



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA (CT)
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ESTRUTURAL E CONSTRUÇÃO CIVIL
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

JONATAS MEDEIROS DE FREITAS CACAU MARTINS

**OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS COM GRADUAÇÃO FUNCIONAL UTILIZANDO
ALGORITMOS HEURÍSTICOS E MODELOS SUBSTITUTOS**

FORTALEZA

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M343o Martins, Jonatas Medeiros de Freitas Cacau.
Otimização de estruturas com gradação funcional utilizando algoritmos heurísticos e modelos substitutos /
Jonatas Medeiros de Freitas Cacau Martins. – 2021.
79 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia,
Curso de Engenharia Civil, Fortaleza, 2021.
Orientação: Prof. Dr. Evandro Parente Júnior.

1. Otimização Estrutural. 2. Materiais com Gradação Funcional. 3. Algoritmos Heurísticos. 4. Modelos
Substitutos. 5. Otimização Sequencial Aproximada. I. Título.

CDD 620

JONATAS MEDEIROS DE FREITAS CACAU MARTINS

OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS COM GRADAÇÃO FUNCIONAL UTILIZANDO
ALGORITMOS HEURÍSTICOS E MODELOS SUBSTITUTOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Civil do Centro de Tecnologia (CT) da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel em Engenharia Civil.

Aprovada em: 09 de abril de 2021

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Evandro Parente Júnior (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Antônio Macário Cartaxo de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

M.Sc. Elias Saraiva Barroso
Universidade Federal do Ceará (UFC)

À minha família, por todo o incentivo, carinho e amor.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, a Deus.

À minha mãe, Francisca das Chagas, e ao meu pai, Carlos Alberto, pelo apoio, amor e carinho em todos esses anos. Obrigado por tanto.

À toda minha família, pelo apoio, incentivo e amor. Em especial, às minhas irmãs, Jennifer e Maria Izabel, por todo o incentivo, amor e companheirismo. Eu amo vocês.

À minha namorada, Lívia Maria, pelo amor, compreensão, carinho e por acreditar em mim mesmo quando eu não acredito. Não tenho palavras para descrever o quão importante você é. Obrigado por tudo.

Aos meus amigos que tive a sorte e o prazer de conhecer ao longo da graduação, em especial a todos da Kombi, Leticia, Igor, Luciana, Victor, Ivan e Lívia. Poder compartilhar a vida com vocês foi e continua sendo uma enorme alegria para mim, obrigado por tornar essa jornada mais leve e alegre.

À família que a vida me deu, Siqueira, Melo, Samuel, Pedro Davi e Rafel, vocês fazem parte disso. Obrigado pela amizade durante todos esses anos.

Ao meu orientador, Evandro Parente, por ser exemplo de profissionalismo, dedicação e atenção. Obrigado pela excelente orientação e por compartilhar tanto conhecimento. O senhor é uma grande inspiração.

Aos colegas de pesquisa que tive a honra de aprender e conviver. Em especial, agradeço ao Leonardo Ribeiro, pela atenção e por ser sempre tão solícitos e pacientes. Obrigado por contribuir tanto com este trabalho.

Ao professor Antônio Macário e ao doutorando Elias Barroso por aceitarem fazer parte da banca e pelas contribuições ao trabalho.

À UFC, CNPQ, DEECC e ao LMCV, pelo apoio financeiro e incentivo à pesquisa.

RESUMO

O projeto de estruturas de material com gradação funcional vem recebendo bastante atenção da comunidade acadêmica, uma vez que elas apresentam excelente desempenho nas mais diversas aplicações, somado à facilidade de controle que o projetista tem na gradação suave e contínua desse material. Visando potencializar o seu desempenho em relação a determinada característica de interesse, diversas técnicas de otimização vêm sendo utilizadas. Os algoritmos heurísticos se destacam nessa aplicação, em especial a Otimização por Nuvem de Partículas (*Particle Swarm Optimization*) (PSO). Apesar de em muitas aplicações a Evolução Diferencial (*Differential Evolution*) (DE) superar o PSO em termos de precisão e eficiência, eles ainda não foram comparados no caso de estruturas com gradação funcional. Outro tópico importante nesses algoritmos é o tratamento das restrições de projeto que pode ser realizada a partir diferentes metodologias que serão estudadas no presente trabalho. Entretanto, o elevado custo computacional das análises estruturais pode se apresentar como uma limitação para essa estratégia de otimização, uma vez que os algoritmos heurísticos realizam um grande número de avaliações do modelo de análise. Nesse contexto, os modelos substitutos serão utilizados como uma alternativa para ajudar a reduzir o custo computacional e permitir a otimização de estruturas complexas. Neste trabalho, o modelo substituto que será estudado são as Funções de Base Radial (*Radial Basis Functions*) (RBF). Um aspecto de extrema importância na construção desses modelos é a quantidade de pontos que será adotada no Projeto de Experimentos, sendo esse um dos parâmetros de estudo desse trabalho. Os modelos substitutos serão incorporados a uma metodologia de otimização conhecida como Otimização Sequencial Aproximada (*Sequential Approximate Optimization*) (SAO), onde a superfície de resposta aproximada é continuamente atualizada e melhorada pela inserção de novos pontos. Os novos pontos serão escolhidos de forma a maximizar a melhoria esperada. Para isso serão utilizadas e avaliadas a PSO e a DE. Uma comparação entre as diferentes metodologias será realizada em termos de precisão, eficiência e robustez. Os resultados obtidos foram excelentes, a eficiência da Otimização Sequencial Aproximada foi verificada através de exemplos numéricos, sendo encontrados diferenças muito pequenas em comparação com a otimização convencional a um custo computacional muito menor. A DE também apresentou resultados excelentes e uma eficiência maior que a PSO.

Palavras-chave: Otimização Estrutural. Materiais com Gradação Funcional. Algoritmos Heurísticos. Modelos Substitutos. Otimização Sequencial Aproximada.

ABSTRACT

The design of material structures with functional gradation has received a lot of attention from the academic community, since they present excellent performance in the most diverse applications, added to the ease of control that the designer has in the smooth and continuous gradation of this material. In order to enhance its performance in relation to a particular characteristic of interest, several optimization techniques have been used. The heuristic algorithms stand out in this application, especially the PSO. Although in many applications DE outperforms PSO in terms of precision and efficiency, they have not yet been compared in the case of structures with functional gradation. Another important topic in these algorithms is the treatment of design restrictions that can be carried out from different methodologies that will be studied in the present work. However, the high computational cost of structural analysis can present itself as a limitation for this optimization strategy, since heuristic algorithms perform a large number of evaluations of the analysis model. In this context, the surrogate models will be used as an alternative to help reduce the computational cost and allow the optimization of complex structures. In this work, the surrogate model that will be studied is the RBF. An extremely important aspect in the construction of these models is the number of points that will be adopted in the Experiments Project, which is one of the study parameters of this work. The surrogate models will be incorporated into an optimization methodology known as SAO, where the approximate response surface is continually updated and improved by the insertion of new points. The new points will be chosen in order to maximize the expected improvement. For this, PSO and DE will be used and evaluated. A comparison between the different methodologies will be carried out in terms of precision, efficiency and robustness. The results obtained were excellent, the efficiency of the Approximate Sequential Optimization was verified through numerical examples, being found very small differences in comparison with the conventional optimization at a much lower computational cost. The DE also showed excellent results and greater efficiency than PSO.

Keywords: Structural Optimization. Functional Gradation Materials. Heuristic Algorithms. Surrogate Models. Sequential Approximate Optimizations.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Gradação de volume contínua e discreta	16
Figura 2 – Gradação de volume dada pela Equação (2.1)	17
Figura 3 – Gradação de volume dada por B-spline	18
Figura 4 – Topologias de enxame.	24
Figura 5 – Tratamento das restrições laterais.	30
Figura 6 – Comportamento da função Gaussiana para diferentes larguras.	38
Figura 7 – Estimativas do modelo substituto com diferentes valores de σ	38
Figura 8 – Inserção do melhor indivíduo considerando uma exploração local	42
Figura 9 – Superfície da Função Peaks	48
Figura 10 – Vaso de Pressão Cilíndrico	51
Figura 11 – Superfície de resposta do problema proposto por Correia <i>et al.</i> (2018).	58
Figura 12 – Superfícies de respostas para algumas estratégias	59

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros adotados na Otimização por Nuvem de Partículas.	46
Tabela 2 – Parâmetros adotados na Evolução Diferencial.	47
Tabela 3 – Resultados do ponto ótimo na Função Peaks.	49
Tabela 4 – Resultados da otimização por modelos substitutos para a Função Peaks. . .	50
Tabela 5 – Resultado das diferentes estratégias para o problema.	52
Tabela 6 – Resultado das diferentes estratégias para o problema.	54
Tabela 7 – Dados do ponto ótimo no problema do Vaso de Pressão.	55
Tabela 8 – Propriedades dos materiais.	56
Tabela 9 – Resultados da validação do processo de análise para a Flambagem.	56
Tabela 10 – Resultados da validação do processo de análise para a Vibração.	57
Tabela 11 – Materiais utilizados e suas respectivas propriedades.	57
Tabela 12 – Resultados das diferentes estratégias de penalidade na otimização convencional. 59	
Tabela 13 – Resultados das diferentes estratégias de penalidade na otimização convencional. 61	
Tabela 14 – Resultados dos valores ótimos de Correia et al. (2018).	62
Tabela 15 – Materiais utilizados e suas respectivas propriedades.	62
Tabela 16 – Resultados das diferentes estratégias de penalidade na otimização convencional. 63	
Tabela 17 – Resultados dos valores na otimização aproximada.	65
Tabela 18 – Resultados dos valores ótimos para Do <i>et al.</i> (2019) e Ribeiro <i>et al.</i> (2020a). 66	
Tabela 19 – Materiais utilizados e suas respectivas propriedades.	67
Tabela 20 – Resultados das diferentes estratégias de penalidade na otimização convencional. 67	
Tabela 21 – Resultados das diferentes estratégias de otimização da Melhoria Esperada na otimização aproximada.	69
Tabela 22 – Resultados dos valores ótimos para Do <i>et al.</i> (2019) e Ribeiro <i>et al.</i> (2020a). 70	

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BIOS	Sistema de Otimização Inspirado na Natureza (<i>Biologically Inspired Optimization System</i>)
DE	Evolução Diferencial (<i>Differential Evolution</i>)
DMS	<i>Direct MultiSearch</i>
DoE	Projeto de Experimentos (<i>Design of Experiments</i>)
FAST	<i>Finite Analysis Tool</i>
FGM	Materiais com Gradação Funcional (<i>Functionally Graded Materials</i>)
GA	Algoritmos Genéticos (<i>Genetic Algorithms</i>)
IGA	Análise Isogeométrica (<i>Isogeometric Analysis</i>)
LMCV	Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização
PSO	Otimização por Nuvem de Partículas (<i>Particle Swarm Optimization</i>)
RBF	Funções de Base Radial (<i>Radial Basis Functions</i>)
SAO	Otimização Sequencial Aproximada (<i>Sequential Approximate Optimization</i>)
SVR	Regressão de Vetor Suporte (<i>Support Vector Regression</i>)

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Objetivos gerais e específicos	14
1.2	Organização do texto	14
2	MATERIAIS COM GRADAÇÃO FUNCIONAL	16
3	OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS COM GRADAÇÃO FUNCIONAL	20
3.1	Otimização por Nuvem de Partículas	22
3.2	Evolução Diferencial	25
3.3	Tratamento de Restrições	28
3.3.1	<i>Penalidade Estática</i>	28
3.3.2	<i>Penalidade Adaptativa</i>	29
3.3.3	<i>Restrições Laterais</i>	30
4	MODELOS SUBSTITUTOS	31
4.1	Definição da Amostra Inicial	33
4.1.1	<i>Plano de Amostragem</i>	34
4.1.1.1	<i>Simple Amostragem Aleatória</i>	34
4.1.1.2	<i>Hipercubo Latino</i>	35
4.2	Funções de Base Radial	36
4.2.1	<i>Determinação dos Pesos</i>	37
4.2.2	<i>Determinação do vetor de larguras</i>	37
5	OTIMIZAÇÃO SEQUENCIAL APROXIMADA	41
5.1	Melhoria Esperada	43
5.2	Tratamento de Restrições	44
6	EXEMPLOS	46
6.1	Funções Matemáticas	48
6.1.1	<i>Função Peaks</i>	48
6.1.2	<i>Vaso de Pressão</i>	50
6.2	Estruturas com Gradação Funcional	55
6.2.1	<i>Maximização da frequência fundamental de uma placa quadrada com duas variáveis</i>	57

6.2.2	<i>Maximização da carga de flambagem de uma placa quadrada com cinco variáveis</i>	62
6.2.3	<i>Maximização da frequência fundamental de uma placa quadrada com sete variáveis</i>	66
7	CONCLUSÃO	72
	REFERÊNCIAS	75

1 INTRODUÇÃO

Os materiais compósitos são aqueles formados pela combinação de dois ou mais materiais com o objetivo de formar um material que apresente propriedades melhores que as dos seus constituintes (JONES, 1998). Esses materiais são cada vez mais importantes no que diz respeito ao desempenho que eles podem proporcionar, uma vez que podem possibilitar estruturas mais leves, mais resistentes à fadiga e à corrosão, dentre outras propriedades.

Uma classe recente de compósitos são os Materiais com Gradação Funcional (*Functionally Graded Materials*) (FGM) que apresentam a fração de volume dos constituintes variando suavemente ao longo de uma direção do elemento estrutural. A típica aplicação de um material de gradação funcional é na combinação cerâmica-metal, em que a cerâmica é responsável por proporcionar a resistência térmica e o metal é responsável pelo desempenho mecânico.

Inicialmente, esses materiais foram desenvolvidos para serem usados como barreiras térmicas em aplicações aeroespaciais e em reatores, sendo posteriormente aplicados em componentes estruturais para ambientes com altas temperaturas (SHEN, 2009). Atualmente estes materiais são utilizados em aplicações em diferentes áreas, como implantes ortopédicos e dentários, equipamentos esportivos, estruturas compostas por materiais piezoelétricos, tubos trocadores de calor, dentre outros (JHA *et al.*, 2013; NIKBAKHT *et al.*, 2019).

Os estudos das estruturas de FGM vem se intensificando devido ao controle que se possui das propriedades do material, pelos avanços nos processos de fabricação e no processo de análise de estruturas de FGM, como no emprego do Método dos Elementos Finitos (MEF) e da Análise Isogeométrica (*Isogeometric Analysis*) (IGA). Nesse contexto, visando alcançar a máxima eficiência das estruturas com gradação funcional, o projetista pode realizar um procedimento de otimização. A otimização de um projeto consiste em encontrar um desempenho ótimo, seja ele relacionado à minimização ou maximização de uma função objetivo, que respeite as restrições do projeto (ARORA, 2017). Assim, a fração de volume de cada componente, bem como parâmetros como a espessura da estrutura, podem ser definidos para minimizar uma determinada função objetivo, enquanto ainda respeita algumas restrições de desempenho estrutural e de aspectos de fabricação, por exemplo. Portanto, o presente trabalho focará na otimização de elementos estruturais com gradação funcional.

Os projetos de otimização estrutural podem apresentar vários mínimos locais e por isso muitos pesquisadores preferem utilizar algoritmos heurísticos em detrimento dos algoritmos de programação matemática. Outra característica vantajosa dos algoritmos heurísticos é o fato

de não necessitarem do cálculo de gradientes. Dentre os diversos algoritmos existentes, dois que se destacam na otimização de variáveis contínuas são a Otimização por Nuvem de Partículas (*Particle Swarm Optimization*) (PSO) (KENNEDY; EBERHART, 1995) e a Evolução Diferencial (*Differential Evolution*) (DE) (PRICE *et al.*, 2005).

Esses algoritmos se baseiam na geração de um conjunto de soluções candidatas que são melhoradas a cada iteração por meio de regras inspiradas no comportamento de sistemas naturais. Assim, outra vantagem desses métodos é a facilidade de entendimento devido a essas analogias com a natureza, que acaba facilitando a sua implementação. Entretanto, para realizar esse tipo de otimização é necessário que se calcule diversas vezes o valor exato para os diversos indivíduos testados, que no caso de estruturas de FGM apresenta um alto custo computacional envolvido na análise de alta fidelidade através de métodos numéricos, o que dificulta a utilização dessa solução.

Como alternativa para viabilizar o processo de otimização, o presente trabalho propõe a utilização de modelos substitutos. Esses modelos têm como base estimar as respostas do modelo original com alto custo computacional através de um modelo aproximado com baixo custo computacional. Isso é feito com a construção dos modelos aproximados com base em algumas observações de resposta exata, chamados de pontos amostrais e definidos através do Projeto de Experimentos (*Design of Experiments*) (DoE). Assim, através do treinamento do modelo os parâmetros necessários são determinados de forma a aproximar as respostas exatas nos pontos de amostragem. O modelo substituto construído pode então ser usado para prever os valores de pontos do espaço de projeto que ainda não foram avaliados a um custo computacional mais baixo e com relativa confiabilidade.

Portanto, fica evidente que uma das etapas principais na construção desses modelos é a amostragem inicial, uma vez que ela estará relacionada com o desempenho do mesmo. Para ter uma boa aproximação da função de interesse, o projetista tende a selecionar um grande número de pontos iniciais de amostragem para produzir aproximações razoáveis, o que contraria a idéia de reduzir o custo computacional.

Visando favorecer a aplicação dos modelos substitutos, o presente trabalho propõe a utilização da Otimização Sequencial Aproximada (*Sequential Approximate Optimization*) (SAO). Essa técnica tem como base a atualização do plano de amostragem com novos pontos no espaço de projeto, fazendo com que a superfície de resposta seja aprimorada em regiões de interesse a cada geração do algoritmo e ajudando a chegar no projeto ótimo.

Dentre os diversos tipos de modelo substituto já utilizados, podemos destacar o Kriging (SUN *et al.*, 2013), a Regressão de Vetor Suporte (*Support Vector Regression*) (SVR) (YAN *et al.*, 2019) e as Funções de Base Radial (*Radial Basis Functionss*) - (RBF) (KITAYAMA; YAMAZAKI, 2011). Quando comparado com os outros modelos, o RBF se destaca por ter uma simplicidade e facilidade de implementação (WANG; SHAN, 2007; FORRESTER *et al.*, 2008). Além disso, a sua capacidade de promover boas estimativas é relatada principalmente em problemas de maior ordem e não lineares (SIMPSON *et al.*, 2002; DIAZ-MANRIQUEZ *et al.*, 2011; GAN; GU, 2018). Já o Kriging, se destaca por trabalhar melhor com funções de menor ordem, também obtendo excelentes resultados (KIM *et al.*, 2009; DIAZ-MANRIQUEZ *et al.*, 2011; GAN; GU, 2018).

1.1 Objetivos gerais e específicos

O presente trabalho tem como objetivo estudar o uso de diferentes estratégias para otimização de estruturas de materiais com gradação funcional. Nesse contexto, comparam-se dois tipos de algoritmos heurísticos e um tipo de modelo substituto, variando as metodologias de consideração de alguns parâmetros presentes na literatura, de forma a avaliar o desempenho em termos de eficiência e precisão. Para isso, serão perseguidos os seguintes objetivos específicos:

- (a) Desenvolver modelos de otimização de estruturas com gradação funcional utilizando modelos de alta fidelidade e modelos substitutos;
- (b) Comparar o desempenho dos algoritmos heurísticos PSO e DE na otimização de estruturas com gradação funcional;
- (c) Avaliar o uso de diferentes topologias e estratégias de diferenciação;
- (d) Apresentar e avaliar o uso de diferentes metodologias para o tratamento de restrições em modelos de alta fidelidade;
- (e) Comparar diferentes abordagens empregadas na determinação do tamanho da amostra inicial utilizada na construção do modelo substituto;
- (f) Comparar as diversas estratégias apresentadas considerando eficiência, robustez e precisão.

1.2 Organização do texto

O restante do texto está organizado da seguinte forma:

No Capítulo 2, abordam-se os FGM, apresentando e discutindo sua metodologia de

criação, suas aplicações e suas características principais.

No Capítulo 3, será realizada uma rápida contextualização ao processo de otimização aplicada aos materiais com gradação funcional. Uma discussão do uso de algoritmos heurísticos e do tratamento das restrições também será realizada nessa seção.

No Capítulo 4, será discutido o uso de modelos substitutos com maior detalhe, em especial as Funções de Base Radial.

No Capítulo 5, será realizada uma discussão acerca da melhoria proporcionada pela utilização da abordagem SAO, explanando algumas estratégias e discutindo as vantagens da sua aplicação junto aos substitutos.

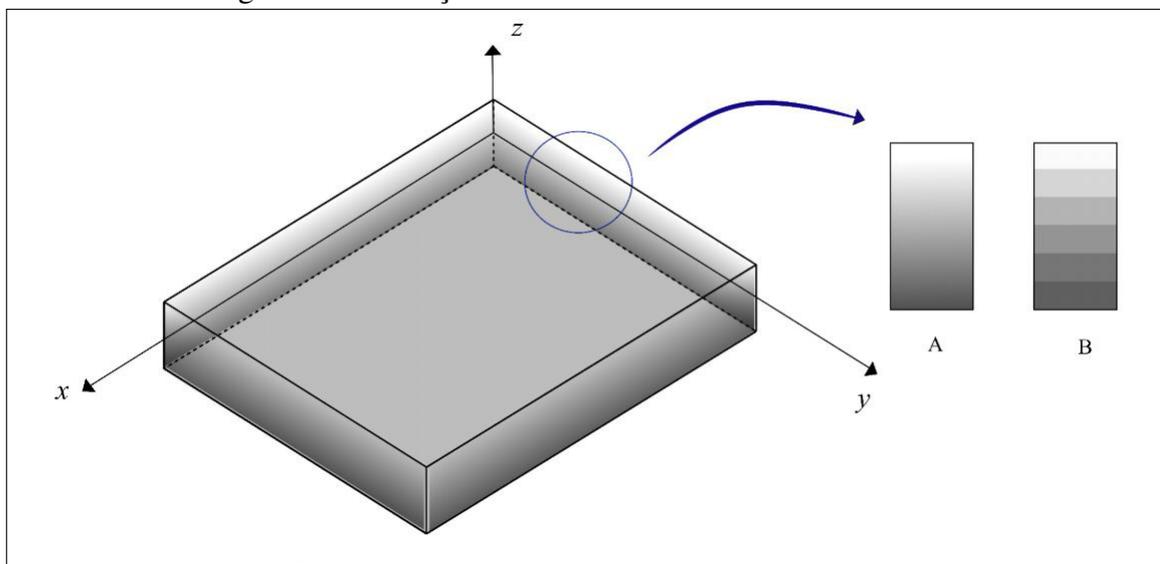
No Capítulos 6, serão apresentados os exemplos selecionados e os resultados obtidos a partir das metodologias discutidas.

Por fim, no Capítulo 7, serão apresentadas as principais conclusões deste trabalho e algumas sugestões para trabalhos futuros.

2 MATERIAIS COM GRADAÇÃO FUNCIONAL

Os materiais com gradação funcional são compósitos formados pela combinação de dois ou mais materiais que tem suas frações de volume variando de forma contínua e suave na direção de interesse. Existem duas abordagens principais para se modelar as estruturas de FGM. A primeira considera a distribuição da fração de volume como camadas de mesma fração, como é representado no item A da Figura 1. A segunda considera a distribuição de forma contínua em uma ou mais direções, como é representado no item B Figura 1. Apesar de diversas considerações serem feitas na literatura, a consideração da gradação unidirecional através da espessura de interesse é um dos tópicos mais abordados.

