



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DEMÓCRITO SOBREIRA DA CRUZ CORTEZ

EFEITOS DISSIPATIVOS EM PONTOS QUÂNTICOS NA PRESENÇA DO
EFEITO AHARONOV-BOHM

FORTALEZA

2022

DEMÓCRITO SOBREIRA DA CRUZ CORTEZ

EFEITOS DISSIPATIVOS EM PONTOS QUÂNTICOS NA PRESENÇA DO
EFEITO AHARONOV-BOHM

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física. Área de concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Ilde Guedes da Silva.

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- C858e Cortez, Demócrito Sobreira da Cruz.
Efeitos dissipativos em pontos quânticos na presença do efeito Aharonov-Bohm / Demócrito Sobreira da Cruz Cortez. – 2022.
46 f. : il.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2022.
Orientação: Prof. Dr. Ilde Guedes da Silva.
1. Efeito Aharonov-Bohm. 2. Osciladores de Caldirola-Kanai. 3. Osciladores de Lane-Emden. 4. Incerteza. 5. Energia média. I. Título.

CDD 530

DEMÓCRITO SOBREIRA DA CRUZ CORTEZ

EFEITOS DISSIPATIVOS EM PONTOS QUÂNTICOS NA PRESENÇA DO
EFEITO AHARONOV-BOHM

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física. Área de concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em ___/___/_____.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ilde Guedes da Silva (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dr. Vanderley Aguiar de Lima Júnior
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Augusto Placito Cavalcante Melo de Lima
Instituto Federal do Piauí (IFPI)

Aos meus pais, filhos e esposa.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, quero agradecer a minha esposa e companheira de luta, Ingrid Thais Correia Cortez, aos meus filhos, Ícaro Lorentz Sobreira Correia Cortez e Ívina Sobreira Correia Cortez (a melhor parte de min), aos meus pais, Fernando Cortez Filho e Evandra Paula Sobreira da Cruz Cortez, aos meus irmãos, Ubiratan Sobreira da Cruz Neto e Diego Sobreira da Cruz Cortez, por todo o apoio e amor nessa caminhada.

Agradeço a todos os meus familiares, representado a todos na figura do meu avô, Ubiratan Sobreira da Cruz.

Agradeço imensamente ao professor Ilde Guedes da Silva. Agradeço pela orientação nesse trabalho, pela paciência e apoio.

Agradeço aos meus estimados amigos, representados na figura, Onilson Pereira da Silva pelo incentivo de seguir os meus sonhos.

Agradeço em especial ao meu amigo João Pedro Gomes do Nascimento, coautor do artigo que deu origem a esse trabalho.

Agradeço aos professor Augusto Placito Cavalcante Melo de Lima e ao Doutor Vanderley Aguiar de Lima Júnior por estarem sempre à disposição para ajudar no desenvolvimento desse trabalho.

Agradeço todos os funcionários e amigos do departamento de Física da UFC.
Acima de tudo, agradeço a Deus.

RESUMO

Neste trabalho analisamos os efeitos da dissipação em um oscilador carregador na presença do efeito Aharonov-Bohm por meio de Hamiltonianas considerando uma massa dependente do tempo, $m(t)$. Tais sistemas descrevem a dinâmica de dissipação de um ponto quântico parabólico bidimensional na presença do efeito Aharonov-Bohm. Nós calculamos as incertezas ($\Delta\mathbf{r}$ e $\Delta\mathbf{p}$) e o valor esperado da energia mecânica ($\langle E \rangle$) para dois tipos de dissipação, analisando-os em relação ao tempo (t), parâmetros de amortecimento e parâmetro de fluxo (ν). Para a dissipação de Caldirola-Kanai, observa-se que o parâmetro de fluxo, ν , diminui a energia de dissipação em um ponto quântico para um determinado intervalo de t .

Palavras-Chave: efeito Aharonov-Bohm; osciladores de Caldirola-Kanai; osciladores de Lane-Emden; incerteza; energia média; ponto quântico parabólico bidimensional.

ABSTRACT

In this work we analyze the effects of dissipation in a charged oscillator in the presence of the Aharonov-Bohm effect via Hamiltonians with time-dependent mass $m(t)$. Such systems describe the dynamics of the dissipation in 2D parabolic quantum dot in the presence of Aharonov-Bohm effect. We calculate the uncertainties ($\Delta\mathbf{r}$ and $\Delta\mathbf{p}$) and the quantum mechanical expectation value of energy ($\langle E \rangle$) for two kinds of dissipations and analyzed them with respect to time (t), damping parameters and flux parameter (ν). For the Caldirola-Kanai dissipation, we observed that the flux parameter ν decreases the energy dissipation in a quantum dot for a certain range of t .

Keywords: Aharonov-Bohm effect; Caldirola-Kanai oscillators; Lane-Emden oscillators; uncertainty; mean energy; 2D parabolic quantum dot.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
2	EFEITO AHARONOV-BOHM	11
3	TEORIA DE LEWIS E RIESENFELD	17
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	28
5	CONCLUSÕES	38
	REFERÊNCIAS	40
	APÊNDICE A – PERSPECTIVAS	45
	APÊNDICE B – ARTIGOS PUBLICADOS DURANTE O PERÍODO DE	
	MESTRADO	46

1 INTRODUÇÃO

A partir da década de 1920, a interação entre partículas carregadas e campos eletromagnéticos tem atraído muita atenção na literatura, teórica e experimental, sob o ponto de vista da mecânica quântica. Surpreendentemente, o movimento de uma partícula pode ser influenciado por campos eletromagnéticos em regiões nas quais ambos, campo magnético B e campo elétrico E , são nulos. Na realidade, a partícula é afetada por potenciais eletromagnéticos, os quais podem existir em regiões nas quais campos não existem. Esse efeito foi destacado pela primeira vez em 1949 por W. Ehrenburg e R. E. Siday [1]. Utilizando uma metodologia semiclássica, eles previram um deslocamento de franja devido a um potencial vetor magnético em uma região sem campo. Posteriormente, em 1959, Y. Aharonov e D. Bohm [2] dissertaram a respeito da função dos potenciais eletromagnéticos na mecânica quântica. Em regiões multiplamente conectadas e sem campos, os resultados de experimentos de interferência e espalhamento dependem da integral dos potenciais. Esse fenômeno foi caracterizado como efeito Aharonov-Bohm (AB).

Ao longo dos anos, o efeito AB foi comprovado experimentalmente [3-5] e tornou-se uma importante área de pesquisa, teórica e experimental. Por exemplo, o efeito AB foi estudado em diversos sistemas mesoscópicos, como anéis de metal [6], nanotubos de carbono [7, 8] e monocamada [9-12] e bicamada [13] de grafeno. Ferkous e Bounames [14] obtiveram o espectro de energia e as autofunções de um oscilador de Dirac bidimensional na presença do efeito AB. Eles mostraram que as energias dependem do spin da partícula e do parâmetro de fluxo magnético do efeito AB. Bouguerra, Maamache e Bounames [15], utilizando o método do operador invariante [16], obtiveram as funções de onda exatas de um oscilador harmônico bidimensional dependente do tempo na presença do efeito AB. Eles analisaram o sistema formado por um solenóide fino (um tubo de fluxo de raio nulo [17-19]). O efeito AB na presença de dissipação foi igualmente estudado [20,21]. Por exemplo, Guinea [20] obteve a amplitude das oscilações AB de uma partícula em um anel, o qual envolve o tubo de fluxo, e acoplado a diferentes meios dissipativos. Um desses ambientes é o modelo de banho harmônico Caldeira-Leggett [22].

O modelo Caldeira-Leggett é uma abordagem fundamental na qual o sistema é acoplado a um banho harmônico (um conjunto de osciladores harmônicos) possuindo diversos graus de liberdade. A energia flui do sistema para o banho. Simultaneamente, existem diversas abordagens para introduzir dissipação na mecânica quântica [23-28], em particular, foca-se na descrição fenomenológica na qual a dissipação é introduzida por meio de Hamiltonianas

explicitamente dependentes do tempo [25-28]. Essa abordagem fenomenológica é baseada na denominada Hamiltoniana Caldirola-Kanai (CK) [25, 26], dada por

$$H(t) = e^{-\int \gamma(t) dt} \frac{p^2}{2m_0} + e^{\int \gamma(t) dt} V(x), \quad (1)$$

na qual x e p são as coordenadas da posição e do momento, respectivamente, enquanto $\gamma(t)$ é o coeficiente de amortecimento. Esse modelo foi adotado em diferentes pesquisas científicas, como nos estudos do tunelamento quântico dissipativo [29, 30], dos circuitos mesoscópicos RLC dependentes do tempo [31-35], dos efeitos amortecidos no emaranhamento de um átomo de dois níveis em um campo de dois fótons [36], do movimento relativístico dissipativo [37], do problema do corpo negro opaco [38], das partículas parabólicas confinadas (pontos quânticos dissipativos) [39, 40] e da dinâmica do DNA [41]. Além dessas já mencionadas, recentemente, um novo método de quantização para a carga dentro de um supercondutor no modelo de dois fluidos de London [42] foi introduzido por Aguiar *et al.* [43] utilizando uma hamiltoniana do tipo Caldirola-Kanai. Eles calcularam as funções de onda exatas no espaço das cargas em um supercondutor com condutividade dependente do tempo usando o método de Lewis e Riesenfeld [16].

A conexão entre as abordagens fundamental e fenomenológica foi percorrida por Yun e Sun [44, 45], os quais obtiveram a função de onda exata do sistema em adição ao banho harmônico, sendo essa dada pelo produto direto em dois espaços de Hilbert independentes, um deles representando os efeitos do banho (Movimento Browniano) e o outro descrito por uma Hamiltoniana de tipo CK. Como afirmado por eles, a expressão para a Hamiltoniana, mencionada anteriormente, foi determinada, em contraste com a literatura usual, no qual é introduzida por argumentos heurísticos [45]

Nesta dissertação, adota-se o procedimento proposto por Bouguerra, Maamache e Bounames [15] para estudar os efeitos da dissipação em um oscilador carregado na presença do efeito Aharonov-Bohm. Segue-se a seguinte estrutura nessa dissertação. Na Seção 2, explicamos a dinâmica do efeito Aharonov-Bohm. Na Seção 3, mostramos as definições fundamentais necessárias para os cálculos realizados, incluindo o método de invariantes dependentes do tempo de Lewis e Riesenfeld. Enquanto na Seção 4, calculamos as incertezas e a energia para dois sistemas dissipativos diferentes, um sistema tipo CK, com coeficiente de amortecimento constante e um sistema tipo Lane-Emden, com amortecimento dependente do

tempo. E no final deste trabalho, apresentamos as conclusões, perspectivas e considerações finais.

