UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JOSÉ ERIVAMBERTO LIMA OLIVEIRA

TEORIA DE FRONTEIRA LIVRE PARA EQUAÇÕES NÃO LINEARES SINGULARES/DEGENERADAS NÃO HOMOGÊNEAS: UMA ABORDAGEM NÃO VARIACIONAL

FORTALEZA
2022

JOSÉ ERIVAMBERTO LIMA OLIVEIRA

TEORIA DE FRONTEIRA LIVRE PARA EQUAÇÕES NÃO LINEARES SINGULARES/DEGENERADAS NÃO HOMOGÊNEAS: UMA ABORDAGEM NÃO VARIACIONAL

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Equações Diferenciais Parciais Elípticas.

Orientador: Prof. Dr. José Ederson Melo Braga

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

O47t Oliveira, José Erivamberto Lima.
Teoria de fronteira livre para equações não lineares singulares/degeneradas não homogeneas : uma abordagem não variacional / José Erivamberto Lima Oliveira. – 2022.
122 f. : il.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática , Fortaleza, 2022.
Orientação: Prof. Dr. José Ederson Melo Braga.

1. Problema de fronteira livre. 2. Equações quaselineares. 3. Regularidade. I. Título.
CDD 510

JOSÉ ERIVAMBERTO LIMA OLIVEIRA

TEORIA DE FRONTEIRA LIVRE PARA EQUAÇÕES
NÃO LINEARES SINGULARES/DEGENERADAS NÃO HOMOGÊNEAS:
UMA ABORDAGEM NÃO VARIACIONAL

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Equações Diferenciais Parciais Elípticas.

Aprovada em: 28 / 02 / 2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Ederson Melo Braga (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Diego Ribeiro Moreira
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Diego Eloi Misquita Gomes
Instituto Federal do Ceará (IFCE)

Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

Prof. Dr. Sérgio Henrique Monari Soares
Universidade de São Paulo (USP)

Ao meu pai, José Erivan Dos Reis Oliveira
(*in memoriam*).

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela vida, por Sua misericórdia e por permitir trilhar esse caminho.

À minha rainha, minha mãe Teresinha, pois desde criança, tens me incentivado a buscar a educação e me empenhar nos estudos. Pela suas renuncias durante todo esse tempo. Agraceço pelo seu amor, cuidado, carinho e suas orações para que eu conseguisse superar as barreiras desse caminho.

À minha amada noiva Nailena, pelo seu companheirismo, apoio, amor e carinho. Como nos versos de Jorge Vercillo: ela une todas as coisas, como eu poderia explicar? Te amo! Beijinhos...

Ao meu querido irmão, Evamberto pelo apoio, companheirismo, confiança e auxilio.

À minha maravilhosa avó, Raimundinha (*in memoriam*) por sua ajuda, companhia e orações que me ajudaram nos momentos difíceis.

À minha Tia Elenilda, pela solicitude, apoio e estima.

À minha sogra Gildelena e meu sogro Renato (*in memoriam*), e as minhas cunhadas Renata e Vitória pela ajuda, apoio e fé.

Ao meu padrinho Leandro e seu irmão Alexandro e aos amigos André Felipe e Michel Leão pela força e fé na conclusão dessa jornada.

À senhora Fátima Ferreira pela sua benevolência e inestimável amparo.

Ao senhor Raimundo do Bonfim, pelas suas orações.

Aos amigos do programa pelos bons momentos, força e aprendizagem: Aguiar, André, Tiago, Edilson, Davi, Pedro, Flaviano, Emanuel, Diego, Danuso, Rafael, Felipe, Ícaro, Hamilton, Rosa, Elzon, Weslay, Elisafã, Valricélio, Patrícia, Israel, Alan, Wallison, Valderlanio, Allen, Junior e Rodrigo.

Aos professores que integravam a coordenação da PGMAT: Alexandre Fernandes, Júlio Cesar e Daniel Cibotaru pela experiência adquirida enquanto representante discente. E aos professores Antônio Caminha, Frederico Girão e Ernani Ribeiro pelas solicitudes prestadas.

Ao prof. Diego Moreira, pelos esclarecimentos, confiança e dedicação. Além de sua excelência como professor e matemático, é um amigo que tenho muita estima e admiração.

Ao prof. Ederson Braga, meu orientador, pela sua amizade, confiança e empenho. Sua destreza ao investigar e lecionar matemática com esmero, me inspira profissionalmente.

À Andréa e Jessyca pela paciência e excelência nas soluções de questões burocráticas.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

"Eu sou de uma terra que o povo padece
Mas nunca esmorece, procura vencê,
Da terra adorada, que a bela caboca
De riso na boca zomba no sofrê.
Não nego meu sangue, não nego meu nome,
Olho para fome e pergunto: o que há?
Eu sou brasilêro fio do Nordeste,
Sou cabra da peste, sou do Ceará."

(ASSARÉ, 2008.)

RESUMO

Problemas de fronteira livre estão relacionados a certas questões envolvendo soluções de equações diferenciais parciais. Sua aplicabilidade se estende a diversas áreas do conhecimento. Nosso objetivo é estudar a regularidade da fronteira livre do problema de uma fase com o operador g-laplaciano via uma abordagem não-variacional. Utilizando um maquinário sofisticado, tivemos êxito. Obtendo a regularidade $\mathrm{C}^{1,\alpha}$ para fronteira livre em dois resultados: o primeiro onde, heuristicamente, a mesma está confinada entre dois planos e segundo, quando a fronteira livre possui regularidade Lipschitz numa vizinhança de um ponto. Neste último, a propriedade $\mathrm{C}^{1,\alpha}$ ocorre numa vizinhança, possivelmente, menor do ponto em questão. Embora o operador seja da forma divergente, onde tradicionalmente utilizamos uma abordagem variacional, conseguimos utilizar resultados que garantem a equivalência entre soluções no sentido das distribuições e no sentido da viscosidade para proceder com nossos intentos.

Palavras-chave: problema de fronteira livre; equações quaselineares; regularidade.

ABSTRACT

Free boundary problems are related to questions involving solutions to partial differential equations. Its applicability extends to several areas of knowledge. Our goal is study the free boundary regularity of the one phase problem to the g-laplacian. Deal with a sofisticate machinery, we get sucess. Getting, the $C^{1,\alpha}$ regularity to free boundary in two results: the first, heuristically, the free boundary is in between two planes and second, when its has Lipschitz regularity in a neiborhood of point. In this last one, the $C^{1,\alpha}$ regularity occurs in a smaller (possibly) neighborhood of the point in question. Although the operator is of the divergent form, where we traditionally use a variational approach, we were able to use results that guarantee the equivalence between solutions in the sense of distributions and in the sense of viscosity to proceed with our intentions.

Keywords: free boundary problem; quasilinear equations; regularity.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Problemas de fronteira livre estão relacionados a certas questões envolvendo soluções de equações diferenciais parciais onde dois resultados são investigados de forma crucial. O primeiro deles é obter a regularidade ótima de soluções e, o segundo, a regularidade ótima da fronteira do conjunto de positividade/negatividade conhecido classicamente como fronteira livre das soluções. Assim, neste trabalho de tese, investigamos a regularidade da solução (ou soluções, caso sejam múltiplas) e a geometria da mesma.

Tais problemas modelam, de maneira satisfatória, problemas de transição de fase. Um singelo exemplo: imagine que você tenha colocado um cubo de gelo em um pires. Passado o tempo haverá água em dois estados físicos da matéria distintos sólido e líquido. Grosseiramente, a fronteira livre nessa situação seria o conjunto onde ocorre essa mudança de estado. Contudo, sua aplicação se estende a diversas áreas do conhecimento como: processos estocásticos para o mercado financeiro, eletrostática, design ótimo, dinâmica dos fluidos, controle ótimo, eletroquímica etc.. Recentemente vem surgindo aplicações na biologia, especificamente, nos estudos que modelam a evolução de tumores que estão sob um tipo de tratamento com uma ou duas drogas.

Os pioneiros resultados nessa área de pesquisa têm em sua autoria o renomado matemático Luis Caffarelli. Suas ideias fundamentam os alicerces dessa linha sendo fontes de inspiração para resolução de problemas similares, envolvendo outros operadores.

Contudo, Savin (2007), obteve resultados de regularidade para soluções no sentido da viscosidade de equações diferenciais parciais totalmente não lineares que são uniformemente elípticas em um aberto limitado do domínio. Em particular, as técnicas desenvolvidas nas demonstrações dos resultados desse artigo, trazem novos argumentos para Teoremas clássicos. A título de exemplo, é apresentada uma nova prova de um resultado do matemático italiano Ennio De Giorgi:

Teorema 1.1 (De Giorgi)**.** *Seja* E *um conjunto aberto de modo que*

$$\{x_{n+1} \leq -\delta\} \cap \mathcal{C} \subset \mathsf{E} \cap \mathcal{C} \subset \{x_{n+1} \leq \delta\}$$

e minimiza o perímetro[1] *no cilindro*

$$\mathcal{C} := \{|x| < 1\} \times \{|x_{n+1}| < 1\}.$$

Então, $\partial \mathsf{E} \cap \left\{|x| \leq \frac{1}{2}\right\}$ *é uma superfície* C^∞*, se* $\delta > 0$ *é pequeno e universal.*

[1] O perímetro de um conjunto mensurável E em um aberto Ω é definido por: $P(\mathsf{E}, \Omega) = \sup_{\varphi \in C_0^1(\Omega;\mathbb{R}^n)} \left|\int_{\mathsf{E}} \operatorname{div}\varphi \, dx\right|$. Além disso, dizemos que E minimiza o perímetro se para todo F que coincide com E fora de um compacto contido em Ω, temos $P(\mathsf{E}, \Omega) \leq P(\mathsf{F}, \Omega)$.

Inspirada em Savin (2007), De Silva (2011) trouxe uma nova abordagem para problemas de fronteira livre. No artigo, ela desenvolve argumentos para soluções no sentido da viscosidade para o seguinte problema

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{ij}(x) = f(x) & \text{em} \quad \{u>0\}\cap B_1, \\ |\nabla u|(x) = g(x) & \text{em} \quad \partial\{u>0\}\cap B_1, \end{cases} \tag{1}$$

onde $f \in C(B_1) \cap L^\infty(B_1)$ e $a_{ij}, g \in C^{0,\beta}(B_1)$. Ela obteve os seguintes resultados:

Teorema 1.2 (*Flatness* implica em $C^{1,\alpha}$). *Seja u solução no sentido da viscosidade de* (1) *em B_1, tal que existe um $\bar{\varepsilon} > 0$, de modo que*

$$(x_n - \bar{\varepsilon})^+ \le u(x) \le (x_n + \bar{\varepsilon})^+ \qquad \text{em } B_1$$

para

$$[a_{ij}]_{C^{0,\beta}(B_1)},\ [g]_{C^{0,\beta}(B_1)} \le \bar{\varepsilon}, \quad \|f\|_{L^\infty(B_1)} \le \bar{\varepsilon}$$

e $0 \in \partial\{u>0\}\cap B_1$, $g(0) = 1$ e $a_{ij}(0) = \delta_{ij}$. Então, $\partial\{u>0\}\cap B_{\frac{1}{2}}$ é localmente gráfico de uma função $C^{1,\alpha}$.
Assim como

Teorema 1.3 (Lipschitz implica em $C^{1,\alpha}$). *Seja u solução no sentido da viscosidade de* (1)*. Assuma que $0 \in F(u)$ e $g(0) > 0$. Se $F(u)$ é o gráfico de uma função Lipschitz em uma vizinhança de 0, então $F(u)$ é $C^{1,\alpha}$ em uma vizinhança (menor) de 0.*

Ressaltamos que essa nova técnica ainda depende dos resultados de Caffarelli. Especificamente, este último Teorema necessita da teoria desenvolvida em Caffarelli (1987).

Desde 2011, pesquisadores vêm obtendo resultados nessa mesma direção, trabalhando com operadores mais sofisticados. No mesmo sentido, em 2020, obtemos os resultados na mesma direção, para o operador g-laplaciano. Isto é, o seguinte problema:

$$\begin{cases} \Delta_g u = f & \text{em} \quad B_1^+(u) := B_1 \cap \{u>0\}, \\ |\nabla u| = Q & \text{em} \quad F(u) := B_1 \cap \partial\{u>0\}, \end{cases} \tag{2}$$

onde, $f \in C(B_1) \cap L^\infty(\Omega)$ e $0 \le Q \in C^{0,\beta}(B_1)$ e

$$\Delta_g u := \operatorname{div}\left(\frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|}\nabla u\right) \tag{3}$$

com

$$g \in C([0,+\infty)) \cap C^1((0,+\infty)) \quad \text{e} \quad 0 < \delta \le \frac{tg'(t)}{g(t)} \le g_0 \tag{4}$$

para todo $t > 0$. A segunda condição[2] de (4) é necessária e suficiente para que nosso operador seja uniformemente elíptico quando o gradiente for diferente de zero.

Enfim, apresentaremos em detalhes, resultados obtidos em Braga, Leitão e Oliveira (2020). Dividimos esse texto em seis capítulos, contando com a introdução e conclusão.

Em resultados preliminares, faremos uma breve excursão sobre os espaços de Orlicz, a desigualdade de Harnack e princípio da comparação, relações entre os tipo de solução para o g-laplaciano e compacidade de N-funções que satisfazem a condição de Lieberman.

Construímos no capítulo três, alicerces para compreender as barreiras de Pucci. Elas estão no coração das principais estimativas. Nos inspiramos em Braga e Moreira (2018) para provamos a existência e regularidade dessas barreiras. Por fim, mostramos os ajustes necessários para utilizá-las em nossas argumentações.

No capítulo quatro, definimos as soluções no sentido da viscosidade para o nosso problema de fronteira livre e apresentamos um resultado de regularidade para problema limite que é uma equação diferencial parcial elíptica com condições de fronteira do tipo Neumann.

Por fim, no capítulo 5, apresentamos os principais resultados desse texto, isto é, a regularidade localmente Lipschitz, a não degenerescência das soluções e os Teoremas: *Flatness* implica em $C^{1,\alpha}$ e Lipschitz implica em $C^{1,\alpha}$. Vale salientar que para o Teorema de regularidade Lipschitz e não degenerescência de soluções podemos enfraquecer a regularidade de f, precisamente, podemos assumir que f é contínua e está em $L^q(\Omega)$ para $q > n$.

[2] Os esclarecimentos a respeito dessa hipótese podem ser encontrados em Lieberman (1992).

2 RESULTADOS PRELIMINARES

Aqui estabeleceremos ingredientes para entendermos o g-laplaciano. Faremos uma breve excursão sobre os espaços de Orlicz tocando em propriedades básicas, norma, topologia, mergulhos, os tornando amistosos, uma vez que nossas hipóteses permitem. Além disso, apresentaremos resultados de regularidade para soluções do g-laplaciano e um breve comentário a respeito da compacidade do conjunto $G(\delta, g_0)$, o qual será definido em momento oportuno.

2.1 Um passeio pelos espaços de Orlicz

Os espaços de Orlicz nos parece, *a priori*, uma generalização dos espaços L^p. Contudo, *a posteriori*, os mesmos são um subespaço de L^1. O primeiro passo na direção de conhecê-los é definirmos as N-funções.

2.1.1 N-*funções apropriadas*

Definição 2.1. *Uma função real* $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dita uma* N*-função se*

$$G(t) = \int_0^{|t|} g(s)\, ds,$$

onde $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *é uma função não decrescente positiva satisfazendo as seguintes propriedades:*

a) $g(0) = 0$ *e* $\lim_{t\to\infty} g(t) = \infty$*;*

b) Se $t \geq 0$ *então* $\lim_{s\to t^+} g(s) = g(t)$.

Nesse caso diremos que G *é a* N*-função representada por* g*. Segue da monotonicidade de* g *que* G *é uma função convexa.*

Abaixo segue uma caracterização para N-funções.

Proposição 2.1. *Uma função convexa* $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é* N*-função se, e somente se satisfaz as seguintes propriedades:*

a) G *é par.*

b) G *é estritamente crescente em* $[0, +\infty)$.

c) $\lim_{t\to 0} \dfrac{G(t)}{t} = 0$.

d) $\lim_{t\to +\infty} \dfrac{G(t)}{t} = +\infty$.

Se G *é uma função convexa satisfazendo as condições (a)-(d), então sua representante integral é* $g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$*, onde* g *é a derivada à direita de* G.

Demonstração. Ver Capítulo 1, 1§, em Krasnosel'skii e Rutickii (1961). ■

Alguns exemplos:

1. Considerando $1 < p < \infty$, $g(t) = pt^{p-1}$, logo, $G(t) = t^p$, $t \geq 0$.
2. Para $t \geq 0$ considere $g(t) = e^t + 1$, logo,

$$\int_0^t e^s + 1\, ds = e^t + t - 1.$$

   Então, defina $G(t) = e^t + t - 1$.
3. $G(t) = e^{t^p} - 1$, com $g(t) = pt^{p-1}e^{t^p}$ e $1 < p < \infty$, $t \geq 0$.
4. $G(t) = (1 + t)\ln(t + 1) - t$ onde $g(t) = \ln(t + 1)$, $t \geq 0$.
5. Para $t \geq 0$ seja $g(t) = t^a \ln(bt + 1)$ com $a, b > 0$ então $G(t) = \displaystyle\int_0^t s^a \ln(bs + 1)\, ds$.

Dentre os exemplos expostos acima podemos elencar alguns satisfazendo (4). Note que $g(t) = t^p - 1$ para $1 < p < \infty$, satisfaz a condição (4). Pois,

$$\frac{tg'(t)}{g(t)} = \frac{tp(p-1)t^{p-2}}{pt^{p-1}} = \frac{p(p-1)t^{p-1}}{pt^{p-1}} = p - 1$$

então, poderíamos tomar $\delta = p - 1$ e $g_0 = p - 1$. Segue que $g(t) = t^a \ln(bt + 1)$ também satisfaz (4). Ora,

$$\frac{tg'(t)}{g(t)} = \frac{t(at^{a-1}\ln(bt+1) + t^a(\frac{b}{bt+1}))}{t^a \ln(bt+1)} = a + \frac{bt}{(bt+1)\ln(bt+1)}.$$

Estudando a função $t \mapsto \dfrac{bt}{(bt+1)\ln(bt+1)}$, vemos por cálculo simples de derivada que a mesma é decrescente. Mais ainda, usando a regra de l'Hôpital

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{bt}{(bt+1)\ln(bt+1)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{b}{bt+1} \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{\ln(bt+1)} = b \lim_{t\to 0^+} \frac{bt+1}{b} = 1.$$

Portanto, neste caso, podemos tomar $\delta = a$ e $g_0 = a + 1$.

O Lema que apresentamos a seguir compila uma série de propriedades básicas de N-funções que satisfazem (4).

Lema 2.1. *Seja G uma N-função tal que $g = G'$ satisfazendo (4). Então para todo $t, s > 0$:*

(g-1) $\min\{s^\delta, s^{g_0}\}g(t) \leq g(st) \leq \max\{s^\delta, s^{g_0}\}g(t)$;

(g-2) $\dfrac{tg(t)}{1+g_0} \leq G(t) \leq tg(t)$;

(G-1) G *é convexa e pertence a* $C^2(0,\infty)$;

(G-2) $\dfrac{1}{1+g_0}\min\{s^{\delta+1}, s^{g_0+1}\}G(t) \leq G(st) \leq (1+g_0)\max\{s^{\delta+1}, s^{g_0+1}\}G(t)$;

(G-3) $G(a+b) \leq 2^{g_0}(1+g_0)(G(a)+G(b))$, *para todo* $a, b > 0$.

Demonstração. Para provar *(g-1)*, note por (4) que

$$\frac{\delta}{t} \leq \frac{g'(t)}{g(t)} \leq \frac{g_0}{t}$$

para todo $t > 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
&\delta \int_t^{st} \frac{1}{\tau}\, d\tau \leq \int_t^{st} \frac{g'(\tau)}{g(\tau)}\, d\tau \leq g_0 \int_t^{st} \frac{1}{\tau}\, d\tau \\
\Rightarrow\ & \delta \ln(s) \leq \ln\left(\frac{g(st)}{g(t)}\right) \leq g_0 \ln(s) \\
\Rightarrow\ & s^{\delta} \leq \frac{g(st)}{g(t)} \leq s^{g_0}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\min\{s^{\delta}, s^{g_0}\} g(t) \leq g(st) \leq \max\{s^{\delta}, s^{g_0}\} g(t).$$

Agora checaremos *(g-2)*. Observe que por (4),

$$g_0 G(t) = \int_0^t g_0 g(s)\, ds \geq \int_0^t s g'(s)\, ds = t g(t) - G(t).$$

Dessa forma,

$$G(t) \geq \frac{t g(t)}{1 + g_0}.$$

Como

$$G(t) = \int_0^t g(s)\, ds \leq t g(t)$$

temos que *(g-2)* segue.

(G-1) é imediato pois $G'' \geq 0$. Para *(G-2)*, temos que

$$\begin{aligned}
G(st) &\leq st g(st) \leq st \max\{s^{\delta}, s^{g_0}\} g(t) \\
&= \max\{s^{\delta+1}, s^{g_0+1}\} \frac{t g(t)}{1 + g_0}(1 + g_0) \\
&\leq (1 + g_0) \max\{s^{\delta+1}, s^{g_0+1}\} G(t).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$G(st) \geq \frac{st\, g(st)}{1 + g_0} \geq \min\{s^{\delta+1}, s^{g_0+1}\} \frac{t\, g(t)}{1 + g_0} \geq \min\{s^{\delta+1}, s^{g_0+1}\} \frac{G(t)}{1 + g_0}.$$

Por fim, para *(G-3)* segue que pela convexidade de G, que

$$G\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{G(a)+G(b)}{2}, \text{ para todos } a, b \in (0, +\infty).$$

Seja $\tilde{a} := 2a$ e $\tilde{b} := 2b$. Então,

$$G\left(\frac{\tilde{a}+\tilde{b}}{2}\right) \leq \frac{G(\tilde{a})+G(\tilde{b})}{2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} G(a+b) &\leq \frac{G(2a)+G(2b)}{2} \\ &\leq \frac{1}{2}(1+g_0)\max\{2^{1+\delta}, 2^{1+g_0}\}(G(a)+G(b)) \\ &= 2^{g_0}(1+g_0)(G(a)+G(b)). \end{aligned}$$

■

Como $g' > 0$ segue que g^{-1} existe. Tal função satisfaz as condições em (4). Ora, sabemos que $(g^{-1})'(s) = \dfrac{1}{g'(g^{-1}(s))}$ e de (4),

$$\begin{aligned} 0 &< \delta \leq \frac{g^{-1}(s)g'(g^{-1}(s))}{s} \leq g_0 \\ \Rightarrow 0 &< \delta \leq \frac{g^{-1}(s)}{s(g^{-1})'(s)} \leq g_0 \\ \Rightarrow 0 &< \frac{1}{g_0} \leq \frac{s(g^{-1})'(s)}{g^{-1}(s)} \leq \frac{1}{\delta}, \forall s > 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Dessa forma, g^{-1} satisfaz (4), com constantes g_0^{-1} e δ^{-1}. Mais ainda, estimativas similares as obtidas no Lema acima, valem para g^{-1} e $\tilde{G}(t) := \int_0^t g^{-1}(s)\,ds$.

Lema 2.2. *As funções g^{-1} e $\tilde{G}$ satisfazem as seguintes desigualdades*

($\tilde{g}$-1) $\min\left\{s^{\frac{1}{\delta}}, s^{\frac{1}{g_0}}\right\}\tilde{g}(t) \leq \tilde{g}(st) \leq \max\left\{s^{\frac{1}{\delta}}, s^{\frac{1}{g_0}}\right\}\tilde{g}(t)$;

($\tilde{g}$-2) $\dfrac{\delta t g^{-1}(t)}{1+\delta} \leq \tilde{G}(t) \leq t g^{-1}(t)$;

($\tilde{G}$-1) $\dfrac{1+\delta}{\delta}\min\left\{s^{1+\frac{1}{\delta}}, s^{1+\frac{1}{g_0}}\right\}\tilde{G}(t) \leq \tilde{G}(st) \leq \dfrac{\delta}{1+\delta}\max\left\{s^{1+\frac{1}{\delta}}, s^{1+\frac{1}{g_0}}\right\}\tilde{G}(t)$;

($\tilde{G}$-2) $\tilde{G}(g(t)) \leq g_0 G(t)$.

Demonstração. Os itens *($\tilde{g}$-1)*, *($\tilde{g}$-2)* e *($\tilde{G}$-1)* seguem *mutatis mutandis* as demonstrações dos itens similares no Lema 2.1. Nos concentremos em *($\tilde{G}$-2)*. Com efeito, note que

$$
\begin{aligned}
(sg(s))' &= sg'(s) + g(s) \\
\Rightarrow \int_0^t (sg(s))'\, ds &= \int_0^t sg'(s)\, ds + \int_0^t g(s)\, ds \\
\Rightarrow tg(t) &= \int_0^t g^{-1}(g(s))g'(s)\, ds + G(t) \\
&= \int_0^{g(t)} g^{-1}(s)\, ds + G(t) \\
&= \tilde{G}(g(t)) + G(t).
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\tilde{G}(g(t)) = tg(t) - G(t).$$

Usando *(g-2)*,

$$\tilde{G}(g(t)) = tg(t) - G(t) = \frac{(1+g_0)tg(t)}{1+g_0} - G(t) \leq (1+g_0)G(t) - G(t) = g_0 G(t).$$

■

2.1.2 *Classe de Orlicz*

Definição 2.2 (Condição Δ_2)**.** *Dizemos que G satisfaz a condição Δ_2 se existem constantes $K > 0$ e $t_0 \geq 0$ tais que*

$$G(2t) \leq KG(t), \quad t \geq t_0.$$

A título de exemplo, se $G(t) = t^p$, temos que $K = 2^p$ e $t_0 = 0$. Outro fato a ser elencado é que nas condições que impomos sobre g, isto é (4), implicam em G satisfazer a condição Δ_2. Isso é uma consequência de *(G-2)*. Ora,

$$G(2t) \leq (1+g_0)\max\{2^{\delta+1}, 2^{g_0+1}\}G(t) = (1+g_0)2^{g_0+1}G(t).$$

Neste caso, $K = (1+g_0)2^{g_0+1}$ e t_0 podemos tomar igual a 1.

Para definimos os espaços de Orlicz é necessário conhecemos a classe de Orlicz.

Definição 2.3 (Classe de Orlicz)**.** *Seja G uma N-função. Definimos a classe de Orlicz de G o seguinte conjunto,*

$$C_G(\Omega) := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}, \textit{ mensurável.}; \int_\Omega G(|u(x)|)\, dx < \infty \right\}.$$

Observe que $C_G(\Omega)$ é pelo menos convexo. Pois se u_1 e u_2 o pertence, seja

$\lambda \in [0,1]$, então

$$\begin{aligned}
\int_\Omega G(|(1-\lambda)u_1 + \lambda u_2|)\,dx &\leq \int_\Omega G((1-\lambda)|u_1| + \lambda|u_2|)\,dx \\
&\leq \int_\Omega (1-\lambda)G(|u_1|) + \lambda G(|u_2|)\,dx \\
&\leq (1-\lambda)\int_\Omega G(|u_1|)\,dx + \lambda\int_\Omega G(|u_2|)\,dx \\
&< \infty
\end{aligned}$$

pela arbitrariedade de λ em $[0,1]$ segue a convexidade de $C_G(\Omega)$.

Teorema 2.1. $C_G(\Omega)$ *é um espaço vetorial se, e somente se,* G *satisfaz a condição* Δ_2*.*

Demonstração. Ver Lema 8.8 em Adams e Fournier (2003). ∎

Dessa forma, $C_G(\Omega)$ é um espaço vetorial, e o muniremos com a norma de Luxemburgo. Ou seja,

$$||u||_G := \inf\left\{M > 0; \int_\Omega G\left(\frac{|u(x)|}{M}\right)\,dx < 1\right\}.$$

2.1.3 *Espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev*

Denotaremos por $L^G(\Omega)$ as classes de Orlicz onde G satisfaz a condição Δ_2, estes são chamados de espaço de Orlicz apropriados. Contudo, se G é uma N-função qualquer, $L^G(\Omega)$ é definido como o menor espaço vetorial que contém $C_G(\Omega)$.

Nesse espaço ainda podemos recuperar as desigualdades clássicas como a de Young e a de Hölder.

Teorema 2.2 (Desigualdade de Young)**.** *Dados* $a, b > 0$ *então*

$$ab \leq G(a) + \tilde{G}(b)$$

onde G *e* $\tilde{G}$ *são* N*-funções dadas, tais que* $G' = g$ *e esta satisfaz* (4) *e* $\tilde{G}' = g^{-1}$ *e satisfaz* (5)*. A igualdade ocorre se, e somente se,* $g(b) = a$*.*

Demonstração. Ora, fazendo uma mudança de variáveis, $s = g(t)$ então $ds = g'(t)\,dt$ e se $0 \leq s \leq b$ então $0 \leq t \leq g^{-1}(b)$. Assim,

$$\int_0^b g^{-1}(s)\,ds = \int_0^{g^{-1}(b)} g^{-1}(g(t))g'(t)\,dt = \int_0^{g^{-1}(b)} tg'(t)\,dt.$$

Pela integração por partes,

$$\int_0^b g^{-1}(s)\,ds = \int_0^{g^{-1}(b)} tg'(t)\,dt = bg(b) - \int_0^{g^{-1}(b)} g(t)\,dt.$$

Daí,

$$\begin{aligned} G(a)+\tilde{G}(b) &= G(a) + \int_0^b g^{-1}(s)\,ds \\ &= G(a) + \int_0^{g^{-1}(b)} tg'(t)\,dt \\ &= \int_0^a g(t)\,dt + bg(b) - \int_0^{g^{-1}(b)} g(t)\,dt \\ &= bg(b) + \int_{g^{-1}(b)}^a g(t)\,dt. \end{aligned} \tag{6}$$

Há três situações a serem analisadas:
I. $a > g^{-1}(b)$. Logo, de (6),

$$\begin{aligned} G(a)+\tilde{G}(b) &= bg(b) + \int_{g^{-1}(b)}^a g(t)\,dt \\ &> bg(b) + \int_{g^{-1}(b)}^a g(g^{-1}(b))\,dt \\ &= bg(b) + b(a - g^{-1}(b)) \\ &= ab. \end{aligned}$$

II. $a < g^{-1}(b)$. De (6)

$$\begin{aligned} G(a)+\tilde{G}(b) &= bg(b) + \int_{g^{-1}(b)}^a g(t)\,dt \\ &= bg(b) - \int_a^{g^{-1}(b)} g(t)\,dt \\ &> bg(b) - \int_a^{g^{-1}(b)} g(g^{-1}(b))\,dt \\ &= bg(b) - b(g^{-1}(b) - a) \\ &= ab. \end{aligned}$$

III. $a = g^{-1}(b)$. Então $g(b) = a$ e de (6)

$$G(a)+\tilde{G}(b) = bg(b) + \int_{g^{-1}(b)}^a g(t)\,dt = ab.$$

Note que essa condição para a igualdade ocorrer é necessária e suficiente. Pois, supondo por absurdo que a igualdade ocorra e $a \neq g(b)$ então ou voltamos a I. ou II. onde a igualdade não ocorre e assim temos um absurdo. ■

Teorema 2.3 (Desigualdade de Hölder). *Se* $u \in L^G(\Omega)$ *e* $v \in L^{\tilde{G}}(\Omega)$ *então* $uv \in L^1(\Omega)$ *com a seguinte estimativa:*

$$\left| \int_\Omega uv \, dx \right| \leq 2\|u\|_{L^G(\Omega)} \|v\|_{L^{\tilde{G}}(\Omega)}.$$

Demonstração. **Afirmação:** $\int_\Omega G\left(\frac{u}{\|u\|_{L^G(\Omega)}}\right) dx \leq 1$.

Prova da Afirmação: Pela definição da norma de Luxemburgo existe uma sequência $\{M_k\}_{k=1}^\infty$ tal que

$$\int_\Omega G\left(\frac{u}{M_k}\right) dx \leq 1$$

para todo k e $M_k \to \|u\|_{L^G(\Omega)}$ quando $k \to \infty$.

Então, pelo Teorema da convergência monótona,

$$\int_\Omega G\left(\frac{u}{\|u\|_{L^G(\Omega)}}\right) dx \leq 1.$$

O que prova a afirmação.

Usando o afirmado, segue que

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega \frac{u}{\|u\|_{L^G(\Omega)}} \frac{v}{\|v\|_{L^{\tilde{G}}(\Omega)}} dx \right| &\leq \int_\Omega \left| \frac{u}{\|u\|_{L^G(\Omega)}} \frac{v}{\|v\|_{L^{\tilde{G}}(\Omega)}} \right| dx \\
&\leq \int_\Omega G\left(\frac{u}{\|u\|_{L^G(\Omega)}}\right) dx + \int_\Omega \tilde{G}\left(\frac{v}{\|v\|_{L^{\tilde{G}}(\Omega)}}\right) dx \\
&\leq 2.
\end{aligned}$$

■

Definição 2.4 (Convergência em média). *Dizemos que* $u_j \in L^G(\Omega)$ *converge para* $u \in L^G(\Omega)$ *em média se*

$$\int_\Omega G(|u_j - u|) \, dx \to 0,$$

quando $j \to \infty$.

Observe que se u_j converge para u na topologia forte de L^G temos que u_j convergem em média para u. Com efeito, defina

$$M_j := \inf \left\{ M > 0; \int_\Omega G\left(\frac{|u_j - u|}{M}\right) dx \leq 1 \right\}.$$

Temos que $M_j \to 0$ quando $j \to \infty$. Então existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $j \geq j_0$, $M_j < 1$. Então,

$$\int_\Omega G(|u_j - u|)\,dx = \int_\Omega G\left(M_j \frac{|u_j - u|}{M_j} + (1 - M_j)\right) dx \leq M_j \int_\Omega G\left(\frac{|u_j - u|}{M_j}\right) dx \leq M_j.$$

Contudo, a reciproca nem sempre é verdadeira. Para a mesma ocorrer, se faz necessário a condição Δ_2. Com essa hipótese, o próximo resultado manisfesta a equivalência entre essas convergências.

Lema 2.3. *Existe uma constante* $C = C(\delta, g_0) > 0$ *tal que*

$$\|u\|_G \leq C \max\left\{\left(\int_\Omega G(|u|)\,dx\right)^{\frac{1}{1+\delta}}, \left(\int_\Omega G(|u|)\,dx\right)^{\frac{1}{1+g_0}}\right\}$$

Demonstração. Se $\int_\Omega G(|u|)\,dx = 0$, então

$$x \mapsto \int_0^{|u(x)|} g(s)\,ds = 0 \quad x \in \Omega \text{ q.t.p.}$$

pois G é não negativa. Pela regularidade de g, vem que nos $x \in \Omega$ onde $\int_0^{|u(x)|} g(s)\,ds = 0$, a medida do intervalo $[0, |u(x)|]$ é nula. Ou seja, $|u(x)| = 0$. Portanto, $u(x) = 0$ para quase todo $x \in \Omega$.

Suponha que $\int_\Omega G(|u|)\,dx > 0$ e defina

$$M = \max\left\{\left(2(1+g_0)\int_\Omega G(|u|)\,dx\right)^{\frac{1}{1+\delta}}, \left(2(1+g_0)\int_\Omega G(|u|)\,dx\right)^{\frac{1}{1+g_0}}\right\}.$$

Por $G - 2$,

$$\int_\Omega G\left(\frac{|u(x)|}{M}\right) dx \leq (1+g_0)\max\left\{\frac{1}{M^{1+\delta}}, \frac{1}{M^{1+g_0}}\right\}\int_\Omega G(|u(x)|)\,dx \leq 1.$$

Portanto, temos o desejado. ■

Definição 2.5 (Espaço de Orlicz-Sobolev)**.** *Definimos* $W^{1,G}(\Omega)$ *o espaço das funções* $u \in L^G(\Omega)$ *tais que as derivadas distribucionais existem e pertencem a* $L^G(\Omega)$.

Muniremos $W^{1,G}(\Omega)$ com a seguinte norma,

$$\|u\|_{W^{1,G}(\Omega)} = \max\left\{\|u\|_{L^G(\Omega)}, \|\nabla u\|_{L^G(\Omega)}\right\}.$$

Denotaremos por $W_0^{1,G}(\Omega)$ o fecho de $C_0^\infty(\Omega) \subset W^{1,G}(\Omega)$ na topologia da norma $\|\cdot\|_{W^{1,G}(\Omega)}$.

Teorema 2.4. $\big(L^G(\Omega), \|\cdot\|_G\big)$ *e* $\big(W^{1,G}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,G}(\Omega)}\big)$ *são um espaços de Banach reflexivos.*

Demonstração. Ver Teorema 2.1 em Martínez e Wolanski (2008). ∎

Teorema 2.5. $L^G(\Omega) \hookrightarrow L^{1+\delta}(\Omega)$ *e* $W^{1,G}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,1+\delta}(\Omega)$ *continuamente.*

Demonstração. Ver Teorema 2.2 em Martínez e Wolanski (2008). ∎

2.2 Resultados para soluções do g-laplaciano

Começaremos esta seção estabelecendo condições para apresentarmos duas importantes desigualdades, a saber, a desigualdade de Harnack e a estimativa de regularidade $C^{1,\alpha}$ interior. Para tanto fazer considerar a seguinte EDP.

$$\operatorname{div}(\mathcal{A}_g(\nabla u)) = f, \text{ em } \Omega \tag{7}$$

com $f \in L^q(\Omega)$ e $\mathcal{A}_g$ satisfazendo as seguintes condições estruturais para $\eta \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{cases} |\mathcal{A}_g(\eta)| & \leq & \Lambda_1 g(\eta) + \Lambda_2 \\ \mathcal{A}_g(\eta)\cdot\eta & \geq & |\eta| g(|\eta|) - \Lambda_3, \end{cases} \tag{8}$$

onde Λ_1, Λ_2 e Λ_3 são constantes positivas.

Definição 2.6 (Solução fraca)**.** *Dizemos que* $u \in W^{1,G}(\Omega)$ *é uma subsolução (supersolução) fraca de* (7) *se*

$$\int_\Omega \mathcal{A}_g(\nabla u)\cdot\nabla\varphi \, dx \leq -\int_\Omega f\varphi \, dx, \ (\geq)$$

para toda $0 \leq \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$*. Enfim, dizemos que* u *é uma solução fraca se é subsolução e supersolução. Neste caso especifico não precisamos impor sinal sobre* φ*.*

2.2.1 *Desigualdade de Harnack e regularidade interior* $C^{1,\alpha}$

Teorema 2.6 (Desigualdade de Harnack)**.** *Seja* g *satisfazendo* (4) *e* G *a primitiva de* g*. Seja* $r > 0$ *e* $u \in W^{1,G}(B_r)$ *uma solução fraca de*

$$\operatorname{div}(\mathcal{A}_g(\nabla u)) = f \text{ em } B_r,$$

com $\mathcal{A}_g$ *satisfazendo* (8) *e* $f \in L^q(B_r)$*,* $q > n$*. Então existe uma constante* $C = C(n, \delta, g_0, \Lambda_1, q) > 1$*, tal que*

$$\sup_{B_{\frac{r}{2}}} u \leq C\left[\inf_{B_{\frac{r}{2}}} u + r\left(G^{-1}(\Lambda_3) + g^{-1}(\Lambda_2 + r^{1-\frac{n}{q}}\|f\|_{L^q(B_r)})\right)\right].$$

Se $q = \infty$, *então a constante* C *não depende de* q.

Demonstração. Ver Lieberman (1992). ■

Em particular, esse resultado é válido quando $\mathcal{A}_g(\eta) := \frac{g(|\eta|)}{|\eta|}\eta$. Claramente, essa configuração para $\mathcal{A}_g$ satisfaz as condições em (8) para $\Lambda_1 = 1$ e $\Lambda_2 = \Lambda_3 = 0$.

