 1$ então haverá um número par de raízes, se por ventura $\phi_{2n,r}(t)$ possuir uma raiz dupla, digamos, em t_0 , então temos que $\phi_{2n,r}(t_0) = \frac{d\phi_{2n,r}}{dt}(t_0) = 0$, dito em outras palavras, as raízes com multiplicidades as quais queremos excluir representam a interseção da curva $P(x,y) = 0$ e a curva $Q(x,y) = y \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) - x \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 0$. Como supomos P irredutível o lema anterior implica que as duas curvas se interceptam em um número finito de pontos, a menos que P divida Q , por razões de grau dos dois polinômios, isso apenas acontece se $Q(x,y) = k \cdot P(x,y)$, onde $k \in \mathbb{R} - \{0\}$. Seja $\phi_r(\theta) = (x_r(\theta), y_r(\theta)) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} P \circ \phi_r(\theta) = f'(\theta)$ onde $(P \circ \phi_r(\theta) = f(\theta))$, note que $\frac{\partial}{\partial \theta} P \circ \phi_r(\theta) = f'(\theta) = \frac{\partial P}{\partial x} r(-\sin \theta) + \frac{\partial P}{\partial y} r \cos \theta = -y_r \frac{\partial P}{\partial x}(x_r, y_r) + x_r \frac{\partial P}{\partial y}(x_r, y_r) = -kP(x_r, y_r) = -kf(\theta) \Rightarrow f' = -kf \Rightarrow f(\theta) = ce^{-k\theta} \therefore P(x_r, y_r) = c(x^2 + y^2 - r^2) \forall r \ll 1$ o que significa que P é múltiplo constante do polinômio em $x_r^2 + y_r^2 - r^2$ e como P se anula na origem, é múltiplo constante de $x^2 + y^2$, absurdo.

Proposição 3.4.4 Sejam X um conjunto algébrico compacto, de dimensão d , e $\phi : K \rightarrow X$ uma triangulação semi-algébrica de X . A soma de todos os simplexes de dimensão d de K é um

ciclo com coeficientes em $\mathbb{Z}/2$, representando os elementos não nulos de $H_d(X, \mathbb{Z}/2)$, este tal elemento que independe da escolha da triangulação, é chamado de classe fundamental de X e denotaremos por $[X]$.

A soma dos d -simplexos de K será um ciclo se, e somente se, cada $(d-1)$ -simplexo σ de K é face de um número par de d -simplexos. Isto pode ser provado tomando um subespaço afim genérico Y , normal a imagem $\phi(\sigma)$. A interseção transversal desse espaço com X é uma curva algébrica real, pois, seja $X \subset \mathbb{R}^m$, onde $m = n + p$, $\text{codim}(X) = p$ e $\text{codim}(Y) = n - 1 \Rightarrow \text{dim}(Y) = (p + 1) \Rightarrow \text{codim}(Y \cap X) = n + p - 1 = m - 1 \Rightarrow \text{dim}(X \cap Y) = 1$. E, isto reduz a provarmos que o link de um ponto na curva algébrica real consiste de um número par de pontos o que foi demonstrado no Teorema de Sullivan para dimensão 1.

De fato a classe fundamental não depende da triangulação, isto se prova notando o fato de que, para todo ponto $x \in X$ não singular em dimensão d , a imagem de $[X]$ em $H_d(X, X - \{x\}, \mathbb{Z}/2) \simeq \mathbb{Z}/2$ é um elemento não nulo.

Se X é um conjunto algébrico não compacto de dimensão d , a classe fundamental $[X]$ pode ser definida na homologia de Borel-Moore como segue: tome uma compactificação algébrica \tilde{X} (identificado como $X \cup \{\infty_X\}$) e $[X]$ é a imagem de $[\tilde{X}] \in H_d(\tilde{X}, \mathbb{Z}/2)$ pela aplicação: $H_d(\tilde{X}, \mathbb{Z}/2) \rightarrow H_d(\tilde{X}, \{\infty_X\}, \mathbb{Z}/2) = H_d^{BM}(X, \mathbb{Z}/2)$.