2 EFEITO AHARONOV-BOHM

Sabemos que na eletrodinâmica clássica, os potenciais escalar elétrico e vetor magnético, $U(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, respectivamente, não são quantidade físicas diretamente mensuráveis, mas eles estão relacionados com as quantidades que são, o campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e o campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Eles surgem diretamente das propriedades vetoriais dos campos, regidas pelas equações de Maxwell para a eletrodinâmica. A relação entre os campos e esses potenciais são dadas por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla U(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t). \quad (3)$$

Além disso, tais potenciais não são unicamente definidos, se você fizer transformações do tipo

$$U'(\mathbf{r}, t) \rightarrow U(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial g(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (4.a)$$

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \nabla g(\mathbf{r}, t), \quad (4.b)$$

as Eqs. (1) e (2) não se alterarão, pois $\nabla \times \nabla g(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}$. Esta invariância é conhecida na literatura como *invariância sob transformação de gauge*, e nos dá a liberdade para definir os potenciais da forma como for mais conveniente para cada problema.

Por muito tempo foi dado como uma coisa garantida que não poderia haver influências eletromagnéticas em regiões onde $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ são zero. Mas em 1959 Aharonov e Bohm [2] mostraram que o potencial vetor pode afetar o comportamento quântico de uma partícula carregada, mesmo quando ela está se movendo por uma região na qual o próprio campo é zero.

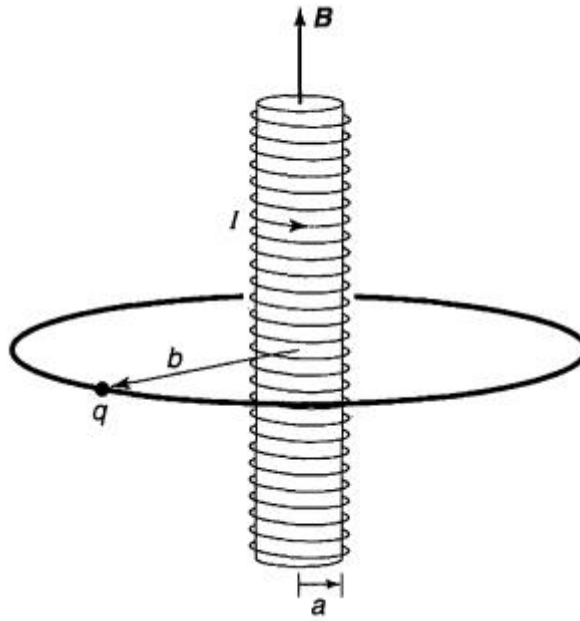
Nessa Seção mostraremos como isso acontece. Primeiro, imagine uma partícula de massa m e carga q restrita a se mover em um círculo de raio b . Ao longo do eixo do círculo corre um solenóide de raio $a < b$, conduzindo uma corrente constante I (veja a Figura 1). Sabemos que se o solenóide for extremamente longo, o campo magnético dentro dele será uniforme e o campo externo será zero. Mas o potencial vetor fora deste solenóide não é zero. Se usarmos o gauge de Coulomb, isto é, $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$, o potencial vetor será escrito como

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\Phi_B}{2\pi r} \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (r > a), \quad (5)$$

sendo $\Phi_B = \pi a^2 B$ o fluxo magnético através do solenóide. Como o solenóide está descarregado, a hamiltoniana do sistema será

$$H = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2m} = \frac{1}{2m} (-\hbar^2 \nabla^2 + q^2 A^2 + 2i\hbar \mathbf{A} \cdot \nabla). \quad (6)$$

Figura 1 – Partícula carregada se movendo em um anel circular através do qual passa um solenóide muito longo.



Fonte: [46].

Como o raio da partícula é fixo ($r = b$), a função de onda vai depender apenas da coordenada angular azimutal θ , e assim $\nabla \rightarrow \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{b} \frac{d}{d\theta}$, e a equação de Schrödinger para a hamiltoniana (6) se torna

$$\frac{1}{2m} \left[-\frac{\hbar^2}{b^2} \frac{d^2}{d\theta^2} + \left(\frac{q\Phi_B}{2\pi b} \right)^2 + \frac{i\hbar q\Phi_B}{\pi b^2} \frac{d}{d\theta} \right] \psi(\theta) = E\psi(\theta), \quad (7)$$

esta é uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes, que pode ser reescrita como

$$\frac{d^2\psi}{d\theta^2} - 2i\gamma \frac{d\psi}{d\theta} + \varepsilon\psi = 0, \quad (8)$$

na qual $\gamma = \frac{q\Phi_B}{2\pi\hbar}$ e $\varepsilon = \frac{2mb^2E}{\hbar^2} - \gamma^2$.

A Eq. (8) é idêntica a de um oscilador harmônico amortecido com coeficiente de amortecimento complexo, suas soluções têm a forma

$$\psi(\theta) = Ce^{i\lambda\theta}, \quad (9)$$

com $\lambda = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + \varepsilon} = \gamma \pm \frac{b}{\hbar}\sqrt{2mE}$.

Como a função de onda deve ser contínua, então $\psi(0) = \psi(2\pi)$, isso implica que λ seja um número inteiro:

$$\gamma \pm \frac{b}{\hbar}\sqrt{2mE} = n, \quad (10)$$

de modo que a energia será quantizada na forma

$$E_n = \frac{\hbar}{2mb^2} \left(n - \frac{q\Phi}{2\pi\hbar} \right)^2, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (11)$$

O n positivo representa uma partícula que se move na mesma direção da corrente no solenoide e tem, de certa forma, uma energia menor, contanto que a carga $q > 0$. Para o caso de n negativo, a partícula se move na direção contrária da corrente no solenoide. A Eq. (11) nos diz ainda que as energias permitidas dependem campo magnético dentro do solenoide, embora na posição onde a partícula se encontra não há campo algum. Há uma clara entre as abordagens clássicas e quânticas da eletrodinâmica.

Sabemos que a equação de Schrödinger dependente do tempo para uma partícula carregada que se move numa região do espaço onde não há campo magnético, isto é, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$

(o que não significa necessariamente que o potencial vetor \mathbf{A} seja nulo, na verdade, consideraremos que $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ na região onde a partícula se move), é dada por

$$\left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right)^2 + V \right] \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad (12)$$

na qual a energia potencial U pode ou não conter uma contribuição da energia potencial elétrica.

Podemos simplificar a Eq. (12) se fizermos a seguinte transformação

$$\Psi = e^{ig} \Psi', \quad (13)$$

em que a função $g(\mathbf{r})$ foi definida de tal maneira que

$$g(\mathbf{r}) \equiv \frac{q}{\hbar} \int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}', \quad (14)$$

e o ponto \mathcal{O} define nosso ponto de referência (que foi arbitrariamente escolhido para nossa conveniência).

Calculando o gradiente da Eq. (13), obtemos

$$\nabla \Psi = e^{ig} (i\nabla g) \Psi' + e^{ig} (\nabla \Psi'), \quad (15)$$

e como o $\nabla g = \frac{q}{\hbar} \mathbf{A}$, a Eq. (15) pode ser escrita na forma

$$\left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right) \Psi = \frac{\hbar}{i} e^{ig} \nabla \Psi', \quad (16)$$

e, conseqüentemente,

$$\left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right)^2 \Psi = -\hbar^2 e^{ig} \nabla^2 \Psi', \quad (17)$$

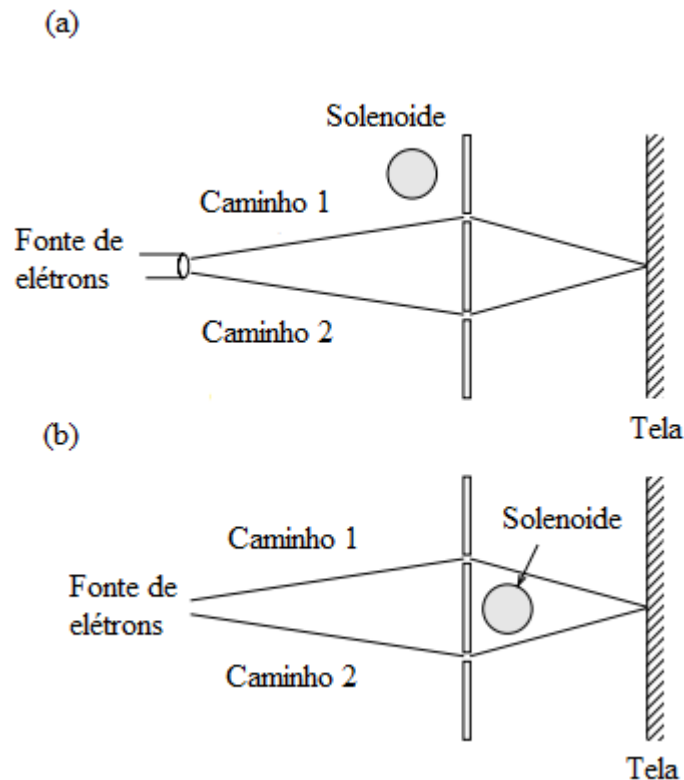
A partir das Eqs. (12) e (17) obtemos

$$-\frac{\hbar}{2m}\nabla^2\Psi' + V\Psi' = i\hbar\frac{\partial\Psi'}{\partial t}. \quad (18)$$

Note que Ψ' satisfaz a equação de Schrödinger sem o potencial vetor \mathbf{A} . Ou seja, para obtermos a solução da equação de Schrödinger *com* potencial vetor, basta resolvermos a Eq. (18) *sem* potencial vetor e multiplicarmos a solução pelo fato de fase e^{ig} .

Agora, considere um experimento de difração de duas fendas realizado com um feixe de elétrons, conforme mostrado na Fig. 2(a). Suponha que haja um solenoide perpendicular ao plano no qual os elétrons se movem, localizado como na Fig. 2(b) longe das fendas. O padrão de interferência na tela depende da diferença de fase entre as funções de onda dos elétrons que passam pelas duas fendas.

Figura 2 – Esboço esquemático do experimento que mede o deslocamento do padrão de interferência de elétrons por fluxo magnético confinado.



Fonte: adaptado de [47].

O feixe de elétrons se divide em dois caminhos passando um de cada lado do longo solenoide, se recombinando posteriormente na tela. Os feixes são mantidos longes o suficiente

do solenoide, de modo que na região onde eles passem não há campo magnético, mas existe um potencial vetor magnético \mathbf{A} dado pela Eq. (5). Os dois feixes então chegam na tela com fases diferentes, gerando um padrão de interferência. A diferença de fases pode ser calculada a partir da Eq. (14), seguindo os passos abaixo:

$$\begin{aligned}
 g &= \frac{q}{\hbar} \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \\
 &= \frac{q\Phi_B}{2\pi\hbar} \int \left(\frac{1}{2} \hat{\theta}\right) \cdot (r \hat{\theta} d\theta) \Rightarrow \\
 g &= \pm \frac{q\Phi_B}{2\hbar}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

O sinal positivo se aplica aos elétrons se movendo no mesmo sentido de \mathbf{A} (em outras palavras, no mesmo sentido de circulação), ou seja, no mesmo sentido da corrente no solenoide. Os feixes chegam fora de fase por uma quantidade proporcional ao fluxo magnético que seus caminhos circundam:

$$\text{Diferença de fase} = \frac{q\Phi_B}{\hbar}. \tag{20}$$

3 TEORIA DE LEWIS E RIESENFELD

Considere a Hamiltoniana, dependente do tempo, dada por

$$H(t) = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2M(t)} + \frac{1}{2}M(t)\omega^2(t)(x^2 + y^2), \quad (21)$$

na qual, \mathbf{A} é o potencial vetor. Considerando as referências [15,17-19], obtém-se que o potencial \mathbf{A} correspondente a um tubo de fluxo de raio nulo no gauge de Coulomb é dado por

$$e\mathbf{A} = v \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, -\frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right), \quad (22)$$

no qual v é um parâmetro de fluxo finito e não nulo. A equação de Schrödinger dependente do tempo para a Hamiltoniana (21) considerando o potencial vetor (22) pode ser representada como

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_n(\mathbf{r}, t) = \left[\frac{\mathbf{p}^2}{2M(t)} + \frac{1}{2}M(t)\omega^2(x^2 + y^2) + \frac{(2vL_z + v^2)}{2M(t)(x^2 + y^2)} \right] \psi_n(\mathbf{r}, t), \quad (23)$$

na qual $L_z = xp_y - yp_x$ é o momento angular na direção \hat{z} .

