



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

**MATHEUS NILTON VIDAL NOGUEIRA**

**BURACOS DE MINHOCA DO TIPO SCHWARZSCHILD NA TEORIA  
ASSINTOTICAMENTE SEGURA DA GRAVIDADE**

**FORTALEZA**

**2022**

MATHEUS NILTON VIDAL NOGUEIRA

BURACOS DE MINHOCA DO TIPO SCHWARZSCHILD NA TEORIA  
ASSINTOTICAMENTE SEGURA DA GRAVIDADE

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.

Coorientador: Prof. Dr. Job Saraiva Furtado Neto.

FORTALEZA  
2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- N713b Nogueira, Matheus Nilton Vidal.  
Buracos de Minhoca do tipo Schwarzschild na teoria Assintoticamente Segura da Gravidade / Matheus Nilton Vidal Nogueira. – 2022.  
125 f. : il. color.
- Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2022.  
Orientação: Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho.  
Coorientação: Prof. Dr. Job Saraiva Furtado Neto.
1. Relatividade Geral. 2. Buracos de Minhoca. 3. Gravidade Assintoticamente Segura. I. Título.  
CDD 530
-

MATHEUS NILTON VIDAL NOGUEIRA

BURACOS DE MINHOCA DO TIPO SCHWARZSCHILD NA TEORIA  
ASSINTOTICAMENTE SEGURA DA GRAVIDADE

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 24/02/2022.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Geová Maciel de Alencar Filho (orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Job Saraiva Furtado Neto (coorientador)  
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

---

Prof. Dr. Ivan Carneiro Jardim  
Universidade Regional do Cariri (URCA)

---

Prof. Dr. Célio Rodrigues Muniz  
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

---

Prof. Dr. Rodolfo Alván Casana Sifuentes  
Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço à minha esposa Andreza Maciel Rocha, por todo amor, compreensão e apoio ao longo de toda minha trajetória acadêmica no qual ela tem acompanhado.

Agradeço aos meus pais José Nilton Nogueira Júnior e Maria Aldenice Façanha Vidal e ao meu irmão Davi Vidal Nogueira, pois eles são de apoio fundamental para mim. Família é a base de tudo.

Agradeço à todos os professores que influenciaram na minha formação diretamente ou indiretamente. Em particular, ao meu orientador Geová Alencar que sempre me ajudou quando precisei e por toda parceria ao longo desse tempo, ao meu coorientador Job Saraiva pela colaboração e pelas discussões enriquecedoras e aos professores Ivan Carneiro, Célio Rodrigues e Rodolfo Alván por terem aceitado avaliar este trabalho.

Agradeço o departamento de Física da UFC.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## RESUMO

Neste trabalho analisamos as condições de atravessabilidade de buracos de minhoca usando um fluido com parâmetro de estado dependente da posição como fonte no contexto da Gravidade Assintoticamente Segura (GAS), assim como a utilizamos para estudar a distribuição de matéria ao longo do espaço-tempo de duas classes de soluções específicas: Schwarzschild-*like* e os de Ellis-Bronnikov generalizados. As correções devido à teoria GAS são implementadas utilizando os métodos do grupo de renormalização, que, como consequência, fornecem um novo tensor  $X_{\mu\nu}$  como fonte para as equações de campo modificadas e promove a constante de Newton  $G_0$  a uma função dos invariantes de curvatura. No estudo das condições de atravessabilidade de buracos de minhoca, consideramos os casos de os mesmos serem esféricos ou pseudoesféricos, onde nos restringimos apenas a regiões próximas à garganta do buraco de minhoca. Utilizamos o caso específico do escalar de Ricci como invariante de curvatura para definir a função *cutoff*  $f = \zeta R$  e utilizamos um fluido com equação de estado da forma  $p_r = \omega(r)\rho$  como fonte, isto é, com o parâmetro de estado dependente da posição. Mostramos que, ao contrário do que se pensava, em ambos os casos teremos a possibilidade de atravessabilidade com matéria não-exótica. Em particular, estudamos no contexto da GAS os tipos específicos de buracos de minhoca: Buracos de Minhoca Schwarzschild-*like* e os de Ellis-Bronnikov generalizados. Neste caso, verificamos se as condições radiais de energia são satisfeitas e comparamos os resultados com os obtidos da teoria usual. Para a classe Schwarzschild-*like* mostramos que apenas no caso particular do Buraco de Minhoca Schwarzschild que as condições radiais de energia são satisfeitas em sua garganta, dependendo do valor escolhido para seu raio  $r_i$ . Em contraste, no caso mais geral Schwarzschild-*like*, não há a possibilidade de as condições radiais de energia serem satisfeitas na garganta, assim como no caso usual. Finalmente, estudamos a classe de soluções de Ellis-Bronnikov generalizados, no contexto da GAS usando o escalar de Ricci, tensor de Ricci ao quadrado e o escalar de Kretschmann para definir a função *cutoff*. Mostramos que a GAS resolve o problema da matéria exótica na garganta apenas quando usamos o escalar de Ricci e isso apenas para uma solução particular generalizada. Além disso, encontramos uma região próxima da garganta onde as condições radiais de energia podem ser satisfeitas, contrário do que é previsto na teoria usual.

**Palavras-chave:** relatividade geral; buracos de minhoca; buracos de Schwarzschild-*like* e Ellis- Bronnikov generalizados; gravidade assintoticamente segura.

## ABSTRACT

In this work we analyze the traversability conditions of wormholes using a fluid with a position dependent state parameter as a source in the context of Asymptotically Safe Quantum Gravity (ASG), as well as using it to study the distribution of matter over space-time of two classes of specific solutions: Schwarzschild-*like* and the generalized Ellis-Bronnikov ones. Corrections due to ASG theory are implemented using the renormalization group methods, which, as a consequence, provides a new tensor  $X_{\mu\nu}$  as a source for the modified field equations and promotes the Newton's constant  $G_0$  into a function of the curvature invariant. In the study of wormhole traversability conditions, we considered the cases of spherical or pseudospherical wormholes, where we restricted ourselves only to regions close to the wormhole throat. We use the specific case of the Ricci scalar as an invariant of curvature to use as a function *cutoff*  $f = \xi R$  and we use a fluid with an equation of state of the form  $p_r = \omega(r)\rho$  as source, that is, with the position-dependent state parameter. We show that, contrary to what was thought, in both cases we will have the possibility of crossing with non-exotic matter. In particular, we studied in the context of ASG the specific types of wormholes: Schwarzschild-*like* and generalized Ellis-Bronnikov wormholes. In this case, we check whether the radial energy conditions are satisfied and compare the results with those obtained from the usual theory. For the Schwarzschild-*like* class we show that only in the particular case of the Schwarzschild Wormhole that the radial energy conditions are satisfied in its throat, depending on the value chosen for its radius  $r_t$ . In contrast, in the more general Schwarzschild-*like* case, there is no possibility for the radial energy conditions to be satisfied at the throat, as in the usual case. Finally, we study the class of generalized Ellis-Bronnikov solutions in the context of ASG using the Ricci scalar, the squared Ricci tensor and the Kretschmann scalar to define the function *cutoff*. We show that ASG solves the problem of exotic matter in the throat only when we use the Ricci scalar and that only for a particular generalized solution. Furthermore, we found a region near the throat where the radial energy conditions can be satisfied, contrary to what is predicted in the usual theory.

**Keywords:** general relativity; wormholes; Schwarzschild-like and generalized Ellis-Bronnikov wormholes; asymptotically safe gravity.

## LISTA DE FIGURAS

- Figura 1 – Diagrama de mergulho  $z(r)$  para uma função forma  $b(r)$  arbitrária, com raio da garganta  $b(r_t) = b_0$ . Essa imagem foi retirada do artigo original de Morris e Thorne [3]. . . . . 34
- Figura 2 – Plot da revolução em torno do eixo-z da função  $z(r)$ , mostrando o diagrama de mergulho de um buraco de minhoca Schwarzschild, para  $M = 1$ . . . . . 35
- Figura 3 – Comportamento da função  $\beta$  para o caso gravitacional, quando desconsideramos a influência cosmológica. Podemos ver que o ponto fixo  $g = g_*^{UV}$  separa um regime de acoplamento fraco ( $g < g_*^{UV}$ ) de um regime de acoplamento forte ( $g > g_*^{UV}$ ). Essa imagem foi retirada do artigo [96]. . . . . 63
- Figura 4 – Região aceitável dos parâmetros  $(\omega, \xi)$  para que as condições de atravessabilidade sejam satisfeitas, no caso pseudoesférico. As linhas tracejadas, pontilhadas e preenchidas representam, respectivamente, as condições da garganta, radial nula de energia e antiscreening. Note que desde que  $\omega$  é positivo nessa região, teremos a presença de matéria não-exótica. Imagem extraída do artigo [64]. . . . . 73
- Figura 5 – A componente radial da métrica corrigida  $g_{rr}(u)$  como função da coordenada radial adimensional  $u$ , para o caso pseudoesférico. A linha preenchida representa o comportamento de  $g_{rr}(u)$  para o conjunto de valores  $(\omega, \xi) = (0.030, 0.007)$ . A linha tracejada refere-se a sua contraparte clássica, que claramente viola a assinatura da métrica. Imagem extraída do artigo [64]. . . . . 74
- Figura 6 – Região aceitável dos parâmetros  $(\omega, \xi)$  para satisfazer as condições de atravessabilidade no caso esférico. As linhas tracejadas, pontilhadas e preenchidas representam, respectivamente, as condições da garganta, energia radial nula e antiscreening. Vemos que todas as condições são satisfeitas e o buraco de minhoca é atravessável, no entanto, será necessário a presença de matéria exótica. Imagem extraída do artigo [64]. . . . . 77
- Figura 7 – A componente radial da métrica corrigida  $g_{rr}(u)$  como função de  $u$ , para o caso esférico. A linha preenchida representa o comportamento de  $g_{rr}(u)$  para os valores específicos dos parâmetros  $(\omega, \xi) = (-0.275, 0.178)$ . A linha tracejada representa o comportamento da métrica clássica. Imagem extraída do artigo [64]. . . . . 78



Figura 8 – Condição flare-out para o buraco de minhoca pseudoesférico no contexto da GAS com $\zeta = 0.05$ . . . . .	82
Figura 9 – Condição <i>Antiscreening</i> para buraco de minhoca pseudoesférico no contexto da GAS com $\zeta = 0.05$ . . . . .	82
Figura 10 – $-p_r + \rho$ para o buraco de minhoca pseudoesférico no contexto da GAS com $\zeta = 0.05$ . . . . .	82
Figura 11 – . . . . .	84
Figura 12 – . . . . .	84
Figura 13 – . . . . .	84
Figura 14 – Em (a) vemos a região de atravessabilidade para buracos de minhoca pseudoesféricos no contexto da GAS para $\zeta = 0.005$ , em (b) temos $\zeta = 0.05$ enquanto em (c) $\zeta = 0.1$ . Em todos os casos $\omega_T = \lambda = 0$ . . . . .	84
Figura 15 – Condição flare-out para o buraco de minhoca esférico no contexto da GAS com $\zeta = 0.05$ . . . . .	86
Figura 16 – Condição <i>antiscreening</i> para o buraco de minhoca esférico no contexto da GAS com $\zeta = 0.05$ . . . . .	86
Figura 17 – $-p_r + \rho$ para o buraco de minhoca esférico no contexto da GAS com $\zeta = 0.05$ . . . . .	87
Figura 18 – . . . . .	88
Figura 19 – . . . . .	88
Figura 20 – . . . . .	88
Figura 21 – Em (a) vemos a região de atravessabilidade para buracos de minhoca esféricos no contexto da GAS para $\zeta = 0.005$ , em (b) nós colocamos $\zeta = 0.05$ enquanto em (c) $\zeta = 0.1$ . Em todos os casos temos $\omega_T = \lambda = 0$ . . . . .	88
Figura 22 – Plot de $\omega(r)$ para um buraco de minhoca Schwarzschild ( $\beta = 0$ ) no contexto da GAS para $\lambda = 1$ ( $\xi = \sqrt{2/3}$ ) e $r_t^2 = 1/3$ . . . . .	94
Figura 23 – Plot de $\omega(r)$ para um buraco de minhoca Schwarzschild ( $\beta = 0$ ) no contexto da GAS usando o escalar de Kretschmann, para $\lambda = 1$ ( $\xi = \sqrt{2/3}$ ) e $r_t^2 = 1/3$ . . . . .	94
Figura 24 – Plot de $\omega(r)$ para um buraco de minhoca Schwarzschild-like, com $r_t = 1 < r$ , $\xi = 1$ e $\beta = 1/2$ , em unidades Planckianas. . . . .	98
Figura 25 – Plot de $\omega(r)$ para um buraco de minhoca Schwarzschild-like ( $\beta < 0$ ) para $\xi = 1$ , $r_t = 1$ , e $\beta = -1$ . . . . .	99
Figura 26 – Gráfico de $\rho$ , $p_r$ e $p_r + \rho$ como funções de $r$ para o buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov generalizado com $n = 4$ . Para este gráfico colocamos $\xi = 0.05$ e $r_t = 0.8$ , para garantir que teremos matéria não-exótica na garganta. . . . .	104

Figura 27 –Parâmetro de estado $\omega$ como uma função de $r$ , para o buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov generalizado com $n = 4$ . Neste caso colocamos $r_t = 0.8$ e $\xi = 0.05$ , a fim de que se tenha matéria não-exótica na garganta. . . . .	104
Figura 28 –Densidade de energia $\rho$ , pressão radial $p_r$ e a soma $\rho + p_r$ como uma função da coordenada radial $r$ , utilizando o modelo do quadrado do tensor de Ricci. Neste caso colocamos $r_t = 1$ e $\xi = 0.05$ . . . . .	110
Figura 29 –Parâmetro de estado $\omega$ como uma função da coordenada radial $r$ no modelo do quadrado do tensor de Ricci. Para este gráfico colocamos $r_t = 1$ e $\xi = 0.05$ . . . . .	111

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	12
2	BURACOS DE MINHOCA ATRAVESSÁVEIS: A SOLUÇÃO DE MORRIS- THORNE . . . . .	17
2.1	Relatividade Geral . . . . .	17
2.2	A solução de Schwarzschild . . . . .	20
2.3	Pontes de Einstein-Rosen . . . . .	23
2.4	Condições de Energia . . . . .	25
2.5	A solução de Morris-Thorne . . . . .	30
2.5.1	<i>A Métrica</i> . . . . .	30
2.5.2	<i>Diagramas de Mergulho</i> . . . . .	33
2.5.3	<i>Tensores de Riemann e Einstein</i> . . . . .	35
2.5.4	<i>Forças de Maré Gravitacional e o Tempo de Travessia</i> . . . . .	38
2.5.5	<i>Equações de Einstein e o conteúdo de matéria e energia que gera o Buraco de Minhoca</i> . . . . .	42
3	GRAVIDADE ASSINTOTICAMENTE SEGURA . . . . .	45
3.1	Introdução Histórica . . . . .	45
3.2	A ação efetiva média e a Equação de Wetterich . . . . .	46
3.3	Funções- $\beta$ , pontos fixos e expoentes críticos . . . . .	51
3.4	A Ação Efetiva Média para a Gravidade . . . . .	53
3.4.1	<i>O significado de “métrica” em Gravitação Quântica</i> . . . . .	53
3.4.2	<i>A integral funcional com gauge fixo</i> . . . . .	54
3.4.3	<i>Função Reguladora, Fontes e Valores Esperados</i> . . . . .	56
3.4.4	<i>Definição formal da ação efetiva média e a Equação de Wetterich para o caso gravitacional</i> . . . . .	59
3.4.5	<i>Truncamento de Einstein-Hilbert</i> . . . . .	60
3.4.6	<i>A equação de Einstein Modificada</i> . . . . .	64
4	BURACOS DE MINHOCA EM GRAVIDADE QUÂNTICA ASSINTOTI- CAMENTE SEGURA . . . . .	69
4.1	O caso pseudoesférico . . . . .	69
4.2	O caso esférico . . . . .	74
4.3	O caso geral pseudoesférico . . . . .	78
4.4	O caso geral esférico . . . . .	83

<b>5</b>	<b>DUAS CLASSES DE SOLUÇÕES DE BURACOS DE MINHOCAS EM GAS: SCHWARZSCHILD-LIKE E OS DE ELLIS-BRONNIKOV GENERALIZADOS</b>	89
<b>5.1</b>	<b>Buracos de Minhoca Schwarzschild-like em GAS</b>	89
<b>5.2</b>	<b>Buracos de Minhoca Ellis-Bronnikov generalizados</b>	99
<b>5.2.1</b>	<i>Escalar de Ricci</i>	101
<b>5.2.2</b>	<i>Quadrado do tensor de Ricci</i>	105
<b>5.2.3</b>	<i>Escalar de Kretschmann</i>	111
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	116
	<b>REFERÊNCIAS</b>	120

## 1 INTRODUÇÃO

A teoria de Einstein da Relatividade Geral prevê a existência de interessantes objetos que servem como túneis conectando universos distintos ou regiões do espaço-tempo assintoticamente planas de um mesmo universo. Esse tipo de solução foi primeiro encontrado por Einstein e Rose [1], que foram chamados de Buracos de Minhoca por Misner e Wheeler [2]. No entanto, a primeira construção geral de uma solução de buraco de minhoca atravessável foi dado por Morris e Thorne [3], que é representado por uma métrica estática e esfericamente simétrica da forma:

$$ds^2 = e^{2\Phi(r)} dt^2 - \frac{dr^2}{1 - b(r)/r} - r^2 d\Omega_2, \quad (1.1)$$

onde  $d\Omega_2$  é o elemento de linha da 2-esfera,  $e^{2\Phi(r)}$  é a função *redshift*  $b(r)$  a função forma. A fim de garantir atravessabilidade, algumas restrições são impostas a essas funções [3,4], tais como a não existência de um horizonte de eventos, a existência de um valor mínimo para  $b(r)$ , que é para algum  $r = r_t$  com  $b(r_t) = r_t$ , caracterizando a região da garganta do buraco de minhoca e a condição *flare-out*, representada pela relação  $b'(r_t) < 1$ , onde ' é a diferenciação com respeito à coordenada radial  $r$ . No entanto, pode ser mostrado que para um buraco de minhoca ser atravessável, pelo menos no contexto da relatividade geral, deve-se ter matéria que viola as condições de energia [5–8], sendo possível a existência de buracos de minhoca com energia *Phantom* como fonte [9, 10] ou ainda energia Casimir[11–15].

Buracos de minhoca que possuem geometrias assintoticamente planas são de particular interesse [3], embora casos mais gerais tenham sido estudados na literatura [16–18]. A solução de Schwarzschild pode ser pensada como um exemplo de um buraco de minhoca assintoticamente plano, com função forma  $b(r) = r_t = \text{constante}$  e função *redshift*  $e^{2\Phi(r)} = 1 - r_t/r$ . Porém, este não seria o caso de um buraco de minhoca atravessável, pois há a presença de um horizonte de eventos localizado em  $r = r_t$ . A fim de construir um buraco de minhoca Schwarzschild atravessável, devemos manter a componente radial da métrica e exigir que a função *redshift* não possua horizontes. Podemos também construir uma versão generalizada do buraco de minhoca Schwarzschild, considerando uma função forma linear em  $r$  com a forma  $b(r) = (1 - \beta)r_t + \beta r$ , onde  $\beta$  é uma constante, sendo  $\beta = 0$  o caso particular do buraco de minhoca Schwarzschild, também considerado o caso particular de um buraco de minhoca auto-dual com densidade de energia nula [19, 20]. Uma consequência da constante  $\beta$  é a presença de um aumento ou diminuição de ângulo sólido no limite assintótico, dependendo se  $\beta$  é positivo ou negativo. Este buraco de minhoca foi chamado do *Schwarzschild-like* e suas propriedades no contexto da relatividade geral foram estudadas em [21]. Embora buracos de minhoca

Schwarzschild-*like* sejam atravessáveis em relatividade geral, a necessidade de matéria exótica é novamente vista.

Podemos nos questionar se, ao considerar efeitos quânticos, há a possibilidade de um buraco de minhoca ser atravessável com matéria não-exótica obedecendo às condições de energia. Porém, uma teoria quântica da gravidade ainda não foi bem estabelecida. Um dos métodos encontrados na literatura para considerar efeitos quânticos no campo gravitacional é tratá-lo como um campo quântico que é assintoticamente seguro. Esse método é particularmente interessante pois retira as divergências ultravioleta (UV) de maneira bastante eficiente [22]. Segundo este método, a teoria deve ser renormalizável e, portanto, preditiva, se possui um ponto fixo não-Gaussiano tal que todas as “constantes” de acoplamento essenciais para a teoria tendam para este ponto fixo no limite UV (entre aspas pois as constantes de acoplamento são promovidas a funções do momento de escala  $k$ , usado como referência para excluir as divergências no infravermelho (IR)). A garantia da existência de um ponto fixo para o fluxo do grupo de renormalização no caso gravitacional é confirmado por vários métodos e tem sido aplicados em diferentes modelos [23–48, 76].

Para isso, é necessário resolver a equação exata do grupo de renormalização (EEGR) a fim de obter a ação efetiva média  $\Gamma_k$  dependente do momento de escala [49]

$$k\partial_k\Gamma_k = \frac{1}{2}\text{Tr}\left[(\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k)^{-1}k\partial_k\mathcal{R}_k\right], \quad (1.2)$$

onde  $\Gamma_k^{(2)}$  é a Hessiana de  $\Gamma_k$  e  $\mathcal{R}_k$  é a função reguladora, introduzida para eliminar as divergências IR, exigida como sendo uma função quadrática do momento  $k$  [23].

No caso gravitacional, a ação efetiva média, também chamada de fluxo gravitacional neste contexto, é um funcional que depende da métrica e do parâmetro  $k$ , o momento de referência que exclui os modos que levam a divergências IR. O funcional  $\Gamma_k[g_{\mu\nu}]$  descreve as flutuações quânticas no campo gravitacional para escalas de momento da ordem de  $k$ . O problema com esse método está na dificuldade de resolver a EEGR (1.2) para determinar uma forma exata para o fluxo  $\Gamma_k$ . No entanto, podemos encontrar soluções aproximadas ao considerarmos truncamentos, isto é, projetar o fluxo  $\Gamma_k$  em um sub-espço com dimensão finita que leva em conta apenas as “constantes” de acoplamento que são necessárias para descrever as interações da teoria, isto é, considerando apenas a física essencial. No caso gravitacional o truncamento mais natural é o “truncamento de Einstein-Hilbert” [23, 24, 50–54], que consiste em projetar o fluxo do campo gravitacional  $\Gamma_k[g_{\mu\nu}]$  na base  $\sqrt{g}$  e  $\sqrt{g}R$ , levando à associação de  $\Gamma_k$  com a forma clássica da ação de Einstein-Hilbert. Os coeficientes da expansão de  $\Gamma_k[g_{\mu\nu}]$  nesse sub-espço nos leva ao melhoramento (*improvement*) das constantes de acoplamento  $G(k)$  e  $\Lambda(k)$ , isto é, a constante de Newton e a constante cosmológica são promovidas a funções do

parâmetro  $k$ , cuja forma funcional são determinadas a partir das soluções da função- $\beta$ , um conjunto de equações diferenciais parciais obtidas a partir do fluxo, que rege a evolução das “constantes” de acoplamento  $G(k)$  e  $\Lambda(k)$ [23, 55–57].

Soluções numéricas dessa função- $\beta$  no limite infravermelho ( $k \rightarrow 0$ ) e próximas ao ponto fixo do grupo de renormalização, fornecem a seguinte forma para a função  $G(k)$  [58–62]

$$G(k) = \frac{G(k_0)}{1 + \omega_q G(k_0)(k^2 - k_0^2)}, \quad (1.3)$$

onde  $k$  é uma escala de momento introduzida na ação efetiva média para implementar o *cutoff* infravermelho (IR),  $k_0$  é uma escala de referência e  $\omega_q = \frac{4}{\pi}(1 - \frac{\pi^2}{144})$ . Pode ser mostrado que para uma escolha adequada do momento de escala teremos  $k_0 = 0$ , desde que  $G_N = G(k_0 \rightarrow 0) = G_0$  coincida com o valor medido para a constante de Newton. Pode ser visto que modelos onde o espaço-tempo é plano,  $k$  pode ser escrito como uma função da posição com dimensão de inverso de comprimento. Porém, essa dependência das coordenadas pode atrapalhar a análise em espaços curvos. Para eliminar essa dependência, podemos considerar a seguinte prescrição em espaços curvos  $\omega k^2 = \xi f(\chi)$ , onde  $\chi$  é uma função dos invariantes de curvatura e  $\xi$  é uma constante que é o parâmetro da teoria [62]. Com isso, a nova função “constante” de acoplamento (1.3) pode ser escrita como

$$G(\chi) = \frac{G_0}{1 + f(\chi)}, \quad (1.4)$$

onde  $f(\chi) = \xi/\chi$  é chamada função *cutoff*. Portanto, as correções quânticas devido à Gravidade Assintoticamente Segura modificam a ação de Einstein-Hilbert apenas substituindo a constante de Newton por uma função dos invariantes de curvatura, dado pela Eq. (1.4), fornecendo a seguinte ação modificada [62]

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{G(\chi)} R + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m. \quad (1.5)$$

Variando a ação acima com respeito à métrica e usando o princípio da ação mínima obtemos as equações de campo modificadas [62]

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G(\chi) T_{\mu\nu} + G(\chi) X_{\mu\nu}(\chi), \quad (1.6)$$

onde  $T_{\mu\nu}$  é o tensor-momento energia clássico e  $X_{\mu\nu}$  é um tensor covariante que surge devido às diferenciações de  $G(\chi)$  quando variamos a ação com respeito à métrica. Esse tensor dita a dinâmica das correções quânticas codificadas em  $G(\chi)$ , e é definido como:

$$X_{\mu\nu}(\chi) = (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) G(\chi)^{-1} - \frac{1}{2} \left( R \mathcal{K}(\chi) \frac{\delta \chi}{\delta g^{\mu\nu}} + \right.$$

$$\partial_\kappa \left( R \mathcal{K}(\chi) \frac{\partial \chi}{\partial (\partial_\kappa g^{\mu\nu})} \right) + \partial_\kappa \partial_\lambda \left( R \mathcal{K}(\chi) \frac{\partial \chi}{\partial (\partial_\lambda \partial_\kappa g^{\mu\nu})} \right), \quad (1.7)$$

com  $\mathcal{K}(\chi) \equiv \frac{2\partial G(\chi)/\partial \chi}{G(\chi)^2}$  [63]. Esse tensor também pode ser pensado como o tensor momento-energia que fornece o 4-momento de  $G(\chi)$ .

O tensor  $X_{\mu\nu}$  depende do parâmetro  $\chi$ , que expandido até primeira ordem fornece [62]

$$X_{\mu\nu} \simeq \nabla_\mu \nabla_\nu G(\chi)^{-1} - g_{\mu\nu} \square G(\chi)^{-1}. \quad (1.8)$$

Como já foi mencionado, o parâmetro  $\chi$  é definido em termos de invariantes de curvatura construídos a partir das componentes do tensor de Riemann, tais como  $R, R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}, R_{\alpha\beta\kappa\lambda} R^{\alpha\beta\kappa\lambda}, \dots$  [62]. Evidentemente há muitas escolhas possíveis para o parâmetro  $\chi$  [75]. No entanto, trabalhos com soluções não-vácuo sugerem algumas escolhas simples, tais como  $\chi = R^{-1}$  or  $\chi = (R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta})^{1/2}$  [63].

Nesta direção, as condições de atravessabilidade para buracos de minhoca considerando os efeitos quânticos devido à Gravidade Assintoticamente Segura (GAS) foram investigados em [64]. Considerando como fonte um fluido que obedece uma equação de estado linear, isto é, com a tensão sendo uma função linear da densidade de energia do fluido, eles mostraram que a solução de Morris-Thorne ainda é atravessável nesse contexto, dependendo dos valores dos parâmetros. Além disso, eles encontraram a possibilidade de buracos de minhoca atravessáveis com matéria não-exótica, desde que eles sejam pseudoesféricos. Porém, os autores consideraram o caso especial de uma equação de estado linear com parâmetro de estado (a constante de proporcionalidade) sendo constante e isto exclui um grande número de modelos possíveis.

Tendo em vista este fato, nós estudamos as condições de atravessabilidade de buracos de minhoca considerando agora um fluido com uma equação de estado mais geral onde o parâmetro de estado dependente da posição como fonte (embora ainda haja uma relação linear entre tensão e densidade de energia). Desta forma, podemos separar o parâmetro de estado em uma parte independente dos efeitos da GAS e outra dependente da GAS. Para isto, utilizamos o escalar de Ricci para definir a função *cutoff*, que terá a forma  $f = \xi R$ , ambos para os casos esféricos e pseudoesféricos. Mostramos que em ambos os casos a função forma será escrita em termos de funções hipergeométricas. Além disso, ao contrário de que foi notado em [64], mostramos que, no caso de um fluido com parâmetro de estado dependente da posição, haverá a possibilidade de o buraco de minhoca esférico ser atravessável.

Além disso, os autores em [64] se restringiram apenas a regiões próximas à garganta e, portanto, não forneceram informações sobre a distribuição de matéria ao longo do espaço-tempo gerado pelo buraco de minhoca. Com o objetivo de testar isso, os autores da Ref. [65]



estudaram os efeitos quânticos no buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov devido à GAS. Eles encontraram que no contexto da GAS é possível ter matéria não-exótica na garganta desse buraco de minhoca. Porém isso necessariamente leva a regiões do espaço-tempo com matéria exótica do tipo *Phantom*. Com isso, eles especularam se um fluido *Phantom* é sempre necessário em tais cenários.

