UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ – UFC
INSTITUTO DE CULTURA E ARTE – ICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

FRANCISCO GOMES MARTINS

A LÓGICA DAS ENTIDADES INTENSIONAIS

FORTALEZA
2012

FRANCISCO GOMES MARTINS

A LÓGICA DAS ENTIDADES INTENSIONAIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Universidade Federal do Ceará, do Instituto de Cultura e Arte (ICA) como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Filosofia Contemporânea.

Orientador: Prof. Dr. André Leclerc

FORTALEZA

2012

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca de Ciências Humanas

M343l Martins, Francisco Gomes.
A lógica das entidades intensionais / Francisco Gomes Martins. – 2012.
129 f. , enc. ; 30 cm.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Instituto de Cultura e Arte, Departamento de Filosofia, Programa de Pós-Graduação em Filosofia, Fortaleza, 2012.
Área de Concentração: Lógica.
Orientação: Prof. Dr. André Leclerc.

1.Frege,Gottlob,1848-1925 – Crítica e interpretação. 2.Church,Alonzo,1903-1995 – Crítica e interpretação. 3.Carnap,Rudolf,1891-1970 – Crítica e interpretação. 4.Quine,W.V.(Willard Van Orman),1908-2000 – Crítica e interpretação. 5.Lógica simbólica e matemática. 6.Intensionalidade (Filosofia). 7.Semântica(Filosofia). 8.Linguagem e línguas – Filosofia. I. Título.

CDD 160

FRANCISCO GOMES MARTINS

A LÓGICA DAS ENTIDADES INTENSIONAIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Universidade Federal do Ceará, do Instituto de Cultura e Arte (ICA) como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Filosofia Contemporânea.

Aprovada em 29 de fevereiro de 2012.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. André Leclerc (Orientador)
Universidade Federal do Ceará – ICA

Prof. Dr. Marco Caron Ruffino
Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ

Prof. Dr. Carlos Eduardo Fisch de Brito
Universidade Federal do Ceará – Computação

AGRADECIMENTO

Gratidão, teu nome é André Leclerc!

Ao Pedro e Carolina, jaya jaya!.

“O animal satisfeito dorme.
Não convém fazer escândalo de começo; só aos poucos é que o escuro é claro”.
Guimarães Rosa.

RESUMO

Um grave problema presente quando aplicamos semântica composicional, que atribui simples valores de verdade a frases, é que quando essas seqüências estão presentes em alguns contextos específicos, a substituição de certas expressões com a mesma referência pode cambiar o valor de verdade da frase maior ou então impedir que inferências válidas sejam realizadas. Por exemplo, da afirmação "Pedro acredita que Alexandre o Grande foi aluno de Aristóteles", não se pode inferir corretamente neste contexto de crença que a substituição de "Alexandre o grande" por "o vencedor da batalha de Arbela" seja válida porque eventualmente Pedro pode não saber que "Alexandre o Grande é o vencedor da batalha de Arbela" e por isso a verdade das premissas não garante a verdade da conclusão: "Pedro acredita que o vencedor da batalha de Arbela foi aluno de Aristóteles". A conclusão não se segue pois ela não depende da relação de identidade efetiva entre "Alexandre o Grande" e "O vencedor da Arbela", e sim depende, de maneira contingente, do conjunto de crenças de Pedro; ou ainda, segundo Frege, depende do sentido que Pedro associa a descrição "Alexandre o Grande". Em contextos intensionais a verdade da conclusão (após substituição) depende de uma maneira específica da maneira de conceber o nome em questão, por isso a substituição entre nomes cujo referente é o mesmo, mas que diferem em sentido, não funciona em todos os casos. O fato é que Frege nunca estabeleceu critérios de identidade para o sentido (*Sinn*), apenas reservou-se a declarar simplesmente que o sentido é o "modo de apresentação" da referência. Pretendemos apresentar critérios de identidade para o sentido em geral, e em contextos intensionais, em particular. Os sucessores de Frege, dentre eles o lógico Alonzo Church e o filósofo Rudolf Carnap foram os primeiros a estabelecer que duas expressões têm o mesmo sentido se e somente se são *sinonimamente isomorfas* e *intensionalmente isomorfas*, respectivamente. Tais critérios devem ser entendidos à luz dos pressupostos lógicos de Church em sua *Lógica do Sentido e da Denotação* (LSD) e das idéias de Carnap – muitas delas constituintes do programa filosófico do Positivismo lógico, em seu livro *Meaning and Necessity*. Mais recentemente, Pavel Tichý estabeleceu de maneira mais exata o que é o sentido e sua identidade através do *Procedural isomorphism* o qual constitui um dos fundamentos da *Lógica Intensional Transparente* (TIL).

Palavras – chave: lógica intensional, intensão/extensão, isomorfismo, Lógica Intensional Transparente.

ABSTRACT

A feature of the distinction between extensionalism and intensionalism, which has been widely taken as a criterion to separate the two positions, is that within an extensionalist logic, substitution is possible salva veritate (that is, without thereby changing the truth-value of the statement concerned) with respect to identical instances of some basic logical form – and in an intensionalist logic it is not. The different logical forms with respect to which such substitution might take place accounts for some of the variety of different extensionalisms on offer in the current philosophical landscape. So our starting-point is Frege's puzzle. This question is frequently accepted as one of the foundations of modern semantics. To explain why a true sentence of the form "a = b" can be informative, unlike a sentence of the form "a = a", Frege introduced an entity standing between an expression and the object denoted (bezeichnet) by the expression. He named this entity Sinn (sense) and explained the informative character of the true "a=b"-shaped sentences by saying that 'a' and 'b' denote one and the same object but differ in expressing (ausdrücken) distinct senses. The problem, though, is that Frege never defined sense. The conception of senses as procedures that is developed here has much in common with a number of other accounts that represent meanings, also, as structured objects of various kinds, though not necessarily as procedures. In the modern literature, this idea goes back to Rudolph Carnap's (1947) notion of intensional isomorphism. Church in (1954) constructs an example of expressions that are intensionally isomorphic according to Carnap's definition (i.e., expressions that share the same structure and whose parts are necessarily equivalent), but which fail to satisfy the principle of substitutability. The problem Church tackled is made possible by Carnap's principle of tolerance (which itself is plausible). We are free to introduce into a language syntactically simple expressions which denote the same intension in different ways and thus fail to be synonymous. Tichý's objectualist take on 'operation-processes' may be seen in part as linguistic structures transposed into an objectual key; operations, procedures, structures are not fundamentally and inherently syntactic items, but fully-fledged, non-linguistic entities, namely, constructions.

Keywords: intensional logic, extension-intension, isomorphism, Transparent Intensional Logic

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A identidade é um princípio fundamental da lógica formal. A equação $a = a$ expressa uma instância deste princípio. Nesta fórmula "*a*" é uma constante que se refere a um objeto, o possível argumento de uma aplicação funcional. O mesmo principio pode ser geralmente expresso pela fórmula $\forall x(x = x)$, em que "*x*" denota uma variável sobre o domínio dos objetos de um dado contexto de discurso. O signo "=" que aparece na expressão formal do princípio de identidade denota efetivamente a identidade. Mas identidade de quê? A resposta parece óbvia: a identidade do referente do signo "*a*" consigo próprio, a auto-identidade do objeto denotado por "*a*". Essa instância do princípio de identidade nos diz, então, que, no seu contexto de validade, qualquer ocorrência do signo "*a*" denota sempre a mesma coisa. Mas isso levanta a questão: o que nos permite tratar o referente de "*a*" como uma entidade permanente capaz ela própria, e não apenas algo simplesmente igual a ela, de preencher a função identificatória de "*a*" em múltiplas e diversas ocorrências? Simplesmente, não podemos requerer que "*a*" denote sempre a mesma coisa se uma coisa não permaneça a mesma ao longo de diferentes episódios de referência de "*a*". Assim, o princípio da auto-identidade depende de outro e que poderíamos expressar da seguinte forma: para que uma constante lingüística possa denotar sempre a *mesma coisa* é necessário que alguma coisa permaneça essencialmente imutável ao longo do tempo. Só em função da existência desse ponto fixo é que distintos usos de "*a*" podem ser vistos distintas instâncias de referência à *mesma* objetualidade.

A importância do princípio de identidade parece agora clara: ele garante a estabilidade dos conteúdos objetivos que experimentamos ou a respeito dos quais pensamos, sejam eles os objetos das ciências empíricas, as idealidades da Matemática, os juízos, deduções e estruturas da Lógica, em suma, os objetos de qualquer ciência ou discurso racional. Em seu projeto de reduzir a aritmética à lógica Frege se deparou com o problema da identidade, em particular, como esta pode ser informativa. O problema que ele identifica não é específico da identidade em si pois se aceitarmos a sua tese de que a referência de uma frase é um valor de verdade, então teríamos exatamente o mesmo problema para diferentes proposições que expressam a mesma coisa, ou seja, como elas podem ser informativas se todas fazem referência a mesma coisa? E a resposta está de fato no sentido, conforme ele nos deixa saber no último parágrafo de *Sentido e Referência*

> Se, em geral, percebemos uma diferença no valor cognitivo de *"a = a"* e *"a= b",* isto se explica pelo fato de que, para determinar o valor cognitivo de uma frase, é tão relevante o sentido da frase, isto é, o pensamento por ela expresso, quanto sua referência, a saber, seu valor de verdade. Se *a = b,* então a referência de *"b"* é a mesma que a de *"a",* e portanto também o valor de verdade de *"a = b"* é mesmo que o de *"a = a".* Apesar disso, o sentido de *"b"* pode diferir do sentido de *"a"* e, portanto, o pensamento expresso por *"a = b"* pode diferir do pensamento expresso por *"a = a".* Nesse caso, as duas frases não têm o mesmo valor cognitivo. Se, como anteriormente, entendemos por "juízo" o movimento de um pensamento para seu valor de verdade, então podemos dizer também que os juízos são distintos (FREGE, 1978, p. 157).

A informação em frases ladeadas pela identidade é o resultado de um sentido em particular relacionado a uma denotação em particular. E para que a equação “a=b” seja informativa é importante que o sentido da equação inclua de alguma forma o sentido de seus sinais. E isto diz algo sobre o sentido de igualdade[1]. A solução de Frege parece satisfatória, mas o fato é que ele nunca deixou claro o que vem a ser o sentido. Não tardou e rapidamente alguns filósofos pretenderam esclarecer o *Sinn*, mesmo que para issso ajustes pudessem ser feitos em alguns outros conceitos diretamente relacionados. A esta tarefa dedicaram-se Alonzo Church e Rudolf Carnap. Se em termos cronológicos Frege foi “o pai da lógica intensional”, Church e Carnap foram seus pupilos mais destacados. As contribuições de Church no campo da lógica simbólica e de Carnap na semantica formal ainda não foram corretamente avaliadas.

Carnap fará uso em *Meaning and* N*ecessity* (1947) da noção *de descrição de estado*. Dedicaremos nosso terceiro capitulo à exposição da semântica de Carnap em especial atenção ao *isomorfismo intensional*, isto é ao critério de identidade das intensões em contextos de crença. Enquanto à extensão corresponde a classe a que determinado objeto está incluído, a intensão de um termo é a propriedade que este objeto possui. Mas como essas duas noções são captadas e expressas na linguagem? A intensão está relacionada à equivalência lógica de expressões, ou seja, Carnap apresenta um critério extensional: mesmo valor de verdade em todos os mundos possíveis. Na seqüência apresentaremos a crítica de Quine à analiticidade de Carnap e a todo e qualquer projeto de edificar uma lógica intensional. Analisaremos os dois argumentos de Quine contra as entidades intensionais e como eles são facilmente contornáveis.

[1] É um erro associar o problema da identidade ao paradigmático exemplo da “Estrela da manha” e “Estrela da tarde”. A questão aqui é saber o sentido dessas expressões, ou dos nomes. Mas, claramente pelo problema exposto, é fácil notar que Frege queria adquirir uma compreensão não-trivial da identidade.

Church, por sua vez, certamente influenciado pelo formalismo de Hilbert optará pela axiomatização da distinção fregeana sentido/referencia. Para tanto fará uso da noção de função computável no seu lambda cálculo (doravante, λ – cálculo). O λ – cálculo foi desenvolvido por Church no inicio da década de 1930 como parte de um sistema de lógica de ordem superior com o propósito de prover uma fundamentação para a matemática dentro da filosofia da escola logicista de Peano – Russell. O λ – cálculo é uma teoria de funções onde ressurge o conceito de função como regra num processo que leva um argumento ao valor correspondente através de uma transformação imposta pela definição da função. Essa maneira de encarar funções restaurava a conceituação pré – Dirichlet o qual defendia a interpretação de função como grafo ou seja um conjunto dos pares argumento – valor. O próprio Chuch juntamente com Barkley Rosser e Stephen Kleene foram os grandes responsáveis pelo desenvolvimento do λ – cálculo. Ao usar o λ – cálculo, Church propôs uma formalização da noção de computabilidade efetiva pelo conceito de definibilidade. Kleene mostrou que ser definível no λ – cálculo é equivalente a recursividade de Gödel-Herbrand. Concomitante Church formulou a sua tese associando recursividade com a formalização adequada do conceito de computabilidade efetiva.

O λ – cálculo usa apenas quatro elementos básicos nas suas construções: variáveis, constantes, aplicações e abstrações. Sua riqueza vem da liberdade de criar e aplicar funções. Suponhamos que dada uma seqüencia finita de símbolos distintos chamados variáveis e uma seqüencia infinita ou vazia de símbolos distintos chamados constantes. Quando a sequência de constantes é vazia o sistema será chamado puro. O símbolo de igualdade semântica "=" expressa exatamente o fato dos termos terem o mesmo sentido embora possam ser termos sintaticamente distintos. Todo nosso segundo capitulo será dedicado a Church. Nosso principal objetivo e apresentar o *isomorfismo sinonímico* enquanto critério de identidade do sentido.

Em comum às semânticas de Carnap – Church está uma clara e precisa separação entre conteúdo e forma, pois ambos fizeram uso da noção de *isomorfismo:* na matemática dizemos, por exemplo, que dois sistemas algébricos são considerados o mesmo se eles forem isomorfos, isto é, se eles tiverem mesma "forma" do ponto de vista da álgebra, sem importar a natureza particular de cada um deles. Não encontramos nem em Church nem em Carnap uma definição para o sentido mas apenas sob qual condição avaliá-lo. As investidas de Church –

Carnap, apesar de representar o *mainstream* da lógica intensional, são incompletas pois facilmente poderiam ser melhoradas.

O ganho de clareza foi alcançado por Pavel Tichý em sua Lógica Intensional Transparente (TIL). Vemos esboçar um sistema de lógica no qual a distinção estabelecida por Frege entre sentido/referencia é precisamente executada. Subjaz à TIL a idéia de *construção,* em ultima análise uma espécie de algoritmo, cujo cálculo e resultado são devida e separadamente explicitados. Faremos apenas uma apresentação sumária. Na TIL o termo "denotação" para o objeto (se houver) é construído pelo sentido. A "referência" é usada para o objeto (se houver) que passa a ser o valor da intensão denotada por uma expressão empírica no mundo atual. A denotação é um objeto definido a priori e construido pelo sentido. Pela primeira vez temos uma lógica que não apenas diz o que é mas como é que o sentido é dado. Não há, até o momento, nenhuma teoria rival que ponha em discussão os fundamentos da TIL.

CAPITULO 1 - O TERCEIRO REINO DE FREGE

Ao se deparar com expressões de identidade da forma *a=a* e *a=b*, nas quais as letras *a* e *b* estão ladeadas pelo sinal de igualdade, Frege estabeleceu uma das mais discutíveis noções da recém filosofia analítica que ele acabara de fundar. Em seu texto *Sobre o Sentido e Referência*, ao se interrogar sobre os problemas da identidade, procurou saber se esta é uma relação que ocorre com os nomes que damos às coisas ou com as próprias coisas. Em sua tarefa, observou que, a única maneira de explicar porque, em certos casos, as relações de identidade não são verdades lógicas triviais, isto é, não são relações triviais porque produzem novos conhecimentos, foi recorrer à categoria do sentido. Ficou portanto estabelecido que, além da referência, normalmente um objeto extralingüístico, e além do nome da coisa, o signo, o sentido viria acrescentar um conhecimento novo. Para o caso em que temos um termo singular, o sentido não deveria ser confundido com o objeto denotado e, no contexto de uma frase, o sentido seria o pensamento que ela expressa. Pretendo mostrar como Frege chegou a este resultado e em seguida bosquejar as suas conseqüências.

A identidade é um daqueles conceitos que reúne um conjunto valioso de problemas filosóficos. Na filosofia, a noção de identidade é freqüentemente discutida conjuntamente a duas noções distintas: a identidade estrita ou numérica e a identidade lata ou qualitativa. Esta última é normalmente caracterizada em termos de uma determinada relação de semelhança entre coisas, semelhança que é sempre com respeito a um determinado aspecto ou com respeito a um determinado conjunto de aspectos ou fins. A identidade estrita, por sua vez, é mais interessante por ter suscitado imensa discussão filosófica, estranha, e, particularmente devido a sua aparente clareza e simplicidade. Ao discutir a identidade Leibniz tinha invariavelmente em mente a identidade estrita. Sempre que há numericamente duas coisas, não há identidade estrita, por muito semelhantes que elas sejam entre si.

Em oposição à identidade qualitativa, a igualdade numérica não se dá entre coisas semelhantes, como a igualdade qualitativa, mas se dá na coisa consigo mesma. E toda coisa tem essa propriedade fundamental: de ser igual a si mesma. Assim “são um”, todas aquelas coisas cuja matéria é “uma única”. Por exemplo, tenho um lápis em minha mão, quero saber: este lápis é idêntico no sentido de numericamente idêntico ao lápis em cima da mesa? Não, a única coisa que pode ser idêntica ao lápis na minha mão é o próprio lápis que seguro, pois qualquer outra coisa, por mais semelhante e aproximada que fosse, diferiria em pelo menos uma propriedade, como a cor, a textura, etc.[2].

Sendo assim, o conceito de identidade estrita é tão basilar ou primitivo que não é suscetível a uma definição. O máximo que podemos fazer é caracterizá-lo como uma relação na qual cada objeto tem consigo mesmo e com mais nenhum outro e, sendo esta relação constitutiva de três principios igualmente básicos. A identidade estrita ou identidade à la Leibniz pode ser melhor compreendida através de seus principios mais básicos. Por principios básicos devemos entender principios regrados que introduzem características *formadoras* do conceito de identidade cuja falta implicaria em contradição de termos que o principio sustenta. São eles: a reflexividade, a Lei da Indiscernibilidade de Idênticos, também denominada de Lei da Substituição de Idênticos *salva veritate*, e a Lei da Identidade de Indiscerníveis. O primeiro deles é a reflexividade a qual estabelece que cada objeto é estritamente identico a si mesmo. Intuitivamente a Lei da Indiscernibilidade de Idênticos pode ser inicialmente formulada da seguinte maneira: objetos idênticos são indiscerníveis, ou seja, objetos idênticos têm exatamente as mesmas propriedades. Sejam as letras 'x' e 'y' tomadas como variáveis referentes a objetos quaisquer, ou seja, elas são dispositivos para falar acerca de objetos arbitrários. Considere a letra 'P' como uma variável para propriedades, ou seja, como um dispositivo para falar acerca de propriedades ou atributos monádicos arbitrários. Falando de modo mais preciso podemos formular a Lei da Indiscernibilidade dos idênticos da seguinte maneira:

> (LIID) Sejam quaisquer objetos x e y, se x é idêntico a y, então, para qualquer propriedade P, se x tem P, então y tem P, e, se y tem P, então x tem P.

Comumente encontramos em livros de lógica LIID representado através de fórmulas envolvendo uma quantificação de segunda ordem sobre propriedades, recebendo a seguinte formulação $\forall x \forall y (x = y \rightarrow \forall P (Px \leftrightarrow Py))$.

Por outro lado, a Identidade dos Indiscerníveis diz que objetos individualmente dados jamais poderiam ser idênticos em absoluto por serem numericamente distintos. Seja *x* um objeto qualquer, por definição, ele não poderá ser necessariamente idêntico a um objeto

[2] A localização no espaço. Os lápis podem ter em comum todas as suas propriedades, menos a localização, isso basta para declará-los não idênticos.

qualquer *y*. O principio da Identidade dos Indiscerníveis (IND) está fundamentado no pressuposto metafísico da mais absoluta singularidade cujo principal objetivo é sustentar uma ontologia dos particulares. Deixando de lado a metafísica da identidade, por que, afinal, a identidade embora seja tão basilar e óbvia enseja problemas desafiadores? Frege se debruçou sobre um desses problemas e a ele ofereceu uma solução no mínimo original mas não menos contestável.

A identidade é uma noção muito importante na matemática. Frege apresenta na seção 8 de sua *Begriffschrift* um exemplo para ilustrar um aspecto curioso: a identidade dos objetos matemáticos pode ter conteudo substancial. A aritmética elementar é o melhor exemplo do quão importante seja a identidade, pois os fatos básicos da aritmética dizem respeito à igualdades, o seja, a identidades. Dito isto, a questão agora é saber como a identidade deve ser caracterizada. São muitas as formas de fazê-lo, embora todas elas estejam invariavelmente ligadas às propriedades da reflexividade, ou seja, a=a, da simetria, isto é, se a=b, então b=a, da transitividade que diz ser a=b e b=c então a=c; e uma menos mencionada, a saber, a propriedade da substitutividade que estabelece: dado um x e x=y, então temos y. Essas propriedades são caracterizadoras da identidade sobretudo porque algumas são equivalentes entre si: a reflexividade segue da transitividade e da simetria; a transitividade e a simetria podem ser demonstradas a partir da reflexividade e da substitutividade[3].

Na abertura de *Sentido e referencia* Frege reconhece que "*a igualdade desafia a reflexão porque dá origem a questões não muito fáceis de responder.* E se indaga, espantado: *seria ela uma relação?Uma relação entre objetos ou entre os nomes dos objetos*?" De fato, cumpre saber por que haveria uma miríade de casos que parecem forçar uma revisão ao critério de identidade estabelecido, tempos outros, por Leibniz. Há uma imensa literatura filosófica sobre as várias tentativas de responder essa e outras questões relacionadas e de procurar por um (como é usualmente referido) "princípio" de individualidade. Obviamente, trataremos da questão apenas de maneira oblíqua. Nosso objetivo é bem menos ambicioso, mas não menos importante, qual seja, o de saber: por que Frege se teria preocupado em resolver o problema da identidade? Porque ele precisava de uma teoria semanticamente adequada em função de seu projeto de fundamentação da aritmética em termos estritamente

[3] Nas chamadas lógicas de alta ordem a identidade pode ser definida em termos de substitutividade e a prova da reflexividade, consequentemente a transitividade e a simetria também.

lógicos. Na tentativa de evitar qualquer suposição advinda da intuição em suas inferências, ele quis excluir qualquer lacuna entre elas, e com isso veio a concluir que a linguagem ordinária era demasiadamente imprecisa para esse propósito. Frege empreitou então a criação de uma linguagem com critérios de correção para as inferências presente em cada dedução. Além disso desejava que estivessem devidamente justificadas todas as pressuposições de cada conclusão presente na argumentação.

Frege acreditava que a aritmética fosse um desenvolvimento da lógica, mas para que fosse possível sustentar tal tese, que ficaria ulteriormente conhecida como "logicismo", seria necessário desenvolver um aparato teórico mais sofisticado do que aquele apresentado por Aristóteles. Foi então que, em 1879, veio à baila o primeiro resultado desses esforços, a sua *Begriffsschrift* a qual descreveu como uma linguagem de fórmulas, modelada com base na linguagem da aritmética. Uma linguagem de fórmulas porque, comparada com a linguagem ordinária, conteria símbolos próprios, como acontece, por exemplo, nos casos da matemática. Essa linguagem teria por objetivo representar o 'pensamento puro', isto é, "livre de adornos retóricos". Em outras palavras, Frege procurou representar em sua linguagem tudo o que é relevante para a lógica de um raciocínio e nada mais. Dado um juízo, Frege propunha expressar deste somente a parte logicamente relevante, aquilo que faz outras afirmações serem ou não conseqüências suas e vice-versa. No entanto, é importante salientar que a linguagem apresentada na *Begriffsschrift* não foi desenvolvida com a pretensão de substituir as linguagens naturais em sua amplitude, mas sim apenas para os fins científicos, onde uma maior precisão ao explicitar os conteúdos semânticos é requerida. Precisamente nesse ponto reside a importância de que nessa linguagem ideal estivesse atuante uma semântica que explicasse as expressões de identidade.

> Com a introdução de um símbolo para identidade de conteúdo, uma bifurcação é necessariamente efetivada no significado de todos os símbolos, os mesmos símbolos estão, ora por seus conteúdos, ora por eles próprios. À primeira vista, isso causa a impressão de que estamos tratando de algo que pertence à *expressão* apenas, não ao pensamento, e de que não há necessidade de símbolos diferentes para o mesmo conteúdo e, portanto, nem de um símbolo para a identidade de conteúdo. (FREGE, 1879)

A importância da identidade ante o projeto logicista que se descortinava era cada vez mais manifesta; a identidade suscitava questões para as quais ele não havia ainda vislumbrado respostas prontamente acabadas. Em sua *Begriffsschrift* ele nos deixa saber que optara pela identidade como uma relação entre os nomes.

> Em minha *"Begriffsschrift"* assumi a última alternativa. As razões que parecem apoiar essa concepção são as seguintes: a=a e a=b são, evidentemente, frases de valor cognitivo diferentes; a=a sustenta-se a priori e, segundo Kant, deve ser denominada de analítica, enquanto que frases da forma a=b contém, freqüentemente, extensões muito valiosas de nosso conhecimento, e nem sempre podem ser estabelecidas à priori. (Idem, pag.68)

Frege justificou sua escolha ao analisar expressões da forma (1) a = a e (2) a=b. As expressões 1 e 2 possuem diferentes conteúdos cognitivos, isto é, cada uma dessas identidades traz em seu interior um conteúdo informativo diferente, uma possibilidade de conhecimento que as diferencia entre si: o valor cognitivo de (1) sustenta-se a *priori* mas (2) contém extensões valiosas de conhecimento que não são determinados *a priori*. Para o conhecimento *a priori* de (1) as expressões que lhe dão sustentação são chamadas de "analíticas" pois esclarecem que o objeto de que se fala é o próprio objeto.

Assim, por exemplo, se digo "*a estrela da manhã é a estrela da manhã*", estou afirmando uma expressão do tipo (1), estou afirmando uma frase "tautológica", "vazia" ou "sem conseqüências". Se eu digo da "estrela da manhã que ela é a estrela da manhã", então afirmo de "a" o que já sei sobre "a", não estou acrescentando nada além do que eu já sabia antes. Portanto as tautologias representam conhecimento, mas não o acrescentam, não criam extensões do conhecimento, diferentemente das expressões do tipo (2). Para estas, por exemplo, quando digo "a estrela da manhã é a estrela da tarde", digo uma frase extensiva, uma frase que acrescenta algo ao conhecimento, que relata uma descoberta empírica da astronomia. Em (2) em vez de falar sobre objetos extralingüísticos está na verdade falando sobre a própria linguagem, no caso, os símbolos "a" e "b" envolvidos na relação. Logo, a identidade é uma relação entre os nomes dos objetos. Entretanto, Frege observa imediatamente em *Sentido e Referência* (doravante SR) que a relação entre um termo singular qualquer e o objeto por ele denotado é puramente arbitrária. Termos singulares quaisquer não têm nenhum privilégio sobre os objetos que designam, porque não há nada no termo que diga isso e, portanto

> Ninguém pode ser impedido de empregar qualquer objeto ou evento arbitrariamente produzido como um sinal para qualquer coisa. Com isto, a expressão *a =b* não mais se referiria propriamente à coisa, mas apenas à maneira pela qual a designamos; não expressaríamos por seu intermédio, propriamente, nenhum conhecimento. Mas é justamente isto o que queremos expressar em muitos casos. Se o sinal *"a"* difere do sinal *"b"* apenas enquanto objeto (aqui, por sua configuração), não enquanto sinal - isto é, não pela maneira como designa alguma coisa – então o valor

> cognitivo de $a = a$ seria essencialmente igual ao de $a = b$, desde que $a = b$ seja verdadeira. (FREGE, 1978, pag.130)

Sendo assim, não se assere por meio de uma expressão do tipo a=b nada sobre os objetos designados pelos termos, mas apenas ao modo em que arbitrariamente designamos as coisas e isso também não iria acrescentar conhecimento. O mesmo raciocínio é válido se a identidade fosse uma relação entre as próprias coisas. Se considerarmos a identidade entre as coisas como uma relação entre aquilo a que o signo “a” e o signo “b” se referem, neste caso, sendo verdadeira a relação a = b, então também é verdadeiro que a = a.

> Assim, se quiséssemos considerar a igualdade como uma relação entre os objetos a que os nomes “a” e “b” se referem, então a = b não pareceria diferir de a = a, caso a = b fosse verdadeira. Desse modo, expressaríamos a relação de uma coisa consigo mesma, relação que toda coisa tem consigo mesma, mas que nunca se dá entre duas coisas distintas. Mas, por outro lado, parece que por a = b quer-se dizer que os sinais ou os nomes “a” e “b” referem-se à mesma coisa; e neste caso, a discussão versaria sobre esses sinais: uma relação entre eles seria asserida. Mas tal relação entre os nomes ou sinais só se manteria na medida em que eles denominassem ou designassem alguma coisa.(FREGE, Idem)

Ora, a relação a = a nada mais é do que a afirmação de que a identidade numérica é reflexiva e, para além de ser uma afirmação verdadeira ela é conceitualmente verdadeira, mas vazia de conseqüências. Portanto, na hipótese de que a identidade seja uma relação entre objetos então a identidade seria trivial, e por definição nada acrescentaria. Logo, *a identidade não pode ser nem uma relação que se estabelece entre os nomes dos objetos nem entre os próprios objetos* pelos motivos mencionados anteriormente.

A resposta ao problema da identidade parece estar irremediavelmente relacionada a diferença no valor cognitivo das expressões “a=a” e “a=b”. O valor cognitivo consiste no quanto uma expressão é capaz de fornecer conhecimento a quem a compreende para o caso dela ser verdadeira. A diferença no grau de informatividade é dada pela possibilidade de alguém acreditar que “a=a” e desconhecer “a=b” e, no caso em contrário, alguém que já sabe “a=a” e não saber “a=b”, ampliar seu conhecimento ao descobrir “a=b”. Mas vimos anteriormente que a identidade dos nomes é arbitrária, e que a identidade das coisas nos leva a relações do tipo a = a, que são a *priori* e, portanto, não nos trazem novos conhecimentos. Assim, se o novo conhecimento não se encontra na identidade entre nomes e nem se encontra na identidade das coisas, onde ele estaria a não ser na diferença de valor cognitivo da expressão “a=b”! Para reforçar a tese da diferença, Frege nos adianta que o incremento de conhecimento está no *modo de apresentação* do objeto designado pelo nome.

> Mas é justamente isto o que queremos em muitos casos. Se o sinal “a” apenas enquanto objeto (aqui, por sua configuração), não enquanto sinal – isto é, não pela maneira como designa alguma coisa – então o valor cognitivo de a=a tornar-se-ia essencialmente igual ao de a=b, desde que a=b seja verdadeira. Uma **diferença** só poderá aparecer se à diferença entre os sinais corresponde uma diferença no modo de apresentação daquilo que é designado. Sejam a, b, c as linhas que ligam os vértices de um triângulo com os pontos médios dos lados opostos. O ponto de interseção de a e b é, pois, o mesmo que o ponto de interseção de b e c. Temos, assim, diferentes designações para o mesmo ponto, e estes nomes (“ponto de interseção de a e b” e “ponto de interseção de b e c”) indicam, simultaneamente, o **modo de apresentação** e, em conseqüência, a frase contém um **conhecimento real**. (Ibidem. Negritos nossos)

O aspecto cambiante da diferença de valor cognitivo foi ilustrado por Frege através de um exemplo geométrico aqui ligeiramente adaptado: sejam três retas r, s e t cujo ponto Z é ponto de interseção entre elas. O ponto Z pode ser apresentado de diversos modos, e isto quer dizer que ele tem diversos modos de apresentação. Ele pode ser entendido como o ponto de interseção das retas r e s quanto das retas r e t, das retas s e t bem como, por transitividade, das retas r, s e t. Desconsiderando a orientação dessas retas, temos portanto que Z é a referencia para quatro nomes diferentes “o ponto de interseção das retas r e s”, “o ponto de interseção das retas r e t”, “o ponto de interseção das retas s e t” e “o ponto de interseção das retas r, s e t” e, todos esses modos de apresentação são distintos entre si caracterizando assim a diferença. Entretanto, todos os diferentes pontos estabelecidos pelas retas r, s e t têm o ponto Z em comum onde as retas se interceptam. Neste ponto em comum as diferentes retas se identificam com o ponto Z e nele ocorre a identidade entre os diferentes modos de apresentação.

É devido aos diferentes modos de apresentação do ponto Z que podemos falar de um conhecimento real e novo adquirido, no caso em consideração, através de uma elaboração geométrica. E esse conhecimento pode ser a simples descoberta de que as retas r, s e t têm como ponto de interceptação o ponto Z. Além do mais, esse conhecimento novo não se encontra nem na identidade do ponto “Z” consigo próprio, nem muito menos se encontra no nome dado ao ponto quando o chamamos de “Z”, mas nos diversos modos em que ele é apresentado. Tal conhecimento estava como que escondido e por isso que ao descobri-lo ampliamos a extensão do nosso conhecimento geométrico pelo entendimento que temos dos diferentes modos de apresentação do ponto Z. Aos diferentes *modos de apresentação* do ponto Z Frege chamou de *sentido* o qual possibilita que as relações de identidades apresentem condições de verdade não triviais. Alguns intérpretes da obra de Frege consideram aquilo que ele chamava de sentido algo semelhante às entidades abstratas ou platônicas. Ao falar em entidades platônicas, estes filósofos referem-se à doutrina das idéias de Platão que supôs um universo povoado por entidades abstratas, isto é, entidades não materiais, eternas e imutáveis, o mundo das idéias. Os objetos do mundo sensível são formados a partir das idéias, protótipos das coisas sensíveis e modelos da realidade. Assim, a despeito do nosso conhecimento, essas idéias existem e constituem um corpo de verdades objetivas, embora abstratas, do qual nosso conhecimento é perfeito e apoditicamente demonstrável. Através da consciência podemos reconhecê-las, mas elas não nascem de uma determinação por parte da nossa consciência.

> Chamá-lo platonista é colocá-lo no contexto de uma concepção sistemática de filosofia a qual toma metafísica ou ontologia como seu ponto de partida. Mas tal concepção não pode ser encontrada em Frege. Não quero sugerir, com a negação de que ele é um platonista, que ele é um idealista. As alternativas normalmente favoritas "Platonismo versus idealismo" ou "realismo versus anti-realismo", não se conformam a Frege, porque ele não se envolveu nesse tipo de discurso filosófico abstrato, mas, ao contrário, comprometeu-se em esclarecer o que ele considerou ser a condição necessária de clareza em discussões filosóficas referentes à lógica.[4]

Decorre daí que, da análise da relação de identidade devemos considerar três âmbitos: um lingüístico, dado pelo signo, um intensional, dado pelo sentido das expressões, e um extensional, dado pelos objetos a que esses sentidos fazem alusão. Em outros termos, doravante ficou estabelecido que, unidos ao signo existem a referencia que é o objeto denotado pelo nome e algo "além daquilo por ele designado" que é o sentido, e o sentido é o modo de apresentação desta referência. Assim, o sentido existe podendo ser encontrado não no objeto mas no modo como ele é apresentado. Vamos entender um pouco mais sobre esse novo elemento em relação à sua referencia tanto para a categoria dos termos singulares quanto para as frases.

1.1 SENTIDO E REFERENCIA

> A conexão regular entre o signo, seu sentido e sua referência é de tal modo que ao signo corresponde um sentido determinado e ao sentido, por sua vez, corresponde uma referencia determinada, enquanto que a uma referência (a um objeto), não deve pertencer apenas um único signo. O mesmo sentido

[4] Wolfgang, Carl; "*Frege – A Platonist or a Neo-Kantian?*" pag.7, in: edited by Albert Newen, Ulrich Nortmann, Rainer Stuhlmann-Laeisz; "*Building on Frege*", Stanford/ California, 2001.

> tem expressões diferentes em diferentes linguagens, ou até na mesma linguagem. É verdade que exceções a esta regra ocorrem. Certamente deveria corresponder, a cada expressão, que pertença a uma totalidade perfeita de signos, um sentido determinado; mas, freqüentemente, as linguagem naturais não satisfazem a esta exigência e deve-se ficar satisfeito se a mesma palavra tiver sempre o mesmo sentido num mesmo contexto. Talvez possa ser assegurado que uma expressão gramaticalmente bem construída, e que desempenhe o papel de um nome próprio, sempre tenha um sentido. Mas com isto não se quer dizer que ao sentido corresponda sempre uma referência. As palavras como "o corpo celeste mais distante da Terra" têm um sentido, mas é muito duvidoso que tenha uma referência. A expressão "a série que converge menos rapidamente" tem um sentido, mas provadamente não tem referência, já que para cada série convergente dada, uma outra serie que converge menos rapidamente pode sempre ser encontrada. Portanto, entender-se um sentido nunca assegura sua referência. (Ibidem, p. 133)

Do trecho acima e a partir do exemplo, na seção precedente, as descrições definidas "o ponto de interseção das retas r e s", "o ponto de interseção das retas r e t", "o ponto de interseção das retas s e t" e "o ponto de interseção das retas r, s e t" cujo ponto em comum é o ponto Z possuem a mesma referência do ponto Z das retas r, s e t. Os quatro modos de apresentação do ponto Z correspondem aos seus sentidos. A referência dos diferentes modos de apresentação do ponto Z é *determinada* e não varia, mas seus sentidos sim. Logo, concluímos que uma mesma referência admite diversos sentidos. Ao apresentarmos mais à frente a referência dos nomes próprios esse fato ficará mais claro.

Podemos ainda observar as seguintes correlações entre o sentido e a referência do signo: ao signo corresponde um sentido, univocamente determinado, ao sentido corresponde uma referência determinada e, a uma referência pode corresponder mais de um sentido. O mesmo sentido pode ser expresso diferentemente, tanto em línguas distintas, como de diversas maneiras numa mesma língua. A exceção a essa regra estaria numa linguagem perfeita, pois as linguagens "naturais" não satisfazem essa exigência de fornecer somente um determinado sentido. É possível que uma expressão bem construída em termos gramaticais, um nome próprio por exemplo, venha a ter sempre um mesmo sentido. Mas isso não quer dizer que ao sentido corresponda sempre uma referência. Se dissermos, por exemplo, "Odisseu", "o corpo celeste mais distante da Terra", "o maior número primo", "a menor série de convergência", tais expressões, a primeira um nome próprio e as três ultimas descrições definidas, teriam um sentido, mas a elas não corresponderia nenhuma referencia. Entender um sentido nunca assegura sua referencia, ou ainda, o sentido determina a referencia mas a volta não vale.

Vejamos como Frege explica a referência e o sentido dos nomes. A categoria dos nomes em Frege inclui não apenas os nomes próprios como "Aristóteles", "Odisseu", mas também descrições definidas[5], "a estrela da manhã", "o maior número primo", "o corpo celeste mais distante da terra", "a menor série de convergência" etc. Por definição, são expressões lingüísticas que formam uma subclasse da classe dos chamados designadores, ou termos singulares, ou ainda expressões referenciais singulares cujo propósito, quando empregados, é referir, relativamente a um dado contexto de uso, a um e só um item ou objeto especifico. A referência de um nome próprio é um "objeto determinado". Frege, apesar de tomar o termo "objeto" numa ampla acepção, nos diz que nela não está contida nem a acepção de "conceito" nem a de "relação". Assim, por negação, a referência de um nome próprio não é seu conceito, pois diferentemente do objeto que forma um todo único o conceito é insaturado, incompleto. Também não é a relação propriamente dita entre o nome, tomado em sua natureza lingüística, e o objeto. A referência é o objeto o qual está além do nome, sendo portanto extralingüístico.

> Nesse contexto fica claro que, por "signo" e por "nome" entendi qualquer designação que represente um nome próprio, cuja referência seja um objeto determinado [....], mas não um conceito ou uma relação [....] A designação de um objeto singular pode também consistir em varias palavras ou outros signos. Para sermos breves, chamaremos cada uma destas designações de nome próprio. (Ibidem.).

Em relação ao sentido de um nome próprio, é preciso ter em mente que, para Frege, este sentido é apreendido para mais ou para menos dependendo do quão competente e familiarizado esteja o falante de uma determinada linguagem. Destarte, ao afirmar que o sentido é o modo de apresentação do objeto, então o sentido de um nome próprio é dado imediatamente via o sentido de certa descrição definida ou ainda por um conjunto de descrições definidas que os usuários de uma linguagem associam ao nome. Assim, o sentido do nome próprio "Aristóteles" será o *modo de apresentação* deste nome o qual pode variar de um falante a outro: o sentido que *eu* associo ao nome "Aristóteles" mediante as informações de que disponho são completamente distintas do sentido que outro falante associa ao mesmo nome.

[5] Designação para expressões da forma "o objeto x tal que Fx" originariamente atribuída a Bertrand Russell no artigo "On Denoting". Enquanto um nome é um símbolo arbitrário atribuído a um objeto do domínio, o qual passa a ser sua denotação, uma descrição é uma especificação que se aplica a qualquer objeto do domínio que satisfaça aquela condição formulada. Em uma descrição definida o objeto é assim caracterizado pelo fato de certo predicado ser satisfeito por ele e só por ele.