Para resolver a Eq. (23), construiremos um operador invariante $I(t)$ para a hamiltoniana (21) usando Álgebra de Lie [48]. Primeiro, introduzimos os operadores hermitianos que formarão nossa base, a saber,

$$T_1^v(\mathbf{p}, x, y) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{p}^2 + \frac{2vL_z + v^2}{x^2 + y^2} \right), \quad (24)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} (p_x x + x p_x + y p_y + p_y y), \quad (25)$$

$$T_3 = \frac{1}{2} (x^2 + y^2), \quad (26)$$

que formam uma base fechada com respeito a

$$[T_1^\nu, T_2] = -2i\hbar T_3, \quad (27)$$

$$[T_2, T_3] = -2i\hbar T_3, \quad (28)$$

$$[T_1^\nu, T_3] = -2i\hbar T_2. \quad (29)$$

Tal Álgebra de Lie $\{T_1^\nu, T_2, T_3\}$ é idêntica à álgebra para um oscilador harmônico bidimensional $\{T_1^{\nu=0}, T_2, T_3\}$ para o caso particular $\nu = 0$.

Aqui, buscaremos construir um invariante para a hamiltoniana (21) que seja linear em relação aos operadores da nossa base acima, na forma

$$I(t) = \mu_1(t)T_1^\nu + \mu_2(t)T_2 + \mu_3(t)T_3. \quad (30)$$

Note que a hamiltoniana (21) pode ser escrita em termos dos operadores da base como

$$H(t) = \frac{1}{M(t)}T_1^\nu + M(t)\omega^2(t)T_3. \quad (31)$$

Agora, como nosso operador $I(t)$ deve ser invariante, temos que

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [I(t), H(t)], \quad (32)$$

e o comutador do lado direito da Eq. (32) é facilmente calculado usando as relações (27)-(29) juntamente com as Eqs. (30) e (31). Calculemos primeiro o comutador:

$$\begin{aligned} [I(t), H(t)] &= \mu_1 M \omega^2 [T_1^\nu, T_3] + \frac{\mu_2}{M} [T_2, T_1^\nu] + \mu_2 M \omega^2 [T_2, T_3] + \frac{\mu_3}{M} [T_3, T_1^\nu] \\ &= \mu_1 M \omega^2 (-i\hbar T_2) + \frac{\mu_2}{M} (2i\hbar T_1^\nu) + \mu_2 M \omega^2 (-2i\hbar T_3) + \frac{\mu_3}{M} (i\hbar T_2) \\ &= \frac{2i\hbar\mu_2}{M} T_1^\nu + i\hbar \left(\frac{\mu_3}{M} - \mu_1 M \omega^2 \right) T_2 - 2i\hbar\mu_2 M \omega^2 T_3, \end{aligned} \quad (33)$$

que juntamente com as Eqs. (30) e (32), obtemos

$$\dot{\mu}_1 T_1^\nu + \dot{\mu}_2 T_2 + \dot{\mu}_3 T_3 = -\frac{2\mu_2}{M} T_1^\nu - \left(\frac{\mu_3}{M} - \mu_1 M \omega^2\right) T_2 + 2\mu_2 M \omega^2 T_3, \quad (34)$$

de modo que chegamos ao sistema de equações para as funções μ_i com $i = (1,2,3)$ dado por

$$\dot{\mu}_1 = -\frac{2\mu_2}{M}, \quad (35)$$

$$\dot{\mu}_2 = -\left(\frac{\mu_3}{M} - \mu_1 M \omega^2\right), \quad (36)$$

$$\dot{\mu}_3 = 2\mu_2 M \omega^2. \quad (37)$$

A partir do sistema de equações (35)-(37) pode ser simplificado se fizermos a transformação $\mu_1 = \rho^2(t)$, com a função $\rho(t)$ satisfazendo a equação auxiliar

$$\ddot{\rho} + \frac{\dot{M}}{M} \dot{\rho} + \omega^2 \rho = \frac{1}{M^2(t) \rho^3}, \quad (38)$$

que é a famosa equação de Milne-Pinney (MP) generalizada [49, 50].

Assim, os outros coeficientes serão $\mu_2 = -M\rho\dot{\rho}$ e $\mu_3 = -\frac{1}{\rho^2}(1 + M^2\rho^2\dot{\rho}^2)$. Note que a equação de MP não depende de ν , e o invariante (30) pode ser escrito na forma

$$I(t) = \rho^2 T_1^\nu - M\rho\dot{\rho} T_2 - \frac{1}{\rho^2}(1 + M^2\rho^2\dot{\rho}^2) T_3. \quad (39)$$

Um sistema quântico descrito por uma hamiltoniana explicitamente dependente do tempo $H(t)$ é descrito por uma equação de Schrödinger dependente do tempo dada por

$$i\hbar \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = H(t)\psi(t). \quad (40)$$

A partir das Eqs. (32) e (40), podemos escrever

$$i\hbar \frac{\partial [I\psi(t)]}{\partial t} = H(t)[I\psi(t)]. \quad (41)$$

Note que $I\psi(t)$ é também uma solução da equação de Schrödinger, resultado esse válido para qualquer que seja o invariante. Agora, admitindo que o invariante $I(t)$ seja um operador de um conjunto completo de observáveis que comutam, existe um conjunto completo de autoestados ortonormais $|\lambda, k; t\rangle$ de $I(t)$, ou seja

$$I(t)|\lambda, k; t\rangle = \lambda|\lambda, k; t\rangle, \quad (42)$$

$$\langle\lambda', k'; t|\lambda, k; t\rangle = \delta_{\lambda'\lambda}\delta_{k'k}, \quad (43)$$

onde λ são os autovalores do invariante e k representa os números quânticos necessários para especificar os autoestados $|\lambda, k; t\rangle$.

O fato de $I(t)$ ser Hermitiano implica que seus autovalores λ são reais. Podemos também mostrar que eles são independentes do tempo. Para isso, derivemos a Eq. (42) em relação ao tempo, obtendo

$$\frac{\partial I}{\partial t}|\lambda, k; t\rangle + I\frac{\partial}{\partial t}|\lambda, k; t\rangle = \frac{\partial\lambda}{\partial t}|\lambda, k; t\rangle + \lambda\frac{\partial}{\partial t}|\lambda, k; t\rangle. \quad (44)$$

Ao aplicarmos a Eq. (32) sobre o autoestado $|\lambda, k; t\rangle$, resulta

$$i\hbar\frac{\partial I}{\partial t}|\lambda, k; t\rangle + IH|\lambda, k; t\rangle - HI|\lambda, k; t\rangle = 0,$$

e usando a Eq. (42), podemos escrever

$$i\hbar\frac{\partial I}{\partial t}|\lambda, k; t\rangle + IH|\lambda, k; t\rangle - \lambda H|\lambda, k; t\rangle = 0. \quad (45)$$

Calculando o produto escalar da Eq. (45) com $|\lambda', k'; t\rangle$, ficamos com

$$i\hbar\langle\lambda', k'; t|\frac{\partial I}{\partial t}|\lambda, k; t\rangle + \langle\lambda', k'; t|IH|\lambda, k; t\rangle - \lambda\langle\lambda', k'; t|H|\lambda, k; t\rangle = 0,$$

da Eq. (42)

$$i\hbar\langle\lambda', k'; t|\frac{\partial I}{\partial t}|\lambda, k; t\rangle + (\lambda' - \lambda)\langle\lambda', k'; t|H|\lambda, k; t\rangle = 0. \quad (46)$$

Para $\lambda = \lambda'$, a Eq. (46) torna-se

$$i\hbar\langle\lambda, k'; t|\frac{\partial I}{\partial t}|\lambda, k; t\rangle = 0. \quad (47)$$

Tomando agora o produto escalar da Eq. (44) com $|\lambda, k; t\rangle$, obtemos

$$\langle\lambda, k; t|\frac{\partial I}{\partial t}|\lambda, k; t\rangle + \langle\lambda, k; t|I\frac{\partial}{\partial t}|\lambda, k; t\rangle = \langle\lambda, k; t|\frac{\partial\lambda}{\partial t}|\lambda, k; t\rangle + \lambda\langle\lambda, k; t|\frac{\partial}{\partial t}|\lambda, k; t\rangle,$$

e, novamente utilizando a Eq. (42), obtemos

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} = \langle\lambda, k; t|\frac{\partial I}{\partial t}|\lambda, k; t\rangle. \quad (48)$$

Podemos ver então, das Eqs. (47) e (48), que

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} = 0. \quad (49)$$

Vamos agora investigar como os autoestados de $I(t)$ se relacionam com as soluções da equação de Schrödinger. Para isso, vamos primeiro rescrever a Eq. (44) utilizando o resultado encontrado na Eq. (49), de modo que

$$(\lambda - I)\frac{\partial}{\partial t}|\lambda, k; t\rangle = \frac{\partial I}{\partial t}|\lambda, k; t\rangle. \quad (50)$$

Tomando agora o produto escalar da Eq. (50) com $|\lambda', k'; t\rangle$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle\lambda', k'; t|\frac{\partial I}{\partial t}|\lambda, k; t\rangle &= \lambda\langle\lambda', k'; t|\frac{\partial}{\partial t}|\lambda, k; t\rangle - \langle\lambda', k'; t|I\frac{\partial}{\partial t}|\lambda, k; t\rangle, \\ &= (\lambda - \lambda')\langle\lambda', k'; t|\frac{\partial}{\partial t}|\lambda, k; t\rangle. \end{aligned} \quad (51)$$

Desse modo, usando a Eq. (46), a Eq. (51) torna-se

$$i\hbar(\lambda - \lambda')\langle \lambda', k'; t | \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle = (\lambda - \lambda')\langle \lambda', k'; t | H |\lambda, k; t\rangle, \quad (52)$$

que para $\lambda \neq \lambda'$, se reduz a

$$i\hbar\langle \lambda', k'; t | \frac{\partial}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle = \langle \lambda', k'; t | H |\lambda, k; t\rangle. \quad (53)$$

A Eq. (52) não permanece válida para $\lambda = \lambda'$, se o fosse, poderíamos afirmar que o estado $|\lambda, k; t\rangle$ satisfaz a equação de Schrödinger. Porém, ainda não fixamos a fase do estado $|\lambda, k; t\rangle$, ou seja, ainda estamos livres para multiplicar o estado $|\lambda, k; t\rangle$ por um fator de fase dependente do tempo. Sendo assim, definimos um novo conjunto de autoestados de $I(t)$, que evoluem no tempo de acordo com a equação de Schrödinger, os quais estão relacionados com os antigos estados $|\lambda, k; t\rangle$ através de uma transformação de calibre

$$\psi_{\lambda k}(t) = e^{i\theta_{\lambda k}(t)} |\lambda, k; t\rangle, \quad (54)$$

onde $\theta_{\lambda k}(t)$ são funções reais dependentes do tempo.