Figura 1 – Gradação de volume contínua e discreta



Fonte: Marina, 2020

Por se destacar principalmente na aplicação em estruturas submetidas a carregamentos termomecânicos, esses materiais são comumente formados pela combinação de cerâmica e metal Nikbakht *et al.* (2019). Na literatura podem ser encontradas outras combinações como cerâmica-cerâmica e cerâmica-plástico.

Moleiro *et al.* (2020) abordam a otimização multiobjetivo de placas de FGM combinando cerâmica e metal, podendo até ser formado por apenas um deles, sob cargas termomecânicas utilizando o método livre de derivadas *Direct MultiSeach* (DMS). Os objetivos são minimizar a massa da placa, maximizar o deslocamento transversal e o critério de falha de Tsai-Hill. As variáveis consideradas são a espessura da camada de FGM, o índice de distribuição da *power law* das frações de volume e, se incluída, a espessura da face superior de cerâmica

superior.

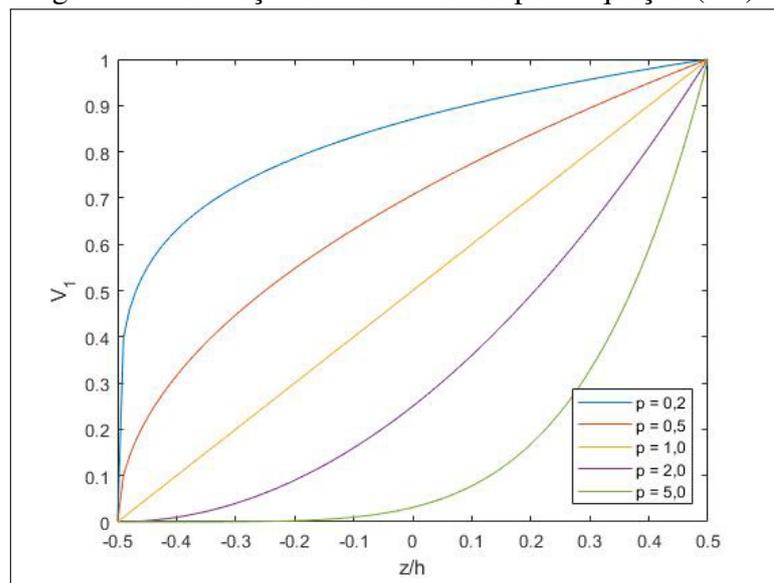
A otimização de estruturas com gradação funcional consiste principalmente na definição da proporção ótima que cada material terá para que se obtenha o melhor desempenho estrutural. Assim, a escolha da formulação que define como a fração de volume do material vai variar é uma fase de suma importância. Diversas propostas são apresentadas na literatura. Shen (2009) comenta que a gradação da fração de volume pode ser definida por uma função de potência dado por:

$$V_1 = \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^N \quad (2.1)$$

$$V_2 = 1 - V_1 \quad (2.2)$$

em que V_1 é a fração de volume do Material 1 na coordenada z (na direção da espessura), variando na espessura h da placa e N é um expoente controlado pelo usuário relativo à variação de volume. A fração do Material 2 pode ser então facilmente obtida pela Equação (2.2). Diversos trabalhos na comunidade acadêmica usam essa alternativa conhecida como *Power law function* (MOITA *et al.*, 2018; CORREIA *et al.*, 2018; CORREIA *et al.*, 2019). A Figura 2 representa a distribuição da fração de volume do Material 01 usando a lei de potência para diferentes expoentes.

Figura 2 – Gradação de volume dada pela Equação (2.1)

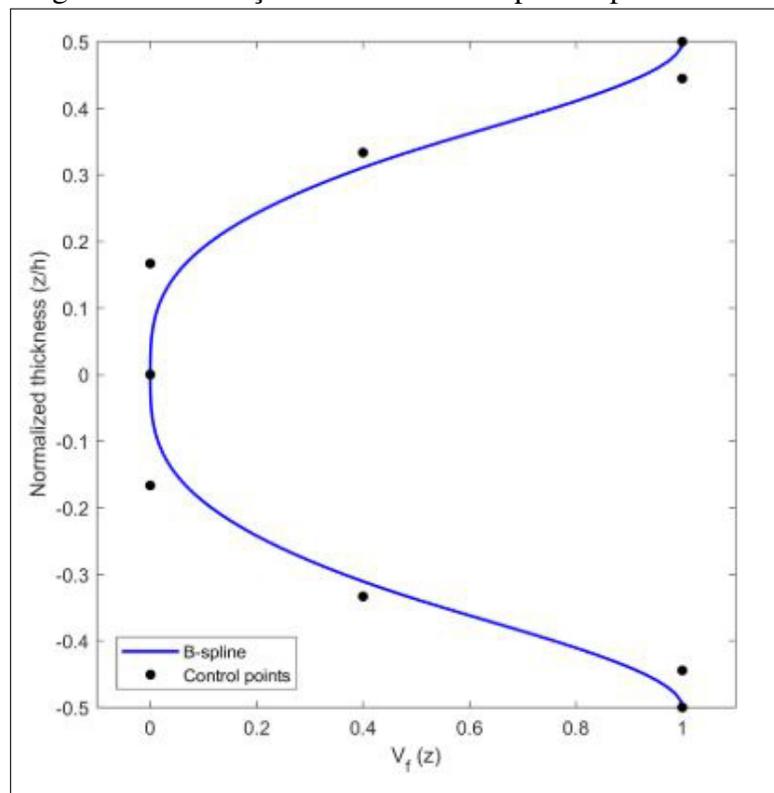


Fonte: elaborado pelo autor

Outra formulação amplamente utilizada para essa variação é realizada por meio de pontos de controle, definidos previamente, fazendo uso de B-Splines que ajustam a fração

de volume através do posicionamento desses pontos ao longo da espessura da placa com a características de gerar curvas mais suaves. Essa estratégia foi adotada em diversos trabalhos na literatura (LIEU *et al.*, 2018; DO *et al.*, 2019; WANG *et al.*, 2019). Wang *et al.* (2019) comentam que o uso de B-Splines pode favorecer projetos totalmente diferentes daqueles limitados por certas funções matemáticas. Além disso, as funções de base das B-splines são sempre positivas e, portanto, as restrições de limite físico nas frações de volume interpoladas sempre ficam na faixa [0,1]. A Figura 3 representa a distribuição quando se usa a curva B-spline. Essa curva ilustra como a curva formada por essa estratégia pode criar uma distribuição tipo sanduíche se pontos de controle simétricos forem impostos.

Figura 3 – Gradação de volume dada por B-spline



Fonte: Marina, 2020

A definição das propriedades efetivas do material é outro aspecto de extrema importância para a análise e o design de estruturas com classificação funcional, e depende das propriedades dos constituintes e da proporção de cada material em cada ponto. A avaliação das propriedades efetivas do material requer o uso de um esquema de homogeneização apropriado (SHEN, 2009).

A abordagem mais simples e mais usada é o modelo Voigt, também conhecido como Regra das Misturas (RoM) (CORREIA *et al.*, 2018; CORREIA *et al.*, 2019), em que a proprie-

dade efetiva do material (P) é dada pela média ponderada das propriedades dos constituintes. A propriedade elástica do material e um determinado ponto é definido por:

$$P_f = \sum_{j=1}^{N_c} P_j V_j \quad (2.3)$$

onde P_f são as propriedades efetivas do material e P_j e V_j são as propriedades e a fração de volume do j -ésimo constituinte e N_c é o número de constituintes.

Outra abordagem bastante utilizada é o modelo de Mori-Tanaka (DO *et al.*, 2019; NIKBAKHT *et al.*, 2019), em que se considera o Módulo Volumétrico (K) e o Módulo de Cisalhamento (G) na determinação das propriedades efetivas, definidos por:

$$K = K_m + \frac{V_c}{\frac{1}{K_c - K_m} + \frac{4G_m}{3}} \quad (2.4)$$

$$G = G_m + \frac{V_c}{\frac{1}{G_c - G_m} + \frac{V_m}{G_m + f_m}} \quad (2.5)$$

onde o parametro f_m é dado por:

$$f_m = \frac{G_m(9K_m + 8G_m)}{6(K_m + 2G_m)} \quad (2.6)$$

A partir desses valores, o Módulo de Young (E) e o Coeficiente de Poisson (ν) podem ser calculados como:

$$E = \frac{9KG}{3k + 6} \quad (2.7)$$

$$\nu = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)} \quad (2.8)$$

Shen e Wang (2012) compararam esses dois modelos para a análise de vibração das placas FG e sugeriram que a diferença entre eles na estimativa da resposta global é desprezível, e recomendaram o uso da Regra da Mistura sobre o modelo de Mori-Tanaka devido à sua simplicidade. Por outro lado, em um estudo sobre cilindros pressurizados de materiais com gradação funcional considerando diferentes esquemas de homogeneização e modelos de distribuição de volume, Medeiros Jr. *et al.* (2019) mostram que, apesar de sua grande popularidade, o modelo Voigt apresenta grandes discrepâncias com modelos mais sofisticados e precisos. Dentre os esquemas de homogeneização considerados, os autores concluem que o Mori-Tanaka e o *Generalized Self-Consistent* produziram os melhores resultados.

3 OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS COM GRADAÇÃO FUNCIONAL

Na engenharia estrutural, o processo de otimização consiste na determinação das variáveis de projeto que extremizam a função objetivo respeitando todas as restrições. Nikbakht *et al.* (2019) realizaram uma revisão sobre a otimização de estruturas de materiais com gradação funcional e concluíram que a distribuição de tensão, a carga crítica de flambagem, a frequência fundamental e o peso da estrutura foram os principais objetivos de interesse dos pesquisadores. Matematicamente, a otimização de um problema com restrições de desigualdade pode ser descrita por encontrar \mathbf{x} que:

$$\begin{cases} \text{minimize} & f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a} & g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad i = 1, \dots, n_C \\ \text{com} & \mathbf{x}_L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_U \end{cases} \quad (3.1)$$

onde n_c é o número de restrições e \mathbf{x}_L e \mathbf{x}_U são os vetores que contêm os limites inferior e superior de cada variável de projeto. Os problemas de maximização podem ser considerados minimizando $-f(\mathbf{x})$.

As variáveis de projeto podem ser discretas, inteiras ou contínuas. Nikbakht *et al.* (2019) também comentam que a variável de projeto mais comum para os FGM é o padrão de distribuição do material. A utilização da função de potência tem como principal variável o índice N que normalmente é considerado contínuo. Quando se utiliza B-splines para controlar distribuição, a fração de volume do material no ponto de controle é uma variável contínuo, podendo assumir qualquer valor real dentro do intervalo definido pelo projetista. Outras variáveis consideradas nas estruturas de FGM, normalmente, são a espessura dos elementos estruturais ou das faixas de materiais, que também são comumente consideradas contínuas.

Ademais, os processos de otimização de compósitos devem respeitar algumas restrições, como por exemplo aspectos de desempenho mecânico como a frequência natural ou a flambagem máxima admitida, e também aspectos de fabricação, como intervalo de espessura ou fração de volume máxima na espessura do elemento. Apesar de violar alguma restrição, alguns desses indivíduos podem possuir informações importantes para a otimização e não devem ser apenas descartados. Diante disso, essas restrições foram implementadas no algoritmo com métodos de penalidade (LEMONGE; BARBOSA, 2003), de forma que com a penalização, a função aptidão do indivíduo é majorada (em problemas de minimização), mas o indivíduo per-

manece com as mesmas variáveis de projeto. Portanto, o que acontece é que, com a penalização, a probabilidade do indivíduo continuar no processo é reduzida, sem descartá-lo de fato.

Correia *et al.* (2018) utilizaram o expoente da lei de potência e a espessura como variáveis na otimização multiobjetiva de placas de FGM. As restrições consideradas foram a frequência natural fundamental e da carga de flambagem. Os objetivos são combinações da maximização da primeira frequência natural e da carga de flambagem, considerando também a minimização da massa e do custo. O Método dos Elementos Finitos (MEF) foi usado para a análise estrutural e uma técnica que mescla dois algoritmos livres de derivada e de pesquisa direta foi empregada na otimização. Os resultados mostraram que é possível obter uma economia considerável na massa e no custo das chapas, melhorando o comportamento estrutural. Uma metodologia semelhante foi apresentada por Correia *et al.* (2019) com a consideração de cargas termomecânicas.

Dentro das diversas metodologias adotadas no procedimento de otimização, existem dois grandes grupos: métodos determinísticos, também conhecidos como programação matemática, e métodos inspirados na natureza, também conhecidos como algoritmos heurísticos. Os métodos determinísticos se baseiam na utilização de gradientes da função objetivo, exigindo que esta função seja contínua e diferenciável (ARORA, 2017). Portanto, apesar de promover uma rápida convergência, acabam tendo uma aplicação mais restrita.

A metodologia inspirada na natureza se baseia na aplicação de operadores inspirados em mecanismos evolutivos encontrados na natureza que são aplicados na busca de novos pontos no espaço de projeto, partindo de uma população inicial que é gerada aleatoriamente para conhecer esse espaço, até que critérios de parada sejam alcançados. Esses mecanismos tendem a fazer com que essa busca vá convergindo para a localização do projeto ótimo. Algumas das principais vantagens deste sobre os métodos determinísticos é a maior exploração do espaço de projeto, o que ajuda a não se prender em ótimos locais, sua facilidade de uso e implementação.

Os algoritmos heurísticos, em sua maioria, são métodos estocásticos, uma vez que possuem aleatoriedade na sua aplicação. Portanto, para promover maior confiança dos resultados encontrados, é recomendável que se realize mais de uma otimização. Como a otimização estrutural normalmente está atrelada a um processo de análise estática, de vibração ou de estabilidade (CORREIA *et al.*, 2019), o número elevado de avaliações devido às diversas otimizações acabam gerando um alto custo computacional, o que acaba sendo uma desvantagem para esses algoritmos.

Dentro dos algoritmos heurísticos existem dois tipos principais que são os de base evolutiva, baseados na Teoria Evolucionista de Darwin e que possuem operações de recombinação, mutação e seleção, e os baseados na inteligência de enxame, que tentam retratar padrões da natureza, como o comportamento coletivo de animais quando se movimentam. Exemplos de algoritmos dos tipos discutidos são a Evolução Diferencial (DE), de base evolutiva, e a Otimização por Nuvem de Partículas (PSO), de inteligência de enxame.

O presente trabalho utilizará algoritmos heurísticos com a finalidade de otimizar estruturas de FGM e outros parâmetros importantes na estratégia SAO discutidos no capítulo 5. As próximas subseções irão discutir e apresentar os algoritmos heurísticos mais promissores dentro das características do material discutido.

3.1 Otimização por Nuvem de Partículas

A Otimização por Nuvem de Partícula (PSO) é uma metodologia heurística que se baseia na chamada *swarm intelligence*, ou inteligência de enxame, foi inicialmente proposto por Kennedy e Eberhart (1995) que se inspiraram na modelagem matemática do comportamento apresentado por enxames de animais. Por se tratar de uma abordagem que só contém operadores matemáticos primitivos, ela se traduz como uma alternativa poderosa tanto em termos de memória computacional quanto de velocidade.

Assim, ao longo dos anos, a PSO vem sendo aplicada a uma variedade de problemas nas áreas de otimização estrutural e mecânica (ARORA,2017). Diante das mais diversas possibilidades de aplicação desse algoritmo, diversos trabalhos foram publicados com alterações em relação a proposta inicial de Kennedy e Eberhart (1995), visando obter melhorias no algoritmo (BRATTON; KENNEDY, 2007; ASHJARI; KHOSHRAVAN, 2014; BARROSO *et al.*, 2016).

Kou *et al.* (2012) propuseram um modelo de representação da variação de material chamado de *Heterogeneous Feature Tree* (HFT), em que as propriedades podem mudar em todos os eixos de referência. Utilizaram a gradação como variável de projeto e aplicaram a Otimização Por Nuvem de Partículas para minimizar as tensões térmicas de diferentes estruturas. Os resultados mostraram que a abordagem heurística superou os métodos e programação matemáticos para esses problemas devido a sua capacidade de pesquisa global.

Ashjari e Khoshnavan (2014) avaliaram a minimização da massa de placas classificadas funcionalmente unidirecionais sujeitas a restrições de deflexão e tensão. A interpolação cúbica dos pontos de controle igualmente espaçados foi utilizada para modelar a variação da

fração de volume ao longo da espessura da placa. As propriedades efetivas do material são obtidas pela aplicação de uma regra linear de misturas. Obtiveram como resultado que o PSO supera o Algoritmos Genéticos (*Genetic Algorithms*) (GA) nos problemas apresentados, tanto em termos de velocidade como de precisão de convergência.

No projeto de estruturas sanduíche, Loja (2014) utilizou o PSO para maximizar a rigidez à flexão de vigas de FGM unidirecionais, considerando uma restrição de massa. Esta função objetivo foi escolhida para reduzir o custo computacional, evitando a necessidade de realizar análises de elementos finitos. Foram obtidos excelentes resultados e foi observada a importância da reinicialização no processo do método.

Wang *et al.* (2019) utilizam um PSO modificado para realizar a otimização multiobjetivo de placas com gradação funcional. A massa e a primeira frequência natural foram tomadas como funções objetivas e uma restrição de volume foi considerada. A Análise Isogeométrica (AIG) foi usada para avaliar o comportamento estrutural e B-Splines foram usadas para definir a gradação do material sobre a espessura da placa, sendo as variáveis de projeto a fração de volume de cerâmica nos pontos de controle. O uso de B-Spline aumenta a flexibilidade do projeto em relação ao uso de uma lei de potência.

Ribeiro *et al.* (2020a) utilizam o PSO na otimização de problemas de estruturas com gradação funcional visando maximizar a carga de flambagem e a frequência natural. A Análise Isogeométrica é usada para avaliar as respostas estruturais, a gradação do material é descrita usando B-Splines e as variáveis principais são a fração de volume em cada ponto de controle, também sendo usada a espessura da placa em um dos projetos. Uma restrição é usada para garantir a gradação suave do material e os resultados ressaltam a importância dessa restrição quando o número de pontos de controle aumenta.

A versão dos algoritmos utilizada nesse trabalho deriva da versão utilizada por Barroso *et al.* (2016), sendo aplicada em diversos trabalhos que tratam essa temática (BARROSO, 2015; RIBEIRO *et al.*, 2020a). A versão utilizada no presente trabalho é apresentada a seguir.

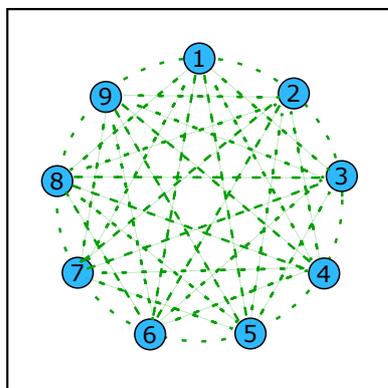
Inicialmente, o algoritmo gera Np partículas de forma aleatória dentro do espaço de projeto definido, de forma que essas partículas são caracterizadas por sua posição e velocidade. A cada interação, a partícula se move com base na sua velocidade $v_j^{(i+1)}$ como é apresentada a seguir:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_j^{(i+1)} &= \mathbf{x}_j^{(i)} + \mathbf{v}_j^{(i+1)} \\ \mathbf{v}_j^{(i+1)} &= w \mathbf{v}_j^{(i)} + c_1 r_1 \left(\mathbf{x}_{p,j}^{(i)} - \mathbf{x}_j^{(i)} \right) + c_2 r_2 \left(\mathbf{x}_{g,j}^{(i)} - \mathbf{x}_j^{(i)} \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

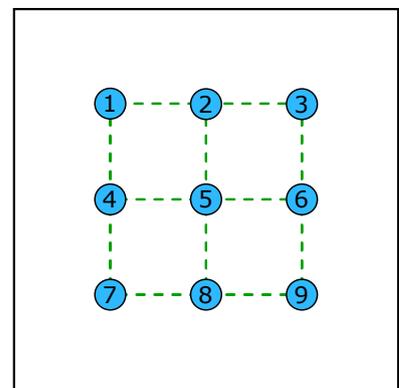
onde w representa a inércia da partícula, c_1 e c_2 são os fatores cognitivos e sociais, r_1 e r_2 são números aleatórios entre 0 e 1, $\mathbf{x}_{p,j}^{(i)}$ é a melhor posição obtida pela partícula j durante a otimização, $\mathbf{x}_{g,j}^{(i)}$ é a melhor posição obtida por uma partícula na vizinhança de j e $\mathbf{v}_j^{(i)}$ é a velocidade atual da partícula. Assim, a nova posição da partícula $\mathbf{x}_j^{(i+1)}$ é definida de forma que as partículas se movimentem e se aproximem dos melhores projetos em cada geração, levando em consideração o movimento atual, a confiança que a partícula possui dentro da experiência nessa geração e em relação a sua vizinhança.

A vizinhança de uma partícula pode ser definida por diversas topologias, como é ilustrado na Figura 4. Kennedy e Eberhart (1995) inicialmente propôs o uso de uma topologia Global, em que todas as partículas são consideradas na vizinhança. Porém, percebeu-se que esta escolha pode sofrer convergência prematura (BRATTON; KENNEDY, 2007). Assim, o uso da topologia *Square* ou *Ring* pode oferecer uma melhor precisão, embora com perda de eficiência devido a uma velocidade de convergência mais lenta (BRATTON; KENNEDY, 2007; BARROSO *et al.*, 2016; RIBEIRO *et al.*, 2020a).

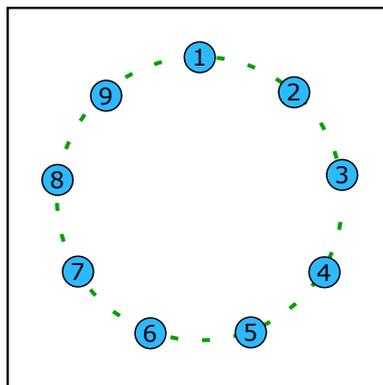
Figura 4 – Topologias de enxame.



(a) *Global*.



(b) *Square*.



(c) *Ring*.

Fonte: Adaptada de Ribeiro *et al.* (2020a).

Ademais, para melhorar ainda mais as capacidades de exploração do PSO, Barroso *et al.* (2016) propôs o uso de um operador de mutação (p_{mut}). O processo de otimização apresentado continua até que um critério de parada seja atendido. Neste trabalho, dois critérios de parada serão usados: o número máximo de iterações (IT_{mx}) e o número máximo de iterações sem melhoria ($IT_{StallGen}$). Logo, quando pelo menos um deles é satisfeito, o algoritmo é encerrado.

3.2 Evolução Diferencial

Desenvolvido por Price *et al.* (2005), a evolução diferencial (DE) é conhecida como um dos algoritmos de eficiência e robustez na busca de uma solução ótima global em um domínio contínuo (IWAN *et al.*, 2012; TRUONG *et al.*, 2019). Outra característica importante é a simplicidade de manuseio do algoritmo, uma vez que possui apenas três parâmetros de controle, que são o tamanho da população (NP), o fator de forma (F) e taxa de cruzamento (Cr). A DE pode ser descrito pelas etapas de inicialização, mutação, cruzamento e seleção, sendo cada uma delas apresentadas e discutidas a seguir.

Inicialmente, o DE gera aleatoriamente uma população inicial de NP membros dentro de um domínio de pesquisa, sendo cada uma dessas soluções candidata um vetor de ND variáveis. Esses vetores, também conhecidos como indivíduos, evoluirão com a progressão do procedimento de otimização, simulando uma população em evolução.