3.5 Conjuntos de Euler

Seja A um conjunto semi-algébrico localmente compacto, dizemos que A é um conjunto de Euler se a característica de Euler do link x em A é par, para todo $x \in A$. Se A é um conjunto de Euler não compacto, então a compactificação por um ponto \tilde{A} de A é um conjunto de Euler. Todo conjunto de Euler A de dimensão d possui uma classe fundamental $[A] \in H_d(A, \mathbb{Z}/2)$ ($H_d^{BM}(A, \mathbb{Z}/2)$ se A não for compacto). Como para conjuntos algébricos, a classe fundamental pode ser obtida através da soma de todos os simplexos de dimensão d em uma triangulação de A . A condição de Euler implica que todo $(d-1)$ -simplexo é face de um número par de d -simplexos. Em dimensão ≤ 2 , a condição de Euler é suficiente para caracterizar topologicamente os conjuntos algébricos reais via o próximo resultado

Teorema 3.5.1 (Akbulut-King, Benedetti-Dedo)

Seja A um conjunto de Euler de dimensão ≤ 2 . Então A é homeomorfo a um conjunto algébrico real.

4 FUNÇÕES CONSTRUTÍVEIS

4.1 O Anel das funções construtíveis em Conjuntos semi-algébricos

Dado $S \in SA_n$, uma função construtível em S é uma função $\varphi : S \rightarrow \mathbb{Z}$ que toma uma quantidade finita de valores e tal que, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\varphi^{-1}(n)$ é um subconjunto semi-algébrico de S . Em outras palavras, uma função construtível φ é uma função que pode ser escrita como uma soma finita do tipo

$$\varphi = \sum_{i \in I} m_i 1_{X_i}$$

onde, para cada $i \in I$, m_i é um inteiro e 1_{X_i} é a função característica do subconjunto semi-algébrico $X_i \subset S$. Se φ é uma função construtível em S , temos que $\varphi^{-1}(n)$ formam uma partição semi-algébrica de S .

Dado um poliedro K e um homomorfismo semi-algébrico $\theta : U \rightarrow S$ tal que $U = \cup \sigma$ tal que σ é um simplexo aberto de K , de modo que $\varphi \circ \theta$ é constante em cada σ , nesse caso dizemos que θ é uma triangulação de S compatível com φ .

A soma e o produto de funções construtíveis em S , é ainda uma função construtível em S . O conjunto das funções construtíveis em S formam um anel comutativo que denotaremos por $A(S)$. Se $\varphi : S \rightarrow \mathbb{Z}$ é uma função construtível, definimos o suporte de φ como $Supp\varphi = \{x \in S : \varphi(x) \neq 0\}$.

4.2 Integração de funções construtíveis

Nesta seção utilizaremos a característica de Euler χ definida no Capítulo 2, para conjuntos semi-algébricos, recordamos que

1. Para conjuntos semi-algébricos compactos coincide com a característica de Euler usual
2. Satisfaz a propriedade aditiva: $\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B)$ para a união disjunta
3. é invariante por homeomorfismos semi-algébricos

Decorre dessas 3 propriedades que a característica de Euler coincide com a característica de Euler com suporte compacto (a característica de Euler para a homologia de Borel-Moore), mas para conjuntos semi-algébricos localmente compactos, em particular, para conjuntos algébricos, vale $\chi(X \times Y) = \chi(X) \times \chi(Y)$. Seja φ uma função construtível em S . Definiremos a integral de

Euler de φ sobre um subconjunto semi-alg\u00e9brico como $X \subset S$ \u00e9

$$\int_X \varphi d\chi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \chi(\varphi^{-1}(n) \cap X).$$