Os estados $\psi_{\lambda k}(t)$ serão autoestados ortonormais de $I(t)$ desde que, como supomos anteriormente, o invariante não possua operadores com derivadas temporais. Assim, em termos dos novos autoestados, a equação de autovalores para $I(t)$ é

$$I(t)\psi_{\lambda k}(t) = \lambda\psi_{\lambda k}(t). \quad (55)$$

A Eq. (52) com $\lambda \neq \lambda'$ continua válida para estes novos autoestados. Sendo assim, se escolhermos as fases de modo que a Eq. (33) também continue válida para $\lambda = \lambda'$, os novos autoestados também serão soluções da equação de Schrödinger. Então, usando os novos autoestados e a Eq. (50), obtemos

$$(\lambda - I) \left[\frac{\partial}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle + i \frac{d\theta_{\lambda k}}{dt} |\lambda, k; t\rangle \right] = \frac{\partial I}{\partial t} |\lambda, k; t\rangle \quad (56)$$

Calculando o produto da escalar da Eq. (56) com $|\lambda', k'; t\rangle$, e utilizando as Eqs. (42) e (46), obtemos

$$\hbar(\lambda' - \lambda)\delta_{\lambda'\lambda}\delta_{k'k}\frac{d\theta_{\lambda k}}{dt} = (\lambda' - \lambda)\langle\lambda', k'; t|i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H|\lambda, k; t\rangle, \quad (57)$$

que para $\lambda = \lambda'$, reduz-se a

$$\hbar\delta_{k'k}\frac{d\theta_{\lambda k}}{dt} = \langle\lambda, k'; t|i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H|\lambda, k; t\rangle. \quad (58)$$

Devemos escolher os estados $|\lambda, k; t\rangle$ de tal forma que o lado direito da Eq. (58) seja nula para $k' \neq k$ para que a equação seja satisfeita. Como o operador $i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H$ é hermitiano, essa diagonalização é sempre possível. Assim, para que os autoestados $\psi_{\lambda k}(t)$ satisfaçam a equação de Schrödinger, as fases devem satisfazer

$$\hbar\frac{d\theta_{\lambda k}}{dt} = \langle\lambda, k; t|i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H|\lambda, k; t\rangle. \quad (59)$$

Desse modo, como cada autoestado $\psi_{\lambda k}(t)$ satisfaz a equação de Schrödinger, podemos escrever a solução geral como uma combinação linear das soluções, na forma

$$\psi(t) = \sum_{\lambda, k} C_{\lambda k} e^{i\theta_{\lambda k}(t)} |\lambda, k; t\rangle, \quad (60)$$

onde os $C_{\lambda k}$ são coeficientes independentes do tempo.

Já sabemos que o invariante é dado pela Eq. (39) e sua equação de autovalor tem a forma

$$I(t)\phi_{n,m}(x, y, t) = \lambda_{n,m}\phi_{n,m}(x, y, t), \quad (61)$$

na qual $\lambda_{n,m}$ são independentes do tempo e $\phi_{n,m}$ formam um conjunto ortonormal completo. A relação entre $\phi_{n,m}$ e $\psi_{n,m}$ é expressa na forma

$$\psi_{n,m}(x, y, t) = \exp[i\alpha_{n,m}(t)] \phi_{n,m}(x, y, t), \quad (62)$$

com as fases $\alpha_{n,m}(t)$ satisfazendo a equação

$$\hbar \frac{d\alpha_{n,m}(t)}{dt} = \left\langle \phi_{n,m}(x, y, t) \left| i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H(t) \right| \phi_{n,m}(x, y, t) \right\rangle. \quad (63)$$

e $H(t)$ sendo dada pela Eq. (31).

A seguir, considere a transformação unitária

$$\phi'_{n,m}(x, y, t) = U \phi_{n,m}(x, y, t), \quad (64)$$

com

$$U = \exp \left[-\frac{iM\dot{\rho}}{2\hbar\rho} (x^2 + y^2) \right]. \quad (65)$$

Sob essa transformação e definindo $x = \rho r \cos \theta$ e $y = \rho r \sin \theta$, Eq. (60) agora se escreve

$$\begin{aligned} I'(t)\sigma(r, \theta) &= \left[-\frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) + \frac{2v}{ir^2} \hbar \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v^2}{r^2} + \frac{r^2}{2} \right] \sigma(r, \theta) \\ &= \lambda_{n,m} \sigma(r, \theta), \end{aligned} \quad (66)$$

com $I'(t) = UI(t)U^\dagger$, $r^2 = \frac{x^2+y^2}{\rho^2}$, $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$ e

$$\phi'_{n,m}(x, y, t) = \frac{1}{\rho} \sigma(r, \theta). \quad (67)$$

A solução da Eq. (66) é dada por [51]

$$\sigma(r, \theta) = C_{n,m} e^{im\theta} \exp \left(-\frac{r^2}{2\hbar} \right) r^{|m+\frac{v}{\hbar}|} {}_1F_1 \left(-n, \left| m + \frac{v}{\hbar} \right| + 1, \frac{r^2}{\hbar} \right), \quad (68)$$

com os autovalores constantes

$$\lambda_{n,m} = \hbar \left(2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (69)$$

A fase (63) é dada por

$$\alpha_{n,m}(t) = - \left(2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right) \int_0^t \frac{1}{M\rho^2} dt', \quad (70)$$

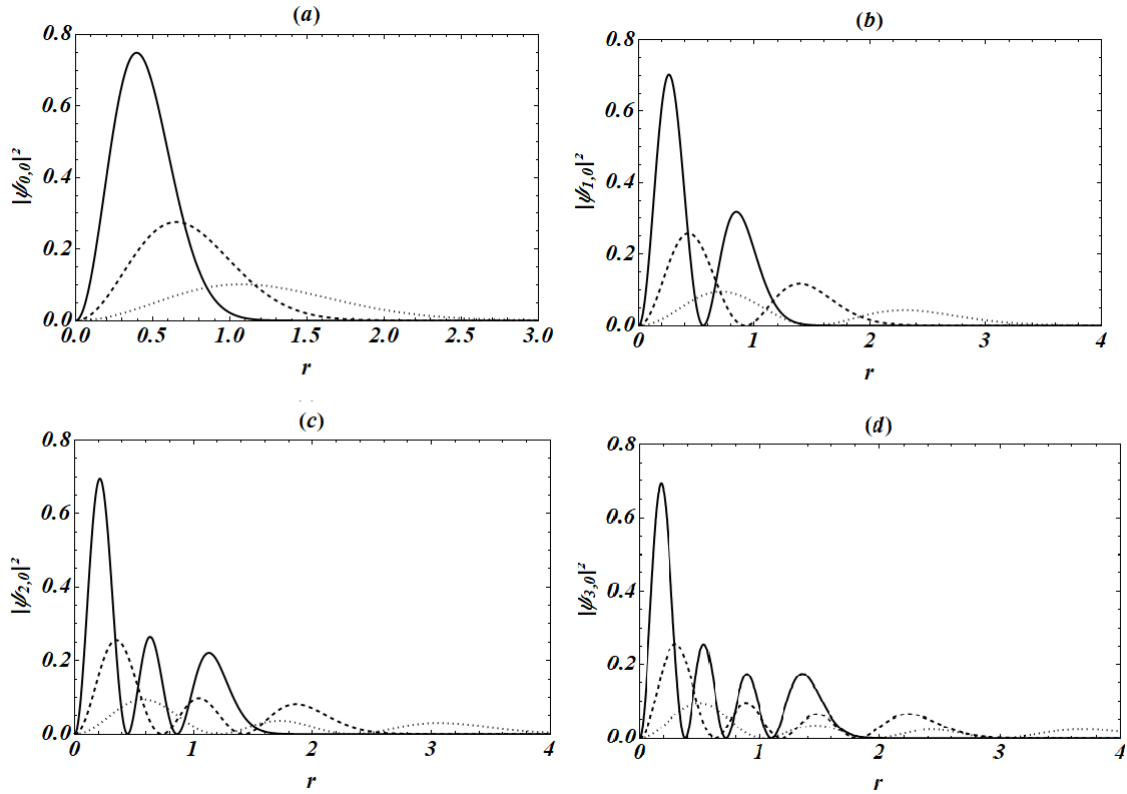
e desse modo, a solução da equação de Schrödinger dependente do tempo original será [15]

$$\begin{aligned} \psi_{n,m}(x, y, t) = & \frac{C_{n,m}}{\rho} e^{im\theta} \exp \left[-i \left(2n + \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1 \right) \int_0^t \frac{1}{M\rho^2} dt' \right] \\ & \times \exp \left[(x^2 + y^2) \left(\frac{iM\dot{\rho}}{2\hbar\rho} - \frac{1}{2\hbar\rho^2} \right) \right] \\ & \times (x^2 + y^2)^{\frac{|m+\frac{\nu}{\hbar}|}{2}} {}_1F_1 \left(-n, \left| m + \frac{\nu}{\hbar} \right| + 1, \frac{x^2 + y^2}{\hbar\rho^2} \right) \end{aligned} \quad (71)$$

sendo $C_{n,m} = \frac{1}{\rho^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|} \Gamma(|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1)} \left[\frac{\Gamma(n+|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1)}{n! \pi \hbar^{|m+\frac{\nu}{\hbar}|+1}} \right]^{1/2}$, $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$, ${}_1F_1(a, b, c)$ representa a função hipergeométrica confluyente do primeiro tipo e $\rho(t)$ satisfaz a equação generalizada de Milne-Pinney (38).