A etapa seguinte, após a avaliação de cada indivíduo, é conhecida como mutação e é controlada pelo o fator de forma. Esse parâmetro é responsável por controlar o quão radical a evolução diferencial altera as soluções candidatas de uma interação para a próxima (UKHOV, 2016). O valor do parâmetro é definido pelo projetista, sendo um valor positivo e que raramente é maior que 1. Price *et al.* (2005) indica o valor 0.80 e Ukhov (2016) indica o valor 0.90 como valor padrão para as primeiras tentativas. A proposta inicial de Price *et al.* (2005) para a mutação é dado por:

$$\mathbf{u}_{j,i} = \mathbf{x}_{j,r0} + F(\mathbf{x}_{j,r1} - \mathbf{x}_{j,r2}) \quad (3.3)$$

onde $\mathbf{x}_{(j,r1)}$ e $\mathbf{x}_{(j,r2)}$ são soluções candidatas, $r1$ e $r2$ são números inteiros escolhidos aleatoriamente no intervalo $[1, NP]$ e $\mathbf{u}_{j,i}$ é o vetor de mutação. Essa formulação é conhecida como *Rand/1*, uma vez que o vetor base $\mathbf{x}_{j,r0}$ é escolhido aleatoriamente e apenas um vetor de diferenças é considerado. Desde seu desenvolvimento inicial, muitas melhorias foram propostas por diferentes pesquisadores. Muitos operadores diferentes para realizar a mutação diferencial

podem ser listados, mas dois dos mais adotados são o *Best/1* e o *Current-to-best/1* que são apresentados, respectivamente, a seguir:

$$\mathbf{u}_{j,i} = \mathbf{x}_{j,best} + F(\mathbf{x}_{j,ri} - \mathbf{x}_{j,r2}) \quad (3.4)$$

$$\mathbf{u}_{j,i} = \mathbf{x}_{j,best} + F(\mathbf{x}_{j,best} - \mathbf{x}_{j,i}) + F(\mathbf{x}_{j,r1} - \mathbf{x}_{j,r2}) \quad (3.5)$$

onde $\mathbf{x}_{j,best}$ é o melhor projeto encontrado durante o processo de otimização. Embora a abordagem *Best/1* seja capaz de fornecer bons resultados, é um problema comum apresentar uma pesquisa muito localizada. A abordagem de *jitter* apresentada em Price *et al.* (2005), onde F representa uma pequena variação aleatória cada vez que uma variável sofre mutação. Essa abordagem é conhecida como *Best/1-with-jitter*.

Em seguida, o crossover é então realizado com a finalidade de aumentar a diversidade da população. Para isso, o projetista define a taxa de cruzamento Cr que será responsável por controlar a probabilidade de troca de variáveis entre o vetor base e o seu vetor mutante, como é apresentado a seguir:

$$\mathbf{u}_{j,i} = \begin{cases} \mathbf{u}_{j,i} & \text{se } (r_{cj} \leq Cr) \\ \mathbf{x}_{j,i} & \text{outro caso} \end{cases} \quad (3.6)$$

onde r_{cj} é um número aleatório distribuído uniforme entre 0 e 1. Por fim, a seleção é empregada para que os melhores indivíduos permaneçam no processo de otimização. Sendo assim, a população antiga, \mathbf{u}_i sem o crossover, é comparada com a população atual \mathbf{v}_i por meio das funções de condicionamento físico como é apresentado a seguir.

$$\mathbf{x}_i^{new} = \begin{cases} \mathbf{u}_i, & \text{se } f(\mathbf{u}_i) \leq f(\mathbf{x}_i) \\ \mathbf{x}_i & \text{outro caso} \end{cases} \quad (3.7)$$

onde $f(\mathbf{u}_i)$ e $f(\mathbf{x}_i)$ são os valores objetivos da função. Vale destacar que para a presença de restrições essas são avaliadas nesse momento, permanecendo o menor indivíduo viável. Para cada população ou iteração, a função objetivo é avaliada NP vezes, tanto quanto o número de membros por indivíduo, tentando encontrar o melhor membro da população até que um critério de parada seja alcançado, que são os mesmos adotados no PSO.

Silva e Loja (2012) otimizaram painéis sanduíches constituídos de núcleo de alumínio e duas camadas externas funcionalmente graduadas visando minimizar a distribuição de tensões

residuais térmicas. As variáveis de projeto foram definidas como as espessuras do núcleo e das camadas externas, o padrão de variação da fração de volume do FGM foi calculado por uma função power-law, restrito de 0 a 10. Foi observado que quanto maior era esse parâmetro, menores eram as tensões residuais térmicas. Logo, o expoente ideal foi calculado como o valor do limite superior do índice N .

Roque e Martins (2015) realizam a otimização de vigas com gradação funcional por meio da evolução diferencial para encontrar a fração de volume que maximiza a primeira frequência natural, escolhendo a fração de volume de um dos constituintes do material como restrição de projeto. Três parâmetros são usados para descrever a fração de volume dos materiais, estratégia conhecida como formulação Viola-Tornabene. O método analítico e método numérico sem malha foram usados para calcular as frequências naturais. Os resultados mostram que a evolução diferencial é capaz de encontrar distribuições para fração de volume que aumentam a frequência natural da estrutura avaliada. Em outro trabalho, Roque *et al.* (2016) aplicam uma metodologia semelhante junto com uma teoria modificada de tensão de casal para minimizar a frequência de vibração livre das nano vigas Timoshenko com gradação funcional.

Nesse mesmo contexto, Lieu *et al.* (2018) aplicam a evolução diferencial para otimizar a frequência natural de vigas bidirecionais com gradação funcional. A gradação do material é representada por funções básicas bidimensionais *Non-Uniform Rational B-Spline* (NURBS). Os valores da fração de volume nos pontos de controle definidos por uma abordagem de análise isogeométrica.

Truong *et al.* (2019) também aplicam o DE na otimização dessas estruturas bidirecionais com gradação funcional sob carga estática obtendo excelentes resultados. A distribuição das propriedades do elemento estrutural é descrita por pontos de controle B-Spline e é usado um método de análise isogeométrica. As variáveis de projeto são os valores da fração de volume de cerâmica nos pontos de controle nas direções dos eixos x e z . As restrições impostas são a fração de volume de cerâmica, condições de contorno e a relação comprimento-espessura.

Na literatura, diversos trabalhos comparam o DE e o PSO na otimização de problemas nos matemáticos e os resultados mostram que o DE supera em termos de precisão e em velocidade de convergência (IWAN *et al.*, 2012; KITAYAMA; YAMAZAKI, 2011). Com relação as estruturas de FGM, essa comparação entre os dois algoritmos não ocorre com frequência. Ribeiro *et al.* (2020b) realizaram um estudo comparando os dois algoritmos variando a topologia no PSO e o operadores utilizado na mutação diferencial do DE. Em relação a otimização convencional,

o DE foi o mais preciso, sendo capaz de atingir consistentemente os menores erros. A maior eficiência geral foi encontrada na abordagem *Best/1/witch-jitter*, que teve a melhor eficiência. Já em relação a sua utilização na abordagem SAO, a diferença entre os algoritmos heurísticos não foi tão aparente, sendo o DE levemente superior ao PSO em termos de eficiência. O presente trabalho se propõe a realizar uma extensão da comparação entre esses algoritmos em relação a outros parâmetros.

3.3 Tratamento de Restrições

Como comentado anteriormente, os projetos de otimização de estruturas geralmente apresentam restrições diversas e por querer que elas sejam respeitadas muitas vezes os projetistas acabam apenas excluindo o ponto inviável, procedimento conhecido como pena de morte. Entretanto, alguns desses projetos inadequados podem possuir variáveis importantes para o restante do processo de otimização e não seria interessante que estas fossem simplesmente descartadas.

Nesse contexto, os métodos de penalidade são aplicados de forma que os indivíduos inviáveis são penalizados e se afastam do valor ótimo, mas não são totalmente descartados. A grande problemática desses métodos é a calibração do fator de penalidade, uma vez que se esse fator for muito alto o valor inviável passa a não contribuir com o processo de otimização e esse sendo muito baixo pode fazer com que os próximos pontos sejam todos inviáveis.

A seguir são apresentadas duas abordagens de penalidade amplamente adotadas em processos de otimização convencional, como o PSO e o DE, em que a primeira se caracteriza por adotar um parâmetro estático de penalidade calibrado pelo projetista e a segundo um tipo de consideração que esse parâmetro é definido de forma a se adaptar ao problema considerado. No caso específico da abordagem com modelos substitutos aliada a otimização sequencial aproximada, outra abordagem para as restrições pode ser considerada e será melhor discutida no Capítulo 5.

3.3.1 Penalidade Estática

A penalidade estática é definida pela seguinte equação:

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + k \sum_{i=1}^{nc} \max(g_i(\mathbf{x}), 0) \quad (3.8)$$

onde n_c é o número de restrições, $g_i(\mathbf{x})$ é o valor de cada restrição, k é o fator estático, $f(\mathbf{x})$ é o valor da função objetivo e $F(\mathbf{x})$ é a função objetivo penalizada. Assim, a penalidade é aplicada quando algum ponto não respeita alguma das restrições com base em um fator que controla quanto o ponto vai impactar no processo de otimização. Normalmente, para calibrar o seu valor, a função objetivo deve ser testada com antecedência ou defini um valor a partir de informações de projetos com características semelhantes.

3.3.2 Penalidade Adaptativa

Na penalidade adaptativa o parâmetro de penalidade não precisa ser definido pelo usuário, sendo determinado iterativamente pelo próprio processo de otimização. Esse esquema adaptativo se baseia em informações da população, como a média da função objetivo e o nível de violação de cada restrição durante o processo (LEMONGE; BARBOSA, 2003).

A formulação que aplica essa metodologia é descrita a seguir:

$$F(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \text{ for } \text{vível} \\ \bar{f}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{nc} k_i v_i(\mathbf{x}) & \text{caso } \text{contrrio} \end{cases} \quad (3.9)$$

onde nc é o número de restrições, $v_i(\mathbf{x})$ é o valor de cada restrição violada e que $\bar{f}(\mathbf{x})$ é definido por:

$$\bar{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{se } f(\mathbf{x}) > \langle f(\mathbf{x}) \rangle \\ \langle f(\mathbf{x}) \rangle & \text{caso } \text{contrrio} \end{cases} \quad (3.10)$$

onde $\langle f(\mathbf{x}) \rangle$ é a média dos valores da função objetivo na população atual. Já o parâmetro de penalidade é definido pela equação a seguir.

$$k_i = |\langle f(\mathbf{x}) \rangle| \frac{\langle v_i(\mathbf{x}) \rangle}{\sum_{i=1}^{nc} [\langle v_i(\mathbf{x}) \rangle]^2} \quad (3.11)$$

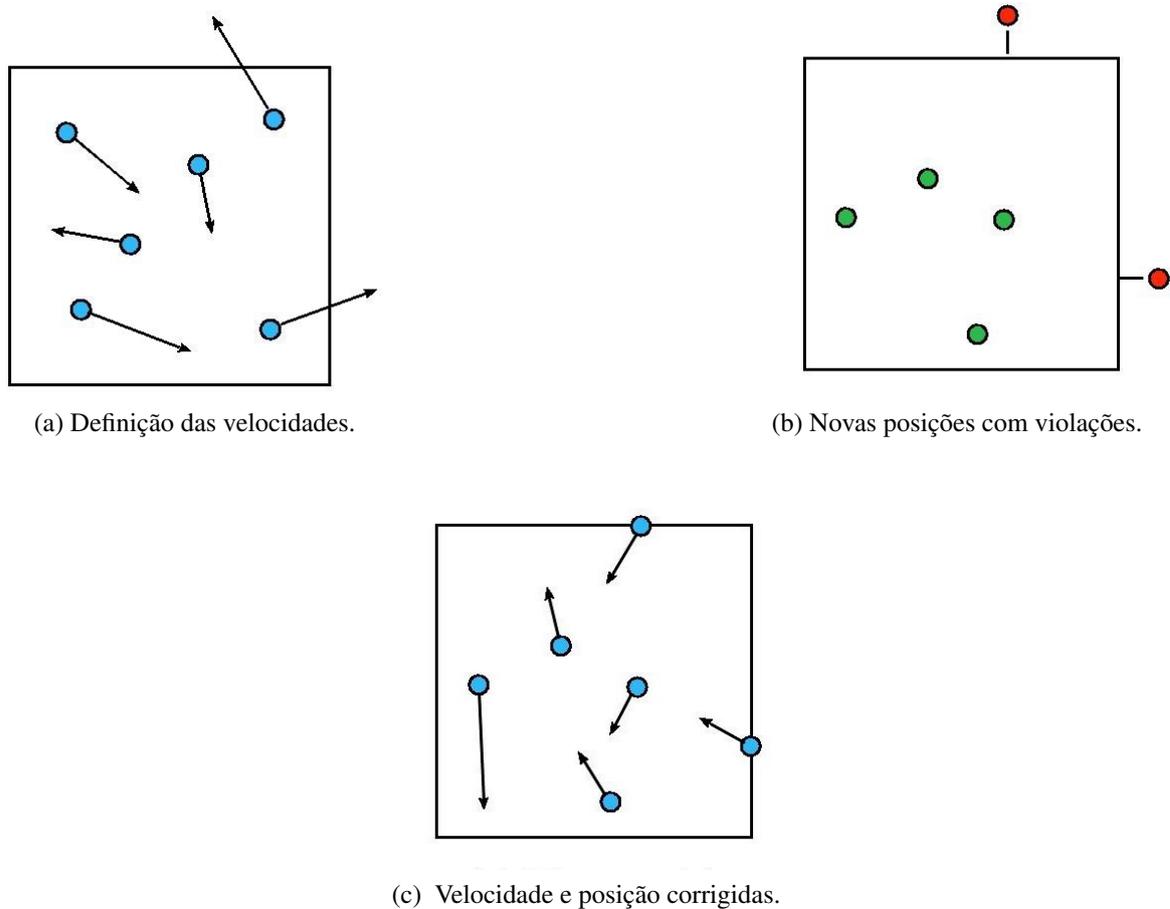
onde $\langle v_i(\mathbf{x}) \rangle$ é a média do valor da violação da i -ésima restrição sobre a população atual. Essa metodologia se baseia na ideia de que os valores dos coeficientes de penalidade sejam distribuídos de maneira que as restrições mais difíceis de serem satisfeitas tenham um coeficiente de penalidade relativamente mais alto.

Lemonge e Barbosa (2003) aplica essa estratégia combinado com a evolução diferencial em problemas matemáticos e estruturais, obtendo excelentes resultados. Vargas *et al.* (2016) e Vargas *et al.* (2018) também aplicam essa estratégia em problemas de otimização estrutural multiobjetivo e obtém bons resultados.

3.3.3 Restrições Laterais

Como já apresentado na Eq. (3.1), os vetores \mathbf{x}_L e \mathbf{x}_U contêm os limites inferior e superior de cada variável. Por se tratar de um processo estocástico, em muitas situações as partículas selecionadas podem estar fora do espaço de projeto, o que resulta na inserção de indivíduos inviáveis no processo de otimização. Ou seja, mesmo com a definição das restrições laterais, algum artifício precisa ser usado para delimitar os indivíduos dentro do domínio de interesse. Barroso *et al.* (2016), Ribeiro *et al.* (2020a) adotam um procedimento simples em que quando uma partícula deixa o espaço de projeto, a variável que violou os limites assume o próprio valor limite e sua velocidade se reduz pela metade na direção oposta. Esse procedimento garante que as restrições laterais sejam sempre satisfeitas. A Figura 5 ilustra o procedimento que será adotado neste trabalho para o tratamento das restrições laterais.

Figura 5 – Tratamento das restrições laterais.



Fonte: Adaptada de Ribeiro *et al.* (2020a).

4 MODELOS SUBSTITUTOS

Os modelos substitutos são uma alternativa ao uso exaustivo de modelos de alta fidelidade baseados na AIG ou no MEF que provocariam um grande dispêndio de tempo, o que pode inviabilizar a utilização de técnicas de otimização. Estes modelos funcionam na lógica de diminuir o esforço computacional a partir da obtenção de uma função matemática que, embora teoricamente promovam uma estimativa próxima à função real, apresenta uma formulação bem mais simples, gerando um custo computacional menor (WANG; SHAN, 2007).

A ideia base é que partindo de uma amostra inicial no espaço de projeto, sendo representado por pares formados por um vetor de pontos amostrais \mathbf{x} e o vetor de função objetivo \mathbf{y} , o modelo construa uma função substituta que estime os resultados da função cara a um menor custo, sendo útil em prever pontos que estão longe dos pontos utilizados na construção do modelo. Portanto, pode-se destacar dois requisitos principais na utilização dessa estratégia: (1) um aumento significativo de velocidade no uso e (2) manter uma precisão em relação aos resultados do modelo de alta fidelidade. Infelizmente, esses fatores tendem a entrar em conflito um com o outro, de forma que o usuário frequentemente terá que equilibrar essas necessidades conflitantes com cuidado (FORRESTER *et al.*, 2008).

O autor também comenta que essa metodologia possui três etapas principais na sua aplicação. A primeira é relativa à análise inicial das variáveis que serão trabalhadas, seguida da obtenção dos pontos amostrais no espaço de projeto e da escolha do modelo substituto. A determinação dos pontos amostrais deve ser realizada a partir do Projeto de Experimentos (DoE) e, de forma geral, deve ser feita de forma a promover um espalhamento uniforme dos pontos no espaço de projeto, uma vez que a eficiência do modelo se relaciona diretamente a distribuição deles.

A segunda fase se preocupa com a determinação dos parâmetros do modelo, que pode ser feita, por exemplo, através de abordagens analíticas ou por metodologias de validação cruzada e de otimização. Estas serão apresentadas e discutidas mais adiante. A última etapa se preocupa com o teste do modelo. Forrester et al. (2008) comentam que esta pode ser ignorada em gerações iniciais de modelos que serão melhorados futuramente. No caso do projeto em questão, será aplicada uma metodologia conhecida como Otimização Sequencial Aproximada (*Sequential Approximate Optimization – SAO*), na qual pontos amostrais são adicionados à amostra ao longo da otimização em regiões de interesse.

A literatura apresenta diversas opções de modelos substitutos diferentes, como

Funções de Bases Radial (RBF) (HARDY, 1971), Regressão de Vetor Suporte (SVR) (CORTES; VAPNIK, 1995), Rede Neural Artificial (RNA) (HAYKIN, 2008), Kriging (KRIGE, 1951; SACKS *et al.*, 1989), entre muitos outros.

Com relação a aplicações em estruturas de FGM, Chen *et al.* (2014) realizam a otimização dos parâmetros para funções de base radial multiquadráticas para estimar a deflexão e a tensão em placas com gradação funcional. Cheng *et al.* (2018) realizam a otimização de um implante dentário considerando cargas dinâmicas utilizando um modelo de Kriging. Do *et al.* (2019) otimizam placas de FGM utilizando Rede Neural Profunda. Foram utilizadas funções B-Splines para definir a gradação do material sobre a espessura da placa e uma Análise Isogeométrica foi aplicada para avaliar o comportamento estrutural da peça. Nikbakht *et al.* (2019) comenta que a RNA é a técnica substituta mais comum em combinação com algoritmos meta-heurísticos para a otimização de estruturas compostas, obtendo bons resultados.

Shi *et al.* (2020) realizaram um estudo entre as diversas aplicações desses modelos e comentam que os modelos Kriging e RBF juntos representam cerca de 40% das estratégias utilizadas na literatura para a construção de modelos substitutos. Wang e Shan (2007) comentam que o Kriging possui uma maior eficiência em funções não-lineares e que o RBF possui uma formulação mais simples e fácil de implementar, apresentando resultados satisfatórios.

Gan e Gu (2018) comentam que o modelo de RBF trabalha melhor com funções não-lineares de maior ordem e que o Kriging é um modelo que trabalha melhor com funções de menor ordem. Simpson *et al.* (2002) realizam estudos e apontam resultados similares, em que o RBF e o Kriging conseguiram os melhores resultados dentre os modelos testados.

Forrester *et al.* (2008) comentam que, devido ao processo de otimização dos parâmetros, o Kriging perde sua reprodutibilidade em problemas com um maior número de variáveis, sendo o RBF uma melhor alternativa para esse caso. Os autores também comenta que modelos como Kriging e alguns RBF que se baseiam em funções Gaussianas possuem a vantagem de serem capazes de aplicar métodos estatísticos para aprimorar a superfície formada pelo modelo substituto, como a Probabilidade de Melhoria e a Melhoria Esperada. As subseções seguintes fazem uma explanação mais detalhada de cada etapa da metodologia apresentada.

A seção seguinte faz uma explanação mais detalhada de cada etapa da metodologia apresentada, discutindo os aspectos importantes na definição do plano de amostragem, de algumas técnicas utilizadas aplicadas na distribuição e na quantidade de pontos iniciais. Já a seção 4.2 e 5.3 apresenta a formulação matemática do modelo que será estudado, que são as

Função de Base Radial.

4.1 Definição da Amostra Inicial

Essa é a etapa conhecida como Projeto de Experimentos (*Design of Experiments - DoE*) e, como comentado anteriormente, a escolha da amostra utilizada para gerar os modelos substitutos tem uma grande relação com a eficiência destes. Assim, a tentativa de construir uma amostra uniforme de forma a representar bem todo o espaço de projeto é uma propriedade muito desejada (SIMPSON *et al.*, 2002; KLEIJNEN *et al.*, 2005; RENNEN, 2008; TENNE, 2014).

Quanto a quantidade de pontos amostrais, é bem difícil atestar com propriedade o melhor tamanho com antecedência, especialmente quando se considera que as funções são totalmente desconhecidas (*black box*), o que é feito na grande maioria das metodologias de otimização, em que não se tem informações das funções antes da metodologia ser empregada.

O que alguns trabalhos atestam é que o número necessário de pontos amostrais é relacionado com o número de variáveis de otimização, uma vez que quanto maior o número de variáveis, maior também se torna o espaço de projeto. Visando estimar a quantidade adequada de pontos amostrais, alguns autores propõem fórmulas arbitrárias, como a multiplicação da dimensão por um escalar (JIN *et al.*, 2001; CHO *et al.*, 2016).

Jones *et al.* (1998a) e Loepky *et al.* (2009) utilizam a seguinte formulação para o tamanho da amostra inicial:

$$N_p = 10m \quad (4.1)$$

onde m é o número de variáveis e N_p o número de pontos amostrais. Já Xu *et al.* (2014) e Liu *et al.* (2015) utilizam a mesma formulação, considerando um coeficiente igual a 5. Ath *et al.* (2019) adotam uma amostra ainda menor, com um coeficiente igual a 2. Amouzgar e Strömberg (2016) sugerem que o número de pontos iniciais seja uma função do coeficiente k , como em:

$$k = \frac{(m+1)(m+2)}{2} \quad (4.2)$$

onde m é o número de variáveis e k é o coeficiente que depende de m . Os autores dividem as amostras entre pequenas, médias e grandes. Sendo N_p o número de pontos necessário, para problemas com poucas variáveis, $m \leq 4$, tem-se:

- $N_p = 1.5k$, para amostras pequenas;
- $N_p = 3.5k$, para amostras médias;

- $N_p = 6.0k$, para amostras grandes;

Para problemas com muitas variáveis, $m > 4$, tem-se:

- $N_p = 1.5k$, para amostras pequenas;
- $N_p = 2.5k$, para amostras médias;
- $N_p = 5.0k$, para amostras grandes.

A utilização da abordagem sequencial, apresentada posteriormente, tem como principal objetivo reduzir a relevância que a amostra inicial possui na utilização do modelo substituto, uma vez que a superfície será melhorada continuamente com novos pontos nas regiões de interesse (WANG; SHAN, 2007). Nesse caso, Sobester *et al.* (2005) aconselham que um bom valor para estimar a amostra inicial é o de um terço do tamanho da amostra ao final das simulações, situação após a adição de todos os pontos necessários.