Seja $e \in \mathbb{R}^n$, com $|e| = 1$. Defina para $\eta \in \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{A}_{g,e}(\eta) := \frac{g(|\eta + e|)}{|\eta + e|}(\eta + e).$$

Seja v solução fraca de

$$\Delta_{g,e}u := \operatorname{div}(\mathcal{A}_{g,e}(\nabla u)) = f$$

com $f \in L^q(\Omega)$, $q > n$. Então, para qualquer constante positiva C, v é também solução fraca de

$$\mathcal{A}_{Cg,e}(\nabla v) = Cf.$$

Com isso temos o seguinte Lema

Lema 2.4. *Seja* v *uma solução fraca para*

$$\Delta_{g,e}v = f$$

em Ω. *Então, existem constantes* $C_1(g_0)$ *e* $C_2(g_0, g(1))$ *tal que o operador* $\Delta_{C_1g,e}$ *satisfaz as condições estruturais, isto é,*

$$|A_{C_1g,e}(\eta)| \leq C_2(g(\eta) + 1) \text{ e } A_{C_1g,e}(\eta) \cdot \eta \geq |\eta|g(|\eta|) - C_2.$$

Demonstração. Com efeito, para $\mathcal{A}_{g,e}(\eta) := \dfrac{g(|\eta + e|)}{|\eta + e|}(\eta + e)$, temos

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}_{g,e}(\eta)| = |g(|\eta + e|)| &\leq g(|\eta| + 1) \\
&\leq (1 + g_0)\frac{G(|\eta| + 1)}{|\eta| + 1} \\
&\leq \frac{(1 + g_0)^2}{|\eta| + 1}2^{g_0}(G(|\eta|) + G(1)) \\
&\leq 2^{g_0}(1 + g_0)^2\left(\frac{G(|\eta|)}{|\eta|} + G(1)\right) \\
&\leq 2^{g_0}(1 + g_0)^2(g(|\eta|) + g(1)) \\
&\leq 2^{g_0}(1 + g_0)^2(g(|\eta|) + g(1) + g(|\eta|)g(1) + 1) \\
&= 2^{g_0}(1 + g_0)^2(g(|\eta|) + 1)(g(1) + 1).
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{g,e}(\eta)\cdot\eta &= \frac{g(|\eta+e|)}{|\eta+e|}(\eta+e)\cdot\eta\\
&= \frac{g(|\eta+e|)}{|\eta+e|}(\eta+e)\cdot(\eta+e-e)\\
&= \frac{g(|\eta+e|)}{|\eta+e|}(|\eta+e|^2-(\eta+e)\cdot e)\\
&\geq g(|\eta+e|)|\eta+e|-g(|\eta+e|)\\
&\geq G(|\eta+e|)-g(|\eta+e|).
\end{aligned}$$

Agora observe que

$$\begin{aligned}
G(|\eta|)=G(|\eta+e-e|) &\leq G(|\eta+e|+1)\\
&\leq 2^{g_0}(1+g_0)(G(|\eta+e|)+G(1))\\
&\leq 2^{g_0}(1+g_0)(G(|\eta+e|)+g(1)).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$G(|\eta+e|)\geq \frac{1}{2^{g_0}(1+g_0)}G(|\eta|)-g(1).$$

Logo,

$$\mathcal{A}_{g,e}(\eta)\cdot\eta\geq \frac{1}{2^{g_0}(1+g_0)}G(|\eta|)-g(1)-g(|\eta+e|).$$

Se $|\eta+e|\leq 2$, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{g,e}(\eta)\cdot\eta &\geq \frac{1}{2^{g_0(1+g_0)}}G(|\eta|)-g(1)-g(2)\\
&\geq \frac{1}{2^{g_0}(1+g_0)^2}|\eta|g(|\eta|)-g(1)-\min\{2^{\delta},2^{g_0}\}g(1)\\
&\geq \frac{1}{2^{g_0}(1+g_0)^2}|\eta|g(|\eta|)-g(1)-2^{g_0}g(1)\\
&= \frac{1}{2^{g_0}(1+g_0)^2}|\eta|g(|\eta|)-(1+2^{g_0})g(1).
\end{aligned}$$

Agora, se $|\eta+e|>2$, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{g,e}(\eta)\cdot\eta &\geq g(|\eta+e|)|\eta+e|-g(|\eta+e|)\\
&= g(|\eta+e|)|\eta+e|\left(1-\frac{1}{|\eta+e|}\right)\\
&\geq \frac{1}{2}G(|\eta+e|)\\
&\geq \frac{1}{2^{g_0+1}(1+g_0)}|\eta|g(|\eta|)-\frac{1}{2}g(1).
\end{aligned}$$

Dos dois casos analizados, vem que

$$\mathcal{A}_{g,e}(\eta)\cdot\eta\frac{1}{2^{g_0+1}(g_0+1)^2}|\eta|g(|\eta|)-(2^{g_0+1})g(1).$$

Tome $C_1 := 2^{g_0+1}(1+g_0)^2$.

$$|\mathcal{A}_{C_1g,e}(\eta)| = C_1|\mathcal{A}_{g,e}(\eta)| \leq \underbrace{C_1 2^{g_0}(1+g_0)^2(1+g(1))}_{\tilde{C}_2}(g(|\eta|)+1)$$

e

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{C_1g,e}(\eta)\cdot\eta &= C_1\mathcal{A}_{g,e}(\eta)\cdot\eta \\
&\geq C_1\left(\frac{1}{2^{g_{0+1}}(1+g_0)^2}|\eta|g(|\eta|)-(2^{g_0}+1)g(1)\right) \\
&= |\eta|g(|\eta|)-\underbrace{C_1(2^{g_0}+1)g(1)}_{:=\overline{C}_2}.
\end{aligned}$$

Tome $C_2 := \max\{\tilde{C}_2, \overline{C}_2\}$. ■

Teorema 2.7 (Regularidade interior $C^{1,\alpha}$)**.** *Seja* g *satisfazendo* (4) *e* G *a primitiva de* g*. Seja* $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ *aberto limitado e* $u\in W^{1,G}(\Omega)$ *uma solução fraca de*

$$\Delta_g(u) = f \ \textit{em}\ \Omega,$$

com $f\in L^q(\Omega)$, $q>n$*. Então, existem constantes* $C = C(n,\delta,g_0,\Lambda_1,q,\operatorname{dist}(\Omega',\partial\Omega)) > 1$ *e* $0<\alpha<1$, $\alpha=\alpha(n,\delta,g_0,\Lambda_1,q)$ *tais que*

$$||u||_{C^{1,\alpha}(\Omega')} \leq C\left(||u||_{L^\infty(\Omega)} + g^{-1}\left(||f||_{L^q(\Omega)}\right)\right).$$

Demonstração. Ver Lieberman (1992). ■

2.2.2 *Princípio da comparação*

Defina, para $\eta\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$,

$$\mathcal{A}_g(\eta) = \frac{g(|\eta|)}{|\eta|}\eta.$$

Inspirados na Proposição 5.2 de Braga e Moreira (2018), temos o seguinte resultado:

Teorema 2.8 (Principio da comparação)**.** *Seja* $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ *aberto limitado,* $u,v\in W^{1,G}(\Omega)$ *e* $f\in L^1(\Omega)$ *tal que* $\operatorname{div}(\mathcal{A}_g(\nabla u))\geq f$ *e* $\operatorname{div}(\mathcal{A}_g(\nabla v))\leq f$ *no sentido das distribuições em* Ω*. Assim, se* $u\leq v$ *em* $\partial\Omega$ *no sentido de Sobolev, isto é,* $(u-v)^+\in W_0^{1,G}(\Omega)$*, então*

$u \le v$ *em* Ω *a menos de um conjunto de medida de Lebesgue nula.*

Demonstração. Ora,

$$\int_\Omega \mathcal{A}_g(\nabla u(x))\nabla\varphi(x)\,dx \le -\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx,\ \forall\, 0 \le \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{9}$$

$$\int_\Omega \mathcal{A}_g(\nabla v(x))\nabla\varphi(x)\,dx \ge -\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx,\ \forall\, 0 \le \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{10}$$

Multiplicando (10) por (-1) e somando o resultado com (9). Então,

$$\int_\Omega \left(\mathcal{A}_g(\nabla u(x)) - \mathcal{A}_g(\nabla v(x))\right)\nabla\varphi(x)\,dx \le 0,\ \forall\ 0 \le \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{11}$$

Afirmação: A desigualdade em (11) é válida se consideramos $0 \le \varphi \in W_0^{1,G}(\Omega)$.

Prova da Afirmação: Com efeito, primeiro observe que se $\xi \in W^{1,G}(\Omega)$ então, por *($\tilde{G}$-2)*

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \tilde{G}(|\mathcal{A}_g(\nabla\xi(x))|)\,dx &= \int_\Omega \tilde{G}\left(\left|\frac{g(|\nabla\xi|)}{|\nabla\xi|}\nabla\xi\right|\right)dx \\
&= \int_\Omega \tilde{G}(g(|\nabla\xi|))\,dx \\
&\le g_0\int_\Omega G(|\nabla\xi|)\,dx < \infty.
\end{aligned}$$

Daí segue que $(\mathcal{A}_g(\nabla u(x)) - \mathcal{A}_g(\nabla v(x))) \in L^{\tilde{G}}(\Omega)$.

Seja $0 \le \psi \in W_0^{1,G}(\Omega)$, então existe uma sequências de funções $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$\|\psi_k - \psi\|_{W^{1,G}(\Omega)} \to 0,$$

quando $k \to \infty$. *A priori*, não sabemos se as ψ_k são todas não negativas. Contudo, sabemos que $W_0^{1,G}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,1+\delta}(\Omega)$ continuamente. Então,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla(\psi_k^+ - \psi)|^{1+\delta}\,dx &= \int_{\Omega\cap\{\psi_k>0\}} |\nabla(\psi_k - \psi)|^{1+\delta}\,dx + \int_{\Omega\cap\{\psi_k<0\}} |\nabla\psi|^{1+\delta}\,dx \\
&= \int_{\Omega\cap\{\psi_k>0\}} |\nabla(\psi_k - \psi)|^{1+\delta}\,dx + \int_{\{\psi>0\}} \chi_{\{\psi_k<0\}}|\nabla\psi|^{1+\delta}\,dx.
\end{aligned}$$

A menos de uma subsequência $\psi_k \to \psi$ q.t.p.. Com isso,

$$\chi_{\{\psi_k<0\}} \to 0 \text{ q.t.p..}$$

Então pelo Teorema da convergência dominada e tendo em vista essas últimas estimativas

$$\psi_k^+ \to \psi$$

em $W_0^{1,G}(\Omega)$ quando $k \to \infty$.

Agora, temos uma sequências de funções positivas de suporte compacto que convergem para ψ. Infelizmente, não podemos garantir a regularidade C^∞ para elas. Mas isso pode ser resolvido utilizando *mollifiers*. Seja $0 \leq \eta \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ radialmente simétrica com $\int_\Omega \eta \, dx = 1$. A título de exemplo, poderíamos tomar

$$\eta(x) = \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right), & \text{se} \quad |x| < 1. \\ 0, & \text{se} \quad |x| \geq 1. \end{cases}$$

onde $c = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) \, dx\right)^{-1}$. Em particular, seja para $x \in \mathbb{R}^n$ e $\varepsilon > 0$

$$\eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Sabemos que $\psi_k^\varepsilon := \eta_\varepsilon * \psi_k^+$ é $C_0^\infty(\Omega)$, converge para ψ_k^+ em $W_0^{1,1+\delta}(\Omega)$ quando $\varepsilon \to 0$. Além disso, tanto ψ_k^ε quanto $\nabla\psi_k^\varepsilon$ convergem, respectivamente, para ψ e $\nabla\psi$ q.t.p. quando $\varepsilon \to 0$.

Resta checarmos que ψ_k^ε converge para ψ em $W_0^{1,G}$. Ora, dado $\tau > 0$ existem $k_0 > 0$ tais que para $k > k_0$

$$||\psi_k^+ - \psi||_{W_0^{1,1+\delta}(\Omega)} < \frac{\tau}{2}$$

e tendo em vista $k > k_0$, existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(k) > 0$ tal que para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$$||\psi_k^\varepsilon - \psi_k^+||_{W_0^{1,1+\delta}(\Omega)} < \frac{\tau}{2}.$$

Então, para $k > k_0$ e $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$$||\psi_k^\varepsilon - \psi||_{W_0^{1,1+\delta}} \leq ||\psi_k^\varepsilon - \psi_k^+||_{W_0^{1,1+\delta}} + ||\psi_k^+ - \psi||_{W_0^{1,1+\delta}} < \tau.$$

De maneira similar, checamos que ψ_k^ε e $\nabla\psi_k^\varepsilon$ converge q.t.p. para ψ e $\nabla\psi$, respectivamente, quando $\varepsilon \to 0$ e $k \to \infty$. Portanto, defina $\tilde{\psi}_k := \psi_k^{\frac{1}{k}}$.

Por fim, chequemos que $\tilde{\psi}_k$ converge para ψ em $W^{1,G}$. Ora, é suficiente checar a convergência em média. Note que $G(|\tilde{\psi}_k(x) - \psi(x)|)$ e $G(|\nabla(\tilde{\psi}_k(x) - \psi(x))|)$ convergem para zero q.t.p., em particular, a menos de uma subsequência, podemos supor que $\{G(|\tilde{\psi}_k - \psi|)\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $\{G(|\nabla(\tilde{\psi}_k - \psi)|)\}_{k\in\mathbb{N}}$ são decrescentes então pelo Teorema da convergência monótona

$$\int_\Omega G(|\tilde{\psi}_k(x) - \psi(x)|) \, dx \to 0$$

e

$$\int_\Omega G(|\nabla\tilde{\psi}_k(x) - \nabla\psi(x)|) \, dx \to 0$$

quando $k \to \infty$. Dessa forma, $\tilde{\psi}_k$ converge para ψ em $W^{1,G}$.

Com isso, vem pela desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned} \|\left(\mathcal{A}_g(\nabla u) - \mathcal{A}_g(\nabla v)\right) \nabla(\tilde{\psi}_k - \psi)\|_{L^1(\Omega)} &\leq \int_\Omega |\mathcal{A}_g(\nabla u(x)) - \mathcal{A}_g(\nabla v(x))| \, |\nabla(\tilde{\psi}_k - \psi)(x)| \, dx \\ &\leq 2\|\mathcal{A}_g(\nabla u) - \mathcal{A}_g(\nabla v)\|_{L^{\tilde{G}}(\Omega)} \|\nabla\tilde{\psi}_k - \nabla\psi\|_{L^G(\Omega)}. \end{aligned}$$

Fazendo $k \to \infty$, temos que

$$\int_\Omega \left(\mathcal{A}_g(\nabla u(x)) - \mathcal{A}_g(\nabla v(x))\right) \nabla\tilde{\psi}_k(x) \, dx \to \int_\Omega \left(\mathcal{A}_g(\nabla u(x)) - \mathcal{A}_g(\nabla v(x))\right) \nabla\psi(x) \, dx$$

Como ψ_k satisfaz (11) para todo k, temos que no limite a desigualdade é preservada. Portanto,

$$\int_\Omega \left(\mathcal{A}_g(\nabla u(x)) - \mathcal{A}_g(\nabla v(x))\right) \nabla\psi(x) \, dx \leq 0, \ \forall \ 0 \leq \psi \in W_0^{1,G}(\Omega).$$

O que prova a afirmação.

Logo, tomando $\psi_0 = (u - v)^+$ segue que

$$\int_{\{u>v\}} \left(\mathcal{A}_g(\nabla u(x)) - \mathcal{A}_g(\nabla v(x))\right) \left(\nabla u(x) - \nabla v(x)\right) dx \leq 0. \tag{12}$$

Afirmação: O integrando em (12) é não negativo.

Prova da Afirmação: Sejam $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$, então,

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{A}_g(\xi) - \mathcal{A}_g(\eta)\right)(\xi - \eta) &= \left(\frac{g(|\xi|)}{|\xi|}\xi - \frac{g(|\eta|)}{|\eta|}\eta\right)(\xi - \eta) \\ &= \frac{g(|\xi|)}{|\xi|}|\xi|^2 - \frac{g(|\xi|)}{|\xi|}\xi \cdot \eta - \frac{g(|\eta|)}{|\eta|}\xi \cdot \eta + \frac{g(|\eta|)}{|\eta|}|\eta|^2 \\ &\geq \min\left\{\frac{g(|\xi|)}{|\xi|}, \frac{g(|\eta|)}{|\eta|}\right\}\left(|\xi|^2 - 2\xi \cdot \eta + |\eta|^2\right) \\ &= \min\left\{\frac{g(|\xi|)}{|\xi|}, \frac{g(|\eta|)}{|\eta|}\right\}|\xi - \eta|^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

O que prova o afirmado!

Dessa afirmação e (12), temos que

$$\int_{\{u>v\}} \left(\mathcal{A}_g(\nabla u(x)) - \mathcal{A}_g(\nabla v(x))\right) \left(\nabla u(x) - \nabla v(x)\right) dx = 0 \tag{13}$$

Assim, o integrando é nulo q.t.p. em $\{u > v\}$. Então $\nabla u = \nabla v$ em $\{u > v\}$. Portanto, $\nabla\psi_0 = 0$ q.t.p. em Ω. Usando mais uma vez o mergulho de $W_0^{1,G}(\Omega)$ em $W^{1,1+\delta}(\Omega)$

temos pela desigualdade de Poincaré que $(u-v)^+ = 0$ q.t.p. em Ω. Dessa forma, $u \leq v$ em Ω. ■

2.2.3 *Relações entre os tipos de solução para o g-laplaciano*

Aqui apresentaremos resultados de equivalência entre as soluções fracas e as soluções no sentido da viscosidade para o operador g-laplaciano. Já definimos as soluções fracas em (2.6). Vamos começar com outras definições. Para isso considere:

$$\Delta_g u = f \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{14}$$

onde $f \in C(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Definição 2.7. *Uma função $u : \Omega \to (-\infty, +\infty]$ é chamada G-superharmônica, se u satisfaz*

(1) u é semicontínua inferiormente,

(2) u é limitada q.t.p.,

(3) Vale o princípio da comparação: se v é uma solução fraca de $\Delta_g v = f$ em $D \subset \Omega$, u é contínua em $\overline{D}$ e $u \geq v$ em ∂D, então $u \geq v$ em D.

Uma função $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ é chamada de G-subharmônica se $-u$ é G-superharmônica.

Definição 2.8. *Uma função $u : \Omega \to (-\infty, +\infty]$ é chamada supersolução (subsolução) no sentido da viscosidade para* (14)*.*

(1) u é semicontínua inferiormente,

(2) u é limitada q.t.p.,

(3) Se existe $\varphi \in C^2(\Omega)$ tocando u por baixo (por cima) estritamente em $x_0 \in \Omega$ e $\nabla\varphi(x_0) \neq 0$, então

$$\Delta_g \varphi(x) \leq f(x) \quad \left((\Delta_g \varphi(x) \geq f(x))\right).$$

Agora vamos aos resultados:

Lema 2.5. *Seja $u \in C^0(\Omega)$. São equivalentes:*

(A) u é uma supersolução no sentido das distribuições para (14)*.*

(B) u é uma função G-superharmônica.

(C) u é uma supersolução no sentido da viscosidade para (14)*.*

O mesmo vale para soluções e subsoluções.

Demonstração. A prova segue nas mesmas linhas dos Teoremas 2.4, 2.5 e 2.6 de Fang e Zhou (2014). ■

2.3 Compacidade no espaço $G(\delta, g_0)$

Sejam $0 < \delta \leq g_0$ e $G(\delta, g_0)$ o espaço das funções $g : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ que satisfazem as propriedades na definição (2.1) e (4). Infelizmente, o espaço $G(\delta, g_0)$ não possui uma boa compacidade com a norma C^1. Isso está esclarecido em Braga (2015). Neste trabalho de tese foi exibido um contra-exemplo, especificamente, o exemplo 3.2 e em Braga (2018) ele obtém um subespaço de $G(\delta, g_0)$ onde a compacidade é boa. Para tal propriedade é preciso fazer imposições no módulo de continuidade de Q_g onde

$$Q_g(t) := \frac{tg'(t)}{g(t)}$$

e pedir que $0 < e_0 \leq g(1) \leq E_0$.

Definição 2.9. *Um módulo de continuidade é uma função contínua não decrescente,* $\omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *onde* $\omega(0) = 0$ *e* $\omega(t) > 0$*, para todo* $t > 0$*. Para qualquer* $0 < l < L < +\infty$*, defina*

$$\omega_g^{l,L}(t) = \sup\{|Q_g(x) - Q_g(y)|;\ l < x, y < L \text{ e } |x - y| \leq t\}.$$

A imposição sobre módulo de continuidade de Q_g é caracterizada na definição abaixo.

Definição 2.10 (Módulo de Continuidade de Q_g)**.** *Dizemos que* g *satisfazendo* (4) *pertence a* $G(\delta, g_0, \xi_1, \xi_2)$ *se para funções não decrescentes* $\xi_1, \xi_2 : (0, \infty) \to (0, \infty)$ *com* $\lim_{t \to 0^+} \xi_2(t) = 0$ *e qualquer* $0 < l < L < \infty$*, vale a seguinte estimativa,*

$$\int_0^{L-l} \frac{\omega^{l,L}(t)}{t}\, dt \leq C(\delta, g_0)\xi_1\left(\frac{L}{l}\right)\xi_2\left(\frac{L-l}{l}\right).$$

3 BARREIRAS DE PUCCI: EXISTÊNCIA, UNICIDADE E GEOMETRIA

Redigimos esse capítulo, inspirados em Braga e Moreira (2018) e no capítulo 5 de Braga (2021). Nele caminharemos no sentido de fundamentarmos as barreiras. Elas são cruciais para a nossa argumentação. Por isso, buscamos concentrar os resultados preliminares utilizados nas estimativas da primeira seção. Nas demais, discutiremos a existência, unicidade e geometria de tais barreiras. Por fim, apresentaremos os ajustes necessários para utilizá-las via o princípio da comparação. Isto é, exibiremos como elas se comportam quando avaliadas no g-laplaciano.

3.1 Os operadores elípticos totalmente não lineares e a teoria L^p das soluções no sentido da viscosidade

Seja $\mathcal{S}^{n\times n}$ o conjunto das matrizes simétricas de ordem n onde o tornaremos parcialmente ordenado com a seguinte relação de ordem: dados $A, B \in \mathcal{S}^{n\times n}$ diremos que $A \geq B$ se $A - B$ é positiva semi-definida. Isto é, $(A-B)\xi\cdot\xi \geq 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Agora, considere

$$F : \mathcal{S}^{n\times n} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times (\Omega \setminus \mathcal{N}) \to \mathbb{R}$$

uma função, onde conjunto $\mathcal{N}$ possui medida de Lebesgue nula. Apresentaremos resultados para soluções de EDP's de segunda ordem, totalmente não lineares, da forma

$$F(D^2u(x), \nabla u(x), u(x), x) = f(x)$$

onde $f \in L^p$, $p > n$.

3.1.1 *Operadores extremais de Pucci*

Considere $0 < \lambda \leq \Lambda$. Os operadores extremais de Pucci $\mathcal{M}^{\pm}_{\lambda,\Lambda} : \mathcal{S}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ são dados por

$$\mathcal{M}^{-}_{\lambda,\Lambda}(M) = \lambda \cdot \sum_{e_i>0} e_i + \Lambda \cdot \sum_{e_i<0} e_i, \quad \mathcal{M}^{+}_{\lambda,\Lambda}(M) = \Lambda \cdot \sum_{e_i>0} e_i + \lambda \cdot \sum_{e_i<0} e_i.$$

onde e_i são os autovalores de M. Sendo $A_{\lambda,\Lambda} := \{B \in \mathcal{S}^{n\times n};\ \lambda|x|^2 \leq Bx\cdot x \leq \Lambda|x|^2\}$, temos que

$$\mathcal{M}^{-}_{\lambda,\Lambda}(M) = \inf_{B\in A_{\lambda,\Lambda}} \operatorname{tr}(BM)$$

e

$$\mathcal{M}^{+}_{\lambda,\Lambda}(M) = \sup_{B\in A_{\lambda,\Lambda}} \operatorname{tr}(BM),$$

onde $\operatorname{tr}(\cdot)$ é o traço da matriz.

Lema 3.1 (Propriedades dos operadores extremais de Pucci). *Sejam* $\mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(\cdot)$ *e* $\mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(\cdot)$ *os operadores extremais de Pucci,* $M, N \in \mathcal{S}^{n\times n}$ *então*

a) $\mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(M) \leq \mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(M)$.

b) $\lambda' \leq \lambda \leq \Lambda \leq \Lambda' \Rightarrow \mathcal{M}^-_{\lambda',\Lambda'}(M) \leq \mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(M)$ *e* $\mathcal{M}^+_{\lambda',\Lambda'}(M) \geq \mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(M)$.

c) $\mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(M) = -\mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(-M)$.

d) $\mathcal{M}^\pm_{\lambda,\Lambda}(\alpha M) = \alpha\mathcal{M}^\pm_{\lambda,\Lambda}(M)$, *se* $\alpha \geq 0$.

e) $\mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(M) + \mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(N) \leq \mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(M+N) \leq \mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(M) + \mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(N)$.

f) $\mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(M) + \mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(N) \leq \mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(M+N) \leq \mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(M) + \mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(N)$.

g) $N \geq 0 \Rightarrow \lambda\|N\| \leq \mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(N) \leq \mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(N) \leq n\Lambda\|N\|$.

Demonstração. Ver Lema 2.10 em Caffarelli e Cabré (1995). ■

Para $\gamma > 0$ defina $\mathcal{P}^\pm_{\lambda,\Lambda,\gamma} : \mathcal{S}^{n\times n} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dadas por

$$\mathcal{P}^\pm_{\lambda,\Lambda,\gamma}(M,p) = \mathcal{M}^\pm_{\lambda,\Lambda}(M) \pm \gamma|p|.$$

Como em Crandall *et al.* (1996) e Caffarelli *et al.* (1996) pediremos que F possua as seguintes propriedades:

i. É uniformemente elíptica e Lipschitz em p. Isto é,

$$\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda,\gamma}(X-Y,p-q) \leq F(X,p,r,x) - F(Y,q,r,x) \leq \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda,\gamma}(X-Y,p-q)$$

ii. $r \mapsto F(X,p,r,x)$ é não decrescente e uniformemente contínua, para todo $x \in \Omega - \mathcal{N}$ e limitada em X, p, r.

iii. $F(0,0,0,x) = 0$.

Sempre que F satisfazer as condições acima diremos que F possui **estrutura**.

Em Crandall *et al.* (1996), podemos ver bons exemplos de operadores que satisfazem a propriedade *i.*. Alguns deles seriam:

1. Os operadores $\mathcal{P}^\pm_{\lambda,\Lambda,\gamma}$. Ora, pelas propriedades no *c) e)* e *f)* segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda,\gamma}(M,p) - \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda,\gamma}(N,q) &= \mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(M) - \gamma|p| - \mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(N) + \gamma|q| \\ &= \mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(M) + \mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(-N) - \gamma(|p| - |q|) \qquad (15) \\ &\leq \mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(M-N) + \gamma(|p-q|) \\ &= \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda,\gamma}(M-N,p-q). \end{aligned}$$

Temos de (15), que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda,\gamma}(M,p) - \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda,\gamma}(N,q) &= \mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(M) + \mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(-N) - \gamma(|p| - |q|) \\ &\geq \mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(M-N) - \gamma(|p-q|) \\ &= \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda,\gamma}(M-N,p-q). \end{aligned}$$

De maneira análoga, obtemos as mesmas estimativas para $\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda,\gamma}$.

2. Equações elípticas lineares,

$$F(X,p,r,x) = \mathrm{tr}(A(x)X) + b(x)\cdot p + c(x)r$$

onde A, b, c são funções mensuráveis limitadas em Ω com imagem em $\mathcal{S}^{n\times n}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$, respectivamente, e

$$\lambda|\xi|^2 \le A(x)\xi\cdot\xi \le \Lambda|\xi|^2, \quad |b(x)| \le \gamma \quad \text{e} \quad c(x) \le 0 \quad \text{para } x\in\Omega \text{ q.t.p..}$$

Note que

$$\begin{aligned} F(M,p,r,x) - F(N,q,s,x) &= \mathrm{tr}(A(x)(M-N)) + b(x)\cdot(p-q) \\ &\le \mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(M-N) + |b(x)||p-q| \\ &\le \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda,\gamma}(M-N,p-q). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} F(M,p,r,x) - F(N,q,s,x) &= \mathrm{tr}(A(x)(M-N)) + b(x)\cdot(p-q) \\ &\ge \mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(M-N) - |b(x)||p-q| \\ &\ge \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda,\gamma}(M-N,p-q). \end{aligned}$$

3. Um último exemplo. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ conjuntos de índices. Defina para cada $\alpha\in\mathcal{A}$ e $\beta\in\mathcal{B}$, $F_{\alpha,\beta} : \mathcal{S}^{n\times n}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\Omega\to\mathbb{R}$ uma função que satisfaz *i.*. Então,

$$F(X,p,r,x) := \sup_{\beta\in\mathcal{B}}\inf_{\alpha\in\mathcal{A}} F_{\alpha,\beta}(X,p,r,x)$$

também satisfaz *i.*. Com efeito, para todo $\alpha\in\mathcal{A}$ e $\beta\in\mathcal{B}$, temos que

$$\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda,\gamma}(M-N,p-q) \le F_{\alpha,\beta}(M,p,r,x) - F_{\alpha,\beta}(N,p,r,x) \le \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda,\gamma}(M-N,p-q).$$

Então,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda,\gamma}(M-N,p-q) + F_{\alpha,\beta}(N,p,r,x) &\le F_{\alpha,\beta}(M,p,r,x) \\ &\le \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda,\gamma}(M-N,p-q) + F_{\alpha,\beta}(N,p,r,x). \end{aligned} \tag{16}$$

Observe que

$$\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda,\gamma}(M-N,p-q) + F_{\alpha,\beta}(N,p,r,x) \ge \mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda,\gamma}(M-N,p-q) + \inf_{\alpha\in\mathcal{A}} F_{\alpha,\beta}(N,p,r,x)$$

com isso podemos passar o ínfimo nas demais lados da desigualdade em (16). A posteriori temos que

$$\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda,\gamma}(M-N,p-q)+\inf_{\alpha\in\mathcal{A}} F_{\alpha,\beta}(N,p,r,x) \leq \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda,\gamma}(M-N,p-q)+\sup_{\beta\in\mathcal{B}}\inf_{\alpha\in\mathcal{A}} F_{\alpha,\beta}(N,p,r,x).$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda,\gamma}(M-N,p-q)+F &\leq F_{\alpha,\beta}(M,p,r,x)\\ &\leq \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda,\gamma}(M-N,p-q)+F(N,p,r,x),\end{aligned}$$

ou seja, para todo $\alpha \in \mathcal{A}$ e $\beta \in \mathcal{B}$

$$\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda,\gamma}(M-N,p-q) \leq F_{\alpha,\beta}(M,p,r,x)-F(N,p,r,x) \leq \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda,\gamma}(M-N,p-q).$$

Tomando o ínfimo em α e depois o supremo em β, segue que

$$\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda,\gamma}(M-N,p-q) \leq F(M,p,r,x)-F(N,p,r,x) \leq \mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda,\gamma}(M-N,p-q).$$

3.1.2 *Teoria* L^p *das soluções no sentido da viscosidade*

A noção de solução de solução no sentido da viscosidade nasceu na década de 80, primeiramente para a equação de Hamilton-Jacobi, sendo apresenta por Crandall e Lions (1983). A posteriori outros matemáticos fizeram contribuições para a teoria, em particular, Caffarelli (1989b) traz um primeiro contato com a teoria L^p das soluções no sentido da viscosidade onde em Caffarelli *et al.* (1996) ele a torna mais robusta.

Definição 3.1 (Limites essenciais)**.** *Seja* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *uma função,* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto. Dizemos que o limite superior essencial de* f *é* k *quando* x *tende para* x_0*, denotamos por* $\operatorname{ess}\limsup_{x\to x_0} f(x) = k$*, se*

$$\inf_{\delta>0}\left(\operatorname{ess}\sup_{x\in B_\delta(x_0)} f(x)\right) = k.$$

De maneira similar, dizemos que o limite inferior essencial de f *é* l *quando* x *tende para* x_0*, denotamos por* $\operatorname{ess}\liminf_{x\to x_0} f(x) = l$*, se*

$$\sup_{\delta>0}\left(\operatorname{ess}\inf_{x\in B_\delta(x_0)} f(x)\right) = l.$$

Definição 3.2. *Seja* F *com* ***estrutura****,* $n < 2p$ *(*$1 \leq p$*, se* $n = 1$*) e* $f \in L^p_{loc}(\Omega)$*. Uma função* $u \in C(\Omega)$ *é uma subsolução (supersolução) no sentido da* L^p*-viscosidade de* $F = f$ *em* Ω *se para toda* $\varphi \in W^{2,p}(\Omega)$ *e* x_0 *que seja máximo local (respectivamente mínimo) de*

$u - \varphi$ *temos*

$$\begin{cases} \operatorname{ess}\liminf\limits_{x\to x_0} \left(F(D^2\varphi(x), \nabla\varphi(x), u(x), x) - f(x)\right) & \leq & 0 \\ (\operatorname{ess}\limsup\limits_{x\to x_0}(F(D^2\varphi(x), \nabla\varphi(x), u(x), x) - f(x)) & \geq & 0, \textit{ respectivamente}). \end{cases}$$

Definição 3.3. *Seja* F *com* ***estrutura****,* $n < 2p$ *(*$1 \leq p$*, se* $n = 1$*) e* $f \in C^0(\Omega)$*. Uma função* $u \in C(\Omega)$ *é uma subsolução (supersolução) no sentido da* C*-viscosidade de* $F = f$ *em* Ω *se para toda* $\varphi \in C^2(\Omega)$ *e* x_0 *que seja máximo local (respectivamente mínimo local) de* $u - \varphi$ *temos*

$$\begin{cases} F(D^2\varphi(x_0), \nabla\varphi(x_0), u(x_0), x_0) & \leq & f(x_0) \\ (F(D^2\varphi(x), \nabla\varphi(x), u(x_0), x_0) & \geq & f(x_0), \textit{ respectivamente}). \end{cases}$$

Isto é, a solução no sentido da C-viscosidade é a noção clássica de solução no sentido da viscosidade. Além disso, essa condição para p, se justifica no sentido de que funções em $W^{2,p}$ são duas vezes diferenciável q.t.p., se $p > \frac{n}{2}$. Isso foi demonstrado em Calderón e Zygmund (1961).

Definição 3.4. *Uma* L^p*-subsolução (supersolução, solução) forte em* Ω *para* $F = f$*, com* $f \in L^p$*,* $p \geq n$*, é uma função* $\psi \in W^{2,p}(\Omega)$*, tal que* $F(D^2\psi(x), \nabla\psi(x), \psi(x), x) \leq f(x)$ *(*$\geq f$*,* $= f$*) para* $x \in \Omega$ *q.t.p..*

Teorema 3.1. *Se* F *possui* ***estrutura****,* $n \leq p < \infty$ *e* $f \in L^p_{loc}(\Omega)$*.*

i. *Se* u *é uma* L^p*-solução forte de* $F \leq f$ *em* Ω*, então* u *é uma solução no sentido da* L^p*-viscosidade.*
ii. *Se* F, f *são contínuos, então* u *é uma solução no sentido da* C*-viscosidade se, e somente se,* u *é uma solução no sentido da* L^p*-viscosidade.*
iii. *Se* $n \leq q < p$ *então,* u *é uma solução no sentido da* L^q*-viscosidade se, e somente se,* u *é uma solução no sentido da* L^p*-viscosidade.*
iv. *As afirmações* i.*,* ii. *e* iii. *permanecem válidas se substituímos* $F \leq f$ *por* $F \geq f$ *ou* $F = f$*.*

Demonstração. Ver Teorema 2.1 em Crandall *et al.* (1996). ∎

Definição 3.5. *Seja* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *uma função. Chamaremos de conjunto de contato superior a seguinte coleção,*

$$\Upsilon^+(u) := \{x \in \Omega;\ \exists p \in \mathbb{R}^n \textit{ tal que } u(y) \leq u(x) + p \cdot (y - x) \textit{ para } y \in \Omega\},$$

Utilizamos uma letra diferente do clássico Γ para evitarmos um abuso de notação nos próximos capítulos.

Teorema 3.2 (Estimativa ABP)**.** *Seja* $f \in L^n(\Omega)$ *e* $u \in C^0(\Omega)$*. Se* u *é uma solução no* *sentido da* L^n*-viscosidade para*

$$\mathcal{P}^{-}_{\lambda,\Lambda,\gamma}(D^2u, \nabla u) \leq f \quad \textit{em} \quad \{u > 0\}$$

então

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^{+} + \mathrm{diam}(\Omega) C(\lambda, \gamma, n, \mathrm{diam}(\Omega)) \|f^{+}\|_{L^n(\Upsilon^{+}(u^{+}))}.$$

Similarmente, se u *é uma solução no sentido da* L^n*-viscosidade para*

$$f \leq \mathcal{P}^{+}_{\lambda,\Lambda,\gamma}(D^2u, \nabla u) \quad \textit{em} \quad \{u < 0\}$$

então

$$\sup_{\Omega} u^{-} \leq \sup_{\partial\Omega} u^{-} + \mathrm{diam}(\Omega) C(\lambda, \gamma, n, \mathrm{diam}(\Omega)) \|f^{-}\|_{L^n(\Upsilon^{+}(u^{-}))}.$$

Demonstração. Ver Proposição 3.3 em Caffarelli *et al.* (1996). ■

Teorema 3.3. *Seja* $f \in L^p_{loc}(\Omega)$*, com* $p \geq n$*, e* u *uma solução no sentido da* L^p*-viscosidade de* $\mathcal{P}^{-}_{\lambda,\Lambda,\gamma}(D^2u, \nabla u) \leq f$ *(respectivamente,* $f \leq \mathcal{P}^{+}_{\lambda,\Lambda,\gamma}(D^2u, \nabla u)$*) em* Ω*. Então* u *é duas vezes superdiferenciável (respectivamente, subdiferenciável) q.t.p. em* Ω*. Em particular, se* F *possui* ***estrutura*** *e* u *é uma solução no sentido da* L^p*-viscosidade de* $F = 0$*, então* u *é duas vezes diferenciável q.t.p. e as derivadas de* u *satisfazem a equação* $F = 0$ *q.t.p..*

Demonstração. Ver Teorema 3.6 em Caffarelli *et al.* (1996). ■

Corolário 3.1. *Nas hipóteses do Teorema 3.3, se* $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ *é uma subsolução no sentido da* L^p*-viscosidade (supersolução) de* $F = f$*, então ela é uma* L^p*-subsolução (supersolução) forte de* $F = f$ *em* Ω*.*

Demonstração. Ver Corolário 3.7 em Caffarelli *et al.* (1996). ■

Teorema 3.4. *Sejam* F_m, F *operadores com* ***estrutura*** *para* $m = 1, 2, \ldots,$ $p \geq n$ *e sejam* $f, f_m \in L^p(\Omega)$ *para* $m = 1, 2, \ldots$ *e sejam* $u_m \in C^0(\Omega)$ *subsoluções (supersoluções) no sentido da* L^p*-viscosidade de*

$$F_m(D^2u_m, \nabla u_m, u_m, x) = f_m \quad \textit{em} \quad \Omega$$

para $m = 1, 2, \ldots$*. Assuma que* $u_m \to u$ *uniformemente em compactos quando* $m \to \infty$*, e que para* $B_r(x_0) \subset \Omega$ *e* $\varphi \in W^{2,p}(B_r(x_0))$*, se*

$$g_m(x) = F_m(D^2\varphi(x), \nabla\varphi(x), u_m(x), x) - f_m(x),$$

$$g(x) = F(D^2\varphi(x), \nabla\varphi(x), u(x), x) - f(x),$$

então

$$\|(g - g_m)^+\|_{L^p(B_r(x_0))} \to 0 \qquad \left(\|(g - g_m)^-\|_{L^p(B_r(x_0))} \to 0\right).$$

Além disso, u *é uma subsolução no sentido da* L^p*-viscosidade (supersolução) de* $F = f$*.*

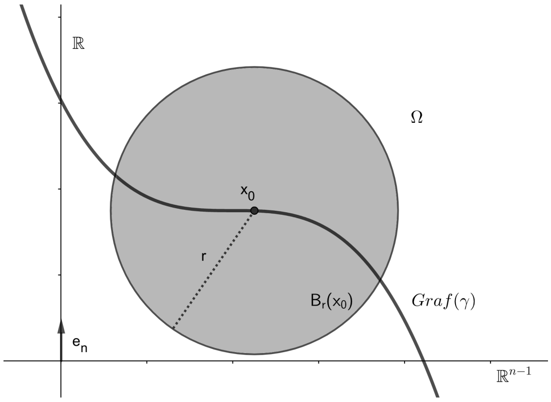
Demonstração. Ver Teorema 3.8 em Caffarelli *et al.* (1996). ■

Por fim apresentaremos um importante resultado de existência. Winter (2009) obtêm estimativas $W^{2,p}$ até a fronteira do domínio para soluções de equações totalmente não lineares. Dessa forma, ele estende os resultados de estimativas $W^{2,p}$ interior obtidos por Caffarelli (1989b). Além disso, ele explora algumas consequências, em particular, o próximo teorema. Mas antes de enunciá-lo precisamos de uma definição:

Definição 3.6. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto limitado. Dizemos que a fronteira de* Ω *é* $C^{1,1}$ *se para cada* $x \in \partial\Omega$*, existem* $r > 0$ *e* $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* $C^{1,1}$ *tal que a menos de uma rotação ou reordenação dos eixos*

$$\Omega \cap B_r(x) = \{y \in \Omega;\ \gamma(y') < y_n\} \cap B_r(x). \tag{17}$$

Figura 1 – Ilustração da definição de domínios com fronteira $C^{1,1}$.



Fonte: elaborado pelo autor.

Teorema 3.5 (Existência e unicidade)**.** *Seja* $n \leq p < \infty$*,* $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$*,* $\partial\Omega \in C^{1,1}$ *e considere o seguinte problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} F(D^2u, \nabla u, u, x) = f & \text{em} \quad \Omega \\ u = \varphi & \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{18}$$

onde $f \in L^p(\Omega)$*,* $\varphi \in W^{2,p}$ *e* F *possui* ***estrutura*** *e é convexa em* x*. Então, existe uma única solução no sentido da* L^p*-viscosidade para* (18)*. Mais ainda,* $u \in W^{2,p}(\Omega)$ *com estimativa*

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C\left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\varphi\|_{W^{2,p}(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)}\right),$$

com $0 < C = C(n, p, \lambda, \Lambda, \Omega)$ *universal.*

Demonstração. Ver Teorema 4.6 em Winter (2009). ∎

3.2 Existência das barreiras de Pucci

Agora nós estudaremos barreiras adequadas para problemas de Dirichlet envolvendo os operadores extremais de Pucci.

Doravante, sendo $u \in C^2(\Omega)$ denotaremos

$$u_i := \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad u_{ij} := \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j},$$

onde $1 \leq i, j \leq n$. Além de ser uma notação clássica na teoria, isso também ajuda a simplificar a notação.

O próximo Lema trata a respeito de propriedades que a hessiana de funções radiais de classe C^2 possuem é uma versão mais simples do Lema 5.1 de Braga e Moreira (2018).