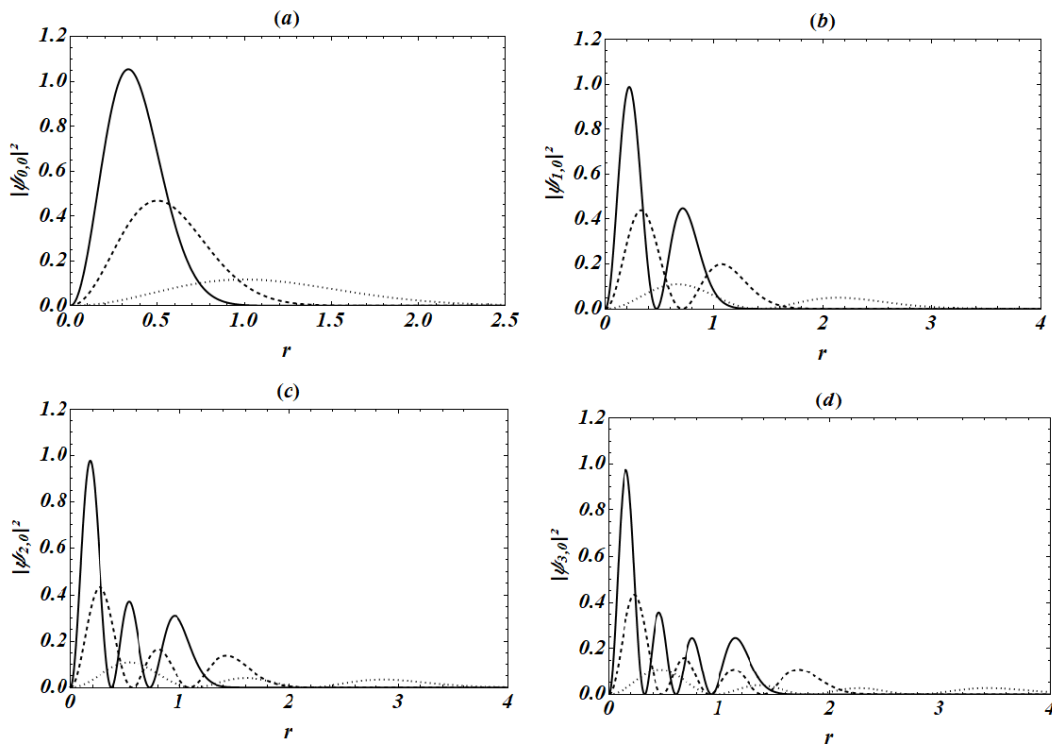
Nas Figs. 3(a)-(d) e 4(a)-(d) mostramos como se comporta a densidade de probabilidade associada a função de onda (71) para dois osciladores harmônicos amortecidos diferentes: as Figs. 3 são para o tipo Caldirola-Kanai, $M(t) = m_0 e^{\nu t}$ e $\omega(t) = \omega_0$; as Figs. 4 são para o tipo Lane-Emden, $M(t) = m_0 t^2$ e $\omega(t) = \omega_0$. Podemos ver que com o passar do tempo o maior pico para todos os níveis n analisados fica cada vez mais próximo da região $r = 0$. Isso se dá pelo fato de o sistema ser dissipativo. Lembre-se que um oscilador amortecido clássico oscila com amplitude decrescente, tendendo a zero para tempos muito grandes.

Figura 3 – Densidades de probabilidade do oscilador tipo Caldirola-Kanai para os tempos $t = 0$ (linha pontilhada), $t = 1$ (linha tracejada) e $t = 2$ (linha sólida) nos estados (a) $n = 0$, (b) $n = 1$, (c) $n = 2$ e (d) $n = 3$. Em todas as figuras usamos $\nu = \hbar = m_0 = \omega_0 = 1$ e $m = 0$.



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 4 – Densidades de probabilidade do oscilador tipo Lane-Emden para os tempos $t = 0$ (linha pontilhada), $t = 1$ (linha tracejada) e $t = 2$ (linha sólida) nos estados (a) $n = 0$, (b) $n = 1$, (c) $n = 2$ e (d) $n = 3$. Em todas as figuras usamos $\nu = \hbar = m_0 = \omega_0 = 1$ e $m = 0$.



Fonte: elaborada pelo autor.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A partir da Eq. (71), os valores médios de posição e momento são dados pelas seguintes relações

$$\langle r^2 \rangle_{n,m} = \hbar \rho^2 \left(2n + \left| m + \frac{v}{\hbar} \right| + 1 \right), \quad (72)$$

$$\langle x \rangle_{n,m} = \langle y \rangle_{n,m} = 0, \quad (73)$$

$$\langle p^2 \rangle_{0,0} = \hbar \left(\frac{|v|}{\hbar} M^2 \dot{\rho}^2 + \frac{1 + M^2 \rho^2 \dot{\rho}^2}{\rho^2} \right), \quad (74)$$

$$\langle p_x \rangle_{0,0} = \langle p_y \rangle_{0,0} = 0. \quad (75)$$

As equações (72)-(75) são dependentes de ρ , uma função que satisfaz a equação de MP generalizada (veja a Eq. (38)). Dados $M(t)$ e $\omega(t)$, tudo que precisamos fazer é resolver a Eq. (38) e considerar apenas as soluções reais para que $I(t)$ seja hermitiano. Devemos destacar que a Hamiltoniana (21) descreve a dinâmica de dissipação de um ponto quântico parabólico bidimensional na presença do efeito Aharonov-Bohm se $\omega(t) = \omega_0$.

Em seguida, considera-se o modelo de Caldirola-Kanai (CK), ou seja, $M(t) = m_0 e^{\gamma t}$ e $\omega(t) = \omega_0$. Nesse caso, a solução para a equação de Milne-Pinney (38) é $\rho = \frac{1}{\sqrt{m_0 \Omega}} e^{-\left(\frac{\gamma t}{2}\right)}$ (com $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} > 0$) [52]. Mas vamos mostrar aqui como resolver tal equação. Primeiro faremos a seguinte transformação:

$$\rho = e^{\alpha t} y, \quad (76)$$

com α uma constante real. A equação de MP se torna então

$$\ddot{y} e^{\alpha t} + (2\alpha + \gamma) \dot{y} e^{\alpha t} + (\alpha \gamma + \alpha^2 + \omega_0^2) y e^{\alpha t} = \frac{e^{-(3\alpha t + 2\gamma t)}}{m_0^2 y^3}, \quad (77)$$

para que a exponencial nos dois lados da Eq. (77) tenha o mesmo argumento, devemos ter $\alpha = -3\alpha - 2\gamma$, logo, $\alpha = -\gamma/2$, e a Eq. (77) se torna

$$\dot{y} + \Omega^2 y = \frac{1}{m_0^2 y^3}. \quad (78)$$

Multiplicando a Eq. (78) por \dot{y} , obtemos

$$\dot{y}\dot{y} + \Omega^2 y\dot{y} - \frac{\dot{y}}{m_0^2 y^3} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\dot{y}^2) + \frac{\Omega^2}{2} \frac{d}{dt}(y^2) + \frac{1}{2m_0^2} \frac{d}{dt}(y^{-2}) = 0. \quad (79)$$

Reorganizando os termos, a Eq. (79) pode ser escrita na forma

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{y}^2 + \Omega^2 y^2 + \frac{1}{m_0^2 y^2} \right) = 0, \quad (80)$$

o que implica que o termo entre parênteses deve ser uma constante, ou seja

$$\dot{y}^2 + \Omega^2 y^2 + \frac{1}{m_0^2 y^2} = a^2. \quad (81)$$

Vamos resolver a Eq. (81) por separação de variáveis, reescrevendo-a na forma

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(y^2 a^2 - \Omega^2 y^4 - m_0^{-2})^{1/2}}{y}, \quad (82)$$

separando as variáveis e integrando, a Eq. (82) torna-se

$$\int \frac{y dy}{(y^2 a^2 - \Omega^2 y^4 - m_0^{-2})^{1/2}} = \int dt. \quad (83)$$

Fazendo a substituição de variável $u = y^2$ e integrando o lado direito da Eq. (83), obtemos

$$\int \frac{du}{2i(m_0^{-2} + \Omega^2 u^2 - ua^2)^{1/2}} = t + \delta, \quad (84)$$

na qual δ é uma constante de integração e i é a unidade imaginária. E como

$$(m_0^{-2} + \Omega^2 u^2 - ua^2) = \left(\Omega u - \frac{a^2}{2\Omega} \right)^2 + m_0^{-2} - \frac{a^4}{4\Omega^2}, \quad (85)$$

a Eq. (84) pode ser escrita como

$$\int \frac{du}{2i \left[\left(\Omega u - \frac{a^2}{2\Omega} \right)^2 + b^2 \right]^{1/2}} = t + \delta, \quad (86)$$

sendo $b^2 = m_0^{-2} - \frac{a^4}{4\Omega^2}$.

Fazendo uma nova mudança de variável, $v = \frac{1}{b} \left(\Omega u - \frac{a^2}{2\Omega} \right)$, a Eq. (86) torna-se

$$\int \frac{dv}{(v^2 + 1)^{1/2}} = 2\Omega i(t + \delta). \quad (87)$$

Note que obtemos uma integral simples com uma solução já conhecida. Integrando o lado esquerdo e voltando para a variável u , ficamos com

$$u = \frac{ib}{\Omega} \operatorname{sen} \left[\frac{2\Omega(t + \delta)}{b} \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\Omega} \right)^2. \quad (88)$$

Como $u = y^2$, podemos escrever a solução da Eq. (78) na forma

$$y = \sqrt{\frac{ib}{\omega_0} \operatorname{sen} \left[\frac{2\Omega(t + \delta)}{b} \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\Omega} \right)^2}, \quad (89)$$

e da Eq. (77), a solução da Eq. (38) será

$$\rho = e^{-\gamma t/2} \sqrt{\frac{ib}{\Omega} \operatorname{sen} \left[\frac{2\Omega(t + \delta)}{b} \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\Omega} \right)^2}, \quad (90)$$

mas como $I(t)$ é hermitiano, $\rho(t)$ deve ser real, e portanto $b = 0$. Desse modo, a Eq. (89) torna-se