Utilizando a representa\u00e7\u00e3o de φ , pela aditividade de χ vem

$$\int_S \varphi d\chi = \sum_{i \in I} m_i \chi(X_i).$$

Se φ possui suporte compacto, podemos assumir que X_i \u00e9 compacto para todo $i \in I$, e ent\u00e3o $\chi(X_i)$ \u00e9 a carater\u00edstica de Euler usual. Seja $f : S \rightarrow T$ uma aplica\u00e7\u00e3o cont\u00ednua semi-alg\u00e9brica e φ uma fun\u00e7\u00e3o construt\u00edvel em S . O pushforward $f_*\varphi : T \rightarrow \mathbb{Z}$ de φ sobre f \u00e9 definido como

$$f_*\varphi(y) = \int_{f^{-1}(y)} \varphi d\chi.$$

Proposi\u00e7\u00e3o 4.2.1 *O pushforward de uma fun\u00e7\u00e3o construt\u00edvel \u00e9 uma fun\u00e7\u00e3o construt\u00edvel.*

Seja $\varphi = \sum_{i \in I} m_i \mathbf{1}_{X_i}$. Pelo teorema da trivializa\u00e7\u00e3o de Hardt, existe uma decomposi\u00e7\u00e3o semi-alg\u00e9brica de $T = \cup_{j \in J} Y_j$ tal que, sobre cada Y_j , existe uma trivializa\u00e7\u00e3o de f compat\u00edvel com todos os X_i . Ent\u00e3o $f_*\varphi$ \u00e9 constante em cada Y_j logo:

$$f_*\varphi(y) = \sum_{j \in J} n_j \mathbf{1}_{Y_j}.$$

Uma aplica\u00e7\u00e3o semi-alg\u00e9brica cont\u00ednua $f : S \rightarrow T$ induz um morfismo de grupos aditivos $f_* : A(S) \rightarrow A(T)$ e induz um morfismo de an\u00e9is via pullback $f^* : A(T) \rightarrow A(S)$ onde $f^*\varphi = \varphi \circ f$.

Teorema 4.2.2 *(Teorema de Fubini)*

Seja $f : S \rightarrow T$ uma aplica\u00e7\u00e3o semi-alg\u00e9brica e φ uma fun\u00e7\u00e3o construt\u00edvel em S . Ent\u00e3o, vale

$$\int_T f_*\varphi d\chi = \int_S \varphi d\chi$$

Na mesma notaci\u00e3o da proposi\u00e7\u00e3o anterior. Escolha um $y_j \in Y_j$ para cada $j \in J$. Ent\u00e3o, para cada $i \in I$, $f^{-1}(Y_j) \cap X_i$ \u00e9 semi-alg\u00e9bricamente homeomorfo a $Y_j \times (f^{-1}(y_j) \cap X_i)$ temos:

$$\begin{aligned} \int_T f_*\varphi d\chi &= \sum_{j \in J} (\chi(Y_j) f_*\varphi(y_j)) \\ &= \sum_{j \in J} \left[\chi(Y_j) \sum_{i \in I} (m_i \chi(f^{-1}(y_j) \cap X_i)) \right] \\ &= \sum_{i \in I} \left(m_i \sum_{j \in J} \chi(f^{-1}(Y_j) \cap X_i) \right) \\ &= \sum_{i \in I} m_i \chi(X_i) = \int_S \varphi d\chi \end{aligned}$$

4.3 Operador Link

Seja φ uma função construtível em um semi-algébrico S . Definiremos o operador link de φ como a função $\Lambda\varphi : S \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por

$$\Lambda\varphi(x) = \int_{lk(x,S)} \varphi d\chi.$$

No que segue, vamos assumir que S é localmente compacto, e com fecho em um espaço afim, tal que φ se estende ao fecho, assumindo o valor 0. Seja φ da forma $\sum_{i \in I} m_i \mathbf{1}_{X_i}$, como temos que $X_i \cap lk(x, S) = lk(x, X_i)$ decorre disso que

$$\Lambda\varphi(x) = \int_{lk(x,S)} \varphi d\chi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \chi(\varphi^{-1}(n) \cap lk(x, S)) = \sum_{i \in I} m_i \chi(lk(x, X_i))$$

está bem definido, o link $\Lambda\varphi$ é bem definido.