Lema 3.2 (Hessiana de funções radialmente simétricas). *Seja* $w \in C^2(0, \infty)$ *e* $u(x) := w(|x|)$ *para* $x \in \mathbb{R}^n$. *Então,*

a. $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$;

b.
$$D^2u(x) = \frac{\omega'(|x|)}{|x|} \cdot Id_{n\times n} + \left(\frac{\omega''(|x|)}{|x|^2} - \frac{\omega'(|x|)}{|x|^3}\right) \cdot (x \otimes x)$$

para $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. *Aqui entendemos a notação* $\otimes$ *da seguinte maneira: dados* $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \otimes b$ *é a transformação linear* $x \mapsto (b \cdot x)a$;

c. *Os autovalores de* $D^2u(x)$ *são* $\omega''(|x|)$ *e* $\frac{\omega'(|x|)}{|x|}$ *com multiplicidade* 1 *e* $n-1$, *respectivamente. Em particular, para qualquer* $U \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$||D^2u||_{L^\infty(U)} \leq \sup_{x\in U} \left\{|\omega''(|x|)|, \frac{|\omega'(|x|)|}{|x|}\right\};$$

d. *Se* ω *é convexa e decrescente em* $(0, \infty)$, *segue que*

$$\mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2u(x)) = \lambda \left[\omega''(|x|) + \left(\frac{\Lambda(n-1)}{\lambda|x|}\right)\omega'(|x|)\right] \quad \forall x \in \mathbb{R}^n;$$

e. *Analogamente, se* ω *é concava e crescente em* $(0, \infty)$, *segue que*

$$\mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(D^2u(x)) = \lambda \left[\omega''(|x|) + \left(\frac{\Lambda(n-1)}{\lambda|x|}\right)\omega'(|x|)\right] \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Observe que o item [a.] é trivial. Pois, a função $x \mapsto |x|$ é C^∞ em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

e $\omega \in C^2(0,\infty)$. Nos voltemos para o item $b.$. Ora, temos que $\nabla u(x) = \frac{\omega'(|x|)}{|x|}x$. Então

$$\begin{aligned}
(u_i(x))_j &= \left(\frac{\omega'(|x|)}{|x|}x_i\right)_j \\
&= x_i\left(\frac{\omega'(|x|)}{|x|}\right)_j + \delta_{ij}\frac{\omega'(|x|)}{|x|} \\
&= x_i x_j\left(\frac{\omega''(|x|)}{|x|^2} - \frac{\omega'(|x|)}{|x|^3}\right) + \delta_{ij}\frac{\omega'(|x|)}{|x|}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$D^2u(x) = \frac{\omega'(|x|)}{|x|}\cdot \mathrm{Id}_{n\times n} + \left(\frac{\omega''(|x|)}{|x|^2} - \frac{\omega'(|x|)}{|x|^3}\right)\cdot (x\otimes x).$$

Para o item $c.$] Fixemos $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Então, pelo item $b.$

$$\begin{aligned}
D^2u(x)\cdot\frac{x}{|x|} &= \left[\frac{\omega'(|x|)}{|x|}\cdot \mathrm{Id}_{n\times n} + \left(\frac{\omega''(|x|)}{|x|^2} - \frac{\omega'(|x|)}{|x|^3}\right)\cdot (x\otimes x)\right]\cdot\frac{x}{|x|} \\
&= \frac{\omega'(|x|)}{|x|}\frac{x}{|x|} + \left(\frac{\omega''(|x|)}{|x|^2} - \frac{\omega'(|x|)}{|x|^3}\right)\cdot (x\otimes x)\frac{x}{|x|} \\
&= \frac{\omega'(|x|)}{|x|^2}x + \left(\frac{\omega''(|x|)}{|x|^2} - \frac{\omega'(|x|)}{|x|^3}\right)x|x| \\
&= \frac{\omega'(|x|)}{|x|^2}x + \omega''(|x|)\frac{x}{|x|} - \frac{\omega'(|x|)}{|x|^2}x \\
&= \omega''(|x|)\frac{x}{|x|}.
\end{aligned}$$

Agora seja $\xi \perp x$, então

$$\begin{aligned}
D^2u(x)\cdot\xi &= \left[\frac{\omega'(|x|)}{|x|}\cdot \mathrm{Id}_{n\times n} + \left(\frac{\omega''(|x|)}{|x|^2} - \frac{\omega'(|x|)}{|x|^3}\right)\cdot (x\otimes x)\right]\cdot\xi \\
&= \frac{\omega'(|x|)}{|x|}\xi + \left(\frac{\omega''(|x|)}{|x|^2} - \frac{\omega'(|x|)}{|x|^3}\right)\cdot \underbrace{(x\otimes x)\xi}_{=0} \\
&= \frac{\omega'(|x|)}{|x|}\xi.
\end{aligned}$$

Para finalizar esse item, seja $U \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Fixemos $x \in U$. Temos pelo Teorema espectral que existe uma base $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ formada por autovetores de $D^2u(x)$. Em particular, dado $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ podemos escrever $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i\xi_i$ então

$$D^2u(x)\cdot v = \sum_{i=1}^n \alpha_i D^2u(x)\xi_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i\alpha_i\xi_i,$$

onde $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ são os autovalores de $D^2u(x)$. Logo,

$$|D^2u(x)\cdot\nu| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|\alpha_i\xi_i| \leq \max_{1\leq i\leq n}|\alpha_i||\nu| \leq \sup_U\left\{|\omega''(|x|)|, \frac{|\omega'(|x|)|}{|x|}\right\}|\nu|.$$

Assim,

$$\left|D^2u(x)\cdot\frac{\nu}{|\nu|}\right| \leq \sup_U\left\{|\omega''(|x|)|, \frac{|\omega'(|x|)|}{|x|}\right\}, \text{ para todo } \nu\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}. \tag{19}$$

Note que sendo ν algum elemento da base canônica do $\mathbb{R}^n$, temos que $|D^2u(x)\cdot\nu|$ é norma de uma coluna da matriz $D^2u(x)$. Daí e de (19) segue que a norma de qualquer coluna da matriz $D^2u(x)$ majorada por $\sup_U\left\{|\omega''(|x|)|, \frac{|\omega'(|x|)|}{|x|}\right\}$. *A fortiori*, o módulo de qualquer entrada da matriz $D^2u(x)$ tem esse mesmo controle. Dessa forma,

$$||D^2u||_{L^\infty(U)} \leq \sup_{x\in U}\left\{|\omega''(|x|)|, \frac{|\omega'(|x|)|}{|x|}\right\}.$$

Por fim, no item $\mathsf{d.}$ temos que $\omega''>0$ e $\omega'<0$ Então,

$$\mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2u(x)) = \lambda\sum_{e_i>0}e_i + \Lambda\sum_{e_i<0}e_i = \lambda w''(|x|) + \Lambda(n-1)\frac{\omega'(|x|)}{|x|}.$$

Logo,

$$\mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2u(x)) = \lambda\left(w''(|x|) + \frac{\Lambda(n-1)}{\lambda|x|}\omega'(|x|)\right).$$

O item $\mathsf{e.}$ segue *mutatis mutandis* o item anterior. ■

Seja $r>0$, $\mu\in(0,1)$ e $x_0\in\mathbb{R}^n$. Nós definiremos o anel

$$\mathcal{A}_{\mu r,r}(x_0) := \{x\in\mathbb{R}^n;\ \mu r<|x-x_0|<r\}.$$

Enunciaremos os Teoremas da barreira que garantem a existência, unicidade e propriedades geométricas. Por simplicidade, consideremos $x_0=0$ e tome $\mathcal{A}=\mathcal{A}_{\mu r,r}(0)$. Além disso, é importante ressaltar que esse próximo Teorema respeito da existência é uma vez mais simples do Teorema 3.1 de Braga e Moreira (2018) onde consideramos somente uma parte dele.

Teorema 3.6 (Existência da Barreira não homogênea). *Sejam* $M_0\geq 0$, $r>0$ *e* $\mu\in(0,1)$. *Assuma que* $f\in L^q(\mathcal{A})$ *com* $q\in[n,+\infty)$. *Então, existe uma única* L^n*-solução forte,*

$\Gamma_{\pm} \in C^0(\overline{\mathcal{A}})$ *para os seguintes problemas de Dirichlet*

$$\begin{cases} \mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2\Gamma_-) & = f, \qquad \text{em } \mathcal{A} \\ \Gamma_- & = M_0, \quad \text{em } \partial B_{\mu r}(x_0) \\ \Gamma_- & = 0, \quad \text{em } \partial B_r(x_0). \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(D^2\Gamma_+) & = f, \qquad \text{em } \mathcal{A} \\ \Gamma_+ & = 0, \quad \text{em } \partial B_{\mu r}(x_0) \\ \Gamma_+ & = M_0, \quad \text{em } \partial B_r(x_0). \end{cases} \tag{20}$$

a. *Se* $n < q < \infty$ *então* $\Gamma_{\pm} \in W^{2,q}(\mathcal{A})$. *Com estimativa,*

$$||\Gamma_{\pm}||_{W^{2,q}(\mathcal{A})} \leq C\left(M_0 + ||f||_{L^q(\mathcal{A})}\right)$$

onde $C = C(n, q, \lambda, \Lambda, \mu, r, \gamma) > 0$.

b. *Se* $q = \infty$ *então a estimativa acima vale para qualquer* $r \in (n, \infty)$.

c. *Se* $f \in C^0(\mathcal{A})$ *então as* $\Gamma^{\pm}$ *serão soluções no sentido da* C*-viscosidade.*

d. $\Gamma^{\pm}$ *são radialmente simétricas se* f *o for.*

Demonstração. Assumiremos, *a priori*, que $n < p < \infty$. Defina $\varphi^{\pm} : \overline{\mathcal{A}} \to \mathbb{R}$ por $\varphi^{\pm}(x) := l^{\pm}(|x|)$ onde

$$l^-(t) = -\frac{M_0}{r(1-\mu)}(t-r) \quad \text{e} \quad l^+(t) = \frac{M_0}{r(1-\mu)}(t-r\mu)$$

Claramente, $\varphi^- = M_0$ em $\partial B_{\mu r}$ e $\varphi^- = 0$ em ∂B_r e similarmente $\varphi^+ = 0$ em $\partial B_{\mu r}$ e $\varphi^+ = M_0$ em ∂B_r. Mais ainda, $\varphi^{\pm} \in C^{\infty}(\overline{\mathcal{A}}) \subset W^{2,p}(\mathcal{A})$. Ora,

$$|\varphi^{\pm}(x)| = |l^{\pm}(|x|)| \leq M_0 \quad \text{e} \quad |\nabla\varphi^{\pm}(x)| = |(l^{\pm})'(|x|)| \leq \frac{M_0}{r(1-\mu)},$$

como

$$D^2\varphi^{\pm}(x) = \frac{(l^{\pm})'(|x|)}{|x|} \cdot \mathrm{Id}_{n\times n} + \left(\frac{(l^{\pm})''(|x|)}{|x|^2} - \frac{(l^{\pm})'(|x|)}{|x|^3}\right) \cdot (x \otimes x)$$

então,

$$\begin{aligned} |D^2\varphi^{\pm}(x)| &= \left|\frac{(l^{\pm})'(|x|)}{|x|} \cdot \mathrm{Id}_{n\times n} + \left(\frac{(l^{\pm})''(|x|)}{|x|^2} - \frac{(l^{\pm})'(|x|)}{|x|^3}\right) \cdot (x \otimes x)\right| \\ &\leq \frac{M_0}{r^2\mu(1-\mu)}C(n) + \left(\frac{M_0}{r^3\mu^2(1-\mu)} + \frac{M_0}{r^4\mu^3(1-\mu)}\right)\tilde{C}(n,r) \\ &= C_{\star}M_0 \end{aligned}$$

onde $C_{\star} = \frac{1}{r^2\mu(1-\mu)}C(n) + \left(\frac{1}{r^3\mu^2(1-\mu)} + \frac{1}{r^4\mu^3(1-\mu)}\right)\tilde{C}(n,r)$. Dessas considerações,

$$\begin{aligned} ||\varphi^{\pm}||^p_{W^{2,p}(\mathcal{A})} &= \int_{\mathcal{A}} |\varphi^{\pm}(x)|^p + |\nabla\varphi^{\pm}(x)|^p + |D^2\varphi^{\pm}(x)|^p \, dx \\ &\leq M_0^p \int_{\mathcal{A}} 1 + \left(\frac{1}{r(1-\mu)}\right)^p + C_{\star}^p \, dx \\ &= (M_0C^{\star})^p, \end{aligned}$$

onde $C^\star = \left\{|\mathcal{A}|\left[1+\left(\frac{1}{r(1-\mu)}\right)^p + C_\star^p\right]\right\}^{\frac{1}{p}}$. Logo,

$$\|\varphi^\pm\|_{W^{2,p}(\mathcal{A})} \leq C^\star M_0$$

Observe que com $\varphi^\pm$ podemos reescrever os problemas em (20) da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2\Gamma_-) & = f, \quad \text{em } \mathcal{A} \\ \Gamma_- & = \varphi^-, \quad \text{em } \partial\mathcal{A}. \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(D^2\Gamma_+) & = f, \quad \text{em } \mathcal{A} \\ \Gamma_+ & = \varphi^+, \quad \text{em } \partial\mathcal{A}. \end{cases} \tag{21}$$

Portanto, pelo Teorema 3.5, os problemas em (21), admitem uma única solução $\Gamma^\pm$ no sentido da L^p-viscosidade. Mais ainda, existe $C > 0$ universal tal que

$$\|\Gamma_\pm\|_{W^{2,p}(\mathcal{A})} \leq C\left(\|\Gamma^\pm\|_{L^\infty(\mathcal{A})} + \|\varphi^\pm\|_{W^{2,p}(\mathcal{A})} + \|f\|_{L^p(\mathcal{A})}\right).$$

Pelo Teorema 3.1 segue que $\Gamma^\pm$ são também soluções no sentido da L^n-viscosidade e se $f \in C^0(\mathcal{A})$, então as $\Gamma^\pm$ serão soluções no sentido da C-viscosidade.

Agora, utilizando a estimativa ABP (Teorema 3.2) temos que

$$\begin{aligned} \|\Gamma_\pm\|_{L^\infty(\mathcal{A})} &\leq \|\Gamma_\pm\|_{L^\infty(\partial\mathcal{A})} + C_1\|f\|_{L^n(\Upsilon^+(\Gamma^\pm))} \\ &\leq \|\varphi^\pm\|_{L^\infty(\partial\mathcal{A})} + C_1\|f\|_{L^n(\mathcal{A})} \\ &\leq M_0 + C_1|\mathcal{A}|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p(\mathcal{A})} \\ &= M_0 + C_2\|f\|_{L^p(\mathcal{A})}. \end{aligned}$$

com $C_2 = C_1|\mathcal{A}|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}$. Então,

$$\begin{aligned} \|\Gamma_\pm\|_{W^{2,p}(\mathcal{A})} &\leq C\left(\|\Gamma^\pm\|_{L^\infty(\mathcal{A})} + \|\varphi^\pm\|_{W^{2,p}(\mathcal{A})} + \|f\|_{L^p(\mathcal{A})}\right) \\ &\leq C\left(M_0 + C_2\|f\|_{L^p(\mathcal{A})} + M_0C^\star + \|f\|_{L^p(\mathcal{A})}\right) \\ &= C\left(M_0(1+C^\star) + (1+C_2)\|f\|_{L^p(\mathcal{A})}\right) \\ &\leq C\max\{(1+C^\star),(1+C_2)\}(M_0 + \|f\|_{L^p(\mathcal{A})}) \\ &\leq \tilde{C}(M_0 + \|f\|_{L^p(\mathcal{A})}), \end{aligned}$$

com $\tilde{C} = C\max\{(1+C^\star),(1+C_2)\}$.

Com isso, temos que as $\Gamma_\pm$ são soluções no sentido da L^p-viscosidade que são $W^{2,p}(\mathcal{A})$. Então, pelo Corolário 3.1, as $\Gamma_\pm$ são L^p-soluções forte. *A fortiori*, as $\Gamma_\pm$ são L^n-soluções forte. Novamente, pelo Teorema 3.1 as $\Gamma_\pm$ são soluções no sentido da L^n-viscosidade.

Se $p = \infty$, então $f \in L^r(\mathcal{A})$ para todo $r \in (n,\infty)$. Logo, o obtido acima ainda é verdade. Assim, provamos *a.*, *b.* e *c.*. Prosseguiremos checando *d.*. Com efeito, seja

$R \in \mathcal{O}(n)$. Temos que $f(Rx) = f(x)$ para todo $x \in \mathcal{A}$.

Fixaremos uma notação para nos ajudar nas próximas estimativas.

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & \dots & R_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n1} & R_{n2} & R_{n3} & \dots & R_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

Denotaremos por R_l e R^k, respectivamente, a l-ésima linha e k-ésima coluna da matriz R. Assim, entendemos, para cada $x \in \overline{\mathcal{A}}$ que

$$Rx = \begin{pmatrix} R_1 \cdot x \\ R_2 \cdot x \\ \vdots \\ R_n \cdot x \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad R^T x = \begin{pmatrix} R^1 \cdot x \\ R^2 \cdot x \\ \vdots \\ R^n \cdot x \end{pmatrix}.$$

Façamos umas considerações mais gerais, defina $v(x) = u(Rx)$ então,

$$v_i(x) = (u(Rx))_i = \sum_{l=1}^{n} (R_l \cdot x)_i u_l(Rx) = \sum_{l=1}^{n} R_{li} u_l(Rx) = R^i \cdot \nabla u(Rx)$$

Logo,

$$\nabla v = R^T \nabla u(Rx).$$

Prosseguindo,

$$v_{ij}(x) = \left(\sum_{l=1}^{n} R_{li} u_l(Rx) \right)_j = \sum_{l=1}^{n} R_{li} \left(u_l(Rx) \right)_j = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} R_{li} u_{lk}(Rx) R_{kj}.$$

Portanto,

$$D^2 v(x) = R^T \cdot D^2 u(Rx) \cdot R$$

para quase todo ponto $x \in \mathcal{A}$.

Daí, os autovalores de $D^2 v$ e $D^2 u$ são os mesmos nos pontos onde essas matrizes existirem. Com isso, temos que

$$\mathcal{M}^{\pm}_{\lambda,\Lambda}(D^2 v) = \mathcal{M}^{\pm}_{\lambda,\Lambda}(D^2 u(Rx))$$

Dessas considerações, segue que $\Gamma_{\pm}(x)$ e $\Gamma_{\pm}(Rx)$ são soluções do mesmo problema. Pela unicidade $\Gamma_{\pm}(x) = \Gamma_{\pm}(Rx)$ para todo $x \in \overline{\mathcal{A}}$. Como $R \in \mathcal{O}(n)$ foi arbitrária segue que $\Gamma_{\pm}$ são radiais.

$\blacksquare$

3.3 Barreiras de Pucci homogêneas

Agora para $M_0 > 0$, nós sabemos pelo Teorema 3.6 que existe uma única solução no sentido da C-viscosidade para cada problema de Dirichlet abaixo

$$\begin{cases} \mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2\Gamma^\star_-) & = 0, \quad \text{em } \mathcal{A} \\ \Gamma^\star_0 & = M_0, \quad \text{em } \partial B_{\mu r}(x_0) \\ \Gamma^\star_- & = 0, \quad \text{em } \partial B_r(x_0). \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(D^2\Gamma^\star_+) & = 0, \quad \text{em } \mathcal{A} \\ \Gamma^\star_+ & = 0, \quad \text{em } \partial B_{\mu r}(x_0) \\ \Gamma^\star_+ & = M_0, \quad \text{em } \partial B_r(x_0). \end{cases}$$

e essas soluções são radiais. Para explorarmos as propriedades dessas funções apreciemos o seguinte Lema que é uma versão simplificada da Proposição 6.1 de Braga e Moreira (2018):

Lema 3.3 (Barreiras de dimensão um). *Sejam* $A, \delta, \rho > 0$ *com* $\delta < \rho$ *defina*

$$\varphi_{\delta,\rho,A}, \psi_{\delta,\rho,A} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$$

dadas por

$$\varphi_{\delta,\rho,A}(r) = \tau_{\delta,\rho,A} \int_r^\rho t^{-A}\, dt, \quad \psi_{\delta,\rho,A}(r) = \tau_{\delta,\rho,A} \int_\rho^r t^{-A}\, dt$$

com $\tau_{\delta,\rho,A} = \left(\int_\delta^\rho t^{-A}\, dt\right)^{-1}$. *As seguintes propriedades são verdadeiras:*

a. $\varphi_{\delta,\rho,A}, \psi_{\delta,\rho,A} \in C^\infty(0,\infty)$ *e* $\varphi_{\delta,\rho,A}, \psi_{\delta,\rho,A} \geq 0$ *em* $[\delta, \rho]$*;*

b. $\varphi_{\delta,\rho,A}$ *é (estritamente) convexa e (estritamente) decrescente com*

$$\varphi_{\delta,\rho,A}(\delta) = 1,\ \varphi_{\delta,\rho,A}(\rho) = 0;$$

c. $\psi_{\delta,\rho,A}$ *é (estritamente) concava e (estritamente) crescente com*

$$\varphi_{\delta,\rho,A}(\delta) = 0,\ \varphi_{\delta,\rho,A}(\rho) = 1;$$

d. $\varphi_{\delta,\rho,A}, \psi_{\delta,\rho,A}$ *satisfazem a seguinte EDO:*

$$w''(r) + \frac{A}{r} w'(r) = 0 \text{ com } r \in (0,\infty).$$

Demonstração. O item a. segue do Teorema fundamental do cálculo, que $(\varphi_{\delta,\rho,A})' \in C^\infty(0,\infty)$ pois

$$(\varphi_{\delta,\rho,A})'(r) = -r^{-A}.$$

Analogamente, o mesmo vale para $(\psi_{\delta,\rho,A})$. Por construção, $\varphi_{\delta,\rho,A}, \psi_{\delta,\rho,A} \geq 0$ em $[\delta, \rho]$.

Nos voltando para b. vemos que

$$(\varphi_{\delta,\rho,A})'(r) = -r^{-A} < 0,\ \forall r \in (0,\infty)$$

e

$$(\varphi_{\delta,\rho,A})''(r) = Ar^{-A-1} > 0, \forall r \in (0,\infty).$$

Novamente pela definição de $\varphi_{\delta,\rho,A}$ segue que $\varphi_{\delta,\rho,A}(\delta) = 1$, $\varphi_{\delta,\rho,A}(\rho) = 0$. A prova do item c. segue *mutatis mutandis* os detalhes do item b..

Por fim, chequemos d.. Ora,

$$(\varphi_{\delta,\rho,A})''(r) + \frac{A}{r}(\varphi_{\delta,\rho,A})'(r) = Ar^{-A-1} + \frac{A}{r}(-r^{-A}) = Ar^{-A-1} - Ar^{-A-1} = 0$$

as estimativas para $\psi_{\delta,\rho,A}$ são similares. ■

Assim como em Braga e Moreira (2018), as funções $\varphi_{\delta,\rho,A}$ e $\psi_{\delta,\rho,A}$ desempenham um papel importantes para a demonstração dos próximos resultados a respeito da existência e geometria das barreira homogênea. Esse resultados correspondem a Proposição 6.2 do artigo deles.

Teorema 3.7 (Existência da Barreira homogênea). *Sejam* $M_0 \geq 0$, $r > 0$, $\mu \in (0,1)$ *e* $\gamma = \frac{\Lambda(n-1)}{\lambda} + 1$. *Seja* $\Gamma_\pm$ *a única solução no sentido da* L^n*-viscosidade para os seguintes problemas de Dirichlet*

$$\begin{cases} \mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2\Gamma^\star_-) & = 0, & \text{em } \mathcal{A} \\ \Gamma^\star_- & = M_0, & \text{em } \partial B_{\mu r}(x_0) \\ \Gamma^\star_- & = 0, & \text{em } \partial B_r(x_0). \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(D^2\Gamma^\star_+) & = 0, & \text{em } \mathcal{A} \\ \Gamma^\star_+ & = 0, & \text{em } \partial B_{\mu r}(x_0) \\ \Gamma^\star_+ & = M_0, & \text{em } \partial B_r(x_0). \end{cases} \tag{22}$$

Então, $\Gamma^\star_\pm \in C^\infty(\overline{\mathcal{A}})$ *e são radialmente simétricas. Mais ainda,*

$$\Gamma^\star(x) = \begin{cases} \dfrac{M_0}{\log_2 \mu}(\log_2|x-x_0| - \log_2 r), & \text{se} \quad \gamma = 2, \\ \dfrac{M_0(\mu r)^{\gamma-2}}{1-\mu^{\gamma-2}}(|x-x_0|^{2-\gamma} - r^{2-\gamma}) & \text{se} \quad \gamma > 2, \end{cases}$$

e $\Gamma^\star_+ = M_0 - \Gamma^\star_-$.

Demonstração. Usando a notação do Lema anterior '

$$\Gamma^\star_-(x) := M_0\varphi_{\mu r,r,\gamma-1}(|x-x_0|) \quad \text{e} \quad \Gamma^\star_+(x) := M_0\psi_{\mu r,r,\gamma-1}(|x-x_0|) \quad x \in \overline{\mathcal{A}}.$$

Note que $\Gamma^\star_\pm$ são radiais por construção e pelos Lemas (3.2) e (3.3) segue a regularidade das mesmas e que satisfazem os respectivos problemas de Dirichlet.

Ora,

$$\Gamma^\star_-(x) = M_0\varphi_{\mu r,r,\gamma}(|x-x_0|) = M_0\tau_{\mu r,r,\gamma}\int_{|x-x_0|}^r t^{-(\gamma-1)}\,dt.$$

Se $\gamma = 2$ então,

$$\tau_{\mu r,r,\gamma} = \left(\int_{\mu r}^{r} t^{-1}\,dt\right)^{-1} = (\ln(r) - \ln(\mu r))^{-1} = \left(\ln\left(\frac{r}{\mu r}\right)\right)^{-1} = -\frac{\log_2(e)}{\log_2(\mu)}.$$

Logo,

$$\Gamma_-^\star(x) = M_0\left(-\frac{\log_2(e)}{\log_2(\mu)}\right)(\ln(r) - \ln(|x - x_0|)) = \frac{M_0}{\log_2(\mu)}(\log_2(|x - x_0|) - \log_2(r)).$$

Agora, se $\gamma > 2$ temos que

$$\tau_{\mu r,r,\gamma} = \left(\int_{\mu r}^{r} t^{-(\gamma-1)}\,dt\right)^{-1} = \left(\frac{r^{2-\gamma} - (\mu r)^{2-\gamma}}{2-\gamma}\right)^{-1} = \frac{2-\gamma}{r^{2-\gamma}(1-\mu^{2-\gamma})}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\Gamma_-^\star(x) &= M_0\left(\frac{2-\gamma}{r^{2-\gamma}(1-\mu^{2-\gamma})}\right)\left(\frac{r^{2-\gamma} - |x - x_0|^{2-\gamma}}{2-\gamma}\right)\\
&= \left(\frac{M_0}{r^{2-\gamma}(1-\mu^{2-\gamma})}\right)\left(r^{2-\gamma} - |x - x_0|^{2-\gamma}\right)\\
&= \left(\frac{M_0}{(\mu r)^{2-\gamma}(\mu^{\gamma-2}-1)}\right)\left(r^{2-\gamma} - |x - x_0|^{2-\gamma}\right)\\
&= \left(\frac{M_0(\mu r)^{\gamma-2}}{1-\mu^{\gamma-2}}\right)\left(|x - x_0|^{2-\gamma} - r^{2-\gamma}\right).
\end{aligned}$$

Agora observe que $M_0 - \Gamma_-^\star$ é de tal sorte que é nula em $\partial B_\mu(x_0)$ e vale M_0 em $\partial B_r(x_0)$. Além disso, $D^2(M_0 - \Gamma_-^\star) = -D^2\Gamma_-^\star$. Tendo em vista propriedades dos operadores de Pucci,

$$\mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^+(D^2(M_0 - \Gamma_-^\star)) = \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^+(-D^2\Gamma_-^\star) = -\mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^-(D^2\Gamma_-^\star) = 0$$

Então, $M_0 - \Gamma_-^\star$ resolve o mesmo problema de Dirichlet que $\Gamma_+^\star$ pela unicidade $\Gamma_+^\star = M_0 - \Gamma_-^\star$. ■

Corolário 3.2. *Seja* $\Gamma_\pm^\star$ *soluções problema de Dirichlet em* (22). *Então, existem* $0 < \theta_\gamma(\mu) \leq \Theta_\gamma(\mu)$ *tais que*

$$\frac{\theta_\gamma(\mu)\cdot M_0}{r} \leq |\nabla\Gamma_\pm^\star| \leq \frac{\Theta_\gamma(\mu)\cdot M_0}{r} \qquad \text{em } \overline{\mathcal{A}} \tag{23}$$

e

$$\frac{\theta_\gamma(\mu)\cdot M_0}{r}\operatorname{dist}(x, \partial B_r(x_0)) \leq \Gamma_-^\star(x) \leq \frac{\Theta_\gamma(\mu)\cdot M_0}{r}\operatorname{dist}(x, \partial B_r(x_0)), \tag{24}$$

$$\frac{\theta_\gamma(\mu)\cdot M_0}{r}\operatorname{dist}(x, \partial B_{\mu r}(x_0)) \leq \Gamma_+^\star(x) \leq \frac{\Theta_\gamma(\mu)\cdot M_0}{r}\operatorname{dist}(x, \partial B_{\mu r}(x_0)),$$

onde,

$$\theta_\gamma(\mu) := \begin{cases} \dfrac{1}{\ln 2}\left(\dfrac{-1}{\log_2 \mu}\right) & se \quad \gamma = 2 \\ (\gamma-2)\dfrac{\mu^{\gamma-2}}{1-\mu^{\gamma-2}} & se \quad \gamma > 2, \end{cases} \quad \Theta_\gamma(\mu) := \begin{cases} \dfrac{1}{\ln 2}\left(\dfrac{-1}{\mu \log_2 \mu}\right) & se \quad \gamma = 2 \\ (\gamma-2)\dfrac{1}{\mu(1-\mu^{\gamma-2})} & se \quad \gamma > 2. \end{cases} \tag{25}$$

Evidentemente $\theta_\gamma(\mu) \to 0$ *e* $\Theta_\gamma(\mu) \to \infty$ *quando* $\mu \to 0$.

Demonstração. Nos concentremos *a priori* em $\Gamma^\star_-$. Observe que

$$\nabla\Gamma^\star_-(x) = \begin{cases} \dfrac{M_0}{\log_2 \mu}\dfrac{1}{\ln 2}\dfrac{(x-x_0)}{|x-x_0|^2}, & \text{se} \quad \gamma = 2 \\ \dfrac{M_0(\mu r)^{\gamma-2}}{1-\mu^{\gamma-2}}(2-\gamma)|x-x_0|^{-\gamma}(x-x_0), & \text{se} \quad \gamma > 2. \end{cases}$$

Logo,

$$|\nabla\Gamma^\star_-(x)| = \begin{cases} \dfrac{M_0}{\log_2 \mu}\dfrac{1}{\ln 2}\dfrac{1}{|x-x_0|}, & \text{se} \quad \gamma = 2 \\ \dfrac{M_0(\mu r)^{\gamma-2}}{1-\mu^{\gamma-2}}(\gamma-2)|x-x_0|^{1-\gamma}, & \text{se} \quad \gamma > 2. \end{cases}$$

Portanto, se $\gamma = 2$

$$\frac{M_0}{\ln 2(-\log_2 \mu) r} \leq |\nabla\Gamma^\star_-(x)| \leq \frac{M_0}{\ln 2(-\log_2 \mu)\mu r}$$

e se $\gamma > 2$

$$\begin{aligned} (\gamma-2)\frac{M_0(\mu r)^{\gamma-2}}{(1-\mu^{\gamma-2})r^{\gamma-1}} &\leq |\nabla\Gamma^\star_-(x)| \leq \frac{M_0(\mu r)^{\gamma-2}}{(1-\mu^{\gamma-2})(\mu r)^{\gamma-1}}(\gamma-2) \\ \Rightarrow (\gamma-2)\frac{M_0\mu^{\gamma-2}}{(1-\mu^{\gamma-2})r} &\leq |\nabla\Gamma^\star_-(x)| \leq \frac{M_0}{\mu(1-\mu^{\gamma-2})r}. \end{aligned}$$

O mesmo controle vale para $\nabla\Gamma^\star_+$, pois $\nabla\Gamma^\star_+ = -\nabla\Gamma^\star_-$.

Defina

$$\theta_\gamma(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{\ln 2}\left(-\frac{1}{\log_2 \mu}\right), & \gamma = 2 \\ (\gamma-2)\frac{\mu^{\gamma-2}}{1-\mu^{\gamma-2}}, & \gamma > 2, \end{cases}$$

$$\Theta_\gamma(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{\ln 2}\left(-\frac{1}{\mu \log_2 \mu}\right), & \gamma = 2 \\ (\gamma-2)\frac{1}{\mu(1-\mu^{\gamma-2})}, & \gamma > 2. \end{cases}$$

Seja $y \in \partial B_r(x_0)$ temos que $\Gamma^\star(y) = 0$ e

$$\Gamma^\star_-(x) = \int_0^1 \nabla\Gamma^\star_-(x + t(y-x)) \cdot (y-x)\, dt.$$

Como $\Gamma_-^\star$ é radial então, $\Gamma_-^\star(x) = \xi(|x|)$, com $\xi \in C^\infty(0,\infty)$,assim,

$$\begin{aligned}
\Gamma_-^\star(x) &= \int_0^1 \nabla(\xi(|x+t(y-x)|)) \cdot (y-x)\, dt \\
&= \int_0^1 \xi'(|x+t(y-x)|)\frac{(y-x)}{|y-x|} \cdot (y-x)\, dt \\
&= \int_0^1 \xi'(|x+t(y-x)|)|y-x|\, dt.
\end{aligned}$$

Se $\gamma = 2$ então $\xi(t) = \frac{M_0}{\log_2 \mu}(\log_2 t - \log_2 r)$, logo,

$$\Gamma_-^\star(x) = \int_0^1 \frac{M_0}{\log_2 \mu}\frac{1}{\ln 2}\frac{1}{|x+t(y-x)|}\, dt|y-x| \leq \frac{M_0\Theta_\gamma(\mu)}{r}|y-x|$$

para todo $y \in \partial B_r(x_0)$. Sendo $y \in \partial B_r$, de tal sorte que $|x-y| = \operatorname{dist}(x, \partial B_r)$ segue que

$$\Gamma_-^\star(x) \leq \frac{M_0\Theta_\gamma(\mu)}{r}\operatorname{dist}(x, \partial B_r(x_0))$$

De maneira similar, obtemos o respectivo controle inferior. Dessa forma,

$$\frac{\theta_\gamma(\mu)\cdot M_0}{r}\operatorname{dist}(x, \partial B_r(x_0)) \leq \Gamma_-^\star(x) \leq \frac{\Theta_\gamma(\mu)\cdot M_0}{r}\operatorname{dist}(x, \partial B_r(x_0)).$$

O caso em que $\gamma > 2$, segue *mutatis mutandis.*

Com respeito a $\Gamma_+^\star$, temos pelo Teorema fundamental do cálculo que dados $x, y \in \overline{\mathcal{A}}$,

$$\Gamma_+^\star(x) - \Gamma_+^\star(y) = \int_0^1 \nabla\Gamma_+^\star(x+t(y-x)) \cdot (y-x)\, dt = \int_0^1 -\nabla\Gamma_-^\star(x+t(y-x)) \cdot (y-x)\, dt.$$

Dessa forma,

$$\Gamma_+^\star(y) - \Gamma_+^\star(x) = \int_0^1 \nabla\Gamma_-^\star(x+t(y-x)) \cdot (y-x)\, dt.$$

Portanto, considerando $x \in \partial B_{\mu r}(x_0)$, temos $\Gamma_+^\star(x) = 0$. Então, seguindo os mesmo passos nas estimativas com respeito a $\Gamma_-^\star$ vemos que

$$\frac{\theta_\gamma(\mu)\cdot M_0}{r}\operatorname{dist}(x, \partial B_{\mu r}(x_0)) \leq \Gamma_+^\star(x) \leq \frac{\Theta_\gamma(\mu)\cdot M_0}{r}\operatorname{dist}(x, \partial B_{\mu r}(x_0)).$$

$\blacksquare$

3.4 Geometria das barreiras de Pucci não homogêneas

Controles semelhantes aos que obtemos na seção anterior podem ser obtidos sob certas condições para as barreiras não homogêneas. Esse é essencialmente o conteúdo do próximo Teorema.

Teorema 3.8. *Seja* $M_0 \geq 0$, $r > 0$ *e* $\mu \in (0,1)$. *Assuma que* $f \in C^0(\mathcal{A}) \cap L^q(\mathcal{A})$, $q \in (n, \infty)$. *Então, existe uma única solução no sentido da viscosidade em* $W^{2,q}(\overline{\mathcal{A}})$ *para o seguinte problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2\Gamma_-) & = f, \quad \text{em } \mathcal{A} := \mathcal{A}_{\mu r, r}(x_0) \\ \Gamma_- & = M_0, \quad \text{em } \partial B_{\mu r}(x_0) \\ \Gamma_- & = 0, \quad \text{em } \partial B_r(x_0). \end{cases} \tag{26}$$

Além disso, existe $\eta^\star \in (0,1)$, *dependendo somente de constantes universais e* μ, *tal que se*

$$\|f\|_{L^q(\mathcal{A}_{\mu r, r})} \leq \frac{\eta^\star \cdot M_0}{r^{2-\frac{n}{q}}}$$

então, para todo $x \in \overline{\mathcal{A}}$,

$$\frac{\theta_\gamma(\mu) \cdot M_0}{r} \leq |\nabla \Gamma_-(x)| \leq \frac{\Theta_\gamma(\mu) \cdot M_0}{r} \quad \text{em } \overline{\mathcal{A}}. \tag{27}$$

e

$$\frac{\theta_\gamma(\mu) \cdot M_0}{r} \operatorname{dist}(x, \partial B_r(x_0)) \leq \Gamma_-(x) \leq \frac{\Theta_\gamma(\mu) \cdot M_0}{r} \operatorname{dist}(x, \partial B_r(x_0)). \tag{28}$$

Mais ainda, para qualquer $i = 1, 2 \ldots, n$,

$$\left\| \frac{\partial \Gamma_-}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma^\star_-}{\partial x_i} \right\|_{L^\infty(\overline{\mathcal{A}})} \leq \frac{M_0}{50r} \cdot \theta_\gamma(\mu). \tag{29}$$

Demonstração. Pelo Teorema 3.6, existe uma solução Γ_- no sentido da C-viscosidade com estimativa $W^{2,p}$, especificamente,

$$\|\Gamma_\pm\|_{W^{2,q}(\mathcal{A})} \leq C\left(M_0 + \|f\|_{L^q(\mathcal{A})}\right)$$

onde $C = C(n, q, \lambda, \Lambda, \mu, r, \gamma) > 0$.

Doravante, como na prova do Teorema 3.1 de Braga e Moreira (2018), suponhamos por absurdo que (27), (28) e (29) não sejam satisfeitas. Então, podemos encontrar uma sequência $\{f_k\} \in L^q(\mathcal{A})$ com $\|f_k\|_{L^q(\mathcal{A})} \to 0$ e soluções Γ_k,

$$\begin{cases} \mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2\Gamma_k) & = f_k, \quad \text{em } \mathcal{A} := \mathcal{A}_{\mu r, r}(x_0) \\ \Gamma_k & = M_0, \quad \text{em } \partial B_{\mu r}(x_0) \\ \Gamma_k & = 0, \quad \text{em } \partial B_r(x_0). \end{cases}$$

e $\{y_k\} \subset \overline{\mathcal{A}} - \partial B_r(0)$, $\{x_k\} \subset \overline{\mathcal{A}}$ tais que

$$|\nabla \Gamma(x_k)| < \frac{\theta_\gamma(\mu)}{2} \quad \text{ou} \quad |\nabla \Gamma_k(x_k)| > 2\Theta_\gamma(\mu) \tag{30}$$

$$\frac{\Gamma(y_k)}{\mathrm{dist}(y_k, B_r)} < \frac{\theta_\gamma(\mu)}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{\Gamma_k(y_k)}{\mathrm{dist}(y_k, B_r)} > 2\Theta_\gamma(\mu) \tag{31}$$

Observe que pelos mergulhos de Sobolev, $W^{2,p}(\mathcal{A}) \hookrightarrow C^{1,1-\frac{n}{q}}(\mathcal{A})$. Então, existe uma constante $C_1 > 0$ universal tal que

$$||\Gamma_k||_{C^{1,1-\frac{n}{q}}} \leq C(M_0 + ||f_k||_{L^q(\mathcal{A})}) \leq \tilde{C}.$$

Logo, a sequência $\{\Gamma_k\}$ é limitada em $C^{1,1-\frac{n}{q}}$. Como o mergulho $C^{1,1-\frac{n}{q}} \hookrightarrow C^{1,\frac{q-n}{2q}}$ é compacto, existe uma subsequência $\{\Gamma_{k_j}\}$ que converge em $C^{1,\frac{q-n}{2q}}$ para uma função Γ_∞.

Pelo Teorema 3.4 a Γ_∞ é solução de

$$\begin{cases} \mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2\Gamma_\infty) &= 0, \quad \text{em } \mathcal{A} := \mathcal{A}_{\mu r, r}(x_0) \\ \Gamma_\infty &= M_0, \quad \text{em } \partial B_{\mu r}(x_0) \\ \Gamma_\infty &= 0, \quad \text{em } \partial B_r(x_0). \end{cases}$$

Agora, defina

$$\nu_k := |\nabla \Gamma_k(x_k)| - |\nabla \Gamma_\infty(x_k)|.$$

Pela convergência em $C^{1,\frac{q-n}{2n}}$ temos que

$$|\nu_k| \leq ||\nabla \Gamma_k - \Gamma_\infty||_{L^\infty(\mathcal{A})} \to 0, \text{ quando } k \to \infty.$$

Por (30) e pelo Lema 3.2, nós temos

$$\begin{aligned} \frac{\theta_\gamma(\mu)}{2} &> |\nabla \Gamma_k(x_k)| \\ &= |\nabla \Gamma_k(x_k)| - |\nabla \Gamma_\infty(x_k)| + |\nabla \Gamma_\infty(x_k)| \\ &= \mu_k + |\nabla \Gamma_\infty(x_k)| \\ &\geq \nu_k + \theta_\gamma(\mu). \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\theta_\gamma(\mu)}{2} > \nu_k + |\nabla \Gamma_\infty(x_k)| \geq \nu_k + \theta_\gamma(\mu).$$

Maneira similar, a segunda possibilidade

$$2\Theta_\gamma(\mu) < \nu_k + |\nabla \Gamma_\infty(x_k)| \leq \nu_k + \Theta_\gamma(\mu).$$

Como $\{x_k\}_{k\geq 1}$ é limitada, então existe $\{x_{k_j}\}$ subsequencia convergente. Dessa forma, para

$\theta_\gamma(\mu)$ existe um $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $j \geq j_0$, temos $\nu_{k_j} < \theta_\gamma(\mu)$. Logo,

$$\frac{\theta_\gamma(\mu)}{2} > \theta_\gamma(\mu) + |\nabla\Gamma_\infty(x_k)| \geq \theta_\gamma(\mu) + \theta_\gamma(\mu) = 2\theta_\gamma(\mu).$$

De onde segue um absurdo.