Forrester *et al.* (2008) indicam a normalização dos pontos amostrais antes da construção dos modelos substitutos, sendo feita também para um ponto estimado pelo modelo. O autor comenta ainda que o erro do modelo substituto é mínimo nas proximidades dos pontos amostrais, o que confirma ainda mais a importância da amostragem na construção do modelo.

4.1.1 Plano de Amostragem

Definida a amostra inicial, o próximo estágio busca proporcionar uma distribuição uniforme à amostra, de forma a melhor conhecer o espaço de projeto por completo. As metodologias utilizadas para distribuir os pontos podem ser classificadas em determinísticas ou estocásticas. As primeiras usam formulações analíticas, geram sempre o mesmo vetor de pontos amostrais e garantem uma uniformidade ao longo do espaço de projeto, como a Sequência de Hammersley e a Sequência de Sobol. Já as estocásticas utilizam da aleatoriedade para gerar amostras diferentes, nem sempre uniformemente distribuídas, a cada interação, como a Simples Amostragem Aleatória e a Hipercubo Latino. As próximas subseções descrevem e exemplificam algumas abordagens encontradas na literatura.

4.1.1.1 Simples Amostragem Aleatória

A Simples Amostragem Aleatória (SAA) é uma metodologia básica em que n pontos são amostrados de forma aleatória no espaço de projeto. Como todos os pontos tem a mesma probabilidade de serem escolhidos, se espera que no fim do processo se obtenha uma certa uniformidade em sua distribuição, de forma a melhor conhecer o espaço de projeto por completo.

No entanto, Amouzgar e Strömberg (2016) alertam que muitas vezes a uniformidade não é atingida devido ao baixo número de amostras geradas na maioria dos casos. Steponavičė *et al.* (2016) comenta que mesmo tendo uma baixa confiabilidade da sua uniformidade, esse método ainda é muito utilizado devido a sua facilidade de implementação.

4.1.1.2 Hiper cubo Latino

O Hiper cubo Latino (HL) é um método que se inicia com a estratificação do espaço de projeto em uma matriz quadrada $n \times n$ que é preenchida com n pontos amostrais. Essa metodologia admite que cada estrato possuirá apenas uma amostra, de forma que apenas um ponto estará em cada linha e em cada coluna. Por assumir a aleatoriedade no preenchimento, cada ponto possui igual probabilidade de $1/n$ de ser escolhido. No entanto, grandes regiões podem se manter inexploradas, uma vez que o HL não pode garantir que a amostragem fique uniformemente distribuída ao longo do espaço de projeto (STEPONAVIČĖ *et al.*, 2016).

Essa abordagem é uma das mais utilizadas (KITAYAMA *et al.*, 2012; KITAYAMA *et al.*, 2013; LI *et al.*, 2017). Na tentativa de proporcionar uma maior uniformidade a amostra, algumas variações dessa metodologia foram desenvolvidas, como o Hiper cubo Latino Otimizado (*Optimized Latin Hypersquare* - OLHS) (TENNE, 2014) e o Hiper cubo Latino Melhorado (*Improved Latin Hypersquare* - ILHS) (BEACHKOFSKI; GRANDHI, 2002).

Outra prática comumente utilizada é a geração de n amostras com a aplicação do HL e a escolha daquela que apresentar a maior uniformidade. Yan *et al.* (2019) apresentam uma formulação da quantificação da uniformidade dos pontos amostrais que é apresentado a seguir.

$$d_p(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)}) = \left(\sum_{k=1}^m |x_k^{(i)} - x_k^{(j)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (4.3)$$

em que $\mathbf{x}^{(i)}$ e $\mathbf{x}^{(j)}$ representam os pontos amostrais i e j , e a distância entre os pontos é calculada através da norma p , em que p é um valor arbitrário: para $p = 1$, trata-se da distância retangular, enquanto que para $p = 2$ trata-se da norma Euclidiana (FORRESTER *et al.*, 2008). Goel *et al.* (2006) utilizam essa abordagem, sendo geradas 20 sequencias diferentes e selecionando a que apresentar o maior critério de maximização da distância mínima entre os pontos.

4.2 Funções de Base Radial

Essa metodologia foi desenvolvida por Hardy (1971) a partir da interpolação de dados geográficos utilizando funções multiquadráticas, sendo hoje uma das mais utilizadas e exploradas pela comunidade científica ((DURANTIN *et al.*, 2017; XING *et al.*, 2017; SONG *et al.*, 2019). Desde sua elaboração, muitos trabalhos vêm utilizando algumas variações de parâmetros ou de estratégias visando aperfeiçoar e acelerar seus modelos matemáticos (ROQUE; FERREIRA, 2009; ACAR, 2013; AMOUZGAR; STRÖMBERG, 2016; SHI *et al.*, 2019).

A técnica se baseia na construção de um modelo aproximado \hat{f} a partir do conhecimento de certos pontos da função original. Esses pontos podem ser definidos com o uso de técnicas de amostragem a discutidas anteriormente. O modelo aproximado é construído a partir de:

$$\hat{f}(x) = \sum_{i=1}^n w_i \varphi(\|x - c_i\|) \quad (4.4)$$

em que n é o número de centros de funções básicas, w_i representa o peso de cada base, c_i denota o centro de cada base considerado no modelo a ser aplicado, φ representam as funções de base radial que será utilizada e o subscrito i representa o número da base em questão.

A função φ escolhida para conduzir a interpolação varia entre as publicações feitas no tema, muito embora normalmente se utilize a Função Gaussiana (KITAYAMA; YAMAZAKI, 2011; AMOUZGAR; STRÖMBERG, 2016). A principal vantagem, como comentado anteriormente, é que essa função permite o uso de metodologias de melhoria da superfície de resposta, devido à possibilidade de realizar a estimativa do erro para cada ponto amostral (FORRESTER *et al.*, 2008). Neste trabalho serão utilizadas as bases Gaussianas, que são definidas por:

$$\varphi(r) = e^{-\frac{r^2}{\sigma^2}} \quad (4.5)$$

onde r denota a norma $\|x - c_i\|$, geralmente representando a distância Euclidiana, de x até cada centro c_i , do modelo RBF sendo construído. Já o parâmetro σ é chamado largura (*width*), pois é um parâmetro escalar que regula a forma da função de base radial. Esse valor tem grande importância para a modelagem proposta, e será mais discutido posteriormente.

Na formulação apresentada para a construção desse tipo de modelo, pode-se destacar que existem duas variáveis principais: o vetor de pesos (\mathbf{w}) e o vetor de larguras (σ). A obtenção de cada um destes será discutido nas seções a seguir.

4.2.1 Determinação dos Pesos

O vetor de pesos \mathbf{w} é definido com o treinamento do modelo, através da simples interpolação dos pontos amostrais. Assim, assume-se que $\hat{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ para os pontos no espaço amostral. Constrói-se então o sistema linear apresentado por:

$$\begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{21} & \dots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \varphi_{2n} \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \dots & \varphi_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

em que $\varphi_{ij} = \varphi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|)$. A matriz quadrada desse parâmetro é conhecida como Matriz de Gram ou Matriz de Interpolação. Resolvendo este, encontram-se os pesos w_i que tornam a igualdade verdadeira (HAYKIN, 2012). A equação pode ser escrita na forma vetorial como apresentada em:

$$\phi \mathbf{w} = \mathbf{y} \quad (4.7)$$

Como comentado anteriormente, um cuidado que deve se tomar em relação à construção desses modelos é relativo aos pontos escolhidos. Caso os centros estejam muito próximos entre si, a função tende a ficar próxima da singularidade (HAYKIN, 2012), tornando mais difícil a obtenção dos pesos para o conjunto. Forrester *et al.* (2008) comenta que em caso de amostra muito grande o método pode levar ao *overfitting*, em que o modelo representa bem apenas os pontos amostrais e não generaliza bem as respostas para outros pontos.

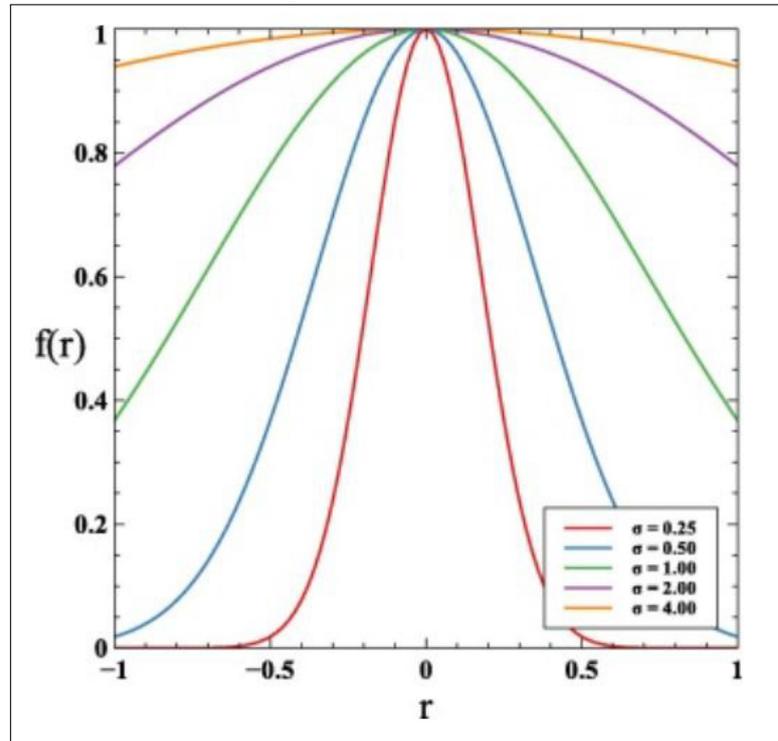
4.2.2 Determinação do vetor de larguras

Em modelos de RBF com bases Gaussianas, a largura controla o formato da curvatura de sino, como é mostrado na Figura 6. Esse parâmetro regula a influência de cada base sobre o espaço ao redor de cada base i (SOBESTER *et al.*, 2005; FORRESTER *et al.*, 2008). A Figura 7 ilustra a influência desse parâmetro, em que para valores pequenos o formato do modelo consegue prever de forma precisa apenas as regiões próximas aos pontos amostrados e para valores maiores o formato fica mais plano e suave.

Assim, como esse parâmetro tem importância no desempenho do modelo substituto a ser gerado e como os pesquisadores não chegaram a um acordo sobre como isso deve ser feito, diversas metodologias para a consideração desse parâmetro foram propostas, visando uma

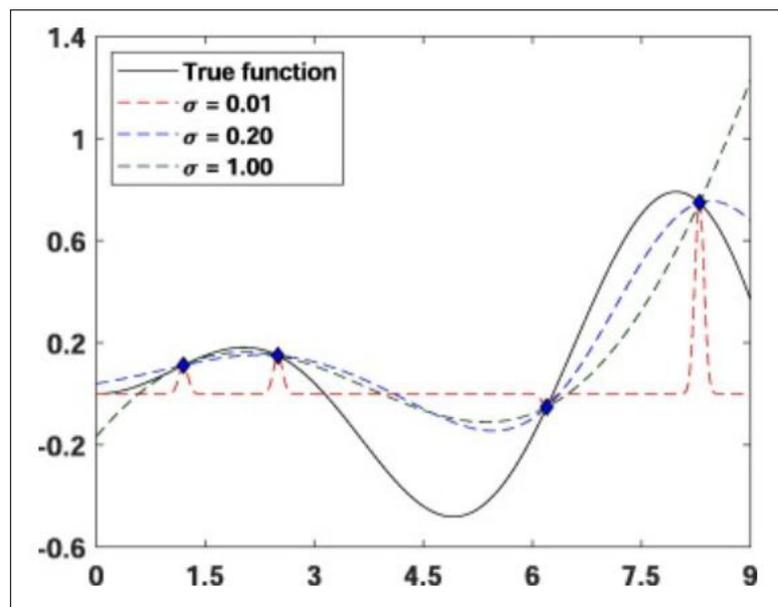
melhor representação da função original. A seguir, serão discutidos alguns métodos para o cálculo desse parâmetro sugeridos em alguns trabalhos

Figura 6 – Comportamento da função Gaussiana para diferentes larguras.



Fonte: Ribeiro *et al.* (2020a)

Figura 7 – Estimativas do modelo substituto com diferentes valores de σ



Fonte: Ribeiro *et al.* (2020a)

A primeira técnica para o cálculo da largura foi proposta por Haykin (1994) e considera o número de bases do modelo n e a distância máxima entre os pontos amostrais d_{max} , gerando um vetor de larguras de mesmo valor para cada base, dado por:

$$\sigma = \frac{d_{max}}{\sqrt{2b}} \quad (4.8)$$

Em seguida, Nakayama *et al.* (2002) propuseram uma modificação na formulação proposta por Haykin (1994), em que se passou a considerar o número de variáveis (m) do problema de otimização:

$$\sigma = \frac{d_{max}}{\sqrt[m]{bm}} \quad (4.9)$$

Ademais, Kitayama e Yamazaki (2011) propuseram inicialmente uma formulação similar a proposta por Nakayama *et al.* (2002), mas colocando um peso maior no número de variáveis:

$$\sigma = \frac{d_{max}}{\sqrt{m} \sqrt[n]{n}} \quad (4.10)$$

Nessas metodologias apresentadas, todos os pontos do espaço possuirão a mesma largura. Embora isso seja satisfatório em alguns casos, em espaços onde os pontos amostrais não estão distribuídos de forma uniforme essa metodologia pode produzir resultados insatisfatórios. Dessa forma, Kitayama e Yamazaki (2011) propuseram a seguinte equação:

$$\sigma_j = \frac{d_{(j,max)}}{\sqrt{m} \sqrt[n]{n-1}} \quad (4.11)$$

onde para o cálculo da largura de cada ponto amostral (σ_j), é considerada a distância máxima entre a base j ($d_{(j,max)}$) e outra base qualquer no espaço de projeto.

Outra solução amplamente adotada foi a que realiza a otimização desse parâmetro, sendo o uso de técnicas de validação cruzada a abordagem mais utilizada. A metodologia mais comum é a *Leave One Out Cross-Validation* (LOOCV). Nesta, para cada ponto da amostra i constroem-se $n - 1$ modelos substitutos, cada um com uma largura diferente, sem considerar o ponto i . Destes, a função é estimada para x_i , e essa estimativa é comparada com o valor real da função y_i , computando-se o erro médio quadrático. O processo é realizado para todos os pontos, e a soma dos erros encontrados utilizando uma mesma largura configura o erro dessa largura. A largura que possuir o menor erro médio quadrático será escolhida. Em Sobester *et al.* (2005), os autores sugerem que se realize uma busca direta em 20 valores possíveis de larguras no domínio

$[10^{-2}, 10^1]$, espaçados logaritmicamente. Já em Mehmani *et al.* (2017), é realizada a otimização convencional do parâmetro no domínio de $[10^{-2}, 3]$.

O MSE se refere ao Erro Quadrático Médio, sendo calculado como:

$$MSE = \frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{n_v} \quad (4.12)$$

onde n_v se refere ao número de pontos de validação utilizados, y_i é a resposta verdadeira e \hat{y}_i é a resposta prevista para um determinado ponto.

Outro método utilizado com esse mesmo enfoque é a Validação Cruzada em k Grupos (*k-Fold Cross-Validation* - k -FCV). Esta apresenta uma metodologia similar à LOOCV mas, ao invés de gerar um modelo substituto para cada ponto e largura, essa abordagem reúne os pontos em k grupos escolhidos aleatoriamente, diminuindo bastante o custo computacional por refazer as iterações para cada grupo inteiro. A cada iteração do processo várias amostras são utilizadas como pontos de validação ao invés de somente uma. Assim, um número muito menor de modelos é construído, principalmente em problemas com um número alto de amostras.

Ribeiro *et al.* (2020a) apresentam um estudo entre as metodologias de definição de largura apresentadas anteriormente com aplicação de uma metodologia SAO em projetos de placas com gradação funcional. Os autores sugerem o uso da k -FCV com $k = 5$. Os resultados indicam que, de um modo geral, a Validação Cruzada e a proposta por Kitayama e Yamazaki (2011) com a Melhoria Esperada foram as que conseguiram os resultados mais precisos. Já a k -FCV se mostrou uma técnica eficiente e com boa precisão, sendo essa metodologia empregada no presente trabalho.

5 OTIMIZAÇÃO SEQUENCIAL APROXIMADA

O processo de otimização com o uso apenas do modelo substituto como o RBF a partir das amostras iniciais normalmente exige um grande número de amostras para a obtenção de um modelo que se adeque. Essa abordagem tende a encarecer o processo de construção do modelo, uma vez que normalmente no início ainda não se tem informações acerca da localização do ponto ótimo e que para tê-la, faz-se necessário o uso de uma amostra grande que vise cobrir o máximo do espaço de projeto.

Nesse contexto, surge a técnica da Otimização Sequencial Aproximada (*Sequential Approximate Optimization* - SAO). Proposta inicialmente por Schmit e Farshi (1974), a técnica é aplicada de forma a melhorar continuamente a região de confiança na qual a otimização é realizada até que o ótimo global seja encontrado. Assim, as técnicas de SAO buscam a cada iteração adicionar novos pontos amostrais no modelo substituto, sendo esses pontos escolhidos com base em estratégias que venham a favorecer a convergência para o ótimo global do projeto de interesse.

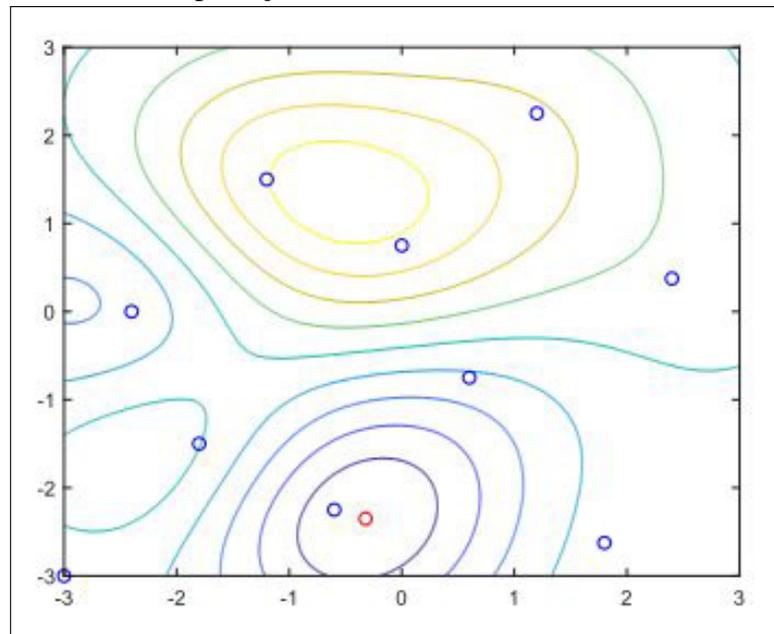
Forrester *et al.* (2008) comenta que a abordagem mais comum é a adição do ponto ótimo após cada interação, porém essa estratégia tende a melhorar apenas a região do suposto ótimo encontrado inicialmente e pode levar a convergir para um ótimo local. Nesse contexto, Kitayama *et al.* (2010) propõem uma abordagem que adicione pelo menos dois novos pontos, sendo um na vizinhança do ótimo da interação e um na região da amostra que ainda foi pouco explorada.

O primeiro ponto é relativo à busca local (*exploitation*), sendo representado pela inserção do melhor indivíduo não repetido a amostra, encontrado pelo processo de otimização, sendo importante para se obter uma rápida convergência. A Figura 8 apresenta o ponto adicionado nessa abordagem (em vermelho), para um problema de duas dimensões, assim como a amostra inicial utilizada (em azul).

Já o segundo ponto é relativo a busca global (*exploration*). Esta busca visa melhorar o modelo em regiões onde a amostragem é esparsa, o que torna o modelo substituto pouco representativo da resposta real do problema e é importante para encontrar o ótimo global. A escolha deste novo ponto de amostragem é feita usando a função Densidade. Kitayama *et al.* (2010) propôs essa função como uma metodologia a fim de representar a menor distância entre cada ponto do espaço de projeto e os pontos amostrais.

A formulação desta deriva do próprio RBF, e acontece com a simples definição

Figura 8 – Inserção do melhor indivíduo considerando uma exploração local



Fonte: Ribeiro, 2019

do vetor de funções objetivo y como o vetor unitário. A partir daí o modelo é construído e a minimização da função Densidade fornece o ponto a ser adicionado à amostra.

Sobester *et al.* (2005) comentam que, em funções unimodais, critérios baseados em busca local, como a inserção do melhor ponto à amostra, são geralmente mais eficazes. Já em funções extremamente multimodais, a inserção de pontos em regiões inexploradas, como através da Função Densidade, pode melhorar a convergência para o mínimo global.

O mesmo autor comenta ainda sobre a possibilidade de uso de critérios combinados, como a Probabilidade de Melhoria (*Probability of Improvement* - PI), Melhoria Esperada (*Expected Improvement* - EI) e a Melhoria Esperada Ponderada (*Weighted Expected Improvement* - WEI). Assim, através da aplicação de ambas as metodologias combinadas, busca-se obter resultados satisfatórios para uma variedade de funções.

Balreira (2018) aplicou a estratégia da Otimização Sequencial Aproximada usando RBF em estruturas laminadas. A Sequência de Hammersley foi utilizada para gerar as amostras de treinamento para construção do modelo substituto inicial. Os resultados mostraram a viabilidade do uso dessa estratégia na otimização de estruturas laminadas devido a redução do custo computacional e aos valores admissíveis de erros quando foram comparadas as soluções aproximadas aos projetos ótimos.

Ribeiro *et al.* (2020a) realizaram a aplicação da SAO aliada ao RBF com a finalidade de reduzir o custo computacional na otimização de placas graduadas funcionalmente. Foram

avaliados os critérios de preenchimento por meio da Melhoria Esperada e da Melhoria Esperada Ponderada. De maneira geral, os resultados obtidos com as abordagens foram excelentes, pois foram capazes proporcionar reduções significativas de tempo de otimização em todos os exemplos.

Maia (2020) aplicou a estratégia da Otimização Sequencial para o projeto de estruturas laminadas e com gradação funcional. Foram estudadas algumas de metodologias de otimização envolvendo dois substitutos, RBF e Kriging, e dois critérios de inserção de pontos, a Melhoria Esperada (EI) e a Melhoria Esperada Ponderada (WEI). Foi utilizada a Análise Isogeométrica para avaliar as respostas estruturais. Os resultados mostraram que o desempenho dos algoritmos baseados no Kriging é levemente melhor com a WEI. Já os baseados no RBF não apresentaram diferença significativa entre os critérios de preenchimento estudados. Em geral, os algoritmos SAO baseados no Kriging forneceram excelente precisão com o menor número de pontos de preenchimento.

5.1 Melhoria Esperada

A melhoria esperada se utiliza de uma abordagem estatística para estimar quais pontos amostrais possuem melhores propriedades visando aumentar o aprimoramento da superfície de resposta a partir da adição desses pontos. A principal característica desse método é que ele tenta balancear a busca global e a local, uma vez que cada uma tem suas vantagens e desvantagens.