Proposição 4.3.1 *O operador link de uma função construtível é uma função construtível. O operador link $\varphi \mapsto \Lambda\varphi$ é um homomorfismo do grupo aditivo $A(S)$ nele mesmo.*

Tome $\phi : K \rightarrow S$ uma triangulação de S compatível com φ . Então φ é constante na imagem de cada simplexo aberto, logo $\Lambda\varphi$ é constante na imagem de cada simplexo aberto, como ϕ é um homeomorfismo semi-algébrico, a imagem dos simplexos é semi-algébrica, de sorte que $\Lambda\varphi$ assume uma quantidade finita de valores e dado qualquer $n \in \mathbb{Z}$ temos $(\Lambda\varphi)^{-1}(n)$ é semi-algébrico, logo $\Lambda\varphi$ é construtível. Para a segunda parte, use a aditividade da integral. Note que

$$\Lambda \mathbf{1}_\sigma = (-1)^{d-1} \mathbf{1}_{\bar{\sigma}} + \mathbf{1}_\sigma \text{ e } \Lambda \mathbf{1}_{\bar{\sigma}} = \mathbf{1}_{\bar{\sigma}} + (-1)^{d-1} \mathbf{1}_\sigma,$$

onde σ é um simplexo aberto do poliedro K e $\bar{\sigma}$ é seu fecho. Definiremos agora outro operador $\Omega : A(S) \rightarrow A(S)$ por $\Omega\varphi = 2\varphi - \Lambda\varphi$. Então:

1. $\Omega\Lambda = \Lambda\Omega = 0$;
2. Se o suporte da função construtível φ possui dimensão ao menos d e d é par (respectivamente ímpar), então o suporte de $\Lambda\varphi$ (respectivamente $\Omega\varphi$) possui dimensão ao menos $d - 1$.

Proposição 4.3.2 *O operador link comuta com o pushforward próprio. Se $f : S \rightarrow T$ continua, semi-algébrica e própria, e $\varphi : S \rightarrow \mathbb{Z}$ uma função construtível, então $\Lambda(f_*\varphi) = f_*(\Lambda\varphi)$.*

Dado $y \in T$, então $f^{-1}(y)$ é compacto e o link de $f^{-1}(y)$ em S é bem definido. Afirmamos que $lk(f^{-1}(y), S) = f^{-1}(lk(y, T))$. Com efeito, defina $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}^+$ como

$$\phi(x) = \|f(x) - y\|$$

Note que ϕ é semi-algébrica, por ser a norma de uma função semi-algébrica, própria, por ser a composição de funções próprias e $\phi(x) \geq 0$. De modo que $x \in lk(f^{-1}(y), S) \Leftrightarrow x \in \phi^{-1}(\varepsilon) \cap S \Leftrightarrow \|f(x) - y\| = \varepsilon \Leftrightarrow x \in f^{-1}(lk(y, T))$.

Pelo Teorema de Fubini, temos:

$$\Lambda(f_*\phi)(y) = \int_{lk(f^{-1}(y), S)} \phi d\chi.$$

O resultado segue, do próximo lema fazendo $Y = f^{-1}(y)$.

Lema 4.3.1 *Seja Y um semi-algébrico compacto de S e $\phi : S \rightarrow \mathbb{Z}$ uma função construtível, então*

$$\int_{lk(Y, S)} \phi d\chi = \int_Y \Lambda\phi d\chi.$$

Seja $\phi : K \rightarrow S$ uma triangulação semi-algébrica de S compatível com Y e ϕ . Podemos assumir que $S = \bigcup_{j \in J} \phi(\sigma_j)$, onde σ_j são simplexos abertos de K , $Y = \bigcup_{i \in I} \phi(\bar{\sigma}_i)$ e ϕ é constante na imagem de simplexos abertos, pela aditividade, é suficiente mostrar para $\phi = \mathbf{1}_\sigma$. Por subdivisão de K , nós assumiremos que a interseção $\bar{\sigma} \cap Y$ é uma face fechada $\bar{\tau}$ de $\bar{\sigma}$. Segue que $lk(Y, S) \cap \sigma$ é semi-algebricamente homeomorfo a um aberto $(d-1)$ -célula de σ , se $\sigma \cap Y = \emptyset$ e $\bar{\sigma} \cap Y = \emptyset$ ou ao vazio, caso contrário, teremos :

$$\int_{lk(Y, S)} \mathbf{1}_\sigma d\chi = \chi(lk(Y, S) \cap \sigma) = (-1)^{d-1} \text{ se } \sigma \cap Y = \emptyset \text{ e } \bar{\sigma} \cap Y = \emptyset$$

ou 0 caso contrário daí, decorre disso e da observação anterior que

$$\int_{lk(Y, S)} \mathbf{1}_\sigma d\chi = \int_Y \Lambda \mathbf{1}_\sigma d\chi$$