Em particular, consideramos correções para tipos específicos de buracos de minhoca devido à GAS, mais especificamente, os Schwarzschild-*like* e os de Ellis-Bronnikov generalizados. Para isto utilizamos modelos do escalar de Ricci, o quadrado do tensor de Ricci e o escalar de Kretschmann. Nós iremos mostrar que apenas no caso assintoticamente plano (Schwarzschild) as condições radiais de energia podem ser satisfeitas na garganta, dependendo do valor de seu raio  $r_t$ . Porém isto necessariamente leva à presença de matéria exótica do tipo Quintessência na garganta. Em contraste, no caso de um excesso de ângulo sólido na forma assintótica, temos a possibilidade de ter regiões com matéria não-exótica, dependendo dos valores de  $r_t$  e da constante  $\beta$ , mas, com as condições radiais de energia não satisfeitas nesse caso. Enquanto para o caso de Ellis-Bronnikov generalizados, vamos mostrar que as correções na garganta devido à GAS resolve o problema da matéria exótica apenas no modelo que usa o escalar de Ricci, e apenas para um tipo específico de buraco de minhoca nesta classe.

Os capítulos desta tese se dividem da seguinte forma: no capítulo 2 mostramos a construção feita por Morris e Thorne para tentar construir soluções de buracos de minhoca que são atravessáveis, no contexto da relatividade geral, e mostramos que para isto será necessário a presença de matéria exótica. No capítulo 3 introduzimos o método assintoticamente seguro para descrever os efeitos quânticos no campo gravitacional (GAS), as correções que iremos utilizar para tentar eliminar a exigência da matéria exótica em buracos de minhoca. Depois, no capítulo 4, utilizamos as modificações/correções devido à GAS para estudar as condições de atravessabilidade e a presença de matéria exótica em duas classes de buracos de minhoca, os esféricos e os pseudoesféricos. No capítulo 5 aplicamos estes conceitos em tipos específicos de buracos de minhoca, no caso, os buracos de minhoca Schwarzschild-*like* (que possui o buraco de minhoca Schwarzschild como caso particular) e os buracos de minhoca Ellis-Bronnikov generalizados. Finalmente, o trabalho é concluído e é fornecido as considerações finais.

## 2 BURACOS DE MINHOCAS ATRAVESSÁVEIS: A SOLUÇÃO DE MORRIS-THORNE

Neste capítulo é mostrado a construção de buracos de minhoca atravessáveis feita por Morris e Thorne [3], cuja métrica será o objeto fundamental que iremos estudar nesta tese. Para isso, fornecemos uma breve revisão dos fundamentos da relatividade geral, introduzindo o formalismo tensorial e convenções que iremos seguir ao decorrer da tese. Depois, falamos um pouco sobre a solução de Schwarzschild e como ela motivou a construção das pontes de Einstein-Rosen, levando a interpretação de um “túnel” conectando diferentes regiões do espaço-tempo. Seguimos então com as condições de energia da relatividade geral, uma forma de classificar as fontes como físicas ou não-físicas e, enfim, falaremos da métrica de Morris-Thorne e todas as suas características no contexto clássico da Relatividade Geral.

### 2.1 Relatividade Geral

Com o desenvolvimento da teoria especial da relatividade, houve a imediata necessidade de corrigir a teoria gravitacional de Newton, uma vez que no caso Newtoniano a gravidade é uma interação que se propaga com velocidade infinita. Partindo de experimentos de pensamento, Einstein desenvolveu o princípio da equivalência, a partir do qual o levou a concluir que o efeito gravitacional se manifesta através de uma curvatura do espaço e do tempo em regiões próximas à fonte do campo. Matematicamente, isso significa que a métrica do espaço-tempo de Minkowski (espaço-tempo plano utilizado na relatividade especial), denotada por  $\eta_{\mu\nu}$ , deve ser substituída por uma métrica que descreve um espaço-tempo curvo, o qual denotaremos por  $g_{\mu\nu}$ . Dessa forma, a métrica “mede” o efeito gravitacional, sendo portanto, considerado os potenciais da teoria. Com isso, podemos escrever para a forma geral de um elemento de linha de um espaço curvo

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.1)$$

onde foi utilizado a convenção de soma de Einstein. Índices gregos variam de 0 a 3, sendo 0 o índice referente à direção temporal, enquanto os índices 1 a 3, representado aqui por letras latinas, as direções espaciais.

O formalismo matemático utilizado na relatividade geral é o da Geometria Diferencial, a partir do qual o espaço-tempo é tratado como uma variedade (falando a grosso modo, uma generalização do conceito de superfície) 4-dimensional munido com uma métrica de assinatura  $(-, +, +, +)$  (essa é a assinatura que iremos seguir daqui em diante).

A partir dos potenciais da teoria, podemos construir a conexão, ou símbolos de

Christoffel, através da expressão

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} \equiv \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (\partial_{\gamma} g_{\sigma\beta} + \partial_{\beta} g_{\sigma\gamma} - \partial_{\sigma} g_{\beta\gamma}). \quad (2.2)$$

A conexão é extremamente importante pois é a partir dela que podemos definir a operação de diferenciação de forma covariante sob espaços curvos. Além disso, a conexão está intimamente ligada à aceleração de corpos caindo livremente em um campo gravitacional. No caso da partícula caindo apenas sob influência da gravitação, Einstein argumentou, usando o princípio da equivalência, que a trajetória de uma tal partícula deve ser uma geodésica (caminho mais curto que a partícula pode seguir, análogo à linha reta no caso euclidiano). Dessa forma, a curva geodésica pode ser definida como aquela que minimiza a distância própria total, isto é

$$\delta \left( \int_{\Gamma} ds \right) \equiv \delta \left( \int_{\Gamma} \sqrt{g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}} \right) = 0, \quad (2.3)$$

que usando a distância própria como parâmetro, de tal forma que um vetor tangente à curva seja dado pelo 4-vetor  $v^{\mu} \equiv dx^{\mu}/ds$ , obtemos a equação da curva geodésica

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{ds^2} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{ds} \frac{dx^{\beta}}{ds} = 0. \quad (2.4)$$

Para uma partícula teste massiva seguindo um caminho do tipo tempo, é mais natural parametrizá-la usando o tempo próprio  $(d\tau)^2 = -(ds)^2$ , onde usamos a seguinte definição:

$$\text{Tipo-Tempo} \quad \Leftrightarrow \quad g_{\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu} < 0$$

$$\text{Tipo-Luz} \quad \Leftrightarrow \quad g_{\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu} = 0$$

$$\text{Tipo-Espaço} \quad \Leftrightarrow \quad g_{\mu\nu} V^{\mu} V^{\nu} > 0,$$

onde  $V^{\mu}$  é um vetor arbitrário definido sobre o espaço-tempo em questão.

A partir da conexão e suas derivadas podemos definir o tensor de curvatura de Riemann, que, como veremos, está associado a diferença de aceleração entre partículas caindo livremente apenas sob o efeito gravitacional (os efeitos de maré). Esse tensor é definido como:

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} \equiv \partial_{\gamma} \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta} - \partial_{\delta} \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\gamma} \Gamma^{\sigma}_{\beta\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\delta} \Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma}. \quad (2.5)$$

Podemos obter outros tensores importantes a partir de contrações com o tensor de Riemann. Definimos o tensor de Ricci, escalar de Ricci e tensor de Einstein, respectivamente,

como

$$R_{\mu\nu} \equiv R_{\alpha\mu\beta\nu}g^{\alpha\beta} \quad (2.6)$$

$$R \equiv R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} \quad (2.7)$$

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}. \quad (2.8)$$

Finalmente, as equações de campo de Einstein, que dita a dinâmica da métrica, isto é, do campo gravitacional, é dada pela expressão

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.9)$$

em um sistema de unidades onde a constante de Newton  $G$  e a velocidade da luz no vácuo  $c$  é igual a unidade. O tensor  $T_{\mu\nu}$  é o chamado tensor momento-energia, o termo de fonte das equações de campo. Explicitamente, suas componentes podem ser divididas da seguinte forma:

$$T_{\mu\nu} \equiv \begin{bmatrix} \rho & S_j \\ S_i & \pi_{ij} \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

onde  $\rho$  é a densidade de energia,  $S_i$  o fluxo de energia (uma versão generalizada do vetor de Poynting do eletromagnetismo) e  $\pi_{ij}$  os termos de pressão (análogo ao tensor de tensão de Maxwell). Pode ser mostrado que em regiões de vácuo, isto é, fazendo  $T_{\mu\nu} = 0$  em (2.9), as equações de campo podem ser escritas na simples forma:

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.11)$$

É importante salientar que a Relatividade Geral é uma teoria clássica de campo e, portanto, pode ser derivada através de um princípio variacional. A ação que determina as equações de campo (2.9) é a chamada ação de Einstein-Hilbert dada por

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_M, \quad (2.12)$$

onde  $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$  é o determinante da métrica, sendo a integração feita por todo o espaço-tempo.  $\mathcal{L}_M$  representa a densidade Lagrangiana do conteúdo de matéria e energia que serve como fonte para o campo. Usando o princípio da mínima ação em (2.12) e identificando as componentes do tensor momento-energia  $T_{\mu\nu}$  como:

$$T_{\mu\nu} = 2 \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_M, \quad (2.13)$$

obtemos as equações de campo da Relatividade Geral (2.9). Para ver o cálculo detalhado de como obter as equações de campo através da ação de Einstein-Hilbert, veja, por exemplo [66].

As equações de campo de Einstein fornecem um conjunto de 10 equações independentes, não-lineares e acopladas, sendo, em geral, bastante difícil de resolvê-la analiticamente. Porém, foi notado por Karl Schwarzschild, em 1916, que as equações de campo podem ser simplificadas ao considerarmos, *a priori*, algum tipo de simetria na fonte do campo. De fato, foi assim que o próprio Schwarzschild encontrou a primeira solução exata das equações de Einstein. A solução de Schwarzschild foi fundamental pois a partir desta pôde-se comprovar a teoria de Einstein, resolvendo alguns problemas que a teoria de Newton não resolvia, tais como o avanço do periélio de Mercúrio e o desvio para o vermelho gravitacional (“*redshift*”). Porém, aqui iremos focar no fato de a solução de Schwarzschild descrever estranhos objetos denominados “Buracos Negros”, que mais tarde inspirou Einstein e Rosen a construir a primeira solução do tipo “Buraco de minhoca”, que constitui o objeto central desta tese.

## 2.2 A solução de Schwarzschild

A solução de Schwarzschild constitui a solução mais simples das equações de Einstein (2.9). Essa solução é particularmente interessante para nós pois introduz importantes conceitos como o de horizonte de eventos e singularidade. Além disso, essa mesma solução foi usada para construir as pontes de Einstein e Rosen, que mais tarde foram denominados buracos de minhoca.

Porém, antes de determinarmos a forma da métrica de Schwarzschild, vamos introduzir o conceito de um espaço-tempo estático e estacionário. Dizemos que um espaço-tempo é estacionário se as componentes de sua métrica são independentes do tempo coordenado, isto é, se  $\partial_0 g_{\alpha\beta} = 0$ . Além disso, o espaço-tempo será estático se, além de a métrica não depender explicitamente do tempo, todos os termos cruzados do tipo  $g_{0i}$  forem nulos. Precisamente falando, estaticidade significa que sempre teremos um campo vetorial de Killing (campo vetorial introduzidos no espaço-tempo que preservam a forma da métrica) ortogonal à família de superfícies  $t = \text{constante}$ .

Com isso em mente, pode ser argumentado que sempre podemos encontrar um sistema de coordenadas em que uma métrica esfericamente simétrica será escrita como [68]

$$ds^2 = -e^{\nu(t,r)} dt^2 + e^{\lambda(t,r)} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2, \quad (2.14)$$

onde  $d\Omega_2^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$  é o elemento de linha de uma 2-esfera e  $\nu$  e  $\lambda$  funções genéricas das coordenadas temporal  $t$  e radial  $r$ . A solução de Schwarzschild consiste em resolver as equações de campo no vácuo (2.11) usando o *ansatz* (2.14), fornecendo o seguinte sistema de equações

diferenciais:

$$e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 0, \quad (2.15)$$

$$e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0, \quad (2.16)$$

$$\dot{\lambda} = 0, \quad (2.17)$$

onde o primo denota diferenciação com respeito a coordenada radial  $r$  e o ponto diferenciação com respeito a coordenada temporal  $t$ . Adicionando as equações (2.15) e (2.16) obtemos

$$\lambda' + \nu' = 0, \quad (2.18)$$

que integrando fornece

$$\lambda + \nu = h(t), \quad (2.19)$$

onde  $h(t)$  é uma função arbitrária da coordenada temporal  $t$ . A equação (2.17) implica que  $\lambda$  deve ser uma função apenas de  $r$  e então a (2.15) torna-se uma equação diferencial ordinária, que pode ser escrita como

$$e^{-\lambda} - r e^{-\lambda} \lambda' = 1 \rightarrow (r e^{-\lambda})' = 1, \quad (2.20)$$

que pode ser resolvida por uma integração direta fornecendo

$$e^{\lambda} = \left( 1 - \frac{C}{r} \right)^{-1}, \quad (2.21)$$

onde  $C$  é uma constante de integração arbitrária. Finalmente, usando (2.19) e redefinindo a coordenada temporal como  $t = \int^t du e^{h(u)/2}$ , a métrica pode ser escrita como

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{C}{r} \right)^{-1} dt^2 + \left( 1 - \frac{C}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2. \quad (2.22)$$

A interpretação da constante de integração  $C$  é feita tomando o limite de campo fraco, a partir do qual é mostrado que, nesse limite, a componente 00 da métrica pode ser associada ao potencial Newtoniano  $\Phi(r) = -M/r$  através da expressão  $g_{00} \approx 1 + 2\Phi(r)$ . Dessa forma, comparando a componente 00 de (2.22) com a métrica no limite de campo fraco obtém-se  $C = 2M$ , isto é, a constante de integração está associada à massa da fonte do campo. Finalmente, obtemos a forma da solução de Schwarzschild:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2. \quad (2.23)$$

Essa solução pode ser interpretada como o campo gravitacional gerado por uma distribuição estática e esférica de massa  $M$ , análogo ao caso Newtoniano do potencial gravitacional de uma

massa pontual.

Prontamente se vê que a solução de Schwarzschild (2.23) possui dois pontos, um em  $r = 0$  e outro em  $r = 2M$ , em que a métrica diverge. A fim de tentar entender o que significam essas divergências, vamos determinar o intervalo de tempo que um raio de luz emitido por um objeto que cai livremente em  $r = 2M$  leva para alcançar um observador que se localiza além dessa hipersuperfície. Para isso, fazemos  $ds^2 = 0$  em (2.23) e consideramos, por simplicidade, que o movimento ocorre na direção radial, obtendo

$$\Delta t = \int_{r_1}^{r_2} dr \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{00}}}, \quad (2.24)$$

onde  $r_1$  é a posição do objeto que emite o raio de luz e  $r_2$  a posição do observador que recebe o sinal. Resolvendo a integral acima para a métrica (2.23) ficamos com:

$$\Delta t = r + 2M \ln(r - 2M) \Big|_{r_1}^{r_2}. \quad (2.25)$$

Imediatamente vemos que, quando o objeto atinge a superfície  $r = 2M$  teremos  $\Delta t \rightarrow \infty$ . Isso significa que a luz emitida pelo objeto leva um tempo infinito para atingir o observador em  $r_2$  e, portanto, qualquer informação sobre o objeto é perdida quando este cruza  $r = 2M$ . De fato, toda a região  $r < 2M$  é inacessível para qualquer observador externo. Essa região foi denominada buraco negro de Schwarzschild, com sua fronteira  $r = 2M$  definindo o que chamamos horizonte de eventos. Dessa forma, vemos que as coordenadas  $(t, r, \theta, \phi)$  não mapeiam a região interna do buraco negro, sendo, portanto, necessário fazer mudanças de coordenadas para incluirmos também essa região. Para isso, primeiramente introduzimos a coordenada radial tortoise  $r_*$

$$r_* = r + 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right), \quad (2.26)$$

que faz a métrica (2.23) tomar a forma

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)(-dt^2 + dr_*^2) + r^2 d\Omega_2^2. \quad (2.27)$$

Depois, introduzimos as coordenadas Kruskal  $u = t - r_*$  e  $v = t + r_*$  para obter

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) du dv + r^2 d\Omega_2^2. \quad (2.28)$$

Nessas coordenadas as trajetórias dos raios de luz são dados por  $u = \text{constante}$  e  $v = \text{constante}$ . Finalmente, para mapear a região dentro do horizonte de eventos é necessário utilizar as coordenadas Kruskal-Szekeres, definidas como  $U = -4M \exp(-u/4M)$  e  $V = 4M \exp(v/4M)$ , levando à métrica:

$$ds^2 = -\frac{2M}{r} e^{-\frac{r}{2M}} dU dV + r^2 d\Omega_2^2, \quad (2.29)$$

onde  $r = r(U, V)$ . Vemos que nessas coordenadas a solução de Schwarzschild é válida em toda região com exceção da origem  $r = 0$ . Portanto, a singularidade  $r = 2M$  é apenas um defeito do sistema de coordenadas, sendo chamada de singularidade removível ou coordenada, enquanto a singularidade em  $r = 0$  é uma singularidade do próprio espaço-tempo, não sendo possível removê-la apenas por transformações de coordenadas. Essa característica também é explicitada ao calcularmos invariantes de curvatura, como por exemplo, o escalar de Kretschmann, que para a métrica de Schwarzschild (2.23) fornece

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48M^2}{r^6}, \quad (2.30)$$

que diverge em  $r = 0$  e é finito em  $r = 2M$ . Pode-se pensar que a presença de singularidades seria um caso particular da solução de Schwarzschild. Porém, outras soluções apresentaram a estrutura de horizonte de eventos englobando a singularidade na origem, como é o caso da solução de Reissner-Nordström, os buracos negros carregados. Essas noções de horizonte de eventos e singularidade do espaço-tempo levaram Einstein e Rosen a tentar descrever um modelo de partículas usando a Relatividade Geral, sem que o espaço-tempo em questão apresentasse singularidades. Isso, como veremos, levou ao conceito de uma “ponte” conectando duas regiões do espaço-tempo.

### 2.3 Pontes de Einstein-Rosen

Classicamente falando, partículas elementares e buracos negros apresentam certas características em comum, no sentido de que ambos são objetos pontuais que podem ser descritos por um pequeno conjunto de parâmetros. Para um buraco negro ser descrito completamente em relatividade geral, basta conhecer a massa, carga e momento angular associado aos campos que caracterizam o buraco negro em questão. De fato, isso se tornou uma conjectura bastante conhecida na literatura chamada “*No-Hair Theorem*”. No caso de partículas elementares, basta, assim como nos buracos negros, conhecer sua massa, carga e spin (uma forma intrínseca de momento angular que se assemelha bastante com o momento angular clássico). A única e grande diferença entre partículas e buracos negros se deve ao fato que os últimos apresentam um horizonte de eventos. Nessa época não se tinha uma definição precisa de horizonte de eventos, fazendo com que fosse tratada como uma singularidade do próprio espaço-tempo. Foi justamente esse o ponto que levou Einstein e Rosen a tentar remover o horizonte de eventos das soluções de buracos negros a fim de descrever partículas usando a Relatividade Geral, levando consequentemente ao conceito de uma ponte [1].

Para descrever partículas elementares usando a Relatividade Geral deve ser exigido que o espaço-tempo seja bem comportado fora da região onde a massa da partícula está



concentrada. Nesse sentido, claramente não deve haver a presença de horizonte de eventos se quisermos descrever uma partícula. Sabemos que o horizonte de eventos pode ser removido ao usar um sistema de coordenadas que mapeia a região externa e interna do buraco negro. Porém, Einstein e Rosen removeram a singularidade das soluções de Schwarzschild e Reissner-Nordström de uma maneira levemente diferente. Iremos mostrar aqui apenas o caso da solução de Schwarzschild e somente comentar o caso de Reissner-Nordström.

A fim de remover a singularidade da solução de Schwarzschild (2.23) Einstein e Rosen introduziram a nova coordenada radial  $u$ :

$$u^2 = r - 2M, \quad (2.31)$$

que faz a métrica de Schwarzschild tomar a forma

$$ds^2 = -\left(\frac{u^2}{u^2 + 2M}\right) dt^2 + 4(u^2 + 2M) du^2 + (u^2 + 2M)^2 d\Omega_2^2. \quad (2.32)$$

Note que nesse sistema de coordenadas o horizonte de eventos,  $r = 2M$ , se localiza na origem  $u = 0$  e, portanto, toda a região interna do buraco negro de Schwarzschild, incluindo a singularidade da métrica em  $r = 0$ , é excluída. Dessa forma, o espaço-tempo torna-se livre de singularidades. Note também que nesse novo sistema de coordenadas,  $u$  pode tomar valores positivos e negativos com o alcance  $-\infty < u < +\infty$ . A superfície em  $u = 0$  possui o menor valor de área permitido para esse espaço-tempo, dado por  $A = 16\pi M^2$ , conectando o “pedaço positivo” do espaço-tempo com o “pedaço negativo”, formando uma espécie de garganta conectando essas regiões do espaço-tempo. A métrica (2.32) foi denominada Ponte de Einstein-Rosen sendo também conhecida na literatura como pontes neutras, uma vez que essa métrica foi obtida de um buraco negro sem carga.

Einstein e Rosen também construíram essa estrutura de ponte na solução de Reissner-Nordström a fim de usá-la para descrever o elétron. Porém, eles mostraram que isso não foi possível pois para a singularidade ser removida e a ponte ser construída seria necessário uma massa nula e cargas imaginárias. Além disso, mesmo se impusermos a massa e a carga do elétron na solução de Reissner-Nordström, implicaria na presença inevitável de uma singularidade nua (a singularidade da métrica sem a presença do horizonte de eventos). Portanto, a solução de Reissner-Nordström não pode ser usada para descrever o elétron.

Pode ser natural nos perguntarmos se um objeto vindo de uma região assintótica  $u = -\infty$  consegue atravessar a ponte e alcançar a outra região assintótica  $u = +\infty$ . Porém, esse tipo de solução não é atravessável por vários motivos. Primeiro, forças de maré devido à não-homogeneidade do campo gravitacional na garganta são da mesma ordem de magnitude que no horizonte de eventos de um buraco negro de Schwarzschild. Também, foi mostrado que as

pontes de Einstein-Rosen são dinâmicas e não estáticas, oscilando com uma garganta de circunferência zero (regiões desconectadas) até uma circunferência máxima. Esse processo acontece tão rápido que nem mesmo a luz consegue atravessá-lo. O fato de a métrica de Einstein-Rosen (2.32) não ser atravessável se deve ao fato de que este é o próprio buraco negro de Schwarzschild escrito em um sistema de coordenadas diferente. Se um aventureiro tentar atravessar uma ponte de Einstein-Rosen ele estará caindo em um buraco negro.

A solução de Einstein-Rosen foi a primeira do que chamamos hoje de “Buracos de Minhoca”, como foi denominado por John Wheeler em 1957. Porém, a primeira construção geral de uma classe de soluções deste tipo só foi desenvolvida em 1988 por Morris e Thorne. Para isso, eles propuseram uma forma padrão para a métrica tal que esta obedeça à certas restrições físicas. Porém, como veremos, para que uma tal solução seja atravessável, seria necessário a presença de matéria exótica. Para entendermos melhor o que significa uma matéria ser “exótica” vamos primeiro determinar o que as classifica na relatividade geral, introduzindo as condições de energia.

## 2.4 Condições de Energia

O problema de resolver as equações de campo da Relatividade Geral (2.9) consiste em determinar as componentes do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  dada uma fonte de matéria e energia, codificada no tensor momento-energia  $T_{\mu\nu}$ . Porém, nada nos impede de seguir o caminho inverso, isto é, podemos fornecer a forma desejada da métrica e determinar as possíveis fontes que geram essa métrica específica. Dessa forma, haverá uma grande arbitrariedade nas componentes do tensor momento-energia, podendo levar à fontes com características não-físicas, tais como uma densidade de energia negativa. As equações de Einstein impõem nenhuma restrição sobre o conteúdo de matéria e energia da qual  $T_{\mu\nu}$  é obtido. Nesse sentido, Hawking e Ellis[69] determinaram certas condições sobre o tensor momento-energia a fim de limitar essas arbitrariedades, de tal forma que toda fonte física devam obedecê-las, pelo menos a nível clássico. Essas condições são basicamente uma forma mais geral de dizer que as fontes do campo gravitacional devem ter uma densidade de energia positiva com um domínio sobre a pressão. Essas condições foram chamadas condições de energia e há vários tipos de condições dependendo da situação física em questão. Essas condições são extremamente importantes pois, além de classificar a matéria como física ou não, foram usadas para provar uma série de teoremas tais como os de singularidade.

As condições de energia logicamente devem ser válidas para qualquer observador e, portanto, devem ser declaradas de uma forma independente de coordenadas, isto é, através de escalares construídos a partir de  $T_{\mu\nu}$ . Para isso, algumas condições são escritas utilizando um vetor do tipo-tempo  $v^\mu$ , normalizado e apontando para a direção futura, representando a

4-velocidade de um observador. Utilizando uma base ortonormal podemos escrever esse vetor como[70]

$$v^\mu = \gamma(\hat{e}_{(0)}^\mu + a\hat{e}_{(1)}^\mu + b\hat{e}_{(2)}^\mu + c\hat{e}_{(3)}^\mu), \quad (2.33)$$

onde  $\gamma = (1 - a^2 - b^2 - c^2)^{-1/2}$  é obtido através da condição de normalização  $v_\mu v^\mu = -1$  sendo  $a, b$  e  $c$  funções arbitrárias das coordenadas obedecendo, nesse caso, à restrição  $a^2 + b^2 + c^2 < 1$ . Outras condições de energia são expressas em termos de um vetor do tipo-luz  $l^\mu$  que pode ser expandido na forma

$$l^\mu = \hat{e}_{(0)}^\mu + a'\hat{e}_{(1)}^\mu + b'\hat{e}_{(2)}^\mu + c'\hat{e}_{(3)}^\mu, \quad (2.34)$$

onde dessa vez  $\gamma = 1$  pois para todo vetor do tipo luz teremos  $l_\mu l^\mu = 0$ , com  $a', b'$  e  $c'$  sendo novamente funções arbitrárias das coordenadas obedecendo à restrição  $a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1$ .

O conjunto de vetores  $\hat{e}_{(A)}^\mu$  formam uma base ortonormal para o referencial local do observador, definidos a partir das relações:

$$g_{\mu\nu}\hat{e}_{(A)}^\mu\hat{e}_{(B)}^\nu = \hat{e}_{\mu(A)}\hat{e}_{(B)}^\mu = \eta_{AB}, \quad (2.35)$$

$$\hat{e}_\mu^{(A)}\hat{e}_{(B)}^\mu = \delta_B^A, \quad (2.36)$$

onde  $\mu, A = 0, 1, 2, 3$  são os índices do referencial global e local, respectivamente, e  $\delta_B^A$  a delta de Kronecker. A relação (2.35) nos diz que o tensor métrico nesse referencial local é dado pela métrica de Minkowski  $\eta_{AB} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$  da relatividade especial, exprimindo matematicamente o princípio da equivalência de Einstein, enquanto a segunda relação (2.36) é o que garante a ortonormalidade desses vetores. Note que podemos obter a métrica no referencial global aplicando a relação (2.36) em (2.35), obtendo

$$g_{\mu\nu} = \eta_{AB}\hat{e}_\mu^{(A)}\hat{e}_\nu^{(B)}, \quad (2.37)$$

e o mesmo vale para a sua inversa  $g^{\mu\nu} = \eta^{AB}\hat{e}_{(A)}^\mu\hat{e}_{(B)}^\nu$ , onde  $\eta_{AB}\eta^{BC} = \delta_A^C$ . Vamos também expandir o tensor momento-energia nessa base ortonormal a fim de tornar mais claro o que significam as condições de energia, obtendo:

$$T^{\mu\nu} = \rho_0\hat{e}_{(0)}^\mu\hat{e}_{(0)}^\nu + p_1\hat{e}_{(1)}^\mu\hat{e}_{(1)}^\nu + p_2\hat{e}_{(2)}^\mu\hat{e}_{(2)}^\nu + p_3\hat{e}_{(3)}^\mu\hat{e}_{(3)}^\nu, \quad (2.38)$$

onde  $\rho_0$  e  $p_i$  são, respectivamente, a densidade de energia e as pressões principais. Com isso, declaramos as principais condições de energia da Relatividade Geral:

- **Condição Fraca de Energia:** Afirma que para qualquer vetor do tipo-tempo  $v^\mu$  apontado para o futuro, teremos  $T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \geq 0$ . Usando as equações (2.33) e (2.38) essa condição nos

leva a:

$$\rho_0 + a^2 p_1 + b^2 p_2 + c^2 p_3 \geq 0. \quad (2.39)$$

Fazendo  $a = b = c = 0$  na expressão acima ficamos com a famosa exigência de que a densidade de energia deve ser estritamente positiva, isto é,  $\rho_0 \geq 0$ . Fazendo o caso particular  $b = c = 0$  e notando que nesse caso  $a^2 < 1$  (lembre-se que a restrição nesse caso é  $a^2 + b^2 + c^2 < 1$ ), ficamos com a seguinte relação:

$$\rho_0 + p_1 \geq 0. \quad (2.40)$$

A mesma lógica pode ser aplicada para as demais pressões principais, de tal forma que a condição fraca de energia implica na seguinte restrição:

$$\rho_0 \geq 0 \text{ e } \rho_0 + p_i \geq 0, \quad (2.41)$$

onde  $i = 1, 2, \text{ ou } 3$ . Fisicamente, a condição fraca de energia significa que um observador sempre irá medir uma densidade de energia positiva com as pressões, embora permitidas serem negativas, limitadas inferiormente por  $p_i \geq -\rho$ .

- **Condição Nula de Energia:** Afirma que para qualquer vetor do tipo-luz  $l^\mu$  apontado para o futuro, teremos  $T_{\mu\nu} l^\mu l^\nu \geq 0$ . Podemos usar as equações (2.34) e (2.38) para tornar essa afirmação mais concreta, obtendo:

$$\rho_0 + a'^2 p_1 + b'^2 p_2 + c'^2 p_3 \geq 0. \quad (2.42)$$

Usando o mesmo raciocínio que no caso anterior, podemos fazer  $b' = c' = 0$  e usar o fato de que nesse caso  $a'^2 = 1$  (lembre-se que a restrição aqui é  $a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1$ ) para encontrar que  $\rho_0 + p_1 \geq 0$ . Podemos novamente seguir a mesma lógica para as demais pressões e obter de forma geral:

$$\rho + p_i \geq 0, \quad (2.43)$$

onde  $i = 1, 2 \text{ ou } 3$ . Note que a condição nula de energia é menos restritiva que a condição fraca, uma vez que é permitido um maior conjunto de valores permitidos para as pressões.