Mais ainda, como $\Gamma_k - \Gamma_\infty = 0$ em ∂B_r, temos pelo Teorema fundamental do calculo

$$\begin{aligned} |\Gamma_k(y) - \Gamma_\infty(y) - (\Gamma_k(z) - \Gamma_\infty(z))| &= \left|\int_0^1 \nabla(\Gamma_k - \Gamma_\infty)(yt - (1-t)z) \cdot (y - z)\, dt\right| \\ &\leq \|\nabla\Gamma_k - \nabla\Gamma_\infty\|_{L^\infty(\mathcal{A})}|y - z|. \end{aligned}$$

Se $z \in \partial B_r$ segue que

$$|\Gamma_k(y) - \Gamma_\infty(y)| \leq \|\nabla\Gamma_k - \nabla\Gamma_\infty\|_{L^\infty(\mathcal{A})}|y - z|, \quad \forall z \in \partial B_r.$$

Em particular,

$$|\Gamma_k(y) - \Gamma_\infty(y)| \leq \|\nabla\Gamma_k - \nabla\Gamma_\infty\|_{L^\infty(\mathcal{A})}\, \mathrm{dist}(y, \partial B_r).$$

Dessa forma,

$$\tilde{\nu}_k := \frac{\Gamma_k(y_k) - \Gamma_\infty(y_k)}{\mathrm{dist}(y_k, \partial B_r)} \to 0, \text{ quando } k \to \infty.$$

pois $|\tilde{\nu}_k| \leq \|\nabla\Gamma_k - \nabla\Gamma_\infty\|_{L^\infty(\mathcal{A})}$. Assim, por (31) e pelo Lema 3.2, segue que

$$\frac{1}{2}\theta_\gamma(\mu) > \tilde{\nu}_k + \frac{\Gamma_\infty(y_k)}{\mathrm{dist}(y_k, \partial B_r)} \geq \tilde{\nu}_k + \theta_\gamma(\mu)$$

ou

$$2\Theta_\gamma(\mu) < \tilde{\nu}_k + \frac{\Gamma_\infty(y_k)}{\mathrm{dist}(y_k, \partial B_r)} \leq \tilde{\nu}_k + \Theta_\gamma(\mu).$$

Mutatis mutandis, argumento utilizado nos caso dos gradientes, da origem a outro absurdo. Com isso finalizamos a demonstração. ■

Vale lembrar que o Teorema acima vale analogamente para Γ_+ solução de

$$\begin{cases} \mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(D^2\Gamma_+) & = f, \quad \text{em } \mathcal{A} \\ \Gamma_+ & = 0, \quad \text{em } \partial B_{\mu r}(x_0) \\ \Gamma_+ & = M_0, \quad \text{em } \partial B_r(x_0). \end{cases} \tag{32}$$

A demonstração é análoga.

Corolário 3.3. *Considere as hipóteses do Teorema anterior e seja* Γ_- *solução de* (26).

Então,

$$\frac{\theta_\gamma(\mu)M_0}{r}\left[(x_0-x)\cdot e_i-\frac{1}{50}\right]\leq\frac{\partial\Gamma_-}{\partial x_i}(x)\leq\frac{M_0}{r}\left[\frac{\Theta_\gamma(\mu)}{\mu}(x_0-x)\cdot e_i+\frac{\theta_\gamma(\mu)}{50}\right].\qquad(33)$$

Demonstração. Observe que por (29),

$$\left|\frac{\partial\Gamma_-}{\partial x_i}(x)-\frac{\partial\Gamma^\star}{\partial x_i}(x)\right|\leq\frac{M_0}{50r}\cdot\theta_\gamma(\mu),\quad\forall x\in\mathcal{A}.$$

Isso implica que

$$\begin{aligned}-\frac{M_0}{50r}\cdot\theta_\gamma(\mu)&\leq\frac{\partial\Gamma_-}{\partial x_i}(x)-\frac{\partial\Gamma^\star}{\partial x_i}(x)\leq\frac{M_0}{50r}\cdot\theta_\gamma(\mu)\\ \Rightarrow\frac{\partial\Gamma^\star}{\partial x_i}(x)-\frac{M_0}{50r}\cdot\theta_\gamma(\mu)&\leq\frac{\partial\Gamma_-}{\partial x_i}(x)\leq\frac{M_0}{50r}\cdot\theta_\gamma(\mu)+\frac{\partial\Gamma^\star}{\partial x_i}(x)\\ \Rightarrow\frac{|\nabla\Gamma^\star|}{|x-x_0|}(x-x_0)\cdot e_i-\frac{M_0}{50r}\cdot\theta_\gamma(\mu)&\leq\frac{\partial\Gamma_-}{\partial x_i}(x)\leq\frac{M_0}{50r}\cdot\theta_\gamma(\mu)+\frac{|\nabla\Gamma^\star|}{|x-x_0|}(x-x_0)\cdot e_i.\end{aligned}$$

Usando as estimativas em (23),

$$\frac{\theta_\gamma(\mu)M_0}{r}\left[(x_0-x)\cdot e_i-\frac{1}{50}\right]\leq\frac{\partial\Gamma_-}{\partial x_i}(x)\leq\frac{M_0}{r}\left[\frac{\Theta_\gamma(\mu)}{\mu}(x_0-x)\cdot e_i+\frac{\theta_\gamma(\mu)}{50}\right].$$

■

O Teorema 3.8 segue válido quando supomos $q=\infty$. Com efeito, se $f\in C^0(\mathcal{A})\cap L^\infty(\mathcal{A})$ então $f\in L^q(\mathcal{A})$ para todo $q\geq 1$ pois $|\mathcal{A}|<\infty$. Então, basta pedir que a norma L^∞ de f seja suficientemente pequena. Isto é, existe $\eta^\star\in(0,1)$, $\eta^\star=\eta^\star(n,\lambda,\Lambda)$ tal que

$$||f||_{L^\infty(\mathcal{A})}\leq\frac{\eta^\star M}{r^2(1+|B_1|)}.$$

Ora, temos para todo $q\geq 1$

$$||f||_{L^q(\mathcal{A})}\leq||f||_{L^\infty(\Omega)}|\mathcal{A}|^{\frac{1}{q}}\leq\frac{\eta^\star M}{r^2(1+|B_1|)}|B_1|^{\frac{1}{q}}(1-\mu^{\frac{1}{q}})r^{\frac{n}{q}}\leq\frac{\eta^\star M}{r^{2-\frac{n}{q}}(1+|B_1|)}(1+|B_1|)=\frac{\eta^\star M}{r^{2-\frac{n}{q}}}.$$

Assim, o teorema segue válido.

Não somente isso, mas vale a pena salientar que se f tem a norma L^∞ suficientemente pequena podemos encontrar subsolução e supersolução radial (C^∞) no anel para os problemas de Dirichlet envolvendo os operadores de Pucci e satisfazendo todas as estimativas apontadas anteriormente.

3.5 Estrutura não divergente do g-laplaciano, alicerces para o princípio da comparação

Aqui faremos considerações sobre o operador Δ_g afim de utilizarmos as barreiras de Pucci. O conteúdo apresentado foi lapidado a partir do Exemplo 4.1 e parte da demonstração do Teorema 3.1 de Braga e Moreira (2018).

Defina $\mathcal{A}_g(x, \nabla u) = \dfrac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|}\nabla u$ e $H_g(t) = \frac{g(t)}{t}$ para $t > 0$. Com essa notação, $\Delta_g u = \operatorname{div}(\mathcal{A}_g(x, \nabla u))$.

Para $w \in C^1(\Omega)$, com $\nabla w \neq 0$, defina a seguinte aplicação $A_w : \Omega \to \mathbb{R}^{n^2}$ dada por

$$A_w(x) = \left(\frac{g'(|\nabla w(x)|)}{g(|\nabla w(x)|)}|\nabla w(x)| - 1\right) \frac{\nabla w(x)}{|\nabla w(x)|} \otimes \frac{\nabla w(x)}{|\nabla w(x)|} + \mathrm{Id}_{n\times n},$$

onde g satisfaz (4) e $\mathrm{Id}_{n\times n}$ é a matriz identidade.

Teorema 3.9. *Seja* $w \in W^{2,1}(\Omega) \cap C^1(\Omega)$, *tal que* $\nabla w \neq 0$. *Então* $\mathcal{A}_g(\cdot, \nabla w) \in W^{1,1}_{loc}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ *e a menos de um conjunto de medida de Lebesgue nula,*

$$\Delta_g w = H(|\nabla w|)\operatorname{tr}\left(A_w D^2 w\right).$$

Mais ainda, o espectro da matriz $A_w(x)$ *está contido em* $[\lambda_\delta, \Lambda_{g_0}]$, *onde* $\lambda_\delta := \min\{1, \delta\}$ *e* $\Lambda_{g_0} \max\{1, g_0\}$. *Em particular, para quase todo* $x \in \Omega$,

$$H_g(|\nabla w(x)|)(M)^-_{\lambda_\delta, \Lambda_{g_0}}(D^2 w(x)) \leq \Delta_g w(x) \leq H_g(|\nabla w(x)|)\mathcal{M}^+_{\lambda_\delta, \Lambda_{g_0}}(D^2 w(x)).$$

Demonstração. Ora,

$$\mathcal{A}_g(x, \nabla \varphi(x)) = \frac{g(|\nabla \varphi(x))}{|\nabla \varphi(x)|}\nabla \varphi(x).$$

Para checarmos que $\mathcal{A}_g(\cdot, \nabla \varphi) \in W^{1,1}_{loc}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ é suficiente provamos que $\dfrac{g(|\nabla \varphi)}{|\nabla \varphi|}\varphi_i \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Ora, isso é verdade devido a regra da cadeia e a regra do produto para funções de Sobolev. Portanto, $\mathcal{A}_g(\cdot, \nabla \varphi) \in W^{1,1}_{loc}(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Com isso, faz sentido falarmos em divergência.

Assim,

$$
\begin{aligned}
\Delta_g w &= \operatorname{div}(\mathcal{A}_g(x,\nabla w)) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i\left(\frac{g(|\nabla w|)}{|\nabla w|} w_i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[\partial_i\left(\frac{g(|\nabla w|)}{|\nabla w|}w_i\right) + w_{ii}\frac{g(|\nabla w|)}{|\nabla w|}\right]\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{g(|\nabla w|)}{|\nabla w|}\sum_{l=1}^{n} w_l w_i\left(\frac{g'(|\nabla w|)}{g(|\nabla w|)}|\nabla w| - 1\right)w_i + w_{ii}\right]|\nabla w|^{-2}\\
&= H(|\nabla w|)\left[\sum_{i,l=1}^{n}\left(\frac{g'(|\nabla w|)}{g(|\nabla w|)}|\nabla w| - 1\right)\frac{w_i}{|\nabla w|}\frac{w_l}{|\nabla w|}w_{li} + w_{il}\delta_{il}\right]\\
&= H(|\nabla w|)\operatorname{tr}\left[\underbrace{\left[\left(\frac{g'(|\nabla w|)}{g(|\nabla w|)}|\nabla w| - 1\right)\frac{\nabla w}{|\nabla w|}\otimes\frac{\nabla w}{|\nabla w|} + \mathrm{Id}_{n\times n}\right]}_{A_w(x)} D^2 w\right]\\
&= H(|\nabla w|)\operatorname{tr}\left(A_w(x)D^2 w\right).
\end{aligned}
$$

Com respeito ao espectro de $A_w(x)$, considere $p \in \mathbb{R}^n$ e defina $A_p = (a_{ij})_{n\times n}$ onde $a_{ij} = p_i \cdot p_j$. Em particular, A_p é a matriz associada a transformação linear $p \otimes p$. Defina agora, $A_p^\alpha := \mathrm{Id}_{n\times n} + \alpha A_p$, seja $v \in \mathbb{R}^n$ um autovetor de A_p, e λ_v seu respectivo autovalor, logo,

$$
A_p^\alpha v = (\mathrm{Id}_{n\times n} + \alpha A_p)v = v + \alpha\lambda_v v = (1+\alpha\lambda_v)v.
$$

Isto é, $1+\alpha\lambda_v$ é autovalor de A_p^α. Por outro lado, se w é autovetor de A_p^α com λ_w seu respectivo autovalor, temos que

$$
A_p w = \frac{1}{\alpha}(A_p^\alpha - \mathrm{Id}_{n\times n}) = \frac{1}{\alpha}(\lambda_w - 1)w.
$$

Logo, $\frac{1}{\alpha}(\lambda_w - 1)$ é autovalor de A_p. Com isso, temos que $\tilde{\lambda}$ é autovalor de A_p se, e somente se, $1+\alpha\tilde{\lambda}$ for autovalor de A_p^α.

Uma vez que A_p seja uma matriz auto adjunta não negativa temos que seus autovalores então em $[0, ||A_p||]$. Ora,

$$
||A_p|| = \sup_{|\xi|\le 1}|A_p\xi| = \sup_{|\xi|\le 1}|(p\cdot\xi)p| \le |p|^2
$$

e $A_p\frac{p}{|p|} = |p|^2$. Então, $||A_p|| = |p|^2$. Portanto, os autovalores de A_p^α estão em $[1, 1+\alpha|p|^2]$ se $\alpha > 0$, e em $[1+\alpha|p|^2, 1]$ se $\alpha < 0$. Em particular, se $|p| = 1$ e $\underline{\alpha} \le \alpha \le \overline{\alpha}$, segue que os autovalores de A_p^α então em

$$[\min\{1, \underline{\alpha}+1\}, \max\{1, \overline{\alpha}+1\}] .$$

Tendo em vista essas últimas considerações, sabendo que $\left|\dfrac{\nabla w}{|\nabla w|}\right| = 1$ e por (4) que

$$\delta - 1 \leq \frac{g'(|\nabla w|)}{g(|\nabla w|)}|\nabla w| - 1 \leq g_0 - 1$$

segue que o espectro de $A_w(x)$ está contido em $[\min\{1,\delta\}, \max\{1, g_0\}]$. Defina $\lambda_\delta = \min\{1,\delta\}$ e $\Lambda_{g_0} = \max\{1, g_0\}$.

Portanto,

$$\Delta_g w = H(|\nabla w|)\mathrm{tr}\left(A_w D^2 w\right) .$$

Então, pela definição dos operadores de Pucci, segue para quase todo $x \in \Omega$ que

$$H_g(|\nabla w(x)|)(M)^-_{\lambda_\delta,\Lambda_{g_0}}(D^2\varphi(x)) \leq \Delta_g w(x) \leq H_g(|\nabla w(x)|)\mathcal{M}^+_{\lambda_\delta,\Lambda_{g_0}}(D^2 w(x)).$$

∎

Com esse resultado podemos estudar como as barreiras se comportam quando avaliadas no g-laplaciano. Seja Γ_- solução de

$$\begin{cases} \mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2\Gamma_-) & = f, \quad \text{em } \mathcal{A} := \mathcal{A}_{\mu r, r}(x_0) \\ \Gamma_- & = M_0, \quad \text{em } \partial B_{\mu r}(x_0) \\ \Gamma_- & = 0, \quad \text{em } \partial B_r(x_0). \end{cases}$$

Assumindo a condição, do Teorema 3.8, isto é

$$||f||_{L^q(\mathcal{A}_{\mu r, r})} \leq \frac{\eta^\star M_0}{r^{2-\frac{n}{q}}}.$$

Então, para qualquer $V \subset \mathcal{A}_{\frac{r}{2},r}$ aberto, temos que se $f \geq 0$, em V então,

$$\Delta_g(\Gamma_-) \geq H(|\nabla\Gamma_-|)\mathcal{M}^-_{\lambda_g,\Lambda_{g_0}}(D^2\Gamma_-) = \frac{g(|\nabla\Gamma_-|)}{|\nabla\Gamma_-|}f \geq \frac{g\left(\frac{\theta_\gamma(\mu)M_0}{2r}\right)}{\frac{2\Theta_\gamma(\mu)}{r}}f.$$

Dessa forma,

$$\Delta_g(\Gamma_-) \geq \min\left\{\left(\frac{\theta_\gamma(\mu)}{2}\right)^\delta, \left(\frac{\theta_\gamma(\mu)}{2r}\right)^{g_0}\right\}(2\Theta_\gamma(\mu))^{-1}H\left(\frac{M_0}{r}\right)f \geq \mathcal{L}_0 f$$

onde
$$\mathcal{L}_0 := \frac{1}{2\Theta_\gamma(\mu)} \min\left\{ \left(\frac{\theta_\gamma(\mu)}{2}\right)^\delta, \left(\frac{\theta_\gamma(\mu)}{2r}\right)^{g_0}, (2\Theta_\gamma(\mu))^\delta, (2\Theta_\gamma(\mu))^{g_0} \right\}.$$

De maneira similar, se Γ_+ é solução de

$$\begin{cases} \mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(D^2\Gamma_+) & = f, \quad \text{em } \mathcal{A} := \mathcal{A}_{\mu r, r}(x_0) \\ \Gamma_- & = 0, \quad \text{em } \partial B_{\mu r}(x_0) \\ \Gamma_- & = M_0, \quad \text{em } \partial B_r(x_0), \end{cases}$$

e $f \leq 0$ em V, então $\Delta_g \Gamma_+ \leq \mathcal{N}_0 H_g\left(\frac{M_0}{r}\right) f$, em V, onde

$$\mathcal{N}_0 := \frac{2}{\theta^+_\gamma(\mu)} \max\left\{ \left(\frac{\theta^+_\gamma}{2}\right)^\delta, \left(\frac{\theta^+_\gamma}{2}\right)^{g_0}, (2\Theta^+_\gamma(\mu))^\delta, (2\Theta^+_\gamma(\mu))^{g_0} \right\}.$$

4 SOLUÇÕES NO SENTIDO DA VISCOSIDADE PARA O PROBLEMA DE FRONTEIRA LIVRE

Agora que terminamos a parte preliminar do nosso trabalho, definiremos inspirados em De Silva (2011), as soluções no sentido da viscosidade para o nosso problema de fronteira livre. Por fim, checaremos regularidade C^∞ até a fronteira de um problema de Neumann envolvendo um operador linear da forma não-divergente. Ressaltamos que para os nossos fins, é suficiente a regularidade $C^{1,\alpha}$ até a fronteira. Tal resultado é utilizado, na demonstração do *Improvement of Flatness*.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Para $u \in C^0(\Omega)$ considere $\Omega^+(u) := \Omega \cap \{u > 0\}$ e $F(u) := \partial\{u > 0\} \cap \Omega$.

Definição 4.1. *Sejam u, $\varphi \in C^0(\Omega)$, diremos que φ toca u por cima em x se (respec. toca por baixo), $u(x) = \varphi(x)$ e existe um aberto $\mathcal{O}$ tal que*

$$\varphi \geq u \quad (\textit{respec.}\varphi \leq u) \textit{ em } \quad \mathcal{O}.$$

Diremos que φ toca estritamente u em x se a desigualdade acima for estrita em $\Omega \setminus \{x\}$.

Definição 4.2. *Seja $u \in C^0(\Omega)$, diremos que u é subsolução (respec. supersolução) no sentido da viscosidade para* (2)*, se pra toda função $\varphi \in C^2(\Omega)$ que toca u por cima (respec. por baixo) em $x \in \Omega^+(u)$ e $\nabla\varphi(x) \neq 0$,*

$$\Delta_g\varphi(x) \geq f(x), \quad (\textit{respec. } \Delta_g\varphi(x) \leq f(x)).$$

e se $\varphi \in C^2(\Omega)$ é tal que φ^+ toca u por cima (respec. por baixo) em $x \in F(u)$, e $|\nabla\varphi|(x) \neq 0$, então

$$|\nabla\varphi|(x) \geq Q(x), \quad (\textit{respec.} \quad |\nabla\varphi|(x) \leq Q(x))$$

Definição 4.3. *Seja $v \in C^2(\Omega)$. Dizemos que v é uma subsolução estrita de* (2) *(respec. supersolução estrita)se*

(i) $\Delta_g v > f$ *em* $\Omega^+(v)$ *(respec.* $\Delta_g v < f$*).*

(ii) *Se* $x \in F(v)$ *então* $|\nabla v|(x) > Q(x)$ *(respec.* $0 < |\nabla v|(x) < Q(x)$*).*

Observe que pelo fato de v ser uma subsolução estrita, $F(v)$ é uma hipersuperfície C^2, isto segue pelo Teorema da Função Implícita. O mesmo vale se v for supersolução estrita.

Lema 4.1. *Sejam u, v, respectivamente, solução e subsolução estrita para* (2) *em Ω. Se $u \geq v^+$ em Ω, então $u > v^+$ em $\Omega^+(v) \cup F(v)$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que existe $x_0 \in \Omega^+(v) \cup F(u)$ tal que $u(x_0) = v^+(x_0)$.

Por outro lado, note que se $x_0 \in \Omega^+(\nu)$, então $\nu^+(x_0) > 0$. Consequêntimente $x_0 \in \Omega^+(u)$. Além disso, temos pela continuidade de u que $\Omega^+(u)$ é aberto.

Retornando ao Lema, temos que se $x_0 \in \Omega^+(u)$. Logo, ν toca u por baixo em x_0. Então,

$$\Delta_g \nu(x_0) \leq f(x_0).$$

Absurdo! Pois, ν é supersolução estrita.

Agora, se $x_0 \in F(\nu)$ temos que ou $x_0 \in \Omega^+(u)$, ou $x_0 \in F(u)$, ou $x_0 \in \{u \leq 0\}^\circ$. Se $x_0 \in \Omega^+(u)$ caímos no caso anterior, agora, se $x_0 \in F(u)$ temos que $|\nabla \nu|(x_0) \leq g(x_0)$ outro absurdo! Assim, resta nos o caso em que $x_0 \in \{u \leq 0\}^\circ$. Ora, neste caso, existe $B_\delta(x_0) \subset \{u \leq 0\}^\circ$ tal que $u \leq 0$ em $B_\delta(x_0)$. Como $u \geq \nu^+$ em Ω segue que o mesmo vale em $B_\delta(x_0)$. Logo, $x_0 \in \{\nu \leq 0\}^\circ$. Absurdo, pois $x_0 \in F(\nu)$. ■

4.1 Regularidade até a fronteira para o problema limite

Considere, o seguinte problema de Neumann, onde consideraremos soluções no sentido da viscosidade:

$$\begin{cases} \mathrm{tr}(AD^2\tilde{u}) = 0 & \text{em} \quad B_\rho \cap \{x_n > 0\}, \\ \tilde{u}_n = 0 & \text{em} \quad B_\rho \cap \{x_n = 0\}. \end{cases} \tag{34}$$

onde $A = (a_{ij})_{n\times n}$ é uma matriz simétrica de coeficientes constantes com todos os autovalores positivos.

Sabemos que o operador $\mathrm{tr}(AD^2(\cdot))$ é a menos de uma mudança de sistema de coordenadas o laplaciano. A rigor, seja $B = (b_{ij})$ uma matriz de ordem n não singular e u de modo que $\mathrm{tr}(AD^2u) = 0$. Defina $\tilde{u}(x) = u(Bx)$. Para facilitar a compreensão de algumas estimativas, introduziremos a seguinte notação:

$$B = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \vdots \\ \nu_n \end{pmatrix}$$

onde $\nu_i = (b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{in})$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Isto é, cada ν_i é uma linha da matriz B. É de fácil checagem que

$$Bx = \begin{pmatrix} \nu_1 \cdot x \\ \nu_2 \cdot x \\ \vdots \\ \nu_n \cdot x \end{pmatrix}.$$

Tendo em vista essa notação,

$$\tilde{u}_i(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(Bx)(\nu_k \cdot x)_i$$

e

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_{ij}(x) &= \left(\sum_{k=1}^{n} u_k(Bx)(\nu_k \cdot x)_i\right)_j \\
&= \sum_{k=1}^{n} u_{kl}(Bx)(\nu_l \cdot x)_j(\nu_k \cdot x)_i \\
&= \sum_{k=1}^{n} u_{kl}(Bx) b_{lj} b_{ki}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$D^2\tilde{u}(x) = B^T D^2 u(Bx) B.$$

Seja $\tilde{A} := B^T A B$, dessa forma sendo B uma matrix ortogonal, segue das propriedades do traço de matrizes

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\tilde{A} D^2 \tilde{u}(x)) &= \mathrm{tr}(B^T A B B^T D^2 u(Bx) B) \\
&= \mathrm{tr}(B^T A D^2 u(Bx) B) \\
&= \mathrm{tr}(B B^T A D^2 u(Bx)) \\
&= \mathrm{tr}(A D^2 u(Bx)) = 0.
\end{aligned}$$

Ora, sendo A uma matrix simétrica existe uma matriz ortogonal O de tal sorte que $O^T A O = D$ onde $D = (\lambda_i \delta_{ij})_{n\times n}$ é uma matriz diagonal. Dessa forma, defina $P = (\lambda^{-\frac{1}{2}} \delta_{ij})_{n\times n}$ e tome $B = OP$. Pois, com essa escolha

$$B^T A B = (OP)^T A O P = P^T O^T A O P = P^T D P = Id_{n\times n}.$$

Portanto,

$$\Delta\tilde{u}(x) = \mathrm{tr}(A D^2 u(x)) = 0.$$

Logo, podemos considerar o laplaciano em (34), ao invés do operador não-divergente. Ou seja, basta estudarmos o seguinte problema:

$$\begin{cases} \Delta\tilde{u} = 0 & \text{em} \quad B_\rho \cap \{x_n > 0\}, \\ \tilde{u}_n = 0 & \text{em} \quad B_\rho \cap \{x_n = 0\}. \end{cases} \tag{35}$$

Definição 4.4. *Seja* $\tilde{u}$ *uma função contínua em* $B_\rho \cap \{x_n \geq 0\}$*. Dizemos que* $\tilde{u}$ *é uma solução no sentido da viscosidade para* (35)*, se dado um polinômio quadrático* P *tocando*

$\tilde{u}$ *por baixo (respectivamente por cima), em* $\bar{x} \in B_\rho \cap \{x_n \geq 0\}$*,*

(i) *Se* $\bar{x} \in B_\rho \cap \{x_n > 0\}$*, então* $\Delta P(\bar{x}) \leq 0$ *(respectivamente* $\Delta P(\bar{x}) \geq 0$*), isto é* $\tilde{u}$ *é harmônica no sentido da viscosidade;*

(ii) *Se* $\bar{x} \in B_\rho \cap \{x_n = 0\}$ *então* $P_n(\bar{x}) \leq 0$ *(respectivamente* $P_n(\bar{x}) \geq 0$*).*

Note que na definição podemos escolher o polinômio P que tocando $\tilde{u}$ estritamente, seja tocando por cima ou por baixo. Ora, seja P um polinômio que toca $\tilde{u}$ por baixo em $\bar{x}$, e seja $\eta > 0$. Defina

$$P_\eta(x) := P(x) - \eta|x - \bar{x}|^2.$$

Claramente, temos que $P_\eta(x) < P(x)$ em $B_\rho \cap \{x_n > 0\} - \{\bar{x}\}$, $P_\eta(x) = P(x)$ se, e somente se, $x = \bar{x}$ e toca u por baixo em $\bar{x}$.

Agora, digamos que P toque $\tilde{u}$ por cima, então defina

$$P_\eta(x) := P(x) + \eta|x - \bar{x}|^2$$

para $\eta > 0$.

Também é suficiente verificar (ii) para polinômios $\tilde{P}$, tais que $\Delta\tilde{P} > 0$. Com efeito, seja P um polinômio quadrático que toca $\tilde{u}$ por baixo. Então, defina

$$\tilde{P}(x) := P(x) - \eta(x_n - \bar{x}_n) + C(\eta)(x_n - \bar{x}_n)^2.$$

Ora, para $1 \leq i \leq n-1$,

$$\tilde{P}_i = P \quad \text{e} \quad \tilde{P}_n(x) = P_n - \eta + C(\eta)(x_n - \bar{x}_n)^2.$$

Daí, $\tilde{P}_{ii} = P_{ii}$, $i = 1, \ldots n-1$, e $\tilde{P}_{nn} = P_{nn} + 2C(\eta)$. Dessa forma, $\Delta\tilde{P} = \Delta P + 2C(\eta)$. Observe que se $C(\eta) > \dfrac{\Delta P}{2}$ então $\Delta\tilde{P} > 0$ e $\tilde{P}_n(\bar{x}) = P_n(\bar{x}) - \eta \leq -\eta$.

Lema 4.2. *Seja* $\tilde{u}$ *uma solução no sentido da viscosidade para* (35)*. Então* $\tilde{u}$ *é uma solução clássica. Em particular,* $\tilde{u} \in C^\infty(B_\rho \cap \{x_n \geq 0\})$*.*

Demonstração. Seja

$$u^\star(x) = \begin{cases} \tilde{u}(x) & \text{se} \quad x \in B_\rho \cap \{x_n \geq 0\} \\ \tilde{u}(x', -x_n) & \text{se} \quad x \in B_\rho \cap \{x_n < 0\}. \end{cases}$$

Afirmação: $u^\star$ é hamônica no sentido da viscosidade e consequentemente suave em B_ρ.

Prova da Afirmação: Seja P um polinômio que toca $u^\star$ em $\bar{x} \in B_\rho$, estritamente por baixo. Mostraremos que $\Delta P \leq 0$.

Ora, se $\bar{x} \in B_\rho \cap \{x_n > 0\}$ então é imediato que $\Delta P \leq 0$. Agora, se $\bar{x} \in$

$B_\rho \cap \{x_n < 0\}$. Temos que

$$P(\bar{x}', \bar{x}_n) = \tilde{u}(\bar{x}', -\bar{x}_n).$$

Então defina em B_ρ

$$\tilde{P}(x', x_n) = P(x', -x_n)$$

Seja $\mathcal{O} \subset B_\rho \cap \{x_n < 0\}$, vizinhança de $\bar{x}$, onde $P(x', x_n) \leq \tilde{u}(x', -x_n)$, e defina

$$-\mathcal{O} := \{(x', -x_n);\ (x', x_n) \in \mathcal{O}\}.$$

Claramente, $-\mathcal{O} \subset B_\rho \cap \{x_n > 0\}$. Então para cada $x \in -\mathcal{O}$

$$\tilde{P}(x', -x_n) = P(x', -(-x_n)) = P(\underbrace{x', x_n}_{\in \mathcal{O}}) \leq \tilde{u}(x', -x_n)$$

e

$$\tilde{P}(\bar{x}', \bar{x}_n) = P(\bar{x}', \bar{x}_n) = \tilde{u}(\bar{x}', \bar{x}_n).$$

Então $\tilde{P}$, toca $\tilde{u}$ por baixo, em $(\bar{x}', \bar{x}_n)$, Então, $\Delta P = \Delta \tilde{P} \leq 0$.

Dessa forma, resta nos verificar quando $\bar{x} \in B_\rho \cap \{x_n = 0\}$. Para isso, defina,

$$S(x) := \frac{P(x) + P(x', -x_n)}{2}.$$

Então,

$$\Delta S = \frac{1}{2}(\Delta P + \Delta P) = \Delta P$$

e

$$S_n(x) = \frac{1}{2}(P_n(x', x_n) - P_n(x', x_n)).$$

Claramente, $S_n(x', 0) = 0$.

Agora, seja $\mathcal{O}$ um aberto tal que P toca $u^\star$ por baixo e observe que da $x \in \mathcal{O}$ temos que ou $x = (x', x_n)$, onde, x_n é diferente ou igual a zero. Se $x_n = 0$

$$S(x', 0) = P(x', 0) \leq u^\star(x', 0).$$

Por outro lado, se $x_n \neq 0$ vem que

$$S(x) = \frac{P(x', x_n) + P(x', -x_n)}{2} \leq \frac{u^\star(x', x_n) + u^\star(x', -x_n)}{2} = u^\star(x) \tag{36}$$

e se $S(x) = u^\star(x)$ então, de (36),

$$\begin{aligned}
\frac{P(x',x_n)+P(x',-x_n)}{2} &= \frac{u^\star(x',x_n)+u^\star(x',-x_n)}{2}\\
\Rightarrow P(x',x_n)+P(x',-x_n) &= u^\star(x',x_n)+u^\star(x',-x_n)\\
\Rightarrow P(x)-u^\star(x) &= u^\star(x',-x_n)-P(x',x_n)\geq 0.
\end{aligned}$$

Daí, $P(x)=u^\star(x)$ então, $x=\bar{x}$. Portanto, S toca $u^\star$ por baixo em $\bar{x}$ estritamente.

Agora, defina para $\varepsilon>0$,

$$S_\varepsilon(x)=S(x)+\varepsilon x_n.$$

Afirmação: S_ε toca por baixo $u^\star$ em algum $x_\varepsilon\in B_\rho\cap\{x_n>0\}$, a menos de adição de uma constante.

Prova da Afirmação: Seja $\delta>0$ tal que $u^\star-S>0$ em $\overline{B_\delta(\bar{x})}\setminus\{\bar{x}\}$ e $0<\lambda<\delta$. Defina $\mathcal{A}_{\delta,\lambda}(\bar{x})=\overline{B_\delta(\bar{x})\setminus B_\lambda(\bar{x})}$ e

$$0<\varepsilon_\lambda<\frac{1}{\rho}\inf_{\mathcal{A}_{\delta,\lambda}(\bar{x})}(u^\star-S).$$

Assim, para $x\in\mathcal{A}_{\delta,\lambda}(\bar{x})\cap\{x_n>0\}$,

$$\begin{aligned}
u^\star(x)-S_{\varepsilon_\lambda}(x) &= u^\star(x)-S(x)-\varepsilon_\lambda x_n\\
&> u^\star(x)-S(x)-\varepsilon_\lambda\rho\\
&> u^\star(x)-S(x)-\inf_{\mathcal{A}_{\delta,\lambda}(\bar{x})}(u^\star-S)\\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Logo, $S_{\varepsilon_\lambda}(x)<u^\star(x)$ em $\mathcal{A}_{\delta,\lambda}(\bar{x})\cap\{x_n>0\}$.

Suponha por absurdo, que para todo $x\in B_\delta(\bar{x})\cap\{x_n>0\}$,

$$u^\star(x)-S_{\varepsilon_\lambda}(x)\neq 0.$$

Pela continuidade de $u^\star$ e S_{e_λ} e conexidade de $B_\delta(\bar{x})\cap\{x_n>0\}$, segue que ou $u^\star(x)-S_{\varepsilon_\lambda}>0$ ou $u^\star(x)-S_{\varepsilon_\lambda}(x)<0$ em $B_\delta(\bar{x})\cap\{x_n>0\}$. Como $u^\star-S_{\varepsilon_\lambda}>0$ em $\mathcal{A}_{\delta,\lambda}(\bar{x})\cap\{x_n>0\}$, temos que

$$u^\star-S_{\varepsilon_\lambda}>0 \quad \text{em} \quad B_\delta(\bar{x})\cap\{x_n>0\}.$$

Então, S_{ε_λ} toca $u^\star$ por baixo em $\bar{x}\in B_\delta(\bar{x})\cap\{x_n=0\}$. Logo, $(S_{\varepsilon_\lambda})_n(\bar{x})\leq 0$. Assim,

$$S_n(\bar{x})+\varepsilon_\lambda\leq 0 \quad\Rightarrow\quad S_n(\bar{x})\leq-\varepsilon_\lambda<0.$$

Absurdo! Pois, $S_n(\bar{x}) = 0$. Logo, existe $x_{\varepsilon_\lambda} \in B_\delta(\bar{x}) \cap \{x_n > 0\}$, tal que

$$u^\star(x_{\varepsilon_\lambda}) - S_{\varepsilon_\lambda}(x_{\varepsilon_\lambda})) = 0.$$

A fortiori, o mesmo é verdade para $0 < \varepsilon < \varepsilon_\lambda$, para algum $x_\varepsilon \in B_\delta(\bar{x}) \cap \{x_n > 0\}$.

A priori não sabemos se S_ε toca $u^\star$ por baixo em $\bar{x}$. Pois, o conjunto

$$\Omega_\varepsilon := \{x \in B_\lambda(\bar{x}) \cap \{x_n > 0\}; u^\star - S_\varepsilon < 0\}$$

pode ser não vazio. O que torna delicado o estudo. Seja $0 < \tau << 1$, tal que $B_\tau(x_\varepsilon) \subset B_\delta(\bar{x}) \cap \{x_n > 0\}$. Há duas possibilidades ou $B_{\tau'}(x_\varepsilon) \cap \Omega_\varepsilon = \varnothing$ para algum $0 < \tau' \leq \tau$, ou $B_\tau(x_\varepsilon) \cap \Omega_\varepsilon = \varnothing$.

Para a primeira situação não há o que fazer, pois, neste caso S_ε toca $u^\star$ em x_ε e o resultado segue. Por outro lado, no segundo caso. Defina

$$b := \sup_{\overline{B_\lambda(\bar{x}) \cap \{x_n > 0\}}} (S_\varepsilon - u^\star).$$

Note que o supremo acima é atingido em Ω_ε, pois $S_\varepsilon - u^\star > 0$ em Ω_ε. Pela continuidade de $S_\varepsilon - u^\star$ existe $\tilde{x}_\varepsilon \in \Omega_\varepsilon$ tal que $b = S_\varepsilon(\tilde{x}_\varepsilon) - u^\star(\tilde{x}_\varepsilon)$. Veja que $\tilde{x}_\varepsilon$ não pertence $\{x_n = 0\}$. Pois, $\Omega_\varepsilon \cap \{x_n = 0\} = \varnothing$. Com efeito, se exite $(x', 0) \in \Omega_\varepsilon$

$$u^\star(x', 0) - S(x', 0) = u^\star(x', 0) - S_\varepsilon(x'0) < 0.$$

Isso é uma contradição, uma vez que $S \leq u^\star$ em $B_\delta(\bar{x})$. Disso vem que se $\tilde{x}_\varepsilon \in \{x_n = 0\}$ então

$$S(\tilde{x}_e) - u^\star(\tilde{x}\varepsilon) = S_\varepsilon(\tilde{x}_\varepsilon) - u^\star(\tilde{x}_\varepsilon) > S_\varepsilon(x) - u^\star(x) > 0, \text{ para todo } x \in \Omega_\varepsilon,$$

donde vem outra contradição. Então, $\tilde{x}_\varepsilon \in \Omega_\varepsilon^\circ$.

Agora defina

$$Q_\varepsilon(x) := S_\varepsilon(x) - b.$$

Observe que $Q_\varepsilon(\tilde{x}_\varepsilon) = u^\star(\tilde{x}_\varepsilon)$, isto é, Q_ε toca $u^\star$ em $\tilde{x}_\varepsilon$. Seja $B_\eta(\tilde{x}_\varepsilon) \subset \Omega_\varepsilon$ tome $x \in B_\eta(\tilde{x}_\varepsilon)$.

$$\begin{aligned} u^\star(x) - Q_\varepsilon(x) &= u^\star(x) - S_\varepsilon(x) + b \\ &= u^\star(x) - S_\varepsilon(x) + S_\varepsilon(\tilde{x}_\varepsilon) - u^\star(\tilde{x}) \\ &= S_e(\tilde{x}_\varepsilon) - u^\star(\tilde{x}_\varepsilon) - (S_\varepsilon(x) - u^\star(x)) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Então Q_ε toca $u^\star$ por baixo. O que prova a afirmação.

Da afirmação vem que $\Delta S_\varepsilon \leq 0$, então $\Delta P \leq 0$. O que prova a primeira afirmação. Logo, $u^\star$ é harmônica no sentido da viscosidade em B_ρ. Portanto, $u^\star$ é harmônica no sentido clássico em B_ρ. Daí $\tilde{u} \in C^\infty(B_\rho \cap \{x_n \geq 0\})$. ■

Temos observado que o operador que nos será útil (operador do problema limite) assume a seguinte forma:

$$\mathcal{L}_g := \Delta u + \left(\frac{g'(1)}{g(1)} - 1 \right) \partial_{nn} u = \mathrm{tr}(A_g D^2 u),$$

onde

$$A_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{g'(1)}{g(1)} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

para algum g satisfazendo (4). Temos que A_g é uma matriz uniformemente elíptica com constantes de elipticidade $\Lambda_{g_0} = \max\{1, g_0\}$ e $\lambda_\delta := \min\{1, \delta\}$. Então, pelo resultado anterior u sendo solução do problema de Neumann com o operador acima é C^∞.

Teorema 4.1. *Seja* u *solução de* (34)*, com* $\|u\|_{L^\infty(B_r^+)} \leq 1$ *e* $0 < r < 1$*. Então, existe uma constante* $C > 0$ *universal tal que para todo* $x \in B^+_{\frac{r}{2}}$,

$$|u(x) - u(0) - \nabla u(0) \cdot x| \leq C r^2.$$

Demonstração. Considerando $u^\star$, temos que $u^\star \in C^\infty(B_r)$, então

$$\begin{aligned} |u^\star(x) - u^\star(0) - \nabla u^\star(0) \cdot x| &= \left| x^T \cdot \int_0^1 (1-s) D^2 u^\star(sx)\, ds \cdot x \right| \\ &\leq n^2 |x|^2 \frac{1}{2} \|D^2 u^\star\|_{L^\infty(B_r)} \\ &\leq n^2 C(n, g_0, \delta) r^2 \|u^\star\|_{L^\infty(B_r)} \\ &\leq C_1(n, g_0, \delta) r^2 \end{aligned}$$

■

5 REGULARIDADE DA FRONTEIRA LIVRE

Neste capítulo trabalhamos os resultados centrais desta tese. Iremos iniciá-lo apresentando as propriedades Lipschitz local e estimativas de não-degenerescência das soluções do problema de fronteira livre. A seguir provamos a desigualdade do tipo-Harnack onde nos inspiramos em De Silva (2011). Este último resultado implica no *improvement of flatness*, que é o ingrediente fundamental na demonstração da regularidade $C^{1,\alpha}$ da fronteira livre.