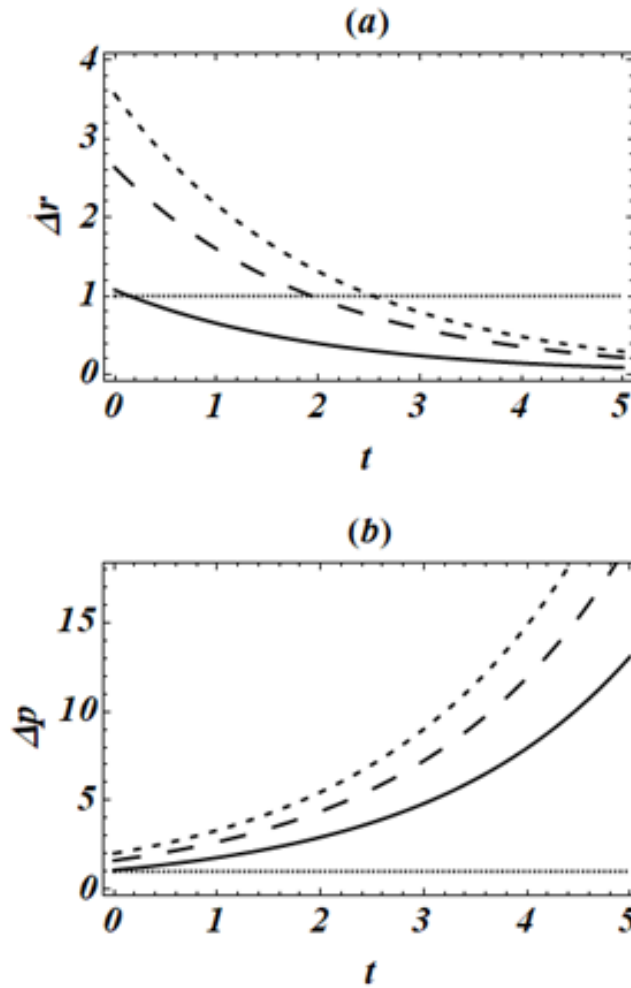
$$\rho = e^{-\gamma t/2} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{a}{\Omega}\right)^2}, \quad (91)$$

e como $b^2 = m_0^{-2} - \frac{a^4}{4\Omega^2}$, para $b = 0$, temos que

$$\rho = \frac{e^{-\gamma t/2}}{\sqrt{m_0 \Omega}}. \quad (92)$$

Na Fig. 5(a)-(b), mostramos as incertezas nos espaços de posição (Fig. 5(a)) e de momento (Fig. 5(b)) do sistema no seu estado fundamental. Mostra-se que ambos, $\Delta \mathbf{r}$ e $\Delta \mathbf{p}$, aumentam com o aumento de ν . A Fig. 5(a) também explicita que $\Delta \mathbf{r}$ tende a zero com o aumento do tempo, como um efeito da dissipação (Lembre-se que, classicamente, a posição de um oscilador amortecido tende a zero com o aumento do tempo, resultando em uma mínima incerteza na previsão da posição). Para ν nulo, observa-se que a localização da partícula devido a dissipação CK é sempre menor que a incerteza de um ponto quântico parabólico bidimensional na ausência de dissipação e do efeito Aharonov-Bohm. Enquanto, para $\nu = 5$ ($\nu = 10$), a deslocalização da partícula é maior que a de um ponto quântico parabólico bidimensional na ausência de dissipação e do efeito Aharonov-Bohm para um intervalo de $t < 1.9$ ($t < 2.5$).

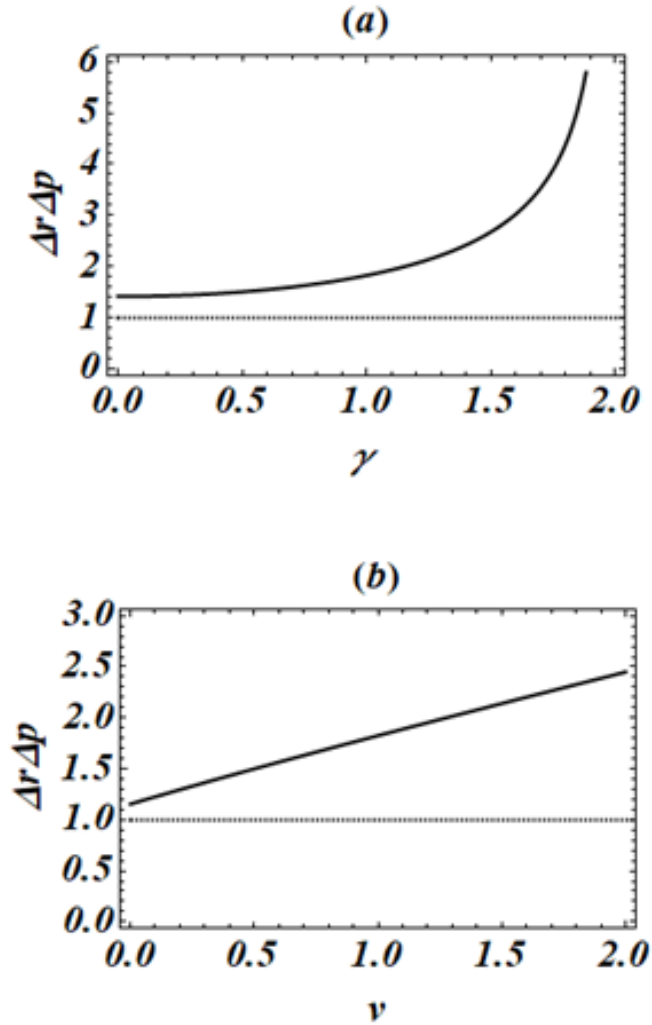
Figura 5 – Gráficos de (a) Δr e (b) Δp para $\nu = 0$ (linha contínua), $\nu = 5$ (linha tracejada longa) e $\nu = 10$ (linha tracejada curta) para o estado fundamental do sistema, considerando a dissipação CK. A linha pontilhada corresponde à incerteza de um ponto quântico parabólico bidimensional na ausência de dissipação e do efeito Aharonov-Bohm, com $M(t) = m_0$, $\omega(t) = \omega_0$ e $\nu = 0$. Nessa figura, utilizou-se que $\hbar = m_0 = \omega_0 = 1$.



Fonte: elaborada pelo autor.

Note que, a partir das Eqs. (72)-(75), o produto das incertezas $\Delta r \Delta p$ obedece ao princípio da incerteza de Heisenberg ($\Delta r \Delta p \geq \hbar$), independente de t . Nas Figs. 6(a)-(b), expõe-se $\Delta r \Delta p$ como uma função de γ e ν , respectivamente. Observamos que $\Delta r \Delta p$ aumenta não linearmente (linearmente) com o aumento de γ (ν). O crescimento de $\Delta r \Delta p$ em função de γ é mais expressivo quando γ se aproxima de $2\omega_0$, no limite em que $\Omega \rightarrow 0$.

Figura 6 – Gráficos de $\Delta r \Delta p$ como uma função de (a) γ e (b) ν para o estado fundamental do sistema, considerando a dissipação CK. A linha pontilhada corresponde à incerteza de um ponto quântico parabólico bidimensional na ausência de dissipação e do efeito Aharonov-Bohm, com $M(t) = m_0$, $\omega(t) = \omega_0$ e $\nu = 0$. Nessa figura, utilizamos que $\hbar = m_0 = \omega_0 = 1$.



Fonte: elaborada pelo autor.

Outra classe de sistemas amortecidos é o oscilador Lane-Emden [53-57], cuja massa é dada por $M(t) = m_0 t^\alpha$ e possui uma frequência constante, ω_0 . Nesse sistema, o coeficiente de amortecimento depende do tempo, sendo $\gamma(t) = \frac{\alpha}{t}$. para $\alpha = 2$, a solução para a equação de Milne-Pinney (38) é $\rho = \frac{t^{-1}}{\sqrt{m_0 \omega_0}}$ [54]. Aqui também vamos mostrar como obter esse resultado. Primeiro, vamos escrever $\rho(t)$ na forma

$$\rho(t) = f(t)y(t), \quad (93)$$

de modo que a Eq. (38) se transforma em

$$f\ddot{y} + \left(2\dot{f} + \frac{2}{t}f\right)\dot{y} + \left(\ddot{f} + \frac{2}{t}\dot{f} + \omega_0^2 f\right)y = \frac{f^{-3}y^{-3}}{m_0^2 t^4}. \quad (94)$$

Vamos escolher f de tal maneira que o termo que multiplica \dot{y} seja zero. Assim,

$$\dot{f} + \frac{f}{t} = 0, \quad (95)$$

logo, fazendo uma simples separação de variáveis, obtemos

$$\frac{df}{f} = -\frac{dt}{t}, \quad (96)$$

é fácil mostrar que $f(t) = t^{-1}$, e a Eq. (94) se torna

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \frac{1}{m_0^2 y^3}, \quad (97)$$

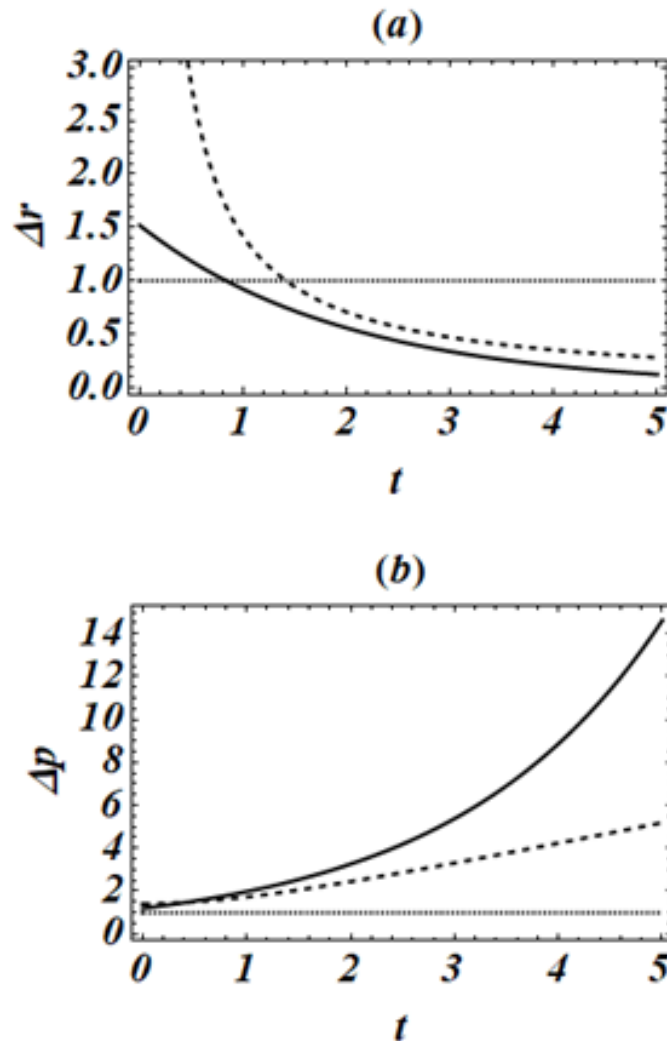
que tem exatamente a mesma forma da Eq. (78), mudando apenas a frequência de oscilação. Assim, a solução da equação de MP para o oscilador tipo Lane-Emden, usando as Eqs. (89) e (93) se torna

$$\rho(t) = \frac{t^{-1}}{\sqrt{m_0 \omega_0}}. \quad (98)$$

Nas Figs. 7(a)-(b) mostramos os gráficos comparando as incertezas nos espaços de posição (Fig. 7(a)) e momento (Fig. 7(b)) para um ponto quântico bidimensional na presença do efeito Aharonov-Bohm com dissipação dos tipos CK e Lane-Emden no estado fundamental. Para $t < 2$, observamos que a diminuição de Δr devido à dissipação do tipo Lane-Emden é mais acentuada que a do tipo CK. Isso ocorre tendo em visto que, nesse intervalo, o coeficiente de amortecimento Lane-Emden é sempre maior que 1 e tende a $+\infty$

no limite em que $t \rightarrow 0$. O contrário ocorre para $t > 2$. Observou-se que a partícula é menos localizada devido à dissipação do tipo Lane-Emden para todos os valores de t .