- **Condição Forte de Energia:** Para entender a motivação da condição forte é necessário reescrever as equações de Einstein (2.9) na conveniente forma  $R_{\mu\nu} = 8\pi(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2}g_{\mu\nu})$ , onde  $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$  é o traço do tensor momento-energia. Note que se contraírmos o tensor de Ricci com o vetor do tipo-tempo normalizado, direcionado para o futuro, denotado aqui por  $v^\mu$  obtemos:

$$R_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = 8\pi \left( T_{\mu\nu} v^\mu v^\nu + \frac{T}{2} \right), \quad (2.44)$$

onde foi usado  $g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = v^\mu v_\mu = -1$ . Vimos que o primeiro termo da expressão fornece a densidade de energia medida no referencial próprio do observador a qual deve ser estritamente positiva, pela condição fraca de energia. É natural restringirmos as tensões, codificadas no traço do tensor momento-energia  $T$ , de tal forma que estas não superem a contribuição da energia e para isso é exigido que:

$$T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu + \frac{T}{2} \geq 0, \quad (2.45)$$

que é a forma precisa da condição forte de energia. Podemos novamente utilizar as expansões (2.33) e (2.38) para obter:

$$\gamma^2(\rho_0 + a^2 p_1 + b^2 p_2 + c^2 p_3) \geq \frac{1}{2}(\rho_0 - p_1 - p_2 - p_3). \quad (2.46)$$

Fazendo  $a = b = c = 0$ , teremos  $\gamma = 1$  e ficamos com

$$\rho_0 + p_1 + p_2 + p_3 = \rho_0 + \sum_i p_i \geq 0. \quad (2.47)$$

Impondo agora  $b = c = 0$  teremos  $\gamma^2 = 1 - a^2$  e, após a reorganização dos termos, a condição forte implica que

$$\rho_0 + p_1 + (p_2 + p_3) \frac{1 - a^2}{1 + a^2} \geq 0, \quad (2.48)$$

que fazendo o limite de  $a \rightarrow 1$  chega-se à conclusão  $\rho_0 + p_1 \geq 0$ . Raciocínios análogos nos leva a essa mesma restrição para as outras pressões  $p_2$  e  $p_3$ , de tal forma que as restrições da condição forte nos leva à:

$$\rho_0 + p_i \geq 0 \text{ e } \rho_0 + \sum_i p_i \geq 0, \quad (2.49)$$

onde  $i = 1, 2, 3$ . Claramente se vê que a condição forte é mais restritiva que a condição nula de energia e que se há a violação da mesma automaticamente estaremos violando a condição forte.

- **Condição Dominante de Energia:** Essa condição afirma que o fluxo de matéria deve sempre viajar com uma velocidade menor que a da luz no vácuo. Para isso, devemos impor que 4-corrente representando esse fluxo não seja um vetor do tipo-espaço. A 4-corrente medida por um observador com 4-velocidade  $v^\mu$  é dado pela expressão  $-T^\mu{}_\nu v^\nu$  e para que esta quantidade não seja do tipo-espaço devemos ter  $T^\mu{}_\nu T_{\mu\sigma} v^\nu v^\sigma \leq 0$ . A condição Dominante de Energia é esta última restrição juntamente com aquela da condição fraca,  $T_{\mu\nu} v^\mu v^\nu \geq 0$ . Com um pouco de algebrismo  $T^\mu{}_\nu T_{\mu\sigma} v^\nu v^\sigma \leq 0$  expandido

na base ortonormal fornece:

$$\gamma^2(-\rho_0^2 + a^2 p_1^2 + b^2 p_2^2 + c^2 p_3^2) \leq 0. \quad (2.50)$$

Fazendo  $a = b = c = 0$ , chegaremos à  $\rho_0^2 \geq 0$  que, juntamente com a restrição de que  $T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \geq 0$ , limita este resultado apenas a parte positiva,  $\rho_0 \geq 0$ . Fazendo apenas  $b = c = 0$ , teremos  $\rho_0^2 \geq a^2 p_1^2$  e como  $a^2 < 1$  obtemos  $\rho_0 \geq |p_1|$ . Seguindo o mesmo raciocínio a condição dominante de energia nos diz que

$$\rho_0 \geq 0 \text{ e } \rho_0 \geq |p_i|. \quad (2.51)$$

Dessa forma vemos que a condição dominante de energia implica simultaneamente nas condições fraca e nula, mas não necessariamente a condição forte. Assim, vemos que para a matéria fonte não viajar mais rápido que a luz deve-se ter uma densidade de energia positiva com magnitude maior ou igual ao valor absoluto da pressão.

- **Condição Dominante Nula de Energia:** Esta exige as mesmas condições da condição dominante, porém com os vetores do tipo-tempo sendo substituídos por vetores do tipo-luz  $l^\mu$  direcionados para o futuro. Dessa forma, a condição Dominante Nula de energia pode ser matematicamente expressa como  $T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu \geq 0$  e  $T^\mu{}_\nu T_{\mu\sigma}l^\nu l^\sigma \leq 0$ , que usando a expansão na base ortonormal fornece:

$$\rho_0^2 - a'^2 p_1^2 - b'^2 p_2^2 - c'^2 p_3^2 \geq 0. \quad (2.52)$$

Fazendo  $b' = c' = 0$  na expressão acima teremos  $a'^2 = 1$  e ficamos com  $\rho_0^2 \geq p_1^2$ , que nos leva à  $\rho_0 \geq \pm p_1$ . A mesma lógica se aplica as demais pressões e então obtemos as restrições impostas pela condição dominante nula de energia:

$$-\rho_0 \leq p \leq \rho_0 \text{ e } \rho_0 = -p. \quad (2.53)$$

Isto é, os valores permitidos para a densidade de energia e pressão são os mesmo da condição dominante, exceto que dessa vez é permitido valores negativos para a densidade de energia.

Essas condições são as que classificam o tipo de matéria permitido que geram uma determinada curvatura no espaço-tempo. Qualquer tipo de matéria que viole todas as condições acima será denominada “exótica” e, como veremos, a fonte de um buraco de minhoca atravessável, pelo menos no contexto clássico, deve ser uma que viole tais condições de energia.

## 2.5 A solução de Morris-Thorne

### 2.5.1 A Métrica

Como vimos anteriormente, a solução de Schwarzschild (2.23) pode ser usada para descrever um objeto com uma estrutura de ponte conectando duas regiões distintas do espaço-tempo. Esse tipo de solução, chamadas posteriormente de “buracos de minhoca” por John Wheeler, é particularmente interessante pois, *a priori*, forneceria uma alternativa de viajar entre longas distâncias espaciais em curtos intervalos de tempo. Porém, como vimos, no caso das pontes de Einstein-Rosen seria impossível atravessá-lo, uma vez que essa solução é basicamente o buraco negro de Schwarzschild escrito em um sistema de coordenadas diferente. Nesse sentido, Morris e Thorne tentaram construir uma solução do tipo buraco de minhoca que fosse atravessável, no sentido de que um ser humano pudesse atravessá-lo com segurança em uma quantidade razoável de tempo. Dessa forma, claramente se vê que a exigência mínima é de que o espaço-tempo gerado não possua horizonte de eventos ou a presença de qualquer tipo de singularidade.

Porém, restringir a atenção as soluções das equações de Einstein que não tenha uma singularidade é uma tarefa difícil. Tradicionalmente o que se faz é escolher uma lagrangiana dos campos de matéria que irão gerar o espaço-tempo do buraco de minhoca, calcular o tensor momento-energia e então resolver as equações de Einstein. Após obtida a solução é que a análise da presença de singularidades é feita. Todas as tentativas de construir um buraco de minhoca estável e atravessável dessa maneira falharam [6].

O que Morris e Thorne notaram foi que o caminho inverso seria a maneira mais fácil de construir um buraco de minhoca atravessável. Eles assumiram uma métrica bem comportada e uma série de restrições físicas sobre a mesma, e então, usaram as equações de Einstein para determinar que distribuição de matéria-energia devemos ter. E então é visto se a fonte obtida é fisicamente aceitável. As exigências sobre a métrica que Morris e Thorne impuseram foram [3]:

- A métrica deve ser estática e esfericamente simétrica.
- A solução deve possuir uma garganta (túnel) conectando duas regiões assintoticamente planas do espaço-tempo.
- A métrica não pode possuir horizonte de eventos.
- As forças de maré devido a não-homogeneidade do campo gravitacional devem ser negligenciáveis.
- O tempo de viagem deve ser razoavelmente curto.

- A distribuição de matéria e energia que gera o espaço-tempo do buraco de minhoca deve ser fisicamente razoável.
- O buraco de minhoca deve ser estável.
- Deve ser possível construir o buraco de minhoca.

Note que algumas dessas exigências poderiam ser relaxadas, como, por exemplo, a imposição de simetria esférica, usada apenas por questão de simplicidade. Também, o buraco de minhoca não precisa necessariamente ser humanamente atravessável, poderíamos exigir que o buraco de minhoca seja atravessável apenas para objetos não-biológicos, como sinais de luz por exemplo, e, assim, as condições de forças de maré negligenciáveis e o tempo de travessia suficientemente curto poderiam ser amenizados. Porém, aqui vamos seguir a construção feita por Morris e Thorne.

Seguindo o procedimento feito por Morris e Thorne é assumido em seu modelo que o buraco de minhoca deve ser uma ponte estática, sem rotação e esfericamente simétrica conectando dois universos assintoticamente planos. Dessa forma, denotando  $l$  como a distância radial própria, podemos, sem perda de generalidade, assumir a seguinte forma para a métrica [3, 6]:

$$ds^2 = -e^{2\Phi(l)} dt^2 + dl^2 + r^2(l)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.54)$$

onde a coordenada  $l$  deve ser tal que cubra toda a região  $(-\infty, +\infty)$ , com as regiões assintoticamente planas ocorrendo em  $l \rightarrow \pm\infty$ . A função  $\Phi(l)$  deve ser finita em todo o espaço-tempo para que não haja a presença de horizonte de eventos. Além disso, para que a parte espacial da geometria tenda para um limite assintoticamente plano devemos impor:

$$\lim_{l \rightarrow \pm\infty} \frac{r(l)}{|l|} = 1, \quad (2.55)$$

e se quisermos que a geometria do espaço-tempo tenda para um limite assintoticamente plano adequado, devemos ter também:

$$\lim_{l \rightarrow \pm\infty} \Phi(l) = \Phi_{\pm}, \quad (2.56)$$

onde  $\Phi_{\pm}$  devem ser finitos. A localização da garganta (“ponte”) do buraco de minhoca é definido por:

$$r_t = \min\{r(l)\}, \quad (2.57)$$

onde, sem perda de generalidade, é assumido que o mínimo da função  $r(l)$  aconteça em  $l = 0$ . Podemos também escrever  $l = l(r)$  onde, nesse caso, teremos duas funções para a distância radial própria, uma para o “lado positivo”, denotado por  $l_+(r)$  e outra para o “lado negativo”  $l_-(r)$ , de tal forma que na garganta  $l_+(r_t) = l_-(r_t) = 0$ . Isso implica que também teremos duas funções



$\Phi_{\pm}(r)$ , uma para cada universo conectados pela garganta. Com isso, podemos escrever a métrica (2.54) como:

$$ds^2 = -e^{2\Phi_{\pm}(r)} dt^2 + \left(\frac{dl_{\pm}}{dr}\right)^2 dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.58)$$

Poderíamos, nesse ponto, calcular o tensor de Einstein e tentar resolver as equações de campo usando esse sistema de coordenadas. Porém, pode ser visto que os resultados obtidos serão extremamente difíceis de serem analisados [6]. Dessa forma, será bem mais eficiente efetuarmos os cálculos usando as coordenadas padrão Schwarzschild  $(t, r, \theta, \phi)$ , que após uma reparametrização da dependência funcional da métrica escrevemos:

$$ds^2 = -e^{2\Phi_{\pm}(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - b_{\pm}(r)/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.59)$$

onde  $\Phi(r)$  e  $b(r)$  são respectivamente chamadas de função redshift e função forma. Comparando as expressões (2.58) e (2.59) obtemos a relação entre a distância radial própria e a coordenada  $r$ :

$$\frac{dl_{\pm}}{dr} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b_{\pm}(r)}{r}}} \rightarrow l_{\pm}(r) = \pm \int_{r_t}^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - \frac{b_{\pm}(r')}{r'}}}. \quad (2.60)$$

Note que em coordenadas Schwarzschild necessitamos de dois caminhos coordenados, cada um cobrindo o alcance  $[r_t, +\infty)$ . Cada caminho cobre uma região distinta que são conectados pela garganta do buraco de minhoca em  $r = r_t$ . Para garantir que nessas coordenadas a geometria do espaço-tempo ainda tenha um limite assintoticamente plano adequado, devemos exigir que:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{b_{\pm}(r)}{r} = 0, \quad (2.61)$$

e

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi_{\pm}(r) = \Phi_{\pm}, \quad (2.62)$$

onde  $\Phi_{\pm}$  são valores finitos.

Agora, note que, como a função  $r(l)$  deve possuir um mínimo na garganta do buraco de minhoca, devemos ter  $dr/dl = 0$  em  $l = 0$ . Isso implica que na garganta devemos ter  $dl/dr \rightarrow +\infty$  de onde facilmente se vê usando (2.60) que para que isso aconteça a função forma deve obedecer à relação  $b_{\pm}(r_t) = r_t$ . Além disso, a condição de mínimo também implica que na garganta devemos ter:

$$\frac{d^2r}{dl^2} = \frac{d}{dl} \left( \frac{dr}{dl} \right) = \frac{dr}{dl} \frac{d}{dr} \left( \frac{dr}{dl} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left[ \left( \frac{dr}{dl} \right)^2 \right] > 0. \quad (2.63)$$

Usando (2.60) facilmente se vê que  $dr/dl = \pm \sqrt{1 - b_{\pm}(r)/r}$ , fornecendo a seguinte expressão

para  $d^2r/dl^2$ :

$$\frac{d^2r}{dl^2} = \frac{1}{2r} \left( \frac{b_{\pm}(r)}{r} - b'_{\pm} \right), \quad (2.64)$$

onde o ' denota diferenciação com respeito a coordenada  $r$ . Assim, na garganta devemos ter:

$$\left. \frac{d^2r}{dl^2} \right|_{r=r_t} = \frac{1}{2r_t} [1 - b'_+(r_t)] = \frac{1}{2r_t} [1 - b'_-(r_t)], \quad (2.65)$$

fornecendo  $b'_+(r_t) = b'_-(r_t)$ . Além disso, a condição de mínimo implica que:

$$\left. \frac{d^2r}{dl^2} \right|_{r=r_t} > 0 \rightarrow b'_{\pm}(r_t) < 1. \quad (2.66)$$

Assim, as condições de contorno para a função forma devem ser  $b_{\pm}(r_t) = r_t$  e  $b'_{\pm}(r_t) < 1$  sendo esta última condição conhecida na literatura como condição *flare-out*. Note que, desde que  $r_t$  é o menor valor possível para a coordenada radial  $r$ , a região  $r < r_t$  não é mapeada e não pode ser acessada por observadores externos. Dessa forma,  $r_t$  deve ser o maior valor possível que satisfaça as propriedades acima, implicando na seguinte relação  $b_{\pm}(r) \leq r$ , para todo  $r \geq r_t$ . Note também que todos os resultados acima se aplicam para o caso de o buraco de minhoca conectar duas regiões distintas e assintoticamente planas do mesmo universo, bastando fazer  $b_+(r) = b_-(r) = b(r)$  e  $\Phi_+(r) = \Phi_-(r) = \Phi(r)$ .

## 2.5.2 Diagramas de Mergulho

Diagramas de mergulho, do inglês *Embedding diagrams*, é uma maneira conveniente de visualizar a geometria gerada por um buraco de minhoca. Para fazer isso, devemos imergir (“mergulhar”) a métrica no 3-espaco euclidiano ao considerar simetrias específicas. Faremos aqui a forma geral para a métrica de Morris-Thorne (2.59) e aplicar no caso específico de um buraco de minhoca Schwarzschild (ponte de Einstein-Rosen).

Para isso, note que, como a geometria gerada pelo buraco de minhoca é estática, teremos uma simetria temporal, de forma que em qualquer instante de tempo a geometria será essencialmente a mesma. Dessa forma, podemos considerar a métrica em algum instante de tempo particular  $t$ . Além disso, devido à simetria esférica, podemos trabalhar no plano equatorial  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Com essas considerações, teremos  $dt = d\theta = 0$  e a métrica (2.59) torna-se

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{b(r)}{r}} + r^2 d\phi^2. \quad (2.67)$$

Com isso, obtemos a métrica de Morris-Thorne no plano  $(r, \phi)$ , e vamos considerar que este plano está imerso no espaço euclidiano tridimensional, tornando possível a visualização de sua geometria. Como ainda há simetria em  $\phi$  é natural escolhermos as coordenadas cilíndricas

$(r, \phi, z)$  para mapear esse espaço tridimensional, cuja métrica é dada por:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2. \quad (2.68)$$

Devido a essa simetria no ângulo  $\phi$  a coordenada  $z$  deve ser uma função apenas da coordenada  $r$ , e, usando a regra da cadeia, podemos escrever  $dz^2 = \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 dr^2$ , de tal forma que a métrica (2.68) toma a forma:

$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right] dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (2.69)$$

Fazendo a correspondência entre (2.67) e (2.69) nós vemos que estas duas métricas são equivalentes se a função  $z(r)$  obedecer a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dz}{dr} = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{b(r)} - 1}}. \quad (2.70)$$

A equação acima nos diz como é a forma da geometria do buraco de minhoca dada uma expressão específica para  $b(r)$ , e, por isso, o seu nome “função forma”. Usando as considerações da seção anterior, a forma geral para o diagrama de mergulho de um buraco de minhoca de Morris-Thorne pode ser visto na Fig. 1.

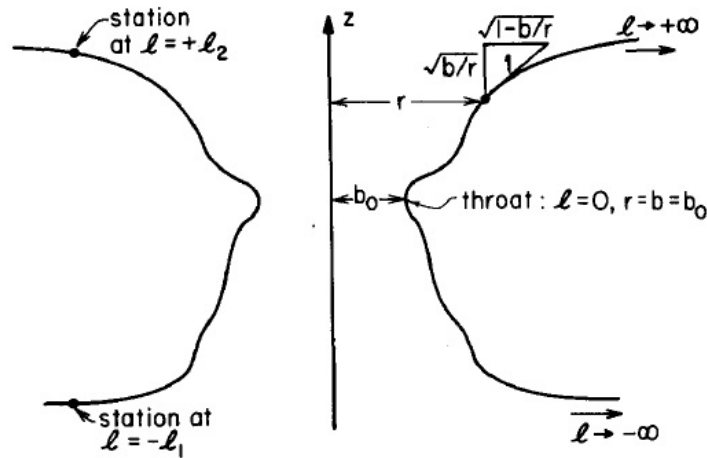


Figura 1: Diagrama de mergulho  $z(r)$  para uma função forma  $b(r)$  arbitrária, com raio da garganta  $b(r_t) = b_0$ . Essa imagem foi retirada do artigo original de Morris e Thorne [3].

Apenas por questão de aplicação, vamos determinar o diagrama de mergulho da métrica de Schwarzschild (2.23). Nesse caso, a função forma é simplesmente dada por  $b(r) = 2M$ , levando a seguinte equação diferencial para a função  $z(r)$ :

$$\frac{dz}{dr} = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2M}{r} - 1}}, \quad (2.71)$$

cuja solução é dada em termos da integral  $z(r) = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2M}{r} - 1}}$ , que é facilmente resolvida, forne-

cendo:

$$z(r) = \pm 2 \sqrt{2M(r-2M)} + C, \quad (2.72)$$

onde  $C$  é uma constante de integração arbitrária. Plotando  $z(r)$  no plano  $z-r$  e depois fazendo a revolução, variando  $\phi$  de 0 a  $2\pi$ , obtemos a forma do buraco de minhoca de Schwarzschild, que é essencialmente a ponte de Einstein-Rosen, que pode ser visto na Fig. 2.

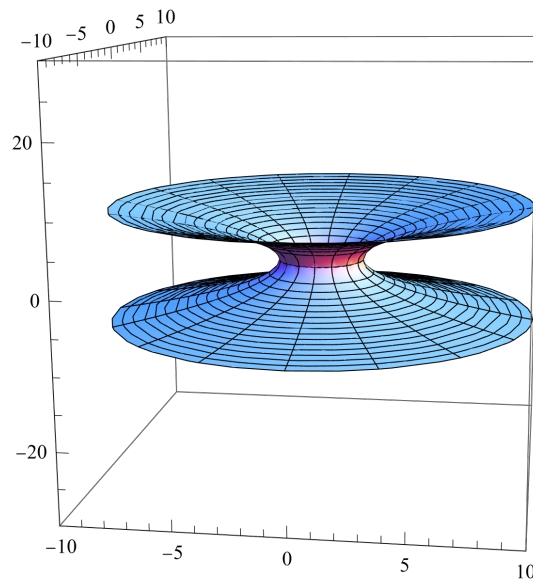


Figura 2: Plot da revolução em torno do eixo- $z$  da função  $z(r)$ , mostrando o diagrama de mergulho de um buraco de minhoca Schwarzschild, para  $M = 1$ .

### 2.5.3 *Tensores de Riemann e Einstein*

Nesta seção, iremos mostrar as componentes não nulas dos tensores de Riemann e Einstein para a métrica de Morris-Thorne (2.59). Logicamente essas expressões serão úteis ao utilizarmos as equações de campo de Einstein (2.9) e, além disso, serão usadas também para determinarmos as forças de maré sentidos por aventureiros que atravessam a garganta do buraco de minhoca.

As componentes do tensor de Riemann, escrito no sistema de coordenadas padrão Schwarzschild  $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \phi)$ , é calculado através das expressões (2.2) e (2.5), forne-

cando [3]:

$$\begin{aligned}
R^0_{101} &= -R^0_{110} = (1 - b/r)^{-1} e^{-2\Phi} R^1_{001} \\
&= -(1 - b/r)^{-1} e^{-2\Phi} R^1_{010} \\
&= -\Phi'' + (b'r - b)[2r(r - b)]^{-1} \Phi' - (\Phi')^2, \\
R^0_{202} &= -R^0_{220} = r^2 e^{-2\Phi} R^2_{002} = -r^2 e^{-2\Phi} R^2_{020} \\
&= -r\Phi'(1 - b/r), \\
R^0_{303} &= -R^0_{330} = r^2 e^{-2\Phi} \sin^2 \theta R^3_{003} \\
&= -r^2 e^{-2\Phi} \sin^2 \theta R^3_{030} \\
&= -r\Phi'(1 - b/r) \sin^2 \theta, \tag{2.73}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^1_{212} &= -R^1_{221} = -r^2(1 - b/r) R^2_{112} \\
&= r^2(1 - b/r) R^2_{121} \\
&= (b'r - b)/2r, \tag{2.74}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^1_{313} &= -R^1_{331} = -r^2(1 - b/r) \sin^2 \theta R^3_{113} \\
&= r^2(1 - b/r) \sin^2 \theta R^3_{131} \\
&= (b'r - b) \sin^2 \theta / 2r,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^2_{323} &= -R^2_{332} = \sin^2 \theta R^3_{232} = -\sin^2 \theta R^3_{223} \\
&= (b/r) \sin^2 \theta,
\end{aligned}$$

onde ' denota diferenciação com respeito a coordenada radial  $r$ . Nesse sistema de coordenadas, as componentes acima são escritas utilizando uma base coordenada ou base holonômica definidos como  $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \phi})$ .

Porém, os cálculos e a interpretação física dos resultados se tornam mais simples utilizando uma base não-holonômica ou base ortonormal, frequentemente referidos na literatura como “tetrad ortonormal”, representando o referencial local ou referencial próprio de observadores que permanecem sempre em repouso com respeito a este sistema de coordenadas. Os vetores ortonormais devem ser tais que o tensor métrico nesse sistema de coordenadas seja igual ao tensor métrico de Minkowski da relatividade especial, assim como já definimos na seção 2.4

através da expressão (2.35). Os vetores da base ortonormal podem ser construídos a partir dos coeficientes da métrica (2.59) e dos vetores da base coordenada através das expressões:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_{\hat{0}} &= e^{-\Phi} \mathbf{e}_0, \\
 \mathbf{e}_{\hat{1}} &= (1 - b/r)^{1/2} \mathbf{e}_1, \\
 \mathbf{e}_{\hat{2}} &= r^{-1} \mathbf{e}_2, \\
 \mathbf{e}_{\hat{3}} &= (r \sin \theta)^{-1} \mathbf{e}_3,
 \end{aligned} \tag{2.75}$$

onde os índices com acento circunflexo se referem a base ortonormal. Nessa base, as componentes do tensor de Riemann tornam-se bem mais simples, dados pelas expressões[3]:

$$\begin{aligned}
 R^{\hat{0}}_{\hat{1}\hat{0}\hat{1}} &= -R^{\hat{0}}_{\hat{1}\hat{1}\hat{0}} = -R^{\hat{1}}_{\hat{0}\hat{0}\hat{1}} = -R^{\hat{1}}_{\hat{0}\hat{1}\hat{0}} \\
 &= (1 - b/r) \{-\Phi'' + (b'r - b)[2r(r - b)]^{-1} \Phi' - (\Phi')^2\}, \\
 R^{\hat{0}}_{\hat{2}\hat{0}\hat{2}} &= -R^{\hat{0}}_{\hat{2}\hat{2}\hat{0}} = R^{\hat{2}}_{\hat{0}\hat{0}\hat{2}} = -R^{\hat{2}}_{\hat{0}\hat{2}\hat{0}} = -(1 - b/r) \Phi' / r, \\
 R^{\hat{0}}_{\hat{3}\hat{0}\hat{3}} &= -R^{\hat{0}}_{\hat{3}\hat{3}\hat{0}} = R^{\hat{3}}_{\hat{0}\hat{0}\hat{3}} = -R^{\hat{3}}_{\hat{0}\hat{3}\hat{0}} = -(1 - b/r) \Phi' / r, \\
 R^{\hat{1}}_{\hat{2}\hat{1}\hat{2}} &= -R^{\hat{1}}_{\hat{2}\hat{2}\hat{1}} = R^{\hat{2}}_{\hat{1}\hat{2}\hat{1}} = -R^{\hat{2}}_{\hat{1}\hat{1}\hat{2}} = (b'r - b) / 2r^3, \\
 R^{\hat{1}}_{\hat{3}\hat{1}\hat{3}} &= -R^{\hat{1}}_{\hat{3}\hat{3}\hat{1}} = R^{\hat{3}}_{\hat{1}\hat{3}\hat{1}} = -R^{\hat{3}}_{\hat{1}\hat{1}\hat{3}} = (b'r - b) / 2r^3, \\
 R^{\hat{2}}_{\hat{3}\hat{2}\hat{3}} &= -R^{\hat{2}}_{\hat{3}\hat{3}\hat{2}} = R^{\hat{3}}_{\hat{2}\hat{3}\hat{2}} = -R^{\hat{3}}_{\hat{2}\hat{2}\hat{3}} = b/r^3.
 \end{aligned} \tag{2.76}$$

A partir das expressões acima podemos calcular o tensor e o escalar de Ricci usando as definições (2.6) e (2.7), que na base ortonormal são simplesmente dados por:

$$\begin{aligned}
 R_{\hat{\mu}\hat{\nu}} &\equiv R_{\hat{\alpha}\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\beta}} \eta^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}, \\
 R &= \eta^{\hat{\mu}\hat{\nu}} R_{\hat{\mu}\hat{\nu}},
 \end{aligned}$$

de onde podemos determinar as componentes do tensor de Einstein (2.8), dado por  $G_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = R_{\hat{\mu}\hat{\nu}} - \frac{1}{2} R \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ , fornecendo as expressões:

$$\begin{aligned}
 G_{\hat{0}\hat{0}} &= \frac{b'}{r^2}, \\
 G_{\hat{1}\hat{1}} &= -\frac{b}{r^3} + 2 \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{\Phi}{r}, \\
 G_{\hat{2}\hat{2}} = G_{\hat{3}\hat{3}} &= \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left( \Phi'' - \frac{b'r - b}{2r(r - b)} \Phi' + (\Phi')^2 + \frac{\Phi'}{r} - \frac{b'r - b}{2r^2(r - b)} \right).
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

### 2.5.4 Forças de Maré Gravitacional e o Tempo de Travessia

Para que o buraco de minhoca seja atravessável por humanos, precisamos determinar as condições para que um viajante consiga atravessá-lo com segurança e em um tempo finito e razoavelmente curto. Morris e Thorne definem as três seguintes restrições para que a viagem na garganta de um buraco de minhoca seja conveniente para humanos[3]: (i) O tempo de viagem deve ser menor ou da ordem de 1 ano, tanto para o viajante quanto para observadores externos que o observam atravessar a garganta; (ii) a aceleração  $\mathbf{a}$  sentida pelo viajante não deve exceder 1 gravidade terrestre; (iii) a diferença de aceleração  $\Delta\mathbf{a}$ , causada pelas forças de maré gravitacionais, entre as várias partes do corpo do viajante, também não deve exceder 1 gravidade terrestre.