Corolário 4.3.1 *Seja $\phi : S \rightarrow \mathbb{Z}$ uma função construtível, definida do semi-algébrico compacto S . Então $\int_S \Lambda\phi d\chi = 0$.*

Tome $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0 \forall x \in S$, logo:

$$\begin{aligned} \int_S \Lambda \varphi d\chi &= \int_{f^{-1}(0)} \Lambda \varphi d\chi = f_*(\Lambda \varphi)(0) = \Lambda(f_* \varphi)(0) = \int_{lk(0, \mathbb{R})} f_* \varphi d\chi = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \chi((f_* \varphi)^{-1}(n) \cap lk(0, \mathbb{R})) = \int_S \varphi d\chi \cdot \chi(\{0\} \cap lk(0, \mathbb{R})) = \int_S \varphi d\chi \cdot \chi(\emptyset) = 0 \end{aligned}$$

4.4 Funções Algebricamente construtíveis

Uma função algebricamente construtível \mathcal{F} é uma função definida em conjunto algébrico real V de modo que $\mathcal{F} : V \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $\mathcal{F}(x) = \chi(f^{-1}(x))$ onde $f : W \rightarrow V$ é uma aplicação regular. Seja V um conjunto algébrico real. Uma função algebricamente construtível em V , $\varphi : V \rightarrow \mathbb{Z}$, pode ser representada da forma

$$\varphi = \sum_i^n m_i (f_i)_* (\mathbf{1}_{W_i}),$$

Onde cada $f_i : W_i \rightarrow V$ é uma aplicação regular definida no conjunto algébrico W_i .

O conjunto das funções algebricamente construtíveis em V forma um anel denotado por $A(V)$. Fato, pela própria estrutura das funções regulares. Logo as funções algebricamente construtíveis formam a menor classe de funções construtíveis definidas em conjuntos algébricos a conter a função constante e estável por pushforward de funções regulares.

Lema 4.4.1 *Dada $\varphi \in A(V)$ então existe uma representação $\varphi = \sum_{i \in I} m_i (f_i)_* (\mathbf{1}_{W_i})$ onde:*

1. *Todos f_i são aplicações próprias;*
2. *Todos W_i são não singulares.*

1. Seja $f : W \rightarrow V$ regular. Substituindo W por $\tilde{W} = graf(f)$, já que são homeomorfos, podemos assumir que \tilde{W} é um subconjunto algébrico real de $\mathbb{R}^n \times V$ e f é a projeção de \tilde{W} em V . Agora, mergulhe $\mathbb{R}^n \times V$ em $S^n \times V$ via inversa da projeção estereográfica, isto nos concede um isomorfismo birregular entre \mathbb{R}^n e $S^n - \{P\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, onde $P = (0, 0, 0, \dots, 1)$ é o chamado polo norte. Considere o conjunto $W' = \tilde{W} \cup (\{P\} \times V)$ de modo que a projeção $p : W' \rightarrow V$ é própria. De fato, p é própria pois dada sequência $x_n \in W'$ sabemos que $x_n = (s_n, v_n)$ onde $s_n \in S^n$ e $v_n \in V$, $\lim p(x_n) = a \Rightarrow \lim v_n = a$ de sorte que como s_n é limitada e v_n converge x_n admite subsequência convergente e $f_*(\mathbf{1}_W) = p_*(\mathbf{1}_{W'}) - \mathbf{1}_V$. De fato; $p_*(\mathbf{1}_{W'}) = \int_{p^{-1}(y)} \mathbf{1}_{W'} d\chi = \chi(W' \cap p^{-1}(y)) = \chi([\tilde{W} \cup \{P\} \times V] \cap p^{-1}(y)) =$