Por exemplo, o sentido do nome próprio “Aristóteles” poderia ser, para muitos falantes, o sentido de uma descrição definida como “O filósofo que nasceu em Estagira”, “O aluno mais famoso de Platão”, “O autor dos *Primeiros analíticos”,* “O mestre de Alexandre, o Grande”; de maneira que o individuo referido pelo nome Aristóteles é determinado pelo conjunto de propriedades que lhe são atribuídas como a de ter nascido em Estagira, ter sido o aluno mais famoso de Platão, ter escrito os *Primeiros analíticos*, etc. Este fenômeno ocorre pois, o sentido a que cada falante associa a um nome reflete o conhecimento deste falante em relação ao nome em questão. Uma vez que os nomes possuem necessariamente sentido e em alguns casos referência, em outros não, então é de se esperar que uma estrutura composta por termos singulares tenha sentido e referência. Uma frase, assim como os nomes próprios, tem sentido e referência os quais são obtidos em função de seus constituintes imediatos.

Tendo começado por aplicar a distinção entre sentido e referência aos nomes como “Sócrates”, “a Estrela da Manhã”, etc. Frege estendeu-a depois a todas as categorias de expressões, incluindo as frases. As frases passaram assim a ser vistas como uma espécie de nomes complexos, aos quais também caberia uma referência. Obedecendo ao princípio de *composicionalidade*, Frege declara que a referência de uma frase[6] é o seu valor de verdade – elas são “nomes de um valor de verdade”. Ou seja, assim como os nomes, os quais têm como seu referente os objetos de que são sucedâneo, a referência da frase é seu valor de verdade a saber, *o verdadeiro e o falso*. Quanto ao sentido ele é o *pensamento* (*Gedanke*) expresso pela frase. Frege tem uma concepção muita particular de pensamento, segundo a qual este é algo de objetivo, dotado de autonomia relativamente às mentes humanas que o podem captar e expressar linguisticamente apenas por meio de uma frase declarativa.

> Até aqui só consideramos o sentido e a referência daquelas expressões, palavras ou signos a que chamamos nomes próprios. Agora passemos a investigar qual seja o sentido e a referência de uma frase assertiva completa. Tal frase contém um pensamento [....] O pensamento, portanto, **não pode ser a referência da frase**, pelo contrário, deve ser considerado como seu sentido [....] Entendo por pensamento, não o ato subjetivo de pensar, mas seu **conteúdo objetivo,** que pode ser a propriedade comum de muitos. (FREGE, 1978, p. 67. Os destaques em negrito são nossos.)

Uma frase assertiva “completa” contém um pensamento que deve ser considerado como o sentido dessa frase. O pensamento não é “o ato subjetivo de pensar” e sim é o “conteúdo

---

6 Como se trata de um anglicismo, optamos por frase ao invés de sentença, para a tradução de inglês “sentence”. Mas preservamos nas citações “sentença” em respeito à tradução dos autores da versão em português dos textos de Frege.

objetivo" do pensar cuja propriedade é ser "comum de muitos". Portanto, o pensamento para Frege não se identifica com o sujeito de representações, pois não é seu ato subjetivo de pensar; o pensamento também não se identifica com o objeto do pensar, pois não é a referência da frase; o pensamento determina o objeto, caracterizando-o, mas não se identifica com ele. Assim, em resumo, o pensamento em Frege, como "conteúdo objetivo" do pensar é *publicamente acessível* a todos, mas não se identifica com o sujeito em seu ato de pensar e nem se identifica com o objeto que ele descreve e caracteriza.

> A referência de um nome próprio é o próprio objeto que por seu intermédio designamos; a representação que dele temos é inteiramente subjetiva; entre uma e outra está o sentido que, na verdade, não é tão subjetivo quanto a representação, mas que também não é o próprio objeto. A comparação seguinte poderá, talvez, esclarecer estas relações. Alguém observa a lua através de um telescópio. Compara a própria lua à referencia; ela é o objeto de observação, proporcionado pela imagem real projetada pela lente no interior do telescópio, e pela imagem retiniana do observador. A primeira comparo-a ao sentido, a segunda à representação ou intuição. A imagem do telescópio é, na verdade, unilateral; ela depende do ponto de vista da observação; não obstante, ela é objetiva, na medida em que pode servir a vários observadores. Ela poderia ser disposta de tal forma que vários observadores poderiam utilizá-la simultaneamente. Mas cada um teria sua própria imagem retiniana. Devido à diversidade da configuração dos olhos, mesmo uma congruência geométrica entre estas imagens dificilmente poderia ser obtida, e uma coincidência real seria impossível. Esta comparação poderia, talvez, ser desenvolvida ainda mais, admitindo-se que a imagem retiniana de A pudesse tornar-se visível para B; ou, ainda, que A pudesse ver sua própria imagem retiniana num espelho. Desta forma poderíamos, talvez, mostrar como uma representação pode, ela mesma, ser tomada por objeto, mas não obstante, ela não é, para o observador, o que ela é diretamente para seu sujeito. Mas prosseguir neste caminho nos levaria longe demais. (FREGE, 1978, p. 65 e 66).

A representação subjetiva do sujeito pode ser comparada a sua "imagem retiniana" da lua alcançada através do telescópio. Os argumentos de Frege são os seguintes: cada pessoa tem a própria imagem fixa nas suas retinas, e mesmo que outra pessoa pudesse vê-las, isto é, mesmo que B estivesse vendo a imagem retiniana de A, suas imagens continuariam distintas e uma "coincidência real" entre A e B seria impossível, dada a "diversidade da configuração dos olhos". Como podemos ver, Frege não faz concessões. Para ele não há concessão a ser feita, pois trabalha com uma espécie de certeza quanto às distintas representações do sujeito. E aqui ele parece disposto a "provar" sua existência. Mas isso é fundamental na sua distinção sentido/referencia: que as representações existam e que sejam diversificadas e subjetivas. Somente assim, elas não serão confundidas com o pensamento em sua objetividade.

O pensamento existe e tem uma realidade “em si”, uma realidade que não é alcançada pelos nossos sentidos. Porque não faz parte dos propósitos deste trabalho, a análise do estatuto ontológico do pensamento não será aqui discutida. Nas palavras esclarecedoras de Dummett, “*o pensamento para Frege não faz parte do conteúdo de nossa mente, não é nossa Imagem mental, pois estas são subjetivas e incomunicáveis e faz parte da essência do pensamento ser comunicável*”. Diferentes pessoas podem se deparar com o mesmo pensamento, portanto, ele não pode ser o conteúdo de suas mentes. Essa rejeição ao psicologismo em Frege, foi, segundo Dummett, “*da maior importância, pois vem a resguardar a filosofia da mente e da linguagem das explicações dadas em termos de processos psicológicos privados*”.

A alternativa de Frege foi a de reconhecer uma categoria independente da linguagem e intermediária entre o subjetivo e o objetivo. Para ele o pensamento e o sentido, constituem um “terceiro reino”, que é como um universo físico onde sua população é objetiva, não são percebidas pelos sentidos, não são percebidas no tempo e no espaço. Mas é somente por nos depararmos com o pensamento, no terceiro reino, que as impressões de nossos sentidos se transformam em percepções, e assim, nos tornamos cientes do mundo externo. Nós podemos nos deparar com pensamentos e expressá-los, mas só podemos nos deparar com eles através da linguagem, expressando-os através da linguagem. Eis, portanto, mais uma função, segundo Dummett, do terceiro reino fregeano: “resguardar a filosofia da mente e da linguagem dos psicologismos”. Ora, o terceiro reino não é subjetivo, mas é objetivo, pois os mesmos pensamentos podem ser percebidos por muitos. Alem disso, no terceiro reino, os pensamentos não estão sujeitos às modificações do tempo e do espaço, pois ele é atemporal. E, mais uma vez, a importância da linguagem em Frege é enfatizada: nós não criamos o pensamento, mas apenas nos deparamos com ele e este ato só pode se dar quando o expressamos objetivamente, quando expressamos o pensamento publicamente, através da linguagem.

Um pensamento é expresso só e somente só quando pudermos questionar sua verdade[7]. Questionamos a verdade do pensamento através de uma frase com sentido. Contudo, vale ressaltar que nem toda frase expressa um pensamento. Portanto, para elaborar o pensamento, precisamos nos expressar com frases que tenham sentido. Frege, em seu texto *O Pensamento - uma investigação lógica* (*Der Gedanke – eine logische Untersuchung*), nos diz que o pensamento é "algo" onde a verdade é questionada legitimamente. Quando nos perguntamos

[7] Mas nem sempre é o caso. Há pensamento sobre os quais não levantamos a questão da verdade, por exemplo, aqueles expressos na ficção.

pela verdade do pensamento, só temos dois valores: ou ele é falso ou é verdadeiro. Assim, o valor da verdade do pensamento ou é falso ou é o verdadeiro, e, com isso, teremos pensamentos legítimos tanto falsos como verdadeiros. A verdade do pensamento se reveste na frase que ele expressa, mas nem sempre o sentido de "toda frase" é um pensamento.

> Para elaborar mais precisamente o que quero chamar de pensamento, distinguirei alguns tipos de frase. Não se negaria que uma frase imperativa tem sentido; mas esse sentido não é do tipo acerca do qual se questionaria a verdade. Por isso não chamarei o sentido de uma frase imperativa de pensamento. Igualmente, excluem-se frases que expressam desejos e pedidos. Só aquelas frases com as quais comunicamos ou asserimos algo é que podem entrar em consideração. Mas exclamações, nas quais alguém dá livre curso aos seus sentimentos, gemidos, suspiros, risos, não conto como tais, a menos que, por meio de convenções especiais, sejam destinadas a comunicar algo. Mas que dizer de frases interrogativas? Em uma pergunta com pronome interrogativo (Wortfrage), pronunciamos uma frase incompleta, que somente através da complementação por ela convocada vem a receber um verdadeiro sentido. As perguntas com pronome interrogativo ficam desse modo fora de consideração. Outro é o caso de perguntas em forma de frase. Esperamos ouvir 'sim' ou 'não'. A resposta 'sim' diz tanto quanto a frase assertórica; pois através dela **o pensamento**, que já se encontra completo na pergunta, é **apresentado como verdadeiro**. Para cada frase assertórica pode ser assim construída uma pergunta. Eis porque uma exclamação não pode ser vista como uma comunicação: nenhuma pergunta correspondente pode ser construída. Uma frase interrogativa e uma frase assertórica podem conter o mesmo pensamento; mas a frase assertórica contém algo mais, a saber, a asserção. Também a pergunta contém algo mais, a saber, uma convocação. (FREGE, 1978, p.7 . Os destaques em negrito são nossos.).

Uma frase do tipo imperativa como "feche a porta!", tem sentido, mas ela não expressa um pensamento. Outros tipos de frases, como as que expressam desejos e pedidos, não poderão igualmente e pelos mesmos motivos expressar um pensamento. As frases que devemos considerar como a expressão de um pensamento são aquelas que comunicam algo, são aquelas que asserem algo chamadas "frases assertóricas"[8]. Frases assertóricas são frases completas, que têm sentido, questionam a verdade e comunicam algo de modo assertivo. Frases interrogativas só com um pronome, como por exemplo, "quem"? "O que"? não são assertóricas, são frases incompletas as quais para terem sentido precisam ser completadas, e por isso não são consideradas como a expressão de um pensamento. Apenas frases cuja verdade pode ser requerida expressam um pensamento.

---

[8] Frege introduziu o símbolo de asserção para indicar que a proposição está "sendo afirmada ou asserida", conforme observa Branquinho, e outros (2006, p.701), contrastando assim, com as simples considerações, hipóteses ou conjecturas. Com a utilização do símbolo , indica-se explicitamente que as premissas e a conclusão são empregadas com "força assertórica" (Ibidem).

Entretanto, alguns tipos particulares de frases interrogativas podem sim expressar um pensamento, por exemplo, “este caderno azul é seu?”. Nesse tipo de pergunta esperamos ouvir um sim ou um não dependendo da situação de proferimento. Para o caso em que um “sim” seja dado, isto nos diz tanto quanto uma frase assertórica. Um simples “sim” nos diz tanto quanto uma frase assertórica porque o pensamento, que já se encontrava completo na pergunta, agora é apresentado como verdadeiro. Assim, caso um pai pergunte ao seu filhinho, para saber se este já entende das cores, “este caderno azul é seu?”, ele previamente expressa, no próprio ato de perguntar, um pensamento completo. Se a resposta for afirmativa, lhe apresentará o pensamento como verdadeiro. Se for negativa, lhe apresentará o pensamento como falso.

Quando dizemos que o pensamento é formado por frases assertóricas, estamos dizendo que ele é formado por frases completas, que têm sentido, que comunicam algo de modo assertivo, e que apresentam o pensamento como verdadeiro. Podemos dizer que o sentido de uma frase, é um pensamento, mas somente se ela é uma frase assertórica. Mas não podemos dizer que “toda frase” com sentido é um pensamento, pois há frases como as que vimos, por exemplo, as frases imperativas, que têm sentido, mas que não levantam a questão da verdade e, assim, não podem ser consideradas um pensamento. Portanto, podemos concluir dizendo que somente o sentido de uma frase assertórica é um pensamento. O pensamento conduz a uma atividade de perguntas, respostas e julgamento e a linguagem expressa a verdade desse julgamento. Noutros termos, o pensamento se inicia com um questionamento e termina com o reconhecimento de sua verdade ou de sua falsidade (o juízo), expresso em forma de frase assertórica.

Apresentamos até aqui as categorias sentido/referencia. Vimos que Frege deixou bem claro que elas são distintas. A referência é o objeto extralingüístico a que o signo se refere, o sentido por sua vez se dá através do entendimento que temos dele. Este entendimento não é subjetivo pois não faz parte das representações do sujeito diferenciando-se de suas imagens internas. Pelo que pudemos notar a categoria do sentido, segundo Frege, desempenha várias funções, entre elas

(i) *a de determinar o referente*

O sentido determina a referência, dito de outro modo, ele a identifica. Assim, é condição necessária e suficiente que nomes, aqui englobando os nomes próprios, e as descrições definidas, tenham sentido, mas não é nem necessário nem suficiente que tenham referência. O sentido é primordial, justamente pelas funções que exerce na linguagem e no pensamento. Por exemplo, pelo sentido estaria explicada a problemática dos termos desprovidos de referência, conseqüentemente as frases que contenham termos sem referência não serão nem verdadeiras nem falsas embora elas tenham sentido.

(ii) a de ser portador de verdade (função semântica)

Significa que é pelo pensamento que se chega à verdade, "é pois, a busca da verdade, onde quer que seja, o que nos dirige do sentido para a referência" (FREGE, 1978, pag. 138) e, além disso, "*intriga-nos o fato de que não podemos reconhecer que uma coisa tem uma propriedade sem que, ao mesmo tempo, tomemos como verdadeiro o pensamento de que esta coisa possui esta propriedade. Assim, a toda propriedade de uma coisa está associada uma propriedade de um pensamento, a saber, a de ser verdadeiro.* (FREGE, idem, p. 4). Desse modo fica estabelecido que em um enunciado é sobre o sentido que recai a qualidade de ser verdadeiro, enquanto a referência é estável, razão pela qual podemos falar de um mesmo objeto de maneira diferente.

(iii) a de ter uma função cognitiva : o sentido enquanto veiculo de valor cognitivo

O mesmo objeto pode ter vários sentidos, uma vez que podemos ter vários conteúdos cognitivos associados a um objeto. O conteúdo cognitivo é aquele que se deixa envolver em um enunciado e que determina um certo comportamento do individuo que declara uma frase com sentido o que equivale a dizer que a compreende.

(iv) a de servir de compreensão da frase

Através do sentido que se tem a compreensão de uma palavra, e que torna possível a comunicação entre os falantes e a tradução de línguas diferentes. O sentido é apreendido através de uma atividade do sujeito. A atividade é subjetiva mas o conteudo não.

1.2 A ANÁLISE FUNCIONAL DO SENTIDO

Conforme vimos na seção anterior, nomes, aqui entendidos como termos singulares, possuem sentido e referência. Então, tanto o sentido quanto a referência de uma estrutura complexa como as frases declarativas terão seus sentido e referencia em função de seus constituintes imediatos. A grande novidade é que Frege analisará a frase declarativa em seus constituintes imediatos não mais em termos de sujeito e predicado. Frege substituiu estas noções lingüísticas oriundas da análise clássica aristotélica pela análise funcional desenvolvida agora em termos de *função* e *argumento*. Frege utiliza essas duas noções tomadas da matemática e amplia o uso das mesmas para a linguagem como um todo, introduzindo as noções a elas correspondentes de função proposicional, ou conceito, e objeto.

As noções de função[9] e argumento permitiriam a Frege uma forma eficiente de combinação entre propriedades e objetos, viabilizando a introdução de entidades abstratas e objetivas, os objetos lógicos. E essa introdução ocorre sem que se recorra a elementos empíricos. Na função $\mathrm{y} = \mathrm{f(x)}$, x é denominado o argumento da função e y é denominado o valor da função. Vamos nos referir alternativamente a x como a variável independente e y como a variável dependente. O conjunto de todos os valores permissíveis que x pode assumir em um dado contexto é conhecido como o domínio da função, que pode ser uma parte do universo de discurso. O valor y para o qual um valor x é mapeado é denominado a imagem daquele valor x. O conjunto de todas as imagens é denominado a imagem da função, que é o conjunto de todos os valores que a variável y pode assumir. Dados os nossos propósitos, deve-se entender que o domínio (e a imagem) diz respeito ao universo de discurso dos usuários de uma linguagem não especificada. A expressão $\mathrm{y} = \mathrm{f(x)}$ é uma declaração geral e está a indicar que um mapeamento é possível, *mas isso não quer dizer que a regra de mapeamento propriamente dita fica explicitada.*

Uma função pode ser definida como uma regra que tem como *input* argumentos e como *output* valores (por exemplo: ‘3 + *x* = ...’ é uma função que terá o valor 6 quando no lugar de

[9] Frege utiliza um tipo particular de função denominada de *função característica.*

DEFINIÇÃO: Seja A um conjunto não-vazio arbitrário. Considere as funções $\mathbf{f : A \rightarrow N}$ e $\mathbf{g : A \rightarrow N}$. Seja $X \subset A$. Sua função característica denotada por $\xi\mathbf{x}$ é a função $\xi\mathbf{x : A \rightarrow N}$ definida por $\xi\mathbf{x} = 1$ se $x \in X$ e $\xi\mathbf{x} = 0$ se $x \notin X$. Uma função característica associa apenas dois valores possíveis, 0 e 1 num determinado domínio de modo que a unicidade de x depende do mapeamento feito pela função. Se ela associa um elemento e este elemento corresponde a imagem da função então diz-se que pelo menos 1 elemento existe no domínio da função. Caso contrário, então a função nada mapeia daí resultando em 0.

x o argumento for 3). Intuitivamente, uma função é uma "regra" ou um "mecanismo" que transforma uma quantidade em outra. Por exemplo, a função $f(x)=x^2+4$ toma um inteiro x e o transforma no inteiro x^2+4. A função $g(x)=|x|$ toma o inteiro x e retorna x, se $x \geq 0$, e $-x$, se $x<0$. Seja f uma função e a um objeto. A notação $f(a)$ é definida desde que exista um objeto b tal que $(\mathrm{a}, \mathrm{b},) \in f$. Nesse caso, $f(a)=b$. Em caso contrario, não existindo par ordenado da forma $(a,-) \in f$, a função não está definida. Os matemáticos raramente utilizam a notação $(\mathrm{a}, \mathrm{b},) \in f$, embora isto seja formalmente correto. Eles preferem a notação $f(,)$.

Frege distingue entre o que é *saturado*, 'completo em si', e o que é *insaturado*, incompleto. O numeral "3" e a expressão "2+3", por exemplo, têm um sentido completo: o primeiro representa o número 3 e a segunda o número 5. Assim, Frege chama de *objeto* tudo aquilo que é saturado. Observe que, no exemplo em questão, os objetos são os números 3 e 5; "3" e "2+3" são apenas nomes para eles.

Consideremos agora a expressão "*x*+3". Ela não representa um número por si só; isso acontece apenas quando substituirmos a letra "*x*" pelo nome de um número qualquer. Logo, "*x*+3" é um nome para algo incompleto. Aquilo que é insaturado, que necessita ser completado (e que portanto não é um objeto), Frege chama de *função*. Aquilo que completa uma função em um determinado caso é chamado de *argumento* da função naquele caso, e aquilo que se obtém é chamado *valor* da função para aquele argumento. Os 'lugares' em que uma função precisa ser completada são chamados de *lugares dos argumentos*; as ocorrências da letra "*x*" em "$(2+3x^2)x$ servem, portanto, para indicar os lugares dos argumentos da função nomeada por essa expressão.

Funções de dois argumentos necessitam ser completadas duplamente, no sentido de que o que se obtém quando os lugares de um dos seus argumentos são completados é uma função de um argumento; um novo complemento deve ser realizado sobre esta última para que o valor da função original seja obtido. Usando-se a letra "ζ" para indicar um segundo argumento, $(\xi+\zeta)^2+\zeta$ é portanto um nome para uma função de dois argumentos, "$(\xi+1)^2+1$" é um nome para a função que obtemos completando com 1 os lugares do argumento indicado por "ζ" da função anterior, e "$(3+1)^2+1$" é um nome para o valor da primeira função no caso dos argumentos 3 e 1, respectivamente.

Os valores de funções, entretanto, não precisam ser números. "$\xi^2=4$" e "$\xi > 2$" são nomes válidos de funções, cujos valores, dependendo do argumento, são ou *Verdadeiro* ou *Falso*. Estes últimos são chamados *valores-verdade*, e fazem parte do domínio dos objetos. Por meio disso é que Frege permite que o esquema de função e argumentos substitua o de sujeito e predicado: ao invés de estruturar afirmações de acordo com o segundo esquema, ele o faz através do primeiro, utilizando funções cujos valores são sempre valores-verdade. Frege denomina *conceitos* as funções de um argumento cujos valores são sempre valores-verdade. Assim, por exemplo, "$\xi >2$" é um conceito no qual se enquadram apenas os números maiores que dois. Analogamente, funções de dois argumentos cujos valores são sempre valores-verdade são chamadas de *relações*; assim, por exemplo, $\xi < \zeta$ é uma relação segundo a qual 1 e 2 estão, nessa ordem, relacionados.

Notadamente, através da análise funcional a distinção sentido/referência seria explicada pela diferença entre o que nomeia e o que é nomeado, respectivamente. Assim, por exemplo, o numero 4 é a referência tanto de "2+2" quanto de "2^2". Estas duas últimas expressões, porem, não são iguais, assim como não o são as 'idéias' que elas nos passam. Aos modos de apresentação de 4, conforme visto anteriormente, Frege chamou de seu *sentido*. Portanto. "$2^2=4$" e "3 >2" tomados como frases declarativas se referem ao mesmo objeto (a saber, o valor-verdade Verdadeiro), mas não *expressam* o mesmo sentido. O mesmo também se aplica a funções: as expressões "4ξ" e "$3 \cdot (3\xi - 2) - 5\xi + 6$" se referem a mesma função, mas seus sentidos são diferentes.

A análise funcional se revelou altamente promissora porque justificaria em principio a idéia que Frege tinha segundo a qual não entendemos o sentido de uma expressão complexa se não soubermos o sentido de suas partes constituintes. O conteúdo de uma expressão complexa da forma '2+3' será determinado pela contribuição de cada parte, de modo que o resultado da soma, a saber 5, decorra dos conteúdos de seus constituintes '2', '3' e '+'. Em '2+3 > 4', os números 2+3 e 4 e a relação "ser maior que" representam o conteúdo da expressão. A idéia básica é que toda expressão acaba sendo o resultado do contributo sintático das partes. Dessa forma, o sentido e a referencia de uma expressão/frase declarativa são completamente determinados pela contribuição de suas partes atômicas e pelo modo como elas se organizam sintaticamente na formação de um complexo. Esse processo é característico do chamado *principio da composicionalidade* apresentado por Frege e formulado da seguinte maneira:

(1*) *a referência de uma expressão lingüística composta (frase declarativa) é uma função das referências de suas partes constitutivas*

(2*) *o sentido de uma expressão lingüística composta (frase declarativa) é uma função dos sentidos de suas partes constitutivas.*

(1*) e (2*) são conhecidos como o principio da composicionalidade da referência e do sentido, respectivamente. Eles descrevem adequadamente a generalidade dos casos de atribuição de valores semânticos a expressões sintaticamente complexas sendo também essencial enquanto instrumento de análise da competência semântica dos falantes das línguas naturais. Tal fenômeno é facilmente compreensível quando aceitamos que as regras semânticas por meio das quais um falante computa o significado de um constituinte complexo C, por exemplo uma frase, o fazem combinando os significados dos seus subconstituintes $c_1,...,c_n$ de acordo com o modo em que $c_1,...,c_n$ se estruturam para formar C. Ademais e não menos importante, esses algoritmos são, tal como as capacidades de processamento dos falantes, finitos (em numero), ao passo que o número de frases cujo significado os falantes são capazes de compreender por meio da sua aplicação é infinito. Não haveria outro método que justifique o caráter produtivo e gerativo das línguas naturais no sentido em que permite por meio da concatenação gramaticalmente correta de um número finito de sinais sonoros discretos a produção de um número não finito de novas expressões.

Como Frege pretendia, o principio exprime de modo simples e elegante o modo como os falantes das línguas naturais interpretam as frases dessas línguas. Ora, o principio pode ser aplicado a expressões na formulação do sentido e da referência delas. De fato, se o sentido e a referência de uma frase declarativa são completamente determinados pela contribuição de suas partes atômicas então ao sentido e a referência está subjacente a idéia de composicionalidade que pode ser formulada da seguinte maneira: o sentido de uma expressão complexa E cujos constituintes são $e_1,...,e_n$ é inteiramente determinado pelo sentido de $e_1,...,e_n$ e pelo modo como se concatenam para formar E; a referência de uma expressão complexa E cujos constituintes são $e_1,...,e_n$ é inteiramente determinada pela referência de $e_1,...,e_n$ e pelo modo como se concatenam para formar E. Pelo principio da composicionalidade tanto o sentido quanto a referência são nada mais que o resultado da concatenação de seus termos simples. Decorre que, tanto o sentido quanto a referência estão em conformidade com um dos princípios mais elementares da lógica da identidade conhecido por regra da substituição *salva veritate* (abreviaremos por SES) que estabelece

(1a*) *se duas expressões lingüísticas têm a mesma referência, então a substituição de uma por outra numa terceira expressão não altera sua referência* e

(2a*) *se duas expressões têm o mesmo sentido, então a substituição de uma por outra numa terceira expressão não altera seu sentido.*

Informalmente a regra diz que, se em uma frase qualquer, substituirmos uma ou mais ocorrências de um termo singular por um termo singular com a mesma referência, então o valor de verdade da frase original será mantido após as substituições. Em particular, se a frase original for verdadeira, então qualquer frase que dela resulte também será verdadeira, do contrário será falsa. Vejamos com mais detalhes essa regra.

Em primeiro lugar, notamos que (SES) tem um alcance bastante geral, podendo ser formulada relativamente a muitas outras categorias de expressões linguísticas, como por exemplo predicados monádicos (ou termos gerais) e mesmo frases declarativas. Na verdade em (SES) está implícito um conjunto de princípios como o teorema da troca e o teorema da substituição da lógica proposicional, os quais podem ser notadamente conseqüências do principio da composicionalidade extensional. Este estabelece que, em geral, a extensão, entendida como valor de verdade, de qualquer expressão linguística, uma frase, ou uma fórmula no caso da lógica proposicional, é determinada unica e exclusivamente com base nas extensões dos termos constitutivos e com base certamente na estrutura interna das expressões ou fórmulas.

A segunda observação a fazer é a de que (SES) é um princípio linguístico, no sentido de ser um princípio essencialmente acerca de objetos linguísticos (termos singulares, predicados, frases, etc.) e a sua aplicação exige existência de uma linguagem qualquer à qual esses objetos linguísticos pertençam. Portanto, (SES) é um princípio semântico pois ele está formulado em termos de um conjunto de noções exclusivamente semânticas, como as noções de 'referência', 'extensão', 'valor de verdade', etc., as quais são de natureza semântica, na medida em que dizem respeito a diversos aspectos da relação entre uma linguagem dada e a realidade extra-lingüística.

Em terceiro lugar, (SES) é o princípio subjacente ao princípio lógico conhecido como Lei da Eliminação da Identidade, também conhecida como Lei de Leibniz. Trata-se de um princípio utilizado como regra de inferência em muitos dos habituais sistemas de dedução natural para a lógica de primeira ordem com identidade. Se **t** e **t*** são termos de uma linguagem dada, **Φt** é uma frase com uma ou mais ocorrências de **t**, e **Φt*** uma frase que frase que resulta de **Φt** pela substituição de uma ou mais ocorrências de **t** por **t***, então a regra da eliminação da identidade permite fazer o seguinte: dadas as frases **t=t*** e **Φt** como premissas numa dedução, inferir a frase **Φt*** como conclusão.

Dada sua natureza exclusivamente semântica, não devemos confundir (SES), por exemplo, com a Indiscernibilidade dos idênticos. Resguardadas as devidas proporções, (SES) é subsidiário à lei da Indiscernibilidade dos Idênticos de Leibniz. Esta última não tem nada de linguístico ou de semântico. Ela nada diz acerca de objetos linguísticos em particular muito menos acerca de propriedades semânticas que esses objetos possuem. Trata-se de um princípio acerca de objetos em geral e acerca de propriedades que eles podem ter, independentemente da maneira como eles são linguisticamente identificados (caso o sejam), e independentemente mesmo do fato de esses objetos terem ou não qualquer espécie de representação linguística. Logo, se verdadeiro, (LIID) seria verdadeiro mesmo para objetos em princípio não nomeáveis ou descritíveis através de quaisquer dispositivos linguísticos disponíveis. Continuaria a ser o caso que objetos desses que fossem idênticos seriam indiscerníveis. Para além disso, (IND) seria verdadeiro mesmo que não existisse de todo qualquer linguagem. Não estamos dizendo que (IND) não se aplica a objetos lingüísticos e às suas propriedades. Claramente, na medida em que objetos lingüísticos, por exemplo palavras, são objetos, o princípio aplica-se a elas, pois aplicar-se-ia a quaisquer objetos dada sua generalidade. Todavia, uma coisa é o princípio ser aplicável a itens linguísticos e às propriedades que eles possam ter, o que é o caso; a outra coisa é o princípio ser um princípio intrinsecamente lingüístico, no sentido de que sua aplicação pressuponha necessariamente a existência de uma linguagem e de itens que lhe sejam relativos, o que não é o caso.

Portanto, diferentemente de LIID a substituição de equivalentes *salva veritate* é claramente semântico e estabelece que expressões co-referenciais, isto é, expressões que se referem ao mesmo objeto[10], ou expressões co-extensionais cuja extensão é intersubstituível *salva veritate*, preservam o valor de verdade, ao longo de quaisquer frases declarativas nas quais possam ocorrer. A intuição por trás dessa definição é que se substituirmos, numa frase qualquer, uma expressão que nela ocorra por uma expressão que tenha a mesma referência ou extensão do que ela, então a frase resultante é materialmente equivalente à primeira, uma frase que tem o mesmo valor de verdade do que a primeira. Considerando apenas a ocorrência de termos singulares numa frase qualquer a substituição de equivalentes é formulada nos seguintes termos:

*Sejam **t** e **t*** termos singulares co-referenciais, termos tais que uma frase de identidade estrita composta por eles, da forma **t=t*,** seja verdadeira. Suponha que a frase **S** contenha uma ou mais ocorrências de **t** (**S** é da forma ...**t**...), e **S*** uma frase que difere de **S** apenas pelo fato de conter ocorrências de **t*** em pelo menos um dos lugares onde **S** contém ocorrências de **t** (**S*** é da forma **...t*...**). Logo, **S** e **S*** têm o mesmo valor de verdade: se **S** é verdadeira, **S*** é verdadeira; se **S** é falsa, **S*** é falsa.*

Assim, o princípio (SES) pode ser lido como dizendo que a extensão de uma frase, a qual é identificada neste género de semântica com o seu valor de verdade, é determinada apenas pelas extensões dos termos singulares que a compõem. Tais extensões são identificadas pelos objetos referidos por esses termos singulares. De maneira que se preservamos as extensões das partes constitutivas, preservamos necessariamente a extensão do todo, desde que preservemos a estrutura; se fizermos variar pelo menos uma das extensões das partes componentes, podemos não preservar a extensão do todo, mesmo que preservemos a estrutura. Analogamente para termos gerais e frases declarativas. Numa frase dada um termo geral que nela ocorra por um termo co-extensional, um termo aplicável exatamente aos mesmos objetos então obtemos uma outra frase materialmente equivalente à primeira, e ambas terão a mesma extensão. Igualmente para frases declarativas cuja substituição de uma frase componente por outra frase materialmente equivalente, isto é uma frase que tenha a

---

[10] Na teoria dos conjuntos esse mesmo fato é expresso por um pressuposto básico denominado principio da extensionalidade. Grosso modo, conjuntos que têm os mesmos elementos são o mesmo conjunto. Este importante axioma recebe a seguinte formulação: $\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \leftrightarrow x = y)$. Em outras palavras, um conjunto é determinado pelos seus elementos, ou seja, pela sua extensão.

mesma extensão e portanto o mesmo valor de verdade, então a frase resultante também será materialmente equivalente à primeira.

Todas essas situações de substituição resguardando o valor de verdade dos termos substituíveis nas frases declarativas são característicos dos chamados *contextos extensionais*. Um contexto é dito extensional se e somente se satisfaz o principio da composicionalidade, isto ocorre conforme vimos anteriormente, apenas quando, no caso das frases declarativas, sua extensão é determinada em função das expressões constituidoras. Assim, seja um contexto C extensional relativamente às frases que lhe estão contidas; se C satisfaz (SES) para estas frases, então C é um contexto extensional. Usando uma outra designação muito empregada podemos dizer que um contexto dessa natureza é verofuncional, ou seja, C é verofuncional relativamente a termos gerais que nele possam ocorrer se C também satisfaz (SES).

Contudo, Frege observou que nem todos os contextos linguísticos relativamente às categorias de expressões que neles ocorrem são extensionais, afetando a determinação tanto do sentido quanto da referência. Contextos iniciados por verbos como "crer", "dizer", "querer", "saber", não se referem ao valor de verdade das expressões nas quais ocorrem, mas ao sentido delas. Por conseguinte, a substituição de expressões equivalentes e co-referenciais em contextos introduzidos por aquele grupo de verbos não preserva o valor de verdade de toda a expressão servindo assim de contra-exemplos aos princípios aqui examinados e que valem em contextos extensionais. Pela análise fregeana a referência usual da frase "as órbitas planetárias são circulares" é seu valor de verdade, e o sentido é a proposição que a frase expressa, portanto, a proposição de que as órbitas planetárias são circulares. Contudo, ao antepor um verbo de crença à frase, a ocorrência de "as órbitas planetárias são circulares" interna ao contexto do verbo "acreditar", como em "Carolina acredita que as órbitas planetárias são circulares", esta não tem sua referência usual, a saber o valor de verdade expresso pela frase; ela não tem sua referência direta, diria Frege, mas seu sentido usual passa a ser sua referência.

Suponhamos que o nome próprio "Aristóteles" e a descrição definida "O aluno mais famoso de Platão" sejam realmente co-referenciais. Parece um fato indisputável que ambas as expressões estão a tratar da mesma pessoa, tendo portanto a mesma referência uma vez que se trata do mesmo individuo. A atribuição da crença que um sujeito qualquer venha a ter acerca daquelas expressões parece estar acima de qualquer suspeita, pois qualquer pessoa com os conceitos relevantes acerca de Aristóteles estaria em posição, apenas com base em seu bom senso e na lógica elementar, de ter a crença em questão:

(1) *"Pedro acredita que Aristóteles é Aristóteles"*.

Substituindo a ocorrência do nome próprio "Aristóteles" em (1) pela descrição definida "O aluno mais famoso de Platão", obtemos a frase

(2) *"Pedro acredita que Aristóteles é o aluno mais famoso de Platão"*.

Note que (1) e (2) dizem coisas distintas e o valor de verdade de (2) mudou no momento da substituição da descrição definida "o aluno mais famoso de Platão". Pela substituição das expressões o valor de verdade de (2) dado que Pedro pode desconhecer a verdade da frase de identidade "Aristóteles é o aluno mais famoso de Platão; de qualquer jeito o que importa é que a inferência assim obtida não preserva a verdade das premissas. Portanto em (1) quanto em (2) as expressões fazem referência a um Pensamento (sentido), ao pensamento que Pedro tem acerca de Aristóteles, e não, ao valor de verdade de (1) e (2) como era de se esperar. Frege pretendia mostrar com esses casos que, em contextos onde a substituição de expressões co-referenciais e/ou equivalentes não preservam a mesma referência são chamados de contextos indiretos ou também de intensionais. Esses contextos se opõem aos contextos ditos transparentes onde as leis da lógica de predicado (substituição, generalização existencial[11], verofuncionalidade) são respeitadas. Segundo o principio da substitutividade dois termos co-referenciais podem ser substituídos *salva veritate*, mas em contextos intensionais ele não é válido.

Em todos estes casos, a função dos termos singulares que ocorrem nas frases subordinadas parece exceder a simples identificação de um certo objeto, com vista a depois dizer algo acerca dele, a predicar-lhe algo. Se a função dos termos singulares fosse aí apenas essa, então o valor de verdade das predicações feitas seria insensível ao modo como o objeto é linguisticamente identificado. Ora, as oscilações de valor de verdade notadas sugerem que o modo como o objeto é identificado, nas palavras de Frege "o modo de apresentação do

[11] Quine (1956) também havia constatado outra fonte de opacidade. O argumento de Quine está relacionado à quantificação. A generalização existencial não se verifica em contextos intensionais. (a ser explicada mais adiante)

objeto", desempenha um papel importante pois, para além de identificarem um objeto, ao ocorrerem em construções psicológicas ou epistêmicas, os termos singulares parecem introduzir também modos particulares de identificação desse objeto.

Em ambos os casos (1) e (2) acima, a co-extensionalidade dos termos singulares componentes é combinada com a não verificação da equivalência material das frases que os contêm. Isso significa que o valor de verdade destas frases depende de mais alguma coisa do que a simples referência das palavras componentes (tomada em conjunto com a estrutura das frases). Esse elemento adicional, que está além do objeto propriamente dito, tem naturalmente a ver com a maneira particular pela qual os indivíduos entendem e aplicam os termos singulares e os identificam com os objetos designados, de modo que uma alteração no modo de identificação do objeto pode gerar uma alteração no valor de verdade. Pelo que vimos, esse elemento adicional, Frege chamou de "sentido", mas que para o caso de uma frase complexa ele denominou "Pensamento".

Os argumentos de Frege para justificar sua noção de sentido parecem bastante razoáveis, no entanto, ao tentar defini-lo Frege não deixa claro como esta noção poderia ser submetida a um exame rigoroso. Certamente o sentido não era o tipo de objeto que se poderia ver ou tocar, mas mesmo assim, tinha para Frege uma existência real e objetiva advinda de suas reflexões acerca do caráter analítico das expressões de identidade. No artigo *Sentido e referencia* de 1892 estabeleceu a distinção sentido/referência para nomes e para expressões complexas, notadamente frases declarativas. Enquanto a referência respeita o principio de extensionalidade da lógica, a saber, se os nomes "a" e "b" compartilham a mesma referência então necessariamente a referência de a é igual a referência de b. No caso dos termos singulares dizemos adequadamente que "a" e "b" nomeiam o mesmo objeto, logo, "a" e "b" são intersubstitutíveis entre si resguardando o valor de verdade. Para o sentido a situação é completamente diferente, pois ela se mostrou duplamente problemática. Primeiro porque, considerando que a referência de um termo singular qualquer resulta no individuo nomeado, o sentido corresponderia ao modo de apresentação do indivíduo. Frege conferiu ao modo de apresentação dos nomes uma existência própria e independente. Isso significa que o sentido das expressões não faz parte da linguagem em si, e que esta é apenas um meio de facilitar a referência a objetos abstratos que são os sentidos. Mas não explicou com toda precisão em que consiste o modo de apresentação de um nome. O segundo problema é o seguinte: em contextos dito intensionais (indiretos) os sentidos são eles próprios a referência das frases declarativas e não mais seu valor de verdade. Claramente não podemos fazer uso da igualdade das extensões, pois, em um contexto intensional a substitutividade de idênticos, em que partes podem ser substituídas por partes equivalentes, não é válida. Frases declarativas introduzidas pelos verbos “acreditar”, “crer”, “saber”, tal como a frase “João acredita que seu time vencerá o campeonato”, geram um contexto no qual os termos se referem aos sentidos e não mais a um valor de verdade, mas ao pensamento que João tem acerca da vitória de seu time. Portanto, se a referência das frases declarativas em contextos intensionais não corresponde mais ao valor de verdade que a frase expressava em contextos não intensionais, mas ao seu sentido, impõe-se saber qual o sentido das frases declarativas nesses mesmos contextos.