Forrester *et al.* (2008) comenta que o método se baseia na estimativa do erro e pode ser aplicado para qualquer processo com base Gaussiana, sendo inicialmente desenvolvido para se utilizar junto com o modelo de Kriging, mas também sendo aplicado em RBF Sobester *et al.* (2005). O cálculo do erro quadrático médio é estimado pela equação apresentada a seguir:

$$\hat{\sigma}^2(\mathbf{x}) = \sigma^2 \left[\mathbf{1} - \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\Psi}^{-1} \boldsymbol{\psi} + \frac{(\mathbf{1} - \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Psi}^{-1} \boldsymbol{\psi})^2}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{1}} \right] \quad (5.1)$$

onde σ^2 é a estimativa de máxima verossimilhança para a variância e pode ser calculado como:

$$\sigma^2 = \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{1}\mu)^T \boldsymbol{\Psi}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{1}\mu)}{n} \quad (5.2)$$

onde \mathbf{y} são as respostas dos pontos amostrais e μ é a estimativa de probabilidade média que pode ser calculada como:

$$\mu = \frac{\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Psi} \mathbf{Y}}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Psi} \mathbf{1}} \quad (5.3)$$

O terceiro termo da Eq. (5.1) é muito pequeno e será omitido. É importante notar que, se x é um ponto de amostragem, ψ é uma coluna da matriz Ψ e ambas as parcelas $\psi^T \Psi^{-1}$ e $\mathbf{1}^T \Psi^{-1} \psi$ são iguais a 1. Portanto, o erro seria nulo.

Considerando a incerteza como um processo estocástico, em que a variável y tem uma média $\hat{y}_i(x)$ e uma variância $\hat{s}^2(x)$, a melhoria esperada de um novo ponto \mathbf{x} é dada por (SOBESTER *et al.*, 2005):

$$E [I(x)] = (Y_{\min} - \hat{y}(x)) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{y_{\min} - \hat{y}(x)}{\hat{s}\sqrt{2}} \right) \right] + \frac{\hat{s}}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[\frac{-(y_{\min} - \hat{y}(x))^2}{2\hat{s}^2} \right] \quad (5.4)$$

onde y_{\min} é a função objetiva do melhor design viável encontrado até agora. Um aspecto interessante dessa formulação é que o primeiro termo está relacionado a busca local (*exploitation*) e o segundo a busca global (*exploration*).

Um procedimento de otimização pode ser usado para encontrar o ponto \mathbf{x} que fornece o EI mais alto e que será adicionado a amostra. Nesse trabalho, o algoritmo PSO descrito na Seção 5.1 e o DE descrito na Seção 5.2 serão utilizados e avaliados na maximização da melhoria esperada (EI).

Quanto aos critérios de parada do processo, eles geralmente são relacionados a alguma métrica de erro na estimativa de um valor conhecido, ao número máximo de pontos adicionados ou ao número máximo de interações.

5.2 Tratamento de Restrições

O tratamento das restrições nessa estratégia é bem mais complexo do que o que foi apresentado para os algoritmos heurísticos. Sobester *et al.* (2005) comenta que caso a restrição seja violada, independente de ser aproximada ou exata, a melhoria esperada do ponto deve ser zero. Entretanto, como já foi comentado na Seção 4.3, alguns projetos inviáveis podem possuir informações importantes para o restante do processo de otimização e muitas vezes já estão bem próximos do limiar de viabilidade. Logo, não seria inteligente simplesmente descartar esse ponto. Visando aproveitar mais informações do ponto, Forrester *et al.* (2008) comenta sobre a utilização da Probabilidade de Viabilidade que é determinada por:

$$P[F(x)] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{g_{\min} - \hat{g}(x)}{\hat{s}\sqrt{2}} \right) \quad (5.5)$$

onde g_{\min} é o limite da restrição, $\hat{g}(x)$ é o valor estimado pelo modelo substituto e \hat{s} é o erro quadrático médio, como já comentado. Assim, como os processos não são correlacionados, a

melhoria esperada restrita é dada pela multiplicação de $P[F(x)]$ por $E[I(x)]$ como é apresentado a seguir.

$$E[I(x) \cap F(x)] = E[I(x)]P[F(x)] \quad (5.6)$$

Tutum *et al.* (2014) aplicam uma metodologia diferente para considerar a restrição, em que sua medida de viabilidade para cada restrição é calculada por:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{g_{\min} - \hat{g}}{\hat{s}(x)}\right), & \text{se } \operatorname{erf}\left(\frac{g_{\min} - \hat{g}(x)}{\hat{s}}\right) \geq 1 \\ 2 - \operatorname{erf}\left(\frac{g_{\min} - \hat{g}}{\hat{s}(x)}\right), & \text{se } 0 < \left(\frac{g_{\min} - \hat{g}}{\hat{s}(x)}\right) < 1 \\ 0, & \text{em outros casos} \end{cases} \quad (5.7)$$

O primeiro caso contempla a situação em que todas as restrições são satisfeitas e $\hat{s}(x)$ é pequeno, ou seja, a incerteza é relativamente baixa, resultaria em $P[F(x)] = 1$. O segundo caso remete a situação em todas as restrições são satisfeitas, porém, pelo menos uma delas tem seu valor muito próximo do limite de viabilidade ou $\hat{s}(x)$ for maior, obtendo $P[F(x)] > 1$. Por fim, em qualquer outro caso, teremos $P[F(x)] = 0$.

Já a melhoria esperada restrita também é calculada por:

$$E[I(x) \cap F(x)] = E[I(x)]F(x) \quad (5.8)$$

Essa estratégia tem como vantagem atualizar as regiões mais críticas próximas a restrição do substituto, que geralmente concentram o projeto ótimo, de maneira mais rápida. Essa abordagem será utilizada no presente trabalho.

6 EXEMPLOS

O presente trabalho tem como principal foco a otimização de estruturas com gradação funcional utilizando algoritmos heurísticos e modelos substitutos. Nesse contexto, dois tópicos dentro dessa temática serão explorados: diferentes estratégias para o tratamento de restrições e diferentes abordagens empregadas na determinação do tamanho da amostra inicial utilizada na construção do modelo substituto.

Inicialmente, visando estudar os impactos que cada parâmetro tem nas estratégias avaliadas, serão usadas funções matemáticas com diferente número de variáveis e com restrições. O uso das funções matemáticas, conhecidas na literatura como *benchmarks*, tem a vantagem de poder testar e validar as implementações, além de terem um tempo de processamento inferior que os problemas de FGM.

Em seguida estudaremos alguns problemas relevantes de estruturas com gradação funcional da literatura. Para isso, o procedimento de análise utilizado deve ser validado e isso será realizado comparando com resultados obtidos com os encontrados na literatura. Em seguida serão realizadas as otimizações dos problemas propostos, visando avaliar a eficiência das estratégias adotadas dentro da otimização dessas estruturas.

Os algoritmos de otimização utilizados nas soluções de alta fidelidade serão o PSO e o DE, sendo avaliadas as penalidades estática e a adaptativa dentro das aplicações realizadas. No presente trabalho, o fator considerado na penalidade estática utilizado foi $k = 10^6$. Na Tabela 1, apresentam-se os parâmetros considerados na Otimização por Nuvem de Partículas e na Tabela 2, apresentam-se os parâmetros considerados na Evolução Diferencial. Na maximização da Melhoria Esperada, o número máximo de iterações foi considerado igual a 500 para as duas estratégias.

Na aplicação de estratégias de otimização sequencial em modelos substitutos serão estudadas algumas formulações empregadas na determinação do tamanho da amostra inicial para

Tabela 1 – Parâmetros adotados na Otimização por Nuvem de Partículas.

Parâmetro	PSO / Square	PSO / Ring	PSO / Global
Topologia	Square	Ring	Global
p_{mut}	0.02	0.02	0.02
w	0.70	0.70	0.70
c_1	1.50	1.50	1.50
c_2	1.50	1.50	1.50

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 2 – Parâmetros adotados na Evolução Diferencial.

Parâmetro	DE/Rand/1	DE/Current-to-best/1	DE/Best/1-with-jitter
Diferenciação	Rand/1	Current-to-best/1	Best/1-with-jitter
F	0.85	0.85	0.85
C_r	0.80	0.80	0.80

Fonte: Elaborado pelo autor.

as Funções de Base Radial. Ademais, para todas estas, o Hipercubo Latino será utilizado como metodologia de distribuição da amostra inicial. O critério da Melhoria Esperada, utilizada na Otimização Sequencial Aproximada, também será otimizado com uso do PSO e do DE, sendo posteriormente comparados.

Nos exemplos, a proposição de Amouzgar e Stromberg (2016) é referida ASP para amostras pequenas, ASM para amostras médias e ASG para amostras grandes. A proposta usada por Jones et al. (1998) e Loeppky et al. (2009) é referida como JL, a usada por Xu et al., (2014), Liu et al. (2016) é referida como XL e a adotada por Ath et al. (2019) é referida como ATH.

Os critérios de parada adotados foram: número máximo de iterações (It_{mx}) e número consecutivo de iterações sem melhoria da resposta (It_{stall}). O número máximo de iterações para otimização convencional varia para cada exemplo, enquanto para a SAO esse número será considerado como três vezes o número de pontos iniciais (SOBESTER et al., 2005). Para o segundo critério, considerou-se $It_{stall} = 20$ em todos os exemplos.

Por fim, os exemplos são comparados em termo de precisão, robustez e eficiência computacional. Para a primeira métrica será avaliado tanto o melhor valor encontrado como o valor do erro quadrático médio normalizado (*Normalized Root Mean Squared Error* - NRMSE) em relação ao ótimo global como é apresentado na expressão:

$$NRMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_v} (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n_v} (y_i)^2}} \quad (6.1)$$

em que n_v se refere a quantidade de pontos de validação utilizados. Quanto mais próximo de zero, mais eficaz foi o processo de otimização.

Já a segunda métrica será avaliada a partir da taxa de sucesso (T_{suc}), pelo número de iterações (N_{it}), que no caso da otimização convencional é o número de gerações, e pelo número de avaliações (N_{av}). Nas abordagens SAO, o número total médio de pontos de amostragem de alta fidelidade avaliados (N_p) também será mostrado. A terceira métrica será avaliada pelo do tempo médio do relógio de parede (*Wall-Clock Time* – WCT) em segundos. Todos os cálculos numéricos foram realizados em um computador com CPU Core i9-9820X com velocidade

de clock de 3,30 GHz e 128 GB de RAM. Ademais, vale destacar que não foram utilizados procedimentos de paralelização.

As estratégias de otimização avaliadas e os problemas foram implementados no software Sistema de Otimização Inspirado na Natureza (*Biologically Inspired Optimization System*) (BIOS), do Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV). Esse software tem sua implementação na linguagem de programação C++, utilizando o paradigma de programação orientada a objetos (*Object Oriented Programming* – OOP). No caso dos problemas de FGM, o procedimento de análise estrutural deve ser realizado e para isso foi utilizado o programa *Finite Analysis Tool* (FAST), também desenvolvido pelo LMCV.

6.1 Funções Matemáticas

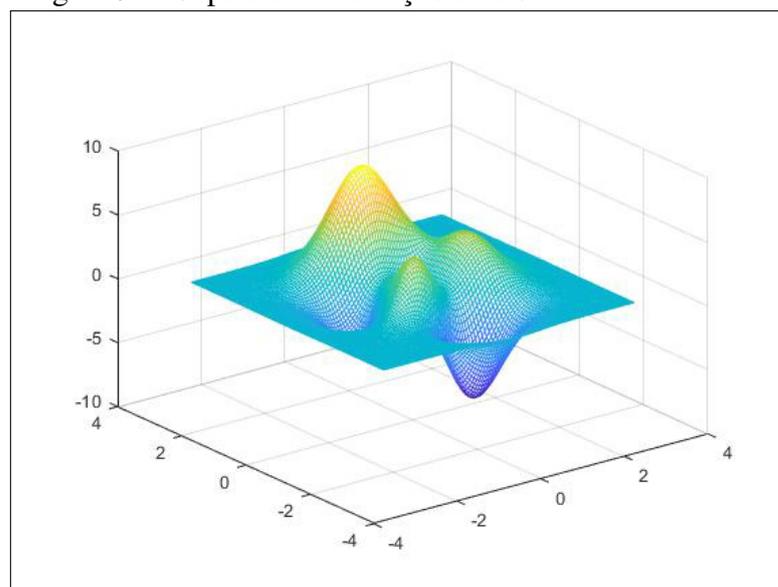
6.1.1 Função Peaks

A função Peaks é um problema matemático bidimensional multimodal definido por:

$$f(x) = 3(1 - x_1)^2 e^{-(x_1^2 + (x_2 + 1)^2)} - 10\left(\frac{x_1}{5} - x_1^3 - x_2^5\right) e^{-(x_1^2 + x_2^2)} - \frac{1}{3} e^{-(x_2^2 + (x_1 + 1)^2)} \quad (6.2)$$

sendo frequentemente utilizado em problemas de otimização. A Figura 9 apresenta a superfície dessa função, em que se observa a presença de alguns mínimos locais, mas de um modo geral é uma superfície bem simples e comportada.

Figura 9 – Superfície da Função Peaks



Fonte: Elaborado pelo autor.

A função é definida no domínio $[-3; 3]$. O valor das variáveis e do ponto ótimo

são apresentados na Tabela 3. Para ter uma ideia do projeto ótimo obtido com a otimização convencional com PSO e com o DE e com a otimização aproximada utilizando o DE ou o PSO na otimização da Melhoria Esperada, a Tabela 3 também mostra os resultados das variáveis e dos principais parâmetros encontrados. Pode-se perceber que ambas as estratégias conseguem obter excelentes resultados e devido à simplicidade do problema, as metodologias convencionais obtêm um tempo de processamento bem menor mesmo com um número de avaliações superior.

Tabela 3 – Resultados do ponto ótimo na Função Peaks.

	Valor Ótimo	Otimização Convencional		SAO	
		PSO	DE	PSO	DE
x_1	0.22887	0.22881	0.22826	0.22566	0.23004
x_2	-1.62596	-1.62225	-1.62577	-1.62934	-1.62642
$f(x)$	-6.5511	-6.5510	-6.5511	-6.5511	-6.5511
Diferença (%)	-	0.00	0.00	0.00	0.00
N_{it}	-	33	29	32	30
N_{av}	-	825	725	52	51
WCT (s)	-	0.1	0.1	4	3.8

Fonte: Elaborado pelo autor.

Foi então realizada a otimização da função utilizando as Funções de Base Radial com largura definida pelo método 5-FCV, aliado a estratégia de Otimização Sequencial Aproximada para diferentes tamanhos de amostra inicial e para as estratégias de otimização da Melhoria Esperada. Os resultados, utilizando 10 otimizações para cada uma das metodologias estão apresentados na Tabela 4.

No geral, todas as estratégias conseguiram encontrar pelo menos um valor muito próximo ao valor ótimo de referência. Com relação à precisão dos resultados encontrados para esse exemplo, pode-se perceber que para todas as estratégias elas tendem a ter os melhores valores, ou seja, menores valores de NRMSE e uma maior taxa de sucesso para as estratégias ASM, ASG e JL. Para estratégias com uma maior população inicial, como a ASG, pode-se perceber que o tempo de processamento médio acaba sendo bem superior. As estratégias com populações menores, como a XL, ASP e ATH, apresentam os piores valores em termo de precisão junto a uma melhoria na eficiência que se deve justamente a um número menor de avaliações da função, seja inicialmente ou nas demais iterações.

Com relação as diferenças entre o DE e o PSO ou até as próprias estratégias dentro de cada uma dessas, os resultados não apresentaram diferenças significativas. Uma possível explicação para isso é que essa função é bem simples e barata, além de possuir apenas duas variáveis e não ter restrições.

Tabela 4 – Resultados da otimização por modelos substitutos para a Função Peaks.

Estratégia de Otimização da Melhoria Esperada	Tipo de Estratégia de Amostragem	Tamanho da Amostra Inicial	Número Médio de Pontos Adicionais	NRMSE (%)	T_{suc}	$f(x)$	WCT (s)
PSO/Square	ATH	4	8	41.50	20%	-6.5485	1.0
	ASP	9	18	0.22	60%	-6.5510	1.3
	ASM	21	36	0.03	100%	-6.5509	4.8
	ASG	36	31	0.07	90%	-6.5508	6.4
	JL	20	32	0.05	90%	-6.5508	4.0
	XL	10	20	7.93	70%	-6.5511	1.5
PSO/Ring	ATH	4	8	16.28	10%	-6.5475	0.9
	ASP	9	18	17.20	50%	-6.5501	1.3
	ASM	21	33	0.08	90%	-6.5511	4.4
	ASG	36	28	0.15	90%	-6.5509	5.0
	JL	20	31	0.09	90%	-6.5510	3.6
	XL	10	20	17.56	80%	-6.5507	1.4
PSO/Global	ATH	4	8	31.55	20%	-6.5510	0.9
	ASP	9	18	25.05	70%	-6.5510	1.3
	ASM	21	32	0.06	90%	-6.5511	4.1
	ASG	36	33	0.02	100%	-6.5511	6.9
	JL	20	33	0.04	90%	-6.5511	4.0
	XL	10	20	16.98	80%	-6.5511	1.4
DE/Rand/1	ATH	4	8	18.73	30%	-6.5504	1.0
	ASP	9	18	10.63	70%	-6.5510	1.3
	ASM	21	30	0.01	100%	-6.5511	3.8
	ASG	36	30	0.02	100%	-6.5518	6.5
	JL	20	35	0.04	90%	-6.5511	4.8
	XL	10	20	2.94	90%	-6.5511	1.5
DE/Current-to-best/1	ATH	4	8	41.85	20%	-6.5505	1.0
	ASP	9	18	17.91	50%	-6.5508	1.3
	ASM	21	31	0.02	100%	-6.5510	4.1
	ASG	36	27	0.02	100%	-6.5514	5.6
	JL	20	29	0.07	80%	-6.5509	3.6
	XL	10	20	14.40	80%	-6.5511	1.5
DE/Best/1-with-jitter	ATH	4	8	53.83	10%	-6.5508	0.8
	ASP	9	18	30.21	40%	-6.5511	1.2
	ASM	21	32	0.15	70%	-6.5509	3.4
	ASG	36	31	0.03	100%	-6.5511	4.9
	JL	20	31	0.07	80%	-6.5511	3.3
	XL	10	20	23.93	50%	-6.5506	1.2

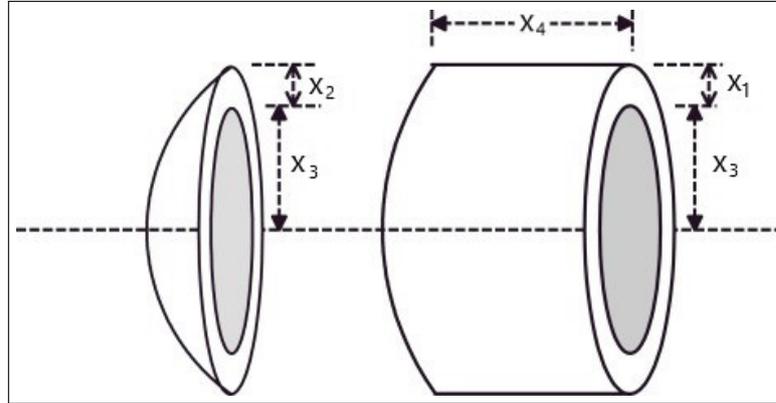
Fonte: Elaborado pelo autor.

6.1.2 Vaso de Pressão

Este problema trata da minimização do custo de um vaso de pressão cilíndrico, com duas cabeças esféricas, apresentado na Figura 10. Esse problema tem sido bastante estudado pela literatura, utilizando, como variáveis, a espessura do vaso de pressão (x_1), a espessura da cabeça cilíndrica (x_2), o raio interno (x_3) e o comprimento do corpo do vaso (x_4), como é apresentado

na Figura 10. Embora usualmente as duas primeiras variáveis são tidas como discretas, para adequar a otimização ao objetivo do presente trabalho, serão consideradas todas essas como variáveis contínuas.

Figura 10 – Vaso de Pressão Cilíndrico



Fonte: Adaptado de Garg (2016)

Esse problema já foi estudado por diversos pesquisadores, utilizando diferentes algoritmos de otimização, muitos deles encontrando valores bastante divergentes para o mínimo global (LEMONGE; BARBOSA, 2003; GARG, 2016). O ótimo global considerado, utilizando variáveis contínuas, foi retirado de Garg (2016) que apresenta um valor ótimo de 5885.33 referente a minimização do custo de um vaso de pressão cilíndrico, com duas esferas. A formulação matemática do problema é definida como minimizar a função objetivo:

$$f(x) = 0.6224x_1x_3x_4 + 1.7781x_2x_3^2 + 3.1661x_1^2x_4 + 19.84x_1^2x_3 \quad (6.3)$$

Submetida a:

$$g_1(x) = 0.0193x_3 - x_1 \leq 0 \quad (6.4a)$$

$$g_2(x) = 0.00954x_3 - x_2 \leq 0 \quad (6.4b)$$

$$g_3(x) = 1296000 - \frac{4}{3}\pi x_3^2 - \pi x_3^2 x_4 \leq 0 \quad (6.4c)$$

$$g_4(x) = 240 - x_4 \leq 0 \quad (6.4d)$$

A função tem suas variáveis $x_{1,2}$ definidas no domínio $[0.0625; 5]$ e $x_{3,4}$ no domínio $[10; 200]$. Pela própria definição da restrição lateral para a variável x_4 , a restrição $g_4(x)$ será sempre negativa. Assim, optou-se por não considerar essa restrição nas otimizações a seguir. Foram então realizadas 20 otimizações dessa função com 50 indivíduos e 200 gerações utilizando a Otimização por Nuvem de Partículas avaliando suas três estratégias de topologia e a Evolução

Diferencial avaliando as suas três estratégias de combinação para cada uma das metodologias de tratamento de restrições apresentadas. Os resultados são apresentados na Tabela 5, incluindo alguns critérios de comparação entre as estratégias avaliadas.

Tabela 5 – Resultado das diferentes estratégias para o problema.

Estratégia de Otimização	Tipo de Penalidade	NRMSE (%)	$f(x)$	$N_{iteraes}$	T_{suc}	WCT (s)
PSO/Square	Estática	0.33	5885.93	183	75%	0.5
	Adaptativa	0.57	5885.36	180	80%	0.4
PSO/Ring	Estática	1.69	5889.38	187	10%	0.4
	Adaptativa	1.00	5890.29	189	5%	0.4
PSO/Global	Estática	7.34	5891.69	197	0%	0.5
	Adaptativa	5.45	5888.50	187	5%	0.4
DE/Rand/1	Estática	0.38	5886.03	160	65%	0.2
	Adaptativa	0.45	5885.62	159	55%	0.2
DE/Current-to-best/1	Estática	0.22	5885.34	168	90%	0.2
	Adaptativa	0.01	5885.33	180	100%	0.2
DE/Best/1-with-jitter	Estática	10.67	5901.52	91	0%	0.1
	Adaptativa	5.38	5885.51	88	10%	0.2

Fonte: Elaborado pelo autor.

No geral, todas as estratégias encontraram bons resultados, ou seja, a diferença do melhor indivíduo para o valor ótimo de Garg (2016) foi pequena. Dentro da Otimização por Nuvem de Partículas, a *Square* e a *Ring* obtiveram os melhores resultados, ou seja, apresentaram um NRMSE pequeno, enquanto que a *Global* apresentou um NRMSE relativamente maior. Avaliando a taxa de sucesso, percebe-se que a *Square* se destaca ainda mais das outras e apresenta valores na ordem de 75%.

Quanto à penalidade adotada, a *Square* apresentou NRMSE e taxa de sucesso levemente menor quando aplicada a penalidade estática. A melhor eficiência encontrada com a penalidade adaptativa pode se explicar pelo número médio de iterações maior com a penalidade estática. Já a topologia *Ring* em todos os critérios obteve melhores valores quando aplicada com a penalidade estática. A topologia *Global* apresentou resultados melhores quando utilizada a penalidade adaptativa.