Figura 7 – Gráficos de (a) Δr e (b) Δp para osciladores CK (linha contínua) e LE (linha tracejada) para o estado fundamental do sistema. A linha pontilhada corresponde à incerteza de um ponto quântico parabólico bidimensional na ausência de dissipação e do efeito Aharonov-Bohm, com $M(t) = m_0$, $\omega(t) = \omega_0$ e $\nu = 0$. Nessa figura, utilizamos $\nu = \hbar = m_0 = \omega_0 = 1$.



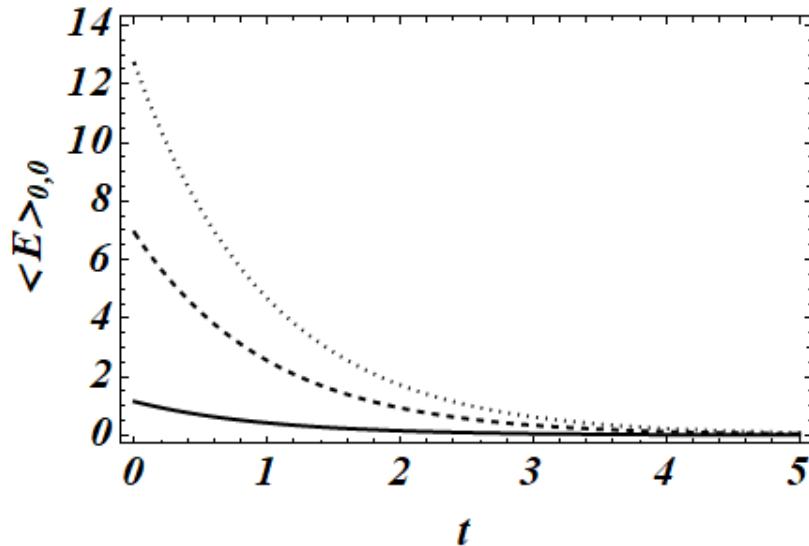
Fonte: elaborada pelo autor.

Utilizando o procedimento descrito por Hasse [27], obtemos que o valor esperado para a energia mecânica dependente do tempo para o menor estado energético é dado por

$$\langle E \rangle_{0,0} = \frac{\hbar m_0}{2M(t)} (1 + |\nu|) \left(\frac{1}{M(t)\rho^2(t)} + M(t)\dot{\rho}^2(t) + M(t)\omega_0^2\rho^2(t) \right). \quad (99)$$

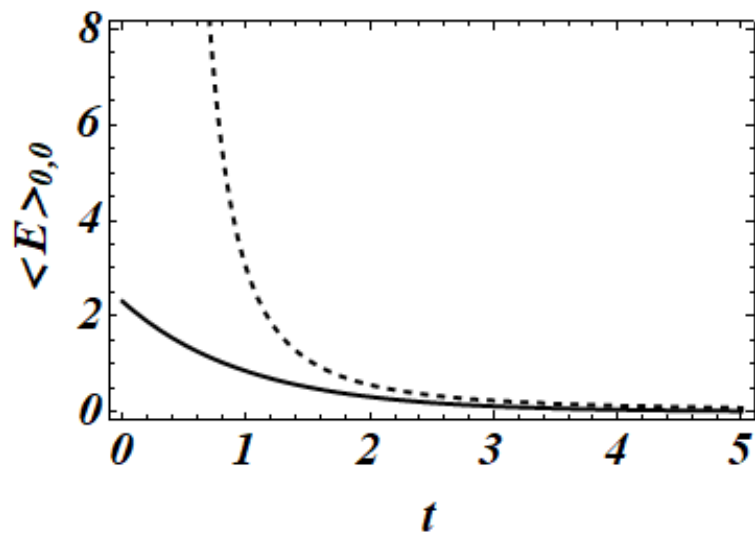
Na Fig. 8, mostramos os gráficos da energia para diferentes valores de ν , considerando a dissipação CK. Observamos que a energia diminui com o tempo, como o esperado, uma vez que o sistema é dissipativo. Apesar disso, para $t < 3,5$ s, pode-se minimizar a dissipação para o ponto quântico parabólico bidimensional ao aumentar-se ν . Na Fig. 9, comparamos as energias dos osciladores harmônicos amortecidos dos tipos CK e LE. Note que para $t < 2$, a dissipação do tipo LE é mais acentuada que a do tipo CK. Esse resultado também é uma consequência do comportamento do coeficiente de amortecimento para esse intervalo. Lembre-se que para tempos pequenos o coeficiente de amortecimento do oscilador tipo LE é muito grande, mas tende a zero para tempos grandes, diferente do oscilador tipo CK, que o amortecimento é sempre constante.

Figura 8 – Gráfico de $\langle E \rangle_{0,0}$ para $\nu = 0$ (linha contínua), $\nu = 5$ (linha tracejada) e $\nu = 10$ (linha pontilhada) para o estado fundamental do sistema, considerando a dissipação CK. Nessa figura, utilizou-se que $\hbar = m_0 = \omega_0 = 1$.



Fonte: elaborada pelo autor.

Figura 9 – Gráfico de $\langle E \rangle_{0,0}$ para osciladores CK (linha contínua) e LE (linha tracejada) para o estado fundamental do sistema. Nessa figura, $\nu = \hbar = m_0 = \omega_0 = 1$.



Fonte: elaborada pelo autor.

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho revisitamos um dos mais interessantes problemas de física fundamental: o efeito Aharonov-Bohm. Mas aqui adicionamos a esse problema antigo e bem conhecido um ingrediente novo, introduzimos por meio de hamiltonianas explicitamente dependentes do tempo uma dissipação no sistema. Analisamos assim os efeitos de dissipação em um oscilador harmônico bidimensional carregado com massa dependente do tempo, $m(t)$, na presença do efeito Aharonov-Bohm. Tal sistema descreve a dinâmica da dissipação de um ponto quântico parabólico bidimensional, com uma vasta gama de aplicações em física do estado sólido e eletrônica.

Primeiramente, nós mostramos como calcular as funções de onda exatas usando o método de invariantes de LR [16] seguindo o trabalho de Bouguerra, Maamache e Bounames [15]. A partir dessas funções de onda, dadas pela Eq. (71), calculamos os valores médios do operador posição ($\langle \mathbf{r} \rangle$ e $\langle \mathbf{r}^2 \rangle$) e do operador momento ($\langle \mathbf{p} \rangle$ e $\langle \mathbf{p}^2 \rangle$) para o estado $n = m = 0$. De posse desses valores médios, mostramos como as incertezas ($\Delta \mathbf{r}$ e $\Delta \mathbf{p}$) se comportam em função do parâmetro de fluxo (ν) e coeficiente de dissipação (γ) para duas diferentes classes de sistemas dissipativos, o tipo Caldirola-Kanai, com amortecimento constante, e o tipo Lane-Emden, com amortecimento dependente do tempo ($\propto t^{-1}$). Por fim, calculamos analiticamente o valor esperado da energia mecânica do sistema ($\langle E \rangle$) para os dois tipos de dissipação. Mostramos como $\langle E \rangle$ varia com o tempo para diferentes valores do parâmetro de fluxo magnético.

Em decorrência da dissipação introduzida para o caso Caldirola-Kanai a partir do parâmetro de amortecimento γ , mostramos que $\Delta \mathbf{r}$ ($\Delta \mathbf{p}$) diminui (aumenta) com o aumento do tempo, mantendo ν fixo. Isso significa que à medida que o tempo cresce, a partícula se torna cada vez mais localizada. Lembrando que partículas oscilantes clássicas irradiam, ou seja, constituem um sistema amortecido, sendo assim tendem a oscilar entre dois pontos cada vez mais próximos, conseqüentemente reduzindo a incerteza da sua posição.

Em contrapartida, com o aumento do parâmetro de fluxo magnético ν , ambos $\Delta \mathbf{r}$ e $\Delta \mathbf{p}$, aumentam ao manter o tempo fixo. Como o parâmetro de fluxo depende da área transversal, A , da órbita clássica, para valores maiores de A , existirão mais pontos acessíveis para a partícula, que, por consequência, aumentarão a incerteza na sua posição. A incerteza no momento também aumenta, uma vez que um grande raio de órbita implica em uma alta

velocidade da partícula para manter o período constante (sabendo que a frequência de cíclotron independe da área transversal).

Ao comparar as incertezas na posição Δr para as dissipações de Lane-Emden e Caldirola-Kanai dentro de um intervalo de tempo $t < 2 s$, mostramos que Δr decresce de maneira mais acentuada para dissipação do tipo Lane-Emden, pois para valores pequenos de tempo, o coeficiente de amortecimento desse tipo de dissipação tende a valores muito grandes. Para o tipo de dissipação de Caldirola-Kanai, observamos também que o parâmetro de fluxo ν diminui a dissipação de energia para um ponto quântico para um determinado intervalo de tempo. Esse resultado pode ser útil para o aprimoramento de dispositivos quânticos.

REFERÊNCIAS

- [1] EHRENBER, W.; SIDAY, R. E. The Refractive Index in Electron Optics and the Principles of Dynamics. **Proceedings of the Physical Society: Section B**, [s. l.], v. 62, n. 1, p. 8-21, 1949.
- [2] AHARONOV, Y.; BOHM, D. Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory. **Physical Review Journals Archive**, [s. l.], v. 115, n. 3, p. 485-491 1959.
- [3] CHAMBERS, R. G. Shift of an Electron Interference Pattern by Enclosed Magnetic Flux. **Physical Review Letters**, [s. l.], v. 5, n. 1, p. 3-7, 1960.
- [4] TONOMURA, A. Evidence for Aharonov-Bohm effect with magnetic field completely shielded from electron wave. **Physical Review Letters**, [s. l.], v. 56, n. 8, p. 792-802, 1986.
- [5] OSAKABE, N. *et al.* Experimental confirmation of Aharonov-Bohm effect using a toroidal magnetic field confined by a superconductor. **Physical Review A**, [s. l.], v. 34, n. 2, 815-832, 1986.
- [6] WEBB, R. A. *et al.* Observation of h/e Aharonov-Bohm Oscillations in Normal-Metal Rings. **Physical Review Letters**, [s. l.], v. 54, n. 25, p. 2696-2700, 1985.
- [7] BACHTOLD, A. *et al.* Aharonov-Bohm oscillations in carbon nanotubes. **Nature**, [s. l.], v. 397, p. 673-675, 1999.
- [8] CAO, J. Aharonov-Bohm Interference and Beating in Single-Walled Carbon-Nanotube Interferometers. **Physical Review Letters**, [s. l.], v. 93, n. 21, p. 1-4, 2004.
- [9] RUSSO, S. *et al.* Observation of Aharonov-Bohm conductance oscillations in a graphene ring. **Physical Review B**, [s. l.], v. 77. p. 1-4, 2008.
- [10] HUEFNER, M. *et al.* Investigation of the Aharonov-Bohm effect in a gated graphene ring. **Physica Status Solidi (B)**, [s. l.], v. 246, n. 11-12, p. 2756-2759, 2009.
- [11] HUEFNER, M. *et al.* The Aharonov-Bohm effect in a side-gated graphene ring. **New Journal of Physics**, [s. l.], v. 12, p. 1-10, 2010.
- [12] RECHER, P. *et al.* Aharonov-Bohm effect and broken valley degeneracy in graphene rings. **Physical Review B**, [s. l.], v. 76, p. 1-6, 2007.
- [13] PARK, C.-S. Aharonov-Bohm effect in bilayer graphene. **Physics Letters A**, [s. l.], v. 381, n. 21, p. 1831-1836, 2017.
- [14] FERKOUS, N.; BOUNAMES, A. Energy Spectrum of a 2D Dirac Oscillator in the Presence of the Aharonov-Bohm Effect. **Physics Letters A**, [s. l.], v. 325, p. 21-29, 2004.