Para determinarmos o tempo de viagem, vamos considerar que o viajante parta de uma estação em  $l = -l_1$  e alcance outra estação em  $l = +l_2$  do outro lado do buraco de minhoca, como pode ser visto na Fig. 1. Por simplicidade, vamos considerar que o movimento se dê apenas na direção radial, de tal forma que sua velocidade, medida por observadores estáticos, seja determinado através da métrica (2.54):

$$\begin{aligned} ds^2 &= -e^{2\Phi} dt^2 + dl^2 = -e^{2\Phi} dt^2 \left( 1 - \frac{dl^2}{e^{2\Phi} dt^2} \right) \\ &= -e^{2\Phi} dt^2 (1 - v^2) = -\gamma(r)^{-2} e^{2\Phi} dt^2, \end{aligned} \quad (2.78)$$

onde, assim como em relatividade especial, definimos  $\gamma(r) \equiv (1 - v^2)^{-1/2}$ . No referencial próprio do viajante o elemento de linha é simplesmente dado por  $ds^2 = -d\tau^2$ , que, a partir da invariância do intervalo, obtemos a seguinte relação:

$$-d\tau^2 = -\gamma(r)^{-2} e^{2\Phi} dt^2 \rightarrow \gamma d\tau = e^{\Phi} dt, \quad (2.79)$$

onde vemos que:

$$v = \frac{dl}{e^{\Phi} dt} = \frac{dl}{\gamma d\tau}. \quad (2.80)$$

Dessa forma, o intervalo de tempo de viagem, medido por observadores estáticos e pelo viajante, são respectivamente dados por:

$$\Delta t = \int_{-l_1}^{l_2} \frac{dl}{v e^{\Phi}} \text{ e } \Delta\tau = \int_{-l_1}^{l_2} \frac{dl}{v\gamma}, \quad (2.81)$$

e esses valores são exigidos como sendo inferiores ou da ordem de 1 ano.

Agora, vamos determinar a aceleração sentida pelo viajante. Para isso, vamos considerar a base ortonormal de seu referencial próprio, denotada por  $(\mathbf{e}_{\hat{0}'}, \mathbf{e}_{\hat{1}'}, \mathbf{e}_{\hat{2}'}, \mathbf{e}_{\hat{3}'})$ , que pode ser relacionada a base ortonormal dos observadores estáticos através das transformações de Lorentz

padrão da relatividade especial:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_{\hat{0}'} &= \mathbf{u} = \gamma \mathbf{e}_{\hat{0}} \mp \gamma v \mathbf{e}_{\hat{1}}, \\
 \mathbf{e}_{\hat{1}'} &= \mp \gamma \mathbf{e}_{\hat{1}} + \gamma v \mathbf{e}_{\hat{0}}, \\
 \mathbf{e}_{\hat{2}'} &= \mathbf{e}_{\hat{2}}, \\
 \mathbf{e}_{\hat{3}'} &= \mathbf{e}_{\hat{3}},
 \end{aligned} \tag{2.82}$$

onde o sinal de menos refere-se ao movimento antes de entrar na garganta e o sinal de mais utilizado após o viajante sair da garganta. O vetor  $\mathbf{u}$  é a 4-velocidade do viajante, que em seu próprio referencial suas componentes espaciais serão nulas, e, portanto, se identifica com o vetor  $\mathbf{e}_{\hat{0}'}$ . A partir da 4-velocidade podemos obter a 4-aceleração sentida pelo viajante através da expressão  $a^{\hat{\mu}'} = u^{\nu'} \nabla_{\nu'} u^{\hat{\mu}'}$ . Como a 4-aceleração é sempre ortogonal a 4-velocidade teremos  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_{\hat{0}'} = 0 \rightarrow a_{\hat{0}'} = a^{\hat{0}'} = 0$ . Além disso, como é assumido que o movimento se dá apenas na direção radial, também será válido que  $a_{\hat{2}'} = a_{\hat{3}'} = 0$ , de modo que, no referencial próprio do viajante, sua 4-aceleração terá apenas uma componente não-nula dada por  $\mathbf{a} = a \mathbf{e}_{\hat{1}'}$ , onde  $a$  é a magnitude de sua aceleração.

Para calcularmos  $a$  é mais conveniente determinarmos  $a_0$  na base coordenada  $(t, r, \theta, \phi)$  e então notar que  $a_0 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_0 = a \mathbf{e}_{\hat{1}'} \cdot \mathbf{e}_0 = -\gamma v e^{\Phi} a$ , onde foram usadas as relações (2.75) e (2.82). Por outro lado, considerando  $u_\alpha$  como sendo função da coordenada radial  $r$ , teremos  $a_0 = u^{\nu} \nabla_{\nu} u_0 = u^1 \partial_1 u_0 - u^{\nu} \Gamma^{\sigma}_{\nu 0} u_{\sigma}$ . Usando novamente as relações (2.75) e (2.82), facilmente se vê que:

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_{\hat{0}'} = \gamma \mathbf{e}_{\hat{0}} \mp \gamma v \mathbf{e}_{\hat{1}} = \left( \gamma e^{-\Phi} \mathbf{e}_0 \pm \gamma v \left( 1 - \frac{b}{r} \right) \mathbf{e}_1 \right), \tag{2.83}$$

de onde extraímos as componentes da 4-velocidade:

$$u_0 = -\gamma e^{\Phi}, \quad u_1 = \pm \gamma v \left( 1 - \frac{b}{r} \right)^{-1/2}, \quad u_2 = u_3 = 0, \tag{2.84}$$

e as componentes contravariantes são obtidas usando o tensor métrico. Com isso, obtemos para  $a_0$ :

$$a_0 = \mp \gamma v \left( 1 - \frac{b}{r} \right)^{1/2} (\gamma e^{\Phi})' = -\gamma v e^{\Phi} a, \tag{2.85}$$

chegando finalmente a expressão para a magnitude da aceleração sentida pelo viajante

$$a = \pm \left( 1 - \frac{b}{r} \right)^{1/2} e^{-\Phi} (\gamma e^{\Phi})' = e^{-\Phi} \frac{d}{dl} (\gamma e^{\Phi}), \tag{2.86}$$

a qual deve possuir um módulo inferior ou da ordem de uma gravidade terrestre  $g$ .

Finalmente, vamos determinar as forças de maré devido a não-homogeneidade do campo gravitacional. Sabemos que essa não-homogeneidade surge devido à curvatura no espaço-



tempo gerada pela fonte do campo gravitacional, que no nosso caso é o buraco de minhoca definido em (2.59), de forma que partículas teste irão seguir geodésicas que podem convergir ou divergir em um dado ponto do espaço-tempo. Dessa forma, haverá uma velocidade e aceleração relativa entre essas geodésicas, ou seja, entre as partículas que seguem tais trajetórias. A aceleração relativa entre as geodésicas pode ser determinada através da equação do desvio geodésico dado pela expressão:

$$\Delta a^\mu = \frac{D^2 \xi^\mu}{d\tau^2} = -R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} u^\nu \xi^\rho u^\sigma, \quad (2.87)$$

onde  $D/d\tau$  é a notação para a derivada covariante direcional  $u^\alpha \nabla_\alpha$ ,  $\xi^\mu$  é vetor separação entre as partículas e  $u^\mu$  a 4-velocidade. Apenas por questão de completude, vamos mostrar como encontrar a expressão acima.

Para isso, vamos considerar o procedimento feito em [67]. Seja  $\gamma_s(\tau)$  uma família de geodésicas, cada uma rotulada por um número real  $s$  e parametrizada pelo parâmetro afim  $\tau$ , onde tomamos como sendo o tempo próprio. Essas geodésicas definem uma superfície que pode ser mapeada usando os parâmetros  $(s, \tau)$  como coordenadas. Definimos sobre essa superfície o campo vetorial  $u^\alpha \equiv (\partial/\partial\tau)^\alpha$  tangente à família de geodésicas  $\gamma_s(\tau)$ , satisfazendo a relação

$$u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta = 0. \quad (2.88)$$

Definimos também o campo vetorial  $\xi^\alpha \equiv (\partial/\partial s)^\alpha$  chamado de vetor desvio, representando o deslocamento relativo entre geodésicas infinitesimalmente próximas. Agora, mostremos explicitamente que:

$$u^\beta \nabla_\beta \xi^\alpha = \xi^\beta \nabla_\beta u^\alpha. \quad (2.89)$$

De fato, usando a definição de derivada covariante obtemos:

$$u^\beta \nabla_\beta \xi^\alpha = u^\beta \partial_\beta \xi^\alpha + u^\beta \Gamma^\alpha{}_{\beta\sigma} \xi^\sigma. \quad (2.90)$$

Note que, usando a definição dos campos vetoriais  $u^\alpha$  e  $\xi^\alpha$ , teremos

$$\begin{aligned} u^\beta \partial_\beta \xi^\alpha &= \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^\alpha = \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^\alpha = \left( \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial s} \right)^\alpha \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^\alpha = \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^\alpha \\ &= \xi^\beta \partial_\beta \xi^\alpha. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Além disso, como a conexão é simétrica, isto é,  $\Gamma^\alpha{}_{\beta\sigma} = \Gamma^\alpha{}_{\sigma\beta}$  fica fácil notar que  $u^\beta \Gamma^\alpha{}_{\beta\sigma} \xi^\sigma =$

$\xi^\sigma \Gamma^\alpha_{\sigma\beta} u^\beta$  e então

$$\begin{aligned} u^\beta \nabla_\beta \xi^\alpha &= u^\beta \partial_\beta \xi^\alpha + u^\beta \Gamma^\alpha_{\beta\sigma} \xi^\sigma = \xi^\beta \partial_\beta \xi^\alpha + \xi^\sigma \Gamma^\alpha_{\sigma\beta} u^\beta \\ &= \xi^\beta \nabla_\beta u^\alpha. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Finalmente, note que  $v^\alpha = u^\beta \nabla_\beta \xi^\alpha$  fornece a taxa de variação do deslocamento relativo entre geodésicas infinitesimalmente próximas e, assim, pode ser interpretado como a velocidade relativa entre essas geodésicas. De maneira análoga, definimos a aceleração relativa entre as geodésicas vizinhas como:

$$\Delta a^\alpha = u^\sigma \nabla_\sigma v^\alpha = u^\sigma \nabla_\sigma (u^\beta \nabla_\beta \xi^\alpha), \quad (2.93)$$

que pode ser escrito em termos do tensor de Riemann da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \Delta a^\alpha &= (u^\sigma \nabla_\sigma \xi^\beta) \nabla_\beta u^\alpha + \xi^\beta u^\sigma \nabla_\sigma \nabla_\beta u^\alpha \\ &= (\xi^\sigma \nabla_\sigma u^\beta) \nabla_\beta u^\alpha + \xi^\beta u^\sigma \nabla_\beta \nabla_\sigma u^\alpha - R^\alpha_{\rho\beta\sigma} \xi^\beta u^\sigma u^\rho \\ &= \xi^\sigma \nabla_\sigma (u^\beta \nabla_\beta u^\alpha) - R^\alpha_{\rho\beta\sigma} \xi^\beta u^\sigma u^\rho \\ &= -R^\alpha_{\rho\beta\sigma} \xi^\beta u^\sigma u^\rho, \end{aligned} \quad (2.94)$$

onde nós temos usado as relações (2.88), (2.89) e o fato de que [67]:

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta u^\sigma - \nabla_\beta \nabla_\alpha u^\sigma = -R^\alpha_{\rho\beta\alpha} u^\rho. \quad (2.95)$$

Dessa forma, vemos que o efeito das forças de maré são medidos através do tensor de Riemann.

Voltando ao problema do viajante, iremos determinar a aceleração relativa entre a ponta de seus pés até a cabeça, a qual devemos impor como sendo menor ou igual a 1 gravidade terrestre para que o viajante fique em segurança. O cálculo torna-se mais simples no referencial próprio do viajante, onde o vetor separação entre as partes do seu corpo será puramente espacial, isto é,  $\xi^{\hat{0}'} = 0$ . Além disso, em seu referencial, sua 4-velocidade é simplesmente dada por  $u^{\hat{\alpha}'} = \delta^{\hat{\alpha}'}_{\hat{0}'}$  e, como o tensor de Riemann  $R_{\hat{\alpha}'\hat{\delta}'\hat{\sigma}'\hat{\rho}'}$  é antissimétrico em seus dois primeiros índices, é fácil mostrar que, no referencial próprio do viajante, a aceleração relativa será puramente espacial e dada por (lembre-se que usando a base ortonormal podemos usar a métrica de Minkowski para baixar e levantar índices):

$$\Delta a^{\hat{j}'} = -R_{\hat{j}'\hat{0}'\hat{k}'\hat{0}'} \xi^{\hat{k}'}. \quad (2.96)$$

As componentes do tensor de Riemann escritas na base ortonormal do viajante podem ser relacionadas as componentes escritas na base ortonormal de observadores estáticos, dados pelas expressões (2.76), via transformações de Lorentz (2.82), assim como fizemos ao determinar o tempo de viagem em ambos referenciais, fornecendo as únicas componentes não-nulas do

tensor de Riemann no referencial do viajante:

$$R_{\hat{1}'\hat{0}'\hat{1}'\hat{0}'} = -\left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[ -\Phi'' + \frac{b'r - b}{2r(r-b)} \Phi' - (\Phi')^2 \right], \quad (2.97)$$

$$R_{\hat{2}'\hat{0}'\hat{2}'\hat{0}'} = R_{\hat{3}'\hat{0}'\hat{3}'\hat{0}'} = \frac{\gamma^2}{2r^2} \left[ v^2 \left( b' - \frac{b}{r} \right) + 2(r-b)\Phi' \right], \quad (2.98)$$

onde  $\gamma \equiv (1 - v^2)^{-1/2}$  com  $v(r)$  a velocidade em  $r$  do viajante medido por um observador estático. Assim, as componentes da aceleração devido às forças de maré serão dadas por

$$\begin{aligned} \Delta a^{\hat{1}'} &= -R_{\hat{1}'\hat{0}'\hat{1}'\hat{0}'} \xi^{\hat{1}'}, & \Delta a^{\hat{2}'} &= -R_{\hat{2}'\hat{0}'\hat{2}'\hat{0}'} \xi^{\hat{2}'}, \\ \Delta a^{\hat{3}'} &= -R_{\hat{3}'\hat{0}'\hat{3}'\hat{0}'} \xi^{\hat{3}'}. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Supondo que o viajante possua uma altura 2 metros, isto é,  $|\xi^i| \approx 2\text{m}$  e que  $|\Delta a| \approx g$ , onde  $g = 10\text{m/s}^2$  é uma gravidade terrestre, teremos as seguintes restrições sobre as funções  $\Phi(r)$  e  $b(r)$ :

$$|R_{\hat{1}'\hat{0}'\hat{1}'\hat{0}'}| = \left| -\left(1 - \frac{b}{r}\right) \left[ -\Phi'' + \frac{b'r - b}{2r(r-b)} \Phi' - (\Phi')^2 \right] \right| < \frac{g}{c^2 \cdot 2\text{m}} \approx \frac{1}{(10^{10}\text{cm})^2}, \quad (2.100)$$

$$|R_{\hat{2}'\hat{0}'\hat{2}'\hat{0}'}| = \left| \frac{\gamma^2}{2r^2} \left[ v^2 \left( b' - \frac{b}{r} \right) + 2(r-b)\Phi' \right] \right| < \frac{g}{c^2 \cdot 2\text{m}} \approx \frac{1}{(10^{10}\text{cm})^2}, \quad (2.101)$$

onde esses valores são expressos no sistema internacional de unidades SI. Vemos que a restrição na componente radial da aceleração de maré pode ser garantida impondo  $\Phi(r) = 0$  em todo o espaço-tempo, formando uma classe buracos de minhoca conhecidos na literatura como “zero-tidal-force wormholes”, onde o efeito das forças de maré na direção radial são automaticamente eliminados [3].

### 2.5.5 Equações de Einstein e o conteúdo de matéria e energia que gera o Buraco de Minhoca

O próximo passo consiste em utilizar as equações de campo (2.9) para a métrica dada por (2.59). A fim de que essa solução não possua horizontes, não podemos resolver as equações de Einstein no vácuo, isto é, com  $T_{\mu\nu} = 0$ , uma vez que o Teorema de Birkhoff garante a unicidade da solução de Schwarzschild no caso de simetria esférica (para uma prova, ver por exemplo [66]), e esta solução, como vimos, possui a presença inevitável de singularidades. Além disso, as equações de Einstein mostram uma relação de proporcionalidade entre o tensor de Einstein e o tensor momento-energia, e, portanto, suas componentes na base ortonormal  $T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$  devem possuir a mesma estrutura algébrica de  $G_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ . Como vimos pelas relações (2.77), o tensor de Einstein é diagonal na base ortonormal, e, assim, o mesmo deve ser válido para o tensor momento-energia. Vamos assumir, sem perda de generalidade, que  $T_{\hat{0}\hat{0}} = \rho(r)$ ,  $T_{\hat{1}\hat{1}} = -p_r(r)$  e  $T_{\hat{2}\hat{2}} = T_{\hat{3}\hat{3}} = p_t(r)$  representando um fluido anisotrópico com densidade de energia  $\rho$ , pressão

radial  $p_r$  e pressão lateral  $p_l$  medida por observadores estáticos. Note que o caso de um “fluido perfeito” é obtido fazendo  $p_l(r) = -p_r(r)$ .

Assim, usando as equações de campo (2.9), com o tensor momento-energia definido acima, obtemos as equações de campo após algumas manipulações algébricas:

$$\rho = \frac{b'}{8\pi r^2}, \quad (2.102)$$

$$p_r = \frac{1}{8\pi r^2} \left[ \frac{b}{r} - 2(r-b)\Phi' \right], \quad (2.103)$$

$$p_l = \frac{r}{2} [(\rho - p_r)\Phi' - p_r'] - p_r. \quad (2.104)$$

Combinando as duas primeiras expressões acima, ficamos com:

$$\begin{aligned} 8\pi(\rho - p_r) &= \frac{1}{r^2} \left( b' - \frac{b}{r} \right) + 2 \left( 1 - \frac{b}{r} \right) \frac{\Phi'}{r}, \\ &= -\frac{1}{r} \left[ \left( 1 - \frac{b}{r} \right)' - \frac{2\Phi'}{r} \left( 1 - \frac{b}{r} \right) \right], \\ &= -\frac{e^{-2\Phi}}{r} \left[ e^{-2\Phi} \left( 1 - \frac{b}{r} \right) \right]'. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Note que na garganta teremos:

$$e^{-2\Phi} \left( 1 - \frac{b(r_t)}{r_t} \right) = 0, \quad (2.106)$$

onde usamos o fato  $b(r_t) = r_t$ . Além disso, para todo  $r > r_t$  será válida a desigualdade:

$$e^{-2\Phi} \left( 1 - \frac{b(r)}{r} \right) > 0, \quad (2.107)$$

pois sabemos que  $b(r) < r$  para todo  $r > r_t$ . Logo, existirá um intervalo na qual a função acima será crescente, isto é, existe  $r_* > r_t$  tal que para todo  $r \in (r_t, r_*)$  será válido

$$\left[ e^{-2\Phi} \left( 1 - \frac{b(r)}{r} \right) \right]' > 0, \quad (2.108)$$

onde sem perda de generalidade poderíamos tomar  $r_* \rightarrow \infty$ . Assim, concluimos de (2.105), que nesse mesmo intervalo devemos ter:

$$\rho(r) - p_r(r) < 0. \quad (2.109)$$

Se trabalharmos as expressões acima na garganta a desigualdade pode se tornar uma igualdade

$$\left[ e^{-2\Phi} \left( 1 - \frac{b(r)}{r} \right) \right]' \Big|_{r=r_t} \geq 0, \quad (2.110)$$

isto é,  $p_r(r_t) \geq \rho(r_t)$ , caracterizando um fluido cuja pressão radial na garganta excede a densidade total de matéria e energia. Isto é, a energia por unidade de volume desse objeto é maior do

que a densidade total de matéria e energia na mesma região da garganta. Um material com essa propriedade foi denominado “exótico” por Morris e Thorne, onde temos uma clara violação da condição nula de energia (e conseqüentemente das condições fraca, forte e dominante também) vistas na seção 2.4. Além disso, eles mostraram que para um material com essas propriedades, sempre teremos um referencial onde os observadores mediriam uma densidade de energia negativa [3].

Até recentemente pensava-se que seria necessário a presença de tais matérias exóticas para um buraco de minhoca ser atravessável, pelo menos no contexto clássico. Porém, trabalhos recentes mostram que ainda no contexto da relatividade geral é possível ter buracos de minhoca com matéria não-exótica [8].

Também, podemos nos questionar se em contextos quânticos as condições de atravessabilidade podem ser alteradas, ou ainda, tornar possível uma solução atravessável com conteúdo de matéria não-exótica. Os autores em [64] mostraram que no contexto quântico da Gravidade Assintoticamente Segura (GAS) foi possível encontrar soluções de buraco de minhoca atravessável com matéria não-exótica, desde que sejam pseudoesféricos.

Os autores em [65] aplicaram o método GAS para um tipo específico de buracos de minhoca, os chamados Ellis-Bronnikov. Eles encontraram que neste contexto pode haver a presença de matéria não-exótica na garganta deste buraco de minhoca. Entretanto, para que se tenha matéria não-exótica na garganta deve-se ter um fluido *Phantom* em outras regiões do espaço-tempo.

Na próximo capítulo vamos discutir o método assintoticamente seguro e como aplicá-lo ao caso gravitacional. Como veremos, o método assintoticamente seguro é uma maneira bastante eficiente de eliminar as divergências que aparecem ao considerarmos os efeitos quânticos na dinâmica do campo gravitacional. Vamos utilizar essas correções quânticas devido a GAS para investigar a presença de matéria exótica e as condições de atravessabilidade de buracos de minhoca e, depois, aplicar em algumas soluções específicas.

### 3 GRAVIDADE ASSINTOTICAMENTE SEGURA

Como vimos no capítulo anterior, para que buracos de minhoca sejam atravessáveis será necessário a presença de matéria exótica, pelo menos no contexto clássico. Podemos esperar que o problema da matéria exótica possa ser curado ao considerarmos uma teoria quântica da gravidade. Porém, sabemos que quantizar a gravidade na linha da teoria quântica de campos nos leva a divergências que não podem ser removidas utilizando as técnicas usuais de renormalização. No entanto, a conjectura assintoticamente segura desenvolvida por Weinberg se mostrou bastante promissora pois apresenta uma maneira bastante eficiente de eliminar estas divergências [22]. Este formalismo foi aplicado com sucesso ao caso gravitacional [74–78], resolvendo, inclusive, o problema da singularidade de buracos negros [79–82]. Neste capítulo apresentamos o método assintoticamente seguro e como ele se aplica ao caso gravitacional. Este capítulo é de grande importância, pois vamos utilizar as correções quânticas advindas deste método para investigar as condições de atravessabilidade e a presença de matéria exótica no contexto de buracos de minhoca.

#### 3.1 Introdução Histórica

Atualmente, sabemos que todos os processos elementares podem ser descritos usando quatro interações fundamentais: a gravitacional, eletromagnética, forte e fraca. As interações gravitacional e eletromagnética manifestam-se macroscopicamente e podem ser descritas por teorias clássicas de campos neste domínio macroscópico, enquanto as interações fraca e forte surgem apenas a nível atômico, sendo, portanto, descritas somente por uma teoria quântica de campos.

A física das partículas elementares pode ser descrita usando o Modelo Padrão, que unifica as interações fundamentais, com exceção do caso gravitacional. Isto se deve ao fato de que a teoria da Relatividade Geral de Einstein não é renormalizável com teoria da perturbação [83–85] quando tentamos quantizá-la usando as mesmas técnicas utilizadas no Modelo Padrão. Pode ser mostrado que as correções de *loop* do campo quântico gravitacional fornecem novos tipos de divergências que podem ser eliminados usando contra-termos adequados, levando a certos coeficientes que devem ser determinados a partir de experimentos [83]. Embora isso não nos impeça de determinar correções quânticas para a teoria clássica, à medida que aumentamos a ordem da perturbação, haverá também um aumento de parâmetros indeterminados da teoria.

Se nos restringirmos a uma ordem em que poucas constantes de acoplamento possuem um papel importante para a teoria, a Relatividade Geral quantizada pode ser considerada

uma teoria quântica de campos efetiva [86, 87], levando a correções quânticas para os termos de ordem mais baixa da expansão. No entanto, como já foi dito, quando aumentamos a escala de energia é necessário incluir termos de ordem mais altas nas correções de *loop*, levando a um número crescente de parâmetros indeterminados da teoria, perdendo cada vez mais o poder de previsibilidade. Nesse sentido, o mais interessante seria determinar uma teoria quântica fundamental da Gravidade, no sentido de que funcione para todas as escalas de comprimento e energia.

Como a Relatividade Geral quantizada não é renormalizável na teoria perturbativa usual, a teoria quântica da gravitação não é válida no âmbito da teoria quântica de campos, a menos que sejam adicionadas novas simetrias, dimensões extras ou outras adições ao modelo teórico. Em contraste, o método Assintoticamente Seguro mostrou-se bastante promissor uma vez que foi possível descrever campos quânticos que são livres de divergências sem usar as técnicas usuais de renormalizabilidade perturbativa, levando a uma teoria quântica de campos renormalizáveis não-perturbativamente.

O método Assintoticamente Seguro é construído a partir de uma generalização das técnicas de renormalização desenvolvidas por Kadanoff e Wilson [88–90], e utilizam uma equação de grupo de renormalização “funcional” ou “exata”, análogo ao que é feito em Teoria de Campos Estatística para descrever transições de fase. Weinberg foi o primeiro a propor uma teoria quântica da gravidade renormalizável não-perturbativamente, ou “assintoticamente segura” [22]. No entanto, na época em que foi publicada a ideia de Weinberg, havia poucas ferramentas eficientes para testar a disponibilidade de sua teoria. Mas, uma expansão-epsilon válida para duas dimensões (técnica utilizada em teoria estatística de campos) mostrou que este novo método poderia ser viável. Além disso, foi mostrado que certas teorias quânticas de campos da matéria que não são renormalizáveis com a teoria perturbativa usual são renormalizáveis não-perturbativamente usando o método Assintoticamente Seguro [91–93].

No entanto, a pesquisa do modelo Assintoticamente Seguro em quatro dimensões só começou a crescer na década de 90, depois do desenvolvimento dos métodos de grupos de renormalização funcionais para o campo gravitacional [23]. Estes métodos não-perturbativos fornecem uma promissora teoria quântica para a gravidade, que é o principal tema deste capítulo, e que depois será utilizado para determinar as correções quânticas na distribuição de matéria da solução de Morris-Thorne.

### 3.2 A ação efetiva média e a Equação de Wetterich

Antes de aplicarmos o formalismo Assintoticamente Seguro para descrever gravitação quântica, vamos introduzir todos os conceitos necessários, em particular, da ação efetiva média e como a usamos para determinar a equação exata do grupo de renormalização, o objetivo prin-

cipal desta seção.

Para isto, apenas por simplicidade, vamos considerar um modelo mais simples: um único campo escalar real  $\varphi(x)$  propagando-se em um espaço-tempo Euclidiano plano de dimensão  $d$ , cuja ação é dada por  $S[\varphi] = \int d^d x \left[ \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{1}{2}m^2 \varphi^2 + \text{termos de interação} \right]$ , embora não precisemos assumir uma forma específica para a ação nos próximos passos. O gerador funcional  $W[J]$  é definido como  $W[J] \equiv \ln Z[J]$ , onde  $Z[J]$  é a integral funcional do campo  $\varphi$  ou sua função de partição Euclidiana:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ -S[\varphi] + \int d^d x \varphi(x) J(x) \right\}, \quad (3.1)$$

onde  $J(x)$  é a função “fonte” e  $\mathcal{D}\varphi \propto \prod_n d\varphi(x_n)$ . O funcional  $Z[J]$  é extremamente importante, pois, com este objeto, podemos calcular a função de  $n$ -pontos através de derivações funcionais com respeito a fonte  $J(x)$ :

$$\langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \rangle = \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}. \quad (3.2)$$

Embora não irei fazer o cálculo explicitamente aqui, é importante salientar que a integral funcional Euclidiana (3.3) é obtida através da integral funcional usual do campo escalar no espaço-tempo de Minkowski ao aplicarmos uma rotação de Wick, que consiste em estender o domínio da coordenada temporal para valores complexos. Isto é bastante vantajoso, pois, além de trabalharmos em uma variedade Euclidiana, a integral funcional (3.3) será associada com a função de partição para uma teoria de campos estatística.

A fim de construirmos a ação efetiva média, é necessário introduzir a ação *cutoff*  $\Delta S_k[\varphi]$ , de tal forma que a integral funcional (3.3) seja modificada e dada por

$$Z_k[J] = \exp\{W_k\} = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ -S[\varphi] - \Delta S_k[\varphi] + \int d^d x \varphi(x) J(x) \right\}, \quad (3.3)$$

onde a variável  $k$  é o momento de escala introduzido para realizar o *cutoff* Infravermelho: Os modos de Fourier do campo  $\varphi$  com “grandes comprimentos de onda” serão aqueles em que  $p^2 > k^2$ , onde  $p^2 \equiv p_\mu p^\mu$ , e irão contribuir sem nenhuma restrição a integração funcional, enquanto os modos com “pequenos comprimentos de onda”, aqueles com  $p^2 < k^2$ , serão suprimidos, levando a um comprimento de onda máximo permitido pela teoria (de fato, este é o *cutoff* Infravermelho). A forma funcional da ação *cutoff* no espaço dos momentos é dada por

$$\Delta S_k[\varphi] \equiv \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \mathcal{R}_k(p^2) |\varphi_p|^2, \quad (3.4)$$

onde  $\mathcal{R}_k(p^2)$  é chamada função *cutoff* ou reguladora e  $\varphi_p$  é a transformada de Fourier do campo  $\varphi(x)$ . Embora tenhamos uma liberdade na escolha da função reguladora, para que ela faça seu



papel e realize o *cutoff* é exigido que sua forma assintótica satisfaça [83]

$$\mathcal{R}_k(p^2) \approx \begin{cases} k^2 & \text{para } p^2 \ll k^2 \\ 0 & \text{para } p^2 \gg k^2, \end{cases} \quad (3.5)$$

isto é, os modos com pequenos valores de momento sofrerão o *cutoff* infravermelho, enquanto os modos com grandes valores de momento serão integrados da maneira usual. Para efetuar os cálculos frequentemente se utiliza na literatura o regulador exponencial da forma [83]

$$\mathcal{R}_k(p^2) = p^2 \left[ \exp\left(\frac{p^2}{k^2}\right) - 1 \right]^{-1}, \quad (3.6)$$

embora há outras escolhas possíveis [94, 95]. Para ficar ainda mais claro a interpretação da função reguladora, vamos explicitar a forma da ação modificada  $S + \Delta S_k$

$$(S + \Delta S_k)[\varphi] = \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} [p^2 + m^2 + \mathcal{R}_k(p^2)] |\varphi_p|^2 + \text{termos de interação}, \quad (3.7)$$

onde fica evidente a interpretação de  $\mathcal{R}_k(p^2)$  como um objeto que depende do momento com unidade de massa ao quadrado. Na teoria de perturbação usual o termo  $\Delta S_k$  levaria a uma modificação do propagador da forma  $[p^2 + m^2 + \mathcal{R}_k(p^2)]^{-1}$ , que ao calcularmos as correções de *loop* com este propagador, é visto que  $k^2$  age de fato como o *cutoff* Infravermelho se  $m^2 \ll k^2$  (no caso  $m^2 \gg k^2$  a própria massa física da partícula age como o *cutoff*), enquanto que no caso não-perturbativo que trataremos aqui  $\Delta S_k$  suprime os modos com grandes comprimentos de onda por um fator  $\exp\{-\frac{1}{2}k^2 \int |\varphi|^2\}$ .