Não vem como uma surpresa o fato de que a análise da linguagem é enriquecida e a noção de sentido é expandida. Afinal de contas começamos com uma noção de sentido relacionada aos nomes e as frases declarativas em contextos não intensionais, aceitando como não problemática a existência destes primeiros sentidos, também deveremos aceitar a existência de uma hierarquia de sentidos, sentidos de sentidos, etc., *ad infinitum* para o caso dos contextos intensionais. Daí nos vem a pergunta: dado o sentido da expressão φ podemos demonstrar corretamente o sentido de φ em contextos intensionais? A questão aqui é crucial sobretudo na filosofia da linguagem pois diz respeito aos portadores do significado lingüístico: são eles objetos lógicos, que podemos descrever formalmente, assim como as frases que compõem dada gramática, ou são entidades mais ligadas ao contexto em que ocorrem, como os proferimentos? De acordo com uma corrente filosófica formada por Carnap, o "primeiro" Wittgenstein", Church, etc, o sentido é dito ser um objeto linguístico formal, de modo que existe um sentido literial que as frases incoporam e que este independe das intenções dos falantes. A esta corrente se opõem filósofos como o "segundo" Wittgenstein Austin, Searle por acreditarem que o sentido está associado ao nível da fala, de modo que não dá pra saber o significado de uma frase anterior ao seu ato proferido. Optaremos neste trabalho pela primeira corrente. Destacaremos os trabalhos propositivos de Alonzo Church, Rudolf Carnap, Pavel Tichy, bem como a crítica de Quine a esta tradição. Evidentemente que algumas restrições foram feitas. Tanto Church quanto Carnap se distanciaram em analisar a natureza do sentido. Em Frege o sentido tinha uma forte carga ontológica. Por se tratar de uma questão particular e, por exigir solução igualmente particular, Carnap simplificou o problema rejeitando a inevitável hierarquia dos sentidos dos contextos intensionais.

Embora as distinções estabelecidas por Frege tenham sido significativas para o desenvolvimento da análise semântica da linguagem, ele frustrou todos aqueles que buscaram em sua teoria semântica um critério de identidade para os sentidos, dado o caráter puramente operacional da distinção entre sentido e referência por ele defendida. Como não sabemos exatamente o status ontológico do sentido em Frege pelo fato de que ele não apresentou um critério para identificá-lo, ao esquematizarmos as soluções propostas por Church e Carnap esperamos por conseguinte ilustrar a estratégia geral de construção da identidade do sentido e qual critério eles utilizaram. Frege não conseguiu definir o sentido de maneira rigorosa, afinal "o modo de apresentação" como o objeto é designado diz muito pouco acerca da natureza do sentido. Mas, o fato de não ter conseguido defini-lo de maneira suficientemente rigorosa revela, no entanto, o cuidado que ele teve em não reduzir o sentido à referência.

CAPITULO 2 – O ISOMORFISMO SINONÍMICO DE CHURCH

A lógica formal, ou o estudo das formas válidas de raciocínio, foi uma criação de Aristóteles. Ele apresentou o que lhe parecia ser um elenco exaustivo de formas válidas de inferências silogísticas. Uma forma de inferência é um modo de se obter conclusões a partir de pressupostos; uma inferência é (logicamente) válida se a veracidade da conclusão depende apenas da veracidade dos pressupostos; ela será formal se independer do conteúdo, do que é dito, mas apenas da forma lógica das asserções, de como isso é dito. Mas essa ciência estava longe de contemplar a totalidade dos modos de dedução efetivamente utilizados na ciência e na vida prática, restringido-se essencialmente aos silogismos.

Leibniz havia lançado uma idéia que iria frutificar ao longo do século XIX, mudando radicalmente a face da lógica. Ele concebera a possibilidade de um cálculo simbólico em que pudéssemos expressar nossos juízos e levar a cabo seqüências de raciocínio de modo puramente algorítmico, pela mera manipulação dos símbolos segundo regras, uma espécie de *calculus ratiocinator*. Apesar de suas tentativas, tal projeto permaneceu uma utopia, mas foi reavivado, em meados do século XIX, por George Boole. Este lógico inglês criou um sistema simbólico no qual se poderiam expressar alguns tipos de asserções e representar regras de dedução por meio de operações algébricas. Em seus livros *The mathematical analysis of logic* (1847) e *An analysis of the laws of thought* (1854), mostrou como as leis da lógica formal, expostas por Aristóteles e ensinadas nas universidades, durante séculos, poderiam se tornar objetos de um cálculo. Entretanto, a lógica de Boole não contemplava esquemas inferenciais muito mais gerais que os de Aristóteles[12].

A lógica simbólica recebeu também contribuições importantes de Peano, Schröder e Peirce. Mas foi com Frege que ela atingiu a maioridade, aproximando-se do ideal leibniziano. Frege criou uma *língua characteristica* (um sistema simbólico de notação) rica o bastante para expressar asserções matemáticas, e um *calculus ratiocinator* suficientemente potente para dar conta das deduções matemáticas. Ele estava, porém, particularmente interessado nas asserções matemáticas pois pretendia demonstrar *o caráter lógico da aritmética* mostrando que ela poderia não apenas ser escrita na linguagem simbólica que ora propunha, mas também deduzida a partir de verdades gerais de natureza puramente lógicas. Em 1879, quando publicou a *Begriffsschrift*, a matemática clássica já havia sido inteiramente reduzida à

[12] Maiores detalhes ver Silva (2007).

chamada aritmética de Peano, um conjunto de cinco postulados, cujos únicos conceitos não-lógicos são os de zero, sucessor, número natural e o conjunto dos naturais. Mas, por mais formidável que fosse essa sistematização, ela ainda não respondia a algumas questões básicas tradicionais, notadamente à questão sobre a natureza do número e a questão de saber se a matemática é analítica ou sintética. Frege acreditava que poderia mostrar de uma só vez que os únicos pressupostos incondicionais de que dependem todas as asserções aritméticas, a contar a própria natureza conceitual do numero e a própria aritmética, são conseqüências de verdades lógicas universais. E isto demonstraria que a aritmética seria nada mais que lógica pura.

Apesar de concordar com Kant quanto à geometria, Frege acreditava que a aritmética seria analítica, porém em um sentido de analiticidade diferente do de Kant. Segundo uma análise lógica tradicional – que remonta inicialmente a Leibniz –, uma proposição representa uma *verdade analítica* quando tem a forma "o sujeito *s* tem o predicado *P*" e o significado do predicado *P* está contido no significado do sujeito *s*. Por exemplo, a proposição "os corpos são extensos" é uma verdade analítica, porque a idéia de extensão está contida na idéia de corpo. Para Kant tanto o sujeito quanto o predicado dos enunciados referem-se a representações ou idéias, que são mais ou menos como cópias dos objetos por elas representados no interior de nossas consciências.

As idéias kantianas relativas ao conhecimento matemático, porém, nunca convenceram completamente, em particular com respeito à *pretensa natureza sintética do conhecimento aritmético*. Parece razoável que a geometria seja uma teoria do espaço físico, entendido como uma moldura que impomos às nossas representações do mundo, mas é menos crível que a aritmética seja em sentido análogo uma teoria do tempo. Seria possível que Kant estivesse certo quanto à natureza do conhecimento geométrico, mas que, quanto à aritmética, a verdade estivesse com Leibniz para quem as asserções matemáticas pertenciam às verdades da razão, portanto, necessárias e a priori? Afinal, a geometria parece ser o conhecimento de algo em particular, o espaço da intuição, enquanto a aritmética, por seu turno, parece ser um conhecimento absolutamente geral sobre nada em particular, pois tudo pode ser contado. É notório o caráter particular da geometria por oposição à aritmética, aparentemente entranhada na própria Razão. O que sugere que a primeira talvez seja da ordem da intuição, como queria Kant, enquanto a segunda, da ordem da lógica, como queria Leibniz. Era nisso precisamente que Frege acreditava.

A estratégia logicista de Frege começa com a releitura das distinções kantianas analítico – sintética as quais haviam sido estabelecidas associando-as a representações. Para Frege esta distinção é puramente lógica, de modo que asserções são analíticas ou não *em razão de suas demonstrações, isto é, em virtude unicamente de seus fundamentos e não em razão das relações entre seus conteúdos*. Para provar que todas as verdades lógicas (analíticas) não requerem o conhecimento dos conteúdos de seus enunciados Frege criou a lógica moderna. Sua estratégia consistia em fornecer um sistema de lógica simbólica, com um alfabeto, leis gerais e regras de inferência explicitamente dadas de modo que, primeiramente, tivéssemos claro o que se entende por lógica e verdades lógicas e, em segundo lugar, pudéssemos verificar sem ambigüidades se uma dada seqüência de proposições constitui de fato uma demonstração, e quais são seus pressupostos. O passo seguinte seria definir todas as noções e termos aritméticos nessa linguagem e demonstrar todas as verdades aritméticas nesse sistema lógico. Respeitados todos esses passos, pensava Frege, estaria demonstrado que a aritmética é analítica, ou seja, pura lógica.

Se assumirmos que a tarefa do logicismo se constitui em derivar conceitos matemáticos a partir de conceitos lógicos e verdades matemáticas a partir de verdades lógicas então parece ao menos evidente que qualquer forma de logicismo exige que suas asserções sejam verdades puramente lógicas. Todavia, para saber se uma asserção é puramente lógica ou não é preciso antes determinar se os conceitos que nela ocorrem são lógicos ou não. Mas, o que faz de um conceito um conceito lógico? Um conceito é lógico na medida em que está fundado numa identidade implícita ou explicita entre seus termos. Logo, pelo principio da reflexividade da identidade segue que sua negação tem que ser necessariamente autocontraditória. Com efeito, assumindo que as asserções analíticas são lógicas, isto é, que elas podem ser reduzidas a identidades entre representações específicas, como diria Kant, então todas elas não seriam informativas. Isto porque uma identidade analítica ficaria sempre redutível a uma instância do principio de identidade, a uma identidade meramente tautológica e, portanto, trivial. Frege atacou este problema, mostrando que as asserções analíticas não são vazias.

Para explicar por que uma expressão verdadeira da forma "a = b" pode ser informativa, ao contrário de uma outra expressão sob a forma "a = a", Frege introduziu uma entidade nova entre a expressão propriamente dita e o objeto cuja expressão é sua referência. Ele nomeou esta entidade de sentido (*Sinn*) e pode assim explicar, em geral, o caráter informativo que distingue as chamadas expressões analiticas/a priori das expressões empiricas/a posteriori e, em particular, contrariar a análise tradicional amplamente aceita até então segundo a qual dos enunciados analiticos nada informam sendo portanto meras tautologias. Ao contrário, Frege mostrou exatamente que expressões analíticas não são vazias porque trazem consigo um conteúdo informativo. A postulação do sentido tem conseqüências definidoras para a recém chamada filosofia analítica que Frege acabara de inaugurar. Em especial, ter-se-ia uma estrutura paralela à linguagem e intermediária entre suas expressões e algo não lingüístico, uma espécie de segunda estrutura. O sentido de uma frase declarativa é a proposição expressa por esta frase e a referência (caso tenha) seu valor de verdade. Termos singulares, nomes próprios e descrições definidas, também teriam sentido e referência. O problema, porém, é que Frege nunca definiu o sentido. Tudo o que ele diz é que o sentido é o "modo de apresentação" da referência. O matemático norte – americano Alonzo Church (1903-1995) foi o primeiro a oferecer um cálculo lógico que compreendesse os termos fregeanos sentido/referência por ele denominado de *Formulação da Lógica do Sentido e da Denotação* (1951). Usaremos a abreviação LSD toda vez que nos referirmos a este cálculo, na verdade, uma lógica de ordem superior.

Church escreveu vários artigos intitulados a *Formulação da Lógica do Sentido e da Denotação* (1946, 1951, 1973, 1974, 1993) nos quais tem como propósito a formalização do sentido e da referência[13]. Vale ressaltar que originariamente ele não estava interessado apenas em propor a formalização das duas categorias fregeanas, mas sim, em estabelecer pela primeira vez um sistema de lógica intensional. Todos os artigos, dentre eles as versões revisadas, representam a tentativa de traduzir Frege mantendo suas idéias basilares (ver KLEMENT, 2010). Em LSD toda constante primitiva é construída paralelamente a uma hierarquia de constantes de sentido. No sistema, fórmulas são termos para os dois valores de verdade o Verdadeiro e o Falso. Predicados e conectivos proposicionais são funções que, respectivamente, mapeiam indivíduos a valores de verdade e valores de verdade em valores de verdade, respectivamente. Temos então que uma expressão qualquer da linguagem tem seu correlato formal representado por função, indivíduos e valores de verdade. Devemos entender essa correlação em termos estritos. Para cada "sentido" ou pensamento expresso existe um sentido e referência previstos no cálculo. Vale lembrar que a tarefa de apresentar LSD se dá por meio do cálculo funcional através do lambda cálculo, de suas operações e da teoria

[13] A respeito das muitas versões de LSD ler o texto *The Logic of sense and denotation: extensions and applications* de Terence Parson (2001) in *Logic, meaning and computation: Essays in memory of Alonzo Church.*

simples dos tipos. Para formalizar a lógica de ordem superior emprega-se os princípios do lambda cálculo, com suas noções de *aplicação e abstração*. A eles é incorporada a noção de tipos, o que permitirá a distinção sintática explicita entre os termos que se referem a diferentes tipos de objetos. A finalidade principal da associação de tipos aos elementos do alfabeto é diferenciar átomos, predicados e funções.

Embora seja considerado o lógico mais importante do século 20 e tenha defendido uma maior proximidade entre a filosofia e a lógica matemática, sua "lógica filosófica" não tem recebido a devida atenção por parte dos filósofos. Em contrapartida, é em meio aos cientistas da computação que sua obra, particularmente depois que concebeu o lambda cálculo, tem recebido maior adesão e menção explicita. Nos anos de 1930, bem antes do surgimento do primeiro computador, Church inventou o lambda cálculo como parte de um sistema para lógicas de ordem superior e teoria das funções cujo principal intuito era capturar os aspectos mais básicos da maneira pela qual funções podem ser combinadas para formar outras funções[14]. Em outras palavras, o lambda cálculo modela e estuda o comportamento pelo qual funções são computáveis[15].

Church observou que quando apresentamos uma função pela expressão $x + y$, não é sempre claro o que a função está realmente denotando. Por exemplo, a expressão $x + y$ pode ser interpretada de várias formas, todas igualmente aceitáveis:

1. O número $x + y$, em que x e y são alguns desses números;

2. A função $f : x \mapsto x + y$, que associa ao número x, o número $x + y$ para algum y pré-definido.

3. A função $g : y \mapsto x + y$, que associa ao número y, o número $x + y$ para algum valor de x pré-definido;

[14] Os programas em computação apresentam uma propriedade curiosa, eles são funções assim como seus argumentos e valores, formando um mundo fechado de funções. Um programa é uma parte da memória de um computador, seus dados, ou melhor, seus argumentos são também zonas da memória e seu resultado está inscrito em uma zona desta memória. Para fazer com que esses dados presentes na memória da máquina ajam uns sobre os outros o motor desta ação é o processador do computador. De modo a descrever matematicamente esta operação é necessário construir um universo no qual os objetos representem funções e cujos argumentos e valores sejam também funções, dito de outro modo, um universo de funções agindo sobre elas mesmas. Tal estrutura corresponde ao lambda cálculo, simbolizado pela letra grega λ (lambda).

[15] Em 1935, porém, Kleene e Rosser, alunos de Church, provaram que o sistema era inconsistente, uma vez que seria possível simular o paradoxo de Russell dentro da teoria. Church, então, separou o subsistema que lidava apenas com funções e o usou para estudar a computabilidade. O estudo deste subsistema, levou à Tese de Church, que afirma que toda função computável pode ser escrita como um λ – termo.

4. Ou ainda, a função $h : x, y \mapsto x + y$, cujos argumentos são *x* e *y* e retorna o valor *x* + *y*.

Devido a essa ambigüidade, Church propôs em *A Set of Postulates for the Foundation of Logic* (1932-33) uma nova notação para que, nas funções, estivessem devidamente diferenciadas as variáveis usadas como argumentos e variáveis que representam valores pré-definidos. Nesta notação, uma função com um argumento *x* é precedida pelo símbolo λ (lambda). Por exemplo, a função $f : x \mapsto x + y$, que associa a uma entrada *x* o número x + y para algum valor de y pré-determinado é escrita $\lambda x.x + y$. As funções $f : x \mapsto x + y$, $g : y \mapsto x + y$, $h : x, y \mapsto x + y$ podem ser facilmente diferenciadas no lambda cálculo por $\lambda x.x + y$, $\lambda y.x + y$, $\lambda xy.x + y$, respectivamente. A idéia básica é a seguinte: antepomos à expressão numérica a notação 'λx'. e obteremos uma expressão que designa uma função. Seja o termo numérico 'x+2' então com a notação lambda teremos $(\lambda x)(x + 2)$ que designa a função *f* tal que para todo numero real *x, f(x)=x+2.* Se a esta função for aplicada o valor 3 obteremos 5 como valor da função *f(x)=x+2*, ou seja, em notação lambda, $(\lambda x.x + 2)3 = 5$.

Trata-se de uma estrutura munida por duas operações, uma bem simples outra um pouco mais sutil. A primeira é chamada *aplicação* e seu sentido é bem intuitivo e muito simples: seja a função *f* e um argumento *g* (como visto também é uma função) então poder-se-ia aplicar *f* a *g* obtendo *f(g)*, ou seja, outra função. Com respeito a outra operação, um pouco mais complicada, é chamada de *abstração* e corresponde aproximadamente a transformação de uma fórmula em objeto matemático. Intuitivamente o sentido da operação abstração é o seguinte: ela consiste em substituir a função considerada pelo seu nome, ou então sua referência. Por exemplo, a função arco-tangente (arctang) do cálculo diferencial é o nome da função definida por $x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$. Na notação do lambda cálculo $\lambda x. \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ é o nome para "arctang". Se uma função qualquer $\phi(x)$ é definida em um texto de matemática sob a referência **Definição 25**, usando a notação lambda $\lambda x\ \phi(x)$ equivale ao nome "Definição 25". Obviamente que a operação de abstração nem sempre é possível para todas as funções matemáticas, pois nem todas possuem um nome ou uma referencia ou se quer são definidas.

O λ – cálculo é uma teoria de funções em que estas são representadas através de regras, ao invés da tradicional abordagem de funções como grafos[16]. Na matemática as funções podem ser analisadas sob duas abordagens: elas podem ser grafos ou simplesmente regras. A diferença básica é que na primeira uma função é um conjunto de pares ordenados, onde o primeiro elemento é o valor assumido pela variável de entrada (pode ser mais de uma) e o segundo o valor da imagem da função calculada para um determinado ponto. Portanto, nessa abordagem, estamos tratando apenas com valores. Na segunda abordagem, o importante é o comportamento (ou aspecto computável) da função, a despeito da função ter ou não entrada, e da entrada ser ou não um valor bem definido. Desse modo, em particular, funções podem tomar, por exemplo, outras funções como entrada e produzir funções como saída[17]. A partir daí desenvolve-se toda uma teoria sobre o comportamento e a semântica de tais funções.

Em Church a noção de função é claramente primitiva, ao invés da noção de conjunto adotada por Frege. A idéia de Frege era a seguinte: uma função é um predicado, por exemplo, f(2x)=4 ou ser brasileiro (Francisco Martins)=verdadeiro. O resultado de uma função nada mais é que o valor da aplicação funcional para um determinado objeto. Mas, há predicados que originam contradições, paradoxos[18]. O paradoxo de Russell é o mais conhecido deles. O problema do sistema de Frege notadamente pela chamada 5ª. Lei fundamental da aritmética é assumir que qualquer conceito tem uma extensão. Daí porque podemos concluir sem perda de generalidade que o sistema de Frege é estritamente extensional, portanto, não intensional. As funções em Frege são mapeamentos, grafos, ou segundo a terminologia que ele empregou, percursos de valores (*Wertverlauf*). No entanto, ocorre que, de acordo com a própria definição fregeana, uma função é uma entidade insaturada, incompleta, diferentemente de um grafo que é completo.

[16] Essa idéia de funções como regras surgiu antes mesmo da idéia, usualmente atribuída a Dirichlet, de que funções podem ser consideradas como gráficos, i.e., como conjuntos de pares:(argumento, valor).

[17] O lambada-calculo não tipado considera *tudo* como funções: números, valores booleanos, etc. Ocorre que o lambda calculo não tipado não é forte o bastante para servir de fundamento da matemática, sendo mais adequado na teoria da computação. Diferentemente do lambda calculo tipado aqui sob consideração no qual os números e valores booleanos não são funções mas sim são os tipos de base. Posteriormente, Church empregou-os em sua Teoria dos Tipos Simples (1940). Para maiores detalhes dessa discussão ver Kamaraddine, Laan e Nederpelt (2005).

[18] O paradoxo de Russell é o mais conhecido deles. Se toda condição determina um conjunto, então considere o conjunto y determinado pela condição de x não pertencer a x . Ou seja, y é o conjunto de todos os conjuntos que não são elementos de si mesmos. A princípio, y é um conjunto grande, uma vez que a maioria dos conjuntos não é membro de si mesmo. Por exemplo, o conjunto dos reais não é um número real. O paradoxo consiste no fato de que y é um elemento de si mesmo se e somente se não o é.

Na concepção extensional uma função e o seu grafo se confundem, eles são tomados como sendo a mesma coisa[19]. Geralmente se refere ao grafo de uma função como sendo um conjunto de pares ordenados (ou ênuplas ordenadas, dependendo da quantidade de argumentos da função), em que o primeiro elemento é o argumento da função, e o segundo o valor que a função atribui a esse argumento. Assim, toda função $f : A \rightarrow B$ sendo **A** o domínio e **B** o contradomínio, produz uma relação entre **A** e **B** em que para cada **a** pertencente a **A** só existe um **b** pertencente a **B**, i.e., não existem dois pares ordenados distintos com o primeiro elemento igual. A partir desse ponto de vista não se considera o "conceito" associado à função, pois duas funções podem operar distintamente, mas que no final das contas sempre associam o mesmo valor para os argumentos de um mesmo domínio, são consideradas idênticas. Por exemplo, as funções **f** = 2**x** e **g** = (1+1)**x**, se tiverem o mesmo domínio, são tidas como idênticas, o que não é o caso[20].

Church, por sua vez, substitui o conceito de conjunto pelo de função enquanto conceito primitivo, e dá assim uma interpretação intensional ao sistema. Uma função qualquer é uma intensão, ou “relação-em-intensão; ela só forma uma frase quando leva um objeto, um sujeito e aí pode formar ou não um conjunto. Por exemplo, f(x)=2x, ser brasileiro(x); o resultado delas é que pode ser uma extensão, um conjunto (ou não). Mas de qualquer forma funções nesta concepção são intensões, são conceitos.

Funções como regras é a noção mais antiga de função e refere-se ao processo de partir de um *argumento* para um *valor*, processo este determinado apenas por uma definição, notadamente dada por uma λ – expressão que dita o comportamento da função, e certas regras. Desta forma, é possível estudar os aspectos computacionais das funções. Podemos pensar em funções determinadas por definições em português aplicadas a argumentos também

---

[19] O contraste entre as funções como grafos (mapeamentos) e funções como regras podem ser resumidas a partir de uma concepção intensionalista e extensionalista das funções. (Tichý tem uma boa discussão e exposição deste contraste nos primeiros capítulos de seu livro de 1988, *The Foundations of Frege's Logic*). Ver também capitulo 1 do livro de Marie Duzi, Pavel Materna e Bjørn Jespersen, *Procedural Semantics for Hyperintensional Logic – Foundations and Applications of Transparent Intensional Logic*, Springer 2010. Agradecemos antecipadamente aos professores Marie, Pavel e Bjørn pela gentileza, presteza e confiança em nos ter enviado uma versão eletrônica do livro. Frege parece às vezes estar propenso a aceitar unicamente a concepção extensionalista das funções pois ele precisava que as funções fossem extensionais do contrário ele não teria um claro principio de individuação. Por outro lado, às vezes ele parece estar propenso a admitir a concepção intensionalista das funções, pois deste modo ele poderia acomodar a noção de Sinn como sentido cognitivo (Erkenntniswert) em seu sistema. Durante a segunda metade de sua carreira Frege concebeu o Sinn como portador de um valor cognitivo, mas o problema é que o Sinn nunca foi plenamente definido.

[20] Agradecemos a Bruno Rigonato por nos esclarecer essa questão.

expressos em português. Assim, para definir uma função de A para B, é preciso dar uma regra que dirá como produzir um elemento de B a partir de um elemento de A. Por exemplo, a função $f(x) = x + 2$ é representada no λ – cálculo por $\lambda x.x + 2$ que significa: o comportamento da função é *adicionar 2* ao argumento, caso exista. Observe que o nome da função (antes *f*) não importa, ou seja, foi abstraída. Também não importa se a função é ou não aplicada a um argumento (no caso de *f*, o argumento era x, uma vez que isso não é necessário para descrever o comportamento da função. Uma função agora passa a ser representada por $\lambda x.M$, onde x é o parâmetro da função e M é o corpo da função. No λ – cálculo a expressão $\lambda x.M$ pertence a um conjunto de elementos chamados de λ – termos e que definiremos a seguir:

Definição **1:** Seja Ψ um conjunto enumerável infinito de símbolos, os quais chamaremos λ – variáveis, ou simplesmente, variáveis. Um λ – termo é um dentre os seguintes:

(i) cada variável é um λ – termo, chamado de termo atômico;

(ii) se M e N são λ – termo, então (MN) é um λ – termo, chamado de aplicação;

(iii) se M é um λ – termo e x é uma variável, então λx.M é um λ – termo, chamado de abstração ou então λ – abstração.

Um λ – termo pode ser uma variável, uma abstração ou uma aplicação de termos. Observe que um λ – termo é uma função com apenas um argumento que, por sua vez, vem a ser uma função com um único argumento. Dessa forma, se tem uma idéia intuitiva do porque λ – cálculo trata de funções recursivamente enumeráveis. Uma função com múltiplos argumentos é expressa usando uma outra função cujo resultado é uma vez mais outra função. Suponha que *L* seja um termo que contenha apenas as variáveis livres x e y, e queiramos formalizar a função *f*(*x, y*) = *L*. Na abstração $(\lambda y.L)$ a variável x está livre, para todo x, e que representa uma função sobre y. A abstração $(\lambda x.(\lambda y.L))$ não possui nenhuma variável livre: quando aplicada aos argumentos M e N, o resultado é obtido ao substituir x por M e y por N em L. Simbolicamente realizam-se duas beta-reduções

$$(((\lambda x.(\lambda y.L))M)N) \to ((\lambda y.L[M/x])N) \to L[M]x][N/y]$$

Funções de vários argumentos em λ – cálculo são expressas por uma função, cujo resultado é outra função. Dessa maneira, é possível transformar uma função de dois argumentos em uma função de apenas um argumento. A técnica acima é conhecida como “currying” em homenagem ao matemático norte-americano Haskell B. Curry (1900 – 1982). A abstração λxy.L é chamada de versão “curryied” de *f*(*x,y*). Claramente, essa técnica é válida para qualquer número de argumentos. Para *n* variáveis, temos

$$(\lambda x_1 \ldots x_n f(x_1,\ldots,x_n))x_1,\ldots,x_n =_\beta f(x_1,\ldots,x_n)$$

Seja M pertencente ao conjunto de λ – termos e tome uma variável x tal que $x \notin FV(M)$. Defina o λ – termo M’≡ λx.Mx. Assim, para todo argumento A, temos MA $=_\beta$M’A. Agora tome M≡ zy e M’≡ λx.zyx, por exemplo, para qualquer A temos

$$M'A \equiv (\lambda x.zyx)A =_\beta (zy)A \equiv MA$$

Deste modo, M e M’ definem a mesma função. De certa maneira, M e M’ devem ser considerados equivalentes. Este é o chamado princípio da extensionalidade, que afirma que se duas funções retornam sempre o mesmo valor para qualquer argumento, então elas são iguais. Em λ – cálculo, esse princípio é formalizado pela regra η. A regra η - redução assegura que se dois predicados têm a mesma extensão, então seus sentidos são os mesmos. A regra η - redução assim como a regra β – redução formam o conjunto de operações que compõem as operações de λ – conversões as quais são usadas para se obter fórmulas equivalentes entre si. São exatamente essas operações que determinarão a identidade em LSD.

Em uma abstração λx.M, a variável x, que representa o argumento da função, e pode ou não ocorrer em M. No caso positivo, qualquer ocorrência de x em M é dita ser ligada, enquanto que qualquer outra variável é dita ser livre, a menos que esta outra variável seja ligada por uma outra abstração. Por exemplo, a variável y em λxλy.xy é ligada, enquanto que em λx.xy a mesma variável é livre. Se um λ – termo não possui variáveis livres, então dizemos que este é fechado. Por outro lado, em uma aplicação (MN) não há qualquer restrição sobre o operador M e o argumento N.

Para não sobrecarregar a notação, utilizamos as seguintes convenções:

i) Letras minúsculas, como x, y, z; são usadas para denotar variáveis, e letras maiúsculas, como L, M, N; denotam λ – termos arbitrários.

ii) Aplicações são associativas à esquerda: MNP denota (MN)P; ((PQ)R) é abreviada por (PQR).

Exemplos:

(a) $xyz(yx)$, $\quad (((xy)z(xy))$

(b) $\lambda x.uxy$, $\quad (\lambda x.((ux)y)\ )$

(c) $\lambda u.u(\lambda x.y)$, $\quad (\lambda u.(u(\lambda x.y))\ )$

(d) $(\lambda u.vuu)zy$, $\quad ((\ (\lambda u((vu)u))z\ )y\ )$

(e) $ux(yz)(\lambda v.vy)$, $\quad (\ ((ux)(yz))(\lambda v(vy))\ )$

(f) $(\lambda xyz.xz(yz))uvw$, $\quad (\ (\ (\ (\ \lambda x(\lambda y.((xz)(yz)))))\ )u\ )v\ )w\ )$

iii) O corpo de uma aplicação se estende à direita o quanto for possível, logo, λx.MN denota λx.(MN), e não (λx.M)N.

iv) Uma seqüência de λ – abstrações são concatenadas, logo λx.(λy.(λz.M)) é escrito como λxyz.M; $(\lambda x_1(\lambda x_2(...\lambda x_n P)...))$ é abreviado por $(\lambda x_1 x_2 ... x_n .P)$.

v) Escrevemos M≡N, se M e N denotam o mesmo termo de acordo com convenções acima, ou seja, se forem idênticos.

vi) os parênteses mais externos de um λ – termos são omitidos

Exemplos:

1) $(\lambda v(vv))$ é abreviado para $\lambda v(vv)$ conforme (vi) acima

2) $(((\lambda xx)(\lambda yy))(\lambda zz))$ é abreviado por $(\lambda xx)(\lambda yy)(\lambda zz)$ de acordo com (ii) e (vi)

3) $(\lambda x(\lambda y(xy)))$ é escrito por $\lambda x\lambda y(xy)$ por (vi), (iii) ou então $\lambda xy.xy$ conforme (vi) e (iv)

4) $(\lambda f((\lambda u(f(uu)))(\lambda v(f(vv)))))$ é escrito por $\lambda f.(\lambda u.f(uu))(\lambda v.f(vv))(f(uu)))(\lambda v(f(vv)))))$.

A operação que leva uma variável x em um termo M, que pode ou não conter x como uma variável livre, é conhecida como regra ξ. A abstração λx.M representa uma função *f* tal que *f*(x)=M, para todo x. Já a aplicação (λx.M)N representa a função *f* calculada no argumento N, resultando em *f*(N). Isto significa que devemos substituir todas as ocorrências de x em M por N. Intuitivamente, uma abstração significa extrair de uma fórmula a propriedade ligada da variável que está sendo abstraída. Verbalmente, a fórmula $(\lambda x_\alpha H_\beta)$ significa "a propriedade x tal que H" ou ainda, "a classe dos elementos x tal que H". Trata-se portanto de uma generalização. A aplicação, por sua vez, restringe a fórmula pois corresponde à eleição de um elemento.

O λ – cálculo possui apenas uma regra de redução, que basicamente diz que aplicar uma função a um argumento significa substituir todas as ocorrências da variável da função pelo argumento em questão. Mas, antes precisamos saber os conceitos de substituição e de liberdade de uma variável para substituição. Informalmente, interpretamos assim a substituição: seja G uma fórmula cujo tipo é igual ao tipo de x e F uma fórmula qualquer. A notação $S^{x}_{G}F$ é usada para representar o resultado da substituição de todas as ocorrências livres de x em F por G.

Definição **2:** A substituição de todas as ocorrências livres de uma variável x por um termo N em M, denotada por M[N/x], é definida recursivamente como a seguir:

$x[N/x] = N$
$y[N/x] = y$; se $x \neq y$
$M_1M_2[N/x] = (M_1[N/x])(M_2N/x])$
$(\lambda x.M)[N/x] = \lambda x.M$
$(\lambda y.M)[N/x] = \lambda y.(M[N/x])$; se $x \neq y$ e $y \notin FV(N)$.

<u>Exemplos</u>:
1. $\mathbf{(\lambda x.xy)[uv/x]} = \lambda x.xy$
2. $\mathbf{(\lambda x.xy)[uv/y]} = \lambda x.xuv$
3.$\mathbf{(\lambda xy.xyz)(\lambda uv.vz)[w/z]} = (\lambda xy.xyz)[w/z](\lambda uv.vz)[w/z]$
$= (\lambda xy.xyw)(\lambda uv.vw)$
(4) $\boldsymbol{[(uv)/x]\ (\lambda y.x(\lambda w.vwx))} = \lambda y\ uv(\lambda w.vw(uv))$
(5) $\boldsymbol{[(\lambda y.xy)/x]\ (\lambda y.x(\lambda x.x))} = \lambda y.(\lambda y.xy)(\lambda x.x)$
(6) $\boldsymbol{[(\lambda y.vy)/x]\ (y\ (\lambda v.xv))} = y\ (\lambda z.\ (\lambda y.vy)z)$, *onde* $z \neq v, y, x$
(7) $\boldsymbol{[(uv)/x]\ (\lambda x.zy)} = \lambda x.zy$.

A última cláusula na Definição 2 garante que nenhuma variável livre em N se torne ligada após a substituição. Por exemplo, tome $M \equiv \lambda y.x$ e $N \equiv y$. Neste caso, $y \in FV(N)$. Se a substituição fosse permitida, teríamos

$$M[N/x] = (\lambda y.x)[N/x] = \lambda y.N = \lambda y.y \ (*)$$

No termo resultante (*), y agora ocorre ligada. Mais ainda, transformamos a função constante $\lambda y.x$ na função identidade, $\lambda y.y$. Para evitar essa captura de variáveis, que pode gerar contradições, vamos definir uma noção de equivalência entre termos. Primeiramente, observe que certos termos diferem apenas nos nomes das variáveis ligadas. Por exemplo, os termos $\lambda x.x$ e $\lambda y.y$ representam a mesma função, a saber, a função identidade I. Assim como $\lambda xy.x$ e $\lambda zy.z$ representam a função booleana [verdadeiro]. Note que o nome da variável ligada não importa. Podemos, portanto, renomeá-la. No exemplo acima, devemos, antes da substituição, trocar y por uma variável que não ocorra livre em M ou N, obtendo

$$M[N/x] = (\lambda z.(x[z/y]))[N/y] = (\lambda z.x)[N/y] = \lambda z.N = \lambda z.y$$

É sempre possível renomear as variáveis ligadas em um termo, como veremos. A idéia de que λ – abstrações representam funções é formalmente expressada através das regras de redução, que dizem como aplicar uma função a um argumento e obter um valor. A seguir, definimos a β – redução, a regra mais importante do λ – cálculo.

Para calcular o valor de uma função *f* em algum argumento, precisamos definir o conceito da β – redução, que basicamente diz que calcular uma função em um argumento, significa substituir todas as ocorrências da variável da função pelo argumento em questão. A idéia de que λ – abstrações representam funções é formalmente expressada através das regras de redução.

Definição **3 :** A β – redução é a menor relação no conjunto dos λ – termos definida pela regra

$(\lambda x.M)N \rightarrow_\beta M[N/x]$ a qual satisfaz todas as regras de equivalências.

Exemplos:

1) <u>com valores numéricos</u>:

1.1) seja a função $f(x)= x^2$ e queiramos calcular $f(3)$, então teremos $(\lambda x.x^2)3 \rightarrow_\beta x^2[3/x] = 3^2 = 9$.

1.2) seja a função $f(x) = x + 2$ expressa em λ – cálculo por $\lambda x.\ x+2$. Pela β – redução temos $(\lambda x.x + 2)5 \rightarrow_\beta (x + 2)[5/x] = 5 + 2 = 7$. Essa redução corresponde, no caso usual, ao cálculo do valor da função *f* para 5, daí $f(5) = 5 + 2 = 7$

1.3)

$$\begin{tikzcd}
& \lambda f.\ \lambda x.f(fx))(\ \lambda x.x + 2) \arrow[d] & \\
& \lambda x.(\lambda x.x + 2)((\lambda x.x + 2)x) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\lambda x.(\lambda x.x + 2)x + 2 \arrow[dr] & & \lambda x.(\lambda x.x + 2)(x + 2) \arrow[dl] \\
& \lambda x.(x + 2) + 2 &
\end{tikzcd}$$

1.4)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& (\lambda f.\lambda x.f(fx))(\lambda x.x + 2)3 \arrow[d] & \\
& (\lambda x.(\lambda x.x + 2)((\lambda x.x + 2)x))3 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
(\lambda x.(\lambda x.x + 2)x + 2)3 \arrow[d] \arrow[dr] & (\lambda x.x + 2)((\lambda x.x + 2)3) \arrow[dl] \arrow[dr] & (\lambda x.(\lambda x.x + 2)(x + 2))3 \arrow[dl] \arrow[d] \\
(\lambda x.x + 2)3 + 2 \arrow[dr] & (\lambda x.(x + 2) + 2)3 \arrow[d] & (\lambda x.x + 2)(3 + 2) \arrow[dl] \arrow[d] \\
& (3 + 2) + 2 \arrow[d] & (\lambda x.x + 2)5 \arrow[dl] \\
& 5 + 2 \arrow[d] & \\
& 7 &
\end{tikzcd}$$

1.5)

$$\begin{tikzcd}
& ((2 + 3) + 4) * (4 + 5) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
(5 + 4) * (4 + 5) \arrow[d] \arrow[drr] & & ((2 + 3) + 4) * 9 \arrow[d] \\
9 * (4 + 5) \arrow[dr] & & (5 + 4) * 9 \arrow[dl] \\
& 9 * 9 \arrow[d] & \\
& 81 &
\end{tikzcd}$$

2) <u>com variáveis</u>

2.1) $(\lambda x.xx)\ \lambda z.z \to_\beta (xx)[\ \lambda z.z/x] = (\lambda z.z)\ \lambda z.z$
2.2) $(\lambda z.z)\ \lambda y.y \to_\beta z[\lambda y.y/z] = \lambda y.y$
2.3) $(\lambda xy.xz)\ \lambda w.wu \to_\beta \lambda y(xz[(\lambda w.wu)/x]) = \lambda y(\lambda w.wu)z$
2.4) $(\lambda x.x(xy))N \to_\beta N(Ny)$.

Existem termos em λ – cálculo para os quais se pode construir seqüências infinitas de reduções. O exemplo clássico é $(\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \to_\beta (\lambda x.xx)(\lambda x.xx) \to_\beta \ldots$. Mas os λ – termos mais importantes de estudo são aqueles que, para qualquer estratégia de redução escolhida, a redução sempre pára. Tais termos são chamados fortemente normalizáveis. Um termo N está em β – forma normal, ou simplesmente em forma normal, se não possui nenhum β – redução (β – redex) como subexpressão. Um termo N é uma β – forma normal para M se N está em forma normal $M \to_\beta N$, em um número finito de passos. O processo de obtenção de uma forma normal é chamado de normalização. A forma normal de uma expressão, quando existe, é a forma mais simples possível de um termo, obtida após *n* passos de redução. Por exemplo, os termos (xy)z e λxy.y estão em forma normal. Já os termos (λxy.y)z e (λx.x)(λy.z)u não estão. Suas formas normais são, respectivamente, λy.y e z. Observe que toda expressão sem nenhuma ocorrência de um λ está em forma normal. Como conseqüência, o λ – cálculo, restrito aos termos que possuem uma forma normal, é consistente.

O λ – cálculo apresentado até o momento é livre de tipos o que permite uma maior flexibilidade. Todo λ – termo é, ao mesmo tempo, função e argumento. Qualquer λ – termo, quando considerado como uma função, pode ser aplicado a qualquer outro λ – termo, inclusive a si mesmo, considerado como um argumento. Em particular, a auto-aplicação é permitida. Por exemplo, se $f = \lambda x.x$, então $f(f) = \lambda x.x(f) = f$. Como não especificamos domínios e contradomínios dos termos, a aplicação acima é “legal”. Todavia, a auto-aplicação pode gerar inconsistências, entre elas o paradoxo de Russell. Note pelo exemplo anterior que $f(f) = f$ não faz sentido na Matemática ordinária, uma vez que não é possível que uma função esteja incluída em seu próprio domínio. Para resolver este problema, Church introduziu um sistema de tipos[21] denominado de *λ – cálculo simplesmente tipado* em alusão à sua Teoria Simples dos Tipos (STT – 1940). Por ele estão permitidas apenas aplicações em que o tipo do argumento é igual ao tipo do domínio da função, ou seja, apenas aplicações que façam “sentido”. Não faremos uma exposição sistemática de STT. Para maiores esclarecimentos em relação aos

[21] Ademais, pela Teoria Simples dos Tipos Church pretendeu eliminar os paradoxos da teoria dos conjuntos introduzindo uma hierarquia de tipos e impedindo a formação de certos tipos de conjuntos.

seus fundamentos e detalhes técnicos ver Church (1940), Sørensen e Urzyczyn (2006), e Hindley e Seldin (2008).