5.1 Regularidade Lipschitz local e estimativas de não-degenerescência

Lema 5.1. *Seja* u *uma solução no sentido da viscosidade de* (2)*, em* B_1 *com* $f \in C^0(B_1) \cap L^q(B_1)$*,* $q > n$*, e* $0 \leq Q \in C^0(B_1) \cap L^\infty(B_1)$*. Então, existe uma constante* $\eta_0 \in (0,1)$ *e* $C_\star$ *dependendo de* n*,*δ*,* g_0 *e* $g(1)$ *tal que se*

$$\max\{||f||_{L^q(B_1)}, ||Q||_{L^\infty(B_1)} - 1\} \leq \eta_0 \tag{37}$$

então,

$$u(x) \leq C_\star \operatorname{dist}(x, F(u)), \quad x \in B^+_{\frac{1}{2}}(u). \tag{38}$$

Em particular, para $x \in B^+_{\frac{1}{2}}(u)$*,*

$$|\nabla u|(x) \leq C_0,$$

para alguma constante $C_0 \geq C_\star$*. Mais ainda, se* $F(u)$ *é gráfico de uma função Lipschitz em* B_1*,* $B_{\frac{1}{2}} \cap F(u) \neq \varnothing$ *e*

$$||Q - 1||_{L^\infty(B_1)} \leq \eta_0,$$

então existe outra constante universal $c_\star = c_\star(n, \delta, g_0, q) > 0$ *tal que*

$$u(x) \geq c_\star \operatorname{dist}(x, F(u)), \quad x \in B^+_{\frac{1}{2}}(u). \tag{39}$$

Se $q = \infty$*, então* η_0*,* $C_\star$*,* C_0 *e* $c_\star$ *não dependem de* q*.*

Demonstração. Seja $x_0 \in B^+_{\frac{1}{2}}(u)$ e defina $d_0 = \operatorname{dist}(x_0, F(u))$. Agora, considere o seguinte escalonamento,

$$v(x) = \frac{u(x_0 + d_0 x)}{d_0}, \quad x \in B_1.$$

Então, v é uma solução no sentido da viscosidade de (2) em B_1 trocando f e Q por $\tilde{f}(x) = d_0 f(x_0 + d_0 x)$ e $\tilde{Q}(x) = Q(x_0 + d_0 x)$ respectivamente. Assim, para provarmos (38) precisamos mostrar que $v(0) \leq C_\star$.

Afirmação: Existe $C_\star > 0$ suficientemente grande tal que $v(0) > C_\star$ não pode acontecer.

Prova da Afirmação: Suponha, por absurdo, que para qualquer escolha de $C_\star$ tenhamos

$v(0) > C_\star$. Pela desigualdade de Harnack,

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} v \leq C\left[\inf_{B_{\frac{1}{2}}} u + g^{-1}(\|\tilde{f}\|_{L^q(B_1)})\right].$$

Logo,

$$\begin{aligned} v(0) &\leq C\left(v(x) + g^{-1}(\|\tilde{f}\|_{L^q(B_1)})\right) \\ \Rightarrow v(x) &\geq \frac{v(0)}{C} - g^{-1}(\|\tilde{f}\|_{L^q(B_1)}) \\ &> \frac{C_\star}{C} - g^{-1}(\|\tilde{f}\|_{L^q(B_1)}) \\ &> \frac{C_\star}{C} - g^{-1}(\eta_0). \end{aligned}$$

Tomando

$$0 < \eta < \tilde{\eta} := \min\left\{\left(\frac{C_\star}{2C}\right)^{\delta}, \left(\frac{C_\star}{2C}\right)^{g_0}\right\} g(1) \leq g\left(\frac{C_\star}{2C}\right),$$

vem que

$$v(x) \geq \frac{C_\star}{C} - g^{-1}(\eta_0) \geq \frac{C_\star}{C} - g^{-1}\left(g\left(\frac{C_\star}{2C}\right)\right) = \frac{C_\star}{2C},$$

para todo $x \in B_{\frac{1}{2}}$.

Seja $\Gamma_- : \mathcal{A}_{\frac{1}{2},1}(0) \to \mathbb{R}$, solução de

$$\begin{cases} \mathcal{M}^-_{\lambda_\delta,\Lambda_{g_0}}(D^2\Gamma_-) = \dfrac{f_0}{\mathcal{L}_0 H_g\left(\frac{C_\star}{2C}\right)}, & \text{em} \quad \mathcal{A} := \mathcal{A}_{\frac{1}{2},1}(0) \\ \Gamma_- = \dfrac{C_\star}{2C}, & \text{em} \quad \partial B_{\frac{1}{2}}(0) \\ \Gamma_- = 0, & \text{em} \quad \partial B_1(0). \end{cases}$$

onde $f_0 := |\tilde{f}| + \lambda_\star$ para algum $\lambda_\star > 0$, a ser definido *a posteriori*.

Pelo Teorema 3.8, se

$$\|f\|_{L^q(B_1)} \leq \eta^\star \frac{C_\star}{4C} \quad \text{e} \quad \lambda_\star \eta^\star \leq \frac{C_\star}{4|B_1|^{\frac{1}{q}} C},$$

então,

$$\|f_0\|_{L^q(B_1)} \leq \eta^\star \frac{C_\star}{2C} \quad \text{e} \quad \Delta_g \Gamma_- > \tilde{f}.$$

Pelo princípio da comparação (Teorema 2.8),

$$v(x) \geq \Gamma_-(x),$$

para todo $x \in \overline{\mathcal{A}_{\frac{1}{2},1}(0)}$.

Agora se $y_0 \in F(u)$ satisfaz $d_0 = |x_0 - y_0|$ e $z_0 = \frac{y_0 - x_0}{d_0}$, então a parte positiva de Γ_- toca v por baixo em $z_0 \in F(v)$ e consequentemente, pelas condições da fronteira livre,

$$|\nabla \Gamma_-(z_0)| \leq \tilde{Q}(z_0) \leq 1 + \eta_0. \tag{40}$$

Mais uma vez, pelo Teorema 3.8,

$$|\nabla \Gamma_-(z_0)| \geq \frac{\theta_\gamma(\frac{1}{2}) C_\star}{4C}. \tag{41}$$

De (40) e (41), tomando

$$C_\star > \frac{4C(1+\eta_0)}{\theta_0(\frac{1}{2})} \quad \text{e} \quad \eta_0 \leq \min\left\{\tilde{\eta}, \eta^\star \frac{C_\star}{4C}\right\},$$

segue um absurdo. Pois, com essa escolha, segue que

$$1 + \eta_0 < |\nabla \Gamma_-(z_0)| \leq 1 + \eta_0.$$

Isso ocorreu devido termos assumido que $v(0) > C_\star$, para qualquer que pudesse ser $C_\star > 0$. Assim, vale (38). Como consequência disso, sendo $x_1 \in B_1^+(u)$ e $d_1 := \operatorname{dist}(x_1, F(u))$, dado $x \in B_{\frac{d_1}{2}}(x_1)$ temos

$$u(x) \leq C_\star \operatorname{dist}(x, F(u)) \leq C_\star |x - z| \quad \text{para todo } z \in F(u),$$

então,

$$u(x) \leq C_\star(|x - x_1| + |x_1 - z|) \quad \text{para todo } z \in F(u).$$

Logo,

$$u(x) \leq 2C_\star d_1,$$

para todo $x \in B_{\frac{d_1}{2}}(x_1)$. Então,

$$\sup_{B_{\frac{d_1}{2}}(x_1)} u \leq 2C_\star d_1.$$

Pela regularidade interior $C^{1,\alpha}$ de u,

$$\begin{aligned}
|\nabla u(x_0)| &\leq \tilde{C}\left[\frac{||u||_{L^\infty(B_{\frac{d_0}{2}}(x_0))}}{d_0} + d_0 g^{-1}(d_0^{1-\frac{n}{q}} ||f||_{L^q(B_{\frac{d_0}{2}}(x_0))})\right] \\
&\leq \tilde{C}\left[\frac{2C_\star d_0}{d_0} + d_0 g^{-1}(d_0^{1-\frac{n}{q}} \eta_0)\right] \\
&\leq \tilde{C}\left[2C_\star + \frac{1}{2} g^{-1}(\frac{1}{2^{1-\frac{n}{q}}} \eta_0)\right] := C_0.
\end{aligned}$$

Para provarmos o controle inferior, isto é, (39). Tomemos Γ_+ solução de

$$\begin{cases} \mathcal{M}^+_{\lambda_\delta,\Lambda_{g_0}}(D^2\Gamma_+) = \dfrac{-f_0}{\mathcal{N}_0 H_g\left(\frac{C_\star}{2C}\right)}, & \text{em} \quad \mathcal{A} := \mathcal{A}_{\frac{1}{2},1}(0) \\ \Gamma_+ = 0, & \text{em} \qquad \partial B_{\frac{1}{2}}(0) \\ \Gamma_- = \tilde{c}, & \text{em} \qquad \partial B_1(0), \end{cases}$$

para uma constante $\tilde{c} > 0$.

Para f e $\lambda_\star$ suficientemente pequenos temos que

$$|\nabla\Gamma_+| \leq 2\Theta^+_\gamma\left(\frac{1}{2}\right)\tilde{c}.$$

Assim, se $\tilde{c} < \frac{1-\eta_0}{2\Theta^+_\gamma(\frac{1}{2})}$, então $|\nabla\Gamma_+| < 1 - \eta_0$ em $B_{\frac{1}{2}}$. A menos de rotação, podemos assumir que $F(u)$ é gráfico de função Lipschitz na direção x_n e tenha em vista v como anteriormente.

Note que $\Gamma_+(x + 4e_n) \geq 0$ em $B_1(4e_n)$ e $u \leq 0$ nesse conjunto. Então translademos o gráfico de $\Gamma_+(x+4e_n)$ até tocar o gráfico de v. Note que Γ_+ deve tocar na altura $\tilde{c} = \tilde{\Gamma}_+(\tilde{z})$. Com efeito, seja $\tilde{\Gamma}_+$ tal função. Por construção,

$$\begin{cases} \Delta_g(\tilde{\Gamma}_+) & \leq & -f < f \text{ em } \tilde{\mathcal{A}} \\ |\nabla\tilde{\Gamma}_+| & \leq & 1 - \eta_0 < Q \text{ em } \tilde{\mathcal{A}} \end{cases} \tag{42}$$

onde $\tilde{\mathcal{A}}$ é o novo anel obtido pela translação. Em particular, $\tilde{\mathcal{A}} = B_1(y_0) \setminus B_{\frac{1}{2}}(y_0)$ para algum y_0. Temos que provar que $\tilde{z} \in \partial B_1(y_0)$. Veja que se $\tilde{z} \in \left(B_1(y_0) \setminus B_{\frac{1}{2}}(y_0)\right)^\circ$. Então, $\tilde{\Gamma}_+$ toca v por cima em $\tilde{z}$, pela regularidade de $\tilde{\Gamma}_+$, $\Delta_g(\tilde{\Gamma}_+)(\tilde{z}) \geq f(\tilde{z})$. Isso fere (42).

Agora checando outra possibilidade, isto é, se $\tilde{z} \in \partial B_{\frac{1}{2}}(y_0)$ vemos que $\tilde{\Gamma}_+(\tilde{z}) = v(\tilde{z}) = 0$, daí, $\tilde{z} \in F(u)$ a parte positiva de $\tilde{\Gamma}_+$ toca v por cima em $\tilde{z}$. Então, $|\nabla\tilde{\Gamma}_+|(\tilde{z}) \geq Q(\tilde{z})$, ferindo (42). Então, $\tilde{z} \in \partial B_1(y_0)$.

Assim, $v(\tilde{z}) = \tilde{c} > 0$. Então $\tilde{z} \in B_1^+(v)$. Da primeira parte,

$$\tilde{c} = v(\tilde{z}) \leq C_\star d(\tilde{z}, F(u)) \leq C_\star$$

donde concluímos que $\tilde{c}C_\star^{-1} \leq 1$. Logo, $B_{\frac{\tilde{c}}{2C_\star}}(\tilde{z}) \subset B_1^+(v)$ e $B_{\frac{\tilde{c}}{2C_\star}}(\tilde{z}) \cap F(u) = \varnothing$.

Temos que $F(u) = \{(x', x_n);\ h(x') = x \text{ e } h : B_1' \to \mathbb{R} \text{ é Lipschitz}\}$ onde B_1' é a bola unitária de $\mathbb{R}^{n-1}$.

Afirmação: Existe $r > 0$ que só depende de h tal que

$$B_r(0) \subset B_1^+(v) \text{ e } B_r(0) \cap F(u) = \varnothing$$

Prova da Afirmação: Pela regularidade de $F(u)$ existe um cone $\mathcal{C}(x_0, \theta)$ com vértice em

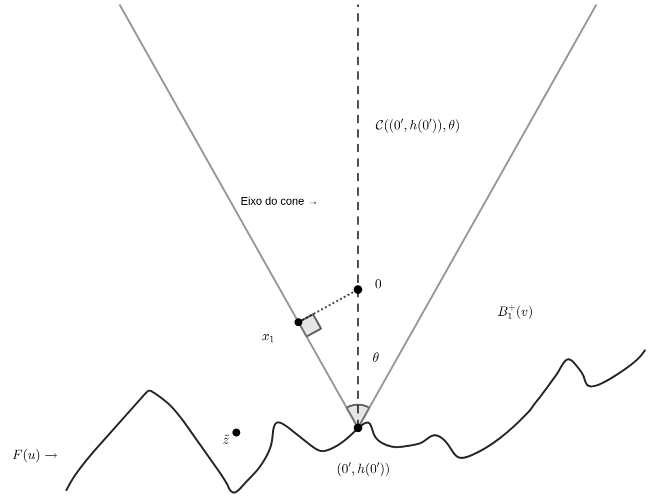
$(0', h(0'))$ e o ângulo $\theta \in (0, \frac{1}{2})$ de abertura depende da constante Lipschitz da função h. Mais ainda, esse cone só intersecta a fronteira livre em $(0', h(0'))$.

Por construção, $\operatorname{dist}(0, \partial\mathcal{C}(x_0, \theta) \cap B_r(x_0)) \leq \operatorname{dist}(0, F(u))$. Além disso,

$$\operatorname{dist}(0, \partial\mathcal{C}(x_0, \theta) \cap B_r(x_0)) = |x_1|, \text{ para algum } x_1 \in \partial\mathcal{C}(x_0, \theta).$$

Note que os pontos $(0', h(0'))$, 0 e x_1 formam um triângulo retângulo, reto em x_1. Vejamos a figura abaixo, para auxiliar na compreensão do raciocínio.

Figura 2 – Ilustração do cone para a existência do r.



Fonte: elaborado pelo autor.

Logo,

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{|x_1|}{|h(0')|} \iff |x_1| = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|h(0')|.$$

Portanto, tome $r = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|h(0')|$. O que o prova o afirmado.

Agora sendo $\tilde{z} = (\tilde{z}', \tilde{z}_n)$, defina $\psi : B_1' \to \mathbb{R}$ dada por

$$\psi(x') = h(x') + \tilde{z}_n - h(\tilde{z}').$$

Por construção o gráfico de ψ é "o gráfico da h transladado na direção e_n para tocar o ponto $\tilde{z}$". Mais ainda, o mesmo é conexo por caminhos e está contido em $B_1^+(\nu)$.

Se $0 \in \operatorname{Graf}(\psi)$, existe um caminho que denotaremos por ξ, contido em $\operatorname{Graf}(\psi)$ ligando $\tilde{z}$ a 0. Logo, podemos cobrir ξ por bolas abertas de raio $s := \min\{r, \frac{\tilde{c}}{2C_\star}\}$ pela compacidade podemos extrair uma subcobertura finita, digamos, $\{B_s(x_i)\}_{i=1}^J$, onde $x_1 = \tilde{z}$ e $x_J = 0$. Note que

$$J|B_1|s^n = \sum_{i=1}^{J} |B_s(x_i)| \leq |B_1|,$$

uma vez que $\left(\bigcup_{i=1}^{J} B_s(x_i)\right) \subset B_1$. Portanto, $J \leq \frac{1}{s^n}$.

Nos voltando para $\bigcup_{i=1}^{J} B_s(x_i)$, segue da desigualdade de Harnack existe $c_2 > 0$ (para η_0 pequeno) tal que

$$v(0) \geq c_2 v(\tilde{z}) = c_2 \tilde{c} =: c_\star.$$

Contudo, pode ocorrer de $0 \notin \text{Graf}(\psi)$. Neste caso, considere o segmento $[(0', \psi(0')), 0]$ e o concatene com o caminho ξ, definindo então um caminho que liga $\tilde{z}$ a 0. O demais passos seguem de maneira similar.

■

Teorema 5.1. *(Regularidade Ótima) Seja* $0 < Q \in C^0(B_1) \cap L^\infty(B_1)$*,* $f \in C^0(B_1) \cap L^q(B_1)$ *com* $q > n$*, e* u *uma solução não negativa no sentido da viscosidade de* (2)*. Então existe* $C := C(n, \delta, g_0, g(1), q) > 0$ *tal que para todo* $x \in B_{\frac{1}{2}}$*,*

$$u(x) \leq C\left(\|u\|_{L^\infty(B_{\frac{3}{4}})} + \|Q\|_{L^\infty(B_1)} + g^{-1}(\|f\|_{L^q(B_1)})\right) \cdot \text{dist}(x, F(u)). \tag{43}$$

Em particular,

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{2}})} \leq C\left(\|u\|_{L^\infty(B_{\frac{3}{4}})} + \|Q\|_{L^\infty(B_1)} + g^{-1}(\|f\|_{L^q(B_1)})\right). \tag{44}$$

Se $q = \infty$*, então* C *não depende que* q*.*

Demonstração. Seja $x_0 \in B_{\frac{1}{2}}$. Se $d_0 := \text{dist}(x_0, F(u)) > \frac{1}{2}$, então

$$u(x_0) \leq 2\frac{1}{2}u(x_0) < 2\|u\|_{L^\infty(B_{\frac{3}{4}})} \cdot d_0$$

e a prova do Teorema segue em x_0. No caso, onde $d_0 \leq \frac{1}{2}$, temos dois casos a serem considerados. Se para a constante $\eta_0 \in (0, 1)$ universal do Lema anterior tivermos que

$$\max\{\|f\|_{L^q}, \|Q\|_\infty - 1\} \leq \eta_0, \tag{45}$$

então, não teremos mais o que fazer. Se não vale (45), seja $\varepsilon > 0$ e defina

$$N_\varepsilon := \frac{\|Q\|_{L^\infty(B_1)}}{1 + \eta_0} + g^{-1}\left(\frac{\|f\|_{L^q(B_1)}}{\eta_0}\right) + \varepsilon.$$

Seja $v(x) = \frac{u(x)}{N_\varepsilon}$. Temos que v é solução no sentido da viscosidade de

$$\begin{cases} \Delta_{g_\star} = f_\star, & \text{em} \quad B_1 \cap \{v > 0\} \\ |\nabla v| = Q_\star, & \text{em} \quad F(v), \end{cases}$$

onde $g_\star(t) = \frac{g(N_\varepsilon t)}{g(N_\varepsilon)}$, $f_\star(x) = \frac{f(x)}{N_\varepsilon}$ e $Q_\star(x) = \frac{Q(x)}{N_\varepsilon}$.

Temos que $g_\star(1) = 1$ e satisfaz (4)

$$\|f_\star\|_{L^q(B_1)} = \left(\int_{B_1} |f_\star|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}} = \frac{1}{g(N_\varepsilon)}\|f\|_{L^q(B_1)} \leq \eta_0.$$

Do mesmo modo,

$$\|Q_\star\|_{L^\infty(B_1)} - 1 < \eta_0.$$

Daí, pelo Lema anterior,

$$\|\nabla v\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{2}})} \leq C_0 \Rightarrow |\nabla u(x_0)| \leq C_0 N_\varepsilon.$$

Fazendo, $\varepsilon \to 0$ temos o desejado. A estimativa (43), segue de maneira similar. ■

5.2 Desigualdade do tipo-Harnack

Lema 5.2. *Seja* u *uma solução no sentido da viscosidade de* (2)*. Então, existem* $c_0, \varepsilon \in (0,1)$ *tal que* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$*, se*

$$\|f\|_{L^q(B_1)} \leq c_0\varepsilon^2 \quad e \quad \|Q - 1\|_{L^\infty(B_1)} \leq \varepsilon^2, \tag{46}$$

$$p^+(x) \leq u(x) \leq (p(x) + \varepsilon)^+ \quad em \quad B_1,\ p(x) = x_n + \sigma,\ |\sigma| < \frac{1}{20} \tag{47}$$

e

$$u(x_0) \geq \left(p(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}\right)^+, \quad x_0 = \frac{1}{10}e_n, \tag{48}$$

então,

$$u(x) \geq (p(x) + c\varepsilon)^+, \quad em\ B_{\frac{1}{2}}. \tag{49}$$

Analogamente, se

$$u(x_0) \leq \left(p(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}\right)^+ \tag{50}$$

então

$$u(x) \leq (p(x) + (1-c)\varepsilon)^+, \quad em\ B_{\frac{1}{2}}. \tag{51}$$

Aqui $c \in (0,1)$ *também é universal.*

Demonstração. Nós provaremos (49). A prova de (51) segue similarmente. Primeiro, obsevemos que $u \geq p$ em B_1 então $B_{\frac{1}{20}}(x_0) \subset B_1^+(u)$. Neste caso, para qualquer $r \in (0, \frac{1}{40})$, nós concluímos que $h(x) = u(x) - p(x)$ satisfaz

$$\Delta_{g,e_n} h = f, \quad \text{em} \quad B_{2r}(x_0).$$

Agora pelo Lema 2.4, sabemos que existem C_1 que depende somente de g_0, tal que se

$\tilde{g} = C_1 g$,

$$\Delta_{\tilde{g},e_n} h = C_1 f$$

satisfaz as condições estruturais para a validade da desigualdade de Harnack. Neste caso, pelo Lema 2.6, (46), (49) e assumindo que $\varepsilon_0 < 1$, existe uma constante universal $C > 1$ tal que

$$\begin{aligned} h(x) &\geq \frac{1}{C} h(x_0) - r\left[G^{-1}(C_2) + g^{-1}(C_2 + \varepsilon^{2(1-\frac{n}{q})})\right] \\ &\geq \frac{\varepsilon}{2C} - r\left[G^{-1}(C_2) + g^{-1}(C_2+1) + 1\right] \\ &= \frac{\varepsilon}{2C} - rC^\star \end{aligned} \tag{52}$$

onde $C^\star := G^{-1}(C_2) + g^{-1}(C_2+1) + 1 > 1$. Pela regularidade $C^{1,\alpha}$ local, sabemos que $u \in C^{1,\alpha}(B_{\frac{1}{10}}(x_0))$ com estimativa

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^{1,\alpha}(B_{\frac{1}{40}}(x_0))} &\leq C_0[\|u\|_{L^\infty(B_1)} + g^{-1}(\|f\|_{L^q(B_1)})] \\ &\leq C_0(2 + \varepsilon + g^{-1}(1)\varepsilon^{\frac{2}{g_0}}) \\ &\leq 3C_0, \end{aligned} \tag{53}$$

onde $\alpha = \alpha(n, \delta, g_0, q) \in (0,1)$, $C_0 = C_0(n, \delta, g_0, q) > 1$ e estamos assumindo que

$$\varepsilon < \min\left\{\frac{1}{1+g^{-1}(1)}, \left(\frac{1}{g^{-1}(1)}\right)^{\frac{g_0}{2}}\right\}.$$

Agora dividiremos a prova em dois casos:

Caso 1: $|\nabla u(x_0)| < \frac{1}{4}$.

Por (53), e $0 < r < \frac{1}{40}$ temos que, para qualquer $x \in B_r(x_0)$,

$$\begin{aligned} |\nabla u(x)| &\leq |\nabla u(x) - \nabla u(x_0)| + |\nabla u(x_0)| \\ &< \frac{|\nabla u(x) - \nabla u(x_0)|}{|x-x_0|^\alpha}|x-x_0|^\alpha + \frac{1}{4} \\ &\leq \|u\|_{C^{1,\alpha}(B_{\frac{1}{40}}(x_0))} r^\alpha + \frac{1}{4} \\ &\leq 3C_0 r^\alpha + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Assim, podemos escolher

$$r_1 = \min\left\{\frac{1}{80}, \left(\frac{1}{12C_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}$$

para obtermos

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{1}{2} \quad \text{em} \quad B_{r_1}(x_0). \tag{54}$$

Agora usando (52), com $r_2 = \frac{r_1}{8C^\star}$ ao invés de r, obtermos que

$$u(x) - p(x) \geq \frac{\varepsilon}{2C} - C^\star r_2 = c_\star \varepsilon + \frac{r_1}{8} \tag{55}$$

para todo $x \in B_{r_2}(x_0)$. Ainda, para qualquer $x \in B_{r_2}(x_0)$, de (54),

$$\begin{aligned} u(x) - u\left(x - \frac{r_1}{2}e_n\right) &\leq \left| u(x) - u\left(x - \frac{r_1}{2}e_n\right)\right| \\ &\leq \frac{1}{2}\left|x - \left(x - \frac{r_1}{2}e_n\right)\right| \\ &= \frac{1}{2}\frac{r_1}{2}|e_n| \\ &= \frac{r_1}{4}. \end{aligned}$$

Logo,

$$u(x) \leq u\left(x - \frac{r_1}{2}e_n\right) + \frac{r_1}{4}$$

segue de (55) que

$$\begin{aligned} c_\star\varepsilon - \frac{r_1}{8} &\leq u(x) - p(x) \\ &\leq u\left(x - \frac{r_1}{2}e_n\right) + \frac{r_1}{4} - p(x) \\ &= u\left(x - \frac{r_1}{2}e_n\right) + \frac{r_1}{4} - x_n - \sigma + \frac{r_1}{2} - \frac{r_1}{2} \\ &= u\left(x - \frac{r_1}{2}e_n\right) + \frac{r_1}{4} - \left(x_n + \sigma - \frac{r_1}{2}\right) - \frac{r_1}{2} \\ &= u\left(x - \frac{r_1}{2}e_n\right) + \frac{r_1}{4} - p\left(x - \frac{r_1}{2}e_n\right) - \frac{r_1}{2} \\ &= u\left(x - \frac{r_1}{2}e_n\right) - p\left(x - \frac{r_1}{2}e_n\right) - \frac{r_1}{4} \\ &\leq u\left(x - \frac{r_1}{2}e_n\right) - p\left(x - \frac{r_1}{2}e_n\right) - \frac{r_1}{8} \end{aligned}$$

para todo $x \in B_{r_2}(x_0)$. Assim,

$$u(x) - p(x) \geq c_\star \varepsilon, \tag{56}$$

para todo $x \in B_{r_2}(\overline{x_0})$, onde $\overline{x_0} = x_0 - \frac{r_1}{2}e_n$. Note que

$$|\overline{x_0}| = \left|x_0 - \frac{r_1}{2}e_n\right| \leq |x_0| + \frac{r_1}{2} \leq \frac{1}{10} + \frac{r_1}{2} \leq \frac{1}{10} + \frac{1}{160} < \frac{1}{5}.$$

Neste ponto considere o seguinte problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \mathcal{M}^-_{\lambda_\delta,\Lambda_{g_0}}(D^2\Gamma_-) = \varepsilon^{-2}|f|, & \text{em} \quad \mathcal{A} := \mathcal{A}_{\frac{4}{5}r_2,\frac{4}{5}}(\overline{x_0}) \\ \Gamma_- = 1, & \text{em} \quad \partial B_{\frac{4}{5}r_2}(\overline{x_0}) \\ \Gamma_- = 0, & \text{em} \quad \partial B_{\frac{4}{5}}(\overline{x_0}). \end{cases}$$

Para $\eta^\star \in (0,1)$ como no Teorema 3.8,

$$\|\varepsilon^{-2}f\|_{L^q(\mathcal{A})} \leq \frac{4}{5}\eta^\star \quad \Leftrightarrow \quad \|f\|_{L^q(\mathcal{A})} \leq \varepsilon^2\frac{4}{5}\eta^\star := c_0\varepsilon^2.$$

Defina $\rho := \frac{4}{5}r_2$. Sabemos que para qualquer $x \in \overline{B_{\frac{4}{5}}(\overline{x_0})}$,

$$0 < \frac{4\theta_\gamma(\rho)}{8} \leq |\nabla\Gamma_-(x)| \leq \frac{10\Theta_\gamma(\rho)}{4}.$$

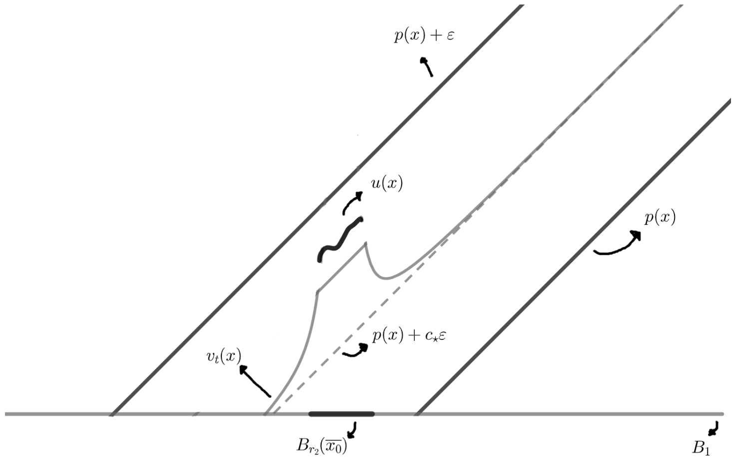
Daí, Γ_- não possui pontos críticos em $\mathcal{A}^\circ$. Logo, os pontos críticos estão em $\partial\mathcal{A}$. Portanto, $0 \leq \Gamma_- \leq 1$. Disso podemos estender $\Gamma_- = 1$ em $B_\rho(\overline{x_0})$.

Defina para todo $x \in \overline{B_{\frac{4}{5}}(\overline{x_0})}$,

$$v(x) = p(x) + c_\star\varepsilon(\Gamma_- - 1) \quad \text{e} \quad v_t(x) = v(x) + t,$$

para $t \geq 0$.

Figura 3 – Ilustração para o argumento com a função v_t.



Fonte: elaborado pelo autor.

É claro que

$$v_0(x) = v(x) \leq p(x) \leq u(x) \quad \text{em} \quad \overline{B_{\frac{4}{5}}(\overline{x_0})}.$$

Assim, consideremos

$$t_0 := \sup\left\{t \geq 0;\ v_t \leq u \text{ em } \overline{B_{\frac{4}{5}}(\overline{x_0})}\right\}.$$

Dividiremos o caso 1 em dois subcasos:

Subcaso I: Se $t_0 \geq c_\star\varepsilon$ o Lema está provado.

De fato, de (28),

$$\Gamma_-(x) \geq \frac{5\theta_\gamma(\rho)}{8}\,\text{dist}(x, \partial B_{\frac{4}{5}}(\overline{x_0})) = \frac{5\theta_\gamma(\rho)}{8}\left(\frac{4}{5} - |x - x_0|\right).$$

Se $x \in \overline{B_{\frac{7}{10}}(\overline{x_0})}$, temos que

$$\begin{aligned} u(x) &\geq p(x) + c_\star \varepsilon \Gamma_-(x) \\ &\geq p(x) + \varepsilon \frac{5\theta_\gamma(\rho)}{8}\left(\frac{4}{5} - |x - x_0|\right) \\ &\geq p(x) + \varepsilon \frac{5\theta_\gamma(\rho)}{8}\left(\frac{4}{5} - \frac{7}{10}\right) \\ &= p(x) + \varepsilon \frac{5\theta_\gamma(\rho)}{80}. \end{aligned}$$

Como $B_{\frac{1}{2}} \subset B_{\frac{7}{10}}(\overline{x_0})$. O resultado está provado!
Subcaso II: Para $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno $t < c_\star\varepsilon$ não pode ocorrer.

Argumentaremos por contradição. Suponha que $t_0 < c_\star\varepsilon$ para qualquer ε_0. Pela maximalidade de t_0 existe $y_0 \in \overline{B_{\frac{4}{5}}(\overline{x_0})}$ tal que

$$u(y_0) = v_{t_0}(y_0).$$

Mostraremos que $y_0 \in B_\rho(\overline{x_0})$. De fato, por construção

$$v_{t_0} < p(x) \leq u(x) \quad \text{em} \quad \partial B_{\frac{4}{5}}(\overline{x_0}).$$

Note que

$$\nabla v_{t_0} = e_n + c_\star \varepsilon \nabla \Gamma_- \Rightarrow |\nabla v_{t_0}| = |e_n + c_\star \nabla \Gamma_-|.$$

Então,

$$\begin{aligned} 1 - c_\star\varepsilon|\nabla\Gamma_-| &\leq |\nabla v_{t_0}| \leq 1 + c_\star|\nabla \Gamma_-| \\ \Rightarrow 1 - c_\star\varepsilon\frac{10\Theta_\gamma(\rho)}{4} &\leq |\nabla v_{t_0}| \leq 1 + c_\star\varepsilon\frac{10\Theta_\gamma(\rho)}{4}. \end{aligned}$$

Em particular para $0 < \varepsilon < \frac{1}{20\Theta_\gamma(\rho)c_\star}$,

$$\frac{1}{2} \leq |\nabla v_{t_0}| \leq \frac{3}{2}.$$

Ora, sendo $C_g := \min\left\{H\left(\frac{1}{2}\right), H\left(\frac{3}{2}\right)\right\}$ sabemos que

$$\begin{aligned} \Delta_g v_{t_0} &\geq H_g(|\nabla v_{t_0}|)\mathcal{M}^-_{\lambda_\delta,\Lambda_{g_0}}(D^2 v_{t_0}) \\ &\geq C_g \mathcal{M}^-_{\lambda_\delta,\Lambda_{g_0}}(c_\star\varepsilon D^2\Gamma_-) \\ &= C_g c_\star \varepsilon \mathcal{M}^-_{\lambda_\delta,\Lambda_{g_0}}(D^2\Gamma_-) \\ &= C_g c_\star \varepsilon \varepsilon^{-2}|f|(x) \\ &> f(x) \end{aligned}$$

desde que $\varepsilon < C_g c_\star$. Ainda,

$$|\nabla v_{t_o}| \geq \left|\frac{\partial v_{t_0}}{\partial x_n}\right| = \left|1 + c_\star \varepsilon \frac{\partial \Gamma_-}{\partial x_n}\right|.$$

Por (33),

$$\frac{\partial \Gamma_-}{\partial x_n} \geq \frac{5\theta_\gamma(\rho)}{4}\left((\overline{x_0} - x)\cdot e_n - \frac{1}{50}\right). \tag{57}$$

Neste ponto, observamos que para ε suficientemente pequeno $(\overline{x_0} - x)\cdot e_n$ é maior estritamente do que $\frac{1}{50}$, em $\{v_{t_0} \leq 0\} \cap \mathcal{A}$.

De fato, se

$$c_\star \varepsilon < \frac{1}{20} - |\sigma|$$

então

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \cap \{v_{t_0} \leq 0\} &= \mathcal{A} \cap \{p(x) + c_\star\varepsilon(\Gamma_-(x) - 1) + t_0 \leq 0\} \\
&= \mathcal{A} \cap \{x_n + \sigma + c_\star\varepsilon(\Gamma_-(x) - 1) + t_0 \leq 0\} \\
&= \mathcal{A} \cap \{x_n \leq -\sigma - c_\star\varepsilon(\Gamma_-(x) - 1) - t_0\} \\
&= \mathcal{A} \cap \{x_n \leq -\sigma + c_\star - (t_0 + c_\star\Gamma_-)\} \\
&\subset \mathcal{A} \cap \{x_n \leq -\sigma + c_\star\} \\
&\subset \mathcal{A} \cap \{x_n < |\sigma| + c_\star\} \\
&\subset \mathcal{A} \cap \left\{x_n < \frac{1}{20}\right\}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(\overline{x_0} - x)\cdot e_n &= \frac{1}{10} - \frac{r_1}{2} - x_n \\
&> \frac{1}{10} - \frac{r_1}{2} - \frac{1}{20} \\
&> \frac{1}{20} - \frac{1}{160} = \frac{7}{160}.
\end{aligned}$$

Daí, e de (57)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma_-}{\partial x_n} &\geq \frac{5\theta_\gamma(\rho)}{4}\left((\overline{x_0} - x)\cdot e_n - \frac{1}{50}\right) \\
&\geq \frac{5\theta_\gamma(\rho)}{4}\left(\frac{7}{160} - \frac{1}{50}\right) \\
&= \frac{69}{2080}\theta_\gamma(\rho)
\end{aligned}$$

então,

$$|\nabla v_{t_0}| \geq 1 - \frac{69}{2080} c_\star \varepsilon \theta_\gamma(\rho).$$

Mais uma vez para ε suficientemente pequeno

$$|\nabla v_{t_0}| \geq 1 + \varepsilon^2 > Q \quad \text{em} \quad \mathcal{A} \cap F(v_{t_0}).$$

Logo, v_{t_0} é uma subsolução estrita em $\mathcal{A}$. Logo, $u > v_{t_0}^+$ em $\mathcal{A}$. Portanto, $y_0 \in B_\rho(\overline{x_0})$. Mas isso é uma contradição pois

$$u(y_0) = v_{t_0}(y_0) = v(y_0) + t_0 = p(y_0) + t_0 < p(y_0) + c_\star\varepsilon \leq u(y_0).$$

Isso prova o **Caso 1**.

Caso 2: $|\nabla u(x_0)| \geq \frac{1}{4}$.

Usando novamente que $u \in C^{1,\alpha}(B_{\frac{1}{40}}(x_0))$ e (53), temos para $r \in \left(1, \frac{1}{40}\right)$,

$$\begin{aligned}
3C_0 &\geq |\nabla u(x)| \\
&= |\nabla u(x) - \nabla u(x_0) - \nabla u(x_0)| \\
&\geq |\nabla u(x_0)| - |\nabla u(x) - \nabla u(x_0)| \\
&\geq \frac{1}{4} - 3C_0 r^\alpha.
\end{aligned}$$

Em particular, para

$$r_3 \leq \min\left\{\frac{1}{(3C_0)^{\frac{1}{\alpha}}}, \frac{1}{80}\right\} < \frac{1}{8}.$$

Então,

$$\frac{1}{8} \leq |\nabla u| \leq 3C_0 \quad \text{em} \quad B_{r_3}(x_0).$$

como u é solução no sentido da viscosidade de

$$\operatorname{tr}(A_u(x) \cdot D^2 u) = \frac{f(x)}{H_g(\nabla u(x))} = f_0(x),$$

com $x \in B_{r_3}(x_0)$. Onde as constantes de elipcidade de A_u são λ_δ e Λ_{g_0}. Agora pondo $C_1 := \min\left\{H_g\left(\frac{1}{8}\right), H_g\left(3C_0\right)\right\}$.

Pela Desigualdade de Harnack clássica, para operadores uniformimente elípticos como acima,

$$\begin{aligned}
u(x) - p(x) &\geq \frac{1}{C}(u(x_0) - p(x_0)) - C_1^{-1} r_3^{2-\frac{n}{q}} \|f\|_{L^q(B_1)} \\
&\geq \frac{\varepsilon}{2C_0} - C_1^{-1} r_3^{2-\frac{n}{q}} \varepsilon^2 \\
&\geq C_1 \varepsilon.
\end{aligned}$$

para todo $x \in B_{\frac{r_3}{2}}(x_0)$, se $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Daí, os demais passos seguem como no **Caso 1**. ■

Teorema 5.2 (Desigualdade do tipo Harnack). *Seja* u *uma solução no sentido da viscosidade de* (2). *Suponha que*

$$\|f\|_{L^q(B_1)} \leq c_0\varepsilon^2 \quad e \quad \|Q-1\|_{L^\infty(B_1)} \leq \varepsilon^2. \tag{58}$$

Existe uma constante $\varepsilon^\star > 0$ *tal que se para algum* $x_0 \in B_1 \cap \{u > 0\} \cup F(u)$ *e* u *satisfaz*

$$(x_n + a_0)^+ \leq u(x) \leq (x_n + b_0)^+, \tag{59}$$

em $B_r(x_0) \subset B_1$, *com* $|a_0| < \frac{1}{20}$ *e*

$$0 \leq b_0 - a_0 < \varepsilon r, \quad \varepsilon < \varepsilon^\star \tag{60}$$

então existe uma constante universal $\mu_0 \in \left(0, \frac{1}{40}\right)$ *tal que*

$$(x_n + a_1)^+ \leq u(x) \leq (x_n + b_1)^+, \text{ em } B_{\mu_0 r}(x_0) \tag{61}$$

com

$$a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0, \quad b_1 - a_1 \leq (1-c)\varepsilon r$$

onde $c \in (0,1)$ *e* μ_0 *dependem somente de* $n, \delta, g_0, q, g(1), g^{-1}(1)$ *e* G^{-1}.

Demonstração. Podemos supor sem perda de generalidade que $x_0 = 0$ e $r = 1$. Pondo $p(x) = x_n + a_0$ e por (60)

$$p^+(x) \leq u(x) \leq (p(x) + \varepsilon)^+.$$

Então, pelo Lema 5.2 segue o resultado. ■

Como em De Silva (2011),

Corolário 5.1. *Seja* u *solução no sentido da viscosidade de* (2) *supondo* (58). *Se* u *satisfaz* (59) *em* $B_{\frac{1}{2}}(x_0) \subset B_1$, *então*

$$u_\varepsilon(x_0) = \frac{u(x) - x_n}{\varepsilon}$$

possui módulo de continuidade Hölder em x_0 *fora da bola de raio* $\frac{\varepsilon}{2\varepsilon^\star}$, *isto é, para todo* $x \in \{u > 0\} \cup F(u) \cap B_{\frac{1}{2}}$ *com* $|x - x_0| > \frac{\varepsilon}{2\varepsilon^\star}$,

$$|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(x_0)| \leq C|x - x_0|^{\alpha_0}$$

para alguma constante α_0 *e* C *dependendo somente de* $n, \delta, g_0, q, g(1), g^{-1}(1)$ *e* $G^{-1}(1)$. *Se* $q = \infty$ *a constante* c *não dependem de* q.