Note também que a ação *cutoff* pode ser escrita no espaço das posições substituindo  $p^2$  por  $-\partial^2$  no argumento de  $\mathcal{R}_k(p^2)$ , obtendo

$$\Delta S_k[\varphi] = \frac{1}{2} \int d^d x \varphi(x) \mathcal{R}_k(-\partial^2) \varphi(x). \quad (3.8)$$

Finalmente, a fim definir a ação efetiva média, determinamos a ação efetiva padrão dependente do momento de escala  $k$  a partir da transformação de Legendre do gerador funcional  $W_k[J]$  definido em (3.3). Denotando  $\phi(x) \equiv \langle \varphi(x) \rangle = \delta W_k[J] / \delta J(x)$ , a transformação de Legendre de  $W_k[J]$  é dada por

$$\tilde{\Gamma}_k[\phi] = -W_k[\mathcal{I}_k[\phi]] + \int d^d x \mathcal{I}_k[\phi](x) \phi(x), \quad (3.9)$$

onde é assumido que a relação funcional  $\phi = \phi[J]$  pode ser resolvida para a fonte e fornecer uma relação do tipo  $J = \mathcal{I}_k[\phi]$ . Finalmente a ação efetiva média é obtida subtraindo  $\Delta S_k[\phi]$  de  $\tilde{\Gamma}_k$  e será denotada por  $\Gamma_k[\phi]$ :

$$\Gamma_k[\phi] \equiv \tilde{\Gamma}_k[\phi] - \frac{1}{2} \int d^d x \phi(x) \mathcal{R}_k(-\partial^2) \phi(x). \quad (3.10)$$

A partir da ação efetiva média, podemos construir uma equação de campo efetiva, a qual usaremos para demonstrar a equação de Wetterich. Esta é dada pela seguinte expressão

$$\frac{\delta\Gamma_k[\phi]}{\delta\phi(x)} + \mathcal{R}_k\phi(x) = J(x). \quad (3.11)$$

De fato, tomando a derivada funcional de  $\tilde{\Gamma}_k[\phi]$ , dado pela expressão (3.9), com respeito à  $\phi(x) = \langle\varphi(x)\rangle = \delta W_k[J]/\delta J(x)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\delta\tilde{\Gamma}_k}{\delta\phi(x)} &= \mathcal{I}_k[\phi](x) + \int d^d y \phi(y) \frac{\delta\mathcal{I}_k}{\delta\phi(y)} - \int d^d y \left. \frac{\delta W_k}{\delta J(y)} \right|_{J=\mathcal{I}_k} \frac{\delta\mathcal{I}_k}{\delta\phi(y)} \\ &= J(x), \end{aligned} \quad (3.12)$$

lembrando que  $J(x) = \mathcal{I}_k[\phi](x)$ . Daí, fazendo a derivação funcional com respeito à  $\phi(x)$  da expressão (3.10) e lembrando da definição da ação *cutoff* dada por (3.8), chegamos a equação (3.11):

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Gamma_k[\phi]}{\delta\phi(x)} &= \frac{\delta\tilde{\Gamma}_k[\phi]}{\delta\phi(x)} - \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta\phi(x)} \int d^d x' \phi(x') \mathcal{R}_k(-\partial^2)\phi(x') \\ \frac{\Gamma_k[\phi]}{\delta\phi(x)} + \mathcal{R}_k(-\partial^2)\phi(x) &= J(x), \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde deve ser notado que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta\phi(x)} \int d^d x' \phi(x') \mathcal{R}_k(-\partial^2)\phi(x') &= \frac{1}{2} \int d^d x' \left[ \frac{\delta\phi(x')}{\delta\phi(x)} \mathcal{R}_k\phi(x') + \phi(x') \mathcal{R}_k \frac{\delta\phi(x')}{\delta\phi(x)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \int d^d x' 2\delta(x-x') \mathcal{R}_k\phi(x') \\ &= \mathcal{R}_k\phi(x). \end{aligned} \quad (3.14)$$

A equação de campo efetiva (3.11) é muito importante pois a partir desta iremos deduzir uma equação de evolução exata para a ação efetiva média  $\Gamma_k$ . Para isso, note que a partir de  $\phi(x) = \langle\varphi(x)\rangle = \delta W_k/\delta J(x)$ , obtemos a função de dois pontos derivando funcionalmente  $\phi(x)$  com respeito à fonte  $J$ :

$$\frac{\delta\phi(x)}{\delta J(y)} = \frac{\delta^2 W_k[J]}{\delta J(y)\delta J(x)} \equiv G_k(x-y) = \langle\varphi(x)\varphi(y)\rangle - \phi(x)\phi(y). \quad (3.15)$$

Por outro lado, diferenciando funcionalmente a relação (3.11) com respeito a  $\phi$  obtemos

$$\frac{\delta J(y)}{\delta\phi(x)} = \frac{\delta^2\Gamma_k[\phi]}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} + \mathcal{R}_k. \quad (3.16)$$

Imediatamente vemos que a relação acima é a inversa de (3.15), indicando que a função de dois pontos é a inversa da relação  $\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k$ , onde denotamos  $\Gamma_k^{(2)} \equiv \frac{\delta^2\Gamma_k[\phi]}{\delta\phi(y)\delta\phi(x)}$  para a derivada funcional de segunda ordem da ação efetiva média. Para tornar isto mais concreto, basta notar

que

$$\begin{aligned}\delta(x-y) &= \frac{\delta J(x)}{\delta J(y)} = \int d^d z \frac{\delta J(x)}{\delta \phi(z)} \frac{\delta \phi(z)}{\delta J(y)} \\ &= \int d^d z \left[ \frac{\delta^2 \Gamma_k[\phi]}{\delta \phi(z) \delta \phi(x)} + \mathcal{R}_k \right] G_k(z-y),\end{aligned}\quad (3.17)$$

e então, usando uma notação matricial compacta de dimensão infinita a relação acima escreve-se como  $G\tilde{\Gamma}_k = 1$ , e torna-se claro que

$$G_k(x-y) = (\tilde{\Gamma}_k^{(2)} + \mathcal{R}_k)^{-1}. \quad (3.18)$$

Agora, diferenciando a ação efetiva média (3.10) com respeito a  $t = \ln k$ , juntamente com a definição (3.9), teremos

$$k \frac{\partial \Gamma_k[\phi]}{\partial k} = -k \frac{\partial W_k}{\partial k} - k \frac{\partial \Delta S_k[\phi]}{\partial k}, \quad (3.19)$$

onde deve ser notado que  $\frac{\partial}{\partial t} = k \frac{\partial}{\partial k}$ . Por outro lado, sabemos que o gerador funcional  $W_k$  é definido a partir do formalismo das integrais de caminho, definido a partir da relação (3.3), a qual podemos diferenciá-la com respeito à  $t$  a fim de obter uma relação para  $\partial_k W_k$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \exp\{W_k\} &= \frac{\partial}{\partial t} \int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{-S[\varphi] - \Delta S_k[\varphi] + \int d^d x \varphi(x) J(x)\right\} \\ \left(\frac{\partial W_k}{\partial t}\right) \exp\{W_k\} &= \int \mathcal{D}\varphi \frac{\partial}{\partial t} \left(-S - \Delta S_k + \int d^d x J(x) \varphi(x)\right) \exp\left\{-S - \Delta S_k + \int d^d x \varphi(x) J(x)\right\} \\ k \frac{\partial W_k}{\partial k} &= -\frac{1}{2} \int d^d x \left\langle \varphi k \frac{\partial \mathcal{R}_k}{\partial k} \varphi \right\rangle = -\frac{1}{2} \int d^d x \int d^d y \langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle k \partial_k \mathcal{R}_k(x, y),\end{aligned}\quad (3.20)$$

onde o *bracket* introduzido denota um valor esperado normalizado, definido por

$$\langle O \rangle \equiv \exp\{-W_k[J]\} \int \mathcal{D}\varphi O(\varphi) \exp\left\{-S - \Delta S_k + \int J\varphi\right\}, \quad (3.21)$$

sendo  $O$  um observável qualquer, e também introduzimos  $\mathcal{R}_k(x, y) \equiv \mathcal{R}_k(-\partial_x^2) \delta(x-y)$ . Daí, inserindo a expressão (3.20) em (3.19) obtemos

$$\begin{aligned}\partial_k \Gamma_k &= \frac{1}{2} \int d^d x \int d^d y \langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle k \partial_k \mathcal{R}_k(x, y) - k \partial_k \Delta S_k[\phi] \\ &= \frac{1}{2} \int d^d x \int d^d y \langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle k \partial_k \mathcal{R}_k(x, y) - \frac{1}{2} \int d^d x \int d^d y \phi(x) k \partial_k \mathcal{R}_k(x, y) \phi(y) \\ &= \frac{1}{2} \int d^d x \int d^d y k \partial_k \mathcal{R}_k(x, y) (\langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle - \phi(x) \phi(y)) = \frac{1}{2} \text{Tr}[k \partial_k \mathcal{R}_k G],\end{aligned}\quad (3.22)$$

onde o traço significa integração sobre todo o espaço na notação compacta de matrizes de dimensão infinita. Finalmente, obtemos a Equação de Wetterich, também conhecida como

Equação do Grupo de Renormalização Funcional, notando a relação (3.18):

$$k \frac{\partial \Gamma_k[\phi]}{\partial k} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \left( \Gamma_k^{(2)}[\phi] + \mathcal{R}_k \right)^{-1} k \frac{\partial \mathcal{R}_k}{\partial k} \right]. \quad (3.23)$$

Nós obtemos a equação de Wetterich para o caso mais simples, aquele de um único campo escalar propagando-se no espaço-tempo. No entanto, podemos obter a versão desta equação para outros campos, inclusive o caso gravitacional, que será tratado aqui nas seções futuras. A equação de Wetterich é muito importante pois ela contém as correções de loop de todas as ordens, sendo, portanto, uma equação exata, e simples no sentido de ser uma equação de primeira ordem, com o lado direito possuindo um traço funcional bem definido, livre de divergências. No entanto, mesmo sendo exata, não há como resolver a equação de Wetterich (3.23) analiticamente, sendo necessários esquemas de expansão e truncamento.

Uma das maneiras mais comuns de aproximar a equação de Wetterich consiste em expandir a ação efetiva média em uma base definida por operadores funcionais definidos em um “espaço funcional”, cuja definição precisa pode ser visto em [83]. Essa expansão leva a funções beta para as constantes de acoplamento, que podem ser utilizadas para determinar os pontos fixos da teoria. Se for possível encontrar os pontos fixos, então isso significará que a teoria em questão é finita, bem definida e livre de divergências UV, e, portanto, estará “segura”.

### 3.3 Funções- $\beta$ , pontos fixos e expoentes críticos

Como foi dito no fim da seção anterior, é necessário expandir a equação de Wetterich (3.23) a fim de extrairmos informações sobre o comportamento das constantes de acoplamento que descrevem as interações da teoria em questão. Para isso, consideramos que a ação efetiva média  $\Gamma_k[\phi]$  possa ser expandida em uma base determinada por operadores definidos em um “espaço funcional”, onde no caso mais simples do campo escalar, pode ser pensado como o espaço de todos os funcionais de  $\phi$ . Desta forma, procuramos soluções da equação (3.23) da forma

$$\Gamma_k(\phi) = \sum_i g_i(k) \mathcal{O}_i(\phi), \quad (3.24)$$

onde  $g_i(k)$  são as constantes de acoplamento da teoria e os operadores  $\mathcal{O}_i(\phi)$  são operadores definidos por meio de integrais de monômios do campo e suas derivadas. Tomando a derivada da expressão (3.24) com respeito à  $t \equiv \ln k$  teremos

$$\frac{\partial \Gamma_k}{\partial t} = \sum_i \beta_i \mathcal{O}_i, \quad (3.25)$$

onde

$$\frac{\partial g_i}{\partial t} = \beta_i(g_j, k), \quad (3.26)$$

são as chamadas funções beta, que podem, em geral, depender tanto das constantes de acoplamento como da variável *cutoff*  $k$ . Podemos comparar a expressão (3.25) com o lado direito da equação de Wetterich (3.23). Ao fazer isso, podemos expandir o traço do lado direito de (3.23) na base dos operadores  $O_i$ , e então o coeficiente do operador  $O_i$  é a função beta de  $g_i$ . Assim, com algum algebrismo conseguimos extrair explicitamente funções beta da forma abstrata da equação de Wetterich. Na próxima seção vamos ver como funciona este procedimento para o caso gravitacional.

Ao determinarmos as funções beta aplicamos o formalismo Assintoticamente Seguro, que consiste em determinar os pontos fixos da teoria, aqueles que satisfazem as relações  $\beta_i(g_j, k) = 0$ . A existência destes pontos fixos significa que a teoria em questão é bem definida, livre de divergências, e portanto o nome segura. No entanto, os pontos fixos não são universais. Os valores dos pontos fixos poderiam mudar ao fazermos uma redefinição dos campos. Para eliminar este problema foi desenvolvido o conceito dos expoentes críticos, que de fato serão universais. Os expoentes críticos nos diz como é o comportamento da teoria em regiões próximas a um dado ponto fixo. Este comportamento é muito importante pois é ele que determina o poder de previsibilidade da teoria.

Para isso, vamos linearizar as funções beta em torno de seu respectivo ponto fixo, isto é, assumimos uma expansão da forma

$$\frac{\partial g_i}{\partial t} = \beta_i \approx \sum_j \left. \frac{\partial \beta_i}{\partial g_j} \right|_{g_j^*} (g_j - g_j^*). \quad (3.27)$$

As derivadas  $\left. \frac{\partial \beta_i}{\partial g_j} \right|_{g_j^*} \equiv M_{ij}$  determinam uma matriz chamada matriz de estabilidade. Denotemos os autovetores da matriz de estabilidade como  $W_i$  e seus autovalores como  $\theta_n$ . Assim, uma solução da equação (3.27) possui a forma

$$g_i(k) = g_i^* + \sum_n C_n W_i^n \left( \frac{k}{k_0} \right)^{-\theta_n}, \quad (3.28)$$

onde os  $C_n$  são constantes de integração e  $k_0$  uma escala de referência. Os expoentes críticos, isto é, os autovalores  $\theta_n$  podem levar a três conclusões distintas [83]: Se  $\text{Re}(\theta_n) > 0$  então teremos um operador relevante ou direção relevante, se  $\text{Re}(\theta_n) < 0$  teremos um operador irrelevante ou direção irrelevante e se  $\text{Re}(\theta_n) = 0$  teremos um operador marginal. O primeiro caso significa que, quando diminuimos o valor de  $k$  nós teremos que a componente do vetor  $g_i(k) - g_i^*$  na direção do autovetor  $W_i$  irá aumentar, enquanto que no segundo caso irá diminuir. Já no terceiro caso, teremos uma componente completamente oscilatória. O número de operadores relevantes é a quantidade de observáveis que precisamos para fazer uma medida e, portanto, para que uma teoria seja mensurável é necessário uma quantidade finita de operadores relevantes. Uma dada

trajetória  $g_i(k)$  de operadores relevantes, flui de um ponto fixo em um IR e alcança um ponto fixo UV. Ou seja, eles serão “IR repulsivos” e “UV atrativos”. Reciprocamente, sob uma evolução crescente (isto é, aumentando o valor de  $k$ ) todas as contribuições para a soma (3.28) permanecendo a direções relevantes serão amortecidas, enquanto aquelas com direções irrelevantes irão divergir e os coeficientes  $C_n$  forem todos não nulos.

### 3.4 A Ação Efetiva Média para a Gravidade

#### 3.4.1 O significado de “métrica” em Gravitação Quântica

Sabemos que a nível clássico o campo gravitacional é descrito pela Relatividade Geral de Einstein, que foi revisada brevemente no capítulo anterior. Há várias maneiras distintas de tratar matematicamente a Relatividade Geral, no sentido de que nós podemos utilizar diferentes campos como as variáveis dinâmicas para a nossa teoria, sendo o mais comum a métrica, mas há também as tetradas, conexões de spin, etc. Devido a este fato, é natural pensar que para uma versão quântica da Relatividade Geral haverá a possibilidade de usar diversos objetos como os campos elementares da nossa teoria. Nesse sentido, a exigência mais fraca para que um objeto seja uma “métrica” numa teoria quântica gravitacional será a existência de um operador  $\hat{g}_{\mu\nu}(x)$ , simétrico nos índices  $\mu$  e  $\nu$ , tal que agindo em alguns estados  $|\Psi\rangle$  forneceria um valor esperado  $\langle\Psi|\hat{g}_{\mu\nu}(x)|\Psi\rangle \equiv g_{\mu\nu}(x)$  com as propriedades da métrica clássica utilizada em Relatividade Geral, isto é, um campo tensorial de ordem (0,2) definido uma forma quadrática não-degenerada e positiva definida.

É assumido aqui que o operador  $\hat{g}_{\mu\nu}$  é um campo elementar, no sentido de que ele não pode ser construído a partir de outros campos. Por exemplo, poderíamos assumir a representação  $\hat{g}_{\mu\nu} = \hat{e}^a{}_{\mu}\hat{e}^b{}_{\nu}\eta_{ab}$ , onde agora os campos tetrada  $\hat{e}^a{}_{\mu}$  seriam os campos elementares. Nesse sentido, uma “teoria métrica de gravidade quântica” seria uma definida a partir de integrais de caminho da forma  $\int \mathcal{D}\hat{g}_{\mu\nu}\exp(-S)$ , tal que o valor médio do campo seja dada pela integral funcional

$$g_{\mu\nu}(x) = \int \mathcal{D}\hat{g}_{\alpha\beta}\hat{g}_{\mu\nu}(x)e^{-S[\hat{g}]}. \quad (3.29)$$

Note que, ao definirmos um operador “métrica”  $\hat{g}_{\mu\nu}$ , foi dito que esta leva a valores esperados com a propriedade da métrica clássica apenas para alguns estados. O motivo para isto é que nada impede que existam estados tal que os valores esperados do operador métrica não coincidam com a métrica clássica. Por exemplo, poderiam haver estados, digamos  $|\tilde{\Psi}\rangle$ , tais que  $g_{\mu\nu} = \langle\tilde{\Psi}|\hat{g}_{\mu\nu}|\tilde{\Psi}\rangle$  seja não degenerado, isto é, levar a um tensor  $g_{\mu\nu}$  tal que  $\det(g_{\mu\nu}) = 0$  levando a não existência de um elemento de volume  $\sqrt{g}$  e da inversa  $g^{\mu\nu}$ . Desta forma, vemos que é melhor considerarmos  $g_{\mu\nu}(x)$  apenas como um campo tensorial simétrico, e não uma métrica, visto que não necessariamente será atendido as exigências para que seja uma métrica.

O ponto é que não há uma maneira “mais correta” ou “melhor” sobre escolher as propriedades do operador  $\hat{g}_{\mu\nu}$  (e conseqüentemente das variáveis de integração nas integrais funcionais). No entanto, quando comparamos a construção direta da integral funcional, o método baseado na equação exata do grupo de renormalização tem a vantagem que a escolha das propriedades das variáveis de integração funcionais sejam adiados até um determinado estágio de desenvolvimento. Com isso, vamos utilizar os resultados já disponíveis para nos guiarmos a escolhas fisicamente interessantes.

Quando tentamos desenvolver um grupo de renormalização para a gravidade nas linhas do que fizemos para o campo escalar na seção anterior, poderíamos pensar em expandir a equação de Wetterich no espaço funcional onde operadores que são funcionais do valor esperado  $g_{\mu\nu} \equiv \langle \hat{g}_{\mu\nu} \rangle$  que são invariantes sob transformações gerais de coordenadas. No entanto, por motivos que serão dados na próxima seção, vamos ver que este não será o caso.

Resumindo, vamos listar as propriedades desejadas para termos uma “teoria métrica de gravitação quântica” que servirão como um ponto de partida para o método do Assintoticamente Seguro:

1. Os graus de liberdade gravitacional são codificados em um tensor métrico  $\hat{g}_{\mu\nu}$  que serve como o campo elementar da teoria.
2. Deve ser uma teoria de gauge, isto é, uma teoria covariante sob transformações de gauge implicado por transformações gerais de coordenadas.
3. A teoria é independente do *background*.

Note que estas propriedades, embora inspiradas na estrutura formal da Relatividade Geral, não fazem nenhuma menção a respeito do uso da ação de Einstein-Hilbert e, portanto, a dinâmica quântica da métrica  $\hat{g}_{\mu\nu}$  está completamente em aberto. Isso não afeta conceitualmente o programa Assintoticamente Seguro para descrever a gravidade quântica, um contraste bastante notável quando comparamos com outros métodos utilizados para tentar descrever o comportamento quântico do campo gravitacional, tais como a gravitação quântica canônica.

### 3.4.2 A integral funcional com gauge fixo

A fim de tentar descrevermos formalmente como deve ser a forma da ação efetiva média para o caso gravitacional e, conseqüentemente, da equação exata do grupo de renormalização, precisamos introduzir uma série de exigências para obtermos uma teoria que seja adequada para descrever os aspectos quânticos da gravitação.

Primeiramente, assim como fizemos para o caso do campo escalar, introduzimos a

integral funcional sobre os tensores  $\hat{g}_{\mu\nu}$  da forma

$$\int \mathcal{D}\hat{g}_{\mu\nu} \exp(-S[\hat{g}_{\mu\nu}] + \text{termos de fonte}). \quad (3.30)$$

Naturalmente, pelo fato de a gravidade ser uma teoria de gauge, exigimos que a ação  $S[\hat{g}_{\mu\nu}]$  seja invariante por transformações de gauge, isto é, invariante por transformações gerais de coordenadas que agem sobre a métrica de acordo com

$$\delta \hat{g}_{\mu\nu} = \mathcal{L}_v \hat{g}_{\mu\nu} \equiv v^\rho \partial_\rho \hat{g}_{\mu\nu} + \partial_\mu v^\rho \hat{g}_{\rho\nu} + \partial_\nu v^\rho \hat{g}_{\rho\mu}, \quad (3.31)$$

onde  $\mathcal{L}_v$  denota a derivada de Lie com respeito ao campo vetorial  $v^\mu$ .

Sem perda de generalidade, vamos assumir uma métrica com a seguinte decomposição  $\hat{g}_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \hat{h}_{\mu\nu}$ , onde  $\bar{g}_{\mu\nu}$  representa a métrica de um *background* fixo, de tal forma que a medida de integração agora passa a ser  $\mathcal{D}\hat{h}_{\mu\nu}$  e a ação funcional toma a forma  $\int \mathcal{D}\hat{h}_{\mu\nu} \exp(-S[\bar{g} + \hat{h}] + \dots)$ . Além disso, nós fixamos o gauge das integrais sobre  $\hat{h}_{\mu\nu}$  exigindo que a métrica fixa  $\bar{g}_{\mu\nu}$  não muda sob as transformações (3.31)

$$\delta^Q \hat{h}_{\mu\nu} = \mathcal{L}_v \hat{g}_{\mu\nu} \quad \text{com} \quad \delta^Q \bar{g}_{\mu\nu} = 0, \quad (3.32)$$

onde o sobrescrito  $Q$  vem do fato de as transformações  $\delta^Q$  serem chamadas de transformações de gauge “quânticas”.

Denotando  $F_\mu(\hat{h}; \bar{g})$  como uma função fixadora de gauge arbitrária, podemos utilizar o método de Faddeev-Popov [83] para este tipo de invariância de gauge e obtermos a seguinte forma modificada para a integral funcional do caso gravitacional

$$\int \mathcal{D}\hat{h}_{\mu\nu} \mathcal{D}C^\mu \mathcal{D}\bar{C}_\mu \exp(-S[\bar{g} + \hat{h}] - S_{\text{gf}}[\hat{h}; \bar{g}] - S_{\text{gh}}[\hat{h}, C, \bar{C}; \bar{g}]). \quad (3.33)$$

O termo  $S_{\text{gf}}$  é adicionado a ação clássica a fim de fixar o gauge (o subscrito “gf” vem do termo em inglês *gauge-fixing*) e possui uma forma geral dada por

$$S_{\text{gf}}[\hat{h}; \bar{g}] = \frac{1}{2\alpha} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \bar{g}^{\mu\nu} F_\mu(\hat{h}; \bar{g}) F_\nu(\hat{h}; \bar{g}), \quad (3.34)$$

onde  $\alpha$  e  $F_\mu(\hat{h}; \bar{g})$  são respectivamente uma constante e funções arbitrárias.

Finalmente, a ação associada aos campos fantasma e anti-fantasma de Faddeev-Popov, denotados respectivamente por  $C^\mu$  e  $\bar{C}_\mu$ , é dada pela seguinte expressão

$$S_{\text{gh}}[\hat{h}, C, \bar{C}; \bar{g}] = -\kappa^{-1} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \bar{C}_\mu \bar{g}^{\mu\nu} \frac{\partial F_\nu}{\partial \hat{h}_{\alpha\beta}} \mathcal{L}_C(\bar{g}_{\alpha\beta} + \hat{h}_{\alpha\beta}), \quad (3.35)$$



onde  $\kappa$  é um parâmetro com unidade de massa e é frequentemente assumido com a forma

$$\kappa \equiv (32\pi\bar{G})^{-1/2}, \quad (3.36)$$

onde  $\bar{G}$  é um valor de referência para a constante de Newton. Não iremos dar muito detalhes sobre o setor fantasma, uma vez que no futuro iremos “congelar” a evolução desta ação de forma a simplificar nossos resultados.

Finalmente, é importante salientarmos que a ação com gauge fixo sob a integral (3.33) é invariante sob as seguintes transformações BRST (bruscamente falando são um conjunto de transformações que implementam efetivamente a invariância de gauge)

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon^{\text{BRST}} \hat{h}_{\mu\nu} &= \epsilon \kappa^{-2} \mathcal{L}_C \hat{g}_{\mu\nu} = \epsilon \kappa^{-2} \mathcal{L}_C (\bar{g}_{\mu\nu} + \hat{h}_{\mu\nu}), \\ \delta_\epsilon^{\text{BRST}} \bar{g}_{\mu\nu} &= 0, \\ \delta_\epsilon^{\text{BRST}} C^\mu &= \epsilon \kappa^{-2} C^\nu \partial_\nu C^\mu, \\ \delta_\epsilon^{\text{BRST}} \bar{C}_\mu &= \epsilon (\alpha \kappa)^{-1} F_\mu, \end{aligned} \quad (3.37)$$

onde  $\epsilon$  é um parâmetro que anti-comuta entre si e independente de  $x$ .

Também é importante o fato de que a ação completa, incluindo os termos fantasma de Faddeev-Popov, são invariantes por uma classe especial de transformações de gauge chamadas “condições de fixação de gauge do tipo *background*” definidas pelas relações

$$\delta^B \hat{h}_{\mu\nu} = \mathcal{L}_v \hat{h}_{\mu\nu}, \quad \delta^B \bar{g}_{\mu\nu} = \mathcal{L}_v \bar{g}_{\mu\nu}. \quad (3.38)$$

Estas transformações garantem que a ação efetiva resultante da integral funcional (3.33) serão invariantes por difeomorfismos (funções invertíveis que mapeiam uma variedade diferenciável em outra) qualquer que seja a função de fixação de gauge  $F_\mu(\hat{h}; \bar{g})$ . Note que estas transformações garantem que a métrica completa  $\hat{g}_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \hat{h}_{\mu\nu}$  seja invariante tanto por transformações de gauge do tipo background definidas acima, como para as transformações de gauge quânticas, isto é,  $\delta^B \hat{g}_{\mu\nu} = \delta^Q \hat{g}_{\mu\nu} = \mathcal{L}_v \hat{g}_{\mu\nu}$ .

### 3.4.3 Função Reguladora, Fontes e Valores Esperados

Assim como fizemos para o caso do campo escalar propagando-se em um *background* plano, precisamos adicionar um termo regulador na ação definida pela integral funcional (3.33) com a finalidade de efetuar o cutoff no infravermelho, suprimindo os modos de “pequenos momentos” tanto das flutuações da métrica  $\hat{h}_{\mu\nu}$  quanto dos campos fantasmas de Faddeev-Popov. Portanto, a função reguladora do infravermelho deve ser adicionada multipli-

cando o seguinte fator no integrando de (3.33)

$$e^{-\Delta S_k[\hat{h}, C, \bar{C}; \bar{g}]}. \quad (3.39)$$

Neste caso os modos de “pequenos” momentos são definidos como as autofunções do operador laplaciano  $\bar{D}^2 \equiv \bar{g}^{\mu\nu} \bar{D}_\mu \bar{D}_\nu$ , cujo autovalores são menores que o momento de escala  $k^2$ , onde  $\bar{D}_\mu$  representa a derivada covariante construído a partir da métrica fixa  $\bar{g}_{\mu\nu}$ . A razão para que os autovalores dos modos  $\hat{h}_{\mu\nu}$  e dos fantasmas serem do operador Laplaciano *background*  $\bar{D}^2$  ao invés de  $D^2$ , é devido ao fato de que a equação do grupo de renormalização resultante será garantida possuir termos que contém apenas derivadas funcionais de segunda ordem de  $\Gamma_k$  [83].