Tipos são objetos de natureza sintática, que desempenham um papel análogo ao de conjunto. Os termos, por sua vez, representam o papel de elemento de um conjunto. Todo λ – termo deve ter um tipo especificado. Termos e tipos são gerados livremente a partir de um alfabeto e de operações binárias. Todos os elementos referenciáveis em fórmulas de LSD fazem parte deste domínio. Em LSD cada tipo obedece a duas hierarquias: os tipos $\iota_0\iota_1\iota_2,...$, e os tipos $o_0 o_1 o_2,...$ (representados pelas letras gregas o e ι *omicron* e *iota*, respectivamente). O tipo ι_0 representa indivíduos que em si não é sentido para outro tipo. Enquanto o tipo ι_{n+1} é o sentido para o tipo ι_n. Os tipos ι_{n+1} representam os dois valores de verdade (verdadeiro ou falso), e o tipo o_{n+1} o sentido para um valor de verdade do tipo o_n, ou seja, o subescrito indica que o tipo é intensional. O pensamento fregeano que toma valor de verdade como objeto é representado pelo tipo o_1. Para os termos funcionais, existem tipos α e β que juntos fixam um tipo funcional $\alpha\beta$ que toma um argumento do tipo α e produz um tipo β como seu valor. Os predicados são estabelecidos pelo tipo $\iota_0 o_0$ que toma indivíduos por argumento e tem com resultado imediato um valor que é dado pelos valores de verdade. As relações e funções que admitem múltiplos argumentos são dadas por outras funções mas que admitem apenas um argumento e produz outras funções como valores. Se α e β são tipos, então $(\alpha\beta)$ também será um, no caso uma função às vezes escrita por $\alpha \to \beta$ cujo argumento é α e o valor é β. Donde na função condicional do tipo $(\mathrm{o}_0(\mathrm{o}_0\mathrm{o}_0)$ é uma função que toma como argumento um valor de verdade e resulta como valor outra função de um lugar vazio a qual tem por sua vez um valor de verdade por resultado (KLEMENT, 2002).

<u>As constantes primitivas são</u>

$\mathrm{C}_{\mathrm{ooo}}$, $\sim_{\mathrm{oo}}$ N_{oo}, $\prod_{(\alpha\mathrm{o})\mathrm{o}}$ ou $\prod_{\mathrm{o}(\mathrm{o}\alpha)}$, $\iota_{\alpha(\mathrm{o}\alpha)}$ ou $\iota_{(\alpha\mathrm{o})\mathrm{o}}$, a implicação material, a negação, o quantificador universal, o operador descritivo. Substituiremos a notação polonesa do quantificador universal $\prod_{(\alpha\mathrm{o})\mathrm{o}}$ por $\forall_{(\alpha\mathrm{o})\mathrm{o}}$. Dizemos que a constante $\mathrm{C}_{\mathrm{ooo}}$ tem como seu equivalente intensional a constante $\mathrm{C}_{\mathrm{o}_1\mathrm{o}_1\mathrm{o}_1}$, e assim para os demais casos. Além das constantes mencionadas a constante $\Delta^{m}{}_{o\alpha_1\alpha}$ expressará a relação entre conceitos. A relação entre um conceito e uma entidade da qual é um conceito é tomado como uma nova constante, a relação delta (na verdade, existem diferentes relações delta para os diferentes tipos). Para expressar que uma coisa, digamos, x_1 é um conceito de outra, x, nós escrevemos simplesmente $\Delta(x_1, x)$ e que devemos ler como "x_1 é um conceito de x". Note que, diferentemente dos conceitos da lógica modal, e das funções como índices de mundo possiveis às varias entidades, na lógica do sentido e da denotação os conceitos são apenas tomados como tipos primitivos de entidades. A relação delta não é uma relação semântica, ela vale somente entre os sentidos e as entidades as quais poderiam ser denotadas por uma expressão com o referido sentido.

Regras de Formação

As regras de formação são as seguintes: uma variável ou uma constante são formulas bem formadas do tipo indicado pelo seu subescrito. Variáveis ou constantes do tipo α são fórmulas do tipo α. Por exemplo, a variável x_α é do tipo α; $x_{\alpha 1}$ é a variável intensional de x_α. As fórmulas bem formadas (fbf) são constituídas de átomos, aplicações e abstrações. Seja por exemplo uma variável do tipo x_α e $\mathbf{H}_\beta$ uma formula onde os índices estão indicando os tipos, então a abstração $(\lambda x_\alpha \mathbf{H}_\beta)$ é uma fórmula do tipo $(\alpha \to \beta)$, ou segundo a notação de Church $(\alpha\beta)$. Por outro lado se $\mathbf{F}_{(\alpha\beta)}$ é uma formula do tipo $(\alpha\beta)$ e $\mathbf{A}_\beta$ uma fórmula do tipo β então a aplicação $(\mathbf{F}_{(\alpha\beta)}\mathbf{A}_\beta)$ é do tipo α.[22] Essas regras também se aplicam aos tipos intensionais. Se $\mathbf{M}_{\alpha_{\mathbf{n+1}}}$ é o primeiro ascendente de $\mathbf{M}_{\alpha_n}$ e $x_{\beta_{n+1}}$ é o primeiro ascendente de x_{β_n} então $(\lambda_{n+1} x_{\beta_{n+1}} \mathbf{M}_{\alpha_{\mathbf{n+1}}})$ é a abstração intensional de $(\lambda_n x_{\beta_n} \mathbf{M}_{\alpha_{\mathbf{n}}})$.

Regras de inferência

As Regras de inferência empregadas são principalmente aquelas do lambda conversão (ver Apêndice Cap – II), que incluem mudança alfabética de variável ligada pela aplicação de lambdas expressões independente do subscrito. Além desta há também a redução e expansão.

[22] As operações de convertibilidade apresentadas no **Apêndice Cap – II** obedecerão às regras de formação aqui apresentadas.

Pela regra da mudança de variável ligada o sentido dos λ – termos são preservados. As outras regras são substituição, *modus ponens* e a generalização do existencial. Seguem abaixo as três principais regras do λ – conversão (CHURCH, 1941).

1) **Mudança alfabética da variável ligada**: se $\mathbf{A}_o$ e $\mathbf{B}_o$ são fbf do tipo o, e $\mathbf{A}_o$ possui $\mathbf{M}_\alpha$ em sua seqüência então se x_β é um variável do tipo β mas que não é livre em $\mathbf{M}_\alpha$, e y_β é uma variável do tipo β que também não tem nenhuma ocorrência em $\mathbf{M}_\alpha$, e $\mathbf{B}_o$ é resultado de $\mathbf{A}_o$ através da substituição de uma ocorrência particular de $\mathbf{M}_\alpha$ por $\left| \mathbf{S}^{\mathbf{x}_\beta}_{\mathbf{y}_\beta}\mathbf{M}_\alpha \right|$, então de $\mathbf{A}_o$ podemos inferir $\mathbf{B}_o$.

2) **Redução**: se $\mathbf{A}_o$ e $\mathbf{B}_o$ são fbf do tipo o, e $\mathbf{A}_o$ difere de $\mathbf{B}_o$ apenas porque contém uma parte bem formada $((\lambda x_\beta \mathbf{M}_\alpha)\mathbf{N}_\beta)$, onde $\mathbf{B}_o$ possui $\left| \mathbf{S}^{\mathbf{x}_\beta}_{\mathbf{N}_\beta}\mathbf{M}_\alpha \right|$ e as variáveis ligadas de $\mathbf{M}_\alpha$ são diferentes das variáveis x_β e das variáveis livre de $\mathbf{N}_\beta$, então de $\mathbf{A}_o$ podemos inferir $\mathbf{B}_o$.

3) **Expansão**: se $\mathbf{A}_o$ e $\mathbf{B}_o$ são fbf do tipo o, e $\mathbf{A}_o$ difere de $\mathbf{B}_o$ apenas porque contém uma parte bem formada $((\lambda x_\beta \mathbf{M}_\alpha)\mathbf{N}_\beta)$, onde $\mathbf{B}_o$ possui $\left| \mathbf{S}^{\mathbf{x}_\beta}_{\mathbf{N}_\beta}\mathbf{M}_\alpha \right|$ e as variáveis ligadas de $\mathbf{M}_\alpha$ são diferentes das variáveis x_β e das variáveis livre de $\mathbf{N}_\beta$, então de $\mathbf{A}_o$ podemos inferir $\mathbf{B}_o$.

Axiomas

Os axiomas estão divididos em três grupos: primeiro os axiomas que dão conta do aspecto extensional de LSD. O segundo grupo inclui os axiomas responsáveis pela relação direta entre sentido e referência; e no terceiro grupo estão os axiomas que estabelecem as condições de identidade para o sentido. Abaixo colocamos algumas interpretações bem informais dos dois primeiros grupos de axiomas. O terceiro grupo colocamos no **Apêndice – Cap II**.

1º grupo de axiomas (basicamente são fórmulas para a axiomatização das lógicas proposicional e dos predicados de primeira ordem e de ordem superior . Com os axiomas em mãos podemos derivar tautologias proposicionais).

A1: $(f)(x_\alpha)(y_\beta)fx_\alpha y_\beta \to (y_\beta)(x_\alpha) \to fx_\alpha y_\beta$	Estabelece que a ordem de seqüência dos quantificadores é arbitrária
A2: $(f)\forall f \to (g_{\alpha\beta})(x_\beta)f(g_{\alpha\beta}x_\beta)$	Se *f* é uma função proposicional qualquer em que seu valor é verdadeiro então o mesmo ocorre para qualquer aplicação.
A3: $(f)(x_\alpha)[fx_\alpha \to gx_\alpha] \to \forall f \to \forall g$	A forma é válida. Usando uma notação mais moderna para A3 $\forall x \forall f(f(x) \to g(x) \to (\forall x f(x) \to \forall x g(x))$ Supondo que $(\forall x f(x) \to \forall x g(x))$ seja F (falso). Então $\forall x \forall f(f(x) \to g(x))$ também será F. Logo, pela →, F→F=V
A4: $(f)(\mathbf{x}_\alpha)(y_\alpha)fx_\alpha y_\alpha \to (x_\alpha)fx_\alpha x_\alpha$	Dada uma relação R tal que xRy para todo x e y, obviamente R é reflexiva. Logo, xRx para todo x também será reflexiva. A demonstração é trivial.
A5: $(p)p \to (x_\alpha)p$	A5 nada mais é do que o acréscimo de um quantificador universal sobre uma fórmula na qual a variável quantificada não é livre.
A6: $(f)(x_\alpha)\forall f \to fx_\alpha$	Instanciação do universal. Intuitivamente se *f* é verdadeiro então ele será verdadeiro para qualquer valor.
A7: $(p)(q)(r)(s)p \to q \to r \to r \to p \to s \to p$	tautologia[23]
A8: $(p)(q)p \to q \to q \to p \to p = q$	Estabelece que há exatamente dois valores de verdade, ou seja, a lei do terceiro excluído. Esta não é aceita em todas as lógicas, por exemplo na lógica intuicionista. Ou a lógica é construída satisfazendo este princípio ou

[23] Church "pegou" emprestado de Lukasiewicz (LSD, p.18).
Pelo axioma $(p)(q)(r)(s)p \to q \to r \to r \to p \to s \to p$ as fórmulas válidas da lógica proposicional são derivadas via substituição e/ou *modus ponens.*

	não.
A9: $(f_{\alpha\beta})(g_{\alpha\beta})(x_\beta)[f_{\alpha\beta}x_\beta = g_{\alpha\beta}x_\beta] \to f_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$	Axioma da extensionalidade (para funções), isto é, se *f* e *g* possuem os mesmos valores para qualquer argumento então *f*=*g*.
A10: $(f)(x_\beta)fx_\beta \to (y_\beta)[fy_\beta \to y_\beta = x_\beta] \to f(\iota f)$	Se existe um único valor x tal que Px, tem sentido chamá-lo de "o valor x tal que Px", podendo-se introduzir uma maneira de referenciar esse elemento, daí o uso do operador descritivo.

2º grupo de axiomas (axiomas extensionais das constantes e funções e o correlato intensional)

A11^{n}. $\Delta C_{o_n o_n o_n} C_{o_{n+1} o_{n+1} o_{n+1}}$	Os axiomas A11 – A14 estabelecem o "sentido" (veja o subscrito) ou a parte intensional das constantes (lado direito de cada fórmula).
A12$^{n\alpha}$. $\Delta\Pi_{o_n(o_n\alpha_n)}\Pi_{o_{n+1}(o_{n+1}\alpha_{n+1})}$	
A13$^{n\beta}$. $\boldsymbol{\Delta}\iota_{\beta_\mathbf{n}(o_\mathbf{n}\beta_\mathbf{n})}\iota_{\beta_{\mathbf{n+1}}(o_{\mathbf{n+1}}\beta_{\mathbf{n+1}})}$	
A14$^{n\alpha.}$. $\Delta\Delta_{o_n\alpha_{n+1}\alpha_n}\Delta_{o_{n+1}\alpha_{n+2}\alpha_{n+1}}$	

A15$^{\alpha\beta}$ $(f_{\alpha\beta})(f_{\alpha_1\beta_1})(x_\beta)(x_{\beta_1})\Delta_{o(\alpha_1\beta_1)(\alpha\beta)}f_{\alpha\beta}f_{\alpha_1\beta_1} \to \Delta_{o\beta_1\beta\alpha_2\alpha_1}x_\beta x_{\beta_1} \to \Delta_{o\alpha_1\alpha(f_{\alpha\beta}x_\beta)}f_{\alpha_1\beta_1}$

A16$^{\alpha\beta}$ $(f_{\alpha\beta})(f_{\alpha_1\beta_1})(x_\beta)(x_{\beta_1})[\Delta_{o\beta_1\beta x\beta x\beta_1} \to \Delta_{o\alpha_1\alpha}(f_{\alpha\beta}x_\beta)(f_{\alpha_1\beta_1}x_{\beta_1})] \to \Delta_{o(\alpha_1\beta_1)(\alpha\beta)}f_{\alpha\beta}f_{\alpha_1\beta_1}$

Os axiomas 15 e 16 tornam explícito o compromisso de Church à visão funcional dos Sinne apresentando as funções como Bedeutungen. O Axioma 15 estabelece que se f* é um Sinn determinando uma função f como Bedeutung, então f* é, ela mesma, uma função no domínio dos Sinne, e tem um valor para qualquer Sinn x* cujo Bedeutung correspondente é x, um Sinn cujo Bedeutung é o valor de f para x como argumento.

O axioma 16 estabelece a conversa: se f* é uma função do domínio dos Sinne cujo valor para qualquer Sinn x* determinando x como Bedeutung é ele mesmo um Sinn determinando como Bedeutung o valor de alguma função f para x como argumento, então f* é um Sinn determinando f como Bedeutung.

$A17^{\alpha}\ (x_{\alpha})(y_{\alpha})(x_{\alpha_1})\Delta_{o\alpha_1\alpha}x_{\alpha}x_{\alpha_1} \rightarrow \Delta_{o\alpha_1\alpha}y_{\alpha}x_{\alpha_1} \rightarrow x_{\alpha} = y_{\alpha}$

O axioma 17 estabelece que cada Sinn tem um único Bedeutung. Isso é claramente essencial se o Bedeutung de uma expressão é determinado unicamente por seu Sinn; o Sinn por si só deve ser suficiente para determinar um único Bedeutung. Para o axioma 17 substituiremos a notação polonesa adotada por Church e empregaremos a notação mais atual $(\forall \mathbf{x}_{\alpha})(\forall \mathbf{y}_{\alpha})\left(\forall \mathbf{x}^{*}{}_{\alpha+1}\right)[\Delta\mathbf{xx}^{*} \supset \left(\Delta\mathbf{yx}^{*} \supset \mathbf{x}=\mathbf{y}\right)]$. Em LSD uma constante do tipo $\iota_0 o_0$ é empregada para transcrever um predicado qualquer, por exemplo, “...é humano” em contextos não intensionais e uma constante do tipo $\iota_1 o_1$ em contextos intensionais. O x e o y do axioma 17 são variáveis do tipo ι descrito, o x^{*} é uma variável do tipo ι_1, ou seja, x* é o sentido de x, y* é o sentido de y. Pelo axioma Δxx^{*} resulta num valor verdadeiro quando x* é argumento da função. Está implícita ao axioma 17^{α} a idéia de que ao sentido está relacionada apenas uma referência, em outros termos, dizemos que para todo y, z e x, $\Delta yy \rightarrow (\Delta zx \rightarrow y = x)$, se y é denotado pelo sentido de x, e z é também denotado pelo sentido de x, então y é x.

O terceiro grupo de axiomas caracterizam as condições de identidade do sentido. Como Church escreveu várias versões, ou melhor, revisões de LSD, as condições de identidade variam de um artigo ao outro[24]. Em linhas bem gerais, pelos axiomas 19 e 20 a noção de sinonímia é traduzida para uma linguagem formal sem perda de generalidade. Constrói-se um modelo consistindo de uma classe de equivalência entre as expressões, as quais, por definição, teriam o mesmo sentido. Consideram-se **sinônimas** expressões do tipo α_{m+1} cuja classe de equivalência seja o tipo α_m, isto é, não existe em LSD constantes primitivas que sejam redundantes pois o sentido – referencia de um tipo é o ascendente do outro. A sinonímia, ou melhor, o isomorfismo sinonímico é dado pelas regras do lambda convertível (CHURCH, 1941) a seguir:

[24] Sobre os critérios de identidade na Alternativa (1) ver Anderson (2001): *Alternative (1): a Criterion of identity for intensional entities* in *Logic, meaning and computation: Essays in memory of Alonzo Church*.

1) α - conversão: permite renomear variáveis ligadas. Nas Alternativas (0 e 1) α – convertidos são sinônimas, ou preservam a sinonímia. Por exemplo, $\lambda x.x$ pode ser α – convertido para $\lambda y.y$.

$$\lambda x.x \rightarrow\alpha\ \lambda y.y$$

Note que a α – conversão nos permite considerar idênticos os λ – termos que só diferem nos nomes das variáveis ligadas, ou seja, podemos substituir uma variável x em M por qualquer outro termo N mudando, se necessário, os nomes de algumas variáveis ligadas em M.

Exemplo:

(1.1) λx. (x é alto & x é sábio)(Aristóteles)

para

(1.2) λy. (y is alto & y é sábio)(Aristóteles)

2) β – redução: permite que aplicações sejam reduzidas. Por exemplo, $(\lambda x.M)N$ pode ser β – reduzido para $M[x/N]$ no qual todas as ocorrências da variável x foram substituídas por N. Porém, se houver conflito de nomes de variáveis, como em $(\lambda x.\lambda y.xy)y$, deve-se primeiro aplicar a α – conversão. Logo,

$$(\lambda x.M)N \rightarrow\beta\ M[x/N]$$

Exemplo)

(2.1) λx. (x é alto & x é sábio)(Aristóteles)

Aplicando β – redução

(2.2) Aristóteles é alto & Aristóteles é sábio

(2.1) e (2.2) obviamente têm o mesmo valor de verdade. Na Alternativa (0) elas não tem o mesmo sentido. Na Alternativa (1) (2.1) e (2.2) são sinônimas.

3) β – expansão: é a operação inversa à operação realizada na β – redução. O retorno da forma reduzida para a forma anterior à redução é o resultado desta operação. (2.2) → (2.1)

(3.1) Aristóteles é alto & Aristóteles é sábio

para

(3.2) λx. (x é alto & x é sábio)(Aristóteles)

4) η – redução: é a substituição da fórmula ($\lambda x(Fx)$) por F, ou seja, um lambda abstrato por uma expressão simples, desde que o F tem o tipo adequado, a saber, se F tem tipo $\alpha \rightarrow \beta$ e x tem tipo α, então a operação pode ser realizada.

Exemplo:

(4.1) λx(ímpar x) e

(4.2) ímpar.

As regras do lambda cálculo tipado são conservativas, isto é, elas preservam o sentido dos termos. Por exemplo, podemos aplicar β – expansão em (1.1) e assim acarretar (5) (λF. F(Aristóteles))(λx.(x é alto & x é sábio)) e (2.2) Aristóteles é alto & Aristóteles é sábio são sinônimas (na Alternativa – 1).

Não é recomendável associar os exemplos das regras à linguagem natural, uma vez que a linguagem natural não possui a operação do lambda abstrato. O melhor que podemos fazer é traduzir o lambda abstrato na linguagem natural sabendo que não é totalmente correta. Por exemplo, (1.1), (1.2) e (5) poderíamos ler por

(1.1') Aristóteles tem a propriedade de ser alto e sábio
(1.2') Aristóteles é alto e sábio
(5') Ser alto e sábio é a propriedade que Aristóteles possui

O lambda convertível serve para indicar que expressões com estruturas diferentes podem ser sinônimas. Nesse ponto Church discorda do isomorfismo intensional de Carnap. Em *Meaning and Necessity* (1947, p. 14) Carnap considerou que duas expressões são idênticas quando necessariamente ambas têm a mesma estrutura em comum. O lambda convertível vem corrigir isso. Todas as expressões acima embora possuam estruturas diferentes são sinônimas e portanto expressam o mesmo sentido. Church segue os passos de Frege apesar de desviar de alguns conceitos-chaves e reconhece em seu livro *Introduction to Mathematical Logic* (1956) que adota em essência a teoria fregeana. Por esse motivo, era de se esperar que não aceitasse a solução advogada por Carnap relativa aos contextos ditos intensionais (os de crenças), e, em seus artigos *On Carnap's Analysis of Statements of Assertion and Belief* (1950) e *Intensional Isomorphims and Identity of Belief* (1954), apresenta suas refutações ao modelo carnapiano.

Basicamente Church exibe um contra - exemplo ao isomorfismo intensional de Carnap (a ser visto no próximo capitulo). Em geral, a idéia é que as objeções ao isomorfismo sentencial nascem no seio do *Princípio da Tolerância*, que afirma "qualquer pessoa é livre para construir sua própria forma de linguagem à sua vontade". Com esse princípio em funcionamento, ele alega que ninguém está proibido de introduzir constantes predicadoras completamente sinônimas em uma linguagem tipo S1. Ao mesmo tempo, pelo mesmo princípio, é possível introduzir nessa linguagem duas constantes predicadoras (ou duas constantes individuais) que sejam L – equivalentes, mas não sinônimas. Conseqüentemente, Church (1954) argumenta que se o isomorfismo intensional for servir como critério de identidade de crença, a definição de Carnap exige a seguinte emenda: condição de L-equivalência deve ser substituída por aquela de sinonímia.

APÊNDICE – CAP II

Resultados imediatos da convertibilidade[25]

Metateorema 6. Uma fórmula bem formada (fbf) $\mathbf{F}_{\alpha\beta}\mathbf{A}_{\beta}\mathbf{conv_1}\mathbf{M}_{\alpha}$ se e somente se $\mathbf{M}_{\alpha}$ for uma fbf $\mathbf{G}_{\alpha\beta}\mathbf{B}_{\beta}$ tal que (i) $\mathbf{F}_{\alpha\beta}\mathbf{conv}_1\mathbf{G}_{\alpha\beta}$ e (ii) $\mathbf{A}_{\beta}\mathbf{conv_1}\mathbf{B}_{\beta}$. Além disso, (i) e (ii) são executados no mesmo numero de vezes para obter $\mathbf{M}_{\alpha}$ a partir de $\mathbf{F}_{\alpha\beta}\mathbf{A}_{\beta}$.

Metateorema 7. Se $\mathbf{M}_{\alpha}\mathbf{conv}_1\mathbf{N}_{\alpha}$, então $\mathbf{A}_{\beta}\mathbf{conv}_1\mathbf{B}_{\beta}$, sendo que $\mathbf{B}_{\beta}$ é proveniente de $\mathbf{A}_{\beta}$ ao substituirmos uma ocorrência de $\mathbf{M}_{\alpha}$ em $\mathbf{A}_{\beta}$ por uma ocorrência de $\mathbf{N}_{\alpha}$.

Metateorema 8. Se $\mathbf{M}_{\alpha}\mathbf{conv}_1\mathbf{N}_{\alpha}$, então $(\lambda_{\mathbf{n}}\mathbf{x}_{\beta_{\mathbf{n}}}\mathbf{M}_{\alpha_{\mathbf{n}}})\mathbf{conv}_1(\lambda_{\mathbf{n}}\mathbf{x}_{\beta_{\mathbf{n}}}\mathbf{N}_{\alpha_{\mathbf{n}}})$.

Metateorema 9. Se $(\lambda_{\mathbf{n}}\mathbf{x}_{\beta_{\mathbf{n}}}\mathbf{M}_{\alpha_{\mathbf{n}}})\mathbf{conv}_1(\lambda_{\mathbf{n}}\mathbf{x}_{\beta_{\mathbf{n}}}\mathbf{N}_{\alpha_{\mathbf{n}}})$ então $\mathbf{M}_{\alpha}\mathbf{conv}_1\mathbf{N}_{\alpha}$, desde que $\mathbf{M}_{\alpha}\mathbf{conv}_1\mathbf{N}_{\alpha}$ seja executado no mesmo numero de passo que $(\lambda_{\mathbf{n}}\mathbf{x}_{\beta_{\mathbf{n}}}\mathbf{M}_{\alpha_{\mathbf{n}}})\mathbf{conv}_1(\lambda_{\mathbf{n}}\mathbf{x}_{\beta_{\mathbf{n}}}\mathbf{N}_{\alpha_{\mathbf{n}}})$, pois nem sempre é verdade que se $(\lambda_{\mathbf{n}}\mathbf{x}_{\beta_{\mathbf{n}}}\mathbf{M}_{\alpha_{\mathbf{n}}})\mathbf{conv}_1(\lambda_{\mathbf{n}}\mathbf{x}_{\beta_{\mathbf{n}}}\mathbf{N}_{\alpha_{\mathbf{n}}})$ então $\mathbf{M}_{\alpha}\mathbf{conv}_1\mathbf{N}_{\alpha}$.

Metateorema 10. Se $\mathbf{M}_{\alpha}\mathbf{conv}_1\mathbf{N}_{\alpha}$, então $\mathbf{S}^{\mathbf{N}_{\alpha}}_{\mathbf{M}_{\beta}}(\lambda_n x_{\beta_n}\mathbf{A}_{\gamma_n})\Big| conv_1(\lambda_n x_{\beta_n}\mathbf{A}_{\gamma_n})$ (a notação $\mathbf{S}^{\Delta}_{\Gamma}\phi\big|$ nada mais é do que o resultado da substituição de toda ocorrência de Δ em ϕ por uma ocorrência de Γ.

Metateorema 11. Se $\mathbf{M}_{\alpha}\mathbf{conv}_1\mathbf{N}_{\alpha}$, então $\mathbf{M}_{\alpha}$ não é parte comum de $\mathbf{N}_{\alpha}$.

Metateorema 12. Se $\mathbf{A}_{\alpha}$ for uma constante primitiva (ie, uma variável) e $\mathbf{A}_{\alpha}\mathbf{conv}_1\mathbf{B}_{\alpha}$, então $\mathbf{A}_{\alpha}$ é $\mathbf{B}_{\alpha}$.

Resultados imediatos da redutibilidade

Metateorema 13. Se $\mathbf{A}_{\alpha}$ for uma constante primitiva ou variável, então $\mathbf{RedA}_{\alpha} = \mathbf{A}_{\alpha}$

Metateorema 14. $\mathbf{Red}(\lambda_n x_{\beta_n}\mathbf{M}_{\alpha_n}) = (\lambda_n x_{\beta_n}\mathbf{RedM}_{\alpha_n})$ e $\mathbf{Red(F_{\alpha\beta}A_{\alpha}) = (RedF_{\alpha\beta}\ RedA_{\beta})}$

Metateorema 15. $\mathbf{RedA}_{\alpha} = \mathbf{RedB}_{\alpha}$ se $(\mathbf{A}_{\alpha},\mathbf{B}_{\alpha})$ pertencer a S.

[25] Tanto os resultados da convertibilidade quanto da redutibilidade foram extraídos de Anderson (1977).

Metateorema 16. Se $\mathbf{A}_\alpha$ acarreta em $\mathbf{B}_\alpha$ ao substituirmos uma ocorrência de $\mathbf{M}_\beta$ por uma ocorrência de $\mathbf{N}_\beta$ e se, $\mathbf{RedM}_\beta \mathbf{conv}_1 \mathbf{RedN}_\beta$ então $\mathbf{RedA}_\alpha \mathbf{conv}_1 \mathbf{RedB}_\alpha$.

Prova: por indução no tamanho de $\mathbf{A}_\alpha$. Considere primeiro o caso em que a substituição seja dada em toda a extensão de $\mathbf{A}_\alpha$. Logo, $\mathbf{N}_\beta$ é $\mathbf{A}_\alpha$ é $\mathbf{B}_\alpha$, e, portanto, $\mathbf{RedB}_\alpha \mathit{conv}_1 \mathbf{RedA}_\alpha$, assim como $\mathbf{RedA}_\alpha \mathit{conv}_1 \mathbf{RedB}_\alpha$. Para o caso em que $\mathbf{A}_\alpha$ seja uma constante ou uma variável, então apenas consideramos o caso dado. Mas, se $\mathbf{A}_\alpha$ for $(\mathbf{F}_{\alpha\gamma}\mathbf{C}_\gamma)$ e a substituição se aplica apenas a uma parte, então $\mathbf{B}_\alpha$ será $(\mathbf{G}_{\alpha\gamma}\mathbf{D}_\gamma)$, em que $\mathbf{G}_{\alpha\gamma}$ ou é $\mathbf{F}_{\alpha\gamma}$ ou é o resultado de alguma substituição, e $\mathbf{D}_\gamma$ ou é $\mathbf{C}_\gamma$ ou é o resultado de alguma substituição. Pela HI $\mathbf{RedF}_{\alpha\gamma} \mathit{conv}_1 \mathbf{RedG}_{\alpha\lambda}$, $\mathbf{RedC}_\gamma \mathrm{conv}_1 \mathbf{RedD}_\gamma$ e fazendo uso dos metateoremas 6,14 $(\mathbf{RedF}_{\alpha\gamma}\mathbf{RedC}_\gamma)\mathrm{conv}_1(\mathbf{RedG}_{\alpha\gamma}\mathbf{RedD}_\gamma)$ $\mathbf{Red}(\mathbf{F}_{\alpha\gamma}\mathbf{C}_\gamma)\mathrm{conv}_1\mathbf{Red}(\mathbf{G}_{\alpha\gamma}\mathbf{D}_\gamma)$, respectivamente. Se $\mathbf{A}_\alpha$ for $(\lambda_\mathbf{n}\mathbf{x}_{\gamma_\mathbf{n}}\mathbf{C}_{\delta_\mathbf{n}})$ e a substituição se aplica apenas a uma parte, então $\mathbf{B}_\alpha$ será $(\lambda_\mathbf{n}\mathbf{x}_{\gamma_\mathbf{n}}\mathbf{D}_{\delta_\mathbf{n}})$ em que $\mathbf{D}_{\delta_\mathbf{n}}$ decorre de $\mathbf{C}_{\delta_\mathbf{n}}$. Pela HI indução $\mathrm{Re}\mathbf{dC}_{\delta_\mathbf{n}}\mathbf{conv}_1 \mathrm{Re}\mathbf{dD}_{\delta_\mathbf{n}}$ e pelo teorema 8 $(\lambda_\mathrm{n}\mathrm{x}_{\gamma_\mathrm{n}}\mathbf{RedC}_{\delta_\mathrm{n}})\mathrm{conv}_1(\lambda_\mathrm{n}\mathrm{x}_{\gamma_\mathrm{n}}\mathbf{RedD}_{\delta_\mathrm{n}})$. Daí que, pelo teorema 14, $\mathbf{Red}(\lambda_\mathrm{n}\mathrm{x}_{\gamma_\mathrm{n}}\mathbf{C}_{\delta_\mathrm{n}})\mathrm{conv}_1\mathbf{Red}(\lambda_\mathrm{n}\mathrm{x}_{\gamma_\mathrm{n}}\mathbf{D}_{\delta_\mathrm{n}})$.

□

Metateorema 17. $\mathbf{Red}(\mathbf{S}^{\mathrm{x}_\alpha}_{\mathrm{A}_\alpha}\mathbf{M}_\beta\big|) = \mathbf{S}^{\mathrm{x}_\alpha}_{\mathbf{RedA}_\alpha}\mathbf{RedM}_\beta\big|$

Metateorema 18. $\mathbf{Red}(\mathbf{S}^{\mathrm{x}_\alpha}_{\mathrm{y}_\alpha}\mathbf{M}_\beta\big|) = \mathbf{S}^{\mathrm{x}_\alpha}_{\mathrm{y}_\alpha}\mathbf{RedM}_\beta\big|$

Metateorema 19. Se $\mathbf{A}_\alpha$ acarreta em $\mathbf{B}_\alpha$ ao substituirmos uma ocorrência de $\mathbf{C}_\beta$ por uma ocorrência de $\mathbf{D}_\beta$ e se $(\mathbf{C}_\beta,\mathbf{D}_\beta)$ pertencer a S, então $\mathbf{RedB}_\alpha = \mathbf{RedA}_\alpha$

Metateorema 20. Se $\mathbf{A}_\alpha$ acarreta em $\mathbf{B}_\alpha$ ao substituirmos uma ocorrência de $\mathbf{D}_\beta$ por uma ocorrência de $\mathbf{C}_\beta$ e se $(\mathbf{C}_\beta,\mathbf{D}_\beta)$ pertencer a S, então $\mathbf{RedB}_\alpha = \mathbf{RedA}_\alpha$

Metateorema 21. $\mathbf{RedA}_\alpha$ é sinonimamente isomórfica a $\mathbf{A}_\alpha$

Metateorema 22. Se $\mathbf{T}_\alpha$ e $\mathbf{F}_\alpha$ são fórmulas bem formadas fechadas do tipo α e que não possuem variáveis em comum com fórmulas bem formadas fechadas $\mathbf{A}_\alpha$ e $\mathbf{B}_\alpha$, e se, alem disso, não for o caso que $\mathbf{T}_\alpha\mathbf{conv}_1\mathbf{F}_\alpha$ então, se $\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}\mathbf{A}_\beta)\big|\mathbf{conv}_1\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}\mathbf{B}_\beta$ e $\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{F}_\alpha}\mathbf{A}_\beta)\big|\mathbf{conv}_1\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{F}_\alpha}\mathbf{B}_\beta$, então $\mathbf{A}_\beta\mathbf{conv}_1\mathbf{B}_\beta$.

Prova: por indução no tamanho de $\mathbf{A}_\beta$. Observe que a variável $\mathbf{x}_\alpha$ estará livre em $\mathbf{A}_\beta$ se e só se ela estiver livre em $\mathbf{B}_\beta$. Agora suponha, sem perda de generalidade, que $\mathbf{x}_\alpha$ esteja livre em $\mathbf{A}_\beta$ mas não esteja em $\mathbf{B}_\beta$. Portanto, $\mathbf{S}^{x_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}\mathbf{A}_\beta)\big|\mathbf{conv}_1\mathbf{B}_\beta\mathbf{conv}_1\mathbf{S}^{x_\alpha}_{\mathbf{F}_\alpha}\mathbf{A}_\beta$. Observe agora que se $\mathbf{x}_\alpha$ estiver livre em $\mathbf{A}_\beta$, por uma simples indução demonstra-se que não podemos ter $\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}\mathbf{A}_\beta)\big|\mathbf{conv}_1\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{F}_\alpha}\mathbf{A}_\beta$ se $\mathbf{T}_\alpha\neg\mathbf{conv}_1\mathbf{F}_\alpha$.

Se $\mathbf{x}_\alpha$ não estiver livre em $\mathbf{A}_\alpha$ e como também não está livre em $\mathbf{B}_\beta$, segue que $\mathbf{A}_\beta = \mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}\mathbf{A}_\beta\big|\mathbf{conv}_1\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}\mathbf{B}_\beta\big| = \mathbf{B}_\beta$. Mas, se $\mathbf{A}_\beta$ for $\mathbf{x}_\alpha$ $(\mathbf{A}_\beta = \mathbf{x}_\alpha)$ então $\mathbf{B}_\beta$ também o será, ademais $\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}\mathbf{A}_\beta\big| = \mathbf{T}_\alpha\mathbf{conv}_1\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}\mathbf{B}_\beta\big|$ onde $\mathbf{x}_\alpha$ está livre em $\mathbf{B}_\beta$. Porém, $\mathbf{T}_\alpha\mathbf{conv}_1$ a uma fbf que, por sua vez, a contem como parte própria, contrario ao teorema 11. Assim, neste caso, $(\mathbf{A}_\beta = \mathbf{B}_\beta)$ e daí $\mathbf{A}_\beta\mathbf{conv}_1\mathbf{B}_\beta$. Para o caso em que $\mathbf{A}_\beta = (\mathbf{F}_{\beta\gamma}\mathbf{C}_\gamma)$ temos que $\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}(\mathbf{F}_{\beta\gamma}\mathbf{C}_\gamma)\big| = (\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}\mathbf{F}_{\beta\gamma}\big| = \mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}\mathbf{C}_\gamma\big|)\mathbf{conv}_1\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}\mathbf{B}_\beta$. Em virtude do argumento dado no caso anterior, $\mathbf{B}_\beta \neq \mathbf{x}_\alpha$. Logo, $\mathbf{B}_\beta$ deve admitir a forma $(\mathbf{G}_{\beta\gamma}\mathbf{D}_\gamma)$ desde que as propriedades da substituição lhes sejam empregadas e que pelo metateorema 6 permita que não haja nenhuma outra forma que seja convertida a $(\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}\mathbf{F}_{\beta\gamma}\big|\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}\mathbf{C}_\gamma)$.

Portanto, $(\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}\mathbf{F}_{\beta\gamma}\big|\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}\mathbf{C}_\gamma)\mathbf{conv}_1\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}(\mathbf{G}_{\beta\gamma}\mathbf{D}_\gamma)\big| = (\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}\mathbf{G}_{\beta\gamma}\big|\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}\mathbf{D}_\gamma)$.

Pelo metateorema 6, $(\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}\mathbf{F}_{\beta\gamma}\big|\mathbf{conv_1}\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}\mathbf{G}_{\beta\gamma})$ e $\mathbf{conv_1}\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}\mathbf{D}_\gamma\big|$; igualmente para $\mathbf{F}_\alpha$ no lugar de $\mathbf{T}_\alpha$. Daí, pela HI, $\mathbf{F}_{\beta\gamma}\mathbf{conv_1}\mathbf{G}_{\beta\gamma}$ e $\mathbf{C}_\gamma\mathbf{conv_1}\mathbf{D}_\gamma$ e, novamente, pelo metateorema 6, $(\mathbf{F}_{\beta\gamma}\mathbf{C}_\gamma)\mathbf{conv_1}(\mathbf{G}_{\beta\gamma}\mathbf{D}_\gamma)$.

Se $\mathbf{A}_\alpha = (\lambda_\mathbf{n}\mathbf{x}_{\gamma_\mathbf{n}}\mathbf{C}_{\delta_\mathbf{n}})$ então admitiremos que $(\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}\lambda_\mathbf{n}\mathbf{x}_{\gamma_\mathbf{n}}\mathbf{C}_{\delta_\mathbf{n}})\big|\mathbf{conv_1}\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}\mathbf{B}_\beta\big|$ e igualmente para $\mathbf{F}_\alpha$ substituindo $\mathbf{T}_\alpha$. Daí, $(\lambda_\mathbf{n}\mathbf{x}_{\gamma_\mathbf{n}}\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}\mathbf{C}_{\delta_\mathbf{n}}\big|)\mathbf{conv_1}\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}\mathbf{B}_\beta$. Uma vez que $\mathbf{B}_\beta$ não pode ser uma variável então deverá ser da forma $(\lambda_\mathbf{n}\mathbf{w}_{\gamma_\mathbf{n}}\mathbf{D}_{\delta_\mathbf{n}})$ pelos metateoremas 6 e 12. Teremos então que analisar dois casos:

1) Se $\mathbf{x}_{\gamma_\mathbf{n}} = \mathbf{w}_{\gamma_\mathbf{n}}$ (as variáveis $\mathbf{x}_{\gamma_\mathbf{n}}$ e $\mathbf{w}_{\gamma_\mathbf{n}}$ são iguais). Neste caso $\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}\mathbf{B}_{\beta\gamma}\Big|$ é igual a $(\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}\lambda_\mathbf{n}\mathbf{x}_{\gamma_\mathbf{n}}\mathbf{D}_{\delta_\mathbf{n}})\Big| = (\lambda_\mathbf{n}\mathbf{x}_{\gamma_\mathbf{n}}\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}\mathbf{D}_{\delta_\mathbf{n}}\Big|)$. Pelo metateorema 9, $\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}\mathbf{D}_{\delta_\mathbf{n}}\Big|\mathbf{conv_1}\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}\mathbf{C}_{\delta_\mathbf{n}}\Big|$ e igualmente para $\mathbf{F}_\alpha$ no lugar de $\mathbf{T}_\alpha$. Pela HI, $\mathbf{D}_{\delta_\mathbf{n}}\mathbf{conv_1}\mathbf{C}_{\delta_\mathbf{n}}$, segue que $(\lambda_\mathbf{n}\mathbf{x}_{\gamma_\mathbf{n}}\mathbf{D}_{\delta_\mathbf{n}})\mathbf{conv_1}(\lambda_\mathbf{n}\mathbf{x}_{\gamma_\mathbf{n}}\mathbf{C}_{\delta_\mathbf{n}})$ pelo metateorema 8.
2) Se $\mathbf{x}_{\gamma_\mathbf{n}} \neq \mathbf{w}_{\gamma_\mathbf{n}}$ (as variáveis $\mathbf{x}_{\gamma_\mathbf{n}}$ e $\mathbf{w}_{\gamma_\mathbf{n}}$ não são iguais). Suponha agora uma variável $\mathbf{z}_{\gamma_\mathbf{n}}$ do tipo $\gamma_\mathbf{n}$ distinta de todas as variáveis que estejam em $\mathbf{D}_{\delta_\mathbf{n}}, \mathbf{C}_{\delta_\mathbf{n}}, \mathbf{T}_\alpha$, e $\mathbf{F}_\alpha$ e distinta das variáveis $\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{w}_{\gamma_\mathbf{n}}$ e $\mathbf{x}_{\gamma_\mathbf{n}}$.