Demonstração. A menos de escalonamento podemos supor que $r = 1$. Temos que

$$(x_n + a_0)^+ \leq u(x) \leq (x_n + b_0)^+$$

em $B_1(x_0)$ com $b_0 - a_0 \leq \varepsilon$. Então pela Desigualdade de Harnack (Teorema anterior), segue que existe $\mu_0 \in (0, \frac{1}{40})$ tal que

$$(x_n + a_1)^+ \leq u(x) \leq (x_n + b_1)^+ \qquad \text{em} \qquad B_{\mu_0}(x_0)$$

com $b_1 - a_1 \leq (1-c)\varepsilon$.

Observe que

$$b_1 - a_1 \leq (1-c)\varepsilon = (1-c)\varepsilon\mu_0\frac{1}{\mu_0} = \varepsilon_1\mu_0$$

com $\varepsilon_1 := (1-c)\varepsilon\frac{1}{\mu_0}$. Desejamos aplicar o Teorema anterior novamente, contudo, é necessário que $\varepsilon_1 \leq \varepsilon^\star$. Supondo que isso seja verdade, segue que

$$(x_n + a_2)^+ \leq u(x) \leq (x_n + b_2)^+ \qquad \text{em} \qquad B_{\mu_0^2}(x_0)$$

com $b_2 - a_2 \leq (1-c)\varepsilon_1\mu_0 = (1-c)^2\varepsilon$.

Assim, seguindo esse raciocínio, temos que

$$(x_n + a_m)^+ \leq u(x) \leq (x_n + b_m)^+ \qquad \text{em} \qquad B_{\mu_0^m}(x_0)$$

com $b_m - a_m \leq (1-c)^m\varepsilon$, se

$$\varepsilon(1-c)^m\frac{1}{\mu_0^m} \leq \varepsilon^\star. \tag{62}$$

Contudo isso não é verdade para todo $m \in \mathbb{N}$.

Observe que de (62),

$$\left((1-c)\frac{1}{\mu_0}\right)^m \leq \frac{\varepsilon^\star}{\varepsilon}.$$

Tomando o logaritmo na base $(1-c)\frac{1}{\mu_0}$, temos

$$m \leq \log_{(1-c)\frac{1}{\mu_0}}\frac{\varepsilon^\star}{\varepsilon}.$$

Defina $\delta_0 = \log_{(1-c)\frac{1}{\mu_0}}\frac{\varepsilon^\star}{\varepsilon}$. Então, para $m < \delta_0$ vale (62) e

$$\varepsilon(1-c)^{\delta_0}\frac{1}{\mu_0^{\delta_0}} \leq \varepsilon^\star.$$

Por outro lado, temos em $B_{\mu_0^m}(x_0)$, para $m < \delta_0$,

$$\frac{(x_n + a_m)^+ - x_n}{\varepsilon} \leq \tilde{u}_\varepsilon(x) \leq \frac{(x_n + b_m)^+ - x_n}{\varepsilon}. \tag{63}$$

Se $x \in B_{\mu_0^m}(x_0) \setminus B_{\mu^{\delta_0}}(x_0)$ é tal que $\tilde{u}_\varepsilon(x) \geq \tilde{u}_\varepsilon(x_0)$, temos de (63) que

$$\begin{aligned} |\tilde{u}_\varepsilon(x) - \tilde{u}_\varepsilon(x_0)| &\leq \frac{(x_n + b_m)^+ - x_n}{\varepsilon} - \tilde{u}_\varepsilon(x_0) \\ &\leq \frac{(x_n + b_m)^+ - x_n}{\varepsilon} - \frac{((x_0)_n + a_m)^+ - (x_0)_n}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Há quatro situações a serem estudadas em função do sinal de $(x_n + b_m)^+ - x_n$ e $((x_0)_n + a_m)^+ - (x_0)_n$ em todas as situações,

$$\frac{(x_n + b_m)^+ - x_n - ((x_0)_n + a_m)^+ + (x_0)_n}{\varepsilon} \leq \frac{b_m - a_m}{\varepsilon}.$$

Então,

$$|\tilde{u}_\varepsilon(x) - \tilde{u}_\varepsilon(x_0)| \leq \frac{b_m - a_m}{\varepsilon} \leq (1 - c)^m.$$

Se $x \in B_{\mu_0^m}(x_0) \setminus B_{\mu_0^{\delta_0}}(x_0)$ é tal que $\tilde{u}_\varepsilon(x) \leq \tilde{u}_\varepsilon(x_0)$, segue *mutatis mutandis* que

$$-(\tilde{u}_\varepsilon(x) - \tilde{u}_\varepsilon(x_0)) = |\tilde{u}_\varepsilon(x) - \tilde{u}_\varepsilon(x_0)| \leq (1 - c)^m.$$

Portanto, a desigualdade acima é valida para todo $x \in B_{\mu_0^m}(x_0) \setminus B_{\mu_0^{\delta_0}}(x_0)$. Assim, para x nesse domínio, vem que

$$\begin{aligned} |\tilde{u}_\varepsilon(x) - \tilde{u}_\varepsilon(x_0)| &\leq (1 - c)^m \\ &= \left(\frac{1}{\mu_0}^{\log_{\frac{1}{\mu_0}}(1-c)} \right)^m \\ &= \mu_0^{m\gamma}, \end{aligned}$$

onde $\gamma := -\log_{\frac{1}{\mu_0}}(1 - c)$.

Por fim, seja $r := |x - x_0|$, com $x \in B_{\mu_0^m}(x_0) \setminus B_{\mu_0^{\delta_0}}(x_0)$ então, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu_0^{m_0+1} \leq r \leq \mu_0^{m_0} \Rightarrow -m_0 \leq \log_{\frac{1}{\mu_0}} r + 1 \leq -m_0 + 1.$$

Logo,

$$\operatorname{osc}(\tilde{u}_\varepsilon, r) \leq \operatorname{osc}(\tilde{u}_\varepsilon, \mu_0^{m_0}) \leq \mu_0^{m_0\gamma} \leq \left(\frac{1}{\mu_0}^{\log_{\frac{1}{\mu_0}} r+1} \right)^\gamma = \frac{1}{\mu_0^\gamma} r^\gamma = \frac{1}{1 - c} |x - x_0|^\gamma$$

Tome $C := \dfrac{1}{1 - c}$.

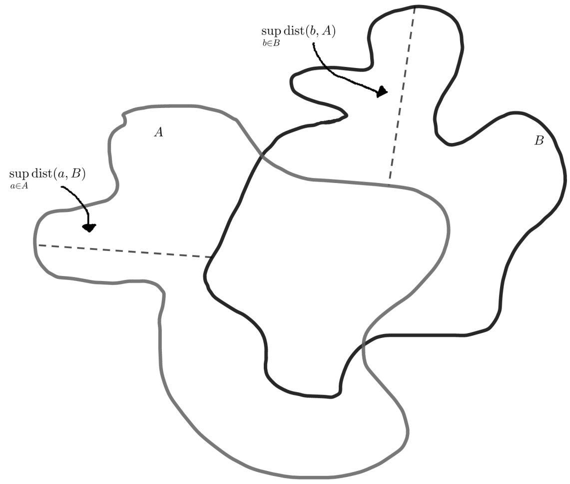
■

5.3 Improvement of flatness

Definição 5.1 (Distância de Hausdorff)**.** *Sejam* $A, B \subset \mathbb{R}^n$ *compactos. Definimos a distância de Hausdorff entre* A *e* B*, por*

$$d_H(A, B) = \max\left\{\sup_{a\in A} \operatorname{dist}(a, B), \sup_{b\in B} \operatorname{dist}(b, A)\right\}.$$

Figura 4 – Ilustração para o definição da distância de Hausdorff.



Fonte: elaborado pelo autor.

Lema 5.3. *Seja* $r > 0$*, defina para* $E \subset \mathbb{R}^n$*,* $U_E(r) = E + B_r(0)$*. Então, dados* $A, B \in \mathbb{R}^n$ *compactos,*

$$d_H(A, B) = \inf\{r > 0;\ A \subset U_B(r) \text{ e } B \subset U_A(r)\}.$$

Demonstração. Defina $d_H^\star(A, B) = \inf\{r > 0;\ A \subset U_B(r) \text{ e } B \subset U_A(r)\}$. Seja $r > 0$ tal que $A \subset U_B(r)$ e $B \subset U_A(r)$ então, se $x \in A$, temos que $x = y_x + z_x$ de modo que $y_x \in B$ e $z_x \in B_r(0)$. Logo, para cada $x \in A$,

$$\operatorname{dist}(x, B) \leq |x - y_x| = |y_x + z_x - y_x| = |z_x| \leq r$$

Portanto,

$$\sup_{x\in A} \operatorname{dist}(x, B) \leq r.$$

De maneira similar vemos que $\sup_{x\in B} \operatorname{dist}(x, A) \leq r$, Dessa forma,

$$d_H(A, B) \leq d_H^\star(A, B).$$

Agora, defina $r_\star = d_H(A, B)$.

Afirmação: $r_\star \in \{r > 0;\ A \subset U_B(r) \text{ e } B \subset U_A(r)\}$.

Prova da Afirmação: Dado, $x \in A$, seja $y_x \in B$ tal que $\operatorname{dist}(x, B) = |x - y_x|$ e defina $z_x = x - y_x$. Assim,

$$x = y_x + x - y_x = y_x + z_x.$$

Claramente, $y_x \in B$ e

$$|z_x| = \operatorname{dist}(x, B) \leq \sup_{w \in A} \operatorname{dist}(w, B) \leq r_\star.$$

Com isso, $x \in U_{r_\star}(B)$. *Mutatis mutandis*, $B \subset U_{r_\star}(A)$. Daí, segue o afirmado. Portanto,

$$d_H^\star(A, B) \leq d_H(A, B).$$

Pelo que já foi efeito, temos a igualdade desejada. ■

Teorema 5.3 (Improvement of flatness). *Seja* u *uma solução de* (2) *tal que*

$$\|f\|_{L^\infty(B_1)} \leq c_0 \varepsilon^2 \quad e \quad \|Q - 1\|_{L^\infty(B_1)} \leq \varepsilon^2.$$

Suponha que u *satisfaz*

$$(x_n - \varepsilon)^+ \leq u(x) \leq (x_n + \varepsilon)^+ \quad para \quad x \in B_1, \tag{64}$$

com $0 \in F(u)$. *Se* $0 < r < r_0$ *para* r_0 *universal e* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *para algum* ε_0 *dependendo de* r*, então*

$$\left(x \cdot \nu - r\frac{\varepsilon}{2}\right)^+ \leq u(x) \leq \left(x \cdot \nu + r\frac{\varepsilon}{2}\right)^+, \quad x \in B_r \tag{65}$$

com $|\nu| = 1$ *e* $|\nu - e_n| \leq C\varepsilon^2$ *com* $C > 0$ *universal.*

Demonstração. Como em De Silva (2011), a prova segue em 3 passos. Defina

$$\Omega_\rho(u) = \{u > 0\} \cup F(u) \cap B_\rho, \quad 0 < \rho \leq 1.$$

Passo #1 (Compacidade): Fixemos $0 < r \leq r_0$, r_0 universal a ser definido no *Passo #3*. Suponha por absurdo que podemos encontrar uma sequência $\varepsilon_k \to 0$ e uma sequência $\{u_k\}_{k \geq 1}$ de soluções no sentido da viscosidade de (2) com $f_k \in L^\infty(B_1) \cap C^0(B_1)$ e $0 \leq Q_k \in C^0(B_1)$ tal que

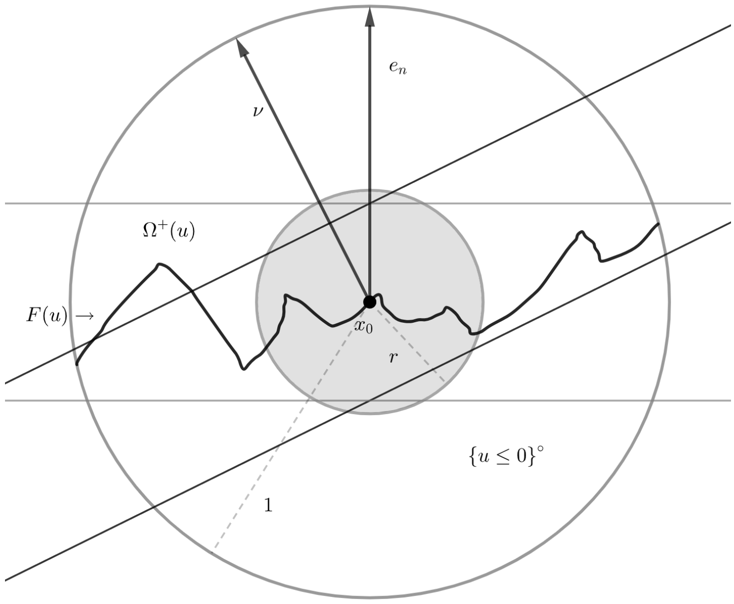
$$\|f_k\|_{L^\infty(B_1)} \leq c_0 \varepsilon_k^2 \quad \text{e} \quad \|Q_k - 1\|_{L^\infty(B_1)} \varepsilon_k^2 \tag{66}$$

quando $k \to \infty$, tal que

$$(x_n - \varepsilon_k)^+ \leq u_k(x) \leq (x_n + \varepsilon_k)^+ \tag{67}$$

para $x \in B_1$, $0 \in F(u)$. Mas as u_k's não satisfazem a tese do Teorema. Defina $\tilde{u}_k$:

Figura 5 – Perspectiva geométrica do improvement of flatness.



Fonte: elaborado pelo autor.

$\Omega_1(u_k) \to \mathbb{R}$ com

$$\tilde{u}_k(x) = \frac{u_k(x) - x_n}{\varepsilon_k}.$$

Note que por (64),

$$-1 \leq \tilde{u}_k \leq 1 \Rightarrow |\tilde{u}_k(x)| \leq 1, \qquad \text{em } \Omega_1(u).$$

Do Corolário da desigualdade de Harnack vem que dados $x, y \in \Omega_{\frac{1}{2}}(u)$,

$$|\tilde{u}_k(z) - \tilde{u}_k(x)| \leq C_1|z - x|^\gamma \quad \text{para todo } z \in \Omega_1(u) \cap B_{\frac{1}{2}}(x) \quad \text{com } |z - x| \geq \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon^\star},$$

uma vez que $\Omega_1(u) \cap B_{\frac{1}{2}}(x) \subset \Omega_1(u)$, e de maneira similar segue que

$$|\tilde{u}_k(z) - \tilde{u}_k(y)| \leq C_1|z - y|^\gamma \quad \text{para todo } z \in \Omega_1(u) \cap B_{\frac{1}{2}}(y) \quad \text{com } |z - y| \geq \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon^\star}.$$

Se $y \in \Omega_1(u) \cap B_{\frac{1}{2}}(x)$ ou vice versa, não há o que fazer. Agora, caso contrário, $|x - y| \geq \frac{1}{2}$ então,

$$\frac{|\tilde{u}_k(x) - \tilde{u}_k(y)|}{|x - y|^\gamma} \leq 2^\gamma C_1 2^{-\gamma} = C_1$$

Daí segue que

$$|\tilde{u}_k(x) - \tilde{u}_k(y)| \leq C_1|x - y|^\gamma$$

com C_1 e γ universais, $|x - y| \geq \dfrac{\varepsilon_k}{\varepsilon^\star}$, e $x, y \in \Omega_{\frac{1}{2}}(\tilde{u}_k)$.

Observe que se $x \in F(u_k)$ então $(x_n - \varepsilon_k)^+ = 0$ então, $x_n \leq \varepsilon_k$ e $(x_n + \varepsilon_k) \leq 0$

então, $-x_n \leq \varepsilon_k$. Consequentemente, para todo $x \in F(u_k)$,

$$|x_n| \leq \varepsilon_k.$$

Logo, para cada $\delta > 0$ a menos de uma quantidade finita de $\tilde{u}_k$'s,

$$B_{\frac{1}{2}} \cap \{x_n \geq \delta\} \subset \Omega_{\frac{1}{2}}(u_k)$$

Então, por Ascoli-Arzelá existe uma subsequência $\tilde{u}_{k_j}$ de $\tilde{u}_k$ que converge uniformemente para $u_\delta : B_{\frac{1}{2}} \cap \{x_n \geq \delta\} \to \mathbb{R}$, em $B_{\frac{1}{2}} \cap \{x_n \geq \delta\}$. e para $|x - y| \geq \delta$ temos que

$$|u_\delta(x) - u_\delta(y)| \leq C_1 |x - y|^\gamma$$

com $x, y \in B_{\frac{1}{2}} \cap \{x_n \geq \delta\}$.

Agora seja $0 < \delta' \leq \delta$, pelo mesmo argumento existe $u_\delta : B_{\frac{1}{2}} \cap \{x_n \geq \delta'\} \to \mathbb{R}$ tal que uma subsequência de $\tilde{u}_{k_j}$ converge uniformemente em $B_{\frac{1}{2}} \cap \{x_n \geq \delta'\}$ para ela. Observe que $B_{\frac{1}{2}} \cap \{x_n \geq \delta\} \subset B_{\frac{1}{2}} \cap \{x_n \geq \delta'\}$, em particular, tal subsequência de $\tilde{u}_{k_j}$ restrita a $B_{\frac{1}{2}} \cap \{x_n \geq \delta\}$ converge uniformemente para u_δ, *a fortiori*, $u_{\delta'}$ é uma extensão de u_δ. Isso prova que u_δ não depende do $\delta > 0$. Assim, podemos definir $u_\infty : B_{\frac{1}{2}} \cap \{x_n \geq 0\} \to \mathbb{R}$, como as constantes C_1 e γ não dependem de δ temos que a Hölder continuidade se preserva.

Afirmação: Consideraremos as $\tilde{u}_k$ definidas em $\Omega_{\frac{1}{2}}(u_k)$. O grafico das $\tilde{u}_k$ sobre $\Omega_{\frac{1}{2}}(u_k)$ converge para o gráfico de u_∞ sobre $B_{\frac{1}{2}} \cap \{x_n \geq 0\}$ na distância de Hausdorff.

Prova da Afirmação: Defina $G_k := \{(x, y) \in \Omega_{\frac{1}{2}}(u_l) \times \mathbb{R};\ y = \tilde{u}_k(x)\}$ e $G_0 = \{(x, y) \in B_{\frac{1}{2}} \cap \{x_n \geq 0\} \times \mathbb{R};\ y = u_\infty(x)\}$. Queremos mostrar que G_k converge para G_0, quando $k \to \infty$, na distância de Hausdorff.

Seja $(a, u_\infty(a)) \in G_0$, dado $\delta > 0$ existe $y \in B_{\frac{1}{2}} \cap \{x_n \geq \delta\}$ tal que $|y - a| \leq \delta$, e seja $k >> 1$ tal que $\varepsilon_k \leq \delta$. Daí,

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}((a, u_\infty(a)), G_k) &\leq \left(|y - a|^2 + |\tilde{u}_k(y) - u_\infty(a)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq n\,(\delta + |\tilde{u}_k(y) - u_\infty(y) + u_\infty(y) - u_\infty(a)|) \\
&\leq n\,(\delta + |\tilde{u}_k(y) - u_\infty(y)| + |u_\infty(y) - u_\infty(a)|) \\
&\leq n\left(\delta + ||\tilde{u}_k - u_\infty||_{L^\infty\left(B_{\frac{1}{2}} \cap \{x_n \geq \delta\}\right)} + C_1 |y - a|^\gamma\right) \\
&\leq n\left(\delta + ||\tilde{u}_k - u_\infty||_{L^\infty\left(B_{\frac{1}{2}} \cap \{x_n \geq \delta\}\right)} + C_1 \delta^\gamma\right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\sup_{(a,u_\infty(a))\in G_0} \mathrm{dist}((a,u_\infty(a)),G_k) \leq n\left(\delta + \|\tilde{u}_k - u_\infty\|_{L^\infty\left(B_{\frac{1}{2}}\cap\{x_n\geq\delta\}\right)} + C_1\delta^\gamma\right).$$

Por outro lado, seja $(b,\tilde{u}_k(b)) \in G_k$, $k >> 1$ tal que $\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon^\star} \leq \frac{\delta}{2}$ e $y \in B_{\frac{1}{2}}\{x_n \geq \delta\}$, de tal sorte que $\frac{\delta}{2} \leq |b-y| \leq 2\delta$. Daí,

$$\begin{aligned}
\mathrm{dist}((b,\tilde{u}_k(b)),G_0) &\leq \left(|y-b|^2 + |\tilde{u}_k(b) - u_\infty(y)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq n\left(2\delta + |\tilde{u}_k(b) - \tilde{u}_k(y) + \tilde{u}_k(y) - u_\infty(y)|\right)\\
&\leq n\left(2\delta + |\tilde{u}_k(b) - \tilde{u}_k(y)| + |\tilde{u}_k(y) - u_\infty(y)|\right)\\
&\leq n\left(2\delta + \|\tilde{u}_k - u_\infty\|_{L^\infty\left(B_{\frac{1}{2}}\cap\{x_n\geq\delta\}\right)} + C_1|y-b|^\gamma\right)\\
&\leq n\left(2\delta + \|\tilde{u}_k - u_\infty\|_{L^\infty\left(B_{\frac{1}{2}}\cap\{x_n\geq\delta\}\right)} + C_1\delta^\gamma\right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\sup_{(b,\tilde{u}_k(b))\in G_k} \mathrm{dist}((b,\tilde{u}_k(b)),G_0) \leq n\left(\delta + \|\tilde{u}_k - u_\infty\|_{L^\infty\left(B_{\frac{1}{2}}\cap\{x_n\geq\delta\}\right)} + C_1\delta^\gamma\right).$$

Dessa forma,

$$d_H(G_k,G_0) \leq n\left(\delta + \|\tilde{u}_k - u_\infty\|_{L^\infty\left(B_{\frac{1}{2}}\cap\{x_n\geq\delta\}\right)} + C_1\delta^\gamma\right).$$

Portanto,

$$\limsup_{k\to\infty} d_H(G_k,G_0) \leq n\left(\delta + C_1\delta^\gamma\right)$$

para todo $\delta > 0$. Daí,

$$\limsup_{k\to\infty} d_H(G_k,G_0) \leq 0.$$

O que prova o afirmado.

Passo # 2(Solução limite): Afirmamos que u_∞ é uma solução no sentido da viscosidade de

$$\begin{cases} \mathcal{L}_g u_\infty = 0 & \text{em} \quad B^+_{\frac{1}{2}}\\ \partial_n u_\infty = 0 & \text{em} \quad B_{\frac{1}{2}}\cap\{x_n = 0\}. \end{cases}$$

De fato, seja P um polinômio de segundo grau tocando u_∞ em $x_0 \in B_{\frac{1}{2}}\cap\{x_n \geq 0\}$ estritamente por baixo, nós precisamos provar que

(i) Se $x_0 \in B_{\frac{1}{2}}\cap\{x_n > 0\}$ então $\mathcal{L}_g P(x_0) \leq 0$;

(ii) Se $x_0 \in B_{\frac{1}{2}}\cap\{x_n = 0\}$ então $\partial_n P(x_0) \leq 0$.

Suponhamos *a priori* que $x_0 \in B_{\frac{1}{2}} \cap \{x_n > 0\}$ e $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x_0) \subset\subset B_{\frac{1}{2}} \cap \{x_n > 0\}$ e $P(x) < u_\infty(x)$ para todo $x \in B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$. Pelo que foi visto no *Passo #1*,

$$\|\tilde{u}_k - u_\infty\|_{L^\infty(B_\delta(x_0))} \to 0$$

quando $k \to \infty$ a menos de uma subsequência. Então, em $B_\delta(x_0)$ para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $j_k \in \mathbb{N}$ tal que $j \geq j_k$, implica

$$|\tilde{u}_j - u_\infty| < \frac{1}{k}.$$

Logo,

$$\tilde{u}_j - \frac{1}{k} < u_\infty < \tilde{u}_j + \frac{1}{k}.$$

Daí, defina $v_k := \tilde{u}_{j_k} - \frac{1}{k}$ e $w_k := \tilde{u}_{j_k} + \frac{1}{k}$. Portanto,

$$v_k < u_\infty < w_k$$

em $B_\delta(x_0)$.

Como P toca u_∞ estritamente por baixo, segue que $P < w$ em $B_\delta(x_0)$. Assim, defina para cada k,

$$0 \leq b_k := \inf_{B_\delta(x_0)} (w_k - P) = w_k(x_k) - P(x_k)$$

onde x_k é o ponto onde o ínfimo é atingido. É importante ressaltar que $b_k > 0$, pois se $b_k = 0$, temos que P toca w_k em x_k. Isso é um absurdo, pois $u_\infty < w_k$ em $B_\delta(x_0)$. Logo, $P + b_k$ toca w_k por baixo em x_k. Daí, $P + b_k - \frac{1}{k}$ toca u_{j_k} por baixo em x_k. Defina $c_k := b_k - \frac{1}{k}$.

Note que $c_k \to 0$ se, e somente se, $b_k \to 0$. Ora,

$$b_k = \inf_{B_\delta(x_0)} (w_k(x) - P(x)) \leq w_k(x_0) - P(x_0) = u_{j_k}(x_0) + \frac{1}{k} - P(x_0) < \frac{2}{k}$$

uma vez que $P(\bar{x}) = u_\infty(x_0)$.

A menos de uma subsequência $x_k \to x_1$, devido a compacidade de $\overline{B_\delta(x_0)}$. Logo,

$$P(x_1) = \lim_{k \to \infty} P(x_k) + c_k = \lim_{k \to \infty} \tilde{u}_{j_k}(x_k) = u_\infty(x_1).$$

Dessa forma, $x_0 = x_1$, pois P toca u_∞ estritamente por baixo em x_0. Com isso, temos que nenhum subsequêcia de x_k está contida em $\partial B_\delta(x_0)$, pois assim, $x_0 \in \partial B_\delta(x_0)$. Portanto, apenas uma quantidade finita de x_k pertence a fronteira de $B_\delta(x_0)$.

Por outro lado como $F(u_k) \to B_{\frac{1}{2}} \cap \{x_n = 0\}$ na distância de Hausdorff, temos que pra $k >> 1$ $B_\delta(x_0) \subset \Omega^+(u_{j_k})$. Desde que $P + c_k$ toca por baixo $\tilde{u}_{j_k}$ em x_k, temos que

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{j_k}(x_k) &= P(x_k) + c_k \\ \Rightarrow \frac{u_{j_k}(x_k) - (x_k)_n}{\varepsilon_{j_k}} &= P(x_k) + c_k \\ \Rightarrow u_{j_k}(x_k) &= \varepsilon_{j_k}(P(x_k) + c_k) + (x_k)_n. \end{aligned}$$

Daí defina, em B_1,

$$\tilde{P}_k(x) := \varepsilon_{j_k}(P(x) + c_k) + x_n.$$

Logo, por construção, $\tilde{P}_k$ toca u_{j_k} por baixo em x_k.

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \Delta_g \tilde{P}_k &= \frac{g(|\nabla \tilde{P}_k|)}{|\nabla \tilde{P}_k|}\Delta \tilde{P}_k + \left[\frac{g'(|\nabla \tilde{P}_k|)|\nabla \tilde{P}_k| - g(|\nabla \tilde{P}_k|)}{|\nabla \tilde{P}_k|^3}\right] \sum_{i,j=1}^{n} (\tilde{P}_k)_i (\tilde{P}_k)_j (\tilde{P}_k)_{ij} \\ &= \frac{g(|\nabla \tilde{P}_k|)}{|\nabla \tilde{P}_k|}\varepsilon_k \Delta P + \left[\frac{g'(|\nabla \tilde{P}_k|)|\nabla \tilde{P}_k| - g(|\nabla \tilde{P}_k|)}{|\nabla \tilde{P}_k|^3}\right] \sum_{i,j=1}^{n} (\tilde{P}_k)_i (\tilde{P}_k)_j \varepsilon_k P_{ij}. \end{aligned}$$

Daí

$$\left\{\frac{g(|\nabla \tilde{P}_k|)}{|\nabla \tilde{P}_k|}\Delta P + \left[\frac{g'(|\nabla \tilde{P}_k|)|\nabla \tilde{P}_k| - g(|\nabla \tilde{P}_k|)}{|\nabla \tilde{P}_k|^3}\right] \sum_{i,j=1}^{n} (\tilde{P}_k)_i (\tilde{P}_k)_j P_{ij}\right\} - f_k^\star(x_k) \le 0, \tag{68}$$

onde $f_k^\star = \frac{1}{\varepsilon_k} f_k$. Fazendo $\varepsilon_k \to 0$, segue, pela regularidade de g e g', a estrutura de $\tilde{P}$ e $f_k^\star$ e (66)

(a) $\dfrac{g(|\nabla \tilde{P}_k|)}{|\nabla \tilde{P}_k|} \to g(1)$ e $\dfrac{g'(|\nabla \tilde{P}_k|)|\nabla \tilde{P}_k| - g(|\nabla \tilde{P}_k|)}{|\nabla \tilde{P}_k|} \to g'(1) - g(1)$;

(b) $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} (\tilde{P}_k)_i (\tilde{P}_k)_j P_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} (\varepsilon_k P_i + \delta_{in})(\varepsilon_k P_j + \delta_{jn}) \to \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{in}\delta_{jn} P_{ij} = P_{nn}$;

(c) $|f_k^\star(x_k)| \le ||f_k^\star||_{L^\infty(B_1)} \le c_0 \varepsilon_k \to 0$.

Em particular, $f_k^\star(x) \to 0$. Usando (a), (b) e (c) em (68) segue que quando $k \to \infty$

$$g(1)\Delta P(x_0) + (g'(1) - g(1))P_{nn}(x_0) \le 0 \Rightarrow \mathcal{L}_g P(x_0) \le 0.$$

Prova de (ii). Se $x_0 \in B_{\frac{1}{2}} \cap \{x_n = 0\}$, podemos assumir que

$$\mathcal{L}_g P(x_0) > 0.$$

Note que para k suficientemente grande $x_k \in F(u_k)$. É fácil ver por um argumento de contradição. Mais ainda,

$$|\nabla \tilde{P}_k| \ge 1 - \varepsilon_k |\nabla P| > 0$$

para k suficientemente grande.

Desde que P^+ toca u_k por baixo em x_0, temos que

$$|\nabla \tilde{P}_k|^2 \leq (Q_k(x_k))^2 \leq (1+\varepsilon_k^2)^2 \leq 1+3\varepsilon_k^2$$

e

$$|\nabla \tilde{P}_k|^2 = \varepsilon_k^2 |\nabla P(x_k)|^2 + 1 + 2\varepsilon_k P_n(x_k).$$

Em conclusão,

$$\varepsilon_k^2 |\nabla P(x_k)|^2 + 2\varepsilon_k P_n(x_k) \leq 3\varepsilon_k^2,$$

dividindo por ε_k e fazendo $k \to \infty$, $\partial_n P(x_0) \leq 0$.

Passo #3 (*Improvement of flatness*): Pelo Lema 4.1 Tomando $0 < r < \frac{1}{4}$, e $x \in B_{\frac{1}{2}} \cap \{x_n \geq 0\}$ temos que

$$|u_\infty(x) - u_\infty(0) - \nabla u_\infty(0) \cdot x| \leq C_0 r^2$$

onde $C_0 > 0$ é universal.

Daí, e usando o fato que $0 \in F(u_\infty)$ e $(u_\infty)_n = 0$, vem que

$$\begin{aligned} & |u_\infty(x) - u_\infty(0) - \nabla u_\infty(0) \cdot x| \leq C_0 r^2 \\ \iff \quad & -C_0 r^2 \leq u_\infty(x) - u_\infty(0) - \nabla u_\infty(0) \cdot x \leq C_0 r^2 \\ \iff \quad & -C_0 r^2 + \tilde{\nu} \cdot x' \leq u_\infty(x) \leq \tilde{\nu} \cdot x' + C_0 r^2, \end{aligned}$$

para todo $x \in B_r \cap \{x_n \geq 0\}$ onde $\tilde{\nu} := ((u_\infty)_1(0), \ldots, (u_\infty)_{n-1}(0))$. Note que pelas estimativas do gradiente,

$$|\tilde{\nu}| = |\nabla u_\infty(0)| \leq \tilde{C}(n) \|u_\infty\|_{L^\infty\left(B_{\frac{1}{2}}\right)} \leq \tilde{C}(n).$$

Por outro lado, temos do *Passo #1* que G_k converge para G, na distância de Hausdorff. Então, para $k >> 1$

$$\inf\{s > 0;\ G_k \subset G_0 + B_s \text{ e } G_0 \subset G_k + B_s\} < \frac{C_0 r^2}{n}.$$

Logo,

$$|\tilde{u}_k(x) - u_\infty(x)| \;\; \leq \;\; n|(x, \tilde{u}_k(x)) - (x, u_\infty(x))| < n\frac{C_0 r^2}{n} = C_0 r^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
& -C_0r^2 + \tilde{\nu}\cdot x' \leq u_\infty(x) \leq \tilde{\nu}\cdot x' + C_0r^2 \\
\Rightarrow\ & -C_0r^2 + \tilde{\nu}\cdot x' \leq u_\infty(x) - \tilde{u}_k(x) + \tilde{u}_k(x) \leq \tilde{\nu}\cdot x' + C_0r^2 \\
\Rightarrow\ & -C_0r^2 + \tilde{\nu}\cdot x' - (u_\infty(x) - \tilde{u}_k(x)) \leq \tilde{u}_k(x) \leq -(u_\infty(x) - \tilde{u}_k(x))\tilde{\nu}\cdot x' + C_0r^2 \\
\Rightarrow\ & -2C_0r^2 + \tilde{\nu}\cdot x' \leq \tilde{u}_k(x) \leq \tilde{\nu}\cdot x' + 2C_0r^2
\end{aligned}$$

para todo $x \in \Omega_r(u)$. Assim, sendo $C_1 := 2C_0$, temos para todo $x \in \Omega_r(u_k)$ que

$$\begin{aligned}
& -C_1r^2 + \tilde{\nu}\cdot x' \leq \frac{u_k(x) - x_n}{\varepsilon_k} \leq \tilde{\nu}\cdot x' + C_1r^2 \\
\Rightarrow\ & -\varepsilon_kC_1r^2 + \varepsilon_k\tilde{\nu}\cdot x' + x_n \leq u_k(x) \leq x_n + \varepsilon_k\tilde{\nu}\cdot x' + \varepsilon_kC_1r^2.
\end{aligned}$$

Defina, $\nu := \dfrac{(\varepsilon_k\tilde{\nu}, 1)}{\sqrt{\varepsilon_k^2+1}}$. Daí,

$$-\varepsilon_kC_1r^2 + \nu\cdot x\sqrt{\varepsilon_k^2+1} \leq u_k(x) \leq \nu\cdot x\sqrt{\varepsilon_k^2+1} + \varepsilon_kC_1r^2, \quad \text{com } x \in \Omega_r(u_k). \tag{69}$$

Observe que

$$1 \leq \sqrt{\varepsilon_k^2+1} \leq 1 + \frac{\varepsilon_k^2}{2},$$

pois para $t \in (0,1)$,

$$\left(1 + \frac{t^2}{2} - \sqrt{t^2+1}\right)' = t - \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} > t\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \geq 0.$$

Então, pelo Teorema fundamental do cálculo,

$$1 + \frac{t^2}{2} \geq \sqrt{t^2+1}, \quad t \in (0,1).$$

Daí, e olhando pra $\nu\cdot x$ em (69), temos que se $\nu\cdot x \geq 0$, então, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\nu\cdot x - r\frac{\varepsilon_k^2}{2} \leq \nu\cdot x \leq \nu\cdot x\sqrt{\varepsilon_k^2+1} \leq \nu\cdot x\left(1 + \frac{\varepsilon_k^2}{2}\right) \leq \nu\cdot x + r\frac{\varepsilon_k^2}{2}.$$

Agora, se $\nu\cdot x < 0$, temos que

$$\nu\cdot x + r\frac{\varepsilon_k^2}{2} \geq \nu\cdot x \geq \nu\cdot x\sqrt{\varepsilon_k^2+1} \geq \nu\cdot x\left(1 + \frac{\varepsilon_k^2}{2}\right) \geq \nu\cdot x - r\frac{\varepsilon_k^2}{2}.$$

Então, independente do sinal de $\nu \cdot x$, temos a partir de (69),

$$-\varepsilon_k C_1 r^2 + \nu \cdot x - r\frac{\varepsilon_k^2}{2} \leq u_k(x) \leq \nu \cdot x + r\frac{\varepsilon_k^2}{2} + \varepsilon_k C_1 r^2.$$

Considerando, $r_0 C_1 \leq \frac{1}{4}$ e $k >> 1$ tal que $\varepsilon_k \leq \frac{1}{2}$, segue que

$$\begin{aligned} & -\varepsilon_k C_1 r^2 + \nu \cdot x - r\frac{\varepsilon_k^2}{2} \leq u_k(x) \leq \nu \cdot x + r\frac{\varepsilon_k^2}{2} + \varepsilon_k C_1 r^2 \\ \Rightarrow \quad & -\frac{1}{4}\varepsilon_k r + \nu \cdot x - r\frac{\varepsilon_k}{4} \leq u_k(x) \leq \nu \cdot x + r\frac{\varepsilon_k}{4} + \varepsilon_k r\frac{1}{4} \\ \Rightarrow \quad & \nu \cdot x - \frac{r\varepsilon_k}{2} \leq u_k(x) \leq \nu \cdot x + \frac{r\varepsilon_k}{2}, \end{aligned}$$

com $x \in \Omega_r(u_k)$. Então, para k suficientemente grande

$$\left(\nu \cdot x - r\frac{\varepsilon_k}{2}\right)^+ \leq u_k(x) \leq \left(\nu \cdot x + r\frac{\varepsilon_k}{2}\right)^+ \quad \text{em } B_r,$$

contradizendo a hipótese de absurdo.

■

5.4 Resultados principais

Enfim, na primeira subseção, exploramos o *improvement of flatness* para conseguirmos a demonstração do Teorema *Flatness* implica $C^{1,\alpha}$, onde buscamos, inspirados nas notas de BOZHIDAR (2019), lapidar os detalhes. Já na segunda, para obtermos o Lipschitz implica $C^{1,\alpha}$, precisamos recorrer a teoria de fronteira livre do p-laplaciano. Especificamente, e sem querer atenuar os resultados, a mesma teoria desenvolvida por Caffarelli em 1987, mas voltada para o p-laplaciano. Esses resultados são desenvolvidos em Lewis e Nyström (2012).

Impondo um controle universal para $\delta - g_0$ e exigindo mais propriedades para N-função G, obtermos um resultado de estabilidade entre as soluções do g-laplaciano e p-laplaciano.

5.4.1 *Flatness implica* $C^{1,\alpha}$

Lema 5.4. *Dados* $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}^n$*, então*

$$\left(\frac{|B_1|}{n+2}\right)^{\frac{1}{2}} |\nu_1 - \nu_2| = \left(\int_{B_1} |x \cdot \nu_1 - x \cdot \nu_2|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração. Observe que a igualdade acima é equivalente a

$$\fint_{B_1} \left| \frac{\nu_1 - \nu_2}{|\nu_1 - \nu_2|} \cdot x \right|^2 dx = \frac{1}{n+2},$$

que é equivalente a provar que

$$\fint_{B_1} |w \cdot x|^2 \, dx = \frac{1}{n+2}$$

para todo $w \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Pela simetria de B_1 é suficiente considerarmos $w = e_n$, então temos que checar a seguinte igualdade

$$\fint_{B_1} x_n^2 \, dx = \frac{1}{n+2}.$$

Observe que

$$\fint_{B_1} |x|^2 \, dx = \sum_{i=1}^{n} \fint_{B_1} x_i^2 \, dx = n \fint_{B_1} x_n^2 \, dx.$$

Essa segunda igualdade é verdadeira devido a simetria de B_1. Dessa forma, veja que

$$\begin{aligned} \int_{B_1} |x|^2 \, dx &= \int_0^1 \int_{\partial B_s} |\xi|^2 \, d\mathcal{H}^{n-1}(\xi) ds \\ &= \int_0^1 n|B_1| s^{2+n-1} \, ds \\ &= \left. \frac{n|B_1| s^{n+2}}{n+2} \right|_0^1 \\ &= \frac{n|B_1|}{n+2}. \end{aligned}$$

Isso prova o Lema. ■

Teorema 5.4 (*Flatness* implica $C^{1,\alpha}$-I). *Seja* u *uma solução no sentido da viscosidade não negativa para* (2). *Suponha que* $0 \in F(u)$ *e* $Q(0) = 1$. *Existe uma constante universal* $\tilde{\varepsilon} \in (0, 1)$ *tal que, se o gráfico de* u *é* $\tilde{\varepsilon}$*-flat em* B_1, *isto é,*

$$(x_n - \tilde{\varepsilon})^+ \leq u(x) \leq (x_n + \tilde{\varepsilon})^+, \quad x \in B_1$$

e

$$||f||_{L^\infty(B_1)} \leq \tilde{\varepsilon} \quad e \quad [Q]_{C^{0,\beta}(B_1)} \leq \tilde{\varepsilon}, \tag{70}$$

então $F(u) \cap B_{\frac{1}{2}}$ *é gráfico* $C^{1,\alpha}$. *A constante* $\tilde{\varepsilon}$ *depende somente de* $n, \delta, g_0, g(1), g^{-1}(1)$ *e* $G^{-1}(1)$.