Quando comparamos a Otimização por Nuvem de Partículas e a Evolução Diferencial percebemos que a última apresenta um tempo de processamento e o número de iterações inferior. Dentro da DE, a *Rand/1* e a *Current-to-best/1* obtiveram os melhores resultados, ou seja, apresentaram um NRMSE bem pequeno e uma elevada taxa de sucesso, enquanto que a *Best/1-with-jitter* apresentou um NRMSE um pouco maior e uma taxa de sucesso menor. Quanto

a penalidade adotada, a *RandI* apresentou NRMSE levemente menor e uma taxa de sucesso maior quando aplicada a penalidade estática e os outros resultados bem próximos. Já a topologia *Current-to-best/1* obteve um menor NRMSE e uma taxa de sucesso maior quando aplicada a penalidade adaptativa, sendo a estratégia que obteve os melhores resultados comparando a PSO e a DE. A *Best/1-with-jitter* também apresentou melhores resultados quando aplicada a penalidade adaptativa.

A penalidade adaptativa apresentou resultados melhores em quatro das seis estratégias avaliadas, o que sugere que essa estratégia é bem promissora. Com relação ao custo computacional (WCT) a diferença entre elas foi praticamente nula. Quanto ao número de iterações, a adaptativa obteve valores menores em quatro das seis estratégias e os resultados melhores da penalidade estática foram na *Ring* e na *Current-to-best/1*. Como a penalidade adaptativa trata as restrições de forma automática sem que o projetista venha a testar valores de penalidade até determinar um valor adequado, essa estratégia parece ser mais vantajosa, principalmente em situações como essa em que se tem diversas restrições e conseguir um valor para que todas sejam trabalhadas pode ser complicado.

Em seguida, foi então realizada a otimização da função utilizando as Funções de Base Radial com largura definida pelo método 5-FCV, aliado a estratégia de Otimização Sequencial Aproximada para diferentes tamanhos de amostra inicial e para as diversas estratégias de otimização da Melhoria Esperada. Por se tratar de restrições matematicamente simples de resolver, optou-se por aproximar apenas a função objetivo. Os resultados obtidos em 10 otimizações para cada uma das metodologias estão apresentados na Tabela 6.

De um modo geral, pode-se perceber que em pelo menos uma das otimizações o valor ótimo ficou bem próximo da solução ótima de referência. Com relação as diferenças entre a DE e a PSO ou até as próprias estratégias dentro de cada uma dessas, os resultados não apresentaram diferenças significativas na otimização da Melhoria Esperada.

Avaliando as diferentes estratégias adotadas para definir o tamanho da amostra inicial, percebe-se que a ASM e a JL apresentam os melhores resultados, ou seja, um NRMSE pequeno e elevada taxa de sucesso. A ASP e a XL apesar de obter valores de RMSE levemente maior, conseguem ser mais eficientes que as estratégias anteriores. Mesmo partindo de uma população bem maior, a ASG não obteve melhorias em relação a precisão, robustez ou eficiência em relação as estratégias anteriores. Isso mostra que o uso de uma amostra inicial maior não necessariamente melhora o desempenho da SAO.

Tabela 6 – Resultado das diferentes estratégias para o problema.

Estratégia de Otimização da Melhoria Esperada	Tipo de Estratégia de Amostragem	Tamanho da Amostra Inicial	Número Médio de Pontos Adicionais	NRMSE (%)	T_{suc}	$f(x)$	WCT (s)
PSO/Square	ATH	8	16	12.25	10%	5889.61	8
	ASP	23	26	2.75	60%	5885.64	18
	ASM	53	25	1.35	70%	5885.36	28
	ASG	90	24	4.05	30%	5885.88	54
	JL	40	45	1.71	70%	5885.33	22
	XL	20	22	2.94	60%	5885.75	16
PSO/Ring	ATH	8	16	8.98	20%	5888.73	9
	ASP	23	25	2.72	50%	5885.64	18
	ASM	53	24	1.62	50%	5885.73	30
	ASG	90	26	5.29	20%	5885.77	60
	JL	40	29	1.95	60%	5885.38	29
	XL	20	27	4.10	50%	5887.10	17
PSO/Global	ATH	8	16	8.27	20%	5885.88	7
	ASP	23	25	4.58	70%	5885.36	16
	ASM	53	25	1.95	50%	5885.64	30
	ASG	90	25	6.27	20%	5885.61	54
	JL	40	25	3.33	60%	5885.36	22
	XL	20	26	4.69	50%	5885.39	16
DE/Rand/1	ATH	8	16	6.71	50%	5885.57	7
	ASP	23	29	1.73	60%	5885.38	18
	ASM	53	26	1.86	60%	5885.36	29
	ASG	90	29	5.52	20%	5885.89	52
	JL	40	29	1.56	60%	5885.57	24
	XL	20	26	3.08	70%	5885.58	16
DE/Current-to-best/1	ATH	8	16	9.47	40%	5889.31	6
	ASP	23	30	3.02	60%	5885.57	18
	ASM	53	30	1.57	80%	5885.36	31
	ASG	90	27	4.20	20%	5885.57	51
	JL	40	26	2.45	70%	5885.36	22
	XL	20	28	2.84	50%	5885.57	16
DE/Best/1-with-jitter	ATH	8	16	6.14	30%	5890.95	5
	ASP	23	22	3.81	50%	5885.37	11
	ASM	53	25	1.92	50%	5885.39	24
	ASG	90	27	5.49	30%	5885.42	47
	JL	40	26	2.32	50%	5885.37	20
	XL	20	26	4.09	40%	5885.57	13

Fonte: Elaborado pelo autor.

Por outro lado, quando partimos de pequenas populações, como o caso da ATH, percebemos que os resultados pioram em termo de precisão e robustez, mas melhoram em termos de eficiência, e isso se da devido ao fato de serem realizadas poucas iterações e partindo de poucas avaliações da função real. Portanto, as estratégias intermediárias apresentaram os melhores valores, enquanto que as mais extremas obtiveram os piores valores.

Para ter uma ideia do projeto ótimo obtido com a otimização convencional utilizando a PSO e a DE, e com a otimização aproximada utilizando a PSO e a DE na otimização da

Melhoria Esperada, a Tabela 7 mostra os resultados das variáveis e dos principais parâmetros encontrados. Pode-se perceber que todas as estratégias conseguem obter excelentes resultados. As metodologias convencionais obtêm um tempo de processamento bem menor mesmo com um número de avaliações superior. A justificativa para isso é que mesmo sendo um exemplo mais complexo em termos de variáveis e restrições, elas ainda são facilmente calculadas com seus valores exatos e o processo de construção dos modelos substitutos acabam sendo mais caros.

Tabela 7 – Dados do ponto ótimo no problema do Vaso de Pressão.

	Garg et al. (2016)	Otimização Convencional		SAO	
		PSO	DE	PSO	DE
x_1	0.778169	0.778175	0.778169	0.778174	0.778178
x_2	0.384649	0.384652	0.384649	0.384659	0.384655
x_3	40.3196	40.3198	40.3196	40.3199	40.3199
x_4	200.000	199.997	200.000	199.997	199.995
$f(x)$	5885.33	5885.36	5885.33	5885.36	5885.37
$g_1(x)$	0	-3.12372E-06	-6.83601E-08	-3.93941E-07	-2.34653E-06
$g_2(x)$	0	-3.13459E-06	-2.4528E-07	-1.84442E-05	-5.8741E-06
$g_3(x)$	-4.656E-10	-3.08809E-08	-1.1173E-08	-4.95099E-08	-1.62951E-06
Diferença (%)	-	0.00	0.00	0.00	0.00
N_{it}	-	194	179	25	22
N_{av}	-	9700	8950	48	45
WCT (s)	-	0.4	0.2	16	11

Fonte: Elaborado pelo autor.

Comparando os resultados obtidos com a Otimização por Nuvem de Partículas e a Evolução Diferencial na otimização convencional, percebe-se que a DE conseguiu obter o valor ótimo com menos iterações e com um tempo de processamento que é a metade do obtido com o PSO. Na otimização aproximada, percebe-se as estratégias não apresentaram diferenças significativas em termos de iterações e avaliações, mas a DE obteve um tempo de processamento menor.

6.2 Estruturas com Gradação Funcional

Antes de partir para a otimização de estruturas com gradação funcional, é importante validar o procedimento de análise que será empregado junto a ela. Neste trabalho, serão otimizadas placas graduadas funcionalmente no sentido da espessura em problemas de autovalor. Sendo assim, os resultados de algumas análises já realizadas na literatura serão comparados com os resultados obtidos com o programa FAST. Os valores das propriedades dos materiais utilizados nos exemplos a seguir são apresentados na Tabela 8.

Tabela 8 – Propriedades dos materiais.

Material	E (GPa)	ν	ρ (kg/m^3)
Al	70.00	0.3	2707
Al_2O_3	201.04	0.3	8166
SUS304	380.00	0.3	3800
Si_3N_4	348.43	0.3	2370

Fonte: Elaborado pelo autor.

O primeiro caso de verificação será realizado visando avaliar a carga de flambagem de placas de FGM com gradação controlada por uma lei de potência ao longo da espessura comparando com os resultados apresentados por Do *et al.* (2019). Os autores utilizam uma placa simplesmente apoiada que possui comprimento $a = 10$ m e a relação espessura (h) com o comprimento $h/a = 1/10$. Ademais, a estrutura é composta por Al/Al_2O_3 e que tem suas propriedades estimadas pelo modelo de Mori-Tanaka. Para alguns valores do índice N foram obtidos os resultados apresentados na Tabela 9 pela referência e pelo programa de análise utilizado neste trabalho. Vale destacar que a carga de flambagem é normalizada segundo a equação $\lambda_{norm} = N_{cr}a/D_m$, em que $D_m = E_m h^3 / (12(1 - \nu_m^2))$.

Tabela 9 – Resultados da validação do processo de análise para a Flambagem.

Fonte	Índice N		
	1	2	5
Do <i>et al.</i> (2019)	8.0806	6.8108	5.8431
FAST	8.1100	6.8393	5.6651
Erro (%)	0.36%	0.42%	3.05%

Fonte: Elaborado pelo autor.

Apesar da referência utilizar uma teoria de terceira ordem para o cisalhamento e o FAST utilizar uma teoria de primeira ordem, percebe-se que os resultados não apresentam diferenças significativas mesma para uma placa relativamente espessa.

O segundo caso de verificação também é apresentado em Do *et al.* (2019) e será realizado visando avaliar à vibração de placas de FGM com graduação variável ao longo da espessura. Para isso, foi utilizada uma placa quadrada simplesmente apoiada com $a = 0.50$ m e a relação com a espessura (h) é dada por $a/h = 10$. As propriedades são estimadas pelo modelo de Mori-Tanaka e a placa é composta por $SUS304/Si_3N_4$. Para alguns valores do índice N foram obtidos os resultados apresentados na Tabela 10 pela referência e pelo programa de análise utilizado neste trabalho. Vale destacar que os resultados foram normalizados segundo a equação $\omega_{norm} = \omega h \sqrt{\rho_c / G_c}$, em que $G_c = E_c / (2(1 + \nu_c))$.

Tabela 10 – Resultados da validação do processo de análise para a Vibração.

Fonte	Índice N			
	1	2	5	10
Do <i>et al.</i> (2019)	0.0542	0.0485	0.044	0.0419
FAST	0.0545	0.0487	0.0439	0.0416
Erro (%)	0.50%	0.42%	0.13%	0.61%

Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir dos resultados obtidos para os dois projetos avaliados podemos concluir que o procedimento de análise empregado está validado e pode ser utilizado na otimização de placas com gradação funcional.

6.2.1 Maximização da frequência fundamental de uma placa quadrada com duas variáveis

O primeiro exemplo de otimização de estruturas de MGF trata da maximização da frequência natural fundamental de uma placa quadrada simplesmente apoiada de nitreto de silício (Si_3N_4) e aço inoxidável (SUS304), com comprimento $a = 0.50$ m. Esse exemplo foi proposto por Correia *et al.* (2018) e apresenta as propriedades efetivas definidas por meio da Lei das Misturas. A Tabela 11 apresenta as propriedades dos materiais que são utilizados na estrutura. Uma malha de NURBS cúbica 16×16 é empregada na AIG.

Tabela 11 – Materiais utilizados e suas respectivas propriedades.

Material	E (GPa)	ν	ρ (kg/m ³)
SUS304	201.04	0.3262	8166
Si_3N_4	348.43	0.24	2370

Fonte: Elaborado pelo autor.

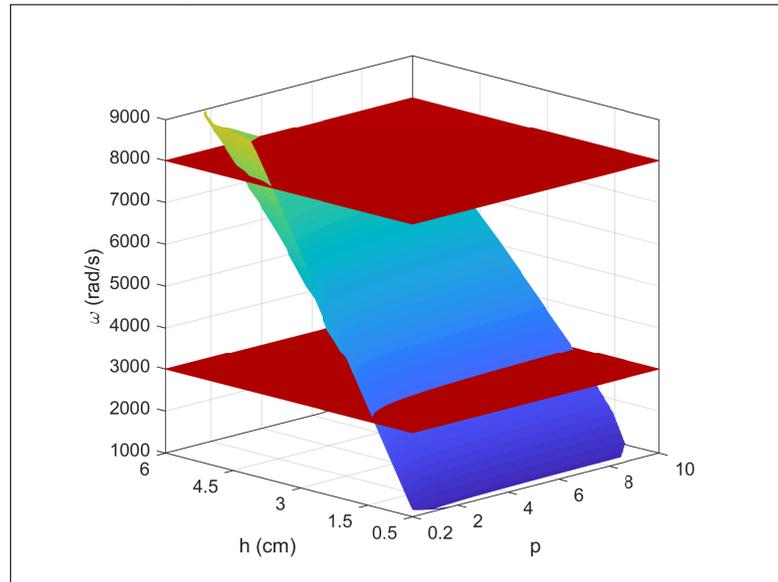
As variáveis de projeto são o índice N da Lei de Potência, definida no domínio $[0.2; 10]$, e a espessura da placa h , definido no domínio $[0.005; 0.06]$ m. Duas restrições são consideradas, definindo um limite superior e um limite inferior para a frequência fundamental no seguinte intervalo: $3000 \leq \omega \leq 8000$ rad/s. O limite inferior será uma restrição inativa, já que este problema trata da maximização de ω . O problema de otimização é definido como:

$$\begin{cases} \text{maximizar} & \omega(x) = (N, h) \\ \text{sujeito a} & g_1(x) = \frac{\omega(x)}{8000} - 1 \leq 0 \quad e \quad g_2(x) = 1 - \frac{\omega(x)}{3000} \leq 0 \end{cases} \quad (6.5)$$

A Figura 11 apresenta como $\omega(x)$ se comporta no espaço de projeto. A região viável

é apresentada no espaço entre os dois planos horizontais, que representam as duas restrições empregadas.

Figura 11 – Superfície de resposta do problema proposto por Correia *et al.* (2018).



Fonte: Elaborado pelo autor.

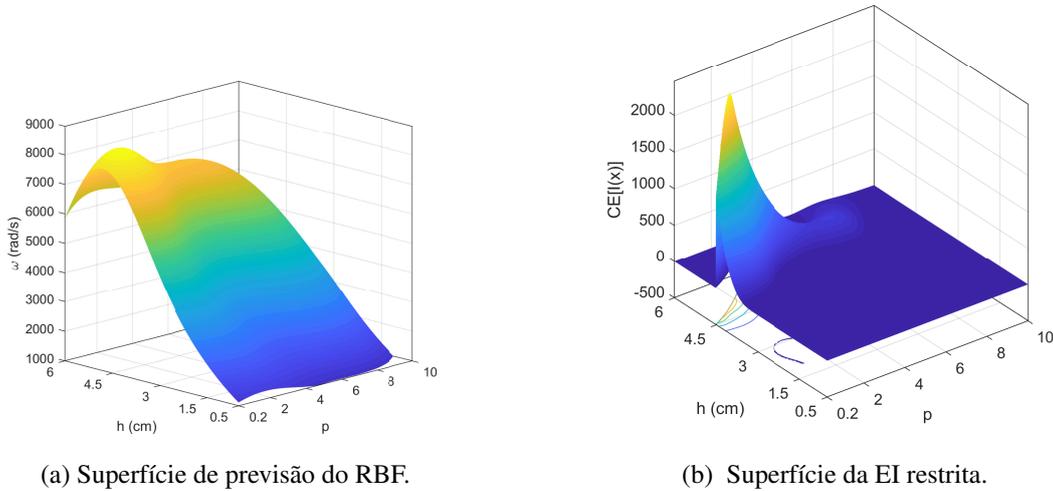
Pode-se perceber que o problema tem uma função de resposta suave e unimodal. Além disso, o problema tem vários projetos ótimos, todos colocados no plano onde $\omega(x) = 8000$ rad/s. Esta é a superfície que será maximizada no caso da otimização convencional.

A Figura 12 apresenta a superfície de previsão do RBF e da $E[I(x)]$ obtidas com 10 pontos amostrais. Neste problema, as restrições também são aproximadas por um modelo substituto. Assim, o EI restrito deve ser maximizado para escolher um novo ponto de amostragem. Na verdade, sua região ótima parece estar próxima do ótimo global mostrado na Figura 11. Em cada iteração de SAO, uma superfície diferente, semelhante à mostrada na Figura 13b, precisa ser maximizada. O PSO se mostrou capaz de funcionar bem na maximização dessa superfície.

Os resultados ótimos para esse problema, como apresentado em Correia *et al.* (2018), é que a máxima frequência natural fundamental é de 8000.00 rad/s e será o valor ótimo considerado nas comparações. Foram então realizadas 10 otimizações dessa função com 20 indivíduos e 50 gerações utilizando a Otimização por Nuvem de Partículas avaliando suas três estratégias de topologia e a Evolução Diferencial avaliando as suas três estratégias de combinação para cada uma das metodologias de tratamento de restrições apresentadas. Os resultados são apresentados na Tabela 12, incluindo alguns critérios de comparação entre as estratégias avaliadas.

No geral, todas as estratégias encontraram excelentes resultados, ou seja, o NRMSE

Figura 12 – Superfícies de respostas para algumas estratégias



Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 12 – Resultados das diferentes estratégias de penalidade na otimização convencional.

Estratégia de Otimização	Tipo de Penalidade	NRMSE (%)	$f(x)$	N_{it}	T_{suc}	WCT (s)
PSO/Square	Estática	0.00	8000.00	2264	100%	1644
	Adaptativa	0.00	8000.00	2421	100%	1720
PSO/Ring	Estática	0.00	8000.00	2385	100%	1721
	Adaptativa	0.00	8000.00	2420	100%	1810
PSO/Global	Estática	0.00	8000.00	2250	100%	1635
	Adaptativa	0.00	8000.00	2325	100%	1739
DE/Rand/1	Estática	0.00	8000.00	2475	100%	1806
	Adaptativa	0.01	8000.00	2095	100%	1590
DE/Current-to-best/1	Estática	0.00	8000.00	2320	100%	1690
	Adaptativa	0.01	8000.00	2315	100%	1691
DE/Best/1-with-jitter	Estática	0.04	8000.00	1615	100%	1119
	Adaptativa	0.02	8000.00	1620	100%	1122

Fonte: Elaborado pelo autor.

foi muito próximo de zero e a taxa de sucesso foi de 100%. Dentro da Otimização por Nuvem de Partículas, a *Square* e a *Global* obtiveram os melhores resultados em termos de eficiência, ou seja, apresentaram o número de iterações e o tempo de processamento menor que a *Ring*. Ademais, percebe-se que utilizando a penalidade adaptativa o número de iterações aumentou e o tempo de processamento foram maiores que usando a penalidade estática.

Quando comparamos a Otimização por Nuvem de Partículas e a Evolução Diferencial percebe-se que a última apresenta um tempo de processamento e o número de iterações inferior. Dentro da DE, a *Best/1-with-jitter* apresentou a melhor eficiência junto a um menor número de iterações que ficou em torno de 1/3 das outras estratégias. Ainda nessa estratégia, as diferenças

de NRMSE não foram significativas entre as penalidades adotadas e houve um leve acréscimo em relação às outras estratégias. A *Rand/l* e a *Current-to-best/l* apresentaram resultados semelhantes, sendo a *Rand/l* mais eficiente.

A penalidade adaptativa e a estática apresentaram resultados semelhantes dentro das estratégias avaliadas. Com relação custo computacional (WCT), a penalidade adaptativa apresentou maiores tempos de processamento que podem ser explicados pelo acréscimo do número de iterações. Como a penalidade adaptativa trata as restrições de forma automática, essa estratégia parece ser mais vantajosa, principalmente em situações como essa em que o tempo de processamento é bem elevado e conseguir um valor para k que contemple todas as restrições pode ser complicado.

Em seguida, foi então realizada a otimização da função utilizando as Funções de Base Radial com largura definida pelo método 5-FCV, aliado a estratégia de Otimização Sequencial Aproximada para diferentes tamanhos de amostra inicial e para as diversas estratégias de otimização da Melhoria Esperada. Nesse exemplo, optou-se por aproximar tanto as restrições como a função objetivo. Os resultados obtidos em 10 otimizações para cada uma das metodologias estão apresentados na Tabela 13.

De um modo geral, pode-se perceber que em pelo menos uma das otimizações o valor ótimo ficou bem próximo da solução ótima de referência. Com relação às diferenças entre a DE e a PSO ou até as próprias estratégias dentro de cada uma dessas, os resultados não apresentaram diferenças significativas na otimização da Melhoria Esperada.

Avaliando as diferentes estratégias adotadas para definir o tamanho da amostra inicial, percebe-se que apenas a ATH apresenta valores pouco maiores para o NRMSE. A maior diferença entre as estratégias está na taxa de sucesso, que tende a ter os melhores valores para ASG, ASM e JL. A principal diferença observada está no tempo de processamento que aumenta junto ao aumento da população inicial. Ademais, o número de pontos adicionais não apresenta grandes diferenças entre as estratégias.

Quando comparamos o desempenho da PSO com a DE, percebe-se que a primeira obteve resultados levemente melhores em termo do NRMSE e da taxa de sucesso. Em termos de custo computacional e do número médio de pontos adicionados, que no caso da SAO é igual ao número de iterações, não foram percebidas diferenças significativas entre elas. Apesar de ser um exemplo de estrutura com gradação funcional, esse exemplo é bem simples e comportado, como pode ser visto na Figura 11 e isso pode justificar as pequenas diferenças observadas entre

Tabela 13 – Resultados das diferentes estratégias de penalidade na otimização convencional.