Admitiremos então que $\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}(\lambda_\mathbf{n}\mathbf{w}_{\gamma_\mathbf{n}}\mathbf{D}_{\delta_\mathbf{n}})\Big|\mathbf{conv_1}\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}(\lambda_\mathbf{n}\mathbf{x}_{\gamma_\mathbf{n}}\mathbf{C}_{\delta_\mathbf{n}}\Big|)$ válido também no caso em que $\mathbf{F}_\alpha$ no lugar de $\mathbf{T}_\alpha$.

Suponha que $\mathbf{z}_{\gamma_\mathbf{n}}$ seja descrito por $\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}(\lambda_\mathbf{n}\mathbf{z}_{\gamma_\mathbf{n}}\mathbf{S}^{\mathbf{w}_{\gamma_\mathbf{n}}}_{\mathbf{z}_{\gamma_\mathbf{n}}}\mathbf{D}_{\delta_\mathbf{n}}\Big|\ )\Big|\mathbf{conv_1}\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}(\lambda_\mathbf{n}\mathbf{z}_{\gamma_\mathbf{n}}\mathbf{S}^{\mathbf{x}_{\gamma_\mathbf{n}}}_{\mathbf{z}_{\gamma_\mathbf{n}}}\mathbf{C}_{\delta_\mathbf{n}}\Big|)\Big|$.

Então, também será $(\lambda_\mathbf{n}\mathbf{z}_{\gamma_\mathbf{n}}\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}\mathbf{S}^{\mathbf{w}_{\gamma_\mathbf{n}}}_{\mathbf{z}_{\gamma_\mathbf{n}}}\mathbf{D}_{\delta_\mathbf{n}}\Big\|\ )\Big|(\lambda_\mathbf{n}\mathbf{z}_{\gamma_\mathbf{n}}\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}\mathbf{S}^{\mathbf{x}_{\gamma_\mathbf{n}}}_{\mathbf{z}_{\gamma_\mathbf{n}}}\mathbf{C}_{\delta_\mathbf{n}}\Big\|\ )$.

Pelo metateorema 9, $\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}\mathbf{S}^{\mathbf{w}_{\gamma_\mathbf{n}}}_{\mathbf{z}_{\gamma_\mathbf{n}}}\mathbf{D}_{\delta_\mathbf{n}}\Big\|\mathbf{conv_1}\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}\mathbf{S}^{\mathbf{x}_{\gamma_\mathbf{n}}}_{\mathbf{z}_{\gamma_\mathbf{n}}}\mathbf{C}_{\delta_\mathbf{n}}\Big\|$.

Visto que $\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}\mathbf{S}^{\mathbf{w}_{\gamma_\mathbf{n}}}_{\mathbf{z}_{\gamma_\mathbf{n}}}\mathbf{D}_{\delta_\mathbf{n}}\Big\|\mathbf{conv_1}\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathbf{T}_\alpha}\mathbf{S}^{\mathbf{x}_{\gamma_\mathbf{n}}}_{\mathbf{z}_{\gamma_\mathbf{n}}}\mathbf{C}_{\delta_\mathbf{n}}\Big\|$ se aplica também se aplica a $\mathbf{F}_\alpha$ no lugar de $\mathbf{T}_\alpha$, pela HI, $\mathbf{S}^{\mathbf{w}_{\gamma_\mathbf{n}}}_{\mathbf{z}_{\gamma_\mathbf{n}}}\mathbf{D}_{\delta_\mathbf{n}}\Big\|\mathbf{conv_1}\mathbf{S}^{\mathbf{x}_{\gamma_\mathbf{n}}}_{\mathbf{z}_{\gamma_\mathbf{n}}}\mathbf{C}_{\delta_\mathbf{n}}\Big\|$.

Segue, pelo metateorema 8, $(\lambda_\mathbf{n}\mathbf{z}_{\gamma_\mathbf{n}}\mathbf{S}^{\mathbf{w}_{\gamma_\mathbf{n}}}_{\mathbf{z}_{\gamma_\mathbf{n}}}\mathbf{D}_{\delta_\mathbf{n}})\Big|\mathbf{conv_1}(\lambda_\mathbf{n}\mathbf{z}_{\gamma_\mathbf{n}}\mathbf{S}^{\mathbf{x}_{\gamma_\mathbf{n}}}_{\mathbf{z}_{\gamma_\mathbf{n}}}\mathbf{C}_{\delta_\mathbf{n}}\Big|)$ e, daí teremos que $(\lambda_\mathbf{n}\mathbf{w}_{\gamma_\mathbf{n}}\mathbf{D}_{\delta_\mathbf{n}})\mathbf{conv_1}(\lambda_\mathbf{n}\mathbf{x}_{\gamma_\mathbf{n}}\mathbf{C}_{\delta_\mathbf{n}})$ pelas propriedades da convertibilidade.

Metateorema 23. Seja $\mathbf{A}_\alpha$ uma fórmula bem formada fechada qualquer, e $\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathrm{Re}\mathbf{dA}_\alpha}\mathrm{Re}\mathbf{dM}_\beta\Big|\mathbf{conv_1}\Big|\mathbf{conv_1}\mathbf{S}^{\mathbf{x}_\alpha}_{\mathrm{Re}\mathbf{dA}_\alpha}\mathrm{Re}\mathbf{dN}_\beta\Big|$ então $\mathrm{Re}\mathbf{dM}_\beta\mathbf{conv_1}\mathbf{N}_\beta$.

Prova. Escolha um $\mathbf{A}_\alpha$ e $\mathbf{B}_\alpha$ de modo que $\mathrm{Re}\mathbf{dA}_\alpha$ e $\mathrm{Re}\mathbf{dB}_\alpha$ se aplicam a $\mathbf{T}_\alpha$ e $\mathbf{F}_\alpha$ de acordo com o metateorema 22. Observe que existem formulas bem formadas fechadas para todos os tipos incluindo os símbolos não preferenciais. Poderíamos escolher qualquer um, por exemplo: para o tipo o escolha $\forall_{o(oo)}(\lambda\mathbf{a}_o(\mathbf{C}_{ooo}\mathbf{a}_o)\mathbf{a}_o))$ e $\forall_{o(oo)}(\lambda\mathbf{a}_o\mathbf{a}_o)$ os quais correspondem a $\mathbf{T}_\alpha$ e $\mathbf{F}_\alpha$, respectivamente. Em todos os outros tipos β as desejadas formulas bem formadas fechadas $\mathbf{T}_\alpha$ e $\mathbf{F}_\alpha$ poderão ser $\iota_{\beta(o\beta)}(\lambda a_\beta T_o)$ e $\iota_{\beta(o\beta)}(\lambda a_\beta F_o)$.

Metateorema 24. $\mathbf{A}_\alpha$ é *sinonimamente isomórfica* a $\mathbf{B}_\alpha$ se e somente se $\mathrm{Red} A_\alpha \mathrm{conv}_1 \mathrm{Red} B_\alpha$.

Prova: suponha $A_{\boldsymbol{\alpha}}$ sinonimamente isomórfica a $\mathbf{B}_\alpha$ e considere em particular o caso em que $\mathbf{B}_\alpha$ provém de $\mathbf{A}_\alpha$ por uma única aplicação de uma das operações que definem o isomorfismo sinonímico. Admitamos ainda e para todos os casos em que $\mathbf{B}_\alpha$ provém de $\mathbf{A}_\alpha$ pela substituição de uma ocorrência de $\mathbf{D}_\alpha$ por uma ocorrência de $\mathbf{C}_\alpha$ de modo que $(\mathbf{C}_\beta, \mathbf{D}_\beta)$ ou $(\mathbf{D}_\beta, \mathbf{C}_\beta)$ pertencem a S. Os resultados para estes casos seguem dos metateoremas 19 e 20. Os outros casos basta aplicar indução no tamanho de $\mathbf{A}_\alpha$. Se $\mathbf{A}_\alpha$ for uma variável ou uma constante primitiva, então por vacuidade há uma aplicação de mudança alfabética de variáveis ligadas e B_α é A_α, logo $\mathbf{Red A}_\alpha \mathrm{conv}_1 \mathbf{Red B}_\alpha$.

Se $\mathbf{A}_\alpha$ for $(\mathbf{F}_{\alpha\beta}\mathbf{C}_\beta)$ então $\mathbf{B}_\alpha$ é $(\mathbf{G}_{\alpha\beta}\mathbf{D}_\beta)$ e pelo metateorema 6, $\mathbf{F}_{\alpha\beta}\mathbf{conv_1 G}_{\alpha\beta}$ e $\mathbf{C}_\beta \mathbf{conv}_1 \mathbf{D}_\beta$. Além disso, tais conversões provem de uma única aplicação da operação. Daí, pela HI, $\mathbf{Red F}_{\alpha\beta}\mathbf{conv_1}\,\mathbf{Red G}_{\alpha\beta}$ e $\mathbf{Red C}_\beta \mathbf{conv}_1 \mathbf{Red D}_\beta$.

Então pelo metateorema 6, $(\mathbf{Red F}_{\alpha\beta}\ \mathbf{Red C}_\beta)\mathbf{conv}_1(\mathbf{Red G}_{\alpha\beta}\ \mathbf{Red D}_\beta)$. Finalmente, pelo metateorema 14, $\mathbf{Red(F}_{\alpha\beta}\mathbf{C}_\beta\mathbf{)conv}_1\,\mathbf{Red(G}_{\alpha\beta}\mathbf{D}_\beta\mathbf{)}$.

Se $\mathbf{A}_\alpha$ for $(\lambda_n x_{\beta_n} \mathbf{C}_{\gamma_n})$, então é ou $(\lambda_n x_{\beta_n} \mathbf{D}_{\gamma_n})$ ou $(\lambda_n y_{\beta_n} \mathbf{S}^{x_{\beta_n}}_{y_{\beta_n}} \mathbf{C}_{\gamma_n})$ de alguma variável y_{β_n} distinta de x_{β_n} e não ocorrer em $\mathbf{C}_{\gamma_n}$.

Caso I) pelo metateorema 9, $\mathbf{C}_{\gamma_n}\mathbf{conv_1 D}_{\gamma_n}$ num único passo. Pela hipótese de indução, $\mathbf{Red C}_{\gamma_n}\mathbf{conv_1 Red D}_{\gamma_n}$ e, pelo metateorema 8, $(\lambda_n x_{\beta_n} \mathbf{C}_{\gamma_n})\mathbf{conv_1}(\lambda_n x_{\beta_n} \mathbf{Red D}_{\gamma_n})$.

Portanto, pelo metateorema 14, $(\lambda_n x_{\beta_n} \mathbf{C}_{\gamma_n})\mathbf{conv_1}(\lambda_n x_{\beta_n} \mathbf{D}_{\gamma_n})$.

Caso II) $\mathbf{Red}(\lambda_n x_{\beta_n} \mathbf{C}_{\gamma_n}) = (\lambda_n x_{\beta_n} \mathbf{Red C}_{\gamma_n})$ e $\mathbf{Red}(\lambda_n y_{\beta_n} \mathbf{S}^{x_{\beta_n}}_{y_{\beta_n}} \mathbf{C}_{\gamma_n}|) = (\lambda_n y_{\beta_n} \mathbf{Red S}^{x_{\beta_n}}_{y_{\beta_n}} \mathbf{C}_{\gamma_n}|)$, pelo metateorema 14. Além disso, pelo metateorema 18, $\mathbf{Red S}^{x_{\beta_n}}_{y_{\beta_n}} \mathbf{C}_{\gamma_n}| = \mathbf{S}^{x_{\beta_n}}_{y_{\beta_n}} \mathbf{Red C}_{\gamma_n}|$, então,

$\mathbf{Red}(\lambda_n y_{\beta_n} \mathbf{S}^{x_{\beta_n}}_{y_{\beta_n}} \mathbf{C}_{\gamma_n}|) = (\lambda_n y_{\beta_n} \mathbf{Red S}^{x_{\beta_n}}_{y_{\beta_n}} \mathbf{C}_{\gamma_n}|)$.

E obviamente $(\lambda_{\mathbf{n}}\mathbf{y}_{\beta_{\mathbf{n}}}\mathbf{RedS}^{\mathbf{x}_{\beta_{\mathbf{n}}}}_{\mathbf{y}_{\beta_{\mathbf{n}}}}\mathbf{C}_{\gamma_{\mathbf{n}}}|)$ é convertível a $(\lambda_{\mathbf{n}}\mathbf{y}_{\beta_{\mathbf{n}}}\mathbf{RedC}_{\gamma_{\mathbf{n}}}|)$ que, nada mais é do que uma formula bem formada fechada igual a $\mathbf{A}_{\alpha}$. Os resultados se aplicam a um único passo. Agora suponha $\mathbf{A}^{\mathbf{1}}_{\alpha},\mathbf{A}^{\mathbf{2}}_{\alpha},...,\mathbf{A}^{\mathbf{n}}_{\alpha}$ uma seqüência de fbf´s iniciadas por $\mathbf{A}_{\alpha}$ e terminadas por $\mathbf{B}_{\alpha}$, sendo que cada fbf na seqüência seja o resultado de fórmulas bem formadas anteriores através de uma só aplicação de uma das operações em questão, nós teremos $\mathbf{RedA}^{\mathbf{1}}_{\alpha}\mathbf{conv_1RedA}^{\mathbf{2}}_{\alpha}\mathbf{conv_1}...\mathbf{conv_1}\,\mathbf{RedA}^{\mathbf{n}}_{\alpha}$. O resultado segue pela transitividade da relação de convertibilidade.

Mas, por outro lado, se admitimos que $\mathbf{RedA}_{\alpha}\mathbf{conv_1RedB}_{\alpha}$ então, desde que $\mathbf{RedA}_{\alpha}$ é sinonimamente isomórfica a $\mathbf{A}_{\alpha}$ e $\mathbf{RedB}_{\alpha}$ é sinonimamente isomórfica a $\mathbf{B}_{\alpha}$, então usando as propriedades do isomorfismo sinonímico, $\mathbf{A}_{\alpha}$ é sinonimamente isomórfica a $\mathbf{B}_{\alpha}$.

□

Axiomas 3º grupo[26]:

Devemos entender os axiomas abaixo como afirmações acerca dos conceitos (daí porque o delta nas fórmulas) correspondentes às constantes (conectivos) dos dois lados da implicação em cada axioma. Conceitos correspondentes a duas fórmulas ladeadas pela implicação não são idênticos se o conectivo superior das fórmulas são distintos. O axioma 39, por exemplo, afirma que o conceito de uma implicação não é igual ao conceito de fórmula universal quantificada. O axioma 40 afirma que pensamentos condicionais (se...então) nunca são idênticos a pensamentos descritivos (o x tal que x). O axioma 42 afirma que o conceito de um pensamento universal não é idêntico ao conceito de um sentido descritivo. Observe que os axiomas 18 – 27 correspondem aos conceitos dos axiomas extensionais 1 – 10 e os axiomas 28 – 34 correspondem aos conceitos dos axiomas 11 – 17.

Axioma $18^{\alpha\beta}$. $N(f_{o_1\beta_1\alpha_1})(x_{\alpha_1})(y_{\beta_1})f_{o_1\beta_1\alpha_1}x_{\alpha_1}y_{\beta_1} \rightarrow (y_{\beta_1})(x_{\alpha_1})f_{o_1\beta_1\alpha_1}x_{\alpha_1}y_{\beta_1}$

Axioma $19^{\alpha\beta}$. $N(f_{o_1\alpha_1})\forall_{o_1(o_1\alpha_1)}f_{o_1\alpha_1} \rightarrow (g_{\alpha_1\beta_1})(x_{\beta_1})f_{o_1\alpha_1}(g_{\alpha_1\beta_1}x_{\beta_1})$

Axioma 20^{α}. $N(f_{o_1\alpha_1})(g_{o_1\alpha_1})(x_{\alpha_1})[f_{o_1\alpha_1}x_{\alpha_1} \rightarrow g_{o_1\alpha_1}x_{\alpha_1}] \rightarrow \forall_{o_1(o_1\alpha_1)}f_{o_1\alpha_1} \rightarrow \forall_{o_1(o_1\alpha_1)}g_{o_1\alpha_1}$

[26] Para uma exposição detalhada de LSD no contexto da tradição fregeana ver Klement (2002). A interpretação informal dos axiomas acima estão ali apresentadas.

Axioma 21 $^{\alpha}$. $N(f_{o_1\alpha_1\alpha_1})(x_{\alpha_1})(y_{\alpha_1})f_{o_1\alpha_1\alpha_1}x_{\alpha_1}y_{\alpha_1} \to (x_{\alpha_1})f_{o_1\alpha_1\alpha_1}x_{\alpha_1}x_{\alpha_1}$

Axioma 22. $N(p_{o_1})p_{o_1} \to (x_{\alpha_1})p_{o_1}$

Axioma 23. $N(f_{o_1\alpha_1})(x_{\alpha_1})\forall_{o_1(o_1\alpha_1)}f_{o_1\alpha_1} \to f_{o_1\alpha_1}x_{\alpha_1}$

Axioma 24. $N(p_{o_1})(q_{o_1})(r_{o_1})(s_{o_1})p_{o_1} \to q_{o_1} \to r_{o_1} \to r_{o_1} \to p_{o_1} \to s_{o_1} \to p_{o_1}$

Axioma 25. $N(p_{o_1})(q_{o_1})p_{o_1} \to q_{o_1} \to q_{o_1} \to p_{o_1} \to p_{o_1} =_1 q_{o_1}$

Axioma 26 $^{\alpha\beta}$. $N(f_{\alpha_1\beta_1})(g_{\alpha_1\beta_1})(x_{\alpha_1})[f_{\alpha_1\beta_1}x_{\beta_1} =_1 g_{\alpha_1\beta_1}x_{\beta_1}] \to f_{\alpha_1\beta_1} =_1 g_{\alpha_1\beta_1}$

Axioma 27 $^{\beta}$. $N(f_{o_1\beta_1})(x_{\beta_1})f_{o_1\beta_1}x_{\beta_1} \to (y_{\beta_1})[f_{o_1\beta_1}y_{\beta_1} \to y_{\beta_1} =_1 x_{\beta_1}] \to f_{o_1\beta_1}(\iota_{\beta_1(o_1\beta_1)}f_{o_1\beta_1})$

Axioma 28 ^{n}. $N(\Delta_{o_1(o_{n+2}o_{n+2}o_{n+2})(o_{n+1}o_{n+1}o_{n+1})}C_{o_{n+1}o_{n+1}o_{n+1}}C_{o_{n+2}o_{n+2}o_{n+2}})$

Axioma 29. $N(\Delta_{o_1(o_{n+2}(o_{n+2}o_{n+2})(o_{n+1}(o_{n+1}o_{n+1}))}\forall_{o_{n+1}(o_{n+1}o_{n+1})}\forall_{o_{n+2}(o_{n+2}o_{n+2})})$

Axioma 30. $N(\Delta_{o_1(\beta_{n+2}(o_{n+2}\beta_{n+2}))(\beta_{n+1}(o_{n+1}\beta_{n+1}))}\iota_{\beta_{n+1}(o_{n+1}\beta_{n+1})}\iota_{\beta_{n+2}(o_{n+2}\beta_{n+2})})$

Axioma 31. $N(\Delta_{o_1(o_{n+2}\alpha_{n+3}\alpha_{n+2})(o_{n+1}\alpha_{n+2}\alpha_{n+1})}\Delta_{o_{n+1}\alpha_{n+2}\alpha_{n-1}}\Delta_{o_{n+2}\alpha_{n+3}\alpha_{n+2}})$

Axioma 32.

$N(f_{\alpha_1\beta_1})(f_{\alpha_2\beta_2})(x_{\beta_1})(x_{\beta_2})\Delta_{o_1(\alpha_2\beta 2)(\alpha_2\beta_1)}f_{\alpha_1\beta_1}f_{\alpha_2\beta_2} \to \Delta_{o_1\beta_2\beta_1}x_{\beta_1} \to \Delta_{o_1\alpha_2\alpha_1}(f_{\alpha_1\beta_1}x_{\beta_1})(f_{\alpha_2\beta_2}x_{\beta_2})$

Axioma 33 $^{\alpha\beta}$.

$N(f_{\alpha_1\beta_1})(f_{\alpha_2\beta_2})(x_{\beta_1})(x_{\beta_2})[\Delta_{o_1\beta_2\beta_1}x_{\beta_1}x_{\beta_2} \to \Delta_{o_1\alpha_2\alpha_1}(f_{\alpha_1\beta_1}x_{\beta_1})(f_{\alpha_2\beta_2}x_{\beta_2})] \to \Delta_{o_1(\alpha_2\beta_2)(\alpha_1\beta_1)}f_{\alpha_1\beta_1}f_{\alpha_2\beta_2}$

Axioma 33$^{2\alpha\beta}$.

$$(f_{\alpha_1\beta_1})(f_{\alpha_2\beta_2})N(x_{\beta_1})(x_{\beta_2})[\Delta_{o_1\beta_2\beta_1} x_{\beta_1} x_{\beta_2} \to \Delta_{o_1\alpha_2\alpha_1}(f_{\alpha_1\beta_1}x_{\beta_1})(f_{\alpha_2\beta_2}x_{\beta_2})] \to \Delta_{o_1(\alpha_2\beta_2)(\alpha_1\beta_1)} f_{\alpha_1\beta_1} f_{\alpha_2\beta_2}$$

Axioma 34$^{\alpha}$. $N(x_{\alpha_1})(y_{\alpha_1})(x_{\alpha_2})\Delta_{o_1\alpha_2\alpha_1}x_{\alpha_1}x_{\alpha_2} \to \Delta_{o_1\alpha_2\alpha_1}y_{\alpha_1}x_{\alpha_2} \to x_{\alpha_1} =_1 y_{\alpha_1}$

Axioma 35$^{\alpha}$.

$$(f_{o_1\alpha_1})(x_\alpha)(x_{\alpha_1})(x_{\alpha_2})\Delta x_\alpha x_{\alpha_1} \to \Delta x_{\alpha_1}x_{\alpha_2} \to N(\Delta_{o_1\alpha_2\alpha_1}x_{\alpha_1}x_{\alpha_2}) \to (\forall_{o_1(o_1\alpha_1)} f_{o_1\alpha_1}) \to N(f_{o_1\alpha_1}x_{\alpha_1})$$

Axioma 36. $(p_{o_1})(q_{o_1})N[p_{o_1}\to q_{o_1}] \to Np_{o_1} \to Nq_{o_1}$

Axioma 37$^{\alpha}$.

$$N(f_{o_2\alpha_2})(x_{\alpha_1})(x_{\alpha_2})(x_{\alpha_2})\Delta_{o_1\alpha_2\alpha_1}x_{\alpha_1}x_{\alpha_2} \to \Delta_{o_1\alpha_3\alpha_2}x_{\alpha_2}x_{\alpha_3} \to N_{o_1o_2}(\Delta_{o_2\alpha_3\alpha_2}x_{\alpha_2}x_{\alpha_3}) \to N_{o_1o_2}(\forall_{o_2(o_2}$$

$$\to N_{o_1o_2}(f_{o_2\alpha_2}x_{\alpha_2})$$

Axioma 38. $N(p_{o_2})(q_{o_2})N_{o_1o_2}[p_{o_2}\to q_{o_2}] \to N_{o_1o_2}p_{o_2} \to N_{o_1o_2}q_{o_2}$

Axioma 39$^{n\alpha}$. $(p_{o_{n+1}})(q_{o_{n+1}})(f_{o_{n+1}\alpha_{n+1}})C_{o_{n+1}o_{n+1}o_{n+1}}p_{o_{n+1}}q_{o_{n+1}} \neq \forall_{o_{n+1}(o_{n+1}\alpha_{n+1})}f_{o_{n+1}\alpha_{n+1}}$

Axioma 40^{n}. $(p_{o_{n+1}})(q_{o_{n+1}})(g_{o_{n+1}\alpha_{n+1}})C_{o_{n+1}o_{n+1}o_{n+1}}p_{o_{n+1}}q_{o_{n+1}} \neq \iota_{o_{n+1}(o_{n+1}\alpha_{n+1})}g_{o_{n+1}o_{n+1}}$

Axioma 41$^{n\alpha}$. $(p_{o_{n+1}})(q_{o_{n+1}})(x_{\alpha_{n+1}})(x_{\alpha_{n+2}})C_{o_{n+1}o_{n+1}o_{n+1}}p_{o_{n+1}}q_{o_{n+1}} \neq \Delta_{o_{n+1}\alpha_{n+2}\alpha_{n+1}}x_{\alpha_{n+1}}x_{\alpha_{n+2}}$

Axioma 42$^{n\alpha}$. $(f_{o_{n+1}\alpha_{n+1}})(g_{o_{n+1}o_{n+1}})\forall_{o_{n+1}(\alpha_{n+1}\alpha_{n+1})}f_{o_{n+1}\alpha_{n+1}} \neq \iota_{o_{n+1}o_{n+1}o_{n+1}}g_{o_{n+1}o_{n+1}}$

Axioma 43$^{n\alpha\beta}$. $(f_{o_{n+1}\alpha_{n+1}})(x_{\beta_{n+1}})(x_{\beta_{n+2}})\forall_{o_{n+1}(\alpha_{n+1}\alpha_{n+1})}f_{o_{n+1}\alpha_{n+1}} \neq \Delta_{o_{n+1}\beta_{n+2}\beta_{n+1}}x_{\beta_{n+1}}x_{\beta_{n+2}}$

Axioma 44$^{n\alpha}$. $(g_{o_{n+1}o_{n+1}})(x_{\alpha_{n+1}})(x_{\alpha_{n+2}})\iota_{o_{n+1}o_{n+1}o_{n+1}}g_{o_{n+1}o_{n+1}} \neq \Delta_{o_{n+1}\alpha_{n+2}\alpha_{n+1}}x_{\alpha_{n+1}}x_{\alpha_{n+2}}$

Axioma 45^{n}.

$$(p_{o_{n+1}})(q_{o_{n+1}})(r_{o_{n+1}})(s_{o_{n+1}})C_{o_{n+1}o_{n+1}o_{n+1}}p_{o_{n+1}}q_{o_{n+1}} = C_{o_{n+1}o_{n+1}o_{n+1}}r_{o_{n+1}}s_{o_{n+1}} \to p_{o_{n+1}} = r_{o_{n+1}}$$

Axioma 46^{n}.

$$(p_{o_{n+1}})(q_{o_{n+1}})(r_{o_{n+1}})(s_{o_{n+1}})C_{o_{n+1}o_{n+1}o_{n+1}}p_{o_{n+1}}q_{o_{n+1}} = C_{o_{n+1}o_{n+1}o_{n+1}}r_{o_{n+1}}s_{o_{n+1}} \to q_{o_{n+1}} = s_{o_{n+1}}$$

Axioma 47$^{n\alpha}$.

$$(f_{o_{n+1}\alpha_{n+1}})(g_{o_{n+1}\alpha_{n+1}})\forall_{o_{n+1}(o_{n+1}\alpha_{n+1})}f_{o_{n+1}\alpha_{n+1}} = \forall_{o_{n+1}(o_{n+1}\alpha_{n+1})}g_{o_{n+1}\alpha_{n+1}} \to f_{o_{n+1}\alpha_{n+1}} = g_{o_{n+1}\alpha_{n+1}}$$

Axioma

48$^{n\beta}$. $(f_{o_{n+1}\beta_{n+1}})(g_{o_{n+1}\beta_{n+1}})\iota_{\beta_{n+1}(o_{n+1}\beta_{n+1})}f_{o_{n+1}\beta_{n+1}} = \iota_{\beta_{n+1}(o_{n+1}\beta_{n+1})}g_{o_{n+1}\beta_{n+1}} \to f_{o_{n+1}\beta_{n+1}} = g_{o_{n+1}\beta_{n+1}}$

Axioma49$^{n\alpha}$.

$$(x_{\alpha_{n+1}})(x_{\alpha_{n+2}})(y_{\alpha_{n+1}})(y_{\alpha_{n+2}})\Delta_{\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}}x_{\alpha_{n+1}}x_{\alpha_{n+2}}=\Delta_{\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}}y_{\alpha_{n+1}}y_{\alpha_{n+2}}\rightarrow x_{\alpha_{n+1}}=y_{\alpha_{n+1}}$$

Axioma 50$^{n\alpha}$.

$$(x_{\alpha_{n+1}})(x_{\alpha_{n+2}})(y_{\alpha_{n+1}})(y_{\alpha_{n+2}})\Delta_{\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}}x_{\alpha_{n+1}}x_{\alpha_{n+2}}=\Delta_{\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}}y_{\alpha_{n+1}}y_{\alpha_{n+2}}\rightarrow x_{\alpha_{n+2}}=y_{\alpha_{n+2}}$$

Axioma51$^{mn\beta}$

$$(f_{o_{n+1}\beta_{m+n+2}})(f_{o_{m+n+2}\beta_{m+n+2}})\iota_{\beta_{m+n+2}(o_{n+1}\beta_{m+n+2})}f_{o_{n+1}\beta_{m+n+2}}\neq\iota_{\beta_{m+n+2}(o_{m+n+2}\beta_{m+n+2})}f_{o_{m+n+2}\beta_{m+n+2}}$$

Axioma 52$^{n\alpha\beta}$ $(f_{o_{n+1}\alpha_{n+1}})(f_{o_{n+1}\beta_{n+1}})\forall_{o_{n+1}(o_{n+1}\alpha_{n+1})}f_{o_{n+1}\alpha_{n+1}}\neq\forall_{o_{n+1}(o_{n+1}\beta_{n+1})}f_{o_{n+1}\beta_{n+1}}$

Axioma 53$^{n\alpha\beta}$ $(x_{\alpha_{n+1}})(x_{\alpha_{n+2}})(y_{\alpha_{n+1}})(y_{\alpha_{n+2}})\Delta_{\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\alpha_{n+1}}x_{\alpha_{n+1}}x_{\alpha_{n+2}}\neq\Delta_{\alpha_{n+1}\beta_{n+2}\beta_{n+1}}y_{\beta_{n+1}}y_{\beta_{n+2}}$

CAPÍTULO 3 – O ISOMORFISMO INTENSIONAL DE CARNAP

3.1 UM BREVE RETROSPECTO DA SEMANTICA DE CARNAP

A semântica nem sempre ocupou um lugar respeitado, proeminente, na produção filosófica de Rudolf Carnap. Definimos a semântica pela disciplina que, de modo geral, trata de certas relações entre expressões de uma linguagem e os objetos, ou "estados de coisas" "a que referem" tais expressões. Como exemplos típicos de alguns conceitos semânticos, podemos mencionar a *designação, satisfação e definição*, tal como eles ocorrem nos seguintes exemplos: a frase "*o aluno mais famoso de Platão*" designa (denota) o individuo Aristóteles; Aristóteles satisfaz a condição "*x é filósofo*"; a equação "$"2x+4=6"$ define (determina unicamente) o número 1. Na semântica teórica poder-se-ia tratar também de outras noções cujo conteúdo intuitivo é ainda mais obviamente semântico, como significado e sinonímia, e outras com conteúdo semântico menos óbvio, como verdade e conseqüência lógica. Um aspecto característico dos conceitos semânticos é que eles representam certas relações entre as expressões da linguagem e os objetos a respeito dos quais estas expressões falam/designam. É por meio de tais relações que a semântica caracteriza classes de expressões ou outros objetos. Poderíamos também dizer que esses conceitos servem para estabelecer a correlação entre os nomes de expressões e as próprias expressões.

Em seus primeiros escritos Carnap tratou a semântica como disciplina menor em virtude da pouca clareza conquistada até o momento sobre boa parte de um conjunto de conceitos que julgava problemáticos. Desde a Antiguidade, até os dias atuais, os conceitos semânticos desempenharam um papel importante nas discussões de muitos filósofos, lógicos e filólogos. Entretanto, vale destacar que eles foram vistos durante muito tempo com alguma suspeição. Em uma perspectiva histórica, essa suspeição deve ser considerada completamente justificada, pois, embora o significado de alguns conceitos semânticos, como o conceito de verdade amplamente usado na linguagem cotidiana, pareça bastante claro e compreensível, todas as tentativas de caracterizar esse significado de maneira geral e exata fracassaram. E o que é pior, diversos argumentos nos quais esses conceitos estavam empregados, e que de outro modo pareciam inteiramente corretos porque baseados em premissas aparentemente óbvias, com freqüência levaram a paradoxos e antinomias. É suficiente mencionar aqui a antinomia do mentiroso, a antinomia da definibilidade de Richard e a antinomia dos termos heterológicos de Grelling-Nelson.

Essas antinomias parecem indicar que toda linguagem universal, como as línguas naturais as quais contem, além de suas próprias expressões, os nomes dessas expressões e termos ou predicados semânticos como “verdade”, “nome”, “designação”, tem uma semântica inconsistente. Por outro lado, as antinomias mencionadas, em particular a antinomia sintática de Russell (da classe de todas as classes que não são membros de si mesmas), foram o ponto de partida para as tentativas bem-sucedidas de uma formalização consistente da lógica e consistiu durante certo tempo tema nos fundamentos da matemática, pois deram oportunidade à construção da semântica teórica.

Diante da possível e constante ocorrência de antinomias, o problema de especificar a estrutura formal e o vocabulário de uma linguagem na qual as definições dos conceitos semânticos sejam dadas tornar-se-ia especialmente sério. Entre os anos de 1931-35 esta suspeição conheceu sua fase mais aguda no pensamento de Carnap. Neste período, ele se dedicou arduamente à analise lógica da linguagem culminando em sua obra mais conhecida *A Sintaxe Lógica da Linguagem (*SLL*)*, cuja primeira edição em alemão apareceu em 1934, a edição inglesa, revista e ampliada foi concluída dois anos mais tarde, em 1936, mas publicada apenas em 1937. Nessa época comungava certos dogmas defendidos pelos membros do Círculo de Viena. Considerava, por exemplo, a linguagem como uma entidade *auto-contida* cujos elementos, símbolos e expressões não fariam alusão às entidades extralingüísticas. Como forma de expurgar quaisquer considerações que acabassem explicando o obscuro pelo obscuro Carnap defendeu que o estudo da linguagem e, por conseguinte, da lógica em geral, dever-se-ia se pautar apenas na análise dos símbolos de um determinado sistema formal.

Na *Sintaxe Lógica da Linguagem,* Carnap estuda uma linguagem formal que possa expressar a matemática clássica e as teorias cientificas. Por exemplo, a física clássica poderia ser formulada nesta linguagem. Para tanto, procurou apresentar uma formulação *puramente sintática do conceito de conseqüência lógica*. Em SLL vemos a tentativa de Carnap em desfazer os equívocos e abusos constantemente cometidos, em particular por alguns lógicos, mas em geral pelos filósofos, quando vez ou outra introduzem elementos não formais, vale dizer, elementos com conteúdo duvidoso, na análise da linguagem. Como solução, ele acreditava ser possível e desejável tratar os símbolos como entidades mudas desprovidas de conteúdo. SLL nasceu do estranho desejo de Carnap em reduzir *toda* a filosofia ao estudo da *sintaxe da linguagem*. No livro oferece uma teoria completa do método formal, visto como teoria completa da manipulação regrada de símbolos. Supôs que se uma frase pudesse ser completa e univocamente descrita pela referencia aos símbolos de que é composta e a ordem em que eles aparecem, então as relações lógicas entre as frases e as características lógicas destas poderiam ser estudadas exclusivamente por referência a esta estrutura linear.

A determinação de Carnap em colocar de lado os pensamentos e juízos e basear sua teoria toda em função da análise combinatória dos símbolos, de certa maneira, não é uma novidade no estudo lógico. Pois, como ele mesmo se deu conta, o estudo lógico das frases e não de pensamentos sempre foi a regra desde Aristóteles. Na prática, ainda que uma regra trate de supostos pensamentos ou juízos ela precisa fazer referência às expressões lingüísticas desses pensamentos e juízos e pode ser vista como uma regra acerca dessas formulações lingüísticas. Porém, teme-se que, ao propor regras objetivas a respeito de entidades lingüísticas tangíveis determinadas, o lógico seja irresistivelmente seduzido a captar também regras acerca de supostos conteúdos impalpáveis que lhe estariam subjacentes. Ainda que os lógicos lidem sabidamente com expressões lingüísticas objetivamente analisáveis, parecem julgar que as relações lógicas estabelecidas entre tais expressões dependem de um conteúdo qualquer que transcende o plano objetivo de sua organização como seqüências de símbolos, que dependem de supostos "significados" e "sentidos" os quais nada mais seriam que a reintrodução dos conteúdos subjetivos associados a "juízos" e "pensamentos". É isso o que está por trás da idéia de considerar como mudos, do ponto de vista da SLL, os símbolos de uma linguagem.[27]

Durante certo período, Carnap estava realmente convencido mediante bases filosóficas gerais de que conceitos semânticos, como verdade e significado, entendidos como entidades do terceiro reino (*dritter Bereich*) estavam destinadas ao cesto do lixo das ilusões metafísicas. Um próximo passo em sua depuração ontológica foi tomado pouco tempo depois de conhecer o método de aritmetização da sintaxe desenvolvido por Gödel e que ele esteve entre os primeiros a compreender. Aproveitando uma importante propriedade aritmética, a unicidade da decomposição em fatores primos de cada número, Gödel mostrou que era possível transformar em um número não só cada símbolo ou cada expressão individual de uma determinada linguagem, mas também toda sucessão finita de expressões. A idéia era simples e

[27] Na verdade, não há nenhum mal em supor que haja algum tipo de isomorfismo entre frases e juízos, e, por conseguinte, supor que a toda frase corresponda um pensamento e que a todo pensamento corresponda uma frase. Carnap, porem, desejava livrar-se desse tipo de discussão: expressões lingüísticas, como seqüências de símbolos arbitrários, comportam um exame direto e inequívoco, sem as ambigüidades que inevitavelmente prejudicam o estudo da lógica toda vez que esta busca se referir a entidades subjetivas tais como "juízos".

poderosa: qualquer linguagem que tenha a seu dispor recursos para expressar a aritmética dos números naturais possui, por isso mesmo, recursos para expressar a (ou partes da) sintaxe lógica de que ele está tratando. Basta *interpretar* os números como se referindo aos símbolos e seqüências de símbolos de uma linguagem qualquer. Nesse caso, as "proposições" aritméticas poderão ser interpretadas como proposições acerca desses símbolos e suas combinações ou seja a respeito da sintaxe dessa linguagem. Segue daí que as proposições de uma linguagem formal, na mesma medida em que podem ser interpretadas como proposições aritméticas, podem também ser interpretadas como proposições sintáticas, aí incluída sua própria sintaxe.

A questão que surge é saber se por meio da *sintaxe lógica* obter-se-ia uma noção mais clara e precisa de um dos conceitos mais centrais da lógica: *o de conseqüência lógica*. O propósito da lógica é esclarecer o que segue de que, determinar quais são as conseqüências válidas de um dado conjunto de premissas ou suposições. A noção de conseqüência lógica, que difere ligeiramente para as lógicas proposicional e de predicados, pode ser informalmente definida assim: dado um conjunto de afirmativas H e uma afirmativa α, diz-se que α é conseqüência lógica de H se, e somente se, α é verdadeira sempre que todas as afirmativas em H sejam verdadeiras. Para dizer de forma abreviada que α é conseqüência lógica de H, escreve-se: $H \models \alpha$. Observe que esta definição depende do significado de "α é verdadeira", ou seja, da função de valoração que especifica em que condições cada expressão da linguagem é verdadeira ou falsa.

A contrapartida formal da conseqüência lógica é a dedução (formal) ou conseqüência sintática. Será usada a notação $H \vdash \alpha$ para dizer que a afirmativa α é dedutível a partir do conjunto de afirmativas H, ou que existe uma prova de α a partir de H. Quando se diz $H \vdash \alpha$ (em palavras: alfa é dedutível a partir de H) deve-se ter em mente um *sistema dedutivo* (também chamado de *sistema formal*) específico, o qual é composto de três tipos de entidades: (1) uma linguagem, (2) um conjunto de afirmativas na linguagem, denominadas *axiomas*; e (3) um conjunto de *regras de inferência*. Idealmente, é interessante que, para um certo sistema dedutivo, se tenha: $H \vdash \alpha$ se e somente se $H \models \alpha$. Isso expressa a equivalência anteriormente referida entre as relações de dedutibilidade e de conseqüência lógica. Pode-se dizer que $\models$ é a interpretação formal de $\vdash$. Um sistema que satisfaz se $H \vdash \alpha$ então $H \models \alpha$ é dito ser *correto*, pois só permite deduções corretas. Por outro lado, um sistema que satisfaz se H $\models \alpha$ então H $\vdash \alpha$ é dito ser *completo*, pois permite a dedução de tudo que é conseqüência lógica de um conjunto de hipóteses. Logo, $\vdash$ só pode ser considerada uma formalização "exata" de $\models$ (e $\models$ uma interpretação formal "exata" de $\vdash$) se o sistema dedutivo subjacente a $\vdash$ for correto e completo.

Os conceitos correspondentes a "verdadeiro" e "falso" serão aqui referidos por V e F. Assim, V será usado no nível conceitual para denotar que uma certa proposição é *verdadeira* e F será usado para denotar que ela é *falsa*. Uma "função de valoração", que fará a ponte entre os níveis formal e conceitual, será definida adiante de tal maneira que, dada uma fórmula, ela associará à mesma um dos dois valores, V ou F. O uso de uma função é condizente com o princípio da *não contradição*: uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo; ou seja, a valoração deve ter realmente a propriedade de *unicidade* inerente a uma função. Além disso, coerente com o princípio do *terceiro excluído* (toda proposição é verdadeira ou falsa), a imagem da função de valoração deve ser o conjunto {V, F}. Definida a função de valoração, que dará então a semântica das fórmulas (que representam proposições), será possível também definir em que condições um argumento é correto.