A forma escolhida para a função reguladora  $\Delta S_k$  é assumida como sendo bilinear nos campos dinâmicos  $\hat{h}, C, \bar{C}$  e usamos o seguinte ansatz [83]

$$\Delta S_k = \frac{\kappa^2}{2} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \hat{h}_{\mu\nu} \mathcal{R}_k^{\text{grav}}[\hat{g}]^{\mu\nu\rho\sigma} \hat{h}_{\rho\sigma} + \sqrt{2} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \bar{C}_\mu \mathcal{R}_k^{\text{gh}}[\bar{g}] C^\mu. \quad (3.40)$$

De maneira análoga ao que fizemos na seção anterior, os operadores cutoff  $\mathcal{R}_k^{\text{grav}}$  e  $\mathcal{R}_k^{\text{gh}}$  devem possuir a propriedade desejada de deixarem os modos de grandes momentos  $p^2 \gg k^2$  inalterados e suprimir os modos de pequenos momentos  $p^2 \ll k^2$ . Ambos os operadores cutoff são assumidos com a estrutura geral  $\mathcal{R}_k[\bar{g}] = \mathcal{Z}_k k^2 R^{(0)}(-\bar{D}^2/k^2)$ , com a diferença de que  $\mathcal{Z}_k \equiv \mathcal{Z}_k^{\text{gh}}$  é um número puro enquanto que  $\mathcal{Z}_k \equiv \mathcal{Z}_k^{\text{grav}}$  deve ser um tensor de 4 índices construídos a partir da métrica fixa  $\bar{g}_{\mu\nu}$ .

Também é importante notarmos que o termo regulador  $\Delta S_k$  deve ser invariante sob transformações de gauge do tipo background definidos em (3.38)

$$\delta^B \Delta S_k[\hat{h}, C, \bar{C}; \bar{g}] = 0, \quad (3.41)$$

embora não seja invariante por transformações BRST (3.37)

$$\delta_\epsilon^{\text{BRST}} \Delta S_k[\hat{h}, C, \bar{C}; \bar{g}] \neq 0. \quad (3.42)$$

A invariância BRST é recuperada apenas no limite  $k \rightarrow 0$ .

Com isso, escrevemos a integral funcional definida em (3.33) incluindo o fator extra (3.39) responsável por realizar o cutoff e definimos

$$\exp(W_k[t^{\mu\nu}, \sigma^\mu, \bar{\sigma}_\mu; \beta^{\mu\nu}, \tau_\mu; \bar{g}_{\mu\nu}]) = \int \mathcal{D}\hat{h}_{\mu\nu} \mathcal{D}C^\mu \mathcal{D}\bar{C}_\mu \exp(-S[\bar{g} + \hat{h}] - S_{\text{gf}}[\hat{h}; \bar{g}] - S_{\text{gh}}[\hat{h}, C, \bar{C}; \bar{g}] - \Delta S_k[\hat{h}, C, \bar{C}; \bar{g}] - S_{\text{fonte}}), \quad (3.43)$$

onde a o termo  $S_{\text{fonte}}$  refere-se a ação que descreve a fonte dos campos dinâmicos  $\hat{h}_{\mu\nu}$ ,  $C^\mu$  e  $\bar{C}_\mu$ , que são representados respectivamente por  $t^{\mu\nu}$ ,  $\bar{\sigma}_\mu$  e  $\sigma^\mu$  respectivamente. Assim, teremos para a última parte da ação

$$S_{\text{fonte}} = - \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \{ t^{\mu\nu} \hat{h}_{\mu\nu} + \bar{\sigma}_\mu C^\mu + \sigma^\mu \bar{C}_\mu \}. \quad (3.44)$$

É muito importante salientar que poderíamos adicionar mais dois termos de fontes na ação acima para acoplar as variações BRST dos campos  $\hat{h}_{\mu\nu}$  e dos campos fantasma  $C$  e  $\bar{C}$ . Porém, nós não iremos precisar destes termos no que segue, mas eles são de suma importância para formular as identidades de Ward que descreve a invariância BRST a nível quântico [83].

Desta forma, assim como fizemos para o campo escalar, os valores esperados dos campos são definidos por meio de derivadas funcionais de  $W_k[J; \bar{g}_{\mu\nu}]$  com respeito às respectivas fontes  $J \equiv (t^{\mu\nu}, \sigma^\mu, \bar{\sigma}_\mu)$ . Definindo  $\varphi \equiv (h_{\mu\nu}, \xi^\mu, \bar{\xi}_\mu)$  como os valores esperados de  $\hat{\varphi} \equiv (\hat{h}_{\mu\nu}, C^\mu, \bar{C}_\mu)$ , teremos

$$h_{\mu\nu} = \langle \hat{h}_{\mu\nu} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \frac{\delta W_k}{\delta t^{\mu\nu}}, \quad \xi^\mu = \langle C^\mu \rangle = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \frac{\delta W_k}{\delta \bar{\sigma}_\mu}, \quad \bar{\xi}_\mu = \langle \bar{C}_\mu \rangle = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \frac{\delta W_k}{\delta \sigma^\mu}, \quad (3.45)$$

que podemos escrever na notação compacta

$$\varphi^i(x) = \langle \hat{\varphi}^i(x) \rangle = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}(x)}} \frac{\delta}{\delta J_i(x)} W_k[J; \bar{g}], \quad (3.46)$$

onde os fatores explícitos de  $\sqrt{\bar{g}}$  são introduzidos para garantir que tanto as fontes como os campos se transformem como tensores sob transformações gerais de coordenadas.

Finalmente, assim como fizemos na seção anterior com o campo escalar, precisamos definir a ação efetiva padrão a fim de escrevermos a ação efetiva média. A ação efetiva padrão  $\tilde{\Gamma}_k$  é determinada ao aplicarmos uma transformação de Legendre de  $W_k$  com respeito as fontes  $J$  e então substituímos a relação inversa  $J = J[\varphi; \bar{g}]$  obtida através de (3.46) obtendo

$$\tilde{\Gamma}_k[h, \xi, \bar{\xi}; \bar{g}] = \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \{ t^{\mu\nu} h_{\mu\nu} + \bar{\sigma}_\mu \xi^\mu + \sigma^\mu \bar{\xi}_\mu \} - W_k[t, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}]. \quad (3.47)$$

Note que, usando o formalismo da ação efetiva, os valores esperados dos campos é que fazem o papel das variáveis independentes da teoria, ao invés das fontes  $J$ . Também,  $\tilde{\Gamma}_k$  determina a seguinte relação entre os campos e as fontes

$$\frac{\delta \tilde{\Gamma}_k}{\delta h_{\mu\nu}} = \sqrt{\bar{g}} t^{\mu\nu}, \quad \frac{\delta \tilde{\Gamma}_k}{\delta \xi^\mu} = -\sqrt{\bar{g}} \sigma^\mu, \quad \frac{\delta \tilde{\Gamma}_k}{\delta \bar{\xi}_\mu} = -\sqrt{\bar{g}} \bar{\sigma}_\mu. \quad (3.48)$$

### 3.4.4 Definição formal da ação efetiva média e a Equação de Wetterich para o caso gravitacional

Finalmente, temos todos os ingredientes necessários para definir a ação efetiva média  $\Gamma_k$  para o caso gravitacional. Assim como fizemos para o caso do campo escalar, a ação efetiva média é a diferença da ação efetiva padrão  $\tilde{\Gamma}_k$  (3.46) pelo termo regulador  $\Delta S_k$  (3.40)

$$\Gamma_k[h, \xi, \bar{\xi}; \bar{g}] = \tilde{\Gamma}_k[h, \xi, \bar{\xi}; \bar{g}] - \Delta S_k[h, \xi, \bar{\xi}; \bar{g}]. \quad (3.49)$$

A equação acima constitui a chamada definição formal da ação efetiva média, uma vez que é baseada em uma integral funcional que possui sentido matemático apenas na presença de um termo regulador.

Poderíamos também considerar  $\Gamma_k$  um funcional do valor esperado da métrica completa  $g_{\mu\nu}$  dada por

$$g_{\mu\nu}(x) = \langle \hat{g}_{\mu\nu}(x) \rangle \equiv \bar{g}_{\mu\nu}(x) + h_{\mu\nu}(x), \quad (3.50)$$

sendo o análogo da métrica quântica  $\hat{g}_{\mu\nu} \equiv \bar{g}_{\mu\nu} + \hat{h}_{\mu\nu}$ . Assim teríamos uma segunda definição de  $\Gamma_k$ , como um funcional de  $g_{\mu\nu}$  ao invés de  $h_{\mu\nu}$

$$\Gamma_k[g, \bar{g}, \xi, \bar{\xi}] \equiv \Gamma_k[h, \xi, \bar{\xi}; \bar{g}] \Big|_{h=g-\bar{g}}. \quad (3.51)$$

Embora a diferença entre as duas definições pareçam triviais, elas possuem pontos de vista totalmente diferentes. No primeiro caso, a ação  $\Gamma_k[h, \xi, \bar{\xi}; \bar{g}]$  depende do valor esperado das flutuações da métrica  $h_{\mu\nu}$ , sendo considerados como excitações da matéria sobre um espaço-tempo clássico com métrica  $\bar{g}_{\mu\nu}$ . No segundo caso  $\Gamma_k[g, \bar{g}, \xi, \bar{\xi}]$  depende tanto do valor esperado da métrica quântica  $g_{\mu\nu}(x) \equiv \langle \hat{g}_{\mu\nu} \rangle$  e da métrica de fundo  $\bar{g}_{\mu\nu}$  e portanto teremos uma dependência extra de  $\bar{g}$  que se combina com  $h$  para construir a métrica completa  $g = \bar{g} + h$ .

Por fim vamos mostrar a forma da equação de Wetterich para o caso gravitacional, a equação que rege a evolução da ação efetiva média  $\Gamma_k$ . Para isto, basta diferenciarmos a equação (3.43) com respeito ao parâmetro  $t = \ln k$  obtendo na notação matricial

$$-\partial_t W_k = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \langle \hat{h} \otimes \hat{h} \rangle (\partial_t \hat{\mathcal{R}}_k)_{hh} \right] - \text{Tr} \left[ \langle \bar{C} \otimes C \rangle (\partial_t \hat{\mathcal{R}}_k)_{\bar{\xi}\xi} \right], \quad (3.52)$$

onde  $\hat{\mathcal{R}}_k$  é uma matriz definida no espaço dos campos cujas entradas são assumidas como sendo

$$\begin{aligned} (\hat{\mathcal{R}}_k)_{hh}^{\mu\nu\rho\sigma} &= \kappa^2 (\mathcal{R}_k^{\text{grav}}[\bar{g}])^{\mu\nu\rho\sigma}, \\ (\hat{\mathcal{R}}_k)_{\bar{\xi}\xi} &= \sqrt{2} \mathcal{R}_k^{\text{gh}}[\bar{g}]. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Assim como fizemos para o caso do campo escalar, precisamos escrever o lado direito de (3.52) em termos da ação efetiva média  $\Gamma_k$ . Para isso, basta notarmos mais uma vez

que a função conectada de dois pontos

$$\begin{aligned} G^{ij}(x,y) &\equiv \langle \hat{\varphi}^i(x) \hat{\varphi}^j(y) \rangle - \varphi^i(x) \varphi^j(y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\bar{g}(x)\bar{g}(y)}} \frac{\delta^2 W_k}{\delta J_i(x) \delta J_j(y)}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

e a Hessiana de  $\tilde{\Gamma}_k$  dada por

$$(\tilde{\Gamma}_k^{(2)})_{ij}(x,y) \equiv \frac{1}{\sqrt{\bar{g}(x)\bar{g}(y)}} \frac{\delta^2 \tilde{\Gamma}_k}{\delta \varphi^i(x) \delta \varphi^j(y)}, \quad (3.55)$$

são matrizes inversas por satisfazerem a relação

$$\int d^d y \sqrt{\bar{g}(y)} G^{ij}(x,y) (\tilde{\Gamma}_k^{(2)})_{jl}(y,z) = \delta_j^i \frac{\delta(x-z)}{\sqrt{\bar{g}(z)}}, \quad (3.56)$$

lembrando que nesta notação compacta  $\varphi^i = (h_{\mu\nu}, \xi^\mu, \bar{\xi}_\mu)$  representa os respectivamente os valores médios dos campos  $\hat{h}_{\mu\nu}, C^\mu, \bar{C}_\mu$  com as suas devidas fontes  $J^i = (t^{\mu\nu}, \bar{\sigma}_\mu, \sigma^\mu)$ .

Usando os resultados acima chega-se a equação exata para o grupo de renormalização para a Ação Efetiva Média gravitacional

$$\partial_t \Gamma_k[h, \xi, \bar{\xi}; \bar{g}] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ (\Gamma_k^{(2)} + \hat{\mathcal{R}}_k)_{hh}^{-1} (\partial_t \hat{\mathcal{R}}_k)_{hh} \right] - \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \left\{ (\Gamma_k^{(2)} + \hat{\mathcal{R}}_k)_{\xi\xi}^{-1} - ((\Gamma_k^{(2)} + \hat{\mathcal{R}}_k)_{\xi\xi}^{-1}) \right\} (\partial_t \hat{\mathcal{R}}_k)_{\xi\xi} \right]. \quad (3.57)$$

Lembre que nessa notação matricial compacta os traços funcionais do lado direito da equação acima são dados por integrais do tipo  $\int d^d x \sqrt{\bar{g}}$  e a Hessiana  $\Gamma_k^{(2)}$  sendo dada por

$$(\Gamma_k^{(2)})_{ij}(x,y) \equiv \langle x, i | \Gamma_k^{(2)} | y, j \rangle = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}(x)\bar{g}(y)}} \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \varphi^i(x) \delta \varphi^j(y)}, \quad (3.58)$$

utilizando os elementos de matriz no espaço das posições.

Para qualquer função reguladora  $\hat{\mathcal{R}}_k$  que atenda as propriedades desejadas, pode ser mostrado que o traço do lado direito de (3.57) é convergente ambos no infravermelho (IR) e ultravioleta (UV), com os modos de grandes momentos suprimidos exponencialmente. Como foi dito, resolver a equação (3.57) de forma exata é bastante complicada e portanto, em geral, é feito um *ansatz* para a forma de  $\Gamma_k$  que ao substituirmos na equação (3.57) fornece as funções beta associadas as constantes de acoplamento. Na próxima seção vamos mostrar um dos *ansatz* mais conhecidos na literatura, o chamado truncamento de Einstein-Hilbert.

### 3.4.5 Truncamento de Einstein-Hilbert

Como foi dito, resolver a equação exata para obter o fluxo do grupo de renormalização (3.57) é uma tarefa bastante complicada ou até mesmo impossível. Devido a isso, há uma

técnica bastante conhecida na literatura para obter soluções não-perturbativas de forma aproximada, que consiste em considerarmos a evolução da ação efetiva média  $\Gamma_k$  exata em uma teoria do espaço que é parametrizada apenas por algumas constantes de acoplamento de interesse [83].

No caso gravitacional uma das aproximações mais conhecidas é a chamada “truncamento de Einstein-Hilbert”, o qual usaremos aqui para mostrar que consiste em expandirmos  $\Gamma_k$  no subespaço do espaço funcional gerado pela constante de Newton  $G_k$  e a constante cosmológica  $\bar{\lambda}_k$ . O truncamento de Einstein-Hilbert utiliza o seguinte *ansatz* para a ação efetiva média  $\Gamma_k$ , inspirado na ação clássica de Einstein-Hilbert da relatividade geral

$$\Gamma_k[g_{\mu\nu}] = \frac{1}{16\pi G_k} \int d^d x \sqrt{g} \{-R(g) + 2\bar{\lambda}_k\}, \quad (3.59)$$

no caso geral de  $d$  dimensões. É importante salientar que o *ansatz* acima deve ser utilizado na forma reduzida da equação exata (3.57), obtida ao “congelarmos” o setor fantasma por meio de um mecanismo que não a permite a evolução da ação fantasma (3.35) [83]. A forma reduzida se assemelha bastante com a forma obtida para o caso do campo escalar e dada por [83]

$$k\partial_k \Gamma_k = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ k\partial_k \mathcal{R}_k^{\text{grav}} (\mathcal{R}_k^{\text{grav}} + \Gamma_k^{(2)})^{-1} \right]. \quad (3.60)$$

O método então consiste em utilizarmos o *ansatz* (3.59) na forma reduzida da equação exata para o grupo de renormalização (3.60) que nos leva ao seguinte conjunto de equações diferenciais acopladas para as constantes de acoplamento  $g_k \equiv k^{d-2} G_k$  e  $\lambda_k \equiv k^{-2} \bar{\lambda}_k$  [23, 51, 58, 83, 96]

$$\partial_t g(k) = (d-2 + \eta_N)g(k), \quad (3.61)$$

e

$$\partial_t \lambda(k) = -(2 - \eta_N)\lambda + \frac{1}{2} g (4\pi)^{(1-\frac{d}{2})} [2d(d+1)\Phi_{\frac{d}{2}}^1(-2\lambda) - 8d\Phi_{\frac{d}{2}}^1(0) - d(d+1)\eta_N \tilde{\Phi}_{\frac{1}{2}}^1(-2\lambda)], \quad (3.62)$$

onde novamente  $t = \ln k$  é o parâmetro de evolução e  $k$  o momento de escala que usamos como referência para realizar o *cutoff*. A função  $\eta_N(g, \lambda)$  é definido a partir de duas outras funções  $B_1(\lambda)$  e  $B_2(\lambda)$  a partir da relação

$$\eta_N(g, \lambda) = \frac{g B_1(\lambda)}{1 - g B_2(\lambda)}, \quad (3.63)$$

com

$$B_1(\lambda) \equiv \frac{1}{3} (4\pi)^{(1-\frac{d}{2})} [d(d+1)\Phi_{\frac{d}{2}-1}^1(-2\lambda) - 6d(d-1)\Phi_{\frac{d}{2}}^2(-2\lambda) - 4d\Phi_{\frac{d}{2}-1}^1(0) - 24\Phi_{\frac{d}{2}}^2(0)], \quad (3.64)$$

$$B_2(\lambda) \equiv -\frac{1}{6} (4\pi)^{(1-\frac{d}{2})} [d(d+1)\tilde{\Phi}_{\frac{d}{2}-1}^1(-2\lambda) - 6d(d-1)\tilde{\Phi}_{\frac{d}{2}}^2(-2\lambda)], \quad (3.65)$$

onde finalmente as funções corte  $\Phi_n^p$  e  $\tilde{\Phi}_n^p$  são definidas como

$$\Phi_n^p(s) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dz z^{n-1} \frac{R^{(0)}(z) - zR^{(0)'}(z)}{[z + R^{(0)}(z) + s]^p}, \quad (3.66)$$

$$\tilde{\Phi}_n^p(s) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dz z^{n-1} \frac{R^{(0)}(z)}{[z + R^{(0)}(z) + s]^p}, \quad (3.67)$$

onde  $p = 1, 2, \dots$  e  $\Gamma(n)$  é a função gama de Euler. Aqui  $R^{(0)}(z)$  é a parte funcional da função reguladora, com  $z \equiv p^2/k^2$ . Para os cálculos seguintes é utilizado a forma exponencial (3.39) para a parte funcional  $R^{(0)}(z)$ .

No que segue vamos desconsiderar a influência da constante cosmológica em nossos cálculos, que pode ser feito ao considerarmos o limite  $\bar{\lambda} \ll k^2$  levando a  $\lambda(k) \approx 0$  [96,97]. Esta aproximação simplifica bastante as equações resultante para  $g(k)$ , e, conseqüentemente, para as suas respectivas funções beta

$$k\partial_k g(k) = (2 + \eta_N)g(k) = \beta(g(k)), \quad (3.68)$$

onde agora

$$\eta_N(g) = \frac{g B_1(0)}{1 - g B_2(0)}, \quad (3.69)$$

com

$$B_1(0) = -\frac{1}{3\pi} [24\Phi_2^2(0) - \Phi_1^1(0)], \quad (3.70)$$

$$B_2(0) = \frac{1}{6\pi} [18\tilde{\Phi}_2^2(0) - 5\tilde{\Phi}_1^1(0)]. \quad (3.71)$$

É direto obter a partir das definições (3.66) e (3.67) os seguintes resultados  $\Phi_1^1(0) = \pi^2/2$ ,  $\Phi_2^2(0) = \tilde{\Phi}_1^1(0) = 1$  e  $\tilde{\Phi}_2^2(0) = 1/2$  que nos leva a

$$B_1(0) = \frac{\pi}{18} - \frac{8}{\pi}, \quad B_2 = \frac{2}{3\pi}. \quad (3.72)$$

Com estes valores para  $B_1(0)$  e  $B_2(0)$  e usando as seguintes definições

$$\omega \equiv -\frac{1}{2}B_1(0), \quad \omega' = \omega + B_2(0) \quad (3.73)$$

a função beta para  $g(k)$  toma a seguinte forma

$$\beta(g) = 2g \left( \frac{1 - \omega' g}{1 - B_2(0)g} \right), \quad (3.74)$$

onde extraímos as relações

$$\omega = \frac{4}{\pi} \left( 1 - \frac{\pi^2}{144} \right), \quad \omega' = \frac{14}{3\pi} - \frac{\pi}{36}. \quad (3.75)$$

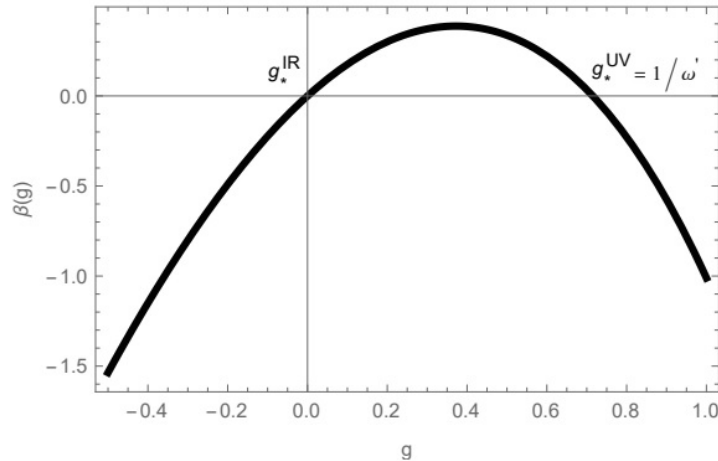


Figura 3: Comportamento da função  $\beta$  para o caso gravitacional, quando desconsideramos a influência cosmológica. Podemos ver que o ponto fixo  $g = g_*^{UV}$  separa um regime de acoplamento fraco ( $g < g_*^{UV}$ ) de um regime de acoplamento forte ( $g > g_*^{UV}$ ). Essa imagem foi retirada do artigo [96].

Com as considerações acima, a equação de evolução para o fluxo  $g(k)$  (3.68) implica a existência de dois pontos fixos, denotados por  $g_*$ , que, como vimos, é obtido ao resolvermos  $\beta(g_*) = 0$ . Estas soluções nos levam a um ponto fixo atrativo gaussiano atrativo para o infravermelho (IR),  $g_*^{IR} = 0$ , enquanto o outro é um ponto fixo não-gaussiano atrativo para o ultravioleta (UV) [83, 96] dado por

$$g_*^{UV} = \frac{1}{\omega'} \quad (3.76)$$

O comportamento da função  $\beta(g)$  em função da constante de acoplamento pode ser visto na figura 3 [96].

Pode ser mostrado que a região importante a qual iremos nos preocupar é onde a função  $\beta(g)$  é positiva, que se dá no intervalo  $[0, g_*^{UV}]$ , que flui de  $g_*^{IR}$  para  $k \rightarrow 0$  e  $g_*^{UV}$  para  $k \rightarrow \infty$  [83, 96]. Com isso, integrando a equação diferencial (3.68) utilizando a função beta (3.74) obtemos de forma direta [58, 83, 96]

$$\frac{g(k)}{(1 - \omega')^{\frac{\omega}{\omega'}}} = \frac{g(k_0)}{[1 - \omega' g(k_0)]^{\frac{\omega}{\omega'}}} \left( \frac{k}{k_0} \right)^2. \quad (3.77)$$

Pode ser mostrado que a expressão acima não pode ser resolvida analiticamente para  $g(k_0)$  e para que tenhamos uma expressão analítica para a função “constante” de Newton precisamos notar que  $\omega'/\omega \approx 1,18$ , isto é, da ordem da unidade. Substituindo a aproximação  $\omega \approx \omega'$  chegamos na seguinte forma para a função  $g(k)$  [58, 83, 96]

$$g(k) = \frac{g(k_0)k^2}{\omega g(k_0)k^2 + [1 - \omega g(k_0)]k_0^2}. \quad (3.78)$$

Finalmente, obtemos a forma completa para a, agora com o *status* de função, “constante” de



Newton com as correções devido à GAS, a partir de  $G(k) \equiv g(k)/k^2$

$$G(k) = \frac{G(k_0)}{1 + \omega G(k_0)[k^2 - k_0^2]}. \quad (3.79)$$

Sem perda de generalidade, podemos escolher a escala de referência  $k_0 = 0$  e fazemos a seguinte identificação  $G_0 \equiv G(k_0 = 0)$  com o valor usual da constante de Newton e então obtemos

$$G(k) = \frac{G_0}{1 + \omega G_0 k^2}. \quad (3.80)$$

As correções quânticas devido à teoria Assintoticamente Segura implica na promoção da constante de Newton para o status de uma função e nós veremos que consequências isto leva para a ação do setor gravitacional, e, conseqüentemente das equações de movimento.

### 3.4.6 A equação de Einstein Modificada

Como vimos na subseção anterior, o método assintoticamente seguro implica que as constantes de acoplamento da teoria tornam-se funções do parâmetro de escala  $k$ , o momento de referência no qual os modos de “pequenos momentos” são suprimidos. No caso da gravidade, utilizando o truncamento específico de Einstein-Hilbert, vimos que estas correções quânticas implicam que a constante de Newton agora será  $G_0 \rightarrow G(k)$  dado pela expressão (3.80).

Entretanto, no caso gravitacional, o *cutoff*  $k$  não é identificado de uma maneira clara, no sentido de estar relacionado com quantidades físicas envolvidas na teoria. Por exemplo, pode ser mostrado que no caso eletromagnético, o parâmetro  $k$  está relacionado ou com estados ligados, neste caso com o raio do átomo de hidrogênio, ou com processos de espalhamento através do parâmetro de impacto [55].

No caso de um espaço-tempo plano o próprio comprimento pode ser usado como escala padrão e a seguinte identificação  $k = \xi/x$  parece adequada neste caso, desde que os modos de Fourier no espaço-tempo plano são associados com o momento e, portanto, o comprimento. No entanto, esta identificação não pode ser adequada para espaços curvos em geral, pois uma tal identificação dos modos de Fourier com o momento nem sempre é possível.

No entanto, pode ser mostrado que para alguns espaços-tempo específicos há certas identificações plausíveis devido ao formato da métrica. Por exemplo, para a solução cosmológica Friedmann-Robertson-Walker (FRW) a identificação  $k = k(t, a(t), \dot{a}(t), \dots)$  parece ser uma escolha razoável. Também, no caso da solução de vácuo Schwarzschild podemos utilizar o comprimento físico  $d(x) = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$  para fazer a seguinte identificação  $k = \xi/d(x)$  [55]. Entretanto, é necessário utilizar uma identificação geral que sirva para qualquer métrica utilizada em relatividade geral.

Como vimos, o parâmetro de escala  $k$  determina o padrão para determinar os mo-

dos de “pequenos” momentos. Como em relatividade geral o comprimento físico depende do observador, este não é uma opção viável para a identificação do parâmetro  $k$ . Virá a ser que a quantidade apropriada que fornece o significado absoluto de distância em relatividade geral são as forças de maré, responsáveis por produzir uma distância de separação  $\zeta^\mu$  entre partículas caindo livremente. Nesse sentido, uma distância “pequena” significa aquela em que o desvio geodésico é negligenciável.

O que determina o desvio geodésico é o tensor de Riemann  $R^\mu{}_{\nu\sigma\delta}$  através da equação

$$\frac{D^2\zeta^\mu}{D\tau^2} = R^\mu{}_{\nu\sigma\delta} \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \zeta^\delta, \quad (3.81)$$

onde  $\zeta^\mu$  representa a distância entre duas partículas caindo livremente, apenas sob a ação da gravidade. Nesse sentido, uma forte candidata para a identificação do parâmetro de escala no caso de espaços-tempo curvos seria escrever o parâmetro  $k$  em função das 20 componentes independentes do tensor de Riemann  $R^\mu{}_{\nu\sigma\delta}$  (no caso de um espaço-tempo quadridimensional). No entanto, é mais conveniente escrever  $k$  em função dos invariantes de curvatura construídos a partir destas componentes. Desta forma é proposto a seguinte identificação para sistemas gravitacionais [62]

$$k = \frac{\xi}{\chi(\chi_1, \dots, \chi_{20})}, \quad (3.82)$$

onde  $\xi$  é uma constante adimensional e  $\chi(\chi_1, \dots, \chi_{20})$  é uma função dos 20 invariantes de curvatura construídos a partir das componentes do tensor de Riemann. Essa identificação é bastante promissora pois é compatível tanto com o princípio da covariância geral quanto o princípio da equivalência [62].

Com isso, o formalismo assintoticamente seguro para o caso gravitacional implica que devemos promover a constante de Newton  $G_0$  para agora o status de função  $G(k(\chi))$ . A questão agora é onde devemos introduzir esta função. Podemos substituir  $G_0$  por  $G(k(\chi))$  diretamente nas soluções clássicas ou diretamente nas equações de campo. Estes métodos são chamados respectivamente de melhoramento da solução e melhoramento das equações de campo. No entanto, pode ser mostrado que o melhoramento da ação, isto é, substituir  $G_0$  por  $G(k(\chi))$  na ação clássica é o método fisicamente aceitável que garante ambos os princípios da covariância geral e da equivalência [62]. Além disso, este método implica na dinâmica das correções quânticas que aparecem na própria equação de movimento.

Vamos mostrar aqui apenas o melhoramento da ação, por ser a melhor maneira de incluir os efeitos quânticos devido a Gravidade Quântica Assintoticamente Segura. Para ver os resultados encontrados pelos outros métodos veja [62].