Demonstração. Seja u uma solução no sentido da viscosidade para o problema de fronteira livre

$$\begin{cases} \Delta_g u = f, & \text{em} \quad B_1 \cap \{u > 0\}, \\ |\nabla u| = Q, & \text{em} \quad F(u). \end{cases}$$

Fixemos $\bar{r} > 0$ como uma constante universal, tal que

$$\bar{r} \leq \min\left\{\frac{c_0}{4}, r_0\right\}, \tag{71}$$

com r_0 a constante universal do *improvement of flatness*. Para a escolha do $\bar{r}$, seja $\varepsilon_0 := \varepsilon_0(\bar{r})$ dado também pelo Teorema 5.3. Agora, tome

$$\bar{\varepsilon} := \varepsilon_0^2 \quad \text{e} \quad \varepsilon_k = 2^{-k}\varepsilon_0. \tag{72}$$

Nossa escolha para $\bar{\varepsilon}$ nos garante que

$$(x_n - \varepsilon_0)^+ \leq u(x) \leq (x_n + \varepsilon_0)^+ \quad \text{em} \quad B_1.$$

Assim, pelo Teorema 5.3,

$$\left(x \cdot \nu_1 - \bar{r}\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^+ \leq u(x) \leq \left(x \cdot \nu_1 + \bar{r}\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^+ \quad \text{em} \quad B_{\bar{r}},$$

com $|\nu_1| = 1$ e $|\nu_1 - \nu_0| \leq C\varepsilon_0^2$ (onde $\nu_0 = e_n$).

Considere a sequência de reescalonamentos $u_k : B_1 \to \mathbb{R}$

$$u_k(x) := \frac{u(\lambda_k x)}{\lambda_k}$$

com $\lambda_k = \bar{r}^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, para $\bar{r}$ fixado como em (71). Então, cada u_k satisfaz o seguinte problema de fronteira livre

$$\begin{cases} \Delta_g u_k = f_k, & \text{em} \quad B_1 \cap \{u_k > 0\}, \\ |\nabla u_k| = Q_k, & \text{em} \quad F(u_k), \end{cases}$$

onde

$$f_k(x) = \lambda_k f(\lambda_k x) \quad \text{e} \quad Q_k(x) := Q(\lambda_k x).$$

Afirmamos que as escolhas em (72), implicam que as f_k's e Q_k's satisfazem (58). De fato,

$$||f_k||_{L^\infty(B_1)} \leq \lambda_k ||f||_{L^\infty(B_1)} \leq \lambda_k \varepsilon_0^2 = \bar{r}^k \varepsilon_0 \leq c_0^k 2^{-2k} \varepsilon_0^2 \leq c_0 \varepsilon_k^2,$$

e

$$|Q_k(x) - 1| = |Q(\lambda_k x) - Q(0)| \leq [Q]_{C^{0,\beta}(B_1)} |\lambda_k x|^\beta \leq \varepsilon_0^2 \bar{r}^{k\beta} \leq e_0^2 c_0^k 2^{-2k} \leq c_0 \varepsilon_k^2,$$

para todo $x \in B_1$.

Daí e da condição $\bar{\varepsilon}$ da hipótese do Teorema, temos pelo *improvement of flatness* que

$$\left(x\cdot\nu_1-\bar{r}\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^+\leq u_0(x)\leq\left(x\cdot\nu_1+\bar{r}\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^+,$$

onde $|\nu_1-e_n|\leq C\varepsilon_0^2$, $|\nu_1|=1$ e $x\in B_{\bar{r}}$. Logo, em B_1,

$$\begin{aligned}
&\left(\bar{r}x\cdot\nu_1-\bar{r}\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^+\leq u(\bar{r}x)\leq\left(\bar{r}x\cdot\nu_1+\bar{r}\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^+\\
\Rightarrow\ &\left(x\cdot\nu_1-\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^+\leq\frac{u(\bar{r}x)}{\bar{r}}\leq\left(x\cdot\nu_1+\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^+\\
\Rightarrow\ &(x\cdot\nu_1-\varepsilon_1)^+\leq u_1(x)\leq(x\cdot\nu_1+\varepsilon_1)^+.
\end{aligned}$$

Aplicando novamente o *improvement of flatness*, segue *mutatis mutandis* que em B_1

$$(x\cdot\nu_2-\varepsilon_2)^+\leq u_2(x)\leq(x\cdot\nu_2+\varepsilon_2)^+,$$

com $|\nu_1-\nu_2|\leq C\varepsilon_2^2$ e $|\nu_2|=1$. Dessa forma, para cada $k=0,1,\ldots,$ e $x\in B_1$

$$(x\cdot\nu_k-\varepsilon_k)^+\leq u_k(x)\leq(x\cdot\nu_k+\varepsilon_k)^+,$$

com $|\nu_{k+1}-\nu_k|\leq C\varepsilon_k^2$ e $|\nu_k|=1$. Aqui $\nu_0=e_n$. Está última desigualdade é equivalente a

$$\left(x\cdot\nu_k-\frac{\varepsilon_0}{2^k}\bar{r}^k\right)^+\leq u(x)\leq\left(x\cdot\nu_k+\frac{\varepsilon_0}{2^k}\bar{r}^k\right)^+,$$

com $x\in B_{\bar{r}^k}$. Daí vem que se $x\in F(u)\cap B_{\bar{r}^k}$ então $|x\cdot\nu_k|\leq\frac{\varepsilon_0}{2^k}\bar{r}^k$. Logo,

$$F(u)\cap B_{\bar{r}^k}\subset\left\{|x\cdot\nu_k|\leq\frac{\varepsilon_0}{2^k}\bar{r}^k\right\}.$$

Por outro lado, dados $m,k\in\mathbb{N}$, podemos supor $m\geq k$ e daí, $k=m+s$. Logo,

$$\begin{aligned}
|\nu_k-\nu_m|=|\nu_k-\nu_{k+s}|\ &\leq\ \sum_{i=1}^{s}|\nu_{k+(i-1)}-\nu_{k+i}|\\
&\leq\ \sum_{i=1}^{s}\varepsilon_0^2C\frac{1}{2^{2(k+1)}}.
\end{aligned}$$

Daí, segue que $\{\nu_k\}_{k>1}$ é de Cauchy. Logo, existe um ν_0 tal que $\lim\limits_{k\to\infty}\nu_k=\nu_0$. Da estimativa acima, obtemos, fazendo $s\to\infty$, que

$$|\nu_k-\nu_0|\leq\frac{\varepsilon_0C}{2^{2k}}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{4^i}<\frac{\varepsilon_0C}{2^{2k}}.$$

Agora tome $x \in B_{\frac{1}{2}} \cap F(u)$, e seja k, tal que

$$\bar{r}^{k+1} \leq \bar{r}^{k}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
|x \cdot \nu_0| &= |x \cdot (\nu_0 - \nu_k + \nu_k)| \\
&\leq |x \cdot (\nu_0 - \nu_k)| + |x \cdot \nu_k| \\
&\leq |\nu_k - \nu_0||x| + C\frac{\varepsilon_0}{2^k}\bar{r}^k \\
&\leq C\frac{\varepsilon_0^2}{2^{2k}}|x| + C\frac{\varepsilon_0}{2^k}\bar{r}^k \\
&\leq C\frac{\varepsilon_0}{2^k}\left(|x| + \frac{\bar{r}^{k+1}}{\bar{r}}\right) \\
&\leq C\frac{\varepsilon_0}{2^k}|x|\left(1 + \frac{1}{\bar{r}}\right).
\end{aligned}$$

Seja $\gamma \in (0,1)$ tal que $\frac{1}{2} = \bar{r}^{\gamma}$. Logo, $\gamma = -\frac{\ln 2}{\ln \bar{r}}$. Assim,

$$\begin{aligned}
|x \cdot \nu_0| &\leq \frac{\varepsilon_0}{2^k}|x|\left(1 + \frac{1}{\bar{r}}\right) \\
&= C\varepsilon_0\frac{1}{2^{k+1}}(1 + \bar{r}^{-1})2|x| \\
&\leq 2C\varepsilon_0\bar{r}^{\gamma(k+1)}(1 + \bar{r}^{-1})|x| \\
&\leq 2C\varepsilon_0|x|^{\gamma+1}(1 + \bar{r}^{-1}) \\
&\leq C_1\varepsilon_0|x|^{\gamma+1},
\end{aligned}$$

com $C_1 := 2C(1 + \bar{r}^{-1})$.

Defina $u_0(x) = (x \cdot \nu_0)^+$, e $u_{x_0,s} := \frac{u(x_0 + sx)}{s}$, com $x_0 \in F(u)$. Claramente, $u_k = u_{0,\bar{r}^k}$.

Afirmação: $||u_{0,s} - u_0||_{L^\infty(B_1)} \leq C_1 s^\gamma$ para todo $s \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Prova da Afirmação: Como

$$(x \cdot \nu_k - \varepsilon_k)^+ \leq u_k(x) \leq (x \cdot \nu_k + \varepsilon_k)^+,$$

temos que

$$\begin{aligned}
& (x \cdot \nu_k - \varepsilon_k)^+ - u_0(x) \leq u_k(x) - u_0(x) \leq (x \cdot \nu_k + \varepsilon_k)^+ - u_0(x) \\
\Rightarrow\ & -|x \cdot \nu_k - \varepsilon_k - x \cdot \nu_0| \leq u_k(x) - u_0(x) \leq |x \cdot \nu_k + \varepsilon_k - x \cdot \nu_0|.
\end{aligned}$$

Note que

$$|x \cdot \nu_0 - (x \cdot \nu_k \pm \varepsilon_k)| \leq |\nu_k - \nu_0||x| + \varepsilon_k < \varepsilon_k + \varepsilon_k^2 C = \varepsilon_k(1 + \varepsilon_k C).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & -|x \cdot \nu_k - \varepsilon_k - x \cdot \nu_0| \leq u_k(x) - u_0(x) \leq |x \cdot \nu_k + \varepsilon_k - x \cdot \nu_0| \\ \Rightarrow \quad & -\varepsilon_k(1 + \varepsilon_k C) \leq u_k(x) - u_0(x) \leq \varepsilon_k(1 + \varepsilon_k C) \\ \Rightarrow \quad & |u_k(x) - u_0(x)| \leq \varepsilon_k(1 + \varepsilon_k C). \end{aligned}$$

Logo,

$$||u_k - u_0||_{L^\infty(B_1)} \leq \varepsilon_k(1 + \varepsilon_k C) \leq \varepsilon_k(1 + C) = \frac{\varepsilon_0}{2^k}(1 - C).$$

Daí, u_k converge uniformemente para u_0.

Seja $0 < s < \frac{1}{2}$, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\bar{r}^{k+1}}{2} < s \leq \frac{\bar{r}^k}{2}.$$

Tome ρ tal que $s = \rho \bar{r}^k$, isto é, $\rho = \frac{s}{\bar{r}^k}$. Então, temos para $x \in B_1$ que

$$u(sx) = u(\rho \bar{r}^k x) = u(\bar{r}^k \tilde{y}) \qquad \tilde{y} \in B_\rho.$$

Logo,

$$\begin{aligned} & (\tilde{y} \cdot \nu_k - \varepsilon_k)^+ \leq \frac{u(\bar{r}^k \tilde{y})}{\bar{r}^k} \leq (\tilde{y} \cdot \nu_k + \varepsilon_k)^+ \\ \Rightarrow \quad & \left(x \cdot \nu_k - \frac{\varepsilon_k}{\rho}\right)^+ \leq \frac{u(\bar{r}^k \rho x)}{\bar{r}^k \rho} \leq \left(x \cdot \nu_k + \frac{\varepsilon_k}{\rho}\right)^{+i} \\ \Rightarrow \quad & \left(x \cdot \nu_k - \frac{\varepsilon_k}{\rho}\right)^+ \leq \frac{u(sx)}{s} \leq \left(x \cdot \nu_k + \frac{\varepsilon_k}{\rho}\right)^{+i}. \end{aligned}$$

Somando $-u_k$ na desigualdade acima, segue que

$$\begin{aligned} & \left(x \cdot \nu_k - \frac{\varepsilon_k}{\rho}\right)^+ - (x \cdot \nu_k + \varepsilon_k)^+ \leq \frac{u(sx)}{s} - u_k(x) \leq \left(x \cdot \nu_k + \frac{\varepsilon_k}{\rho}\right)^+ - (x \cdot \nu_k - \varepsilon_k)^+ \\ \Rightarrow \quad & -\left|\frac{1}{\rho}\varepsilon_k + \varepsilon_k\right| \leq \frac{u(sx)}{s} - u_k(x) \leq \left|\frac{1}{\rho}\varepsilon_k + \varepsilon_k\right| \\ \Rightarrow \quad & \left|\frac{u(sx)}{s} - u_k(x)\right| \leq \left|\frac{1}{\rho}\varepsilon_k + \varepsilon_k\right|. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{u(sx)}{s} - u_0(x)\right| &\leq \left|\frac{u(sx)}{s} - u_k(x)\right| + |u_k(x) - u_0| \\
&\leq \varepsilon_k\left(1 + \frac{1}{\rho}\right) + \frac{\varepsilon_0}{2^k}(1 + C) \\
&\leq \varepsilon_0\frac{1}{2^k}\left(2 + C + \frac{1}{\rho}\right) \\
&\leq \varepsilon_0\frac{1}{2^k}\left(2 + C + \frac{2}{\bar{r}}\right) \\
&= \varepsilon_0\bar{r}^{k\gamma}\left(2 + C + \frac{2}{\bar{r}}\right) \\
&= \varepsilon_0\frac{\bar{r}^{k\gamma+\gamma}}{2}\left(2 + C + \frac{2}{\bar{r}}\right)2\bar{r}^{-\gamma} \\
&\leq C_1 s^\gamma,
\end{aligned}$$

onde $C_1 := \varepsilon_0\left(2 + C + \frac{2}{\bar{r}}\right)2\bar{r}^{-\gamma}$. O que prova o afirmado.

Temos pelo Lema 5.1, que a solução u é Lipschitz e não degenerada. Isto é, existem $c, C > 0$ universais tais que

$$c\,\mathrm{dist}(z, F(u)) \leq u(z) \leq C\,\mathrm{dist}(z, F(u)), \text{ para todo } z \in B^+_{\frac{1}{2}}(u).$$

Em particular dado $y_0 \in \Omega^+(u) \cap B_{\frac{1}{2}}$ e $0 < r \leq \min\left\{\frac{1}{2}, \mathrm{dist}(y_0, F(u))\right\}$, temos que

$$|u(y_0)| \geq c\,\mathrm{dist}(y_0, F(u)) \geq cr.$$

Daí, $||u||_{L^\infty(B_r(y_0))} \geq cr$.

Afirmação: Existem $C, r_0 > 0$ tais que

$$\begin{cases} (i) \quad \Omega^+(u_{0,s}) \supset \{x \in B_1;\ x \cdot \nu_0 > Cr^\gamma\}, \\ (ii) \quad \Omega^+(u_{0,s}) \cap \{x \in B_1;\ x \cdot \nu_0 < -Cr^\gamma\} = \varnothing. \end{cases} \tag{73}$$

Prova da Afirmação: Seja $0 < s < \frac{1}{2}$ pela afirmação anterior, temos que

$$\begin{aligned}
u_{0,s}(x) &\geq (x \cdot \nu_0)^+ - C_1 s^\gamma \\
&\geq (x \cdot \nu - C_1 s^\gamma)^+.
\end{aligned}$$

Daí, segue (i). E C deve ser tomado maior ou igual a C_1.

Para checarmos (ii), suponha por absurdo que existe $y \in B_1$ tal que

$$u_{0,s}(y) > 0 \qquad \text{e} \qquad y \cdot \nu_0 < -Cs^\gamma$$

com $C > C_1$.Então,

$$0 < u_{0,s}(y) = \frac{u(sy)}{s} = 2\frac{u\left(2s\frac{y}{2}\right)}{2s} = 2\frac{u(2s\tilde{(y)})}{2s}$$

com $\tilde{y} := \frac{y}{2}$. Logo,

$$u_{0,2s}(\tilde{y}) > 0 \qquad \text{e} \qquad \tilde{y} \cdot \nu_0 < -\frac{C}{2}s^\gamma.$$

Pela não degenerescência de u, segue, tomando $0 < \rho := \min\left\{ \operatorname{dist}(\tilde{y}, F(u_{0,2s})), \frac{Cs^\gamma}{2} \right\}$, que

$$u_{0,2s}(\tilde{y}) \geq c \operatorname{dist}(\tilde{y}, F(u_{0,2s}) \geq c\rho \Rightarrow ||u_{0,2s}||_{L^\infty(B_\rho(\tilde{y}))} \geq c\rho.$$

Seja $0 < r_0 < \frac{1}{2}$ tal que $Cr_0^\gamma < 1$ e $s < r_0$, então,

$$\rho < \frac{Cs^\gamma}{2} < \frac{C}{2}\frac{1}{C} = \frac{1}{2}.$$

Logo, $B_\rho(\tilde{y}) \subset B_1$.

Se necessário podemos diminuir ρ para que $u_0 = 0$ em $B_\rho(\tilde{y})$. Então,

$$(2s)^\gamma C_1 \geq ||u_{0,2s} - u_0||_{L^\infty(B_1)} \geq ||u_{0,2s} - u_0||_{L^\infty(B_\rho(\tilde{y}))} = ||u_{0,2s}||_{L^\infty(B_\rho(x))} \geq c\rho.$$

Como podemos diminuir o s, seja $s > 0$ tal que $\rho = \frac{Cs^\gamma}{2}$. Então,

$$C\frac{cs^\gamma}{2} \leq ||u_{0,2s} - u_0||_{L^\infty(B_1)} \leq C_1(2s)^\gamma.$$

Tomando $C > \dfrac{2^{\gamma+1}C_1}{c}$, temos um absurdo. Logo, vale (ii). Por fim, defina

$$C = \left(1 + \frac{2^{\gamma+1}}{c}\right)C_1 \qquad \text{e} \qquad r_0 = \min\left\{\frac{1}{2}, C^{-\gamma}\right\}.$$

O que prova o afirmado.

Por simplicidade, até aqui fizemos considerações, tendo em vista, o *blow-up* em $0 \in F(0)$. Contudo, essa argumentação pode ser feita pra qualquer ponto de $F(u) \cap B_{\frac{1}{2}}$. Pois, dado $y \in F(u) \cap B_{\frac{1}{2}}$, temos que $B_{\frac{1}{2}}(y) \subset B_1$, logo, vale que

$$(x_n - \bar{\varepsilon})^+ \leq u(x) \leq (x_n + \bar{\varepsilon})^+ \qquad \text{em } B_{\frac{1}{2}}(y).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}x_n + y_n - \bar{\varepsilon}\right)^+ &\leq u\left(y + \frac{1}{2}x\right) \leq \left(\frac{1}{2}x_n + y_n + \bar{\varepsilon}\right)^+, \quad \text{com } x \in B_1.\\
\Rightarrow (x_n + 2y_n - 2\bar{\varepsilon})^+ &\leq 2u\left(y + \frac{1}{2}x\right) \leq (x_n + 2y_n + 2\bar{\varepsilon})^+, \quad \text{com } x \in B_1.\\
\Rightarrow \left(x_n + 2(y_n - \bar{\varepsilon})\right)^+ &\leq u_{y,\frac{1}{2}}(x) \leq (x_n + 2(y_n + \bar{\varepsilon}))^+, \quad \text{com } x \in B_1.
\end{aligned}$$

Ora, sabemos que se $y \in F(u)$ então, $|y_n| \leq \bar{\varepsilon}$. Então,

$$\begin{aligned}
-\bar{\varepsilon} &\leq y_n \leq \bar{\varepsilon}\\
\Rightarrow 0 &< y_n + \bar{\varepsilon} \leq 2\bar{\varepsilon}\\
\Rightarrow 2(y_n + \bar{\varepsilon}) &\leq 4\bar{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

De maneira similar, segue que $-2(-y_n + \bar{\varepsilon}) \geq -4\bar{\varepsilon}$. Então,

$$(x_n - 4\bar{\varepsilon})^+ \leq u_{y,\frac{1}{2}}(x) \leq (x_n + 4\bar{\varepsilon})^+, \quad \text{com } x \in B_1.$$

Disso segue a existência de um vetor unitário ν_y que goza das mesmas propriedades de ν_0.

Afirmação: Seja $\nu : F(u) \cap B_{\frac{1}{2}} \to \mathbb{S}^{n-1}$, dada por $x \mapsto \nu_x$. Então, existe $R, \alpha \in (0,1)$ e $C > 0$ tais que

$$|\nu_{x_0} - \nu_{y_0}| \leq C|x_0 - y_o|^{\alpha}, \qquad \forall x_o, y_0 \in F(u) \cap B_R.$$

Prova da Afirmação: Sejam $\alpha, R \in (0,1)$ a determinar, e tomemos $x_0, y_0 \in F(u) \cap B_R$. Defina, $r = |x_0 - y_0|^{\beta}$. Assim, dado $x \in B_1$

$$\begin{aligned}
|u_{x_0,r}(x) - u_{y_0,r}(x)| &= \frac{1}{r}|u(x_0 + rx) - u(y_0 + rx)|\\
&\leq \frac{\mathrm{Lip}(u)}{r}|x_0 - y_0|\\
&= \mathrm{Lip}(u)|x_0 - y_0|^{1-\beta}.
\end{aligned}$$

Precisamos que r seja tal que $0 < r < \frac{1}{2}$, então, é suficiente temos $|x_0 - y_0|^{\beta} < (2R)^{\beta} < \frac{1}{2}$.

$$\begin{cases}
||u_{x_0,s} - u_{x_0}||_{L^\infty(B_1)} \leq C_1 s^{\gamma}\\
||u_{y_0,s} - u_{y_0}||_{L^\infty(B_1)} \leq C_1 s^{\gamma}.
\end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|u_{x_0}(x) - u_{y_0}(x)| &\leq |u_{x_0}(x) - u_{x_{0,r}}(x)| + |u_{x_0,r}(x) - u_{y_{0,r}}(x)| + |u_{y_0}(x) - u_{y_{0,r}}(x)|\\
&\leq 2C_1 r^{\gamma} + \mathrm{Lip}(u)|x_0 - y_0|^{1-\beta}.
\end{aligned}$$

Seja $\beta > 0$ tal que $1 - \beta = \beta\gamma$. Dessa forma, $\beta = \frac{1}{1+\gamma}$ e $1 - \beta = \frac{\gamma}{1+\gamma}$. Defina $\alpha = 1 - \beta$, assim,

$$|u_{x_0}(x) - u_{y_0}(x)| \leq (2C_1 + \mathrm{Lip}(u))|x_0 - y_0|^\alpha \Rightarrow \|u_{x_0} - u_{y_0}\|_{L^\infty(B_1)} \leq (2C_1 + \mathrm{Lip}(u))|x_0 - y_0|^\alpha$$

e $R < \dfrac{1}{2^{2+\gamma}}$.

Pelo Lema 5.4, temos que

$$\begin{aligned}
|\nu_{x_0} - \nu_{y_0}| &= \left(\frac{n+2}{|B_1|}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_1} |x \cdot \nu_{x_0} - x \cdot \nu_{y_0}|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\frac{n+2}{|B_1|}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\int_{B_1} |(x \cdot \nu_{x_0})^+ - (x \cdot \nu_{y_0})^+|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}\right. \\
&+ \left.\left(\int_{B_1} |(x \cdot \nu_{x_0})^- - (x \cdot \nu_{y_0})^-|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&= 2\left(\frac{n+2}{|B_1|}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_1} |(x \cdot \nu_{x_0})^+ - (x \cdot \nu_{y_0})^+|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2\left(\frac{n+2}{|B_1|}\right)^{\frac{1}{2}} |B_1|^{\frac{1}{2}} \|u_{x_0} - u_{y_0}\|_{L^\infty(B_1)} \\
&\leq 2\sqrt{n+2}(2C_1 + \mathrm{Lip}(u))|x_0 - y_0|^\alpha.
\end{aligned}$$

Tome $C = 2\sqrt{n+2}(2C_1 + \mathrm{Lip}(u))$. O que prova o afirmado.

Defina para $\varepsilon > 0$, e $x_0, \nu \in \mathbb{R}^n$,

$$C_\varepsilon^\pm(x_0, \nu) := \{x \in \mathbb{R}^n;\ \pm\nu \cdot (x - x_0) > \varepsilon|x - x_0|\}.$$

Afirmação: Para cada $\varepsilon > 0$ existe $R > 0$, tal que para $x_0 \in F(u) \cap B_{\frac{1}{2}}$

$$\begin{cases} u > 0 & \text{em} \quad C_\varepsilon^+(x_0, \nu_{x_0}) \cap B_R(x_0) \\ u = 0 & \text{em} \quad C_\varepsilon^-(x_0, \nu_{x_0}) \cap B_R(x_0). \end{cases}$$

Prova da Afirmação: Sabemos que

$$\Omega^+(u_{x_0,r}) \supset \{x \in B_1;\ x \cdot \nu_{x_0} > Cr^\gamma\}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
&\left\{x \in B_1;\ \frac{u(x_0 + rx)}{r} > 0\right\} \supset \{x \in B_1;\ x \cdot \nu_{x_0} > Cr^\gamma\} \\
\Rightarrow\ &\left\{y \in B_r(x_0);\ \frac{u(y)}{r} > 0\right\} \supset \left\{y \in B_r(x_0);\ \frac{y - x_0}{r} \cdot \nu_{x_0} > Cr^\gamma\right\}.
\end{aligned}$$

Como *escolium* da prova desse resultado, temos que para todo $x \in B_1$

$$u_{x_0,r}(x) \geq (x \cdot \nu_{x_0} - Cr^\gamma)^+ .$$

Logo, para todo $y \in B_r(x_0)$,

$$\frac{u(y)}{r} \geq \left(\frac{y - x_0}{r} \cdot \nu_{x_0} - Cr^\gamma\right)^+ .$$

Dessa estimativa acima e supondo que $y \in C_\varepsilon^+(x_0, \nu_{x_0}) \cap B_r(x_0)$ segue que

$$\begin{aligned} \frac{u(y)}{r} &\geq \left(\frac{y - x_0}{r} \cdot \nu_{x_0} - Cr^\gamma\right)^+ \\ \Rightarrow \quad u(y) &\geq \left((y - x_0) \cdot \nu_{x_0} - Cr^{\gamma+1}\right)^+ \\ \Rightarrow \quad u(y) &> \left(\varepsilon|y - x_0| - Cr^{\gamma+1}\right)^+ . \end{aligned}$$

Como esta última desigualdade é estrita, temos que u é positiva nos pontos do cone em questão. Daí, só precisamos determinar r de modo que $\varepsilon|y - x_o| - Cr^{\gamma+1} > 0$. Ora,

$$\varepsilon > \frac{Cr^{\gamma+1}}{|y - x_0|} \geq Cr^\gamma$$

ou seja, é necessário que $Cr^\gamma < \varepsilon$. Logo, para $r > 0$ tal que $Cr^\gamma < \varepsilon$, temos

$$C_\varepsilon^+(x_0, \nu_{x_0}) \cap B_r(x_0) \subset \Omega^+(u).$$

Por outro lado, se $0 < Cr^\gamma < \varepsilon$ então, $C_\varepsilon^-(x_0, \nu_{x_0}) \cap B_r(x_0) \cap \Omega^+(u) = \varnothing$. Mostraremos que a contrapositiva é verdadeira por absurdo. Suponha que exista $y \in C_\varepsilon^-(x_0, \nu_{x_0}) \cap B_r(x_0)$ tal que $u(y) > 0$ e $Cr^\gamma < \varepsilon$.

Ora, sabemos que $0 < u(y) \leq ((y - x_0) \cdot \nu_{x_0})^+ + Cr^{\gamma+1}$. Logo, suponha que $(y - x_0) \cdot \nu_{x_0} \leq 0$. Então,

$$0 < u(y) \leq Cr^{\gamma+1} < \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é qualquer, segue que $u(y) = 0$, logo, temos uma contradição. Suponha agora, que $(y - x_0) \cdot \nu_{x_0} > 0$. Então,

$$0 < u(y) \leq ((y - x_0) \cdot \nu_{x_0}) + Cr^{\gamma+1} < -\varepsilon|y - x_0| + \varepsilon r < \varepsilon r < \frac{\varepsilon^{\frac{1}{\gamma}+1}}{C^{\frac{1}{\gamma}}}.$$

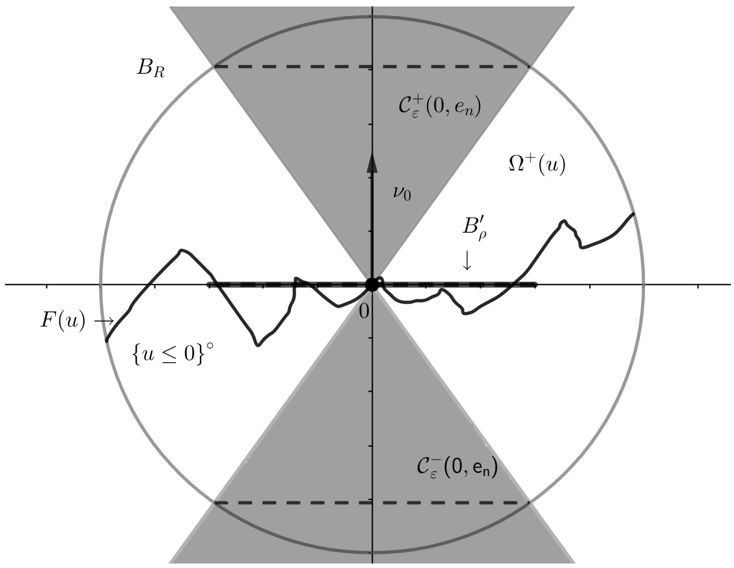
De maneira análoga, segue da arbitrariedade de $\varepsilon > 0$, uma contradição. O que prova o afirmado.

Considere ν_0 o vetor normal em $0 \in F(u)$. Podemos assumir sem perda de generalidade que $\nu_0 = e_n$. Então,

$$\Omega^+(u_0) = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R};\ x_n > 0\}.$$

Seja $\varepsilon \in (0,1)$ e $R > 0$ tal que $CR^\gamma < \varepsilon$. Defina, $\rho = R\sqrt{1-\varepsilon^2}$ que é o raio dos paralelos de $\mathbb{S}^{n-1}$ gerado pela interseção com os cones $C_\varepsilon^+(0, e_n)$ e $C_\varepsilon^-(0, e_n)$.

Figura 6 – Ilustração do cones, inspirado nas notas de Bozhidar Velichkov 2019.



Fonte: elaborado pelo autor.

Seja $x' \in B'_\rho = \{y' \in \mathbb{R}^{n-1};\ |y'| < \rho\}$ e defina

$$S_+^{x'} = \{(x', t) \in B_R;\ u(x', t) > 0\} \qquad \text{e} \qquad S_-^{x'} = \{(x', t) \in B_R;\ u(x', t) \leq 0\}.$$

Por construção,

$$S_+^{x'} \supset \{(x', t) \in B_R;\ t > \varepsilon R\} \qquad \text{e} \qquad S_-^{x'} \supset \{(x', t) \in B_R;\ t < -\varepsilon R\}.$$

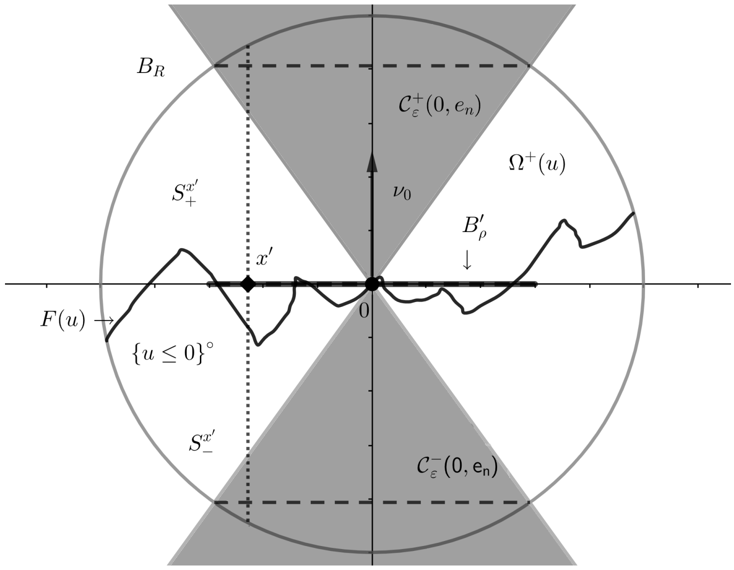
Defina $h : B'_\rho \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x') = \inf\{t \in \mathbb{R};\ \forall T \in (t, \rho),\ u(x', T) > 0\}.$$

Note que $(x', h(x')) \in F(u) \cap B'_\rho \times [-\rho, \rho]$, pois, $(x', h(x') + t) \in \Omega^+(u)$, para todo $t \in (0, \rho - h(x'))$. Daí, existe $\{x_k\} \subset \Omega^+(u)$ tal que x_k converge para $(x', h(x'))$, então, $(x', h(x')) \in \overline{\Omega^+(u)}$. Resta-nos checar que $u(x', h(x')) = 0$.

Suponha por absurdo que exista $x' \in B'_\rho$ tal que $u(x', h(x')) > 0$. Pela continuidade de u existe $B_\delta(x', h(x'))$ tal que u é positiva nessa bola. Então, para $T \in (h(x) - \delta, h(x))$, $u(x, T) > 0$. Portanto, $h(x')$ não é o ínfimo. Temos um absurdo. De maneira similar, vemos que $u(x', h(x'))$ não pode ser negativo. Logo, $u(x', h(x')) = 0$.

Figura 7 – Construção da função h, inspirado nas notas de Bozhidar Velichkov 2019.



Fonte: elaborado pelo autor.

Agora, seja $x'_0 \in B'_\delta$ com $0 < \delta \leq \rho$, e $t_0 := h(x'_0)$. Daí, $(x'_0, t_0) \in F(u) \cap B_R$. Por construção, temos que se $x \in C_\varepsilon^+(0, e_n)$, então,

$$x_n = x \cdot e_n > \varepsilon|x| > \varepsilon|x'|$$

e se $x \in C_\varepsilon^-(0, e_n)$,

$$-x_n > \varepsilon|x'|.$$

Logo, como $(x'_0, h(x'_0))$ não pertence a $C_\varepsilon^+(0, e_n) \cup C_\varepsilon^-(0, e_n)$ temos que

$$-\varepsilon|x'_0| \leq h(x'_0) \leq \varepsilon|x'_0|.$$

Dessa forma, seja $x_0 := (x'_0, t_0)$,

$$|x_0| = \sqrt{|x'_0|^2 + |h(x'_0)|^2} \leq \sqrt{|x'_0|^2 + \varepsilon|x_0|^2} \leq \delta\sqrt{1+\varepsilon^2} \leq \delta\sqrt{2}.$$

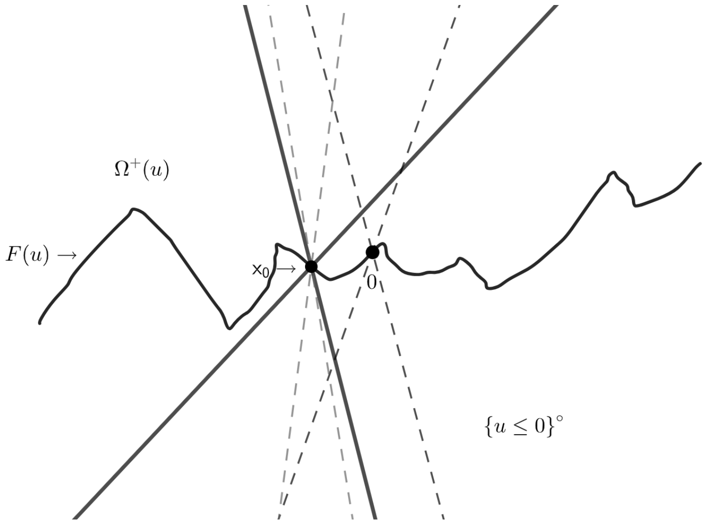
Afirmação: Para $\delta << 1$,

$$\begin{cases} u > 0 \quad \text{em} \quad C_{2\varepsilon}^+(x_0, e_n) \cap B_R(x_0), \\ u = 0 \quad \text{em} \quad C_{2\varepsilon}^-(x_0, e_n) \cap B_R(x_0). \end{cases}$$

Prova da Afirmação: Sabemos que

$$\begin{cases} u > 0 \quad \text{em} \quad C_\varepsilon^+(x_0, \nu_{x_0}) \cap B_R(x_0), \\ u = 0 \quad \text{em} \quad C_\varepsilon^-(x_0, \nu_{x_0}) \cap B_R(x_0). \end{cases}$$

Figura 8 – $C^{\pm}_{2\varepsilon}(x_0, e_n) \subset C^{\pm}_{2\varepsilon}(x_0, \nu_{x_0})$.



Fonte: elaborado pelo autor.

Para provar a afirmação é suficiente provar que

$$C^{\pm}_{2\varepsilon}(x_0, e_n) \subset C^{\pm}_{\varepsilon}(x_0, \nu_{x_0}).$$

Para isso, seja $x \in C^{\pm}_{2\varepsilon}(x_0, e_n)$ então,

$$\nu_{x_0} \cdot (x - x_0) = (\nu_{x_0} - e_n + e_n) \cdot (x - x_0) > 2\varepsilon|x - x_0| + (\nu_{x_0} - e_n)(x - x_0).$$

Note que

$$|\nu_{x_0} - e_n| = |\nu_{x_0} - \nu_0| \leq C|x_0|^\alpha \leq C(\sqrt{2}\delta)^\alpha.$$

Então,

$$|(x - x_0) \cdot (\nu_{x_0} - e_n)| \leq C(\sqrt{2}\delta)^\alpha |x - x_0|.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\nu_{x_0} \cdot (x - x_0) &> 2\varepsilon|x - x_0| + (\nu_{x_0} - e_n)(x - x_0) \\
&\geq 2\varepsilon|x - x_0| - C(\sqrt{2}\delta)^\alpha|x - x_0| \\
&= (2\varepsilon - C(\sqrt{2}\delta)^\alpha)|x - x_0| \\
&= \varepsilon|x - x_0|.
\end{aligned}$$

para $\delta << 1$. O que prova o afirmado.

Como consequência do afirmado, em qualquer ponto $(x', h(x'))$ com $|x'| \leq \delta$, podemos "colocar" um cone $C^{\pm}_{2\varepsilon}(x, e_n)$. Portanto,

$$B'_\delta \times (-\delta, \delta) \cap \Omega^+(u) = \{(x', t) \in B'_\delta \times (-\delta, \delta);\ h(x') < t\},$$

$$B'_\delta \times (-\delta, \delta) - \Omega^+(u) = \{(x', t) \in B'_\delta \times (-\delta, \delta);\ h(x') > t\}$$

e

$$B'_\delta \times (-\delta, \delta) \cap F(u) = \{(x', t) \in B'_\delta \times (-\delta, \delta);\ h(x') = t\}.$$

Agora checaremos a regularidade de h.

• h é Lipschitz.

Com efeito, sejam $x'_1, x'_2 \in B'_\delta$ e $x_1 := (x'_1, h(x'_1))$ e $x_2 := (x'_2, h(x'_2))$. Como $x_1 \notin C^+_{2\varepsilon}(x_2, e_n)$,

$$h(x'_1) - h(x'_2) = (x_1 - x_2) \cdot e_n \leq 2\varepsilon|x_1 - x_2| \leq 2\varepsilon(|x'_1 - x'_2| + |h(x'_1) - h(x'_2)|).$$

Como $x_2 \notin C^+_{2\varepsilon}(x_1, e_n)$, segue de maneira análoga que

$$h(x'_2) - h(x'_1) \leq 2\varepsilon(|x'_1 - x'_2| + |h(x'_1) - h(x'_2)|).$$

Logo,

$$|h(x'_1) - h(x'_2)| \leq 2\varepsilon(|x'_1 - x'_2| + |h(x'_1) - h(x'_2)|)$$

$$\Rightarrow (1 - 2\varepsilon)|h(x'_1) - h(x'_2)| \leq 2\varepsilon(|x'_1 - x'_2|.$$

Então, para $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$

$$|h(x'_1) - h(x'_2)| \leq 4\varepsilon|x'_1 - x'_2|, \qquad \text{para todo} \quad x'_1, x'_2 \in B'_\delta.$$

• h é diferenciável.

Sabemos do *improvement of flatness* que $x_0 = (x'_0, h(x'_0))$,

$$-C|x - x_0|^{\gamma+1} \leq (x - x_0) \cdot \nu_{x_0} \leq C|x - x_0|^{\gamma+1}$$

para algum $\gamma \in (0, 1)$ e qualquer $x = (x', h(x'))$ com $x' \in B'_\delta$.

Para simplificar a notação, definamos $\nu = \nu_{x_0}$, então, $\nu = (\nu', \nu_n)$. Daí, defina $\tilde{\nu}' = -\nu'$. Então,

$$\left| h(x') - h(x'_0) - (x' - x'_0) \cdot \frac{\tilde{\nu}'}{\nu_n} \right| \leq \frac{C}{|\nu_n|}|x - x_0|^{\gamma+1}.$$

Como

$$|x - x_0| \leq |x' - x'_0| + |h(x') - h(x'_0)| \leq (1 + 4\varepsilon)|x' - x'_0|,$$

temos que

$$\left| h(x') - h(x'_0) - (x' - x'_0) \cdot \frac{\tilde{\nu}'}{\nu_n} \right| \leq \frac{C}{|\nu_n|}(1+4\varepsilon)^{\gamma+1}|x' - x'_0|^{\gamma+1} = o(|x' - x'_0|)$$

quando $x \to x_0$. Logo, $\nabla h(x'_0) = \dfrac{\tilde{\nu}'}{\nu_n}$.

• ∇h é $C^{0,\alpha}$.