Os lógicos pensaram que o emprego de poucas regras de inferência esgotavam o conteúdo do conceito de conseqüência. Sempre que uma frase, expressão, segue de outras, ela pode ser delas obtida de um modo mais ou menos complicado por meio de transformações prescritas pelas regras. Na defesa desta opinião contra os céticos que duvidavam de o conceito de conseqüência, quando formalizado deste modo, realmente coincidir em extensão com o comum, os lógicos foram capazes de fornecer um argumento de peso: o fato de realmente terem conseguido reproduzir, nos moldes das provas formalizadas, todos os raciocínios exatos que alguma vez foram levados a cabo na matemática. *Se se pensa em lógica como uma codificação do raciocínio (exato), então ela deveria permanecer próxima à prática de se fazer inferência, ao invés de se basear na noção de verdade.*

A primeira tentativa de formular uma definição precisa do conceito de conseqüência lógica foi esboçada em SLL[28]. Tal tentativa, contudo, estava intimamente conectada com as

---

[28] Uma excelente exposição do livro *A sintaxe de Lógica de Carnap* o leitor encontrará em Tranjan (2005).

propriedades particulares da linguagem formalizada que foi escolhida como objeto de investigação. De um todo, Carnap tenta definir o conceito de conseqüência lógica não apenas para linguagens especiais mas também dentro de uma estrutura do que ele chamou "sintaxe geral". A definição proposta por Carnap pode ser assim formulada:

uma expressão σ *segue logicamente das expressões da classe (conjunto)* Γ *se e somente se a classe (conjunto) constituída de todas as expressões de* Γ *e da negação de* σ *seja contraditória.*

O elemento decisivo da definição obviamente é a noção de contraditório.[29] A definição de Carnap deste conceito é complicada o bastante para ser reproduzida aqui sem longas e problemáticas explicações. Em particular, pode ser provado, com base na definição de conseqüência proposta que tal relação se verifica entre expressões dadas é completamente independente do sentido das constantes lógicas que ocorrem nelas. Na abordagem simbólico-formal que dominou a fase sintática de Carnap o problema central se transforma e assume contornos específicos. Trata-se de construir sistemas formais ou, mais precisamente, de estudar o modo de construção de sistemas formais e como a relação de conseqüência poderia aí ser tratada sem grandes complicações. Mais especificamente, o de conceber, a partir do símbolo, e explicar as possibilidades e os métodos de construção de sistemas formais, estabelecer um quadro conceitual adequado ao estudo das diferentes características desses sistemas e discutir aspectos gerais da aplicabilidade de tais sistemas, na medida em que esses aspectos se prestem a um tratamento formal.

A primavera parisiense de 1935 operou uma profunda e inaudita transformação no pensamento do tolerante Carnap. Na ocasião de seu contato e conversas com Alfred Tarski a sua visão sintática foi rapidamente superada vindo a rejeitar, ele próprio, as opiniões que havia defendido em SLL, após dar-se conta do fracasso que elas representavam notadamente pela compreensão, agora adquirida, de que a proposta de análise da conseqüência lógica apresentada continha deficiências insanáveis posto que estas estavam comprometidas desde seu nascimento com um pressuposto equivocado, ou melhor, demonstravelmente equivocado: *a lógica como pura sintaxe*. Naquele ano ocorreu em setembro o Congresso Internacional de Filosofia Cientifica (*Congrès Internacional de Philosophie Scientifique*) onde Alfred Tarski

[29] Gödel havia mostrado um pouco antes que, em toda teoria dedutiva (com exceção de certas teorias de natureza particularmente elementar), por mais que outras regras sejam suplementadas é possível construir expressões que se seguem dos teoremas desta teoria, mas que, apesar disso, não podem ser provadas nesta teoria com base nas regras de inferências aceitas. Mas como Carnap fez uso da regra de inferência denominada regra ômega, seu sistema formal é completo, isto é, o teorema da incompletude de Gödel não se aplica a este sistema.

apresentou um pequeno artigo intitulado *O Estabelecimento da Semântica Cientifica* cuja primeira versão foi escrita em polonês, e depois em alemão, com o título *Grundlegung der wissenschaftlichen Semantik,* publicado na ata do congresso apenas em 1936. No artigo Tarski defende uma concepção de semântica (lógica) que se tornaria prevalente até hoje. Carnap esteve no Congresso e, após a leitura do artigo de Tarski, com quem teve oportunidade de discutir questões particulares, abraçou uma concepção *neutra e moderadamente semântica* da lógica e da fundamentação da matemática e que iria se tornar permanente em todas as suas obras posteriores.

Tarski estabeleceu que toda teoria semântica caracteriza-se por interpretar as frases de uma linguagem em termos da referência que elas irremediavelmente fazem a supostos domínios de objetos. Aqui os termos "interpretar" e "referência" estão corretamente utilizados como termos semânticos que são. Ademais, Tarski desenvolve, pela primeira vez, um método por meio do qual adequadas definições formalmente corretas e materialmente adequadas do conceito de verdade podem ser obtidas na metalinguagem, e o mesmo vale para outros conceitos semânticos cuja aplicabilidade ainda precisava ser investigada. Carnap revela ter ficado surpreso que o conceito de verdade em seu sentido mais comum, factual, tivesse sido corretamente construído. Afinal, desde o malogro de sua SLL, acreditara que os conceitos de verdadeiro e falso fossem indefiníveis, isto é, por se tratarem de noções que, como parte de um sistema formal, não são introduzidas por meio de outras noções, mas que servem para introduzir todas as demais. Elas são anteriores a qualquer processo particular de formalização, funcionando como elemento essencial de qualquer formalização. Vale lembrar ainda que elas servem justamente na caracterização da noção de proposição, "estas coisas curiosas e obscuras" no dizer de Russell. Para a lógica, proposição é "aquilo" sobre o qual diz-se ser "verdadeiro" ou "falso". Mas, baseado em que se poderia estabelecer as condições de verdade de uma simples frase do tipo "*o livro é azul*"? "A resposta de Tarski, a principio, pareceu ingênua e quase trivial: a frase "" *o livro é azul*" é verdadeira se e somente se o *livro é azul*".

Foi Tarski o primeiro a reconhecer, com grande mérito, que a principal fonte das dificuldades encontradas residiria no seguinte fato: *não se teve sempre em mente que os conceitos semânticos têm um caráter relativo, que eles devem sempre estar relacionados com uma linguagem particular*. Acrescentou que as pessoas não se deram conta de que a linguagem *da qual* falamos não precisava coincidir, de forma alguma, com a linguagem *na qual* falamos. Fez-se semântica de uma linguagem na própria linguagem e, de modo geral, procedeu-se como se houvesse apenas uma única linguagem no mundo. Da análise das antinomias, depreende-se, ao contrario, que os conceitos semânticos simplesmente não têm lugar na linguagem à qual eles se relacionam, e que a teoria semântica da linguagem que contém sua própria semântica, e na qual valem as leis amplamente usadas na lógica de sua época, inevitavelmente deveria ser inconsistente.

Reconhecidas as circunstancias e os erros cometidos, não haveria nenhuma outra dificuldade insuperável o trabalho de lançar "os fundamentos de uma semântica científica" (título do artigo de Tarski), isto é, de caracterizar de maneira precisa os conceitos semânticos, notadamente o de verdade, e estabelecer um modo logicamente inobjetável e materialmente adequado de utilizar tais conceitos. Mas havia um problema que impedia a exeqüibilidade de estabelecer uma semântica cientifica: o problema da definição do predicado "*é verdadeiro*". A importância de uma correta definição semântica da verdade para Tarski reside no fato de que estaria definitivamente resolvido o problema da fundamentação da semântica numa base cientifica, uma vez que, segundo o próprio Tarski

> Utilizando a definição de verdade, estamos em posição de executar a demonstração de consistência para as teorias dedutivas nas quais apenas <u>frases (materialmente) verdadeiras são (formalmente) demonstráveis</u> (...). Uma demonstração com esta, reconhecidamente, não possui grande valor cognitivo, uma vez que ela repousa sobre premissas mais fortes que as pressuposições da teoria cuja consistência é demonstrada. Entretanto, o resultado parece ser de algum interesse pela razão de que ele não pode ser melhorado.(TARSKI, 2007, pag. 155-156. Grifo nosso)

A questão é: como seriam *formalmente demonstráveis essas frases materialmente verdadeiras*? Seria impossível e inviável mostrar aqui em detalhes a formulação de Tarski à questão. O conceito de verdade depende essencialmente, no que diz respeito tanto a extensão quanto ao conteúdo, da linguagem ao qual ele é aplicado. Poder-se-ia dizer significativamente de uma expressão que ela é verdadeira ou não se tratarmos essa expressão como parte de uma linguagem concreta. Tão logo a discussão diga respeito a mais de uma linguagem, a expressão "frase verdadeira" e/ou o predicado "é verdadeiro" passam a ser ambíguas. Como queremos evitar essa ambigüidade, devemos substituí-la pela expressão relativa "*uma frase verdadeira com respeito à linguagem dada*". Para precisar o sentido desta expressão, aplicamos a ela o seguinte procedimento: a linguagem concreta seria a linguagem formalizada uma vez que o grau de exatidão da investigação depende da descrição, em particular, dos termos primitivos da linguagem, das suas regras de formação, da especificação de seus axiomas e, finalmente de suas regras de inferências. Somente as linguagens formalizadas são capazes de apresentar esta descrição, pois elas podem ser construídas através de métodos exatos. O passo seguinte será a construção de uma linguagem na base da qual a semântica daquela linguagem deverá ser desenvolvida que denominaremos metalinguagem; a linguagem "a cujo respeito se fala" e que é o assunto propriamente dito denominaremos "linguagem-objeto". Tanto a linguagem-objeto quanto a metalinguagem têm um sentido relativo. Se ficarmos interessados na noção de verdade que se aplique a frases não da linguagem-objeto original, mas de sua metalinguagem, esta última torna-se automaticamente a linguagem-objeto. E, para definir a verdade para esta linguagem temos de ir para uma nova metalinguagem, para uma metalinguagem de nível superior ainda mais superior. Desse modo, chegamos a toda uma hierarquia de linguagens. O ponto mais importante nessa construção é conferir à metalinguagem um vocabulário suficientemente rico. O último passo é determinar as condições sob as quais poderíamos encontrar um modo de utilizar os conceitos semânticos de uma forma materialmente adequada e de acordo com seu uso ordinário (TARSKI, 2007).

De outro modo dito, se formos bem-sucedidos em introduzir o predicado "é verdadeiro" na metalinguagem de modo que todo enunciado da forma *a frase x é verdadeira se e somente se p* (em que "p" deve ser substituída por qualquer expressão da linguagem sob investigação e "x" por qualquer nome individual desta frase, desde que o nome ocorra na metalinguagem) possa ser provado com base nos axiomas e nas regras de inferência da metalinguagem, então, diremos que o modo de utilizar o conceito de verdade que foi estabelecido é materialmente adequado. Em particular, se formos bem-sucedidos em introduzir um conceito de verdade desta maneira por meio de uma definição, então diremos também que a definição correspondente também é materialmente adequada. Podermos aplicar um método análogo também a qualquer outro conceito semântico, por exemplo, a noção de satisfação, a de designação e definição. Cada uma dessas noções pode ser analisada nos moldes adotados na análise da verdade. Critérios para um uso adequado dessas noções devem ser estabelecidos. Podemos mostrar que cada uma dessas noções, quando empregadas em uma linguagem semanticamente fechada, de acordo com esses critérios, conduz necessariamente a uma contradição. E com isso damos por concluída a tarefa à qual havíamos proposto, uma vez que toda teoria interessante não contraditória é incapaz de expressar seu próprio conceito de verdade. Isto significa que sua linguagem não pode conter uma expressão "*ser verdade*", pela qual a teoria possa demonstrar que, para toda proposição *A*: "*A*" é verdadeira se e somente se *A*. Todavia, temos como solução que

É possível construir na metalinguagem definições metodicamente corretas e materialmente adequadas dos conceitos semânticos se e somente se a metalinguagem for dotada de variáveis de tipo lógico superior ao de todas as variáveis da linguagem que é tema de investigação. (TARSKI, 2007, p. 155).

Os resultados de Tarski relativos à impossibilidade da completude semântica em sistemas formais, estabelecem em que medida essa distinção tem de permanecer sempre operante: por mais que a lógica formal busque reproduzir – traduzir, especificar, fixar – os mecanismos lógicos da linguagem natural, ainda que de uma linguagem natural corrigida e aperfeiçoada pela própria análise formal, o recobrimento nunca pode ser completo. Carnap não tardará a compreender, em linha com as idéias de Tarski, o significado de sua construção como uma descrição daquilo que torna verdadeira as frases da matemática clássica: certo tipo de interpretação. Após a publicação do artigo que Tarski apresentara no Congresso em Paris, Carnap mudou seu ponto de vista anterior e admitiu analisar a noção de conseqüência lógica em conexão com a teoria dos modelos. Uma teoria de modelos nada mais é do que uma teoria estritamente formalizada que define a verdade das proposições de uma linguagem com base em um elemento exterior a ela: o modelo. Trata-se de um aparato dedutivo para dada linguagem formal (interpretada) que satisfaz a seguinte condição básica: se uma frase se deduz de determinado conjunto de frases (teoria), então esta frase é verdadeira em todos os modelos desta teoria. Diz-se então que o aparato dedutivo é adequado (ou correto) para a semântica em causa[30].

Em suma, vê-se o total abandono da abordagem sintática de Carnap pois ele passa a investigar a semântica formal. A despeito desta mudança de rumo, anunciada com a maior ênfase possível em suas obras subseqüentes, como em *Introduction to Semantics* de 1942, permanece plenamente atuante em seu pensamento a concepção da manipulação simbólica como instância privilegiada de objetivação do conhecimento; continuam sendo válido a construção e o estudo de sistemas simbólicos idealmente regrados, bem como a análise das condições de sua aplicação a diversos contextos descritivos, as tarefas lógicas por excelência que permitem avançar o processo de clarificação conceitual (mantendo a todo custo uma

---

[30] Nem todos os sistemas formais são completos. Há sistemas para os quais se demonstra que não há aparato dedutivo adequado que seja completo, por exemplo, a lógica de segunda, em geral as lógicas de ordem superior.

sobriedade e neutralidade principalmente acerca das entidades abstratas), aquele tipo de clarificação conceitual que permanecerá até o final como objetivo fundamental de toda sua filosofia (HANZEL, 2006).

Em *Introduction to Semantics*, sua semântica compartilha certos conceitos defendidos por Tarski, mas incorpora sobretudo a noção tractariana de Wittgenstein[31] de "*state of affairs*" presente em 4.25 – 4.26. O livro foi revisado por Alonzo Church que sugeriu duas mudanças, posteriormente acatadas: primeiro, considerar que a frase designa valores de verdade (verdadeiro ou falso) e não as proposições propriamente ditas; segundo a noção de sentido deveria ser considerada na análise semântica, como vimos, em sua fase sintática o sentido fora completamente abstraído. Em 1947 Carnap publica *Meaning and Necessity* cujas noções de intensão e extensão serão desenvolvidas com plena força. Sobre elas dedicaremos a próxima seção.

3.2 O MÉTODO DA EXTENSÃO E INTENSÃO

Dando "continuidade" à teoria semântica de Frege, mas com pretensões bastante diferentes deste, a saber, com a intenção de apresentar uma teoria formalizada dos sentidos Carnap, em *Meaning and Necessity,* desenvolve o método da intensão e extensão tendo como aspecto central a exposição de um critério de identificação de expressões com o mesmo sentido. Duas expressões teriam o mesmo sentido se fossem definidas, num dado sistema semântico através da equivalência lógica e que esta equivalência seria válida em todos os mundos possíveis (ou "descrições de estado", para ser fiel ao vocabulário técnico de Carnap). O principal objetivo do livro, conforme o próprio Carnap reconhece no prefácio à primeira edição é "desenvolver um novo método de análise semântica do sentido, ou seja, um novo método para análise e atribuição de sentido às expressões lingüísticas" (CARNAP, 1947, p. ii)

[31] A influência de Wittgenstein sobre Carnap é suficientemente conhecida e debatida; não diz respeito, porém, às técnicas de lógica, na medida em que Carnap não assimilou nenhuma de suas propostas mais características (a respeito, por exemplo, da utilização de variáveis, do sinal de identidade etc.). Contudo, havia algo de Wittgenstein que incomodava muito Carnap: de acordo com Wittgenstein havia somente uma linguagem, não sendo possível expressar sua sintaxe (sua gramática), mas apenas exibi-la. Para Carnap, porém, isso seria a negação de todo o método formal, articulado em torno da possibilidade de oferecer cálculos simbólicos perfeitamente regrados. Na melhor das hipóteses, seria a negação de toda a relevância do método formal, na medida em que a "única linguagem" jamais poderia ser adequadamente formalizada. Uma explicação pormenorizada da semântica de Carnap ver Hanzel (2009) e sobre a semântica dos mundos possíveis em Carnap, ver Hintikka (1973).

Carnap admite uma semântica constituída de dois níveis distintos e bem definidos que chamará de intensão e extensão. A intensão seria algo semelhante ao que Frege chamara de sentido e a extensão assemelha-se à referência fregeana. Dizemos que elas se assemelham porque a intensão, assim como o sentido, é entendida como uma dimensão intermediária entre o signo e a denotação; e a extensão, assim como a referência, é aquilo a que o signo se refere. No entanto, eles se diferenciam na medida em que são conceitos de natureza distinta. Frege não deixa totalmente clara a natureza do par de conceitos sentido e referência, sobretudo o sentido que tem uma forte conotação ontológica, enquanto Carnap faz questão de definir o par intensão e extensão como conceitos lógicos e claramente definidos num sistema semântico. Além disso, Carnap jamais aceitou o método da nomeação de Frege o qual segundo ele, daria origem a problemas semânticos insanáveis.

De acordo com Carnap, haveria uma origem comum a todas essas dificuldades e ela remontaria à própria maneira como, desde Platão, se entende o funcionamento da linguagem. A grande dificuldade que fora enfrentada pela definição platônica de linguagem no diálogo *Sofista* era a de estabelecer o sentido das frases complexas, usando o sentido de suas partes. O método utilizado para estabelecer o sentido das partes seria o da relação de nomeação, ou seja, compreender as partes como nomes de objetos, sujeitos nomeando indivíduos e predicados nomeando propriedades. Seria esse o método clássico de compreender os sentidos das expressões através da sua relação de nomeação com objetos e/ou propriedades, na opinião de Carnap, a principal fonte responsável pelo aparecimento das antinomias. Toda análise que fizesse uso dos seguintes princípios estaria se comprometendo, mesmo que de modo implícito, com o método que ele denominou "método da relação de nomeação", e incorrendo, portanto, em dificuldades afins:

1. O princípio da unicidade: toda expressão que for usada como um nome (num certo contexto) é o nome de exatamente uma entidade; chamamos essa entidade o nominatum da expressão;

2. O princípio de conteúdo (subject matter): uma frase é sobre (lida com, inclui no seu tema de discussão) os nominata dos nomes que ocorrem nela;

3. O princípio de inter-substitutividade;

a. Se duas expressões nomeiam a mesma entidade, então uma frase verdadeira permanece verdadeira, se uma das duas expressões for substituída pela outra dentro da frase; [...] as duas expressões são inter-substituíveis (em todo lugar);

b. Se uma frase de identidade '….. = _ _ _' (ou '….. é idêntico a _ _ _' ou '….. é o mesmo que _ _ _') é verdadeira, então as duas expressões que funcionam como argumento '…..' e '_ _ _' são inter-substitutíveis (em todo lugar)

De acordo com os princípios listados, a relação de nomeação seria uma relação entre a expressão de uma linguagem e uma entidade (ou objeto) concreta ou abstrata, da qual essa expressão seria o nome. Nesse caso, utilizar-se-ia algum tipo de nomenclatura que poderia ser, por exemplo: x *nomeia* y, *o nominatum de* x é y, x *denota* y, ou ainda x *designa* y. Quanto ao tipo das expressões que podem ser consideradas como nomes, elas poderiam ser termos singulares, descrições definidas, frases declarativas. Contudo, o caminho correto com vistas a evitar o dualismo ontológico gerado pela solução de Frege, seria o de evitar a visão denotativa (a tese da relação de nomeação), mas manter a distinção entre intensão e extensão fregeana e, é claro, os contextos modais. Assim, Carnap procura mostrar como definir todos os conceitos semânticos sem fazer referência a objetos extralinguísticos, mas preservando, ainda que de modo não metafísico, a duplicidade, presente nas soluções de Frege e Church, entre a intensão e a extensão. Com esse objetivo em mente, ele oferece duas alternativas, bastante radicais e inovadoras, para solapar o método da nomeação: a tese da extensionalidade e o método da intensão-extensão.

O método da extensionalização consistiria em excluir, de uma linguagem formal qualquer, todos os contextos ditos intensionais (ou não extensionais). Todavia, a aplicação do método da extensionalização reduziria a análise lógica aos aspectos puramente extensionais. Além disso, havia uma questão que Carnap não poria em negociação: claro, além das implicações e dificuldades em demonstrar a tese da extensionalidade, o que de resto seria bem fácil, teríamos de mostrar como uma linguagem desse tipo serviria tanto para a lógica quanto para as ciências empíricas. Para que a *tese da extensionalidade* ficasse completa, dever-se-ia especificar a relação desta linguagem universal com qualquer outra linguagem possível. Logo, a tese da extensionalidade é rejeitada e em seu lugar Carnap propôs que deixemos de pensar na relação de nomeação defendida por Frege – Church e utilizemos o método denominado extensão – intensão. Teríamos, assim meios para traduzir seguramente qualquer linguagem *intensional* para uma mesma *meta-linguagem extensional universal.*

> A forma especial do método nome-relação de Frege envolve complicações adicionais. Começando com qualquer nome ordinário, ela conduz a um número infinito de entidades e um número infinito de expressões como nomes para elas, enquanto que o método da extensão e intensão necessita,

> somente, de uma expressão e fala somente de duas entidades. Além do mais, de acordo com o método de Frege, o mesmo nome, quando ocorrendo em diferentes contextos, pode ter um número infinito de diferentes *nominata*; e, algumas vezes, até a mesma ocorrência de um nome pode, simultaneamente, ter várias *nominata*. (CARNAP, 1947, p.129).

Além disso, a questão sobre os critérios de identidade das entidades intensionais estaria finalmente liquidada: duas expressões teriam o mesmo sentido, melhor dizendo, duas expressões teriam a mesma intensão desde que fossem definidas num dado sistema lingüístico através de suas equivalências; e duas expressões cuja intensão é a mesma, são definidas num sistema, como possuindo a mesma extensão ou o mesmo valor de verdade (sendo verdadeiras para as mesmas coisas) em todos os mundos possíveis (ou descrições de estado). A noção de intensão está relacionada à equivalência lógica de expressões, ou seja, ele apresenta um critério extensional, mesmo valor de verdade (mesma extensão) em todos os mundos possíveis. Essa é a razão pela qual Carnap, em *Meaning and Necessity*, parte do conceito de verdade lógica para definir a equivalência de expressões, em seguida, apresentar expressões de mesma intensão como aquelas que são logicamente equivalentes.

Ele parte dos conceitos de descrição de estado (*state-description*), mundos possíveis construídos a partir das regras de formação de expressões, e aquilo que chamará de "*range*", conjunto de descrições verdadeiras segundo as regras semânticas, para definir verdade lógica (analiticidade) em um dado sistema lingüístico. Uma descrição de estado num sistema S1 é "*uma classe de frases em S1 a qual contém, para toda frase atômica, ou ela mesma ou sua negação, mas não ambas, e não outras frases*". O objetivo de uma descrição de estado, em $\mathfrak{S}_1$, é "*dar uma completa descrição de um possível estado do universo de indivíduos com relação a todas as propriedades e relações expressas pelos predicados do sistema lingüístico*". Uma descrição de estado tem que ser completa, não pode ter frases atômicas contraditórias e não possuir frases moleculares. Cada descrição de estado representa um mundo possível em $\mathfrak{S}_1$. O conjunto de mundos possíveis para os quais uma dada frase atômica p é verdadeira é chamado de "*range* de p". A idéia da descrição de estado está associada ao que hoje conhecemos por conjunto maximal consistente da lógica de primeira ordem cuja formulação é a seguinte:

TEOREMA: Um conjunto Γ é maximal consistente se: (i) Γ é consistente e (ii) Γ é um conjunto máximo de fórmulas de que não deriva uma contradição. Exibiremos a prova do teorema através de um exemplo.

Exemplo: Vamos mostrar que as seguintes condições são equivalentes[32]

a) $\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ é consistente

b) $\nvdash \neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n)$

$$a \rightarrow b$$

1. Suponha $\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ é consistente
2. Pelo teorema da completude, $\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ é satisfazível
3. Por RAA, suponha $\vdash \neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n)$
4. Pelo teorema da corretude, $\models \neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n)$
5. Contradição (4) e (2)

A outra maneira seria provar pela completude, usando as valorações.

$\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ é consistente.

Pela completude existe uma valoração *v*, tal que $\begin{array}{l} v(\varphi_1) = 1 \\ v(\varphi_2) = 1 \\ v(\varphi_n) = 1 \leftrightarrow v\{\varphi_1,...,\varphi_n\} = 1 \end{array}$

Como existe *v* tal que, $v(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n) = 1$, por $a \rightarrow b$ $v(\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n)\ ) = 0$. Logo, $\nvDash \neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n) = 1$. Conjuntos maximamente consistentes têm um papel relevante na lógica. Deles poder-se-ia por exemplo estabelecer que um dado conjunto é completo e portanto analisarmos todas as suas conseqüências lógicas acarretando no teorema da completude segundo o qual tudo que é verdade pode ser provado.

Embora não tenha usado a noção de conjunto maximamente, Carnap (empregou a descrição de estado, *state-description*) aplicou-a aos diversos tipos de expressões tais como os designadores que englobam as expressões individuais, os predicados, e as frases, com o intuito de separar precisamente a extensão e intensão de cada um bem como separar a parte lógica da extra-lógica e assim produzir definições analíticas, portanto, derivar verdades lógicas. Em linhas gerais, a relação entre a equivalência de designadores e a noção de intensão e extensão ocorre da seguinte forma: se dois designadores (frases, expressões individuais, predicados) são equivalentes dizemos que eles têm a mesma extensão em todas as descrições de estado. Se dois designadores são logicamente equivalentes, então, eles têm a mesma

[32] O leitor não iniciado em lógica proposicional encontrará alguma dificuldade na prova. Para tanto, sugerimos a leitura do livro *Lógica e Estrutura* de Dirk Van Dalen.(2004).

intensão (proposição, propriedade, conceito individual) e também a mesma extensão. Os exemplos abaixo mostram como se dá este critério de comparação das intensões com relação a predicados, frases e expressões individuais, respectivamente.

EXEMPLO 1 – Se temos um sistema lingüístico $\mathfrak{S}_1$, no qual foram estabelecidos os predicados H (homem), RA (animal racional), e IB (bípede implume). Foi definido, ainda, que todo humano é animal racional. Então, podemos dizer que os predicados H e RA são logicamente equivalentes. Portanto, eles têm a mesma intensão. Conseqüentemente, também possuem a mesma extensão. Agora vamos assumir o fato biológico de que todos os humanos são bípedes implumes e vice-versa, ou seja, todos os bípedes implumes são seres humanos. A frase que afirma que o predicado "homem" é materialmente equivalente ao predicado "bípede implume", $((x)[H(x) \equiv (IB)(x)])$, no sistema lingüístico $\mathfrak{S}_1$, é uma verdade factual e não uma verdade lógica, porque a verdade não foi determinada, exclusivamente, pelas regras semânticas do sistema. A classe de todos aqueles, e só daqueles, objetos dos quais o primeiro termo se aplica é idêntica à classe de todos aqueles, e só daqueles, objetos aos quais o segundo termo se aplica – os termos são assim coextensionais, porém, a variação nos conceitos expressos, ou nas condições que eles impõem para que um objeto pertença à sua extensão, faz com que esses termos tenham intensões distintas. Portanto, estes predicados são materialmente equivalentes, mas não são logicamente equivalentes.

EXEMPLO 2 – Vamos supor que na linguagem $\mathfrak{S}_1$, que utilizamos para definir verdade lógica, além da definição $\mathrm{H} =_{\mathrm{df}} \neg\mathrm{M}$, seja definido também que *c* é H. Desse modo as frases "*c é H*" e "*c é não M*" são logicamente equivalentes e, portanto, possuem a mesma intensão. Uma vez que duas frases possuem a mesma intensão, então necessariamente, elas terão também a mesma extensão. Ou seja, a igualdade de intensão determina a igualdade de extensão. No entanto, o caso contrário nem sempre ocorre – duas frases com a mesma extensão podem possuir intensões não equivalentes, ou melhor, logicamente equivalentes. Retornando à linguagem $\mathfrak{S}_1$, vamos supor que temos o seguinte fato: a é M, b é M, c é H. Neste caso, as frases "a *é M*" e "c *é H*" possuem a mesma extensão, ambas têm o mesmo valor de verdade – são verdadeiras. No entanto, a intensão dessas duas frases é diferente – elas dizem coisas distintas, e, por conseguinte, expressam diferentes proposições. Dizemos que duas frases materialmente equivalentes podem sim possuir a mesma extensão, mas isso não implica, necessariamente, que elas terão também a mesma intensão. Frases com a mesma extensão são materialmente equivalentes, mas não, logicamente equivalentes. Logo, a resposta de Carnap à questão sobre da identidade das entidades intensionais será dada mediante à observação das regras semânticas de um dado sistema lingüístico. Note que Carnap *não define o conceito de intensão, ele apenas apresenta um critério para que possamos saber quando duas expressões possuem a mesma intensão*. Seguem abaixo algumas definições.

DEFINIÇÃO 1. Um conjunto Γ de formulas (expressões) de $\mathfrak{S}_1$ é chamado de *state-description* se dele podemos derivar ou φ ou $\neg\varphi$ mas não ambas.

DEFINIÇÃO 2. Uma frase F_1 é L – verdadeira (logicamente verdadeira) em um sistema semântico $\mathfrak{S}_1$ se e somente se a verdade de F_1 tiver sido estabelecida com base unicamente nas regras semânticas de $\mathfrak{S}_1$ sem qualquer referencia aos fatos empíricos.

DEFINIÇÃO 3. Uma frase F_1 é L – verdadeira em $\mathfrak{S}_1$ a outra frase F_2 se $F_1 = F_2$ em toda descrição de estado de $\mathfrak{S}_1$.

DEFINIÇÃO 4. F_1 é L – falsa (logicamente falsa) em $\mathfrak{S}_1$ se por definição $\neg F_1$ for L – verdadeira em S1.

DEFINIÇÃO 5. F_1 L – implica (implica logicamente) F_2 em $\mathfrak{S}_1$ se por definição $F_1 \rightarrow F_2$ é L – verdadeira.

DEFINIÇÃO 6. F_1 é L – equivalente (logicamente equivalente) a F_2 em $\mathfrak{S}_1$ se por definição $F_1 \equiv F_2$ é L – verdadeira.

DEFINIÇÃO 7. F_1 é L – determinada (logicamente determinada) em $\mathfrak{S}_1$ então ou F_1 é L – verdadeira ou F_1 é L – falsa.

DEFINIÇÃO 8. F_1 é L – indeterminada (logicamente indeterminada) em $\mathfrak{S}_1$ então F_1 não é L – determinada.

DEFINIÇÃO 9. F_1 é F – indeterminada (factualmente verdadeira) em $\mathfrak{S}_1$ então F_1 é verdadeira mas não é L – verdadeira.

DEFINIÇÃO 10. Expressões individuais são equivalentes se e somente se elas estão para o mesmo individuo.

DEFINIÇÃO 11. A extensão de um predicado (de grau 1) corresponde a sua classe.

DEFINIÇÃO 12. A intensão de um predicado (de grau 1) corresponde a uma propriedade.

DEFINIÇÃO 13. Todas as frases L – verdadeiras são L – equivalentes e daí têm a mesma intensão.

DEFINIÇÃO 14. A extensão de uma frase é seu valor de verdade

DEFINIÇÃO 15. A intensão de uma frase declarativa é a proposição que ela expressa.

DEFINIÇÃO 16. A extensão de uma expressão individual é o individuo a que ela se refere.

DEFINIÇÃO 17. A intensão de uma expressão individual é o conceito individual que ela expressa.

Conceitos puramente lógicos são definidos, dentro do sistema lingüístico, através das regras de designação e regras semânticas de $\mathfrak{S}_1$. É dessa forma que Carnap apresenta os conceitos tais como verdade lógica, falsidade lógica e equivalência lógica. Os conceitos que estiverem fora das regras de $\mathfrak{S}_1$ serão os conceitos não lógicos ou materiais. A relação de equivalência entre frases logicamente verdadeiras e logicamente falsas – a equivalência lógica, tem como critério as regras definidas em $\mathfrak{S}_1$. Este é, também, o critério utilizado por Carnap para identificar a intensão dos designadores – quando dois designadores têm a mesma intensão. Ou seja, dois designadores terão a mesma intensão, num dado sistema, se eles forem definidos na base da equivalência lógica. Lembre-se que Carnap aplica esse critério de identificação do sentido, de expressões com o mesmo sentido, não apenas para frases, mas também para expressões individuais e predicados.

É natural inferirmos, a partir do que vimos até o momento, que o critério de permutabilidade de expressões será a equivalência lógica entre elas. Uma expressão ocorrendo dentro de uma frase é permutável com outra expressão, logicamente equivalente a ela, se o valor de verdade da frase permanece inalterado quando a primeira é trocada pela segunda. Carnap diria que se a frase ocorre num contexto extensional, basta que as expressões sejam equivalentes, isto é, que tenham o mesmo valor de verdade, para que a troca entre elas mantenha o valor de verdade da frase inalterado. Um exemplo típico de expressões ou contextos extensionais são as expressões que envolvam os conectivos lógicos. Note que em qualquer sistema lingüístico o uso dos conectivos lógicos já foi definido e, portanto, a forma lógica das expressões formuladas com esses conectivos já está estabelecida, não interessando, assim, o significado/intensão de suas expressões componentes – interessa apenas o seu valor de verdade. Os conectivos lógicos são funções de verdade que determinam a estrutura lógica de qualquer frase com eles formulada. Assim, se num sistema lingüístico qualquer temos uma expressão extensional do tipo $\alpha \vee \beta$, isto significa que se trocamos os termos “"α" e "β" por quaisquer outros termos equivalentes, com mesmo valor de verdade, não importando a sua intensão, o valor de verdade da expressão inteira permanece inalterado. Essa é a razão pela qual essas expressões são extensionais.

Mas se uma frase qualquer ocorrer num contexto intensional é necessário que as expressões sejam logicamente equivalentes, ou seja, que estejam definidas no sistema como equivalentes, para que a permuta entre elas mantenha o valor de verdade da frase inalterado. Os contextos intensionais mais característicos são aqueles nos quais aparecem frases formadas com expressões modais (necessidade, possibilidade, impossibilidade, contingência). Estas frases não são extensionais com relação a seus componentes porque as modalidades não são funções de verdade. Dessa forma, se temos um sistema não extensional $\mathfrak{S}_2$, formado por conectivos lógicos e também por expressões modais, haverá casos em que encontraremos expressões verdadeiras e expressões logicamente verdadeiras, que, embora tenham o mesmo valor de verdade, não serão intercambiáveis. Isto ocorre porque a permuta de uma expressão logicamente verdadeira por uma expressão materialmente verdadeira, numa expressão composta por um signo modal de necessidade, por exemplo, torna a referida expressão falsa. Por exemplo: suponha o sistema $\mathfrak{S}_2$ composto pelos signos de sistema extensional anteriormente mencionado e incluindo os conectivos lógicos e, ainda, o signo de necessidade lógica "N". Neste sistema a expressão "Hs" é factualmente verdadeira e a expressão $"Hs \vee \neg(Hs)"$ também é verdadeira.

Observe que as duas expressões "Hs" e $"Hs \vee \neg(Hs)"$ são equivalentes, ou seja, têm o mesmo valor de verdade – pois ambas são verdadeiras. No entanto, se inserimos cada uma delas na expressão "N(...)", teremos, como resultado, diferentes valores de verdade para a mesma expressão. Note que $N[Hs \vee \neg(Hs)]$ é logicamente verdadeiro e N(Hs) é falsa porque "Hs" não é logicamente verdadeira. Assim, "Hs" e $"Hs \vee \neg(Hs)"$, que são materialmente equivalentes, não são intercambiáveis dentro de N(...), uma vez que elas não são logicamente equivalentes. Desse modo, o critério que torna válida a intercambialidade de expressões em contextos intensionais é a equivalência lógica destas expressões.

Mas há também contextos especiais que não são nem intensionais nem extensionais. São os contextos nos quais ocorrem frases compostas por verbos que expressam atitudes proposicionais tais como "acreditar", "pensar", "achar", "dizer". Nesses contextos, segundo Carnap, o princípio de permutabilidade de expressões – a equivalência lógica de expressões -

parece não funcionar. Assim, seja a frase "Pedro pensa que p", e substituímos a oração subordinada "p" por uma outra, mesmo sendo logicamente equivalente a ela, o valor de verdade da frase inteira pode alterar-se. Suponhamos um sistema no qual a expressão "homem" é definida como *animal racional*. As expressões "homem" e "animal racional" são logicamente equivalentes. Seja a frase "Pedro pensa que Sócrates é homem" pertencente ao sistema. Se permutássemos a oração subordinada "Sócrates é homem" por outra, logicamente equivalente a ela, "Sócrates é um animal racional", mudamos o valor de verdade da frase "Pedro pensa que Sócrates é homem". Afinal, esta frase refere-se ao pensamento expresso pela frase "Sócrates é homem", diria Frege, e sua verdade depende exclusivamente do fato de Pedro pensar que Sócrates é homem e não da verdade da oração subordinada "Sócrates é homem". O que interessa para se estabelecer o valor de verdade da frase complexa "Pedro pensa que Sócrates é homem" é que Pedro, de fato, pense que Sócrates é homem. Se Pedro pensa, de fato, que Sócrates é homem mas não pensa que Sócrates é um animal racional, então, mesmo sendo logicamente equivalentes, estas expressões não podem ser permutadas. Note que o fato de Pedro não pensar que Sócrates é um animal racional, ou seja, Pedro não assentiria à frase "Sócrates é um animal racional", se lhe fosse perguntado, não significa que Pedro comete o erro de assentir à sua negação, mas apenas que Pedro não está disposto a assentir à referida frase. Em resumo, nesse contexto, embora as expressões "homem" e "animal racional" tenham a mesma intensão e, portanto, a mesma extensão (mesmo valor de verdade – o verdadeiro), a troca de uma pela outra altera a semântica da frase – sua intensão e seu valor de verdade.

> O problema da análise lógica de frases desse tipo (de atitudes proposicionais) tem sido muito discutido, mas uma solução satisfatória ainda não foi encontrada. A análise aqui proposta ainda não é uma solução completa, mas pode, talvez, ser vista como um primeiro passo. Primeiro porque ainda resta ser feito um refinamento na análise em termos das reações lingüísticas aqui apresentadas e, segundo, uma análise em termos das disposições ao componente não lingüístico (CARNAP, 1947. p.62)

Carnap não considera esse contexto como um contra exemplo e que fere seu princípio de permutabilidade de expressões, mas apenas que ele representa uma situação particular para a qual o critério de troca de expressões deverá ser um pouco mais forte que a simples equivalência lógica de expressões. Além da equivalência lógica, além de possuírem a mesma intensão, é preciso que as expressões sejam entendidas por quem quer que as compreenda da mesma forma. Para isso, é necessário que elas sejam *intensionalmente isomórficas*. Dizer que duas frases são intensionalmente isomórficas ou que têm a mesma estrutura intensional, significa dizer que elas devem não apenas ser logicamente equivalentes, como um todo, mas que devem ser constituídas da mesma forma, a partir de partes logicamente equivalentes. Carnap chama esse tipo de frases isomórficas de “sinônimas”. Como exemplo de frases isomórficas temos “2+5” e “II mais V”, onde o número de elementos é o mesmo, e as expressões, numéricas e funções aritméticas, definidas numa linguagem como logicamente equivalentes, ou seja, é definido que “+” e “mais” são expressões para a função soma, e portanto, são L – equivalentes; e “2” e “5” são logicamente equivalentes às expressões “II” e “V”, respectivamente. Elas têm o mesmo número de elementos e suas partes componentes são logicamente equivalentes – têm a mesma intensão. Um exemplo de duas expressões que, embora sejam logicamente equivalentes, tenham a mesma intensão, mas não são isomórficas, são as expressões $"\neg(\alpha \wedge \beta)"$ e $"\neg\alpha \vee \neg\beta"$. Portanto, nem sempre duas frases com a mesma intensão podem ser sinônimas.

Mesmo na hipótese de Pedro pensar que Sócrates é homem e se ele assentisse a frase “Sócrates é um animal racional” onde as duas frases são equivalentes e L – equivalentes, pois possuem a mesma intensão, é possível que ambas apresentem valores de verdade diferentes: basta que uma seja aceita verdadeira e a outra não, não permitindo, portanto, que sejam intersubsitutíveis. Mas, como enfrentar tal problema? A solução que Carnap apresenta constitui-se na introdução do conceito de *isomorfismo intensional*, ou igualdade de estrutura intensional, que visa a estabelecer um critério para a identificação de objetos de crença, uma vez que a condição de L – equivalência, por si só, é muito fraca para resolver contextos de crença, pois, recapitulando, sempre é possível que uma pessoa com bom raciocínio lógico não consiga reconhecer duas proposições L –equivalentes e considere uma verdadeira e outra falsa.