$$\chi\left([\tilde{W} \cap p^{-1}(y)] \cup [\{P\} \times V \cap p^{-1}(y)]\right) = \chi(\tilde{W} \cap p^{-1}(y)) + \chi((P, y)) = \chi(W \cap f^{-1}(y)) + \mathbf{1}_V = \int_{f^{-1}(y)} \mathbf{1}_W d\chi + \mathbf{1}_V = f_*(\mathbf{1}_W) + \mathbf{1}_V.$$

2. Começaremos com uma representação $\varphi = \sum_{i \in I} m_i(f_i)_*(\mathbf{1}_{W_i})$ onde todas as f_i são próprias (podemos toma-las próprias pelo resultado anterior) e seja $d = \max \dim(W_i)_{i \in I}$, onde cada W_i é singular. Tome uma resolução de singularidades (Teorema de Hironaka) $\pi_i: \tilde{W}_i \rightarrow W_i$. Então em cada W_i existem subconjuntos Z_i de tal sorte que π_i é um isomorfismo birregular de $\tilde{W}_i - \pi_i^{-1}(Z_i)$ para $W_i - Z_i$, e tanto Z_i quanto $\pi_i(Z_i)$ possuem dimensão menor do que d e temos:

$$(f)_*(\mathbf{1}_{W_i}) = (f_i \circ \pi_i)_*(\mathbf{1}_{\tilde{W}_i}) - (f_i \circ \pi_i)_*(\mathbf{1}_{\pi_i^{-1}(Z_i)}) + (f_i)_*(\mathbf{1}_{Z_i})$$

Com efeito :

$$\begin{aligned} (f)_*(\mathbf{1}_{W_i}) &= \chi(f_i^{-1}(y)) = \chi((f_i^{-1}(y)) \cap [W_i - Z_i]) \cup (f_i^{-1}(y)) \cap Z_i) \\ &= \chi(\pi_i^{-1}((f_i^{-1}(y)) \cap [W_i - Z_i])) + \chi(f_i^{-1}(y) \cap Z_i) \\ &= \chi((\pi_i^{-1}(f_i^{-1}(y)) \cap W_i) - \pi_i^{-1}(f_i^{-1}(y)) \cap Z_i) + \chi(f_i^{-1}(y) \cap Z_i) \\ &= \chi((\pi_i^{-1}(f_i^{-1}(y)) \cap W_i)) - \chi(\pi_i^{-1}(f_i^{-1}(y)) \cap Z_i) + \chi(f_i^{-1}(y) \cap Z_i) \\ &= \chi((\pi_i^{-1}(f_i^{-1}(y)) \cap \tilde{W}_i) - \chi(\pi_i^{-1}(f_i^{-1}(y)) \cap \pi_i^{-1}(Z_i)) + \chi(f_i^{-1}(y) \cap Z_i)) \\ &= (f \circ \pi_i)_*(\mathbf{1}_{\tilde{W}_i}) - (f_i \circ \pi_i)_*(\mathbf{1}_{\pi_i^{-1}(Z_i)}) + (f_i)_*(\mathbf{1}_{Z_i}) \end{aligned}$$

e assim diminuimos a dimensão máxima dos conjuntos algébricos singulares que apareciam na representação de φ por indução até que os conjuntos Z_i possuam dimensão 0. Note que $(f_i \circ \pi_i)$ é própria por ser composta de aplicações próprias.