- [15] BOUGUERRA, Y.; MAAMACHE, M.; BOUNAMES, A. Time-Dependent 2D Harmonic Oscillator in Presence of the Aharonov-Bohm Effect. **International Journal of Theoretical Physics**, [s. l.], v. 45, p. 1791–1797, 2006.
- [16] LEWIS JR, H. R.; RIESENFELD, W. B. An Exact Quantum Theory of the Time-Dependent Harmonic Oscillator and of a Charged Particle in a Time-Dependent Electromagnetic Field. **Journal of Mathematical Physics**, [s. l.], v. 10, n. 8, p. 1458-1473, 1969.
- [17] HAGEN, C. R. Aharonov-Bohm Scattering of Particles with Spin. **Physical Review Letters**, [s. l.], v. 64, n. 5, p. 503-506, 1990.
- [18] HAGEN, C. R. Spin dependence of the Aharonov-Bohm effect. **International Journal of Modern Physics A**, [s. l.], v. 6, n. 18, p. 3119-3149, 1991.
- [19] HAGEN, C. R. Effects of nongauge potentials on the spin- $\frac{1}{2}$ Aharonov-Bohm problem. **Physical Review D**, [s. l.], v. 48, n. 12, p. 5935-5939, 1993.
- [20] GUINEA, F. Aharonov-Bohm oscillations of a particle coupled to dissipative environments. **Physical Review B**, [s. l.], v. 65, p. 1-6. 2002.
- [21] HOROVITZ, B.; LE DOUSSAL, P. Interference in the presence of dissipation. **Physical Review B**, [s. l.], v. 74, n. 7, p. 1-4, 2006.
- [22] CALDEIRA, A. O.; LEGGETT, A. J. Influence of Dissipation on Quantum Tunneling in Macroscopic Systems. **Physical Review Letters**, [s. l.], v. 46, n. 4, p. 211-214, 1981.
- [23] DEKKER, H. Classical and quantum mechanics of the damped harmonic oscillator. **Physics Reports**, [s. l.], v. 80, n. 1, p. 1-110, 1981.
- [24] GISIN, N. A simple nonlinear dissipative quantum evolution equation. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, [s. l.], v. 14, n. 9, p. 2259-2267, 1981.
- [25] CALDIROLA, P. Forze non conservative nella meccanica quantistica. **Il Nuovo Cimento**, [s. l.], v. 18, p. 393-400, 1941.
- [26] KANAI, E. On the Quantization of the Dissipative Systems. **Progress of Theoretical Physics**, [s. l.], v. 3, n. 4, p. 440-442, 1948.
- [27] HASSE, R. W. On the quantum mechanical treatment of dissipative systems. **Journal of Mathematical Physics**, [s. l.], v. 16, n. 10, 1975.
- [28] SCHUCH, D. Nonunitary connection between explicitly time-dependent and nonlinear approaches for the description of dissipative quantum systems. **Physical Review A**, [s. l.], v. 55, n. 2, 935-940, 1997.
- [29] BASKOUTAS, S.; JANNUSSIS, A.; MIGNANI, R. Dissipative tunnelling of the inverted Caldirola-Kanai oscillator. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, [s. l.], v. 27, n. 6, p. 2189-2196, 1994.

- [30] TOKIEDA, M.; HAGINO, K. Quantum tunneling with friction. **Physica Review C**, [s. l.], v. 95, p. 1-9, 2017.
- [31] XU, D. Geometric amplitude factor in an LCR circuit with time-dependent inductance, capacitance and resistance. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, [s. l.], v. 35, n. 45, p. L669-L671, 2002.
- [32] CHOI, J.-R. Exact solution of a quantized LC circuit coupled to a power source. **Physica Scripta**, [s. l.], v. 73, n. 6, p. 587, 2006.
- [33] PEDROSA, I. A.; PINHEIRO, A. P. Quantum Description of a Mesoscopic RLC Circuit. **Progress of Theoretical Physics**, [s. l.], v. 125, n. 6, p. 1133-1141, 2011.
- [34] PEDROSA, I. A.; MELO, J. L.; SALATIEL, S. Quantization, coherent states and geometric phases of a generalized nonstationary mesoscopic RLC circuit. **The European Physical Journal B**, [s. l.], v. 87, n. 269, p. 1-7, 2014.
- [35] AGUIAR, V.; GUEDES, I.; PEDROSA, I. A. Tsallis, Rényi, and Shannon entropies for time-dependent mesoscopic RLC circuits. **Progress of Theoretical and Experimental Physics**, [s. l.], v. 2015, n. 11, p. 1-11, 2015.
- [36] DEHGHANI, A.; MOJAVERI, B.; JAFARZADEH, B. R. Damping in the Interaction of a Two-Photon Field and a Two-Level Atom Through Quantized Caldirola-Kanai Hamiltonian. **International Journal of Theoretical Physics**, [s. l.], v. 58, n. 3, p.865-877, 2019.
- [37] GONZÁLEZ, G. Relativistic motion with linear dissipation. **International Journal of Theoretical Physics**, [s. l.], v. 46, n. 3, p. 417-423, 2007.
- [38] GONZÁLEZ-HERNÁNDEZ, S.; RAMÍREZ-MORENO, M. A.; PARGA, G. A. A further study of the matte black-body. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, [s. l.], v. 516, p. 472-479, 2019.
- [39] BASKOUTAS, S. *et al.* Dissipative dynamics of a parabolic confined particle in the presence of magnetic field. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, [s. l.], v. 292, n. 1-4, p. 238-254, 2001.
- [40] PAN, X.-Y.; ZHU, J. J.; LI, Y.-Q. The effective Hamiltonian and propagator of a parabolic confined dissipative electron under a perpendicular magnetic field. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, [s. l.], v. 521, p. 293-309, 2019.
- [41] SULAIMAN, A. *et al.* Dynamics of DNA breathing in the Peyrard-Bishop model with damping and external force. **Physica D**, v. 241, [s. l.], p. 1640-1648, 2012.
- [42] LONDON, F.; BUCKINGHAM, M. J. **Superfluids**. New York: Dover, 1961.
- [43] AGUIAR, V. *et al.* London superconductivity approach in a time-dependent background. **Physica C**, [s. l.], v. 580, p. 1-5, 2021.

- [44] YU, L.-H.; SUN, C.-P. Evolution of the wave function in a dissipative system. **Physical Review A**, [s. l.], v. 49, n. 1, p. 592-595, 1994.
- [45] SUN, C.-P.; YU, L.-H. Exact dynamics of a quantum dissipative system in a constant external field. **Physical Review A**, [s. l.], v. 51, n. 3, p. 1845-1853, 1995.
- [46] GRIFFITHS, D. J. **Introduction to Quantum Mechanics**. 2nd. ed. New York: Addison-Welsej, 2004.
- [47] GASIOROWICZ, S. **Quantum Physics**. New York: Wiley, 1974.
- [48] MAAMACHE, M. Ermakov systems, exact solution, and geometrical angles and phases. **Physical Review A**, [s. l.], v. 52, n. 2, p. 936-940, 1995.
- [49] MILNE, W. E. A note on the numerical integration of differential equations. **Journal of Research of the National Bureau of Standards**, [s. l.], v. 43, p. 537-542, 1949.
- [50] PINNEY, E. The nonlinear differential equation. **Proceedings of the American Mathematical Society**, [s. l.], v. 1, p. 681, 1950.
- [51] FLÜGGE, S. **Practical Quantum Mechanics**. 2nd ed. Berlin: Springer, 1994.
- [52] PEDROSA, I. A.; SERRA, G. P.; GUEDES, I. Wave functions of a time-dependent harmonic oscillator with and without a singular perturbation. **Physical Review A**, [s. l.], v. 56, n. 5, p. 4300-4303, 1997.
- [53] ÖZEREN, S. F. Investigation of the time evolution of Lane–Emden-type Kanai–Caldirola oscillator. **Journal of Mathematical Physics**, [s. l.], v. 50, 2009.
- [54] BESSA, V. H. L.; GUEDES, I. The quantum Lane-Emden-type Kanai-Caldirola oscillators. **Journal of Mathematical Physics**, [s. l.], v. 53, n. 12, 2012.
- [55] AGUIAR, V.; GUEDES, I. Joint entropy of quantum damped harmonic oscillators. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, [s. l.], v. 401, p. 159-166, 2014.
- [56] AGUIAR, V.; GUEDES, I. Fisher information of quantum damped harmonic oscillators. **Physica Scripta**, [s. l.], v. 90, p. 1-7, 2015.
- [57] AGUIAR, V.; GUEDES, I. Osciladores harm^onicos amortecidos dependentes do tempo. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 35, n. 4, p. 1-9, 2013.
- [58] SHANNON, C.; WEAVER, W. **A Mathematical Theory of Communication**. [S. l.: s. n.], 1949.
- [59] TSALLIS, C. Possible generalization of Boltzmann–Gibbs statistics. **Journal of Statistical Physics**, [s. l.], v. 52, p. 479-487, 1988.
- [60] RÉNYI, A. On Measures of Entropy and Information (1961). In: TURÁN, P. (ed.). **Selected Papers of Alfréd Rény**. Budapest: Akademia Kiado, 1976. p. 565-580.

- [61] FISHER, R. A. Theory of Statistical Estimation. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, [s. l.], v. 22, n. 5, p. 700-725, 1925.

APÊNDICE A - PERSPECTIVAS

O aprofundamento natural desse problema seria analisar a dinâmica quântica de uma partícula carregada em uma armadilha de íons na presença de dissipação, o que seria uma poderosa ferramenta para medidas espectroscópicas cada vez mais precisas.

Além disso, podemos analisar também a dinâmica de um ponto quântico parabólico na presença do efeito Aharonov-Bohm sob o ponto de vista da teoria da informação quântica, utilizando medidas entrópicas como a famosa entropia de Shannon [58] e suas generalizações, como a entropia de Tsallis [59] e entropia de Rényi [60], além da informação de Fisher [61].

**APÊNDICE B – ARTIGOS PUBLICADOS DURANTE O PERÍODO DE
MESTRADO**

1. NASCIMENTO, J. P. G.; AGUIAR, V.; CORTEZ, D. S.; GUEDES, I. Dissipative Dynamics and Uncertainty Measures of a Charged Oscillator in the Presence of the Aharonov-Bohm Effect. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 43, p. 1-5, 2021.