> Se duas frases são construídas da mesma forma que seus designadores (ou matrizes de designadores) de maneira que dois designadores correspondentes são L – equivalentes, então dizemos que as duas frases são intensionalmente isomórficas ou que têm a mesma estrutura intensional. Obviamente que a L – equivalência pode ser usada numa acepção mais ampla para os designadores de diferentes sistemas lingüísticos; e que a noção de isomorfismo intensional seja estendida. (CARNAP, 1947, p.56)

Em outras palavras, ocorre *isomorfismo intensional* quando as frases não são apenas L – equivalentes como um todo, mas sim, L – equivalentes nas partes que compõem esse todo. E se diz de duas matrizes de designadores, contendo as mesmas variáveis livres, que elas são intensionalmente isomórficas se uma pode ser obtida de outra por uma série de passos que consistem de:

(i) mudanças alfabéticas da variável ligada;

(ii) substituições de uma constante individual por outra que é L-equivalente a ela, e

(iii) substituições de uma constante predicadora por outra que é L-equivalente a ela.

Assim, se for dito que *Francisco acredita que D* e *Francisco acredita que D´, as* duas frases não serão apenas L – equivalentes mas igualmente isomórficas em termos das intensões, obrigando ao indivíduo a admitir que se uma é verdadeira a outra também o é. E essa conclusão Carnap formaliza no princípio abaixo

(iv) Existe uma frase Ω*, em um sistema semântico S', tal que*
a. Ω_i *em S' é intensionalmente isomórfica a 'D' em S, e*
b. fica-se disposto a uma resposta afirmativa a Ω_i *como uma frase de S'.*

O isomorfismo proposto por Carnap permite acordar que frases de crença não podem ser analisadas em termos da proposição que ela expressa, uma vez que duas frases como *Hipólito acredita que o número de planetas é 9* e *Hipólito acredita que o número de planetas é 3 ao quadrado* possuem a mesma proposição mas não são intensionalmente isomórficas e, portanto, permitem que uma seja verdadeira e outra falsa. Uma *intensão* é uma função de índices de mundos possíveis, para suas extensões – nomes próprios identificam indivíduos, e predicados, conjuntos de indivíduos. Repetindo Tarski, Carnap compara as categorias lógicas às categorias semânticas. Isso, somado às intensões, garantiria a referência e a diferença no sentido – do ponto de vista da linguagem natural, mas não do ponto de vista lógico.

Church (1954), constrói um exemplo de expressões que são intensionalmente isomórficas de acordo com a definição de Carnap (ou seja, expressões que compartilham a mesma estrutura e cujas partes são necessariamente equivalentes), mas que falham no princípio da substituição. Esse problema ocorre com anuencia do principio da tolerância de Carnap (que por si só é plausível). Somos livres para introduzir numa linguagem sintaticamente expressões simples que denotam a intensão mesmo que de maneiras diferentes e, portanto, deixar de ser sinônimos. No entanto, elas são intensionalmente isomórficas de acordo com a definição de Carnap. Church usou como exemplo de tais expressões dois predicados P e Q, definido por $P(n) = n < 3$, $Q(n) = \exists xyz\ (x^n + y^n = z^n)$ ($x^n + y^n = z^n$), onde x, y, z, n são inteiros positivos. P e Q são necessariamente equivalentes, porque para todos os n é válido P (n) se e somente se Q (n). Por esta razão, P e Q são intensionalmente isomórficas, e assim são as expressões "$\exists n\ (Q(n) \wedge \neg P(n))$" e "$\exists n\ (P(n) \wedge \neg P(n))$". Todavia, poderemos facilmente acreditar em $\exists n\ (Q(n) \wedge \neg P(n))$ e não acreditar em $\exists n\ (P(n) \wedge \neg P(n))$. Há dois problemas aqui:

(1) Uma vez que os dois predicados são introduzidos como sintaticamente simples, pela definição de Carnap eles são intensionalmente isomórficas se e somente se tiverem a mesma intensão (que no caso de expressões matemáticas coincide com a sua extensão). A intensão/extensão do predicado P é o conjunto {1, 2}. A intensão/ extensão do predicado Q é o mesmo conjunto, a saber, {1, 2}, pois, de acordo com o teorema de Fermat, foi finalmente provado que a equação ($x^n + y^n = z^n$) não tem solução para n> 2. Consequentemente, P e Q são intensionalmente isomórficas. Isto, com certeza, Carnap não tinha percebido. Além disso, ele acaba entrando na armadilha de seu proprio princípio (muito plausível e desejável), qual seja, o principio da tolerância, que afirma: podemos introduzir na linguagem qualquer constante, termo, etc...

2) O isomorfismo intensional não depende dos valores de x, y, z. Church mostra, usando a notação do lambda calculo para os predicados) que os predicados correspondem a conjuntos de números, mas que estes não dependem dos valores de x, y, z:

P = n [nλ<3], ou seja, este termo lambda denota apenas o conjunto {1, 2}.

$Q = \lambda n\ [\exists xyz\ (x^n + y^n = z^n)]$ este termo lambda também denota exatamente o mesmo conjunto {1, 2}.

Com certeza, para n = 1 existem infinitos números x, y, z tais que ($x^n + y^n = z^n$).

Para n = 2 temos o teorema de Pitágoras, e há de novo infinitamente muitos triplas x, y, z tais que ($x^n + y^n = z^n$), por exemplo, <2, 3, 5>, <5, 12, 13> , <7, 24, 25>, <11, 60, 61>, <8, 15, 17>, <9, 12, 15>, <10, 24, 26>, ... Mas, para n=3 não há nenhuma tripla, e, consequentemente nenhuma estrutura isomorfica.

CAPÍTULO 4 – QUINE E A REJEIÇÃO DAS ENTIDADES INTENSIONAIS

Quine se mostrou desfavorável ao reconhecimento das entidades intensionais. São muitos os seus argumentos: circularidade – noções intensionais não podem ser definidas porque recorrem a noções igualmente intensionais; indeterminação da tradução – não há fundamentos empíricos que garantam a tradutibilidade de uma linguagem estrangeira; e a tese de Quine-Duhem – frases particularizadas não são portadoras de significado lingüístico mas apenas conjuntos de frases ou o todo da linguagem. A noção de intensão (sentido, proposição) foi por ele categoricamente repudiada, basicamente porque os objetos que pressupõem não podem ser satisfatoriamente identificados. Ao criticar as noções intensionais, afirmou que elas são dispensáveis e que podemos falar significativamente sem recorrer a intensões e significados. Este foi um de seus ataques mais conhecidos, pois representou o ponto de apoio a todas as críticas que se seguiram. Faremos aqui uma exposição sumária delas.

A identificação do lógico com o analítico é uma invenção de Frege, mas podemos muito bem definir o conceito de analiticidade diferentemente. Desde Kant sabemos que, um juízo é analítico se a representação expressa pelo sujeito do enunciado contém a representação expressa pelo predicado. Se abandonarmos esse modo de falar e atentarmos apenas para o enunciado e os significados que ele articula, podemos definir um enunciado como analítico se o *significado* do termo sujeito contém o *significado* do termo predicado. Retiramos assim a distinção do domínio das representações judicativas para colocá-la no domínio da linguagem. Além disso, não mais será exigido, como Frege acreditava, que o enunciado seja de algum modo redutível a verdades lógicas. A necessidade da lógica se desloca e adquire contornos nada usuais: podemos simplesmente dizer que um enunciado analítico verdadeiro o é exclusivamente em razão da forma. Qualquer enunciado, empírico ou não, é expresso em uma linguagem; assim, é de esperar que qualquer condição para o *uso* da linguagem imponha-se também necessariamente ao mundo descrito por essa linguagem. Por exemplo, a asserção, "o metro standard depositado em Paris mede um metro" não é uma asserção sobre, mas simplesmente a definição do termo "metro" e, conseqüentemente, o estabelecimento das condições de uso adequado desse termo. Nós em geral acreditamos, talvez contra melhor juízo, que os termos que usamos têm significados bem determinados; portanto, é possível que os enunciados *a priori* em geral, entre eles os enunciados matemáticos, nada mais sejam que explicitações desses significados. A veracidade, *a priori* e necessária, de "2+2=4", pode decorrer apenas daquilo que “2”, “+”, “=” e “4” significam. Daí em diante a lógica entra em jogo derivando tudo o que vale necessariamente para esses termos, dados esses significados. Frege não está longe dessa posição, só que para ele o significado dos termos aritméticos pode ser dado em termos do significado de termos puramente lógicos. Mesmo que não concordemos com Frege, podemos ainda adotar a posição semanticista. Os enunciados analíticos podem ser vistos como regras para o uso correto de certos termos da linguagem, isto é, uma espécie de gramática. Um dos filósofos que adotaram essa estratégia, e que esperamos ter deixado claro seu programa no capitulo anterior, foi Rudolf Carnap, sendo Quine, que não acreditava que significados fossem entidades bem determinadas, o seu crítico mais importante.

Essa ênfase lingüística pode ser remetida particularmente a Wittgenstein e seus “herdeiros” do Círculo de Viena e do Positivismo Lógico (SILVA, 2007). Esse ponto de inflexão em filosofia, chamado de *virada lingüística* (*linguistic turn*), insere-se numa tradição filosófica essencialmente austríaca. Desenvolvida principalmente em reação a Kant, essa vertente filosófica busca explicar o conhecimento *a priori*, como o da matemática, sem apelar para as intuições puras de Kant. Desprovidos dessas intuições e sem poder apelar aos sentidos, sobrava a esses filósofos a linguagem para dar conta do conhecimento *a priori*. Doravante, verdades *a priori* serão vistas como verdades da linguagem. Assim como certas verdades aparentemente empíricas são apenas regras para o uso correto de certos termos empíricos, há em geral verdades que nada mais são que regras para o uso correto da linguagem. Quine coloca em dúvida o fundamento desse programa, qual seja, a definição semântica de analiticidade.

A noção de asserção analítica depende em última análise da noção de significado, mas Quine questiona se há de fato *algo* determinado que seja o significado de uma expressão. Em geral a noção de significado é invocada para explicar a comunicação, quer entre os usuários de uma mesma língua, quer entre os de línguas diferentes, por meio de traduções que *conservam o significado*. Um segundo de reflexão sobre as vicissitudes da comunicação humana já bastaria para acender a desconfiança sobre a realidade da boa determinação do significado das expressões que usamos. Ainda que a perfeita comunicação fosse possível, talvez não haja ainda assim significados sendo transferidos por meio dela. Quine monta um argumento para mostrar que não há mesmo. Se aceito, esse argumento impede que se defina analiticidade como a relação de sinonímia entre sentidos. O que ele quer mostrar é que não há uma distinção clara entre enunciados analíticos e sintéticos, colocando um grande problema para o positivismo lógico, que leva essa distinção muito a sério.

A distinção entre enunciados analíticos e sintéticos e a noção de significado são alguns dos problemas que o empirismo lógico, em especial Carnap, pensava ter conseguido explicar. Vimos no capitulo anterior que em *Meaning and Necessity* (1947), Carnap apresentou o seu critério para a distinção entre frases analíticas e sintéticas num tipo de construção denominada de "descrições de estado". Carnap afirma que uma frase S é analítica quando verdadeira em todas as descrições de estado. Descrições de estado representam mundos possíveis construídos a partir das regras de formação de expressões, num dado sistema lingüístico. Cada descrição de estado representa um mundo possível naquele sistema lingüístico. Carnap também elabora um critério para sinonímia de expressões lingüísticas, segundo o qual, duas expressões são sinônimas quando podem ser reduzidas, através das regras semânticas, a uma identidade.

Apesar dos esforços empreendidos por Carnap e do rigor com que tratou o problema da analiticidade e do significado[33], não demorou muito para se constatar que sua pretensão de ter resolvido os problemas relativos àquelas noções estava equivocada. O equívoco não diz respeito propriamente ao trabalho formal empreendido, mas à sua pressuposição de que verter a noção de significado numa linguagem formal é o suficiente para explicá-la. E esse defeito foi rapidamente percebido por Quine, que freqüentou alguns encontros do Circulo de Viena e foi aluno de Carnap. Quine procurou mostrar em seus escritos que uma explicação satisfatória para aquelas noções não havia sido, de fato, elaborada. Ele faz essa crítica mostrando que as noções supostas nas definições de analiticidade até então apresentadas, mesmo na formulação lógico-formal produzida pelo empirismo lógico, são obscuras e também necessitam de uma explicação. Noções tais como significado, necessidade, possibilidade, sinonímia, regras semânticas carecem de explicação tanto quanto a noção de analiticidade.

> Não quero com isso sugerir que Carnap esteja de algum modo iludido a este respeito. Sua linguagem-modelo simplificada como suas descrições de estado visa primariamente não ao problema geral da analiticidade, mas a outro propósito: à clarificação da probabilidade e da indução. Nosso

[33] Parte da crítica de Quine à noção clássica de significado apresentada em "*Os dois dogmas do empirismo*" (1951), é direcionada à noção de analiticidade. Mais especificamente, a qualquer tentativa em reconhecer a construção das intensões de Carnap, ou seja, a noção de analiticidade definida em "*Meaning and Necessity*" (a equivalência lógica de expressões) como uma explicação satisfatória para a analiticidade em geral.

> problema, entretanto, é a analiticidade e aqui a maior dificuldade encontra-se não na primeira classe de enunciados analíticos, as verdades lógicas, mas antes na segunda classe, que depende da noção de sinonímia. (QUINE, 1953, pag. 231)

Ao falar em analiticidade, ele tinha em mente dois tipos de enunciados analíticos. O primeiro deles, chamado de "*enunciados de primeira classe*", são as verdades lógicas, enunciados verdadeiros unicamente em virtude de sua forma lógica e independentemente de qualquer interpretação que possa ser dada a seus termos extra-lógicos. Por exemplo: "*ou Maria foi ao cinema ou não foi ao cinema*", "*Nenhum casado é não casado*", "*Nenhum homem que não casou é casado*", "*p v ~p*". Esse tipo de enunciado analítico Quine aceita como claro e bem definido, não tendo qualquer objeção ao seu uso. No entanto, há um segundo tipo de enunciado, aclamado como analítico mas que será por ele rejeitado denominado "*enunciados analíticos de segunda classe*". Estes enunciados podem ser transformados em verdade lógica por meio da substituição dos sinônimos, são verdadeiros em função do significado. Por exemplo: "*Nenhum solteiro é casado*". Ao substituirmos "*solteiro*" por "*homem que não casou*", transformamos este enunciado na verdade lógica "*Nenhum homem que não casou é casado*". Voltando a Carnap e sua noção de intensão (que fora definida em termos da equivalência lógica), a observação de Quine é que sua explicação da analiticidade não passa de uma definição de verdade lógica, isto é, aqueles enunciados de primeira classe anteriormente mencionados. Carnap apenas criou uma semântica formal na tentativa de conseguir uma linguagem clara em relação à sua intensão e extensão. Por conseguinte, dentro da semântica carnapiana parece haver uma solução para a possibilidade de distinção entre expressões analiticamente verdadeiras, isto é, verdadeiras em virtude do significado, e sinteticamente verdadeiras, isto é, verdadeiras em virtude dos fatos.

Claramente o que possibilita esta distinção é outra distinção por ele estabelecida entre intensão e extensão. Se temos um sistema lingüístico L, no qual constam os predicados C (casado) e S (solteiro), as constantes individuais a, b, c, a variável x, e temos como regra semântica do sistema que C =*df* ~S, então, por definição, as expressões "casado" e "não solteiro" têm a mesma intensão. Assim, a expressão "Ca → ~ Sa" é uma verdade analítica, uma verdade em função dos significados e não uma verdade material/factual. Em L, essa expressão será verdadeira em todas as descrições de estado ou em todos os mundos possíveis. Portanto, para Carnap o que é analítico é determinado quando definimos as regras semânticas de um sistema lingüístico. Desse modo, teremos analítico em L, analítico em L1, analítico em

L2, de acordo com as regras semânticas[34] estabelecidas em cada sistema. Todavia, Carnap não apresenta uma explicação da analiticidade, mas sim, o que sejam expressões lógicas em um sistema lingüístico. Ele não apresentou, no sistema criado em *Meaning and Necessity*, os dois tipos de verdade, a saber, verdade lógica e verdade analítica, mas apenas as verdades lógicas.

O passo seguinte na análise da noção de analiticidade é mostrar os aspectos problemáticos dessa noção. Um enunciado é analítico quando os enunciados de segunda classe reduzem-se aos de primeira classe (verdades lógicas) por meio de definições. Segundo Quine, esta noção é extremamente problemática. A questão que se apresenta neste momento é: com que base podemos escrever, em uma dada teoria formalizada, em um dado sistema semântico, que, por exemplo, solteiro é sinônimo de não casado? Qual o fundamento das definições dadas em um sistema semântico? Partindo desta questão, Quine faz um estudo das definições tanto formais quanto empíricas. Ora, as definições empíricas, como as definições dadas em um dicionário, por exemplo, pressupõem uma relação de sinonímia que, assim como a analiticidade, carece de explicação. O lexicógrafo é um cientista empírico que registra supostas relações de sinonímia implícitas no uso das expressões de uma linguagem. No entanto, ele não apresenta uma explicação para essa noção de sinonímia pressuposta no uso. O que ele faz é um mero registro. Assim, as definições empíricas não podem ser o fundamento da analiticidade uma vez que também não apresentam um fundamento claro e preciso.

Se recorremos a um tipo especial de definição, chamado por Carnap de “explicação“, também não conseguimos grandes avanços uma vez que elas também pressupõem algum tipo de relação de sinonímia anterior. Essas definições caracterizam-se por não pretender apenas parafrasear a expressão a ser definida (o definiendum), em termos de um sinônimo direto. Nelas, o definiendum é aperfeiçoado refinando ou ampliando seu significado. As explicações delimitam as condições de aplicações de um termo. Além dessas definições que acabamos de apresentar, temos apenas as definições formais ou explícitas que não pressupõem sinonímia anterior, ao contrário, geram sinonímia. Neste caso a sinonímia é criada por definição, ou seja, “*o definiendum torna-se sinônimo do definiens simplesmente porque foi criado expressamente com tal propósito*“. Um simples momento de atenção e logo percebemos que elas se

---

[34] Por regras semânticas entendemos aquelas regras que regem o uso correto dos termos de uma linguagem em conformidade com as relações de compatibilidade e incompatibilidade objetivamente existentes entre as entidades às eles se referem. Um domínio de objetos qualquer sempre se apresenta à nossa intuição já estruturado segundo essas relações, por isso as regras semânticas são, em certo sentido, princípios formais transcendentais da experiência.

caracterizam por sua convencionalidade ou arbitrariedade, ou seja, são próprias de uma teoria formalizada e, como tal, são meras tautologias (não afirmam nada sobre o mundo).

Alguém poderia afirmar que a analiticidade pode ser explicada recorrendo ao conceito de necessidade. No entanto, para entender este conceito é preciso ter claro o conceito de sinonímia de expressões, e portanto saber qual o critério de sinonímia de expressões que, por outro lado, não pode ser elucidado sem a noção de analiticidade, uma vez que o critério adequado para que se possa afirmar, com certeza, que duas expressões são sinônimas é a permutabilidade "salva analiticidade". Ou seja, que a permuta de uma expressão "E" por uma outra expressão sinônima "E1", numa dada expressão, mantivesse a expressão verdadeira em qualquer mundo possível. Mas, ressurge a questão: o que é exatamente essa analiticidade?

O problema sobre o fundamento da analiticidade parece girar em círculo. Perceba que uma tentativa de explicar a analiticidade foi recorrer às definições. Mas as definições precisam da noção de sinonímia para serem fundamentadas e, a sinonímia, por sua vez, necessita da noção de analiticidade para ser explicada. Assim, a afirmação da existência de enunciados analíticos não possui qualquer fundamento. Se a noção de analiticidade não tem um fundamento, então, uma fronteira clara entre enunciados analíticos e enunciados sintéticos não tem como ser traçada, afinal, não temos um critério para dizer, com precisão, que um enunciado é analítico. Portanto, até que se prove o contrário, esta distinção entre analítico e sintético, tão difundida no empirismo lógico, não passa de um dogma dos empiristas que é aceito, para surpresa de todos, sem qualquer base empírica.

Quine conclui que as definições não podem ser tomadas como um critério de analiticidade de expressões, pois dependem sempre do estabelecimento de sinonímias anteriores, e estas, também necessitam de uma explicação. Lembre-se que Quine procura uma explicação da analiticidade com a intenção de fundamentar a noção de significado. Ele entende que é um erro identificar o significado de expressões lingüísticas com sua extensão e disso infere que o estudo do significado e o estudo da referência de expressões traz sérios problemas. Um deles é o seguinte: não estamos autorizados a postular significados enquanto entidades para a elaboração de uma semântica. Uma teoria semântica dessa magnitude, baseada na postulação ontológica de significados, parece bastante elegante na sua formulação e perfeitamente capaz de responder às exigências de uma semântica. A questão que se coloca é então a de saber se a postulação de significados é justificada.

> Os significados são significados de expressões, assim é melhor começar por explicar o meu uso da expressão "expressão". Uma expressão, para mim, é uma seqüência de fonemas; se preferirmos pensar em termos de escrita, uma seqüência de letras e espaços. Algumas expressões são frases. Algumas são palavras. Deste modo quando eu falo de frase, ou de uma palavra, eu estou a referir-me de novo à pura seqüência de fonemas e nada mais. Devo sublinhar isto porque há um amplo uso aceite por muitos que lhe é contrário. A palavra ou a frase são muitas vezes pensadas de outra maneira: como uma combinação qualquer de uma seqüência de fonemas e de um significado. Os homônimos são por conseguinte tratados como palavras distintas. Este uso é muitas vezes conveniente no estudo da linguagem, e no seu lugar próprio eu não tenho qualquer intenção de disputar. Contudo, não pode ser aqui admitido, porque o nosso propósito é isolar e clarificar a noção de sentido. (QUINE, 1994, p. 44)

A definição de significado apóia uma vasta construção semântica que nos dá a impressão de estarmos diante de uma teoria bem construída. Segundo Quine, tal teoria sempre carecerá de rigor já que tem como base uma noção absolutamente imprecisa – a de significado – a qual pode ter utilidade prática, mas não tem qualquer sustentação teórica. Defender qualquer definição de significado que justifique e pretenda dar rigor às demais, que se construirão a partir dela, é um mito perigoso, pois parece ter passagem livre nas discussões teóricas dos estudiosos da linguagem. Dicionários fornecem listas de expressões com mesmo significado; professores perguntam a seus alunos qual o significado de certas expressões; tradutores são considerados talentosos se conseguirem exprimir em outra língua o significado do texto que traduziram. Estas práticas corriqueiras no uso da linguagem, e mesmo em procedimentos teóricos, parecem indicar, segundo Quine, que esta noção tem muita utilidade prática, mas alerta que isto não justifica o uso do termo “significado” nas teorias semânticas que tenham pretensão ao rigor, e menos ainda que possa apoiar sobre ela a definição de outras expressões.

O experimento proposto por Quine parte de uma situação imaginária relativamente simples. Ele supõe o caso de um lingüista que chega a uma ilha onde encontra um povo sobre o qual não se tem qualquer informação acerca de suas teorias de mundo ou de sua linguagem. Portanto, ele não conta com dicionário, intérprete e procura então captar o significado das expressões lingüísticas que escuta, contando apenas com sua observação do comportamento deste povo. O lingüista terá de ser forçosamente empirista e começar por selecionar alguns proferimentos mais curtos para tentar então associá-las a algum comportamento ou estimulação sensorial que pareça desencadeá-las

Após ter conseguido identificar as expressões que designam o "sim" e o "não", o lingüista procura descobrir o significado de uma expressão que já ouviu repetidas vezes: "Gavagai". Observa que ela é sempre usada relacionada com aparições de coelhos. Procura então apresentar aos nativos desenhos de coelhos ao mesmo tempo em que pergunta: "Gavagai?". E a resposta é sempre afirmativa. Apresenta o próprio animal e a resposta continua afirmativa. Se ele por acaso apresentar algo que não se relacione a coelhos, a resposta é sempre negativa. Apresenta grupos de coelhos e a resposta é afirmativa. Conclui, finalmente, que esta expressão corresponde ao termo "coelho" em português, termo coletivo de referência dividida.

Outro lingüista que estava realizando a mesma tarefa e não teve qualquer contato com este, conclui que esta expressão corresponde a uma frase que apresenta a propriedade de ser coelho como "eis a coelhidade!". Outro infere que ela exprime a expressão: "segmentos de coelhos", a qual se pode aplicar tanto a partes como ao conjunto de tais segmentos num coelho inteiro, vivo ou morto. O que se deve notar então é que não há algo como uma fórmula única e segura que leve ao acerto da detecção dos sinais de assentimento e dissentimento, mesmo que o procedimento descrito acima se tenha revelado um bom método de adivinhação.

Constata-se que cada uma destas teses, que são contraditórias entre si, pois pretendem que a referida expressão tenha significados completamente diferentes, exprimindo ontologias e esquemas lógicos distintos de percepção da realidade, passarão perfeitamente bem pelos testes empíricos que as referendarão. Logo, não há como detectar qual destas hipóteses analíticas é a mais adequada, qual a que de fato corresponde ao significado que os nativos dão a tal expressão. Entretanto, qualquer destes manuais de tradução permitirá aos diferentes lingüistas se comunicarem eficientemente com os nativos.

Desta experiência, Quine infere sua famosa tese da indeterminação das traduções, afirmando que sempre será possível construir manuais de tradução logicamente incompatíveis e empiricamente equivalentes, porém, nada na experiência consegue fornecer critério de decisão e de correção em prol de um ou outro dos manuais como sendo aquele perfeitamente adequado. A tese da indeterminação da tradução vem para destruir a concepção clássica de sentido caracterizada pela idéia de que, a cada expressão significativa de uma linguagem, deixando à parte as expressões ambíguas, há um sentido determinado correspondente que é condição necessária para a compreensão entre os falantes das diversas linguagens e a tradutibilidade de expressões de uma linguagem para outra. Esta suposição equivale ao mito do museu mental no qual as palavras são apenas legendas das obras exibidas, e mudar de linguagem é mudar de legenda. Pelo mito do museu os significados são entidades abstratas que estão determinadas em nossas mentes. No entanto, supõe em sua teoria do significado exatamente o oposto e através do exemplo da tradução radical, mostra o equívoco da concepção clássica de linguagem e significado. Os significados não estão necessariamente e para sempre estabelecidos em nossas mentes. Mesmo assim, demonstra ser possível fazer traduções e supor compreensibilidade entre os falantes embora não de forma determinada e precisa. A razão desta indeterminação é justificada pelo caráter social da linguagem que, só pode ser apreendida com base na observação do comportamento dos outros falantes em situações publicamente reconhecíveis. A base da linguagem é empírica e como tal tem suas limitações. Essas limitações dizem respeito ao fato de que a investigação empírica é insuficiente para a determinação do sentido de uma expressão lingüística, determinação esta, que jamais poderá ser traçada de forma absoluta.

Dessa importante tese quineana, segue-se ainda a tese da inescrutabilidade da referência, isto é, a constatação de que, a partir da mera correspondência das frases do lingüista às frases dos nativos segundo determinadas circunstâncias observáveis, é impossível fixar a referência de um termo, pois esta só é estabelecida no interior da linguagem, com todo seu aparato de referência e regras gramaticais complexas. De fato, a indeterminação da tradução acarreta a indeterminação da referência, pois ela afeta todo o aparelho conceitual que serve para individuar os objetos. Destarte, vemos que a indeterminação da tradução atravessa indiscriminadamente tanto a intensão quanto a extensão. Percebemos que a indeterminação da tradução é não apenas indeterminação de sentido, mas também de referência. Realmente, quando se escolhe traduzir ‘gavagai’ por ‘coelho’, em vez de ‘coelhidade’, faz-se opção por termos que não apenas têm significados diferentes, mas são verdadeiros de diferentes coisas. Logo, “a referência mesma se prova comportamentalmente inescrutável”.

Ora, mas se a determinação da referência de termos da língua nativa passa agora a depender do manual de tradução escolhido, com seu respectivo conjunto de hipóteses analíticas e aparato de individuação, então a partir daí só faz sentido falar em referência (de termos de uma língua nativa) relativamente a um manual de tradução, no qual o autor imputa necessariamente seu próprio padrão referencial às expressões da língua que se pretende traduzir. Mas, se é assim, isso significa também que não podemos mais dizer, de modo absoluto, de que objetos falam os nativos. Ou seja, ao dizer sobre quais objetos falam os nativos, não estamos senão dizendo *como propomos traduzir* suas proferimentos, por nós segmentadas, nos *nossos* termos. Dizer que 'gavagai' se refere a 'coelho' é, filosoficamente falando, tão arbitrário quanto escolher que se refere a 'parte não destacada de coelho' ou 'estágio temporal de coelho'. Arbitrário exatamente porque se trata de uma escolha, da escolha de uma entre múltiplas traduções igualmente corretas, já que o único critério de correção de tradução, como um todo, é se ela dá conta de todas as disposições discursivas dos falantes da língua em questão.

Essa análise resume em boa medida o fundamento do conjunto de suas teses: das críticas ao mito do significado, da reificação das proposições e dos atributos, da noção de sinonímia, da dicotomia analítica e sintética. Ele sustenta sua tese da indeterminação das traduções, da referência e das teorias cientificas pela experiência. Apóia as teses do holismo semântico e epistemológico, da naturalização da epistemologia, da relatividade ontológica[35] e seu critério de engajamento ontológico. A partir desse conjunto de teses, Quine abraça o que parece ser uma saudável posição falibilista: não há nenhum enunciado imune a qualquer revisão empírica. Quine não está dizendo simplesmente que qualquer enunciado aceito em um certo momento será de fato rejeitado (o que seria uma tese perfeitamente aceitável por um extensionalista); o que ele quer afirmar é uma tese muito mais forte: não há nenhum que nós não poderíamos rejeitar se as circunstâncias forem apropriadas. Se a própria tese de Quine contra a existência de enunciados necessários não pode ser formulada sem recorrer à modalidade do possível, e se a possibilidade é, por assim dizer, inteligível para ele devido à dualidade da possibilidade e da necessidade, a necessidade também deveria ser considerada inteligível e aceitável (LECLERC, 2007). O ceticismo em relação à necessidade pressupõe a possibilidade em termos da qual a necessidade é definida (ou pode ser definida). Ninguém mais do que Quine criticou à inteligibilidade do idioma modal e particularmente o essencialismo. Dado o seu empirismo, ele manifesta a mesma desconfiança em relação às

[35] A tese da relatividade ontológica é apenas um corolário da indeterminação da tradução. Do mesmo modo como na situação da tradução radical as frases são indeterminadas quanto ao seu sentido, os termos são indeterminados quanto à sua referência. Referência, segundo Quine, não é a coisa no mundo, não é o fato no mundo. Ela é uma construção teórica e, como tal, está nos mecanismos pelos quais nós pretendemos representar os fatos.

modalidades, a saber, as propriedades modais *de re* e *de dicto* e as propriedades essenciais e acidentais.

A distinção *de re* e *de dicto* (do latim, do que se diz/da coisa) foi introduzida pelos filósofos medievais. Intuitivamente, algumas propriedades têm diferentes estatutos modais, quando predicadas de determinados particulares. Por exemplo, sentimo-nos intuitivamente inclinados a pensar que Sócrates poderia não ter sido ateniense; mas temos alguma dificuldade em acreditar que Sócrates poderia não ter sido um ser humano. Considere, a título de exemplo, o seguinte par de frases: (i) *Sócrates é uma pessoa* e (ii) *Sócrates é necessariamente uma pessoa*. Ao aceitarmos (i) como verdadeira então a frase expressa uma proposição, a propósito, considerada como "necessariamente verdadeira" pois é fato que Sócrates não poderia ter sido uma mesa. Assim sendo, podemos afirmar da proposição em questão que a frase em (i) expressa tem a propriedade modal de ser *necessariamente verdadeira*. Neste caso, em particular, a propriedade modal é *de dicto*, predicada da proposição que uma frase expressa, de um *dictum.* Mas poderíamos, alternativamente, afirmar (ii). Nela, a modalidade é *de re*, pois estamos dizendo *de Sócrates* (e não de uma proposição) que ele tem uma propriedade (ser uma pessoa) *essencialmente* ou necessariamente. Observe que em (ii) não está descartada a inferência para "algo é necessariamente uma pessoa". Dado este resultado, talvez nos sintamos tentados a negar a nossa intuição inicial de que Sócrates não poderia não ter sido um ser humano. Neste caso, afirmaremos que as únicas propriedades necessárias serão aquelas que podemos descobrir, por meios lógicos ou conceituais, que são necessariamente exemplificadas (ou não exemplificadas) por certos particulares, ou que são necessariamente exemplificadas (ou não exemplificadas) por todos os particulares.

A questão do essencialismo (lógico-metafísico) surge exatamente com as modalidades *de re*, formalmente quando uma variável ligada ou uma constante individual de uma fórmula aparece no escopo de um operador modal, "$F(a)$" ou "$\exists x \, \Box F(x)$", em que "$\Box$" é o operador de necessidade. Portanto, o essencialismo aparece no contexto da semântica da lógica modal *quantificada*, e não no contexto da lógica modal proposicional que só admite as modalidades *de dicto*, ou seja, o essencialismo surge quando, além de frases da forma "$\Box P$" e "$\Diamond P$", "necessariamente P" e "possivelmente P", respectivamente, tal que "P" é uma proposição qualquer, consideramos frases cuja formalização envolve quantificadores como "$\Diamond \, \exists x F(x)$

$\rightarrow \exists x \Diamond F(x)$” (uma versão da fórmula de Barcan: “se, possivelmente, existe algo que é F, então existe algo que possivelmente é F”), ou “$\forall x \Box \exists y(y=x)$” (a fórmula da existência necessária).

Em suma, a idéia é a de que só quando podemos verificar por meio do puro raciocínio que certo particular tem certa propriedade podemos afirmar que esse particular tem necessariamente essa propriedade. O essencialismo metafísico é basicamente a doutrina que defende que *as coisas têm propriedades essenciais;* certas propriedades são essenciais às coisas enquanto outras são acidentais. Intuitivamente, uma propriedade é essencial se uma coisa *não pode deixar de possuí-la sem deixar de ser o que ela é,* ou se a propriedade em questão “é inseparável” necessariamente à coisa, em quaisquer circunstancias contrafactuais ou mundos possíveis. Uma outra condição mencionada pelos essencialistas é que para ser interessante e importante uma propriedade essencial *não deve ser possuída por todos os objetos*, o que torna a auto-identidade e a existência propriedades essenciais triviais. Noutras palavras, P é uma propriedade essencial de um x qualquer se, necessariamente, se x existe, então x tem a propriedade em questão. Podemos representar esse aspecto da seguinte forma: $\Box(\exists x \rightarrow Px)$, e lemos “necessariamente, se x existe, então x tem P. Uma propriedade é acidental quando uma coisa *pode deixar de tê-la sem deixar de ser o que ela é*; quando existe uma “maneira como as coisas poderiam ter sido”, um “estado de coisas” ou “mundo possível” de acordo com o qual a coisa não tem a propriedade em questão mas permanece a mesma. Podemos representar esse aspecto da seguinte forma: P é uma propriedade acidental de x se e somente se $\Diamond$(x existe $\rightarrow \neg$Px). A essência individual de uma coisa é um conjunto de propriedades essenciais desta coisa e tal que nenhuma outra coisa a possui. A essência individual acaba determinando a identidade de uma coisa, não só no contexto atual, mas em qualquer situação contrafactual ou mundo possível. Portanto, as propriedades essenciais, e as “essências” de modo geral, têm a ver com a identidade das coisas. Apresentaremos dois argumentos de Quine: um contra modalidade *de re* e o outro contra o alegado compromisso dela com o essencialismo que acabamos de delinear. Em ambos o problema diz respeito à quantificação e que o defensor da lógica modal quantificada e da modalidade *de re* estaria obrigado a aceitar inferências inválidas. A conclusão de Quine é a seguinte: contextos modais são referencialmente opacos, pois a regra da eliminação da identidade, ou da substituição *salva veritate* de certos termos falha relativamente a tais contextos. Assim, podemos obter conclusões falsas a partir de premissas verdadeiras. Isso advém do fato de que a quantificação “para dentro” de contextos opacos (intensionais) é incoerente.

O extensionalismo de Quine proíbe o uso de operadores modais (aléticos, epistêmicos, temporais, deônticos, ilocucionários, etc.) e de verbos de atitudes proposicionais ("acreditar que p", "desejar que p", "ter a intenção de fazer com que p", etc.)[36]. Esses operadores não são verofuncionais (quando o valor de verdade de uma frase com dado operador depende inteiramente do valor de verdade dessa frase sem o operador) e não autorizam certas operações lógicas como a substituição *salva veritate* de expressões co-referencias e a generalização existencial, formalmente representadas por

$$\forall x \forall y[x = y \rightarrow (\varphi(x/z) \rightarrow \varphi(y/z))] \qquad (1)$$

Substituição salva veritate

e

$$\varphi(t/x) \rightarrow \exists x \varphi \qquad (2)$$

Generalização do existencial

Esta última operação é importante, pois sua aplicação a uma função proposicional, numa teoria cientifica, determina em parte o comprometimento ontológico de quem aceita a teoria. Normalmente, numa linguagem extensional, $F(a) \models (\exists x)$ F(x) vale, isto é, de "a é F" segue logicamente que "existe pelo menos um x que é F". Ocorre que numa linguagem intensional esta operação perde garantia e deixa de ser segura, isto é, de preservar a verdade das premissas. Da mesma maneira, a substituição *salva veritate* de termos co-referenciais (representada em 1) que nada mais é do que a aplicação da indiscernibilidade dos idênticos de Leibniz, formalmente representada por $\forall x \forall y[(x = y) \rightarrow$ ∀P (Px ↔ Py)] não funciona em contextos modais ou de atitudes proposicionais. Assim, seja

(a) x= Héspero, então $\Box$(Héspero = Héspero)
(b) x= Héspero e y=Fósforo, então Fósforo = Héspero
(c) ¬$\Box$(Fósforo = Héspero).

A frase "Pedro acredita que Héspero é Héspero", tomando-a como verdadeira dado o conhecimento de Pedro acerca de Héspero, e "x=y" a identidade em **b** de "Fósforo=Héspero", também verdadeira, vemos facilmente que a conclusão "Pedro acredita que Fósforo é Héspero" não se segue. Logo, em contextos intensionais (quer dizer não extensionais) a generalização existencial e a substituição *salva veritate* de termos co-referenciais não

[36] Maiores detalhes ver artigo de Leclerc *O Essencialismo desde Kripke* in *Metafísica Contemporânea.* Petrópolis: Editora Vozes, 2007, 376-399..

preservam a verdade das premissas. Para que a generalização existencial ou a substituição se apliquem o termo deve estar em posição referencial, o que não acontece também em contextos modais.

Ciclistas e planetas[37]

O objetivo de Quine é mostrar que a atribuição de propriedades modais é uma questão convencional, ou subordinada ao modo como identificamos os particulares; se identificarmos um particular de uma certa maneira, ele terá essencialmente uma certa propriedade; se o identificarmos de outra maneira, terá essa propriedade apenas acidentalmente. Para mostrar que isto é assim, avançam-se dois argumentos que pretendem mostrar a ininteligibilidade da atribuição de propriedades modalizadas em absoluto, isto é, sem termos em consideração modos particulares de identificar um existente.

Tomemos como exemplo a descrição "matemático". Aparentemente, qualquer pessoa que satisfaça esta descrição será (suponhamos) necessariamente racional, mas apenas acidental ou contingentemente bípede. Observe agora a descrição "ciclista". Qualquer pessoa que satisfaça esta descrição será necessariamente bípede, mas acidental ou contingentemente racional. Imaginemos agora que Fermat era um ciclista exímio. Que diremos dele? Que era acidentalmente bípede mas necessariamente racional, por ser matemático? Ou que era acidentalmente racional e necessariamente bípede, por ser ciclista? Ou que tinha as duas propriedades acidentalmente? Ou necessariamente? Este argumento de Quine procura mostrar a ininteligibilidade da noção de necessidade quando aplicada diretamente a particulares, obrigando o essencialista a aceitar simultaneamente os seguintes dois argumentos dedutivos:

Os matemáticos são necessariamente racionais.
Fermat é um matemático.
Logo, Fermat é necessariamente racional.

Os ciclistas não são necessariamente racionais.
Fermat é um ciclista.
Logo, Fermat não é necessariamente racional.

A conjunção das duas conclusões é uma contradição: Fermat é necessariamente racional e não é necessariamente racional. Esta contradição seria o resultado de que as

[37] Retirados de Murcho (1999).

primeiras premissas de ambos os argumentos serem verdades *de re*, o que o essencialista teria de admitir. Logo, a modalidade *de re* seria ininteligível. Para Quine isto constitui evidência a de que Fermat só pode ser considerado necessariamente racional ou não consoante a identificarmos de uma maneira ou de outra. Assim, enquanto ciclista, Fermat não é necessariamente racional; mas enquanto matemático é necessariamente racional. A contradição é assim evitada para Quine: Fermat, em absoluto, não tem qualquer daquelas propriedades necessariamente; tudo depende do modo como for identificado. O segundo apresentado por Quine é o seguinte:

9 é necessariamente igual a 9.
9 é o número de planetas do sistema solar.
Logo, o número de planetas do sistema solar é necessariamente igual a 9.