Dados $x', y' \in B'_\delta$, temos que $x = (x', h(x'))$ e $(y', h(y'))$ são pontos de $F(u)$, então,

$$|\nu_x - \nu_y| \leq C|x - y|^\alpha \leq (1+4\varepsilon)^\alpha |x' - y'|^\alpha.$$

Daí, para todo $x' \in B'_\delta \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $x' \mapsto \nu_{x'} := \nu_{(x', h(x'))}$, são α-Hölder contínua, *a fortiori*, as componentes da aplicação $x' \mapsto \nu_{x'}$ também o são. Ora, como,

$$\nu_{x'} = \frac{(-\nabla h(x'), 1)}{\sqrt{1 + |\nabla h(x')|^2}}.$$

Logo, $\dfrac{(-\nabla h(x'), 1)}{\sqrt{1 + |\nabla h(x')|^2}}$ é α-Hölder contínua. Em particular, $x' \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1 + |\nabla h(x')|^2}}$ é α-Hölder contínua. Então,

$$\begin{aligned}
|x' - y'|^\alpha C &\geq \left| \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla h(x')|^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla h(y')|^2}} \right| \\
&= \left| \frac{\sqrt{1 + |\nabla h(y')|^2} - \sqrt{1 + |\nabla h(x')|^2}}{\sqrt{[1 + |\nabla h(x')|^2] \cdot [1 + |\nabla h(y')|^2]}} \right| \\
&\geq \left| \frac{\sqrt{1 + |\nabla h(y')|^2} - \sqrt{1 + |\nabla h(x')|^2}}{1 + \mathrm{Lip}(h)^2} \right|.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\big| |(-\nabla h(x'), 1)| - |(-\nabla h(y'), 1)| \big| \leq (1 + \mathrm{Lip}(h)^2) C |x' - y'|^\alpha.$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
& |(-\nabla h(x'), 1) - (-\nabla h(y'), 1)| \\
= & \left| \frac{|(-\nabla h(x'), 1)|(-\nabla h(x'), 1)}{|(-\nabla h(x'), 1)|} - \frac{|(-\nabla h(y'), 1)|(-\nabla h(y'), 1)}{|(-\nabla h(y'), 1)|} \right| \\
\leq & |(-\nabla h(x'), 1)| \left| \frac{(-\nabla h(x'), 1)}{|(-\nabla h(x'), 1)|} - \frac{(-\nabla h(y'), 1)}{|(-\nabla h(y'), 1)|} \right| \\
+ & \big||(-\nabla h(x'), 1)| - |(-\nabla h(y'), 1)|\big| \\
\leq & (2 + \mathrm{Lip}(h) + \mathrm{Lip}(h)^2) C |x' - y'|^\alpha.
\end{aligned}$$

Daí, segue que ∇h possui a propriedade desejada.

Assim finalizamos a prova do Teorema *Flatness* implica $C^{1,\alpha}$. ■

Teorema 5.5 (*Flatness* implica $C^{1,\alpha}$-II)**.** *Seja* u *uma solução no sentido da viscosidade não negativa de* (2)*. Suponha que* $0 \in F(u)$ *e* $Q(0) = 1$*. Então, existe uma constante universal* $\tilde{\varepsilon} \in (0,1)$ *dependendo somente de* $n, \delta, g_0, g(1), g^{-1}(1)$ *e* $G^{-1}(1)$ *tal que se*

$$\varepsilon^{\star} := \left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{1 + ||Q||_{C^{0,\beta}(B_1)} + ||f||^{\beta}_{L^{\infty}(B_1)}} \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad e \quad \varepsilon_{\star} := \tilde{\varepsilon}\varepsilon^{\star}.$$

e o gráfico de u *é* $\varepsilon_{\star}$*-flat em* B_1*, isto é,*

$$(x_n - \varepsilon_{\star})^+ \le u(x) \le (x_n + \varepsilon_{\star})^+, \quad x \in B_1.$$

então $F(u) \cap B_{\frac{\varepsilon_{\star}}{2}}$ *é um gráfico* $C^{1,\alpha}$*.*

Demonstração. Se a estimativa (70) vale então o resultado segue do Teorema 5.4. Caso contrário, defina

$$v(x) = \frac{u(\varepsilon^{\star}x)}{\varepsilon^{\star}}, \quad x \in B_1.$$

Nós temos que v é uma solução no sentido da viscosidade para

$$\begin{cases} \Delta_g v = f^{\star}, & \text{em} \quad B_1 \cap \{v > 0\}, \\ |\nabla v| = Q^{\star}, & \text{em} \quad F(v), \end{cases}$$

onde $f^{\star}(x) = \varepsilon^{\star} f(\varepsilon^{\star}x)$ e $Q^{\star}(x) = Q(\varepsilon^{\star}x)$. Ainda, $0 \in F(u)$, $Q^{\star}(0) = 1$,

$$(x_n - \tilde{\varepsilon})^+ \le v(x) \le (x_n + \tilde{\varepsilon})^+, \quad x \in B_1,$$

$$||f^{\star}||_{L^{\infty}(B_1)} \le \varepsilon^{\star}||f||_{L^{\infty}(B_1)} \le \tilde{\varepsilon} \quad \text{em} \quad [Q^{\star}]_{C^{0,\beta}(B_1)} \le (\varepsilon^{\star})^{\beta}[Q]_{C^{0,\beta}(B_1)} \le \tilde{\varepsilon}.$$

Assim, pelo Teorema 5.4 concluímos que $F(u) \cap B_{\frac{1}{2}}$ é uma superfície $C^{1,\alpha}$. Isso implica que $F(u) \cap B_{\frac{\varepsilon^{\star}}{2}}$ é uma superfície $C^{1,\alpha}$. ■

5.4.2 *Lipschitz implica* $C^{1,\alpha}$

O próximo principal resultado é mais delicado e depende de teoria desenvolvida para o operador p-laplaciano. Assim, para a sua prova é necessário alguns Lemas. O primeiro é uma consequência do Lema 5.1 que profere a respeito da regularidade Lipschitz local e estimativas de não-degenerescência.

Lema 5.5 (Não-degenerescência forte)**.** *Seja* u *satisfazendo as hipóteses do Lema 5.1. Então, existem* $c > 0$ *e* $0 < r_0 < \frac{1}{2}$ *universais tais que para cada* $x \in F(u) \cap B_{\frac{1}{2}}$*,*

$$\sup_{B_r(x)} u \geq cr \qquad \forall r \in (0, r_0).$$

Demonstração. Uma vez que $F(u)$ é um gráfico de uma função Lipschitz temos que existe $c_\star > 0$ universal tal que

$$u(x) \geq c_\star \operatorname{dist}(x, F(u))$$

para todo $x \in B^+_{\frac{1}{2}}$.

Dado $x_0 \in F(u) \cap B_{\frac{1}{2}}$ pela regularidade de $F(u)$ existe um $r_0 > 0$ de tal sorte que o conjunto $B_r(x_0) \cap B^+_{\frac{1}{2}}(u)$ contém um cone $\mathcal{C}(x_0, \theta)$ com vértice em x_0 e o ângulo θ de abertura depende da constante Lipschitz da função que descreve $F(u)$ em torno de x_0. Mais ainda, esse cone só intersecta a fronteira livre em x_0.

Seja $0 < r < r_0$ e considere $B_r(x_0)$ e $B_{\frac{r}{2}}(x_0)$. Tome $y \in \left(B_r(x_0) \setminus \overline{B_{\frac{r}{2}}(x_0)}\right) \cap \mathcal{C}(x_0, \theta)$, especificamente, queremos y no eixo do cone.

Por construção, $\operatorname{dist}(y, \partial\mathcal{C}(x_0, \theta) \cap B_r(x_0)) \leq \operatorname{dist}(y, F(u))$. Mais, ainda

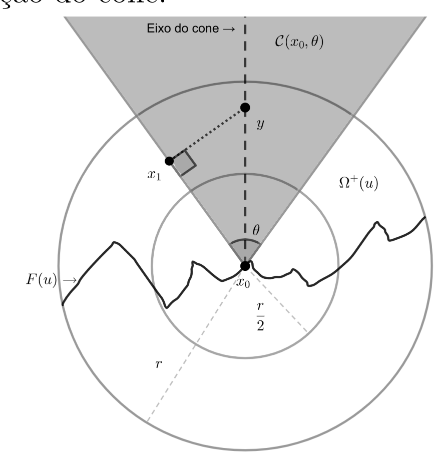
$$\operatorname{dist}(y, \partial\mathcal{C}(x_0, \theta) \cap B_r(x_0)) = |y - x_1|, \text{ para algum } x_1 \in \partial\mathcal{C}(x_0, \theta).$$

Se $x_1 = x_0$, então $|y - x_0| = \operatorname{dist}(y, F(u))$ e

$$\sup_{B_r(x_0)} u \geq u(y) \geq c_\star \operatorname{dist}(y, F(u)) = c_\star |y - x_0| \geq c_\star \frac{r}{2}.$$

Por outro lado, se $x_1 \neq x_0$. Note que os pontos x_0, y e x_1 formam um triângulo retângulo, reto em x_1. Vejamos a figura abaixo, para auxiliar na compreensão do raciocínio.

Figura 9 – Ilustração do cone.



Fonte: elaborado pelo autor.

Logo,

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{|y - x_1|}{|x_0 - y|} \iff |y - x_1| = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|x_0 - y|.$$

Portanto,

$$\sup_{B_r(x_0)} u \geq u(y) \geq c_\star \operatorname{dist}(y, F(u)) = c_\star|y - x_1| = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|x_0 - y| \geq c_\star \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{r}{2}.$$

■

Lema 5.6. *Seja* $\{f_k\}$ *sequência localmente limitada de funções reais contínuas definidas num mesmo domínio. Assuma que existe uma família* $\{\omega_k\}$ *de módulos de continuidade tal que, para uma constante* $D_1 > 0$*,*

$$|f_k(x) - f_k(y)| \leq D_1\omega_k(|x - y|), \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

e, para algum $L, D_2 > 0$*,*

$$\int_0^L \frac{\omega_k(t)}{t}\,dt \leq D_2 \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Então, a menos de uma subsequência, f_k *converge uniformemente localmente para uma função* f*.*

Demonstração. Pelo Teorema de Arzelá-Ascoli, é suficiente provar que $\{\omega_k\}$ é equicontinua. Suponha por absurdo que isso não ocorra. Então, existe uma subsequência $\{\omega_{k_j}\}$ e $t_{k_j} \to 0$ tal que, para algum $\varepsilon > 0$, $\omega_{k_j}(t_{k_j}) \geq \varepsilon$, para todo $j \in \mathbb{N}$. É claro que podemos assumir que $0 < t_{k_j} < L$. Com isso,

$$D_2 \geq \int_{t_{k_j}}^L \frac{\omega_{k_j}(t)}{t}\,dt \geq \varepsilon \int_{t_{k_j}}^L \frac{1}{t}\,dt = \varepsilon(\ln(L) - \ln(t_{k_j})).$$

Para t_{k_j} suficientemente pequeno, temos uma contradição! ■

Lema 5.7 (Compacidade)**.** *Seja* $0 < l \leq L < \infty$ *e* $u_k : \Omega \to \mathbb{R}$ *uma sequência soluções no sentido da viscosidade para*

$$\begin{cases} \Delta_{g_k} u_k = f_k & \textit{em} \quad \Omega^+(u_k), \\ |\nabla u_k| = Q_k & \textit{em} \quad F(u_k). \end{cases}$$

onde $g_k \in G(\delta, g_0, \xi_1, \xi_2)$ *com* $l \leq g_k(1) \leq L$ *e* $F(u_k)$ *é um gráfico de funções Lipschitz uniforme. Assuma ainda que*

$$\|f_k\|_{L^\infty(\Omega)} + \|Q_k - 1\|_{L^\infty(\Omega)} = o(1)$$

quando $k \to \infty$. *Então, existe* $g_\infty : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *satisfazendo* (4) *e* $l \leq g_\infty(1) \leq L$, *e* $u_\infty : \Omega \to \mathbb{R}$, *tal que*

(i) *A menos de uma subsequência* $g_k \to g_\infty$ *em* $C^1(0, \infty) \cap C^0[0, \infty)$ *e* $u_k \to u_0$ *uniformimente em compactos;*

(ii) $u_\infty \in C^{0,1}_{loc}(\Omega)$*;*

(iii) $\partial\{u_k > 0\} \to \partial\{u_\infty > 0\}$ *localmente na distância de Hausdorff;*

(iv) $\chi_{\{u_k>0\}} \to \chi_{\{u_\infty>0\}}$ *em* $L^1(B_2)$.

(v) u_∞ *é uma solução no sentido da viscosidade de*

$$\begin{cases} \Delta_{g_\infty} u_\infty = 0 & \textit{em} \quad \Omega^+(u_\infty), \\ |\nabla u_\infty| = 1 & \textit{em} \quad F(u_\infty). \end{cases}$$

Demonstração. O item *(v)*, segue *mutatis mutandis* o passo 2# do *improvement of flatness.*

Provemos *(i)*. Pelo Lema 5.1 sabemos que as u_k são localmente Lipschitz e limitadas. Então,

$$|u_k(x) - u_k(y)| \leq C_0|x - y| \quad x, y \in K \subset\subset \Omega$$

então a sequência $\{u_k\}$ é equicontinua. Pelo Teorema de Arzelá-Ascoli, existe u_∞ tal que u_k converge uniformemente. *A fortiori*, é imediato que $u_\infty \in C^{0,1}_{loc}(\Omega)$.

Agora, nos concentremos nas g_k's. Pelo Lema 2.1

$$g_k(1) \min\{t^\delta, t^{g_0}\} \leq g_k(t) \leq \max\{t^\delta, t^{g_0}\} g_k(1),$$

para todo $t > 0$ e $k \in \mathbb{N}$. Então,

$$l \min\{t^\delta, t^{g_0}\} \leq g_k(t) \leq \max\{t^\delta, t^{g_0}\} L, \tag{74}$$

para todo $t > 0$ e $k \in \mathbb{N}$.

Ora, $g_k'(t) = Q_{g_k}(t)\frac{g_k(t)}{t}$. Assim, para $l \leq x, y \leq L$ com $|x-y| < t$, segue que

$$\begin{aligned}
|g_k'(x) - g_k'(y)| &= \left|Q_{g_k}(x)\frac{g_k(x)}{x} - Q_{g_k}(y)\frac{g_k(y)}{y}\right| \\
&= \left|Q_{g_k}(x)\frac{g_k(x)}{x} - Q_{g_k}(y)\frac{g_k(x)}{x} + Q_{g_k}(y)\frac{g_k(x)}{x} - Q_{g_k}(y)\frac{g_k(y)}{y}\right| \\
&\leq \left|Q_{g_k}(x)\frac{g_k(x)}{x} - Q_{g_k}(y)\frac{g_k(x)}{x}\right| + \left|Q_{g_k}(y)\frac{g_k(x)}{x} - Q_{g_k}(s)\frac{g_k(y)}{y}\right| \\
&= |Q_{g_k}(x) - Q_{g_k}(y)|\,\frac{g_k(x)}{t} + Q_{g_k}(y)\left|\frac{g_k(x)}{x} - \frac{g_k(y)}{y}\right| \\
&\leq \omega_{g_k}^{l,L}(t)\frac{g_k(x)}{x} + g_0\left|\frac{g_k(x)}{x} - \frac{g_k(y)}{y}\right| \\
&\leq \omega_{g_k}^{l,L}(t)\frac{\max\{x^\delta, x^{g_0}\}L}{x} + g_0\tilde{\omega}_{g_k}^{l,L}(t) \\
&\leq \omega_{g_k}^{l,L}(t)\frac{\max\{L^\delta, L^{g_0}\}L}{l} + g_0\tilde{\omega}_{g_k}^{l,L}(t),
\end{aligned}$$

onde $\omega_{g_k}^{l,L}$ e $\tilde{\omega}_{g_k}^{l,L}$ são, respectivamente, os módulos de continuidade de Q_{g_k} e $\frac{g_k(t)}{t}$. Logo, denotando o modulo de continuidade de g_k' por $\bar{\omega}_{g_k'}^{l,L}$, temos que

$$\bar{\omega}_{g_k'}^{l,L}(t) \leq \omega_{g_k}^{l,L}(t)\frac{\max\{L^\delta, L^{g_0}\}L}{l} + g_0\tilde{\omega}_{g_k}^{l,L}(t).$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\left|\left(\frac{g(x)}{x}\right)'\right| &= \left|\frac{tg'(x) - g(x)}{x^2}\right| \\
&\leq \frac{xg'(x) + g(x)}{x^2} \\
&\leq \frac{g(x)(1+g_0)}{x^2} \\
&\leq \frac{\max\{L^\delta, L^{g_0}\}L(1+g_0)}{l^2}
\end{aligned}$$

para todo $x \in [l, L]$. Portanto,

$$\tilde{\omega}_{g_k}^{l,L}(t) \leq \frac{\max\{L^\delta, L^{g_0}\}L(1+g_0)}{l^2}t \qquad 0 < t < L - l.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\int_0^{L-l} \bar{\omega}_{g_k'}^{l,L}(t), dt &\leq \frac{\max\{L^\delta, L^{g_0}\}L}{l}\int_0^{L-l} \omega_{g_k}^{l,L}(t)\, dt + g_0 \int_0^{L-l} \tilde{\omega}_{g_k}^{l,L}(t)\, dt \\
&\leq \frac{\max\{L^\delta, L^{g_0}\}L}{l} C(\delta, g_0)\xi_1\left(\frac{L}{l}\right)\xi_2\left(\frac{L-l}{l}\right) \\
&+ g_0 \frac{\max\{L^\delta, L^{g_0}\}L(1+g_0)}{l^2}\int_0^{L-l} t\, dt \\
&\leq \tilde{C}C(\delta, g_0)\xi_1\left(\frac{L}{l}\right)\xi_2\left(\frac{L-l}{l}\right) + \tilde{C}(L-l)^2,
\end{aligned}$$

com $\tilde{C} := \max\left\{\frac{\max\{L^\delta, L^{g_0}\}L}{l}, g_0\frac{\max\{L^\delta, L^{g_0}\}L(1+g_0)}{l^2}\right\}$. Segue pelo Lema 5.6 que existe $\tilde{g}_\infty$ tal que a menos de uma subsequência $g_k' \to \tilde{g}_\infty$ localmente uniformemente.

Agora, defina $g_\infty(t) = \int_0^t \tilde{g}_\infty(s)\, ds$. Então pelo Teorema fundamental do cálculo e pela convergência uniforme, $g_k \to g_\infty$. Com isso, concluimos a prova de *(i)* e *(ii)*.

Para (iii), faremos uma prova por absurdo. Com efeito queremos mostrar que dado K compacto, para cada $\varepsilon > 0$ existe um $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $k > k_0$ tenhamos

$$F(u_k) \cap K \subset F(u_\infty) \cap K + B_\varepsilon(0) \tag{75}$$

$$F(u_\infty) \cap K \subset F(u_k) \cap K + B_\varepsilon(0). \tag{76}$$

A priori, suponhamos que (75) não ocorra. Isto é, existem K_0 compacto e $\varepsilon_0 > 0$ e uma subsequência $\{u_{k_j}\}$ tais que para cada j, existe um $x_j \in F(u_{k_j}) \cap K_0$ tal que

$$\text{dist}(x_j, F(u_\infty) \cap K_0) \geq \varepsilon_0.$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que ε_0 é menor ou igual a r_0 do Lema 5.5. Caso isso não ocorra, isto é $\varepsilon_0 > r_0$, poderíamos considerar r_0 no lugar de ε_0 na estimativa acima.

Pela compacidade de K_0 existe um x_0 tal que $x_j \to x_0$ a menos de uma subsequência. Então, quando $j \to \infty$ temos que

$$\text{dist}(x_0, F(u_\infty) \cap K_0) \geq \varepsilon_0. \tag{77}$$

Note que u_∞ satisfaz as hipóteses do Lema 5.1. Então, se $u_\infty(x_0) > 0$ temos que

$$u_\infty(x_0) \geq c_\star \,\text{dist}(x_0, F(u_\infty)) \geq c_\star \varepsilon_0. \tag{78}$$

Ora, $u_{k_j}(x_j) \to u_\infty(x_0)$ e $u_{k_j}(x_j) = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Então, por (78) temos uma contradição. Logo, $u_\infty(x_0) \leq 0$. Por (77), segue que $x_0 \in \{u \leq 0\}^\circ$. Além disso, u_∞ é identicamente nula em $B_{\varepsilon_0}(x_0)$.

Por fim, temos para j suficientemente grande que $|x_j - x_0| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ então,

$$B_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(x_j) \subset B_{\varepsilon_0}(x_0).$$

Pelo Lema 5.5,

$$\sup_{B_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(x_j)} u_{k_j} \geq c\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Da convergência uniforme segue o absurdo. Para $c\frac{\varepsilon_0}{4}$, existe j suficientemente grande

$$\sup_{B_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(x_j)} u_{k_j} < c\frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Para o caso em que (76) não ocorra, a demonstração segue *mutatis mutandis* ao caso checado acima.

Por fim, vamos averiguar *(iv)*. Seja $\varepsilon > 0$ considere $B_2 \cap \{u_\infty > \varepsilon\}$. Da convergência uniforme existe que $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|u_k - u_\infty| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Em particular, para $k > k_0$ segue que em $B_2 \cap \{u_\infty > \varepsilon\}$, $u_k \geq \frac{\varepsilon}{2}$¿0. Então, tendo em vista, $k > k_0$

$$\begin{aligned}
\int_{B_2} |\chi_{\{u_\infty>0\}} - \chi_{\{u_k>0\}}|\, dx &= \int_{B_2\cap\{u_\infty>\varepsilon\}} |\chi_{\{u_\infty>0\}} - \chi_{\{u_k>0\}}|\, dx + \int_{B_2\cap\{u_\infty\leq\varepsilon\}} |\chi_{\{u_\infty>0\}} - \chi_{\{u_k>0\}}|\, dx \\
&= \int_{B_2\cap\{u_\infty\leq\varepsilon\}} |\chi_{\{u_\infty>0\}} - \chi_{\{u_k>0\}}|\, dx \\
&= \int_{B_2\cap\{0<u_\infty\leq\varepsilon\}} |\chi_{\{u_\infty>0\}} - \chi_{\{u_k>0\}}|\, dx \\
&+ \int_{B_2\cap\{u_\infty\leq 0\}} |\chi_{\{u_\infty>0\}} - \chi_{\{u_k>0\}}|\, dx \\
&= |B_2 \cap \{u_\infty \leq 0\} \cap \{u_k > 0\}| + |B_2 \cap \{0 < u_\infty \leq \varepsilon\} \cap \{u_k \leq 0\}|.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\limsup_{k\to\infty} \int_{B_2} |\chi_{\{u_\infty>0\}} - \chi_{\{u_k>0\}}|\, dx = 0$$

Portanto, vale *(iv)*. ■

Para o próximo Lema seja $p \in (1, \infty)$ e o p-laplaciano

$$\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u).$$

Lema 5.8 (Lema de aproximação). *Seja* $p \in (1, \infty)$, $\varepsilon^\star \in (0, 1)$, $L > 0$ *e* $u : B_2 \to \mathbb{R}$

uma solução no sentido da viscosidade de

$$\begin{cases} \Delta_g u = 0 & em \quad B_2^+(u), \\ |\nabla u| = 1 & em \quad F(u). \end{cases}$$

onde g *satisfaz* (4), $g \in G(\delta, g_0, \xi_1, \xi_2)$, $g(1) = L$ *e* $F(u)$ *é um gráfico Lipschitz. Então, existe* $v : B_2 \to \mathbb{R}$ *uma solução no sentido da viscosidade para*

$$\begin{cases} \Delta_p v = 0 & em \quad B_2^+(v), \\ |\nabla v| = 1 & em \quad F(v). \end{cases} \tag{79}$$

e $\mu_0 = \mu_0(p, \varepsilon^\star, L, \xi_1, \xi_2) > 0$ *tal que se*

$$\max\{|p - (1 + \delta)|, |p - (1 + g_0)|\} \leq \mu_0$$

então,

$$||u - v||_{L^\infty(B_1)} \leq \varepsilon^\star.$$

Em particular, $F(v)$ *é localmente Lipschitz.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que encontramos uma sequência $0 < \delta_k \leq g_{0,k} < \infty$ tal que

$$\max\{|p - (1 + \delta_k)|, |p - (1 + g_{0,k})|\} \leq \rho_k, \quad \rho_k \to 0 \tag{80}$$

e

$$\begin{cases} \Delta_{g_k} u_k = 0 & \text{em} \quad B_2^+(u_k), \\ |\nabla u_k| = 1 & \text{em} \quad F(u_k). \end{cases}$$

onde g_k satisfaz (4), $g_k \in G(\delta, g_0, \xi_1, \xi_2)$, $g_k(1) = L$ e $F(u_k)$ é um gráfico Lipschitz, mas para qualquer solução de (79), existe $\varepsilon^\star > 0$ tal que

$$||u - v||_{L^\infty(B_1)} > \varepsilon^\star. \tag{81}$$

Pelo Lema 2.1 sabemos que

$$g_k(t) \min\{s^{\delta_k}, s^{g_{0,k}}\} \leq g_k(st) \leq \max\{s^{\delta_k}, s^{g_{0,k}}\} g_k(t).$$

Logo, fazendo $k \to \infty$

$$g_\infty(t) s^{p-1} \leq g_\infty(st) \leq s^{p-1} g_\infty(t).$$

Assim, por (80), conclui-se que

$$g_\infty(s) = L s^{p-1}.$$

Agora, pelo Lema 5.7 existe $u_\infty : B_2 \to \mathbb{R}$ uma solução no sentido da viscosidade para

$$\Delta_{g_\infty} u_\infty = L\Delta_p u_\infty = 0, \quad \text{em} \quad B_2^+(u_\infty),$$

onde $u_k \to u_\infty$ uniformimente em compactos de B_2 e $F(u_\infty)$ é localmente Lipschitz.

Seja $x_0 \in F(u_\infty)$ e $\varphi \in C^2(B_2)$ tal que φ^+ toca u_∞ estritamente por baixo em x_0 e $\nabla\varphi(x_0) \neq 0$. A prova onde φ^+ toca por cima u_∞ segue de maneira similar. Claramente, existe uma vizinhança D de x_0 tal que $\nabla\varphi \neq 0$. Mais uma vez, usando o Lema 5.7 podemos encontrar $x_k \in F(u_k) \cap D$ e constantes $c_k \to 0$ tais que $x_k \to x_0$ e

$$u_k(x_k) = \varphi_k^+(x_k) := (\varphi(x_k) + c_k)^+$$

e $u_k \geq \varphi_k^+$ em uma vizinhança de x_k.

Assim, pela condição de Fronteira livre das u_k's nós temos

$$|\nabla\varphi(x_k)| = |\nabla\varphi_k(x_k)| \leq 1.$$

Fazendo $k \to \infty$, u_∞ é solução no sentido da viscosidade de (79). Mas para k suficientemente grande

$$||u_k - u_\infty||_{L^\infty(B_1)} < \varepsilon^\star.$$

Uma contradição com isso segue o resultado. ■

Lema 5.9 (One-phase solution). *Seja* $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *solução de*

$$\begin{cases} \Delta_p u_0 = 0 & \textit{em} \quad \Omega^+(u) \\ \nabla u_0 \cdot \nu = 1 & \textit{em} \quad F(u), \end{cases} \tag{82}$$

e $F(u_0) = \{(x', x_n);\ h(x') = x_n,\ x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}$ *com* $\mathrm{Lip}(h) < \infty$. *Então,* h *é linear e* $u = (x_n)^+$ *a menos de rotações.*

Demonstração. Assumamos sem perda de generalidade que $0 \in F(u_0)$. Do contrário, definiremos $v(x) = u(x) - u(0)$.

Por Lewis e Nyström (2012), desde que u_0 é solução em B_2 de (82) então, em B_1, $F(u_0)$ é $C^{1,\alpha}$. Logo,

$$|h(x') - h(0) - \nabla h \cdot x'| \leq C|x'|^{1+\alpha}$$

com $C > 0$ universal e $x' \in B_1'$.

Seja $\lambda > 0$, e defina $v_\lambda(x) = \frac{u_0(\lambda x)}{\lambda}$, temos que v_λ é solução global de

$$\begin{cases} \Delta_p v_\lambda = 0 & \text{em} \quad \Omega^+(v_\lambda) \\ \nabla v_\lambda \cdot \nu = 1 & \text{em} \quad F(v_\lambda). \end{cases}$$

Então, $F(v_\lambda) = \{(\lambda x', \lambda x_n);\ h(\lambda x') = \lambda x_n\}$. Defina, $h_\lambda(x) = \dfrac{h(\lambda x')}{\lambda}$. Assim, v_λ é solução em B_2, logo, em B_1

$$\begin{aligned} |h_\lambda(x') - h_\lambda(0) - \nabla h(0)\cdot x'| &\leq C|x'|^{1+\alpha} \\ \frac{1}{\lambda}|h(\lambda x') - h(0) - \nabla h(0)\cdot \lambda x'| &\leq C|x'|^{1+\alpha} \\ |h(\lambda x') - h(0) - \nabla h(0)\cdot \lambda x'| &\leq C\lambda \frac{|\lambda x'|^{1+\alpha}}{\lambda^{1+\alpha}}. \end{aligned}$$

Logo, para $y' \in B'_\lambda$,

$$|h(y') - h(0) - \nabla h(0)\cdot y'| \leq C\frac{|y'|^{1+\alpha}}{\lambda^\alpha}.$$

Fazendo $\lambda \to \infty$, temos que h é linear. Como $\nabla u_0 \cdot \nu = 1$ em $F(u_0)$ então, a menos de rotação $u_0 = (x_n)^+$. ■

Teorema 5.6 (Lipschitz implica $C^{1,\alpha}$). *Seja* u *uma solução no sentido da viscosidade não negativa para* (2) *onde* $g \in G(\delta, g_0, \xi_1, \xi_2)$. *Assuma que* $0 \in F(u)$ *e* $Q(0) > 0$. *Existe uma constante universal* $\mu_0 \in (0,1)$ *depende somente de* $n, \delta, \beta, g_0, \xi_1$ *e* ξ_2 *tal que se* $g_0 - \delta \leq \mu_0$ *e* $F(u)$ *é o gráfico Lipschitz em uma vizinhança de 0, então* $F(u)$ *é* $C^{1,\alpha}$ *é uma (menor) vizinhança de 0.*

Demonstração. Seja $\tilde{\varepsilon} > 0$ a constante universal do Teorema 5.4 e $\mu\left(\delta, \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}\right)$ como no Lema 5.8. Sem perda de generalidade $Q(0) = 1$. Suponha ainda que $g_0 - \delta \leq \mu_0$. Considere

$$u_k(x) := u_{\rho_k}(x) = \frac{u(\rho_k x)}{\rho_k},$$

com $\rho_k \to 0$ quando $k \to \infty$. Cada u_k é solução de

$$\begin{cases} \Delta_g u_k = f_k & \text{em} \quad \Omega^+(u_k), \\ |\nabla u_k| = Q_k & \text{em} \quad F(u_k), \end{cases}$$

com

$$f_k(x) := \rho_k f(\rho_k x) \quad \text{e} \quad Q_k(x) := Q(\rho_k x).$$

Mais ainda, para k suficientemente grande

$$||f_k||_{L^\infty(B_1)} = \rho_k ||f||_{L^\infty} \leq \tilde{\varepsilon},$$

$$|Q_k(x) - 1| = |Q_k(x) - Q_k(0)| \leq \rho_k^{\beta}[Q]_{C^{0,\beta}(B_1)} \leq \tilde{\varepsilon}.$$

Assim, pelo Lema 5.8, temos a menos de uma subsequência, $u_k \to u_\infty$ uniformemente em compactos em $\mathbb{R}^n$, e o limite blow-up u_∞ resolve o problema de fronteira livre homogêneo global de uma fase

$$\begin{cases} \Delta_g u_\infty = 0 & \text{em} \quad \{u_\infty > 0\} \\ |\nabla u_\infty| = 1 & \text{em} \quad F(u_\infty). \end{cases}$$

Desde que $F(u)$ é um gráfico Lipschitz em uma vizinhança de 0 nós também temos que $F(u_\infty)$ é um gráfico de uma função Lipschitz. Agora, considere $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ solução no sentido da viscosidade de

$$\begin{cases} \Delta_p v = 0 & \text{em} \quad \{v > 0\} \\ |\nabla v| = 1 & \text{em} \quad F(v). \end{cases}$$

onde $p = 1 + \frac{g_0+\delta}{2}$. Em particular, pelo Lema 5.7

$$||u_\infty - v||_{L^\infty} < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}$$

e $F(v)$ é Lipschitz. Para k suficientemente grande

$$||u_k - v||_{L^\infty(B_1)} \leq \tilde{\varepsilon}.$$

Assim, pelo Lema 5.9 segue que v é uma one-phase solution, isto é a menos de rotações

$$v(x) = x_n^+.$$

Neste caso, u_k é $\tilde{\varepsilon}$-flat em B_1, ou seja,

$$(x_n - \tilde{\varepsilon})^+ \leq u(x) \leq (x_n + \tilde{\varepsilon})^+, \quad x \in B_1.$$

Assim, podemos aplicar o Teorema 5.4 e concluir que $F(u)$ é $C^{1,\alpha}$ para algum $\alpha \in (0, 1)$.

■

6 CONCLUSÃO

A nova abordagem desenvolvida por Daniela de Silva para problemas de fronteira livre, abrange um novo rol de operadores. Contudo, nem sempre é possível obtermos os resultados na mesma direção que De Silva (2011). Isso ocorre, naturalmente, devido as limitações impostas pelo operador e a disponibilidade dos ingredientes necessários. Especialmente, para o Teorema Lipschitz implica $C^{1,\alpha}$, que a então argumentação depende da *one phase solution* para o problema de fronteira livre com o devido operador.

No nosso problema, conseguimos de maneira satisfatória, o Teorema *Flatness* implica $C^{1,\alpha}$, e com respeito ao Lipschitz implica $C^{1,\alpha}$, conseguimos prová-lo impondo condições sobre g e $\delta - g_0$. Dessa forma, conseguimos utilizar a teoria desenvolvida por Lewis e Nyström (2012), para o p-laplaciano e assim, chegamos nas condições do *Flatness* implica $C^{1,\alpha}$.

Um outro obstáculo a ser superado, é saber se soluções fracas são soluções no sentido da viscosidade para o nosso operador. Pois essa nova abordagem se faz para soluções no sentido da viscosidade. Como o g-laplaciano é da forma divergente, é natural que se tenham resultados importantes para as soluções oriundas do sentido das distribuições. A título de exemplo, a desigualdade de Harnack para o g-laplaciano é válida para soluções no sentido das distribuições. Devido a equivalência entre esses tipos de soluções para o operador em questão, podemos recuperar as ferramentas necessárias e dar os demais passos.

Em suma, o resultado chave é o *Improvement of flatness* que é usado de forma recorrente na demonstração do primeiro resultado principal, e para obtê-lo é necessário a desigualdade de Harnack. Além desse importantíssimo teorema, as barreira de Pucci, bem elucidadas em Braga e Moreira (2018), moram no coração das demonstrações dos resultados estruturais para o g-laplaciano.

REFERÊNCIAS

ADAMS, Robert A.; FOURNIER, John J.F. **Sobolev spaces**. Amsterdam: Academic Press, 2003.

ALT, Hans Wilhelm; CAFFARELLI, Luis A; FRIEDMAN, Avner. Variational problems with two phases and their free boundaries. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 282, n. 2, p. 431–461, 1984.

ASSARÉ, Patativa do. **Cante lá que eu canto cá**: filosofia de um trovador nordestino. São Paulo: Vozes, 2008.

BOZHIDAR, Velichkov. **Regularity of the one-phase free boundaries**. 2019.

BRAGA, J. Ederson M. **Problemas variacionais de fronteira livre com duas fases e resultados do tipo Phragmén-Lindelof regidos por equações elípticas não lineares singulares/degeneradas**. 2015. 126 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Fortaleza, 2015.

BRAGA, J. Ederson M. On the Lipschitz regularity and asymptotic behaviour of the free boundary for classes of minima of inhomogeneous two-phase Alt–Caffarelli functionals in Orlicz spaces. **Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923-)**, v. 197, n. 6, p. 1885–1921, 2018.

BRAGA, J Ederson M. Free boundary theory for non-homogeneous fully non-linear equations with unbounded ingredients and quadratic growth in the gradient. **The Journal of Geometric Analysis**, v. 31, n. 4, p. 3523–3555, 2021.

BRAGA, J Ederson M; LEITÃO, Raimundo A; OLIVEIRA, J Erivamberto L. Free boundary theory for singular/degenerate nonlinear equations with right hand side: A non-variational approach. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, v. 59, n. 2, p. 1–29, 2020.

BRAGA, J Ederson M; MOREIRA, Diego. Inhomogeneous Hopf–Oleĭnik Lemma and regularity of semiconvex supersolutions via new barriers for the Pucci extremal operators. **Advances in Mathematics**, v. 334, p. 184–242, 2018.

CAFFARELLI, Luis; Crandall, Michael G; Kocan, Maciej; Świech, A. On viscosity solutions of fully nonlinear equations with measurable ingredients. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, v. 49, n. 4, p. 365–398, 1996.

CAFFARELLI, Luis A. The regularity of free boundaries in higher dimensions. **Acta Mathematica**, v. 139, n. 1, p. 155–184, 1977.

CAFFARELLI, Luis A. Compactness methods in free boundary problems.

Communications in Partial Differential Equations, v. 5, n. 4, p. 427–448, 1980.

CAFFARELLI, Luis A. A Harnack inequality approach to the regularity of free boundaries. Part I: Lipschitz free boundaries are $C^{1,\alpha}$. **Revista Matematica Iberoamericana**, v. 3, n. 2, p. 139–162, 1987.

CAFFARELLI, Luis A. A Harnack inequality approach to the regularity of free boundaries. Part III: existence theory, compactness, and dependence on X. **Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze**, v. 15, n. 4, p. 583–602, 1988.

CAFFARELLI, Luis A. A harnack inequality approach to the regularity of free boundaries part ii: Flat free boundaries are lipschitz. **Communications on pure and applied mathematics**, v. 42, n. 1, p. 55–78, 1989a.

CAFFARELLI, Luis A. Interior a Priori Estimates for Solutions of Fully Non-Linear Equations. **Annals of Mathematics**, v. 130, n. 1, p. 189–213, 1989b.

CAFFARELLI, Luis A.; ALT, Hans Wilhelm. Existence and regularity for a minimum problem with free boundary. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, 1981.

CAFFARELLI, Luis A.; CABRÉ, Xavier. **Fully nonlinear elliptic equations**, v. 43. American Mathematical Soc., 1995.

CAFFARELLI, Luis A; SALSA, Sandro. **A geometric approach to free boundary problems**, v. 68. American Mathematical Soc., 2005.

CAFFARELLI, Luis A; SHAHGHOLIAN, Henrik. Regularity of free boundaries a heuristic retro. **Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 373, n. 2050, p. 20150209, 2015.

CALDERÓN, Alberto.; ZYGMUND, Antoni. Local properties of solutions of elliptic partial differential equations. **Studia Mathematica**, v. 20, n. 2, p. 181–225, 1961.

CHEN, Gui-Qiang; SHAHGHOLIAN, Henrik; VAZQUEZ, Juan-Luis. Free boundary problems: the forefront of current and future developments. **Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 373, n. 2050, 2015.

COZZI, Matteo; FIGALLI, Alessio. Regularity theory for local and nonlocal minimal surfaces: an overview. **Nonlocal and nonlinear diffusions and interactions: new methods and directions**, p. 117–158, 2017.

CRANDALL, MG; KOCAN, M; SORAVIA, P; SWIECH, A. On the equivalence of various weak notions of solutions of elliptic PDEs with measurable ingredients. **Pitman Research Notes in Mathematics Series**, p. 136–162, 1996.

CRANDALL, Michael G.; ISHII, Hitoshi.; LIONS, Pierre-Louis. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. **Bulletin of the American mathematical society**, v. 27, n. 1, p. 1–67, 1992.

CRANDALL, Michael G.; LIONS, Pierre-Louis. Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 277, n. 1, p. 1–42, 1983.

DE SILVA, Daniela. Free boundary regularity for a problem with right hand side. **Interfaces and Free Boundaries**, v. 13, n. 2, p. 223–238, 2011.

EVANS, Lawrence C; GARIEPY, Ronald F. **Measure theory and fine properties of functions**. Boca Raton, FL: CRC press, 2015.

FANG, Fei; ZHOU, Zheng. Relationship between solutions to a quasilinear elliptic equation in Orlicz spaces. **Electron. J. Differential Equations**, v. 265, n. 10, 2014.

FIGALLI, Alessio; SHAHGHOLIAN, Henrik. An overview of unconstrained free boundary problems. **Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 373, n. 2050, p. 20140281, 2015.

FRIEDMAN, Avner; LAI, Xiulan. Free boundary problems associated with cancer treatment by combination therapy. **Discrete & Continuous Dynamical Systems**, v. 39, n. 12, p. 6825, 2019.

GILBARG, David; TRUDINGER, Neil S. **Elliptic partial differential equations of second order**, v. 224. springer, 2001.

GIUSTI, Enrico. **Minimal surfaces and functions of bounded variation**, v. 80. Boston: Birkhäuser, 1984.

KRASNOSEL'SKII, M. A.; RUTICKII, Ya. B. **Convex Functions and Orlicz Spaces**. Groningen: P. Noordhoff, 1961.

LEITÃO, Raimundo; RICARTE, Gleydson C. Free boundary regularity for a degenerate problem with right hand side. **Interfaces and Free Boundaries**, v. 20, n. 4, p. 577–595, 2018.

LEWIS, John L.; NYSTRÖM, Kaj. Regularity of flat free boundaries in two-phase problems for the p-Laplace operator. **Annales de l'I.H.P. Analyse non linéaire**, v. 29, n. 1, p. 83–108, 2012.

LIEBERMAN, Gary. On the natural generalization of the natural conditions of Ladyzhenskaya and Ural'tseva. **Banach Center Publications**, v. 27, n. 2, p. 295–308, 1992.

MARTÍNEZ, Sandra; WOLANSKI, Noemi. A minimum problem with free boundary in Orlicz spaces. **Advances in Mathematics**, v. 218, n. 6, p. 1914–1971, 2008.

SAVIN, Ovidiu. Small perturbation solutions for elliptic equations. **Communications in Partial Differential Equations**, v. 32, n. 4, p. 557–578, 2007.

WINTER, Niki. $W^{2,p}$ and $W^{1,p}$-Estimates at the Boundary for Solutions of Fully Nonlinear, Uniformly Elliptic Equations. **Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen**, v. 28, n. 2, p. 129–164, 2009.