O melhoramento da ação consiste em utilizar a identificação (3.82), isto é, com o parâmetro de escala sendo uma função dos invariantes de curvatura  $\chi$ , e então introduzimos

$G(k(\chi))$  diretamente na ação de Einstein-Hilbert

$$S_{EHm} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{G(\chi)} R, \quad (3.83)$$

onde  $R$  é o escalar de Ricci. Para determinar as equações de campo modificadas basta variarmos a ação com respeito à métrica e utilizarmos o princípio da mínima ação, isto é

$$\delta S = \delta S_{EHm} + \delta S_M = 0, \quad (3.84)$$

onde  $S_M$  representa a ação dos campos de matéria que servem como fonte para o campo gravitacional.

Embora  $\chi$  seja uma função dos 20 invariantes de curvatura, vamos utilizar por questão de simplicidade apenas os casos em que  $\chi = R^{-1/2}$ ,  $\chi = (R_{\mu\nu}R^{\mu\nu})^{-1/2}$  e  $\chi = (R_{\mu\nu\sigma\delta}R^{\mu\nu\sigma\delta})$  e tentar deduzir uma forma geral para as equações de campo modificadas.

- Variando a ação para o caso  $\chi \equiv \chi_1 = (R)^{-1/2}$  teremos

$$\delta S_{EHm} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left( (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu}) \tau_1 - \frac{1}{2} \kappa_1 R R_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} + A^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}, \quad (3.85)$$

onde  $A^{\mu\nu} = (\tau_1 - \frac{R}{2} \kappa_1) g^{\mu\nu}$  sendo  $\tau_1 \equiv G^{-1}(\chi_1)$  e  $\kappa_1 \equiv \frac{2\partial G(\chi_1)/\partial \chi}{G(\chi_1)^2}$ . Então, considerando o termo de matéria teremos a seguinte equação de campo modificada

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\tau_1} T_{\mu\nu} + \frac{1}{\tau_1} X_{(1)\mu\nu}, \quad (3.86)$$

onde  $T_{\mu\nu} \equiv \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}$  é o tensor momento-energia e  $X_{(1)\mu\nu} = \kappa_1 R R_{\mu\nu}/2 + (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square)(\tau_1 - \kappa_1 R/2)$  representa o “tensor momento-energia” que dita a dinâmica dos efeitos quânticos codificados na função  $G(\chi)$ .

- Agora consideremos o caso em que  $\chi \equiv \chi_2 = (R_{\mu\nu}R^{\mu\nu})^{-1/4}$ , que, variando a ação neste caso, nos leva a seguinte expressão

$$\delta S_{EHm} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left( (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu}) \tau_2 - \kappa_2 R R_{\lambda\mu} R_{\gamma\nu} g^{\lambda\gamma} \right. \\ \left. - \nabla_\rho \nabla_\nu B_\mu^\rho + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\beta B^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \square B_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu}, \quad (3.87)$$

onde  $\tau_2 \equiv G(\chi_2)^{-1}$ ,  $\kappa_2 \equiv \frac{2\partial G(\chi_2)/\partial \chi_2}{G(\chi_2)^2}$  e  $B^{\mu\nu} = \tau_2 g^{\mu\nu} - \kappa_2 R R^{\mu\nu}$ , que nos leva a seguinte forma para as equações de campo modificadas

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\tau_2} T_{\mu\nu} + \frac{1}{\tau_2} X_{(2)\mu\nu}, \quad (3.88)$$

onde

$$\begin{aligned} X_{(2)\mu\nu} &= (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) \tau_2 + \kappa_2 R R_{\mu\alpha} R_{\nu\beta} g^{\mu\nu} \\ &\quad - \nabla^\sigma \nabla_\nu (\kappa_2 R R_{\mu\sigma}) + \frac{1}{2} \square (\kappa_2 R R_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\rho \nabla_\sigma (\kappa_2 R R^{\rho\sigma}). \end{aligned} \quad (3.89)$$

- Finalmente, vamos considerar o caso em que  $\chi \equiv \chi_3 = (R_{\mu\nu\sigma\delta} R^{\mu\nu\sigma\delta})^{-1/4}$ . Neste caso, teremos

$$\delta S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \left( \delta(\sqrt{-g}) \frac{R}{G(\chi_3)} + \frac{\sqrt{-g}}{G(\chi_3)} \delta R - \sqrt{-g} R \frac{\delta\chi_3}{G(\chi_3)^2} \frac{\partial G(\chi_3)}{\partial \chi_3} \right) + \delta S_M. \quad (3.90)$$

Usando a relação

$$\begin{aligned} \delta(R_{\mu\nu\sigma\delta} R^{\mu\nu\sigma\delta}) &= 2 R_{\mu\nu\sigma\delta} R_a{}^{\nu\sigma\delta} \delta g^{\mu a} + 2 R^{\mu\nu\sigma\delta} \nabla_\delta \nabla_\mu \delta g_{\sigma\nu} \\ &\quad + 2 R^{\mu\nu\sigma\delta} \nabla_\sigma \nabla_\delta \delta g_{\nu\mu} + 2 R^{\mu\nu\sigma\delta} \nabla_\sigma \nabla_\nu \delta g_{\delta\mu}, \end{aligned} \quad (3.91)$$

teremos a seguinte forma das equações de campo modificadas

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\tau_3} T_{\mu\nu} + \frac{1}{\tau_3} X_{(3)\mu\nu}, \quad (3.92)$$

onde

$$\begin{aligned} X_{(3)\mu\nu} &= (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) \tau_3 + \kappa_3 R_{\mu\gamma\delta\lambda} R_\nu{}^{\gamma\delta\lambda} - \\ &\quad g_{\mu c} g_{\nu b} (\nabla_a \nabla_d - \nabla_d \nabla_a) R^{abcd} R \kappa_3 - g_{\mu b} g_{\nu a} \nabla_d \nabla_c (\kappa_3 R R^{abcd}) \end{aligned} \quad (3.93)$$

representando as correções quânticas para a dinâmica do campo gravitacional.

Desta forma, ao considerarmos a identificação acima, vemos que as equações de campo modificadas adquirem a forma  $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}/\tau_i + X_{(i)\mu\nu}/\tau_i$ , onde  $i = 1, 2$  ou  $3$ , com o fator de  $1/\tau_i$  incluindo diretamente o efeito da, agora função,  $G(\chi)$  enquanto que  $X_{(i)\mu\nu}$  são as correções quânticas a dinâmica do campo gravitacional, sendo uma função de  $\kappa_i$  e suas derivadas, levando a interpretação do efeito dinâmico da quantização devido à introdução  $G(\chi)$ .

Em resumo, as correções quânticas devido à GAS implicam numa lagrangiana da forma

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{G(\chi)} R + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m, \quad (3.94)$$

onde  $\mathcal{L}_m$  representa a densidade lagrangiana que descreve o conteúdo de matéria e energia que são fontes do campo gravitacional, tal que podemos utilizar o princípio da ação mínima utilizando a ação acima, de forma que as equações de campo modificadas são obtidas e possuem

a forma [62]

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G(\chi)T_{\mu\nu} + G(\chi)X_{\mu\nu}(\chi), \quad (3.95)$$

onde  $T_{\mu\nu}$  é o tensor-momento energia clássico, e  $X_{\mu\nu}$  é um tensor covariante que surge devido às diferenciações de  $G(\chi)$  quando variamos a ação com respeito à métrica. Note que as correções quânticas modificam apenas o setor de matéria, fazendo surgir mais um tensor como fonte para campo gravitacional sendo a parte geométrica totalmente inalterada. O tensor  $X_{\mu\nu}$  dita a dinâmica do campo  $G(\chi)$ , e é definido como:

$$X_{\mu\nu}(\chi) = \left( \nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square \right) G(\chi)^{-1} - \frac{1}{2} \left( R\mathcal{K}(\chi) \frac{\delta\chi}{\delta g^{\mu\nu}} + \partial_\kappa \left( R\mathcal{K}(\chi) \frac{\partial\chi}{\partial(\partial_\kappa g^{\mu\nu})} \right) + \partial_\kappa \partial_\lambda \left( R\mathcal{K}(\chi) \frac{\partial\chi}{\partial(\partial_\lambda \partial_\kappa g^{\mu\nu})} \right) \right), \quad (3.96)$$

com  $\mathcal{K}(\chi) \equiv \frac{2\partial G(\chi)/\partial\chi}{G(\chi)^2}$  [63]. Esse tensor pode ser pensado como o tensor momento-energia que fornece o 4-momento do campo  $G(\chi)$ .

Com isso, determinamos a forma explícita da modificação das equações de campo devido a GAS. No próximo capítulo vamos utilizar a equação de campo corrigida (3.95) para investigar a presença de matéria exótica e a condição de atravessabilidade de buracos de minhoca, porém, considerando um fluido como fonte que obedece uma equação de estado da forma  $p_r = \omega\rho$ , com  $\omega$  sendo uma constante. Isto elimina uma gama de possíveis modelos e, posteriormente, vamos generalizar o caso obtido por Moti e Shojai em ambos os casos pseudo-esférico e esférico.

## 4 BURACOS DE MINHOCAS EM GRAVIDADE QUÂNTICA ASSINTOTICAMENTE SEGURA

Como foi dito anteriormente, as equações de Einstein da Relatividade Geral podem ser usadas para estudar uma classe de objetos que foram chamados de Buracos de Minhoca, o qual fornece uma espécie de túnel conectando regiões distintas de um mesmo universo ou de universos diferentes. Porém, mostramos que para que este objeto ser atravessável, seria necessário a presença de matéria exótica, isto é, aquelas que violam as condições de energia.

Uma vez que temos um modelo para descrever efeitos microscópicos do campo gravitacional, é natural pensarmos em determinar que modificações tais modelos forneceriam para as soluções clássicas, em particular, dos Buracos de Minhoca. Poderíamos esperar, por exemplo, que as correções quânticas poderiam fornecer um modelo atravessável com matéria não-exótica.

Nesse sentido, os autores R. Moti e A. Shojai [64] utilizaram as correções quânticas provenientes do formalismo Assintoticamente Seguro para o campo gravitacional a fim de investigar a presença de matéria exótica em duas classes distintas de buracos de minhoca: os esféricos e os pseudoesféricos, que vamos mostrar logo em seguida.

Porém, os autores se limitaram a uma fonte clássica com parâmetro de estado constante, e então generalizamos este resultado considerando um parâmetro de estado dependente da posição e com os efeitos quânticos devido à GAS [98].

### 4.1 O caso pseudoesférico

Começamos com o caso pseudoesférico. A métrica é bastante parecida com a de Morris-Thorne (2.59), com a exceção de a parte angular ser substituída por  $d\Omega_{2(p)} = d\theta^2 + \sinh^2 \theta d\phi^2$ , fornecendo uma classe de buracos de minhoca hiperbólicos. A métrica então possui a seguinte forma

$$ds^2 = e^{2\Phi(r)} dt^2 - \frac{dr^2}{1 - b(r)/r} - r^2 d\Omega_{2(p)}, \quad (4.1)$$

onde  $e^{2\Phi(r)}$  é a função *redshift* e  $b(r)$  a função forma.

A ideia de Moti e Shojai é análoga ao que foi feito por Morris e Thorne: utilizar as equações de campo modificadas devido a GAS para determinar as equações de estado que um fluido anisotrópico, que é a fonte geradora do buraco de minhoca, deve obedecer, e, a partir destas, determinar se este fluido deve ser formado por matéria exótica ou não. Com isso, resolvendo as equações de campo modificadas usando o tensor momento-energia  $T^\mu_\nu =$

Diag $[\rho, -p_r, -p_l, -p_l]$  obtemos as seguintes relações

$$8\pi G_0 \rho = (1+f) \frac{b'-2}{r^2} - \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left(f'' + \frac{2}{r} f'\right) + \frac{b'r-b}{2r^2} f' \quad (4.2)$$

$$8\pi G_0 p_r = -(1+f) \left(\frac{b}{r^3} - \frac{2}{r^2} - \frac{2\Phi'}{r} \left(1 - \frac{b}{r}\right)\right) + \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left(\Phi' + \frac{2}{r}\right) f' \quad (4.3)$$

$$8\pi G_0 p_l = -(1+f) \left(\frac{b'r-b}{2r^2} \left(\Phi' + \frac{1}{r}\right) - \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left(\Phi'' + \Phi'^2 + \frac{\Phi'}{r}\right)\right) \\ + \left(\left(1 - \frac{b}{r}\right) \left(\Phi' + \frac{1}{r}\right) - \frac{b'r-b}{2r^2}\right) f' + \left(1 - \frac{b}{r}\right) f'' , \quad (4.4)$$

onde  $\rho$  representa a densidade de energia do fluido e  $p_r$  e  $p_l$  os valores de sua pressão exercida nas direções radial e lateral, respectivamente.

O próximo passo consiste na escolha de uma forma adequada para a função  $f$ . Lembre-se que esta função é escrita em termos de invariantes de curvatura e uma escolha bastante conveniente para se tratar inicialmente é utilizar o escalar de Ricci  $R$ , de forma que a função anti-screening seja dada por  $f = \xi R$ . Lembre-se também que  $\xi$  é uma constante que serve como parâmetro da teoria, isto é, nos diz o “quanto” as correções quânticas predominam, recuperando os resultados obtidos pela Relatividade Geral no limite  $\xi \rightarrow 0$ . Além disso, os autores se restringiram a fluidos que obedecem uma equação de estado linear da forma  $p_r = \omega \rho$ , que, utilizando as expressões (4.2) e (4.3) nos leva a seguinte expressão, após isolarmos os termos com a função  $f$

$$\omega b'r + b - 2(\omega + 1)r - 2\Phi' r^2 \left(1 - \frac{b}{r}\right) = \frac{r^3}{1+f} \left( \left(1 - \frac{b}{r}\right) (\omega f'' + \frac{2}{r} (1+\omega) f' + \Phi' f') \right. \\ \left. - \omega \frac{b'r-b}{2r^2} f' \right). \quad (4.5)$$

A constante  $\omega$ , como iremos ver, representa o parâmetro de estado do fluido, e é este parâmetro que determina a exotividade da matéria que compõe o fluido. Esta equação se torna um pouco mais simples se a escrevemos em termo de uma variável adimensional  $u$  definida por  $u \equiv r/r_t$ , de forma que (4.5) fica reescrita como

$$\omega \dot{b}u + \tilde{b} - 2(\omega + 1)u = \frac{u^3}{1+f} \left( \left(1 - \frac{\tilde{b}}{u}\right) \left(\omega \dot{f} + \frac{2}{u} (1+\omega) \dot{f}\right) - \omega \frac{\dot{b}u - \tilde{b}}{2u^2} \dot{f} \right), \quad (4.6)$$

onde o “ $\dot{\cdot}$ ” denota diferenciação com respeito a variável  $u$  e  $\tilde{b} \equiv b/r_t$ . Note que o lado direito da equação (4.6) contém as correções devido a GAS e, uma vez que a função anti-screening  $f$  é proporcional a  $\xi$ , é razoável utilizarmos o método iterativo para resolver aproximadamente a expressão (4.6). Este método consiste em utilizarmos uma expansão do tipo  $\tilde{b}(u) \approx \tilde{b}_{(0)}(u) + \tilde{b}_{(1)}(u)$ , onde o termo de ordem 0 é a contribuição devido à relatividade geral, isto é, é obtida ao

resolvermos a equação homogênea

$$\omega \dot{\tilde{b}}_{(0)} u + \tilde{b}_{(0)} - 2(\omega + 1)u = 0, \quad (4.7)$$

que pode ser facilmente resolvida utilizando o método do fator integrante, fornecendo  $\tilde{b}_{(0)}(u) = 2u - u^{-1/\omega}$  se escolhermos a condição de contorno  $\tilde{b}_{(0)}(1) = 1$ . Aplicando o método iterativo temos que o termo de 1° ordem é obtido ao substituirmos a expressão encontrada para  $\tilde{b}_{(0)}$  no lado direito de (4.6). Calculando o escalar de Ricci utilizando a métrica (4.1) obtemos a expressão de ordem zero para o escalar de Ricci

$$f = \xi R = \xi \frac{4 - 2\dot{\tilde{b}}_0}{r_t^2 u^2} = -\frac{2\xi}{r_t^2 \omega} u^{-1/\omega-3}, \quad (4.8)$$

que, ao substituirmos no lado direito da expressão (4.6), obtemos a equação diferencial para o termo de ordem 1

$$\begin{aligned} \omega \dot{\tilde{b}}_{(1)} u + \tilde{b}_{(1)} - 2(\omega + 1)u &= -\frac{2\xi}{\omega} (1 + 3\omega)(1 - 2\omega) \frac{u^{-1/\omega-2}}{\omega r_t^2 - 2\xi u^{-1/\omega-3}} \\ &+ \frac{\xi}{\omega} (1 + 3\omega)(1 - 5\omega) \frac{u^{-2/\omega-3}}{\omega r_t^2 - 2\xi u^{-1/\omega-3}}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

A equação (4.9) é muito difícil de resolver analiticamente e, portanto, o que podemos fazer é linearizar a parte funcional de  $u$  de modo a resolvermos a equação acima usando os métodos tradicionais de resolução de equações diferenciais de 1° ordem. A escolha mais natural é se restringir a pontos próximos a garganta, que na variável  $u$  se localiza em  $u = 1$ . Expandindo (4.9) em torno de  $u = 1$  obtemos a seguinte expressão após algumas manipulações algébricas

$$\begin{aligned} \omega \dot{\tilde{b}}_{(1)} u + \tilde{b}_{(1)} - 2(\omega + 1)u &= \zeta \frac{1 + 3\omega}{\omega^2 (\omega - 2\zeta)^2} (\omega^2 (1 + \omega)(7u - 8) \\ &+ 2\zeta (\omega(1 + \omega) + (u - 1)(1 - 3\omega - 4\omega^2))), \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde a nova constante  $\zeta$  é definida como  $\zeta \equiv \xi/r_t^2$ . Ao resolvermos a equação acima obtém-se a seguinte expressão para a função forma para regiões próximas a garganta de um buraco de minhoca pseudoesférico

$$\begin{aligned} \tilde{b}(u) &\simeq \frac{1}{\omega^2 (\omega - 2\zeta)^2} \times \\ &\left( \omega^4 (2u - u^{-1/\omega}) - \zeta \omega^2 (8 + 32\omega + 24\omega^2 - u(7 + 13\omega) - u^{-1/\omega} (1 + 15\omega + 24\omega^2)) \right. \\ &\quad \left. - 2\zeta^2 (1 - \omega - 17\omega^2 - 15\omega^3 + \omega^2 (7 + 15\omega) u^{-1/\omega} + u(-1 + \omega + 8\omega^2)) \right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

O próximo passo consiste em impor as condições para que um buraco de minhoca determinado pela função forma acima seja atravessável. Com isso, veremos que restrições de



valores dos parâmetros  $\zeta$  e  $\omega$  serão aceitáveis a fim de que as condições de atravessabilidade sejam satisfeitas e, como consequência, o tipo de matéria permitida. As condições de atravessabilidade são dadas por

- **Existência da garganta:** Para que se tenha a estrutura de garganta no buraco de minhoca devemos garantir que a solução não irá apresentar horizonte de eventos e que haverá um valor mínimo para a coordenada radial, denotada aqui por  $r_t$ , que localiza a garganta. Neste ponto devemos ter as condições de contorno  $b(r_t) = r_t$  e  $b'(r_t) < r_t$ . As duas primeiras condições são automaticamente satisfeitas, uma vez que estamos tratando o caso onde não há forças de maré, isto é,  $\Phi = 0$ , e nós teremos  $\tilde{b}(1) = 1$  por construção. Portanto, basta impormos a condição flare-out  $\dot{\tilde{b}}(1) < 1$ , que nos leva a seguinte restrição dos parâmetros  $\omega$  e  $\zeta$

$$\frac{(1 + 2\omega)\omega^2 - \zeta(1 + 6\omega + 7\omega^2)}{\omega^2(\omega - 2\zeta)} < 1. \quad (4.12)$$

- **Condição *Antiscreening*:** Para estar dentro da validade do formalismo Assintoticamente seguro devemos garantir que a função  $f$  para a função forma completa (4.11) deve satisfazer a condição antiscreening, dada por

$$f(u)\Big|_{u \rightarrow 1} = \zeta \frac{4 - 2\dot{\tilde{b}}(u)}{u^2} \Big|_{u \rightarrow 1} = \frac{2\zeta(-\omega^2 + \zeta(1 + 6\omega + 3\omega^2))}{\omega^2(\omega - 2\zeta)} > 0. \quad (4.13)$$

- **Condição Nula de Energia:** A condição radial nula de energia é dada pela restrição  $\rho + p_r > 0$ , que, utilizando as expressões (4.2) e (4.3) nos leva a seguinte relação

$$8\pi G_N(\rho + p_r) = \left( (1 + f) \left( \frac{\dot{\tilde{b}}}{u^2} - \frac{\tilde{b}}{u^3} \right) + \frac{\dot{\tilde{b}}u - \tilde{b}}{2u^2} \dot{f} \right) \Big|_{u=1} > 0. \quad (4.14)$$

A expressão acima pode ainda ser mais simplificada se utilizamos a segunda e terceira condições para a existência da garganta, levando a seguinte restrição para a função *cutoff*  $f$

$$\left( \frac{1 + f}{u} + \frac{\dot{f}}{2} \right) \Big|_{u=1} < 0. \quad (4.15)$$

Finalmente, podemos reescrever a equação acima em termos da função forma utilizando a equação (4.2) para o caso de forças de maré nula, de tal forma que a condição radial nula de energia pode ser reescrita como

$$(1 + \omega) \left( (1 + f)(\dot{\tilde{b}} - 2) + \frac{\dot{\tilde{b}}u - \tilde{b}}{2} \dot{f} \right) \Big|_{u=1} > 0, \quad (4.16)$$

que nos leva a seguinte restrição aos parâmetros  $\omega$  e  $\zeta$

$$(\omega^2 - \zeta(1 + 6\omega + 3\omega^2))(\omega^3 - \zeta(5\omega^2 + \omega^3) + \zeta^2(3 + 18\omega + 11\omega^2)) > 0. \quad (4.17)$$

Podemos plotar a região de validade para o conjunto de parâmetros  $(\omega, \zeta)$  de tal forma que satisfaça as três condições acima. Esta região de validade pode ser vista na Fig.3. É bastante notável que, para que as condições de atravessabilidade acima sejam satisfeitas, será necessário que  $\omega$  e  $\zeta$  assumam valores positivos, levando a conclusão de que um buraco de minhoca pseudoesférico pode ser atravessável com a presença de matéria não-exótica. Por

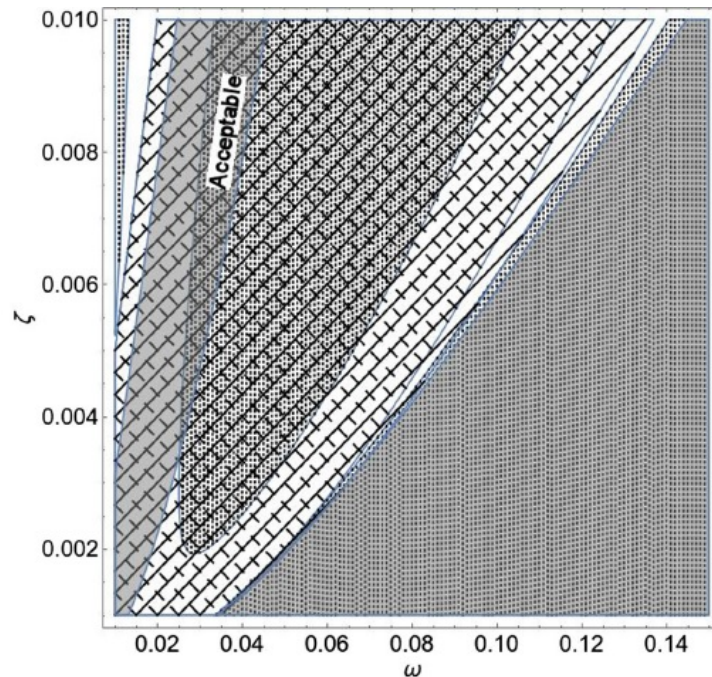


Figura 4: Região aceitável dos parâmetros  $(\omega, \zeta)$  para que as condições de atravessabilidade sejam satisfeitas, no caso pseudoesférico. As linhas tracejadas, pontilhadas e preenchidas representam, respectivamente, as condições da garganta, radial nula de energia e antiscreeing. Note que desde que  $\omega$  é positivo nessa região, teremos a presença de matéria não-exótica. Imagem extraída do artigo [64].

fim, basta garantirmos que a componente radial da métrica (4.1) não troque de sinal quando utilizamos a função forma completa (4.11) com os valores de  $\omega$  e  $\zeta$  que satisfazem as outras três condições acima. Portanto, impondo  $g_{rr} < 0$ , teremos a seguinte condição

$$\tilde{b}(u) < u \Big|_{u \rightarrow 1^+}, \quad (4.18)$$

onde é tomado o limite  $u \rightarrow 1^+$  desde que nos limitamos a regiões próximas a garganta. Esta

condição nos leva a seguinte restrição

$$\frac{1}{\omega^2(\omega - 2\zeta)^2} \times \left( \omega^4(2u - u^{-1/\omega}) - \zeta\omega^2(8 + 32\omega + 24\omega^2 - u(7 + 13\omega) - u^{-1/\omega}(1 + 15\omega + 24\omega^2)) - 2\zeta^2(1 - \omega - 17\omega^2 - 15\omega^3 + \omega^2(7 + 15\omega)u^{-1/\omega} + u(-1 + \omega + 8\omega^2)) \right) < u. \quad (4.19)$$

Esta condição nos mostra que as correções quânticas garantem a assinatura correta da métrica para pontos próximos da garganta e isto é verdade para os valores aceitáveis de  $(\omega, \zeta)$  obtidos das condições anteriores. Este comportamento pode ser visto para um conjunto de valores particulares de  $\omega$  e  $\zeta$  na Fig. 4.

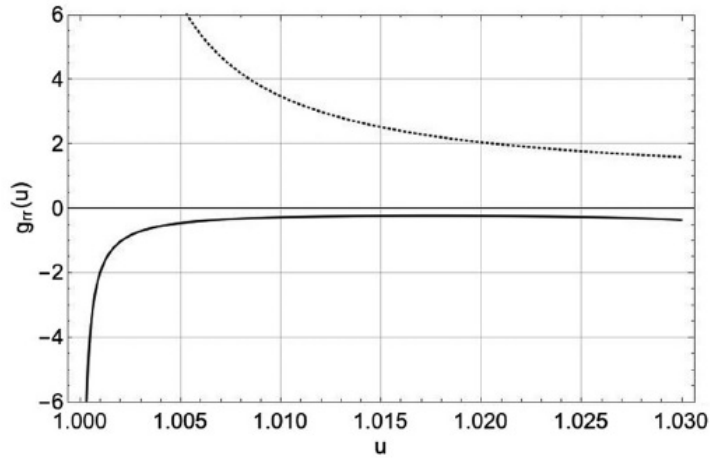


Figura 5: A componente radial da métrica corrigida  $g_{rr}(u)$  como função da coordenada radial adimensional  $u$ , para o caso pseudoesférico. A linha preenchida representa o comportamento de  $g_{rr}(u)$  para o conjunto de valores  $(\omega, \zeta) = (0.030, 0.007)$ . A linha tracejada refere-se a sua contraparte clássica, que claramente viola a assinatura da métrica. Imagem extraída do artigo [64].

Assim, vemos que as correções quânticas devido à GAS fornecem a possibilidade de encontrarmos uma solução de buraco de minhoca pseudoesférico atravessável com matéria não-exótica satisfazendo a condição nula de energia, desde que os valores de  $(\omega, \zeta)$  estejam dentro da região aceitável. No entanto, vale salientar que esta solução não se aplica a um buraco de minhoca com escalas astrofísicas, sendo válida apenas para buracos de minhocas quânticos utilizado por “viajantes” cujo comprimento seja da ordem do comprimento de Planck [64].

## 4.2 O caso esférico

Agora trataremos o caso em que o buraco de minhoca determina um espaço-tempo esférico, cuja métrica é dada pela forma tradicional de Morris e Thorne (2.59)

$$ds^2 = e^{2\Phi(r)} dt^2 - \frac{dr^2}{1 - b(r)/r} - r^2 d\Omega_{2(s)}, \quad (4.20)$$

onde agora  $d\Omega_{2(s)} = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$  é o elemento de linha de uma 2-esfera. Assim como foi feito anteriormente, utilizamos as equações de campo modificadas com um fluido anisotrópico descrito pelo tensor momento-energia  $T_v^\mu = \text{Diag}[\rho(r), -p_r(r), -p_l(r), -p_l(r)]$ , fornecendo as seguintes relações

$$8\pi G_0\rho = (1+f)\frac{b'}{r^2} - (1-\frac{b}{r})(f'' + \frac{2}{r}f') + \frac{b'r-b}{2r^2}f', \quad (4.21)$$

$$8\pi G_0p_r = -(1+f)\left(\frac{b}{r^3} - \frac{2\Phi'}{r}(1-\frac{b}{r})\right) + (1-\frac{b}{r})\left(\Phi' + \frac{2}{r}\right)f', \quad (4.22)$$

$$8\pi G_0p_l = -(1+f)\left(\frac{b'r-b}{2r^2}(\Phi' + \frac{1}{r}) - (1-\frac{b}{r})(\Phi'' + \Phi'^2 + \frac{\Phi'}{r})\right) + (1-\frac{b}{r})\left((\Phi' + \frac{1}{r})f' + f''\right) - \frac{b'r-b}{2r^2}f'. \quad (4.23)$$

Novamente é considerado que a equação de estado que caracteriza o fluido obedece uma relação linear do tipo  $p_r = \omega\rho$ , com uma função anti-screening da forma  $f = \xi R$ , onde  $R$  é o escalar de Ricci determinado a partir da métrica (4.20). Utilizando as equações (5.6) e (5.7) a equação de estado linear implica

$$\omega b'r + b - 2\Phi' r^2 \left(1 - \frac{b}{r}\right) = \frac{r^3}{1+f} \left( \left(1 - \frac{b}{r}\right) (\omega f'' + \frac{2}{r}(1+\omega)f' + \Phi' f') - \omega \frac{b'r-b}{2r^2} f' \right), \quad (4.24)$$

que utilizando a condição de forças de maré nulas, isto é,  $\Phi = 0$ , e a função forma adimensional  $\tilde{b} \equiv b/r_t$ , nos leva a seguinte equação diferencial que a função forma completa  $\tilde{b}(u)$  deve satisfazer

$$\omega \dot{\tilde{b}}u + \tilde{b} = \frac{u^3}{1+f} \left( \left(1 - \frac{\tilde{b}}{u}\right) (\omega \dot{f} + \frac{2}{u}(1+\omega)f) - \omega \frac{\tilde{b}u - \tilde{b}}{2u^2} \dot{f} \right). \quad (4.25)$$

Assim como foi feito para o caso pseudoesférico, vamos resolver a equação acima usando o método iterativo. O termo de ordem zero, isto é, a contribuição clássica devido à relatividade geral, é obtido ao resolvermos a equação homogênea

$$\omega \dot{\tilde{b}}_{(0)}u + \tilde{b}_{(0)} = 0, \quad (4.26)$$

que pode facilmente ser resolvida usando separação de variáveis para fornecer  $\tilde{b}_{(0)}(u) = u^{-1/\omega}$  com a condição de contorno  $\tilde{b}_{(0)}(1) = 1$ .