Neste caso, temos um argumento que apresenta uma conclusão aparentemente falsa, apesar de ser válido e de as suas premissas serem presumivelmente verdadeiras. O que estaria errado seria, uma vez mais, a ininteligível modalidade *de re* da conclusão. Uma vez mais, teríamos o mesmo existente identificado de maneiras diferentes. Se identificarmos 9 como 9, 9 é necessariamente idêntico a 9 — porque a frase "9 é 9" é analítica. Mas se identificarmos 9 como o número de planetas do sistema solar, já não é verdade que 9 seja necessariamente idêntico a 9 — porque a frase "O número de planetas do sistema solar é 9" não é analítica. Em suma, "necessariamente" é um qualificativo que só podemos usar com sentido para qualificar uma frase; e dizer "necessariamente *p*" não é senão uma forma confusa de dizer ""*p*" é uma frase analítica". Na verdade, tanto o argumento do ciclista matemático quanto o argumento dos planetas são falácias. Vejamos resumidamente o erro de Quine[38].

Comecemos pelo argumento dos planetas. Há uma ambiguidade *de dicto/de re* na conclusão. Interpretada *de dicto*, a conclusão é a seguinte: é necessário que o número de planetas no sistema solar seja igual a 9. Mas quando é interpretada *de re*, a conclusão é a seguinte: tome o número de planetas; esse número é necessariamente igual a 9. A conclusão *de dicto* é realmente falsa; mas não se segue logicamente das premissas, pelo que não levanta quaisquer problemas. A conclusão que realmente se segue das premissas é a *de re;* mas esta é verdadeira. De modo que não temos o resultado que Quine queria: um argumento válido com

[38] A refutação do argumento dos planetas foi apresentada por Arthur F. Smullyan (1948). *Modality and Description.* The Journal of Symbolic Logic*,* 13, 1, pp. 31-37. A refutação do argumento do matemático ciclista foi apresentada por Ruth Barcan Marcus (1993) *Essential Attribution*. Reimpresso em *Modalities: Philosophical Essays,* Oxford University Press, Oxford, pp. 54-70.

premissas verdadeiras e uma conclusão falsa. Esta refutação é exemplarmente rápida. Mas vejamo-la mais em pormenor. Admitindo que "9" é um numeral, o nome de um número, tentemos formalizar o argumento na habitual lógica modal de primeira ordem com identidade. A primeira premissa não levanta problemas:

$$\Box 9=9$$

Esta é uma fórmula bem formada. Mas como formalizaremos a segunda premissa? Note que temos uma descrição definida, a saber, "o número de planetas do sistema solar". A teoria das descrições definidas de Russell nos permite formalizar este tipo de expressão do seguinte modo:

$$\exists x\ (Px \land \forall y\ (Py \rightarrow y = x))$$

P é o predicado "*x* tem a cardinalidade do conjunto de planetas do nosso sistema solar". Afirmar que o número de planetas do sistema solar é 9 é dizer que o único *x* que exemplifica *P* é idêntico a 9:

$$\exists x\ (Px \land \forall y\ (Py \rightarrow y = x) \land 9 = x)$$

Os sistemas de dedução natural da lógica clássica têm em geral uma regra denominada "eliminação da identidade" (E=). Esta regra permite substituir um termo singular por outro, numa fórmula, desde que tenhamos garantida, numa outra premissa, a co-referência dos dois nomes. Assim, se temos as duas premissas $a = b$, Fa, podemos concluir Fb. Esta conclusão resulta de substituir o nome *a* da segunda premissa, pelo nome *b*, substituição autorizada pela regra da eliminação da identidade, com base na primeira premissa. Conforme mencionamos anteriormente, a lógica modal não é verofuncional: dado o valor de verdade de *p* não é possível determinar, só nessa base, o valor de verdade de $\Box p$; mas daí não se segue que a lógica modal não seja extensional. Define-se por vezes "contexto extensional" como aquele contexto no qual podemos usar a regra da eliminação da identidade sem gerar falácias. Como o argumento dos planetas de Quine parece conduzir a uma conclusão falsa a partir de premissas verdadeiras, ao usarmos a eliminação da identidade, exibe-se por vezes este resultado como uma demonstração de que os contextos modais não são extensionais. Mas, precisamente porque o argumento fracassa, se admitirmos que um contexto é extensional desde que se possa usar a regra da eliminação da identidade sem gerar falácias, a lógica modal *é* extensional. Vejamos então por que razão a conclusão falsa a que Quine quer chegar não se segue logicamente das premissas. Recordemos ambas as premissas formalizadas:

$$\Box 9 = 9$$

$$\exists x\ (Px \wedge \forall y\ (Py \rightarrow y = x) \wedge 9 = x)$$

A conclusão que Quine deseja extrair é esta:

$$\Box \exists x\ (Px \wedge \forall y\ (Py \rightarrow y = x) \wedge 9 = x).$$

Mas a conclusão que realmente se segue das premissas em causa é esta:

$$\exists x\ (Px \wedge \forall y\ (Py \rightarrow y = x) \wedge \Box 9 = x)$$

Por esta conclusão substitui-se “9” por “$\Box$9” na conclusão, com base na identidade apresentada na primeira premissa. Esta conclusão é *de re*; a conclusão *de dicto* não substitui “9” por “$\Box$ 9”: prefixa o operador de necessidade a toda expressão, o que as nossas premissas não autorizam. Uma forma de tentar resistir ao nosso argumento contra Quine é afirmar que não podemos usar a modalidade *de re* da conclusão, pois isso seria uma petição de princípio: estaríamos a usar a modalidade *de re* para argumentar a favor da modalidade *de re*. A resposta a esta objeção é a seguinte: a estrutura do argumento de Quine conduz a uma redução ao absurdo, pois procura mostrar que, se concedermos como aceitável e coerente o uso de modalidades *de re*, somos conduzidos ao absurdo de derivar validamente uma falsidade de duas premissas verdadeiras. Para erguer seu argumento, Quine usa a modalidade *de re*, para efeitos de *reductio*, sem se comprometer com quaisquer verdades necessárias *de re*. Portanto, o partidário da modalidade *de re* também está autorizado a usá-la para mostrar que, corretamente compreendida, não conduz ao resultado que Quine deseja. O argumento de Quine não lança, pois, qualquer sombra de ininteligibilidade sobre a modalidade *de re.* Mostra apenas que o raciocínio que envolve modalidades é extremamente sutil e que temos de dominar a distinção *de dicto*/*de re*, caso contrário originamos falácias.

Analisemos agora ao par de argumentos apresentados anteriormente que visam atacar a inteligibilidade do essencialismo e nas quais a atribuição direta de propriedades modais a Fermat parece acarretar uma contradição.

Os matemáticos são necessariamente racionais.
Fermat é um matemático.
Logo, Fermat é necessariamente racional.

Os ciclistas não são necessariamente racionais.
Fermat é um ciclista.
Logo, Fermat não é necessariamente racional.

As conclusões só podem ser *de re*, uma vez que não têm quaisquer quantificadores (supondo que nomes não são descrições). Mas as primeiras premissas de ambos os argumentos são ambíguas entre duas interpretações *de re* e uma interpretação *de dicto*. Interpretada *de dicto*, a primeira premissa diz o seguinte: é necessário que todos os matemáticos sejam racionais. Uma interpretação *de re*, é a seguinte: tome qualquer pessoa; necessariamente, se essa pessoa for um matemático, será racional. Outra interpretação *de re* é a seguinte: tome qualquer pessoa; se essa pessoa for um matemático, será necessariamente racional. Só a segunda interpretação *de re* permite chegar à conclusão visada. Isso é imediatamente visível sintaticamente, se formalizarmos as três interpretações, a premissa restante e a conclusão desejada (sendo Mx "x é matemático", Rx "x é racional" e a "Fermat"):

Primeira premissa: 1) $\Box\forall x\,(Mx \rightarrow Rx)$, ou

2) $\forall x\,\Box(Mx \rightarrow Rx)$, ou

3) $\forall x\,(Mx \rightarrow \Box Rx)$

Segunda premissa: Ma

Conclusão: $\Box Ra$

É imediatamente visível que só a fórmula 3 permite chegar ao resultado desejado, por *modus ponens*, depois de eliminar o quantificador universal. Por outro lado, é fácil perceber semanticamente que as três interpretações não são equivalentes. Restringindo o domínio de quantificação a pessoas, a primeira premissa afirma que em todos os mundos possíveis é verdade que todos os matemáticos são racionais. A segunda, que todas as pessoas do mundo atual serão racionais em todos aqueles mundos possíveis em que forem matemáticos. A terceira, que todas as pessoas que forem matemáticos no mundo atual serão racionais em todos os mundos possíveis. A mesma ambigüidade ocorre no que respeita ao segundo argumento; mais uma vez, só a interpretação *de re* em que o âmbito do operador modal é mais curto permite traçar a inferência. A formalização é a seguinte, sendo Cx "x é ciclista":

$$\forall x\,(Cx \rightarrow \neg\Box Rx)$$

$$Ca$$

$$\therefore \neg\Box Ra$$

Juntando as duas conclusões dos dois argumentos, obtemos a contradição desejada por Quine: $\Box Ra \wedge \neg\Box Ra$. Isto mostraria que as nossas intuições essencialistas, que nos levam a aceitar as premissas de ambos os argumentos, seriam ininteligíveis ou irracionais. Mas esta conclusão está errada. O erro, tal como no caso do argumento dos planetas, tem origem numa confusão entre *de re* e *de dicto*. Na verdade, as nossas intuições essencialistas não sancionam como verdadeiras as primeiras premissas de ambos os argumentos; na leitura *de re* que temos de adotar para que a conclusão se siga, uma das premissas é falsa.

A premissa falsa é a que afirma que os ciclistas não são necessariamente racionais: $\forall x\ (Cx \rightarrow \neg\Box Rx)$. Se esta premissa fosse verdadeira, a sua contraditória seria falsa. Mas a sua contraditória, $\exists x\ (Cx \wedge \Box Rx)$, é verdadeira: há certamente ciclistas que são racionais em todos os mundos possíveis: é o caso, presumivelmente, de Fermat. Logo, a premissa é falsa. Este resultado é suficiente para refutar o argumento de Quine. Uma vez que não estamos obrigados a aceitar como verdadeira uma das premissas de um dos argumentos, não estamos obrigados a aceitar o resultado contraditório. Logo, as nossas intuições essencialistas não são incoerentes. Por que razão uma premissa que não é verdadeira parece verdadeira? Porque há uma ambigüidade, de âmbito não só do operador modal, mas também do operador de negação. A intuição que nos faz pensar que a premissa $\forall x\ (Cx \rightarrow \neg\Box Rx)$, que afirma que os ciclistas não são necessariamente racionais, é verdadeira é a idéia de que é possível que existam ciclistas que não sejam racionais. Mas esta afirmação formaliza-se por $\Diamond\exists x(Cx \wedge \neg Rx)$ que é equivalente $\neg\Box\forall x\ (Cx \rightarrow Rx)$, isto é, $\Diamond\exists x(Cx \wedge \neg Rx)$ é equivalente a $\neg\Box\forall x\ (Cx \rightarrow Rx)$ que simboliza a afirmação de que não é necessário que todos os ciclistas sejam racionais.

Quine procura mostrar que o idioma essencialista é incoerente. Mas a sua demonstração é improcedente porque usa o idioma incorretamente, sem dar atenção a diferenças sutis de interpretação. É como se tentássemos provar que a matemática é incoerente derivando uma contradição à custa de um erro aritmético: tudo o que mostramos foi que podemos errar no raciocínio aritmético e não que a aritmética é incoerente. Do mesmo modo, tudo o que Quine mostrou foi que podemos errar ao raciocinar sobre questões modais, e não que o idioma modal é incoerente. Em qualquer caso, os argumentos falham o alvo. Atacar a modalidade *de re* porque somos contra as teses essencialistas é como argumentar contra a palavra “Deus” porque somos ateus. Pelo fato de podermos dispor de um idioma que nos permite exprimir coerentemente verdades essencialistas não se segue que o essencialismo seja verdadeiro. O idioma *de re* é metafisicamente neutro. Tudo o que este idioma nos permite fazer é formular teses essencialistas; daí não se segue que essas teses sejam verdadeiras.

Os argumentos de Quine são, portanto, falácias. As razões oferecidas por ele para desconfiar das construções modais têm a ver com sua concepção de gramática, e em particular da importância de separar cuidadosamente o que pertence às coisas e o que pertence à nossa maneira de falar sobre elas. Sua campanha contra as modalidades *de re* correspondem a um "grau de envolvimento modal", muito maior do que as modalidades *de dicto*¸ algo mais comprometedor, mais obscuro. Mas vimos que Quine erra, e feio. O sentido do argumento aqui apresentado foi o de que (como Quine desejava) a atribuição de propriedades essenciais ou acidentais a particulares depende das nossas convenções, que ditam o modo como organizamos o mundo. Mas as nossas convenções, como todas as convenções, são arbitrárias. Logo, o essencialismo será na melhor das hipóteses uma forma entre outras de entender o mundo; e quando o essencialista afirma que Sócrates era essencialmente humano está apenas a declarar o seu apego a uma certa maneira de ver o mundo. Como vimos, este argumento não estabelece o que pretende; na verdade, pode até ser usado para estabelecer precisamente o contrário do que pretende.

CONCLUSÃO

Em geral avaliamos se uma teoria é promissora pelos resultados que ela apresenta e as conseqüências que estes acarretam. Os primeiros passos para o estabelecimento de uma lógica intensional foram timidamente ensaiados por Frege. Mas Frege não tinha e nem precisava de uma análise cuidadosa das entidades intensionais (sentido, relações-em-intensão, etc.) de modo que sua timidez é plenamente justificável; afinal sua lógica é predominantemente extensional, isto é, tratava apenas dos valores de verdade assumidos pelos termos e frases.

> (...) seremos bem capazes de afirmar que "o conceito de duas palavras-conceituais é o mesmo se, e somente se, as extensões dos conceitos correspondentes coincidem", sem sermos desviados pelo uso indevido da palavra "o mesmo". E com esta afirmação, fizemos, creio eu, uma importante concessão aos lógicos extensionalistas. Eles estão certos quando mostram a sua preferência pela extensão, contra a intensão, do conceito que diz respeito à referência, e não ao sentido das palavras, como a coisa essencial para a lógica. Os intensionalistas estão apenas demasiado felizes por não irem além do sentido, pois o que eles chamam a intensão, se não é uma representação, não é nada mais do que o sentido. Esquecem que a lógica não está preocupada com a forma como pensamentos, independentemente dos valores de verdade, se seguem a partir de pensamentos, que o passo desde o pensamento até ao valor de verdade – mais geralmente, o passo do sentido para a referência – tem que ser dado." (FREGE, 1979, p. 122. Tradução nossa[39]).

Ademais, vale lembrar que Frege estava particularmente interessado nas asserções aritméticas; seu objetivo era demonstrar o caráter lógico, isto é, *analítico*, da aritmética mostrando que ela poderia não apenas ser escrita em uma linguagem simbólica, mas também deduzida a partir de verdades gerais de natureza puramente lógica. Frege identificou o lógico com o analítico. Estamos de acordo que o *Sinn* deve determinar as condições de verdade e que a analiticidade depende senão destas condições de verdade. Numa lógica extensional o que conta mesmo são os valores dos termos da linguagem simbólica, ou seja, as condições de verdade bastam e portanto a analiticidade [logicidade] pode ser definida usando apenas uma semântica vero-condicional, e esta não sofre nenhuma interferencia do que quer que seja o *Sinn* de uma expressão ou fórmula. O sentido dos termos e frases de uma linguagem é definido por meio de uma função que associa, a cada termo, um elemento de um domínio

---

[39] (...) we shall be well able to assert 'what two-words mean is the same if and only if the extensions of the corresponding concepts coincide' without being led astray by the improper use of the word 'the same'. And with this statement we have, I believe, made an important concession to the extensionalist logicians, as against the intension, of a concept that they regard the meaning and not the sense of words as the essential thing for logic. The intensionalist logicians are only too happy not to go beyond the sense; for what they call the intension, if it is not and idea, is nothing other than the sense. They forgot that logic is not concerned with how thoughts, regardless of truth-value, follow from thoughts, that the step from thought to truth-value – more generally, the step from sense to meaning – has to be taken.

matemático adequado para a interpretação da linguagem. No entanto, as condições de verdade não são suficientes em uma linguagem que admita os contextos indiretos nos quais o *Sinn* aí sim é indispensável.

A tão aclamada semântica triangular de Frege abriu sendas insuspeitas de modo que muitos tentaram explicar as noções centrais de *Sinn* e *Bedeutung*, as quais são resultado de sua análise da relação de igualdade. Frege nunca explicou claramente o significado de "*Sinn*", apenas disse de forma imprecisa tratar-se do "modo de apresentação" da referência. Posteriormente, esta distinção teve papel importante sobretudo no estabelecimento da semântica filosófica clássica. Portanto, é razoável e desejável supor que o sentido pudesse ter o mesmo status que a referência de modo que uma correta semântica pudesse ser levada a cabo. Como o que importa numa lógica extensional é o valor apresentado pelo cálculo simbólico, então a intensão/sentido permaneceu indefinida porque desnecessária. No entanto, é razoável supor que à medida em que as idéias de Frege foram decisivas na moderna teoria semântica, o sentido pudesse ter um papel igualmente proeminente.

As primeiras elaborações foram apresentadas por Church e Carnap em LSD e em *Meaning and Necessity*, respectivamente. Church tenta aderir aos princípios mais caros da semântica de Frege, mas percebe que o *Sinn* fregeano entendido como "modo de apresentação" é inadequado. Propõe então trocar o *Sinn* por *conceitos* e os situa no nível do *Sinn* fregeano. Como Church advoga o sentido de uma expressão E deve ser um conceito do que E denota. Por conseguinte, os conceitos devem ser associados não só a expressões gerais, mas como a qualquer tipo de expressão derivável dos axiomas de sua LSD, uma vez que todos os *tipos* de expressão estão associados a um sentido. Frases que expressam conceitos são em última instância conceitos de proposições. Mas o que é uma proposição? Church a toma como um conceito de um valor de verdade, não muito diferente do que Frege defendera antes. Sentidos/conceitos são idênticos se suas respectivas expressões são sinonimamente isomórficas, ou então "lambda mutuamente convertíveis". O isomorfismo sinônimico vem como rejeição ao isomorfismo intensional proposto por Carnap. A rigor, duas expressões são intensionalmente isomórficas se e somente se elas são compostas de expressões que denotam as intensões da mesma maneira. O problema de LSD é que ela se limita a apresentar funções-em-intensões de maneira correta. Mas vale lembrar que funções-em-intensões são apenas mapeamentos da teoria dos conjuntos, desta forma a noção sutil de sentido ainda não seria plenamente captável.

Por exemplo, seja a função abaixo que é a função característica do conjunto de números primos:

(a) '*número natural maior que 1 e divisível apenas por ele mesmo e 1'*
(b) '*número natural que possui somente dois fatores*'

Ninguém há de objetar que tanto (a) quanto (b) são definições, conceitos, inequívocos do conjunto dos números primos e que cada expressão possui apenas um sentido. Ainda que (a) e (b) denotem a classe dos números primos, ambos apresentam diferentes conceitos desta classe. Na verdade, há infinitos conceitos da classe de números em questão, de maneira que cada um desses é *o sentido* da expressão. Ora, mas se a solução for apenas ajustar o esquema de Frege e mudar o conceito ao nível do sentido, então surge uma pergunta: que tipo de entidade é um conceito? Bom, no caso das expressões da linguagem natural os conceitos poderiam ser definidos como intensões em mundos possiveis. Esta é a solução defendida por Carnap.

Uma intensão seria uma função de um indice em um mundo possível, isto é, mapeamento dos mundos possiveis por meio de funções de momentos de tempo em valores, classes, etc. Como mapeamentos intensões seriam simples: elas não possuem uma estrutura, e muito menos uma estrutura que corresponde à estrutura de uma dada expressão. Além disso, expressões matemáticas não teriam sentido uma vez que nenhuma semântica dos mundos possiveis poderia lhe ser relacionada. Generalizando: nenhuma entidade da teoria dos conjuntos pode desempenhar o papel do sentido/intensão de uma expressão. O próprio Carnap (1947) sabia que uma análise lógica não poderia fornecer os valores contingentes de intensões. Se intensões são funções de mundos possíveis, então nós poderíamos logicamente determinar o valor de uma intensão no mundo real apenas se soubéssemos de antemão qual dos mundos possíveis é o atual. Em qualquer explicação racional da noção de mundo possível, esse conhecimento não pode ser *a priori* e, portanto, determinar o valor de uma intensão no mundo real deve ser sempre uma questão relacionada à experiência factual, em vez de lógica. Nem o isomorfismo de Church nem o isomorfismo de Carnap são adequados para captar o fenomeno da intensionalidade. Rigorosamente falando, intensões não são funções mas entidades pré-teóricas que são modeladas intra-teoricamente como funções.

Função como mapeamentos não refletem a estrutura da forma como a função é apresentada. Tomando o exemplo dos numeros primos, observamos que há apenas uma função aqui. Logo, não podemos distinguir a apresentação correta de a) e b). Seria totalmente enigmática como essa entidade da teoria dos conjuntos poderia desempenhar o papel de maneira estruturada a partir de uma expressão não estrturada dos números primos. O papel do sentido não pode ser desempenhado por nenhuma entidade da teoria dos conjuntos. A solução ao problema é que o sentido tem que ser um procedimento sumário, o qual pode ser definido de maneira exata via construção.

Mais recentemente os trabalhos dos lógicos intensionalistas Muskens, Moschovakis e especialmente Pavel Tichý com sua Lógica Intensional Transparente (TIL), oferecem uma definição mais precisa da antiga distinção fregeana. Em termos bem gerais, na TIL a "denotação" e a "referência" são semanticamente distintas, pelo menos no caso das expressões empiricas[40]. O que é denotado é a intensão, enquanto o valor da intensão no mundo real (no presente momento) é a referência da respectiva expressão. Assim, a referência não é uma questão que envolva uma semântica lógica, sendo determinada *a posteriori*. Não faremos aqui uma exposição sistemática TIL. (Para maiores detalhes ler Duzi, Materna, Jespersen (2010).

A TIL foi desenvolvida pelo lógico tcheco Pavel Tichý. A chave de entendimento da TIL está na noção de *construção*. Vejamos um simples exemplo da matemática: ao aplicar a função soma (+) a 3 e 5 ou seja, (3+5) obtemos o numero 8. Mas qual a diferença entre (3+5) e (6+2) uma vez que ambas se referem ao mesmo numero? A construção de um termo é importante na TIL, pois ela mostra a estrutura do termo em questão e, consequentemente, como este (o numero 8) faz referencia à sua intensão (o cálculo do numero 8). Portanto, a relação mais importante no esquema da TIL é a seguinte: a expressão e o que ela expressa é determinado pelo sentido, isto é, pelo modo como é *explicitamente construída*. Assim, como podemos facilmente definir o que seja a construção de uma expressão, explicitar o modo como o cálculo é realizado, podemos melhor avaliar em termos logicos o sentido, a denotação e a referencia desta expressão. *Construções* são semanticamente basilares enquanto a

[40] Uma expressão empírica expressa uma construção como seu sentido (como qualquer outro tipo de termo faz), denota uma intensão (mapeamento de mundos possíveis a cronologias de entidades), e sua referência é modal e /ou temporalmente flexível, ou seja, depende do mundo e / ou tempo de avaliação. Por exemplo, o predicado "...é um gato" é uma expressão empírica, porque denota uma intensão - uma propriedade de indivíduos - que sempre tem um conjunto de indivíduos como sua extensão em um dado mundo/tempo no instante de sua avaliação. No entanto, o conjunto pode ser vazio, e se for não-vazio, diferentes pontos de avaliação pode muito bem produzir diferentes populações (membros). O adjetivo 'gato' ao mesmo tempo um termo não-lógico e um termo da linguagem natural.

denotação é secundária. Uma vez que uma construção é explicitamente dada, a entidade (se houver) construída já está implicitamente dada, mas terá de ser averiguada por meio de análise lógica. Como um caso limite, a análise lógica pode revelar, por exemplo, que a construção nada construiu.

Pelo λ – cálculo de Church podemos sistematicamente distinguir funções de seus valores funcionais. A TIL está também equipada com o λ – cálculo mas algumas diferenças devem ser notadas: Church tratou apenas de funções totais (características) enquanto a TIL fará uso de funções parciais; além disso, a abstração e aplicação que em Church equivalem a função e ao seu valor, respectivamente, em TIL elas denotam apenas estruturas de procedimentos que especificam como formar funções e valores funcionais. Tais estruturas são técnicas/métodos cujos resultados ou são funções ou são valores funcionais e são denominados de *construção.* Ou seja, na TIL temos claramente demarcado a função e o modo de apresentação da função os valores funcionais e os modos de apresentação dos valores funcionais. A operação *Closure* é o modo de fazer e/ou construir uma função, e a *Composição* é o método de construir o valor (se for o caso, pois TIL trabalha com funções parciais) de uma função em um argumento. *Composições* e *Closure* são ambas processos que envolvem várias etapas que operam sobre comandos facilitados pelas *variáveis* e as *Trivializações*. Os signos x, y, z denotam variáveis e constroem os respectivos valores a partir da atribuição funcional. A contraparte lingüística da *Trivialização* é um termo constante que sempre denota o mesmo objeto.

O fundamento lógico da TIL é sua noção de *construção* e sua *hierarquia dos tipos* lógicos dividida em teoria ramificada dos tipos e a teoria simples dos tipos: a primeira organiza os objetos de alta-ordem, isto é, *construções,* bem como todas as funções cujo domínio e range são construções; a segunda organiza os objetos de primeira ordem, os quais não são construções, mas sim extensões (indivíduos, números, conjuntos, etc), intensões em mundos possíveis (funções de mundo possíveis) e seus argumentos, incluindo aqueles valores cujos valores são eles mesmos intensões (por exemplo, *a propriedade mais adorável de...).* Seguem abaixo algumas definições relevantes.

Definição 1: (tipos de ordem 1) – seja B a base composta de pares disjuntos e/ou conjuntos não vazio. Então,

(i) todo membro de B é o mais elementar tipo de ordem 1 sobre B

(ii) seja $\alpha,\beta_1...,\beta_m$ com (m>0) tipos de ordem 1 em B. Então o conjunto $(\alpha,\beta_1...,\beta_m)$ de todos os mapeamento parciais m-ários de $\beta_1 \times ...\times\beta_m$ em α é um tipo funcional de ordem 1 a partir de B.

(iii) Só é tipo de ordem 1 em B se seguir de (i) e (ii) acima.

Observação: Na TIL são usados quatro tipos básicos na análise da linguagem natural: ι, o, ω, τ.

ι: conjunto de individuos (equivalem as constantes no universo do discurso)

o : o conjunto dos valores de verdade {V, F}

ω: o conjunto dos mundos logicamente possiveis (espaço lógico)

τ : o conjunto dos numeros reais.

Definição 2: *Construção*

(i) A *variável x* é uma construção que cria um dado objeto *O* do seu respectivo tipo e que é dependente da valoração *v: x v-cria O.*

(ii) *Trivialização:* seja *X* um objeto qualquer (uma extensão, uma intesão ou uma construção), *ºX* é a construção da *Trivialização.* Observe que *X* é criado sem qualquer alteração ao seu tipo inicial.

(iii) *Composição* [$X\ Y_1,..., Y_m$] é a seguinte construção. Se *X v-cria* uma função *f* do tipo $(\alpha,\beta_1...,\beta_m)$, e $Y_1,..., Y_m$ *v-cria* entitidades $B_1,...,B_m$ do tipo $\beta_1,..., \beta_m$ respectivamente, então a *Composição* [$X\ Y_1,..., Y_m$] *v-cria* o valor (uma entidade, se for o caso, do tipo α) de *f* sobre a tupla de argumentos dados $\langle B_1,...,B_m \rangle$. Caso contrário a *Composição*[$X\ Y_1,..., Y_m$] nada *v-cria* e portanto a valoração é indevida (*v-indevida).*

(iv) A *Closure* [$\lambda x_1...x_m\ Y$] é a seguinte construção. Seja $x_1, x_2, ..., x_m$ pares ordenados de variáveis distintas que *v-criam* entidades do tipo $\beta_1,..., \beta_m$ e *Y* a construção que *v-cria* uma entidade α. Logo, [$\lambda x_1...x_m\ Y$] é a construção λ – *Closure* (ou simplesmente *Closure*). Observe que λ – *Closure v-cria* a função *f* do tipo $(\alpha,\beta_1...,\beta_m)$. Agora tome $v(B_1/x_1,...,B_m/x_m)$ como uma valiação identica a *v* pelo menos até o momento de atribuir objetos $B_1/\beta_1,...,B_m/\beta_m$ às variáveis $x_1,...,x_m$. Se *Y* for $v(B_1/x_1,...,B_m/x_m)$ **indevido**-(por iii), então *f* será indefinida em

$\langle B_1,...,B_m \rangle$. Caso contrário o valor de *f* em $\langle B_1,...,B_m \rangle$ será a entidade α ou seja, $v(B_1/x_1,...,B_m/x_m)$ construída por *Y*.

(v) *Única execução* (s*ingle execution*) ^1X é a construção que ou *v-cria* a entidade *v-construída por X* ou, se *X* não for ele proprio uma construção ou *X* é *v-indevido,* então ^1X é *v-indevido*

(vi) *Dupla execução* (*double execution*) ^2X é a seguinte construção. Seja *X* uma entidade qualquer, a dupla execução ^2X é *v-indevido* (uma valoraçã indevida, portanto nada equivale a esta valoração) se *X* não for ele próprio uma construção, ou se *X* não *v-criar* uma construção, ou se *X v-cria* uma construção cuja valoração é indevida. Em compensação, seja *X v-cria* uma construção *Y* e *Y v-cria* uma entidade *Z:* logo, ^2X *v-cria Z.*

(vii) Só será *construção* se seguir de (i) a (vi).

A definição da teoria ramificada dos tipos se divide em três partes: a primeira hierarquia é a do tipo de ordem 1 (ver definição 1 acima); depois temos as construções de ordem *n* e, finalmente os tipos de ordem *n+1*.

Definição 3: *Teoria ramificada dos tipos*

$\mathbf{T}_1$ (*tipos de ordem 1*). Ver definição 1.

$\mathbf{C}_n$ (construção de ordem *n*)

i) seja *x* uma variável variando no dominio de um tipo de ordem *n.* Então *x* é uma construção de ordem *n* da base (B).

ii) seja *X* um elemento de um tipo de ordem *n.* Então ^oX, ^1X,^2X são construções de ordem *n* da base.

iii) seja $[X\ X_1,...,X_m]$ (x>0) construções de ordem *n* na base. Então $[XX_1...\ X_m]$ é uma construção de ordem *n* da base.

iv) seja x_1, ..., x_m X (x>0) construções de ordem *n* da base. Então $[\lambda x_1...x_m\ X]$ é uma construção de ordem *n* na base.

v) só será *construção de ordem n na base B* se seguir de $\mathbf{C}_n$ (i) a (iv).

$\mathbf{T}_{n+1}$ (*tipos de ordem n+1*). Seja **n* a classe de todas as construções de ordem *n* da base. Assim,

i) **n* e todo e qualquer tipo de ordem *n* são tipos de ordem *n+1.*

ii) se $0<m$ e $\alpha,\beta_1...,\beta_m$ são tipos de ordem $n+1$ da base, então $(\alpha,\beta_1...,\beta_m)$ (ver $\mathbf{T}_1$ ii) é um tipo de ordem $n+1$ da base.

iii) só será *tipo de ordem n+1 na base B* se seguir de (i) e (ii).

As linguagens empiricas geralmente incorporam um elemento contigencial não presente em linguagens regimentadas. Expressões empiricas denotam condiçõs empiricas que podem ou não ser satisfeitas por uma determinada valoração. TIL modela estas condições empíricas a partir da noção de *intensões em mundos possíveis*. Intensões são entidades do tipo ($\beta\omega$), isto é, mapeamentos de mundos possiveis de um tipo arbitrário β. O tipo β está frequentemente associado ao tipo ocasião/circunstância (chronology) de α – objetos, ou seja, mapeamentos do tipo ($\alpha\tau$). Logo, α – intensões são funções do tipo (($\alpha\tau$)ω) e que abreviaremos por $\alpha_{\tau\omega}$. Em TIL um índice de valoração é dado pelo par mundo/tempo $\langle \mathbf{w}, \mathbf{t} \rangle$. Entidades extensionais são do tipo α onde $\alpha \neq (\beta\omega)$. Os exemplos mais usuais de intensões são: proposições do tipo $o_{\tau\omega}$, propriedades de individuos são do tipo $(o\iota)_{\tau\omega}$, relações binárias de intensões entre indivíduos do tipo $(o\iota\iota)_{\tau\omega}$, atributos individuias (*individual offices*) são do tipo $\iota_{\tau\omega}$. A intensionaliazção e a temporalização são explicitadas diretamente na sintaxe a qual codifica as construções das intensões de mundos possiveis. Por conseguinte, *w* varia (*range over*) no dominio ω e *t* no dominio τ, e a sintaxe lógica da TIL quando aplicada ao estudo das linguagens empiricas é dada simplesmente por $\lambda w \lambda t[...w....t...]$.

A próxima noção que devemos definir é a de sinonimia. Em TIL a sinonimia é estabelecida pelo *procedural isomorphism* (PI): termos são sinônimos se computam os mesmos algoritmos. Resguardadas as devidas proporções, PI faz alusão ao isomorfismo intensional de Carnap e ao isomorfismo sinonimico de Church. Contudo, TIL restringe o β – convertível. Uma das razões para restringir β-conversões está no fato de que estas não formam expressões equivalentes numa lógica que faz uso de funções parciais como a TIL. Uma outra razão é que até mesmo as β-equivalências apresentam diferentes construções quando aplicadas à linguagem natural exemplificadas pela distinção *de re* e *de dicto*. Assim, a diferença entre "*a* acredita que *b* é feliz" e "*b* é tido ser feliz por *a*" é apenas a diferença entre β-equivalentes:

De dicto: $\lambda w \lambda t[^{\circ}acredita_{wt}\ ^{\circ}a\ \lambda w \lambda t[^{\circ}Feliz_{wt}{}^{\circ}b]]$

De re: $\lambda w \lambda t[\lambda x[^{\circ}acredita_{\mathrm{wt}}\ ^{\circ}a\ \lambda w \lambda t[^{\circ}Feliz_{wt}x]]^{\circ}b]$

$$Tipos: Feliz/(o\iota)_{\tau\omega};\ x \rightarrow_{v} \iota;\ a,\ b/\iota;\ acredita/(o\iota o_{\tau\omega})_{\tau\omega}$$

O *contractum* da variante *de dicto* é o β-equivalente da variante *de re*. Ambos são equivalentes pois constroem a mesma proposição, isto é, ambas as expressões denotam os mesmo valores de verdade. No entanto, eles o fazem de forma diferente, portanto, não são segundo a TIL expressões sinônimas. A equivalencia de β-reduções conduz a perda de informação analítica, ou seja, perda de informação sobre qual dos dois modos, ou construções, teriam sido utilizados na construção da proposição. À primeira vista essa perda não seria tão grave, exceto se a β-expansão ocorresse da mesma forma, o que não é o caso. A perda de analiticidade não pode ser recuperada, por exemplo, aplicando β-expansão.

Ao restringir β-conversões temos em mente aqui a substituição de variáveis livres por variáveis λ – ligadas do mesmo tipo e que será denominada β_r-conversão. Por exemplo, na TIL temos pouca razão para diferenciar semanticamente ou logicamente as frases "*b* é considerado feliz por *a*" e "*b* tem a propriedade de ser considerado feliz por *a*". A última frase será expressa por

$$\lambda w \lambda t[\lambda w' \lambda t'\, \lambda x[\,{}^{\circ}acredita_{w't'}\ a\ \lambda w \lambda t[{}^{\circ}Feliz_{wt} x]]_{wt} b]$$

que nada mais é do que β_r-expandido

$$\lambda w \lambda t[\lambda x[\,{}^{\circ}acredita_{wt}\ a\ \lambda w \lambda t[{}^{\circ}Feliz_{wt} x]]b]$$

Definição 4: (*procedural isomorphism*)

Sejam *C, D* construções. Portanto, *C, D* são α – equivalentes se e somente se diferenciam no máximo por suas variáveis λ – ligadas. *C, D* são η – equivalentes se e somente se são construidos a partir de η – reduções e η – expansões. *C, D* são β_r-equivalentes se e somente se são construidas a partir de outras β_r-reduções ou β_r-expansões. Dá-se o *procedural isomorphism* de *C, D*, denotado por "$°C \approx °D$', $\approx/(o{*}n{*}n)$, se e somente se *C, D* são construções fechadas sob a forma $C_1, \ldots, C_m$, $m \geq 1$, tal que $°C = °C_1$, $°D = °C_m$, e todo e qualquer C_i, C_{i+1} $(1 \leq i < m)$ são α, η– equivalentes ou β_r-equivalente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDERSON, C. Anthony , ZELËNY, Michael. *Logic, meaning, and computation: essays in memory of Alonzo Church*. Springer, 2001.

ANDERSON, C. Anthony. *Semantic Antinomies in the Logic of Sense and Denotation*. Notre Dame Journal of Formal Logic 28 (1987): 99-114.

___________,C. Anthony *Some Models for the Logic of Sense and Denotation with an Application to Alternative* (0). Ph.D. diss., UCLA, 1977.

BRANQUINHO, João. *Enciclopédia de Termos Lógico – filósoficos.* São Paulo, Martins Fontes, 2006.

CARNAP, Rudolf. *Meaning and Necessity. A Study in Semantics and Modal Logic.* University of Chicago Press, 1947.

CHURCH, Alonzo. *A Set of Postulates for the Foundation of Logic.* The Annals of Mathematics. 1932, Vol. 33

________, Alonzo. *The Calculi of Lambda-Conversion*. Princeton University Press, 1941.

________, Alonzo . *A Formulation of the Simple Theory of Types*. Journal of Symbolic Logic 5, 1940, p. 56-68.

________, Alonzo. *A Formulation of the Logic of Sense and Denotation* (Abstract). Journal of Symbolic Logic 11, 1946, p.31.

________, Alonzo. *A Revised Formulation of the Logic of Sense and Denotation. Alternative* (1). Noûs 27, 1993, p. 141-57.

________, Alonzo. *On Carnap's Analysis of Statements of Assertion and Belief.* The Journal of Symbolic Logic, Vol. 16, No. 1, Mar, 1951.

________, Alonzo. *Outline of a Revised Formulation of the Logic of Sense and Denotation*. Parts 1 and 2. Noûs 7, 1973, p. 24-33; e 8, 1974, p. 135-56.

__________, Alonzo. *Intensional Isomorphism and Identity Belief.* Philosophical Studies, number 5, 1954.

DALEN, Dirk van. *Logic and Structure*. Springer, 2004.

DUZI, Marie, MATERNA, Pavel, JESPERSEN, Bjørn. *Procedural Semantics for Hyperintensional Logic – Foundations and Applications of Transparent Intensional Logic*, Springer. 2010.

FREGE, G. *O Pensamento – uma investigação lógica*. Notas e tradução de Cláudio da Costa. Rio de janeiro/Natal, Tempo brasileiro/Edufrn, 1999.

__________, G. *Sobre o sentido e referencia*. Capitulo II do texto Lógica e Filosofia da Linguagem. Organização e tradução de Paulo Alcoforado. São Paulo, editora Cultrix, 1978.

__________, G. *Posthumous writings.* Edited by Hans Hermes, Friedrich Kambartel, Friedrich Kaulbach. Oxford, 1979.

HANZEL, Igor. *Frege, the Identity of Sinn and Carnap's Intension*. History and Philosophy of Logic, 27, August, 2006. (229 – 247).

_________, Igor. *The Development of Carnap´s Semantics.* The American Journal of Semiotics. 25 – 1, 2009. p. 123 – 151.

HINDLEY, J. Roger; SELDIN, Jonathan P. *Lambda-Calculus and Combinators, an Introduction.* Cambridge University Press, 2008.

HINTIKKA, Jaakko. *Carnap´s Semantics in Retrospect.* Synthese, 25, 1973, p. 372 – 397.

IMAGUIRE, G, ALMEIDA, C. L. S. de, OLIVEIRA, M. A. de Oliveira (orgs.). *Metafísica Contemporânea.* Petrópolis: Editora Vozes, 2007, 376-399.

KAMAREDDINE, Fairouz, LAAN, Twan e NEDERPELT, Rob. *A Modern Perspective on Type Theory from its origins until today*. Kluwer Academic Publishers, 2004.

KLEMENT, Kevin C. *Frege and the logic of sense and reference*. Routledge New York & London, 2002.

__________, Kevin C. *The Senses of Functions in the Logic of Sense and Denotation*. Bulletin of Symbolic Logic, Volume 16, number 2, June 2010.

MURCHO, Desidério. *Essencialismo Naturalizado.* Tese de Mestrado em Filosofia da Linguagem e da Consciência, Universidade de Lisboa, Lisboa, 1999.

SILVA, Jairo José da. *Filosofias da Matemática*. São Paulo, editora UNESP, 2007.

SØRENSEN, Morten H., URZYCZYN, Pawel. *Lectures on the Curry-Howard Isomorphism*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Volume 149, Elsevier, 2006.

TARSKI, Alfred. *A Concepção Semântica da verdade.* Tradução Celso Braida et al, MORTARI, C. A, DUTRA, L.H de A. São Paulo, UNESP, 2007.

TICHÝ, Pavel. *The Foundations of Frege's Logic*. Berlin-New York, de Gruyter, 1988.

TRANJAN, Tiago. *A sintaxe lógica da linguagem de Rudolf Carnap: uma análise do princípio de tolerância e da noção de analiticidade*. Dissertação de mestrado. USP, 2005.

WOLFGANG, Carl. *Frege – A Platonist or a Neo-Kantian?*. Edited by Albert Newen, Ulrich Nortmann, Rainer Stuhlmann-Laeisz.