Estratégia de Otimização da Melhoria Esperada	Tipo de Estratégia de Amostragem	Tamanho da Amostra Inicial	Número Médio de Pontos Adicionais	NRMSE (%)	T_{suc}	$f(x)$	WCT (s)
PSO/Square	ATH	4	12	1.25	30%	7999.56	18
	ASP	9	18	0.99	30%	7999.80	21
	ASM	21	36	0.04	90%	7999.91	69
	ASG	36	47	0.02	100%	8000.00	106
	JL	20	33	0.87	70%	7999.97	66
	XL	10	20	0.38	50%	7999.92	23
PSO/Ring	ATH	4	16	1.57	10%	7993.06	19
	ASP	9	18	0.59	40%	7999.71	22
	ASM	21	34	0.05	90%	8000.00	69
	ASG	36	35	0.05	100%	7999.69	97
	JL	20	36	0.06	90%	7999.90	60
	XL	10	20	0.66	40%	7998.76	24
PSO/Global	ATH	4	16	1.87	40%	7999.83	21
	ASP	9	18	0.51	80%	8000.00	28
	ASM	21	38	0.03	100%	8000.00	92
	ASG	36	33	0.31	80%	7999.95	142
	JL	20	33	0.11	80%	8000.00	70
	XL	10	20	0.43	50%	8000.00	16
DE/Rand/1	ATH	4	12	1.08	30%	7999.58	19
	ASP	9	18	0.36	60%	7996.90	26
	ASM	21	30	0.18	80%	7999.23	55
	ASG	36	41	0.08	80%	8000.00	106
	JL	20	34	0.10	80%	8000.00	60
	XL	10	20	0.31	20%	7999.34	29
DE/Current-to-best/1	ATH	4	12	1.06	10%	7997.11	19
	ASP	9	18	0.42	10%	8000.00	26
	ASM	21	35	0.22	70%	7998.72	68
	ASG	36	39	0.11	90%	7999.70	104
	JL	20	30	0.76	40%	7999.56	56
	XL	10	20	0.40	40%	7925.42	30
DE/Best/1-with-jitter	ATH	4	12	1.42	10%	7996.17	18
	ASP	9	18	0.96	20%	7995.04	24
	ASM	21	35	0.40	20%	7997.73	62
	ASG	36	33	0.46	30%	7999.98	87
	JL	20	31	0.53	50%	8000.00	54
	XL	10	20	0.69	30%	7999.07	27

Fonte: Elaborado pelo autor.

as metodologias avaliadas.

Para ter uma ideia do projeto ótimo obtido com a otimização convencional utilizando a PSO e a DE, e com a otimização aproximada utilizando a PSO e a DE na otimização da Melhoria Esperada, a Tabela 14 mostra os resultados das variáveis e dos principais parâmetros encontrados. Pode-se perceber que todas as estratégias conseguem obter excelentes resultados. As metodologias convencionais apresentam um tempo de processamento e um número de

avaliações da função real em torno de 50 vezes maior comparando com a SAO.

Tabela 14 – Resultados dos valores ótimos de Correia et al. (2018).

	Correia et al. (2018)	Otimização Convencional		SAO	
		PSO	DE	PSO	DE
N	3.800	3.130	4.175	4.205	2.751
h	59.50	58.05	59.96	60.00	57,13
$\omega(x)$	8000.00	8000.00	8000.00	8000.00	8000.00
$g_1(x)$	0	0	0	0	0
$g_2(x)$	-1,667	-1.667	-1.667	-1.667	-1.667
Diferença (%)	-	0.00	0.00	0.00	0.00
N_{it}	-	34	23	18	18
N_p	-	1700	1150	27	25
WCT (s)	-	1544	1119	28	27

Fonte: Elaborado pelo autor.

Comparando os resultados obtidos com a Otimização por Nuvem de Partículas e a Evolução Diferencial na otimização convencional, percebe-se que a DE conseguiu obter o valor ótimo com menos iterações e com um tempo de processamento que é em torno de 2/3 do obtido com a PSO. Na otimização aproximada, percebe-se as estratégias não apresentaram diferenças significativas em termos de iterações e avaliações, mas a DE obteve um tempo de processamento ligeiramente menor.

6.2.2 Maximização da carga de flambagem de uma placa quadrada com cinco variáveis

Esse exemplo foi inicialmente proposto por Do et al. (2019) e trata da maximização da carga de flambagem de uma placa quadrada Al/Al₂O₃ com a relação comprimento por espessura $a/h = 10$. Nesse caso, as propriedades efetivas são definidas pela regra de Moritanka. A Tabela 15 apresenta as propriedades dos materiais utilizados na estrutura. Uma malha NURBS cúbica 16x16 é empregada na AIG.

Tabela 15 – Materiais utilizados e suas respectivas propriedades.

Material	E (GPa)	ν	ρ (kg/m ³)
Al	70.00	0.3	2707
Al ₂ O ₃	380.43	0.3	3800

Fonte: Elaborado pelo autor.

A gradação do material através da espessura é definida por usando uma B-Spline com 9 pontos de controle. Como a gradação é simétrica no plano médio, existem 5 variáveis de projeto definidas no domínio [0; 1]. Ademais, uma restrição relacionada à porcentagem máxima

de cerâmica $V_{c,max} = 35\%$ é considerada. Nesse caso, como a restrição tem uma avaliação fácil e barata, não há necessidade de aproximar por um modelo substituto. Em vez disso, a restrição é avaliada com exatidão e, se um determinado projeto for inviável, sua Melhoria Esperada é definida como 0. Assim, o modelo substituto é usado apenas para a função objetivo.

A carga de flambagem é normalizada segundo $\lambda_{norm} = N_{cr}a/D_m$ em que $D_m = E_m h^3 / [12(1 - \nu_m^2)]$, onde E_m e ν_m se referem as propriedades do metal. Assim, o problema de otimização é definido como:

$$\begin{cases} \text{maximizar} & \lambda_{norm}(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a} & \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} V_c(\mathbf{x}) dz - 0.35 \leq 0 \end{cases} \quad (6.6)$$

Do *et al.* (2019) encontraram $\lambda_{opt} = 11.185$ utilizando uma teoria de placas de alta ordem. No presente trabalho, o valor ótimo encontrado foi ligeiramente inferior, uma vez que o presente trabalho emprega uma Teoria de Deformação por Cisalhamento de Primeira Ordem (FSDT ou Teoria de Reissner-Mindlin). Ribeiro *et al.* (2020a) otimizam esse mesmo exemplo também usando a FSDT e encontram $\lambda_{opt} = 11.638$, valor que será utilizado como referência.

Foram então realizadas 10 otimizações dessa função com 50 indivíduos e 100 gerações utilizando a Otimização por Nuvem de Partículas avaliando suas três estratégias de topologia e a Evolução Diferencial avaliando as suas três estratégias de combinação para cada uma das metodologias de tratamento de restrições apresentadas. Os resultados são apresentados na Tabela 16, incluindo alguns critérios de comparação entre as estratégias avaliadas.

Tabela 16 – Resultados das diferentes estratégias de penalidade na otimização convencional.

Estratégia de Otimização	Tipo de Penalidade	NRMSE (%)	$f(x)$	N_{it}	T_{suc}	WCT (s)
PSO/Square	Estática	0.00	11.634	4621	100%	3231
	Adaptativa	0.00	11.634	4062	100%	2857
PSO/Ring	Estática	0.03	11.634	4575	100%	3274
	Adaptativa	0.07	11.634	3835	100%	2831
PSO/Global	Estática	0.00	11.634	3755	100%	2741
	Adaptativa	0.00	11.634	3540	100%	2592
DE/Rand/1	Estática	0.01	11.634	5050	100%	3606
	Adaptativa	0.01	11.634	5050	100%	3670
DE/Current-to-best/1	Estática	0.00	11.634	4905	100%	3629
	Adaptativa	0.00	11.634	4805	100%	3493
DE/Best/1-with-jitter	Estática	0.01	11.634	3210	100%	2347
	Adaptativa	0.03	11.634	2990	100%	2179

Fonte: Elaborado pelo autor.

No geral, todas as estratégias encontraram excelentes resultados, ou seja, o NRMSE foi muito próximo de zero e a taxa de sucesso foi de 100% para todas as estratégias. Dentro da Otimização por Nuvem de Partículas, a topologia *Ring* apresentou um NRMSE levemente maior que zero. A *Square* e a *Global* obtiveram os melhores resultados em termos de precisão, sendo a *Global* superior em termos de eficiência e robustez, uma vez que obteve um menor número de iterações e um tempo de processamento menor. Ademais, percebe-se que utilizando a penalidade adaptativa o número de iterações e o tempo de processamento foram menores que usando a penalidade estática.

Quando comparamos a Otimização por Nuvem de Partículas e a Evolução Diferencial percebe-se que a primeira apresenta um tempo de processamento e o número de iterações inferior para a maioria dos casos. Dentro da DE, a *Best/1-with-jitter* apresentou a melhor eficiência junto a um menor número de iterações que ficou em torno de 1/3 das outras estratégias. Ainda nessa estratégia, as diferenças de NRMSE não foram significativas entre as penalidades adotadas e teve um leve acréscimo e relação as outras estratégias. A *Rand/1* e a *Current-to-best/1* apresentaram resultados semelhantes.

De um modo geral, as penalidades apresentaram resultados semelhantes em termos de precisão dentro das estratégias avaliadas. Com relação custo computacional (WCT), a penalidade adaptativa apresentou tempos de processamento menores em cinco das seis estratégias testadas, o que indica que essa é uma estratégia promissora.

Em seguida, foi então realizada a otimização da função utilizando as Funções de Base Radial com largura definida pelo método 5-FCV, aliado a estratégia de Otimização Sequencial Aproximada para diferentes tamanhos de amostra inicial e para as diversas estratégias de otimização da Melhoria Esperada. Nesse exemplo, optou-se por aproximar tanto as restrições como a função objetivo. Os resultados obtidos em 10 otimizações para cada uma das metodologias são apresentados na Tabela 17.

De um modo geral, pode-se perceber que para a grande maioria dos casos a taxa de sucesso foi de 100%. Com relação as diferenças entre a DE e a PSO ou até as próprias estratégias dentro de cada uma dessas, os resultados não apresentaram diferenças significativas na otimização da Melhoria Esperada.

Avaliando as diferentes estratégias adotadas para definir o tamanho da amostra inicial, percebe-se que a ATH, mesmo com pouco pontos iniciais, já consegue apresentar excelentes valores. A maior diferença entre as estratégias está no tempo de processamento, que tende a

Tabela 17 – Resultados dos valores na otimização aproximada.

Estratégia de Otimização da Melhoria Esperada	Tipo de Estratégia de Amostragem	Tamanho da Amostra Inicial	Número Médio de Pontos Adicionais	NRMSE (%)	T_{suc}	$f(x)$	WCT (s)
PSO/Square	ATH	10	20	0.00	100%	11.634	37
	ASP	32	22	0.00	100%	11.634	66
	ASM	53	21	0.00	100%	11.634	92
	ASG	105	26	0.00	100%	11.634	177
	JL	50	22	0.00	100%	11.634	88
	XL	25	23	0.02	100%	11.634	59
PSO/Ring	ATH	10	20	0.02	100%	11.634	38
	ASP	32	21	0.05	90%	11.634	65
	ASM	53	23	0.04	90%	11.634	95
	ASG	105	24	0.01	100%	11.634	176
	JL	50	23	0.04	100%	11.634	91
	XL	25	23	0.00	100%	11.634	60
PSO/Global	ATH	10	20	0.00	100%	11.634	39
	ASP	32	21	0.00	100%	11.634	65
	ASM	53	21	0.00	100%	11.634	92
	ASG	105	26	0.00	100%	11.634	174
	JL	50	22	0.00	100%	11.634	89
	XL	25	22	0.00	100%	11.634	58
DE/Rand/1	ATH	10	20	0.23	100%	11.634	38
	ASP	32	23	0.00	100%	11.634	67
	ASM	53	21	0.03	100%	11.634	92
	ASG	105	28	1.41	90%	11.634	176
	JL	50	22	0.00	100%	11.634	90
	XL	25	22	0.00	100%	11.634	58
DE/Current-to-best/1	ATH	10	20	0.00	100%	11.634	37
	ASP	32	22	0.00	100%	11.634	65
	ASM	53	23	0.12	100%	11.634	92
	ASG	105	26	0.00	100%	11.634	176
	JL	50	23	0.00	100%	11.634	90
	XL	25	24	0.00	100%	11.634	58
DE/Best/1-with-jitter	ATH	10	20	0.00	100%	11.634	36
	ASP	32	23	0.03	90%	11.634	64
	ASM	53	22	0.36	90%	11.634	90
	ASG	105	25	0.29	90%	11.634	173
	JL	50	23	0.00	100%	11.634	89
	XL	25	24	0.06	90%	11.634	60

Fonte: Elaborado pelo autor.

ter os maiores valores para as maiores populações iniciais, como ASG, ASM e JL. Ademais, o número de pontos adicionais tende a ser maior para as populações maiores.

Quando comparamos o desempenho da PSO com a DE, percebe-se que a primeira obteve resultados levemente melhores em termo do NRMSE e da taxa de sucesso. Em termos de custo computacional e do número médio de pontos adicionados, que no caso da SAO é igual ao número de iterações, a DE tente a ser levemente melhor. Dentro do PSO, as topologias *Square* e a *Global* apresentaram melhores resultados em termos de precisão, e dentro da DE, as melhores

foram a *Best/1-with-jitter* na precisão e a *Current-to-best/1* na eficiência.

A Tabela 18 mostra os resultados das variáveis e dos principais parâmetros encontrados para a otimização convencional e aproximada. Foram apresentados os valores ótimos das duas referências para o problema. Comparando os valores obtidos com os encontrados por Ribeiro *et al.* (2020a), pode-se perceber que todas as estratégias conseguem obter excelentes resultados. As metodologias convencionais apresentam um tempo de processamento e um número de avaliações da função real em torno de 50 vezes maior comparando com a SAO.

Tabela 18 – Resultados dos valores ótimos para Do *et al.* (2019) e Ribeiro *et al.* (2020a).

	Do <i>et al.</i> (2019)	Ribeiro <i>et al.</i> (2020a)		Otimização Convencional		SAO	
		HFM	SAO	PSO	DE	PSO	DE
x_1	1	1	1	1	1	1	1
x_2	1	1	1	1	1	1	1
x_3	0.4003	0.4003	0.4000	0.4000	0,4000	0.4000	0.4000
x_4	0	0	0	0	0	0	0
x_5	0	0	0	0	0	0	0
$f(x)$	11.185	11.634	11.634	11.634	11,634	11.634	11.634
$g_1(x)$	-	-	-	0	0	0	0
Diferença (%)	-	-	0	0	0	0	0
N_{it}	-	75	28	60	51	20	20
N_{av}	-	3750	53	3000	2550	30	30
WCT (s)	-	1088	26	2476	2091	37	37

Fonte: Elaborado pelo autor.

Comparando os resultados obtidos com a Otimização por Nuvem de Partículas e a Evolução Diferencial na otimização convencional, percebe-se que a DE conseguiu obter o valor ótimo com menos iterações e com um tempo de processamento que é em torno de 1/6 do obtido com a PSO. Na otimização aproximada, percebe-se as estratégias não apresentaram diferenças significativas em nenhum dos parâmetros considerados.

6.2.3 Maximização da frequência fundamental de uma placa quadrada com sete variáveis

Esse exemplo também foi inicialmente proposto por Do *et al.* (2019) e trata da maximização da frequência natural de uma placa quadrada, simplesmente apoiada, de SUS304/ Si_3N_4 e relação comprimento (a) por espessura (h) $a/h = 10$. Nesse exemplo, as propriedades efetivas são definidas pelo modelo de Mori-Tanaka. A Tabela 19 apresenta as propriedades dos materiais utilizados na estrutura. Na AIG foi empregada uma malha NURBS cúbica 16x16.

A gradação do material através da espessura é definida por usando uma B-Spline com 13 pontos de controle. Como a gradação é simétrica no plano médio, existem 7 variáveis

Tabela 19 – Materiais utilizados e suas respectivas propriedades.

Material	E (GPa)	ν	ρ (kg/m ³)
SUS304	201.04	0.3	8166
Si ₃ N ₄	348.43	0.3	2370

Fonte: Elaborado pelo autor.

de projeto definidas no domínio [0; 1]. Ademais, uma restrição relacionada a porcentagem máxima de cerâmica $V_{c,max} = 50\%$ é considerada. Semelhante ao que foi feito no caso passado, essa restrição não será aproximada. Assim, apenas a função objetivo é aproximada pelo modelo substituto.

A carga de flambagem é normalizada segundo $\omega_{norm} = \sqrt{(\rho_c/G_c)}$ em que $G_c = E_c/[2(1 - \nu_c)]$, onde E_c e ν_c se referem as propriedades da cerâmica. Assim, o problema de otimização é definido como:

$$\begin{cases} \text{maximizar} & \omega_{norm}(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a} & \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} V_c(\mathbf{x}) dz - 0.50 \leq 0 \end{cases} \quad (6.7)$$

Do *et al.* (2019) encontraram $\omega_{opt} = 0.0600$. Foram então realizadas 10 otimizações dessa função com 50 indivíduos e 125 gerações utilizando a Otimização por Nuvem de Partículas avaliando suas três estratégias de topologia e a Evolução Diferencial avaliando as suas três estratégias de combinação para cada uma das metodologias de tratamento de restrições apresentadas. Os resultados são apresentados na Tabela 20, incluindo alguns critérios de comparação entre as estratégias avaliadas.

Tabela 20 – Resultados das diferentes estratégias de penalidade na otimização convencional.

Estratégia de Otimização	Tipo de Penalidade	NRMSE (%)	$f(x)$	N_{it}	T_{suc}	WCT (s)
PSO/Square	Estática	0.02	0.0601	4835	100%	3381
	Adaptativa	0.02	0.0601	4875	100%	3429
PSO/Ring	Estática	0.02	0.0601	5715	100%	4090
	Adaptativa	0.12	0.0601	5410	90%	3994
PSO/Global	Estática	0.02	0.0601	4405	100%	3215
	Adaptativa	0.02	0.0601	4305	100%	3152
DE/Rand/1	Estática	0.75	0.0601	5815	70%	4153
	Adaptativa	0.80	0.0601	5815	80%	4226
DE/Current-to-best/1	Estática	0.02	0.0601	6175	100%	4569
	Adaptativa	0.02	0.0601	5975	100%	4344
DE/Best/1-with-jitter	Estática	0.02	0.0601	4200	100%	3071
	Adaptativa	0.02	0.0601	4130	100%	3010

Fonte: Elaborado pelo autor.

No geral, todas as estratégias encontraram excelentes resultados, ou seja, o NRMSE

foi muito próximo de zero e a taxa de sucesso foi próxima de 100%. Dentro da Otimização por Nuvem de Partículas, todas as estratégias apresentaram ótimos resultados em termos de precisão e a *Global* obteve os melhores resultados em termos de eficiência, ou seja, apresentou o número de iterações e o tempo de processamento menor. Ademais, percebe-se que utilizando a penalidade adaptativa o número de iterações aumentou e o tempo de processamento foram maiores que usando a penalidade estática para as topologias *Ring* e *Global*. No caso da *Square*, os resultados apresentados pela penalidade estática foram melhores.

Quando comparamos a Otimização por Nuvem de Partículas e a Evolução Diferencial percebe-se que a primeira apresentou tempo de processamento e o número de iterações inferior na maioria dos casos. A *Best/1-with-jitter* apresentou a melhor eficiência junto a um menor número de iterações entre todas as estratégias consideradas. Ainda nessa estratégia, as diferenças de NRMSE não foram significativas entre as penalidades adotadas e teve uma leve melhoria quando utilizou a penalidade adaptativa. A *Current-to-best/1* também apresentou bons resultados, sendo que o elevado número de iterações acabou elevando o tempo de processamento para esse exemplo. A topologia *Rand/1* também teve essa dificuldade, somado a um aumento do NRMSE e de uma redução na taxa de sucesso.

A penalidade adaptativa e a estática apresentaram resultados semelhantes dentro das estratégias avaliadas. Com relação custo computacional (WCT), a penalidade adaptativa apresentou tempos de processamento menores em quatro das seis estratégias testadas, o que indica que essa é uma estratégia promissora. Como a penalidade adaptativa trata as restrições de forma automática sem que o projetista venha a testar valores de penalidade até determinar um valor adequado, essa estratégia parece ser mais vantajosa, principalmente em situações como essa em que o problema é bem complexo e demanda um elevado tempo de processamento.

Em seguida, foi então realizada a otimização da função utilizando as Funções de Base Radial com largura definida pelo método 5-FCV, aliado a estratégia de Otimização Sequencial Aproximada para diferentes tamanhos de amostra inicial e para as diversas estratégias de otimização da Melhoria Esperada. Nesse exemplo, optou-se por aproximar tanto as restrições como a função objetivo. Os resultados obtidos em 10 otimizações para cada uma das metodologias estão apresentados na Tabela 21.

De um modo geral, pode-se perceber que em pelo menos uma das otimizações o valor ótimo ficou bem próximo da solução ótima de referência. Com relação as diferenças entre a DE e a PSO ou até as próprias estratégias dentro de cada uma dessas, os resultados não

Tabela 21 – Resultados das diferentes estratégias de otimização da Melhoria Esperada na otimização aproximada.

Estratégia de Otimização da Melhoria Esperada	Tipo de Estratégia de Amostragem	Tamanho da Amostra Inicial	Número Médio de Pontos Adicionais	NRMSE (%)	T_{suc}	$f(x)$	WCT (s)
PSO/Square	ATH	14	22	0.32	90%	0.0601	30
	ASP	54	24	0.02	100%	0.0601	63
	ASM	90	22	0.03	80%	0.0601	96
	ASG	180	28	0.96	10%	0.0601	249
	JL	70	21	0.02	100%	0.0601	71
	XL	35	28	0.12	90%	0.0601	52
PSO/Ring	ATH	14	23	0.60	80%	0.0601	30
	ASP	54	25	0.02	100%	0.0601	64
	ASM	90	23	0.02	100%	0.0601	97
	ASG	180	30	0.80	10%	0.0601	256
	JL	70	23	0.03	100%	0.0601	75
	XL	35	26	0.02	100%	0.0601	54
PSO/Global	ATH	14	24	0.52	60%	0.0601	30
	ASP	54	25	0.02	100%	0.0601	62
	ASM	90	24	0.15	90%	0.0601	97
	ASG	180	30	1.02	20%	0.0601	266
	JL	70	22	0.02	100%	0.0601	73
	XL	35	28	0.39	70%	0.0601	52
DE/Rand/1	ATH	14	21	0.49	60%	0.0601	27
	ASP	54	23	0.02	100%	0.0601	61
	ASM	90	21	0.17	90%	0.0601	92
	ASG	180	27	1.76	10%	0.0601	236
	JL	70	21	0.51	80%	0.0601	71
	XL	35	24	0.15	90%	0.0601	46
DE/Current-to-best/1	ATH	14	24	0.11	90%	0.0601	30
	ASP	54	23	0.02	100%	0.0601	59
	ASM	90	22	0.62	70%	0.0601	92
	ASG	180	23	0.94	10%	0.0601	223
	JL	70	21	0.02	100%	0.0601	71
	XL	35	25	0.14	90%	0.0601	46
DE/Best/1-with-jitter	ATH	14	23	0.12	90%	0.0601	28
	ASP	54	23	0.02	100%	0.0601	59
	ASM	90	23	0.04	1000%	0.0601	91
	ASG	180	25	1.08	10%	0.0601	223
	JL	70	21	0.02	100%	0.0601	70
	XL	35	23	0.02	100%	0.0601	44

Fonte: Elaborado pelo autor.

apresentaram diferenças significativas na otimização da Melhoria Esperada.

Avaliando as diferentes estratégias adotadas para definir o tamanho da amostra inicial, percebe-se que mesmo esse problema sendo mais complexo e com um elevado número de variáveis, a ATH conseguiu obter bons resultados com NRMSE baixo e taxa de sucesso elevada. Aumentando a amostra inicial e chegando nas estratégias XL e ASP, percebe-se que o NRMSE e a taxa de sucesso apresentam melhorias e o tempo de processamento aumenta junto com o

aumento da população inicial. A JL e a ASM apresentam os melhores resultados em termos de precisão, sendo que o tempo de processamento continua crescendo. No caso da estratégia ASG, perde-se bastante em termos de precisão, eficiência e robustez.

Quando comparamos o desempenho da PSO com a DE, percebe-se que a segunda obteve resultados levemente melhores em termo do NRMSE e da taxa de sucesso. Em termos de custo computacional e do número médio de pontos adicionados, que no caso da SAO é igual ao número de iterações, não foram percebidas diferenças significativas entre elas. De um modo geral, a estratégia *Best/1-with-jitter* na otimização da melhoria esperada apresentou os melhores resultados.