Agora iremos investigar a relação entre funções algebricamente constituíveis e o operador de link, que é em particular interessante para investigar propriedades topológicas locais dos conjuntos algébricos

Teorema 4.4.1 *Seja $\varphi \in A(V)$. Então $\Lambda\varphi$ assume apenas valores pares, e $\frac{1}{2}\Lambda\varphi$ é novamente algebricamente construtível.*

Pelo lema anterior podemos assumir que $\varphi = \sum_{i \in I} m_i(f_i)_*(\mathbf{1}_{W_i})$ onde cada f_i é própria e cada W_i é não singular de dimensão d_i . Como o operador de link comuta com o pushforward próprio, temos: que

$$\Lambda\varphi = \Lambda\left(\sum_{i \in I} m_i(f_i)_*(\mathbf{1}_{W_i})\right) = \sum_{i \in I} m_i(f_i)_*(\Lambda\mathbf{1}_{W_i})$$

Agora, note que como cada W_i é não-singular de dimensão d_i então $\Lambda \mathbf{1}_{W_i} = \begin{cases} 2 & \text{se } d_i \text{ for impar} \\ 0 & \text{se } d_i \text{ for par} \end{cases}$.

De modo geral $\frac{1}{2} \Lambda \varphi = \begin{cases} \sum_{i \in J} m_i (f_i)_* (\mathbf{1}_{W_i}) & \text{onde } J = \{i \in I : d_i = \dim(W_i) \text{ é impar}\} \\ 0 & \text{se } d_i \text{ for par} \end{cases}$

Onde $d_i = \dim(W_i)$. Observe que dado $S \in \mathbf{SA}_n$, S é um conjunto de Euler $\Leftrightarrow \Lambda \mathbf{1}_S$ é par. Note que fazendo $\varphi = \mathbf{1}_V$ com V conjunto algébrico o Teorema anterior implica o Teorema de Sullivan.

Teorema 4.4.2 (Sullivan)

Seja X um conjunto algébrico real. Para todo $x \in X$ a característica de Euler do do link $\chi(\text{lk}(x, X))$ é par.

REFERÊNCIAS

ASH, Robert B. **Basic abstract algebra**: for graduate students and advanced undergraduates. 1. ed. Illinois: Dover Publications, 2006. 407 p.

BENEDETTI, Riccardo; RISLER, Jean-Jacques. **Real algebraic and semi-algebraic sets**. 1. ed. Paris: Hermann, Editeurs des sciences et des arts, 1990. 340 p. ISBN 2705661441.

COSTE, Michel. **An introduction to semialgebraic geometry**. Rennes: [s.n], 2002. Disponível em: <https://perso.univ-rennes1.fr/michel.coste/polyens/SAG.pdf>. Acesso em: 3 abr. 2020.

COSTE, Michel. **Real Algebraic Sets**. Rennes: [s.n], 2005. Disponível em: <https://perso.univ-rennes1.fr/michel.coste/polyens/RASroot.pdf>. Acesso em: 3 abr. 2020.

FULTON, Willian. **Algebraic Curves**: An Introduction to Algebraic Geometry. 3. ed. Reading MA: Addison Wesley Publ. Co., 2008. 121 p.

GHYS, Étienne. A singular mathematical promenade. **arXiv.org**, [Ithaca, N. Y.], 2016. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1612.06373>. Acesso em: 3 abr. 2020.

HATCHER, Allen. **Algebraic Topology**. 1. ed. [S.l.]: Cambridge: U. Press, 2002. 551 p.

HAUSER, Herwig. The hironaka theorem on resolution of singularities: or: a proof we always wanted to understand. **Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society**, [s.n], v. 40, n. 3, p. 323–403, 6 maio 2003..

JANSON, Svante. **Resultants and Discriminants of Polynomials**. Uppsala: Note N5, 2007. Disponível em: <http://www2.math.uu.se/svante/papers/sjN5.pdf>. Acesso em: 3 abr. 2020.

LIMA, Elon Lages. **Homologia básica**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. 191 p. ISBN 978-85-244-0286-9.

MCCRORY, Clint; PARUNSKI, Adam. Algebraically constructible functions: real algebra and topology.. **Panoramas Synthèses** **23**, [s.n], 9 fev. 2002. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/math/0202086.pdf>. Acesso em: 3 abr. 2020.

RUIZ, Jesús M. Semialgebraic and semianalytic sets. **De la géométrie algébrique réelle (Paris, 1990)**, 59–70, Cahiers Sémin. Hist. Math. Sér. 2, 1, Univ. Paris VI, Paris, 1991.