Para ter uma ideia do projeto ótimo obtido com a otimização convencional utilizando a PSO e a DE, e com a otimização aproximada utilizando a PSO e a DE na otimização da Melhoria Esperada, a Tabela 22 mostra os resultados das variáveis e dos principais parâmetros encontrados. Pode-se perceber que todas as estratégias conseguem obter excelentes resultados. As metodologias convencionais apresentam um tempo de processamento e um número de avaliações da função real em torno de 100 vezes maior comparando com a SAO.

Tabela 22 – Resultados dos valores ótimos para Do *et al.* (2019) e Ribeiro *et al.* (2020a).

	Do <i>et al.</i> (2019)	Ribeiro <i>et al.</i> (2020a)		Otimização Convencional		SAO	
		HFM	SAO	PSO	DE	PSO	DE
x_1	1	1	1	1	1	1	1
x_2	1	1	1	1	1	1	1
x_3	1	1	1	1	1	1	1
x_4	1	0.9999	0.9998	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998
x_5	0.0070	0	0	0	0	0	0
x_6	0	0	0	0	0	0	0
x_7	0	0	0	0	0	0	0
$f(x)$	0.0600	0.0601	0.0601	0.0601	0.0601	0.0601	0.0601
$g_1(x)$	-	-	-	0	0	0	0
Diferença (%)	-	-	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
N_{it}	-	83	49	72	69	22	21
N_{av}	-	4150	83	3600	3450	36	35
WCT (s)	-	1238	71	3152	3010	30	27

Fonte: Elaborado pelo autor.

Comparando os resultados obtidos com a Otimização por Nuvem de Partículas e a Evolução Diferencial na otimização convencional, percebe-se que a DE conseguiu obter o valor ótimo com o número de iterações e tempo de processamento levemente menor do que foi obtido com a PSO. Na otimização aproximada, percebe-se que as estratégias obtiveram resultados ainda mais próximos em termos de iterações e avaliações, mas a DE obteve um tempo

de processamento ligeiramente menor.

7 CONCLUSÃO

O presente trabalho abordou duas diretrizes principais no processo de otimização de estruturas com Gradação Funcional, com a aplicação do processo convencional com algoritmos heurísticos e da abordagem com modelos substitutos aliados à otimização sequencial aproximada.

Inicialmente, o trabalho apresenta o material estudado e foca na discussão de dois parâmetros importantes que estão envolvidos na determinação e estudo de uma estrutura com gradação funcional. O primeiro é a forma como a gradação do material é realizada e a forma como as propriedades dos materiais devem ser consideradas. Os problemas de FGM avaliados variaram a fração de volume por meio da *Power Law* e por meio de B-Splines. Já as propriedades foram consideradas de acordo com a Lei das Misturas e com o Modelo de Mori-Tanaka.

Por se tratar de variáveis contínuas, foram comparadas duas estratégias que se destacam nesse tipo de otimização que é a Otimização por Nuvem de Partículas e a Evolução Diferencial. Visando avaliar diferentes estratégias dentro dessas, foram estudadas diferentes topologias dentro do PSO e diferentes metodologias de mutação dentro da DE. Ademais, como os projetos de engenharia corriqueiramente passam por limitações, foram avaliadas as Penalidades Estática e Adaptativa para o tratamento das restrições.

Dentre os diversos modelos substitutos, as Funções de Base Radial foram escolhidas pelos resultados promissores observados em outras aplicações. Quanto a abordagem SAO, foi adotada a Melhoria Esperada para a inserção de novos pontos, por também ser uma estratégia bem consistente. O tamanho da amostra inicial utilizada na construção do modelo substituto é um parâmetro de extrema importância e diferentes metodologias já adotadas foram avaliadas, como: as propostas de Amouzgar e Strömberg (2016), Jones *et al.* (1998b) e Loeppky *et al.* (2009), Xu *et al.* (2014)) e Liu *et al.* (2015) e Ath *et al.* (2019).

Inicialmente, as estratégias foram testadas em funções matemáticas, conhecidas como benchmarks, e depois em problemas de estruturas com gradação funcional. As estratégias e os problemas foram implementados e otimizados no software BIOS, desenvolvido pelo LMCV. No caso da otimização de placas de FGM, considerando a maximização da frequência natural e da carga de flambagem, o procedimento de análise estrutural foi realizado no programa FAST, também desenvolvido pelo LMCV.

Os resultados obtidos com as otimizações convencionais tanto nas funções testes como nos problemas de FGM foram excelentes. De um modo geral, a DE se mostrou mais eficiente, em especial a estratégia *Best/1-with-jitter*, seguida pela *Current-to-best/1* e pela *Rand/1*.

No caso da PSO as topologias *Square* e *Global* obtiveram os melhores resultados, sendo a última mais eficiente na maioria dos casos.

Quanto ao tratamento das restrições, as duas estratégias adotadas também obtiveram excelentes resultados. A penalidade adaptativa conseguiu resultados semelhantes, e em alguns casos até melhor que a penalidade estática. Como a penalidade adaptativa trata as restrições de forma automática sem que o projetista venha a testar valores de penalidade até determinar um valor adequado, essa estratégia parece ser mais vantajosa, principalmente em problemas complexos.

Ademais, o presente trabalho apresentou um enfoque na aplicação das Funções de Base Radial aliado a uma estratégia de Otimização Sequencial que obteve resultados excelentes na otimização de placas com gradação funcional, apresentando uma maior eficiência em relação à otimização convencional. Por fim, o presente trabalho comparou diferentes abordagens da determinação do tamanho da amostra inicial em modelos substitutos, obtendo bons resultados.

Através da análise dos resultados, entende-se que as metodologias XL e ASP apresentaram excelentes resultados para o problema com maior dimensionalidade ($m > 4$). Percebe-se que o aumento da população inicial apresenta melhoras em termos de precisão e uma piora em termos de eficiência. Como consequência disso, as estratégias ASM e JL já não conseguem melhorar significativamente a precisão e sua diferença mais significativa é o aumento do custo computacional. No caso da ASG, como a sua população inicial já é duas vezes maior que a ASM, pode-se perceber que houve um perda considerável de precisão e eficiência.

Com relação aos problemas com menor dimensionalidade, os resultados apontam que as melhores metodologias foram a JL, ASM e ASG. A JL é foi melhor que as outras em termos de eficiência. Para esses problemas, a ASG acabou obtendo os melhores resultados, enquanto que as ATH, ASP e a XL apresentaram os piores. Dentre essas últimas, a XL acaba sendo mais precisa e não perde tanto em termos de eficiência.

Portanto, o presente trabalho indica que metodologias com populações menores, como ATH, ASP e XL, tem seu desempenho melhor em problemas com elevada dimensionalidade e metodologias com população levemente maior, como JL, ASM e ASG, tendem a se comportar melhor em problemas com baixa dimensionalidade. Ademais, a otimização por meio de uma metodologia aproximada em problemas mais simples como as funções matemáticas não se mostrou tão vantajosa quando se comparada as otimizações convencionais. No caso dos problemas de estruturas de FGM, as estratégias aproximadas se mostraram extremamente

precisas, robustas e eficientes.

As seguintes sugestões podem ser exploradas em trabalhos futuros:

- (a) Métodos alternativos para lidar com problemas restritos no SAO;
- (b) Utilização de técnicas SAO (baseadas em RBF ou Kriging) em problemas multiobjetivo;
- (c) Consideração de cargas termo-mecânicas para otimização de estruturas com gradação funcional.

REFERÊNCIAS

- ACAR, E. Simultaneous optimization of shape parameters and weight factors in ensemble of radial basis functions. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 49, n. 6, p. 969–978, 2013.
- AMOUZGAR, K.; STRÖMBERG, N. Radial basis functions as surrogate models with a priori bias in comparison with a posteriori bias. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 55, n. 4, p. 1453–1469, 2016.
- ARORA, J. S. **Introduction to optimum design**. 3. ed. [S.l.]: Academic Press/Elsevier, 2017.
- ASHJARI, M.; KHOSHRAVAN, M. Mass optimization of functionally graded plate for mechanical loading in the presence of deflection and stress constraints. **Composite Structures**, v. 110, p. 118–132, 2014.
- ATH, G. D.; EVERSON, R. M.; RAHAT, A. A. M.; FIELDSEND, J. E. **Greed is Good: Exploration and Exploitation Trade-offs in Bayesian Optimisation**. 2019. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1911.12809>>.
- BALREIRA, D. S. **Otimização sequencial aproximada de estruturas laminadas de material compósito**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, 2018.
- BARROSO, E. S. **Análise e otimização de estruturas laminadas utilizando a formulação isogeométrica**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, 2015.
- BARROSO, E. S.; PARENTE, E.; MELO, A. M. C. D. A hybrid pso-ga algorithm for optimization of laminated composites. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 55, n. 6, p. 2111–2130, 2016.
- BEACHKOFOSKI, B.; GRANDHI, R. Improved distributed hypercube sampling. **43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference**, 2002.
- BRATTON, D.; KENNEDY, J. Defining a standard for particle swarm optimization. **2007 IEEE Swarm Intelligence Symposium**, 2007.
- CHEN, Y. T.; XIANG, S.; ZHAO, W. P. Generalized multiquadrics with optimal shape parameter and exponent for deflection and stress of functionally graded plates. **Applied Mechanics and Materials**, v. 709, p. 121–124, 2014.
- CHENG, Y.-C.; JIANG, C.-P.; LIN, D.-H. Finite element based optimization design for a one-piece zirconia ceramic dental implant under dynamic loading and fatigue life validation. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 59, n. 3, p. 835–849, 2018.
- CHO, I.; LEE, Y.; RYU, D.; CHOI, D.-H. Comparison study of sampling methods for computer experiments using various performance measures. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 55, n. 1, p. 221–235, 2016.
- CORREIA, V. M. F.; MADEIRA, J. A.; ARAÚJO, A. L.; SOARES, C. M. M. Multiobjective optimization of ceramic-metal functionally graded plates using a higher order model. **Composite Structures**, v. 183, p. 146–160, 2018.

- CORREIA, V. M. F.; MADEIRA, J. A.; ARAÚJO, A. L.; SOARES, C. M. M. Multiobjective optimization of functionally graded material plates with thermo-mechanical loading. **Composite Structures**, v. 207, p. 845–857, 2019.
- DIAZ-MANRIQUEZ, A.; TOSCANO-PULIDO, G.; GOMEZ-FLORES, W. On the selection of surrogate models in evolutionary optimization algorithms. **2011 IEEE Congress of Evolutionary Computation (CEC)**, 2011.
- DO, D.; LEE, D.; LEE, J. Material optimization of functionally graded plates using deep neural network and modified symbiotic organisms search for eigenvalue problems. **Composites Part B: Engineering**, v. 159, p. 300–326, 2019.
- DURANTIN, C.; ROUXEL, J.; DÉSIDÉRI, J.-A.; GLIÈRE, A. Multifidelity surrogate modeling based on radial basis functions. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 56, n. 5, p. 1061–1075, 2017.
- FORRESTER, A. I. J.; SOBESTER, A.; KEANE, A. J. **Engineering design via surrogate modelling: a practical guide**. [S.l.]: Wiley, 2008.
- GAN, N.; GU, J. Hybrid meta-model-based design space exploration method for expensive problems. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 59, n. 3, p. 907–917, 2018.
- GARG, H. A hybrid pso-ga algorithm for constrained optimization problems. **Applied Mathematics and Computation**, v. 274, p. 292–305, 2016.
- GOEL, T.; HAFTKA, R. T.; SHYY, W.; QUEIPO, N. V. Ensemble of surrogates. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 33, n. 3, p. 199–216, 2006.
- HARDY, R. L. Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces. **Journal of Geophysical Research**, v. 76, n. 8, p. 1905–1915, 1971.
- HAYKIN. **Neural networks for radar signal processing**. [S.l.]: John Wiley amp; Sons, 2012.
- HAYKIN, S. **Neural Networks: A Comprehensive Foundation**. [S.l.]: Macmillan Publishing, 1994.
- IWAN, M.; AKMELIAWATI, R.; FAISAL, T.; AL-ASSADI, H. M. Performance comparison of differential evolution and particle swarm optimization in constrained optimization. **Procedia Engineering**, v. 41, p. 1323–1328, 2012.
- JHA, D.; KANT, T.; SINGH, R. A critical review of recent research on functionally graded plates. **Composite Structures**, v. 96, p. 833–849, 2013.
- JIN, R.; CHEN, W.; SIMPSON, T. W. Comparative studies of metamodelling techniques under multiple modelling criteria. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 23, n. 1, p. 1–13, 2001. ISSN 1615147X.
- JONES, D. R.; SCHONLAU, M.; WELCH, W. J. **Journal of Global Optimization**, v. 13, n. 4, p. 455–492, 1998.
- JONES, D. R.; SCHONLAU, M.; WELCH, W. J. Efficient global optimization of expensive black-box functions. **Journal of Global Optimization**, p. 455–492, 1998.
- JONES, R. M. **Mechanics of composite materials**. Jones. [S.l.]: McGraw-Hill, 1998.

- KENNEDY, J.; EBERHART, R. **Particle swarm optimization**. [S.l.: s.n.], 1995. v. 4.
- KIM, B. S.; LEE, Y. B.; CHOI, D. H. Comparison study on the accuracy of metamodeling technique for non-convex functions. **Journal of Mechanical Science and Technology**, v. 23, n. 4, p. 1175–1181, 2009. ISSN 1738494X.
- KITAYAMA, S.; ARAKAWA, M.; YAMAZAKI, K. Sequential approximate optimization using radial basis function network for engineering optimization. **Optimization and Engineering**, v. 12, n. 4, p. 535–557, 2010.
- KITAYAMA, S.; HUANG, S.; YAMAZAKI, K. Optimization of variable blank holder force trajectory for springback reduction via sequential approximate optimization with radial basis function network. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 47, n. 2, p. 289–300, 2012.
- KITAYAMA, S.; SRIRAT, J.; ARAKAWA, M.; YAMAZAKI, K. Sequential approximate multi-objective optimization using radial basis function network. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 48, n. 3, p. 501–515, 2013.
- KITAYAMA, S.; YAMAZAKI, K. Simple estimate of the width in gaussian kernel with adaptive scaling technique. **Applied Soft Computing**, v. 11, n. 8, p. 4726–4737, 2011.
- KLEIJNEN, J. P. C.; SANCHEZ, S. M.; LUCAS, T. W.; CIOPPA, T. M. State-of-the-art review: A user's guide to the brave new world of designing simulation experiments. **INFORMS Journal on Computing**, v. 17, n. 3, p. 263–289, 2005.
- KOU, X.; PARKS, G.; TAN, S. Optimal design of functionally graded materials using a procedural model and particle swarm optimization. **Computer-Aided Design**, v. 44, n. 4, p. 300–310, 2012.
- KRIGE, D. G. A statistical approaches to some basic mine valuation problems on the witwatersrand. **Journal of the Chemical, Metallurgical and Mining Society of South Africa**, v. 52, p. 119–139, 1951.
- LEMONGE, A. C. C.; BARBOSA, H. J. C. An adaptive penalty scheme for genetic algorithms in structural optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2003.
- LI, X.; GAO, W.; GU, L.; GONG, C.; JING, Z.; SU, H. A cooperative radial basis function method for variable-fidelity surrogate modeling. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 56, n. 5, p. 1077–1092, 2017.
- LIEU, Q. X.; LEE, J.; LEE, D.; LEE, S.; KIM, D.; LEE, J. Shape and size optimization of functionally graded sandwich plates using isogeometric analysis and adaptive hybrid evolutionary firefly algorithm. **Thin-Walled Structures**, v. 124, p. 588–604, 2018.
- LIU, H.; XU, S.; MA, Y.; CHEN, X.; WANG, X. An adaptive bayesian sequential sampling approach for global metamodeling. **Journal of Mechanical Design**, v. 138, n. 1, 2015.
- LOEPPKY, J. L.; SACKS, J.; WELCH, W. J. Choosing the sample size of a computer experiment: A practical guide. **Technometrics**, v. 51, n. 4, p. 366–376, 2009.
- LOJA, M. On the use of particle swarm optimization to maximize bending stiffness of functionally graded structures. **Journal of Symbolic Computation**, v. 61-62, p. 12–30, 2014.

- MAIA, M. A. **Sequential Approximate Optimization of Composite Structures**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, 2020.
- MEDEIROS JR., M. S.; JR., E. P.; MELO, A. M. C. D. Influence of the micromechanics models and volume fraction distribution on the overall behavior of sic/al functionally graded pressurized cylinders. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 16, n. 4, 2019.
- MEHMANI, A.; CHOWDHURY, S.; MEINRENKEN, C.; MESSAC, A. Concurrent surrogate model selection (cosmos): optimizing model type, kernel function, and hyper-parameters. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 57, n. 3, p. 1093–1114, 2017.
- MOITA, J. S.; ARAÚJO, A. L.; CORREIA, V. F.; SOARES, C. M. M.; HERSKOVITS, J. Material distribution and sizing optimization of functionally graded plate-shell structures. **Composites Part B: Engineering**, v. 142, p. 263–272, 2018.
- NAKAYAMA, H.; ARAKAWA, M.; SASAKI, R. Simulation-based optimization using computational intelligence. **Optimization and Engineering**, v. 3, n. 2, p. 201–214, 2002.
- NIKBAKHT, S.; KAMARIAN, S.; SHAKERI, M. A review on optimization of composite structures part ii: Functionally graded materials. **Composite Structures**, v. 214, p. 83–102, 2019.
- PRICE, K. V.; STORN, R. M.; LAMPINEN, J. A. **Differential Evolution: A Practical Approach to Global Optimization**. [S.l.]: Springer, 2005.
- RENNEN, G. Subset selection from large datasets for kriging modeling. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 38, n. 6, p. 545–569, 2008.
- RIBEIRO, L. G.; MAIA, M. A.; JR., E. P.; MELO, A. M. C. D. Surrogate based optimization of functionally graded plates using radial basis functions. **Composite Structures**, v. 252, p. 112677, 2020.
- RIBEIRO, L. G.; MARTINS, J. M. d. F. C.; JR., E. P.; MELO, A. M. C. D. Surrogate based optimization of functionally graded plates using pso and de. In: **XLI Iberian-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**. Foz do Iguaçu-PR: [s.n.], 2020. p. 1–7.
- ROQUE, C.; FERREIRA, A. New developments in the radial basis functions analysis of composite shells. **Composite Structures**, v. 87, n. 2, p. 141–150, 2009.
- ROQUE, C.; MARTINS, P. Differential evolution for optimization of functionally graded beams. **Composite Structures**, v. 133, p. 1191–1197, 2015.
- ROQUE, C.; MARTINS, P.; FERREIRA, A.; JORGE, R. Differential evolution for free vibration optimization of functionally graded nano beams. **Composite Structures**, v. 156, p. 29–34, 2016.
- SACKS, J.; WELCH, W. J.; MITCHELL, T. J.; WYNN, H. P. Design and analysis of computer experiments. **Statistical Science**, v. 4, n. 4, p. 409–423, 1989.
- SCHMIT, L. A.; FARSHI, B. Some approximation concepts for structural synthesis. **AIAA Journal**, v. 12, n. 5, p. 692–699, 1974.
- SHEN, H.-S. **Functionally graded materials: Nonlinear analysis of plates and shells**. [S.l.]: CRC Press, 2009.

SHEN, H.-S.; WANG, Z.-X. Assessment of voigt and mori–tanaka models for vibration analysis of functionally graded plates. **Composite Structures**, v. 94, n. 7, p. 2197–2208, 2012.

SHI, L.; SUN, B.; IBRAHIM, D. S. An active learning reliability method with multiple kernel functions based on radial basis function. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 60, n. 1, p. 211–229, 2019.

SHI, M.; LV, L.; SUN, W.; SONG, X. A multi-fidelity surrogate model based on support vector regression. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 61, n. 6, p. 2363–2375, 2020.

SILVA, T. A.; LOJA, M. A. Differential evolution on the minimization of thermal residual stresses in functionally graded structures. **Intelligent Systems, Control and Automation: Science and Engineering**, p. 289–299, 2012.

SIMPSON, T. W.; LIN, D. K. J.; CHEN, W. Sampling strategies for computer experiments: Design and analysis. **International Journal of Reliability and Applications**, 2002.

SOBESTER, A.; LEARY, S. J.; KEANE, A. J. On the design of optimization strategies based on global response surface approximation models. **Journal of Global Optimization**, p. 31–59, 2005.

SONG, X.; LV, L.; SUN, W.; ZHANG, J. A radial basis function-based multi-fidelity surrogate model: exploring correlation between high-fidelity and low-fidelity models. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 60, n. 3, p. 965–981, 2019.

STEPONAVIČĖ, I.; SHIRAZI-MANESH, M.; HYNDMAN, R. J.; SMITH-MILES, K.; VILLANOVA, L. On sampling methods for costly multi-objective black-box optimization. **Advances in Stochastic and Deterministic Global Optimization Springer Optimization and Its Applications**, p. 273–296, 2016.

SUN, G.; SONG, X.; BAEK, S.; LI, Q. Robust optimization of foam-filled thin-walled structure based on sequential kriging metamodel. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 49, n. 6, p. 897–913, 2013.

TENNE, Y. Initial sampling methods in metamodel-assisted optimization. **Engineering with Computers**, v. 31, n. 4, p. 661–680, 2014.

TRUONG, T. T.; NGUYEN-THOI, T.; LEE, J. Isogeometric size optimization of bi-directional functionally graded beams under static loads. **Composite Structures**, v. 227, p. 111259, 2019.

TUTUM, C. C.; DEB, K.; BARAN, I. Constrained efficient global optimization for pultrusion process. **Materials and Manufacturing Processes**, v. 30, n. 4, p. 538–551, 2014.

UKHOV, A. D. **Differential Evolution: A Tool for Global Optimization**. [S.l.: s.n.], 2016. v. 16.

VARGAS, D.; LEMONGE, A.; BARBOSA, H.; BERNARDINO, H. Um algoritmo baseado em evolução diferencial para problemas de otimização estrutural multiobjetivo com restrições. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, v. 32, n. 2, p. 91–99, 2016.

VARGAS, D. E. C.; LEMONGE, A. C. C.; BARBOSA, H. J. C.; BERNARDINO, H. S. Differential evolution with the adaptive penalty method for structural multi-objective optimization. **Optimization and Engineering**, v. 20, n. 1, p. 65–88, 2018.

WANG, C.; YU, T.; CURIEL-SOSA, J. L.; XIE, N.; BUI, T. Q. Adaptive chaotic particle swarm algorithm for isogeometric multi-objective size optimization of fg plates. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 60, n. 2, p. 757–778, 2019.

WANG, G. G.; SHAN, S. Review of metamodeling techniques in support of engineering design optimization. **Journal of Mechanical Design**, v. 129, n. 4, p. 370, 2007. ISSN 10500472.

XING, Y.; WU, Y.; LIU, B.; FERREIRA, A.; NEVES, A. Static and dynamic analyses of laminated plates using a layerwise theory and a radial basis function finite element method. **Composite Structures**, v. 170, p. 158–168, 2017.

XU, S.; LIU, H.; WANG, X.; JIANG, X. A robust error-pursuing sequential sampling approach for global metamodeling based on voronoi diagram and cross validation. **Journal of Mechanical Design**, v. 136, n. 7, 2014.

YAN, C.; SHEN, X.; GUO, F.; ZHAO, S.; ZHANG, L. A novel model modification method for support vector regression based on radial basis functions. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 60, n. 3, p. 983–997, 2019.