Aplicando a iteração, o termo de ordem 1 é obtido quando usamos o termo de ordem 0 para calcularmos o lado direito de (4.25). Usando a métrica (4.20) a função *cutoff* para o buraco de minhoca esférico é dado pela expressão

$$f = \xi R = -\frac{2\xi \dot{\tilde{b}}_{(0)}}{r_t^2 u^2} = \frac{2\xi}{r_t^2 \omega} u^{-1/\omega-3}, \quad (4.27)$$

que, ao substituímos na equação (4.25) nos leva a

$$\omega\tilde{b}_{(1)} + \tilde{b}_{(1)} = \frac{2\xi(1+3\omega)(-1+2\omega)}{\omega} \frac{u^{-1/\omega-2}}{\omega r_t^2 + 2\xi u^{-1/\omega-3}} - \frac{\xi(1+3\omega)(-1+5\omega)}{\omega} \frac{u^{-2/\omega-3}}{\omega r_t^2 + 2\xi u^{-1/\omega-3}}. \quad (4.28)$$

Nos restringindo a regiões próximas a garganta, iremos expandir o lado direito da equação acima em torno de  $u = 1$  de forma que a equação acima simplifica bastante e possui a forma aproximada

$$\omega\dot{\tilde{b}}_{(1)}u + \tilde{b}_{(1)} = \xi(1+\omega)(1+3\omega) \frac{r_t^2 \omega^2 (-8+7u) + 2\xi(1-5\omega+u(-1+4\omega))}{\omega^2(2\xi+r_t^2\omega)^2}. \quad (4.29)$$

Esta equação pode facilmente ser resolvida utilizando os métodos padrão de resolução de equações diferenciais de 1° ordem, levando a seguinte forma para a função forma adimensional completa para pontos próximos a garganta

$$\tilde{b}(u) \simeq \frac{1}{\omega^2(2\xi+\omega)^2} \times \left( \omega^4 u^{-1/\omega} + \zeta[7\omega^2(1+3\omega)u^{1-1/\omega} - 8\omega^2(1+4\omega+3\omega^2) + \omega^2 u^{-1/\omega}(1+15\omega+24\omega^2)] \right. \\ \left. 2\zeta^2[u^{-1/\omega}\omega^2(7+15\omega) + u(-1+\omega+12\omega^2) + (1-\omega-17\omega^2-15\omega^3)] \right), \quad (4.30)$$

onde novamente  $\zeta = \xi/r_t^2$ . Novamente, iremos impor as condições de atravessabilidade a fim de determinar os valores permitidos de  $\xi$  e  $\omega$  e então verificar se a matéria deve ser exótica ou não.

- Existência da garganta: Assim como no caso anterior, basta que a função forma (4.30) satisfaça a condição flare-out para garantir a existência da garganta, visto que no raio mínimo  $r_t$  temos  $\tilde{b}(1) = 1$ . Daí, a condição flare-out  $\dot{\tilde{b}}(1) < 1$  implica na seguinte restrição

$$\frac{(1+2\omega)\omega^2 - \zeta(1+6\omega+7\omega^2)}{\omega^2(\omega-2\zeta)} < 1. \quad (4.31)$$

- Condição Antiscreening: Para nos mantermos dentro da região de validade da GAS devemos garantir que sempre teremos  $f > 0$ , que no nosso caso nos leva a

$$f(u) \Big|_{u \rightarrow 1} = \frac{2\zeta(\zeta+6\omega\zeta+\omega^2(1+3\zeta))}{\omega^2(\omega+2\zeta)} > 0. \quad (4.32)$$

- A condição nula de energia, que para o nosso caso específico de um fluido com equação de estado linear nos leva a seguinte restrição  $8\pi G_0(1+\omega)\rho > 0$ . Substituindo a expressão (5.6) para  $\rho$  a condição nula de energia no diz que

$$(1+\omega) \left( (1+f)(\dot{\tilde{b}}-2) + \frac{\dot{\tilde{b}}u-\tilde{b}}{2} \dot{f} \right) \Big|_{u=1} > 0, \quad (4.33)$$

que fazendo as devidas substituições e com um pouco de algebrismo nos leva a

$$\begin{aligned}
 & -(\omega^6 + 2\omega^7) - \zeta(8\omega^5 + 16\omega^6) + \zeta^2(2\omega^2 + 20\omega^3 + 36\omega^4 + 12\omega^5 + 18\omega^6) \\
 & + \zeta^3(1 + 22\omega + 150\omega^2 + 364\omega^3 + 329\omega^4 + 126\omega^5) + \zeta^4(14 + 128\omega + 356\omega^2 + 352\omega^3 + 126\omega^4) > 0.
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

As três restrições acima nos leva a uma restrição de valores dos parâmetros  $(\omega, \xi)$  que podem ser vistos na Fig.5. Vemos que no caso esférico não há a possibilidade de o buraco de minhoca ser atravessável com matéria não-exótica, uma vez que  $\omega$  é negativo.

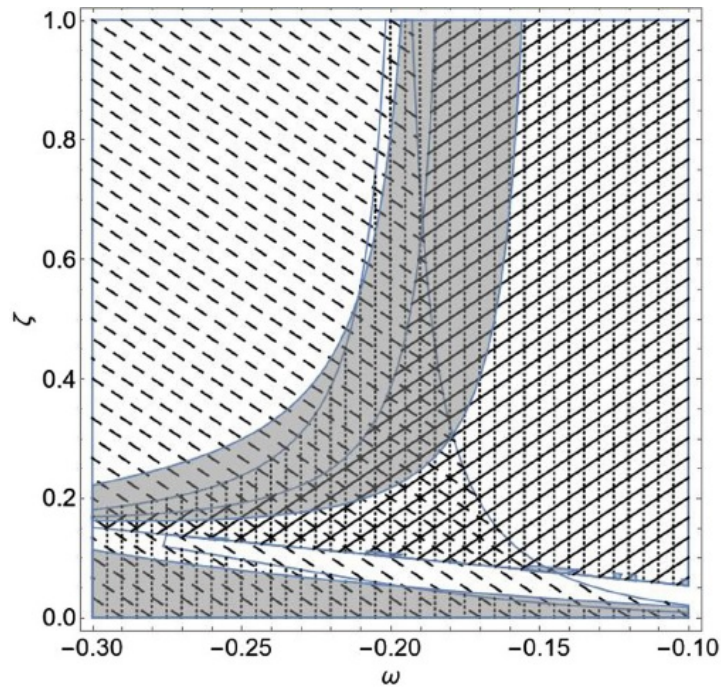


Figura 6: Região aceitável dos parâmetros  $(\omega, \xi)$  para satisfazer as condições de atravessabilidade no caso esférico. As linhas tracejadas, pontilhadas e preenchidas representam, respectivamente, as condições da garganta, energia radial nula e antiscreening. Vemos que todas as condições são satisfeitas e o buraco de minhoca é atravessável, no entanto, será necessário a presença de matéria exótica. Imagem extraída do artigo [64].

Por fim, basta garantir que a componente radial  $g_{rr}$  da métrica (4.20) nunca troque de sinal quando utilizamos a função forma completa (4.30). Isto é, sempre devemos ter  $g_{rr} < 0$  para quais valores de  $u$  e dos valores aceitáveis dos parâmetros  $(\omega, \xi)$ . Para isto devemos ter

$$\tilde{b}(u) < u \Big|_{u \rightarrow 1^+}, \tag{4.35}$$

que nos leva a

$$\frac{1}{\omega^2(2\xi + \omega)^2} \times \left( \omega^4 u^{-1/\omega} + \xi [7\omega^2(1 + 3\omega)u^{1-1/\omega} - 8\omega^2(1 + 4\omega + 3\omega^2) + \omega^2 u^{-1/\omega}(1 + 15\omega + 24\omega^2)] \right. \\ \left. 2\xi^2 [u^{-1/\omega}\omega^2(7 + 15\omega) + u(-1 + \omega + 12\omega^2) + (1 - \omega - 17\omega^2 - 15\omega^3)] \right) < u. \quad (4.36)$$

Esta restrição é garantida quando utilizamos os valores aceitáveis para  $(\omega, \xi)$  como pode ser visto na figura Fig. 6.

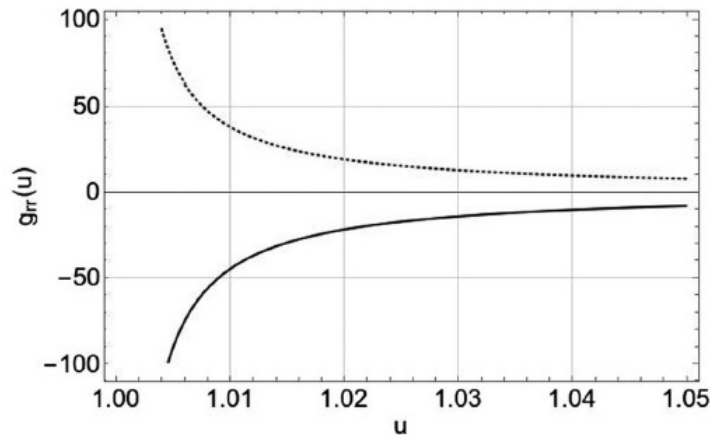


Figura 7: A componente radial da métrica corrigida  $g_{rr}(u)$  como função de  $u$ , para o caso esférico. A linha preenchida representa o comportamento de  $g_{rr}(u)$  para os valores específicos dos parâmetros  $(\omega, \xi) = (-0.275, 0.178)$ . A linha tracejada representa o comportamento da métrica clássica. Imagem extraída do artigo [64].

Assim, vemos que a gravidade quântica assintoticamente segura garante que um buraco de minhoca seja atravessável apenas no caso de este objeto ser pseudoesférico. No entanto, eles se restringiram ao caso muito específico de um fluido com uma equação de estado linear de forma que o parâmetro de estado seja constante, limitando muito o modelo utilizado.

Nesse sentido, podemos pensar em generalizar um pouco o resultado obtido pelos autores Moti e Shojai em [64] e determinar se há a possibilidade de haver matéria não-exótica se o fluido obedecer a uma equação de estado com o parâmetro de estado  $\omega$  agora sendo dependente da posição da forma  $p_r = \omega(r)\rho$ . Assim como fizemos anteriormente, vamos separar a análise nos casos de o buraco de minhoca ser pseudoesférico e esférico.

### 4.3 O caso geral pseudoesférico

Assim como o caso anterior, a equação diferencial que determina a função forma completa para este caso é dado pela equação (4.6), com a diferença de que  $\omega$  agora é uma função da posição. Também, de maneira totalmente análoga vamos utilizar o método de iteração para resolvê-la, isto é, considerar uma aproximação do tipo  $\tilde{b}(u) \approx \tilde{b}_{(0)}(u) + \tilde{b}_{(1)}(u)$ , onde, novamente

$u = r/r_t$  é a coordenada radial adimensional e o termo de ordem zero obtido ao resolver a equação (4.6) sem as correções devido à GAS (isto é,  $\xi = 0$ ).

A diferença agora é que, como  $\omega$  agora é dependente da posição, nós devemos considerar uma expansão similar para esta quantidade também, da forma  $\omega(u) = \omega_{(0)}(u) + \omega_{(1)}(u, \xi)$ , onde o termo de ordem zero é a contribuição independente da GAS. A expansão acima é razoável, uma vez que das expressões (4.2) e (4.3) nós vemos que a densidade de energia e pressão radial podem ser escritos respectivamente como

$$\rho = \rho_{(0)}(u) + \rho_{(1)}(u, \xi) \quad (4.37)$$

$$p_r = p_{r(0)}(u) + p_{r(1)}(u, \xi), \quad (4.38)$$

onde  $\rho_{(0)}$  e  $p_r^{(0)}$  são as contribuições usuais devido à Relatividade Geral para a densidade de energia e pressão radial respectivamente, e  $\rho_{(1)}$  e  $p_{r(1)}$  são as contribuições devido à GAS. Portanto, o parâmetro de estado  $\omega$

$$\begin{aligned} \omega(u) &= \frac{p_r}{\rho} = \left[ \frac{p_{r(0)} + p_{r(1)}}{\rho_{(0)}} \right] \left( 1 + \frac{\rho_{(1)}}{\rho_{(0)}} \right)^{-1} \approx \left[ \frac{p_{r(0)}}{\rho_{(0)}} + \frac{p_{r(1)}}{\rho_{(0)}} \right] \left( 1 - \frac{\rho_{(1)}}{\rho_{(0)}} \right) \\ &= \omega_{(0)}(u) + \omega_{(1)}(u, \xi), \end{aligned} \quad (4.39)$$

também apresenta, de forma natural, uma decomposição em partes devido à Relatividade Geral e outra devido à GAS. É importante notar que no limite clássico  $\xi \rightarrow 0$  nós também chegamos em uma equação de estado linear,  $p_{r(0)} = \omega_{(0)}(u)\rho_{(0)}$ , com um parâmetro de estado  $\omega_{(0)}(u)$  sendo dependente da posição, sendo, portanto, um caso mais geral do que foi feito em [64], onde os autores consideraram uma fonte clássica com  $\omega_{(0)} = \text{constante}$ . Portanto, quando  $\xi = 0$  teremos para a o termo de ordem zero da função forma completa

$$\omega_{(0)}(u)\dot{\tilde{b}}_{(0)}u + \tilde{b}_{(0)} - 2(\omega_{(0)}(u) + 1)u = 0. \quad (4.40)$$

Entretanto, como estamos considerando um parâmetro de estado dependente da posição  $\omega = \omega(u)$ , iremos considerar o seu comportamento apenas em regiões próximas à garganta do buraco de minhoca, isto é, expandindo  $\omega(u)$  em torno de  $u = 1$ , obtendo

$$(\omega_t + \kappa(u-1))\dot{\tilde{b}}_{(0)}u + \tilde{b}_{(0)} - 2((\omega_t + \kappa(u-1)) + 1)u = 0, \quad (4.41)$$

onde definimos os parâmetros  $\kappa = d\omega_{(0)}(u)/du|_{u=1}$  e  $\omega_t = \omega_{(0)}(1)$ . Esta equação pode facilmente ser resolvida, fornecendo a solução

$$\tilde{b}_{(0)}(u) = 2u - \omega_t^{\frac{1}{\kappa - \omega_t}} u^{\frac{1}{\kappa - \omega_t}} (\kappa(u-1) + \omega_t)^{\frac{1}{\omega_t - \kappa}}, \quad (4.42)$$

para a condição inicial  $\tilde{b}_{(0)}(1) = 1$ . Usando o método de iteração, o termo de 1º ordem para  $\tilde{b}$  é



obtido ao substituirmos a expressão acima de  $\tilde{b}_{(0)}$  no lado direito de (4.6) junto com a expansão  $\omega_{(0)}(u) \rightarrow \omega_t + \kappa(u-1)$ . Vamos utilizar aqui a função *cutoff*  $f = \xi R$ , que neste caso fornece

$$f = \xi R = -2\zeta \omega_t^{\frac{1}{\kappa-\omega_t}} u^{\frac{1}{\kappa-\omega_t}-3} [\kappa(u-1) + \omega_t]^{\frac{1}{\omega_t-\kappa}-1}, \quad (4.43)$$

onde  $\zeta = \xi/r_t^2$ . Isto fornece a seguinte forma para a equação diferencial para  $\tilde{b}_{(1)}$

$$\begin{aligned} \omega_{(0)} \dot{\tilde{b}}_{(1)} u + \tilde{b}_{(1)} + \omega_{(1)} u (\dot{\tilde{b}}_{(0)} - 2) &= \frac{\zeta \omega_t^{\frac{1}{\kappa-\omega_t}} u^{\frac{1}{\kappa-\omega_t}-3} (\kappa(u-1) + \omega_t)^{\frac{1}{\omega_t-\kappa}-1}}{u^3 (\kappa(u-1) + \omega_t) - 2\zeta \Lambda} \{2u(2\kappa^2(6u^2 - 8u + 3) \\ &+ 4\kappa(4u - 3)\omega_t + \kappa + 6\omega_t^2 - \omega_t - 1) - \Lambda[\kappa^2(u(28u - 39) + 15) - 1 + 2\omega_t + 15\omega_t^2 - 30\omega_t - 2 \\ &+ \kappa(u(39\omega_t + 5))]\}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

onde  $\Lambda$  é definido como

$$\Lambda = \omega_t^{\frac{1}{\kappa-\omega_t}} u^{\frac{1}{\kappa-\omega_t}} (\kappa(u-1) + \omega_t)^{\frac{1}{\omega_t-\kappa}}. \quad (4.45)$$

A fim de resolver a equação (4.44) para  $\tilde{b}_{(1)}$ , nós devemos considerar a expansão de primeira ordem de  $\omega_{(1)}$  em torno da garganta  $\omega_{(1)} = \omega_T \zeta + \lambda \zeta(u-1)$ , onde  $\lambda = d\omega_{(1)}(u)/du|_{u=1}$ . A solução para  $\tilde{b}_{(1)}$ , e conseqüentemente  $\tilde{b}(u)$ , são expressadas em termos de funções hipergeométricas  ${}_2F_1$  e é dado por

$$\begin{aligned} \tilde{b}(u) &= \frac{1}{\omega_t^2 (\kappa - \omega_t)^2} \left\{ \frac{\zeta(\kappa - \omega_t)}{(\omega_t - 2\zeta)^2} \left[ \omega_t^{\frac{1}{\kappa-\omega_t}+1} {}_2F_1\left(1, 1, 1 + \frac{1}{\omega_t - \kappa}, \frac{\kappa}{\kappa - \omega_t}\right) u^{\frac{1}{\omega_t - \kappa}} (\omega_t + \kappa(u-1))^{\frac{1}{\omega_t - \kappa}} \right. \right. \\ &\times [\kappa^2(10\zeta + \omega_t(8\zeta - 5\omega_t - 6)) + \kappa(8\zeta + \omega_t(22\zeta + \omega_t(10\zeta - 11\omega_t - 19) - 6)) - 2(\omega_t + 1)(3\omega_t + 1) \\ &(\zeta - 5\zeta\omega_t + 4\omega_t^2)] + \frac{1}{\kappa} [(\kappa - \omega_t)(\omega_t + \kappa(u-1)) {}_2F_1\left(1, 1, 1 + \frac{1}{\omega_t - \kappa}, \frac{u\kappa}{\kappa - \omega_t}\right) (\kappa^2(\omega_t(5\omega_t + 6) - \\ &2\zeta(4\omega_t + 5)) + (\omega_t + 1)(3\omega_t + 1)(2\zeta - 8\zeta\omega_t + 7\omega_t^2) + 2\kappa(\omega_t(\omega_t(5\omega_t + 9) + 3) - 2\zeta(\omega_t + 2)(2\omega_t + 1)) + \\ &\frac{\omega_t}{- \kappa + \omega_t + 1} [\kappa \omega_t^{\frac{1}{\kappa-\omega_t}} {}_2F_1\left(1, 1, 2 + \frac{1}{\omega_t - \kappa}, \frac{\kappa}{\kappa - \omega_t}\right) u^{\frac{1}{\omega_t - \kappa}} (\omega_t + \kappa(u-1))^{\frac{1}{\omega_t - \kappa}} + (\kappa - \omega_t - 1)(\kappa - \omega_t)] \times \\ &\times (\kappa^2(\omega_t(6\omega_t + 7) - 2\zeta(5\omega_t + 6)) + \kappa(\omega_t(\omega_t(13\omega_t + 22) + 7) - 2\zeta(7\omega_t(\omega_t + 2) + 5)) + \\ &+ (\omega_t + 1)(3\omega_t + 1)(2\zeta - 8\zeta\omega_t + 7\omega_t^2))] + \frac{\omega_t}{\omega_t + \kappa(u-1)} \times \\ &\times [2u\omega_t(\kappa - \omega_t)^2(\omega_t + \kappa(u-1)) \omega_t^{\frac{1}{\kappa-\omega_t}} \left(-u^{\frac{1}{\kappa-\omega_t}}\right) (\omega_t + \kappa(u-1))^{\frac{1}{\omega_t-\kappa}} \times \\ &\times (\zeta(-\log(\omega_t + \kappa(u-1)) + \log(\omega_t) + \log(u)) \omega_t(\omega_T - \lambda)(\omega_t + \kappa(u-1)) \\ &+ (\kappa - \omega_t)(-\omega_t(\omega_t^2 + \zeta\lambda(u-1)) + \kappa^2(u-1)\omega_t - \kappa(u-2)\omega_t^2 + \zeta\kappa(u-1)\omega_T)] \left. \right\} \end{aligned} \quad (4.46)$$

É importante notar que  $\omega_t$ ,  $\omega_T$ ,  $\kappa$  e  $\lambda$  são parâmetros livres e, portanto, precisamos estudar como as condições de atravessabilidade são alteradas para diversas configurações destes parâmetros. Também, diferente da análise feita em [65, 99], neste caso não é possível escrever

as expressões para a pressão e densidade de energia em termos dos parâmetros do buraco de minhoca sem especificar um valor para os parâmetros livres, desde que a função forma  $\tilde{b}(u)$  apresenta uma dependência explícita destes parâmetros.

Como um primeiro caso, vamos considerar a configuração onde  $\omega_T = \kappa = \lambda = 0$  e  $\omega_t \neq 0$ . Neste caso a função forma  $\tilde{b}(u)$  recupera o caso encontrado em [64] e, conseqüentemente, a discussão sobre atravessabilidade neste caso segue exatamente como foi feito em [64]. No entanto, uma tal escolha impõe restrições severas sobre o sistema, desde que neste caso particular nós estamos trabalhando com um parâmetro de estado  $\omega$  constante e independente das correções devido à GAS.

Agora, nós iremos investigar a presença de regiões com matéria exótica. Para isto, vamos aplicar as condições de atravessabilidade e determinar que restrições estas condições trazem para os parâmetros:

- **Condição da garganta:** Para garantir a existência da garganta, precisamos das seguintes condições: A solução não pode apresentar horizonte de eventos, a condição de mínimo  $b(r_t) = r_t$ , e a condição flare-out  $b'(r_t) < r_t$ .

Desde que estamos considerando um modelo onde as forças de maré são nulas, é garantido que não teremos a presença de horizonte de eventos. Além disso, nós já temos a condição de mínimo  $\tilde{b}(1) = 1$  por construção. Portanto, resta apenas a condição flare-out  $\dot{\tilde{b}}(1) < 1$ , que, para nosso modelo, fornece

$$\frac{-\zeta[\kappa(\omega_t + 1) + \omega_t(7\omega_t + \omega_T + 6) + 1] + (2\omega_t + 1)\omega_t^2 + 2\zeta^2\omega_T}{\omega_t^2(\omega_t - 2\zeta)} - 1 < 0. \quad (4.47)$$

Note que a condição flare-out estabelece uma conexão entre  $\omega_t$ ,  $\omega_T$ ,  $\zeta$  e  $\kappa$ , que diverge quando  $\omega_t = 2\zeta$ . Como nós podemos ver na figura 8, quando  $\omega_T \neq 0$  nós temos um pequeno deslocamento na menor raiz da função condição flare-out, que aparentemente nos leva a uma pequena região onde matéria do tipo Fantasma é permitida pela condição flare-out. No entanto, devemos lembrar que o parâmetro de estado na garganta é escrito como  $\omega = \omega_t + \zeta\omega_T$ , tal que para os parâmetros escolhidos teremos  $\omega = -0.88$  (matéria do tipo Quintessência) para  $\omega_t = -1.28$ , que é a menor raiz para a condição flare-out vista na Figura 8.

- **Condição Antiscreening:** Esta condição é inteiramente relacionada à GAS, desde que o método do grupo de renormalização exige que  $f(\chi)|_{u \rightarrow u_0} > 0$ , que, para nosso modelo fornece

$$\frac{2\zeta(\zeta\omega_t(\kappa + \omega_T + 6) + \zeta(\kappa - 2\zeta\omega_T + 1) + (3\zeta - 1)\omega_t^2)}{\omega_t^2(\omega_t - 2\zeta)} > 0. \quad (4.48)$$

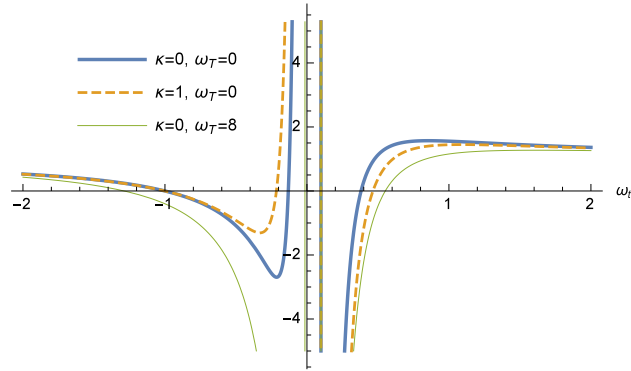


Figura 8: Condição flare-out para o buraco de minhoca pseudoesférico no contexto da GAS com  $\zeta = 0.05$ .

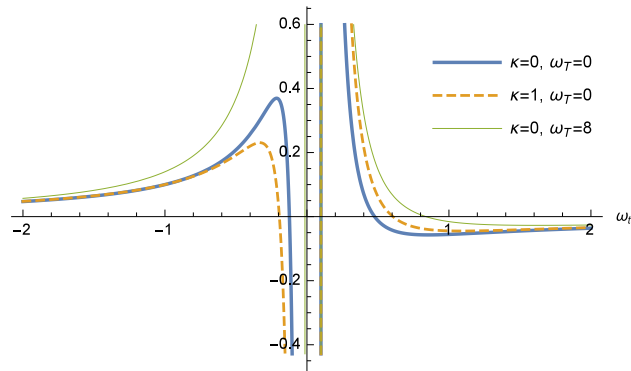


Figura 9: Condição *Antiscreening* para buraco de minhoca pseudoesférico no contexto da GAS com  $\zeta = 0.05$ .

Similarmente a condição flare-out, a condição antiscreening também exibe uma divergência quando  $\omega_t = 2\zeta$ , mas não exclui a possibilidade de o buraco de minhoca ser atravessável com matéria exótica do tipo Fantasma.

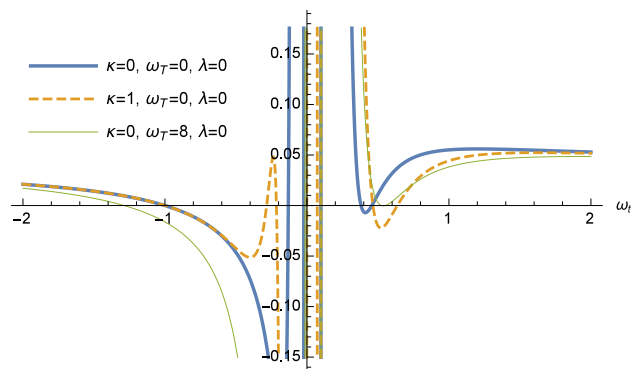


Figura 10:  $p_r + \rho$  para o buraco de minhoca pseudoesférico no contexto da GAS com  $\zeta = 0.05$ .

- Condição nula de energia: A condição nula de energia para um modelo com forças de maré zero podem ser escritas diretamente das equações de Einstein (4.2) e (4.3) na qual substituímos a função forma  $\tilde{b}(u)$  e a função cutoff  $f(u)$ . Portanto  $p_r + \rho > 0$  pode ser escrito como mostrado em (4.49). Similarmente as condições anteriores, a condição nula de energia também é divergente em  $\omega_t = 2\zeta$ . Note que diferentemente das condições da

garganta e antiscreening, a condição nula de energia apresenta uma dependência explícita do parâmetro  $\lambda$ . Também podemos ver da figura 10 que o comportamento assintótico da condição nula de energia é similar ao comportamento apresentado pela condição flare-out, tal que a permissão aparente de matéria do tipo *Phantom* deve ser analisada cuidadosamente, como fizemos anteriormente.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8\pi\omega_t^5(\omega_t - 2\zeta)^3} [-\zeta((\omega_t + 1)(\kappa + 5\omega_t + 1) + \omega_t\omega_T) + (\omega_t + 1)\omega_t^2 + 2\zeta^2\omega_T] \times \{-2\zeta^2\omega_t^2[2\zeta(\lambda - 11) \\ & + 3\kappa^2 + \kappa(-8\zeta + \omega_T + 14) - 2\zeta\omega_T + \omega_T + 8] + \zeta^2\omega_t((10\zeta - 7)\kappa^2 + 4\kappa(\zeta(2\omega_T + 9) - 2) + 2\zeta(2\zeta\lambda \\ & - 2(\zeta - 2)\omega_T + 7) - 1) + \zeta\omega_t^3(-14\zeta\kappa + \kappa + \zeta(30\zeta + \lambda - \omega_T - 35) + 1) + 4\zeta^3(\kappa + 1)(3\kappa - 2\zeta\omega_T) \\ & + \omega_t^5 - 3\zeta(8\zeta + 1)\omega_t^4\} > 0 \end{aligned} \quad (4.49)$$

Finalmente, a fim de estudar propriamente a atravessabilidade no presente contexto, precisamos investigar as regiões no espaço dos parâmetros onde todas as condições acima são satisfeitas simultaneamente.

Na figura 14 podemos ver a região de validade no espaço dos parâmetros onde todas as condições são satisfeitas simultaneamente na garganta do buraco de minhoca. Nós colocamos  $\omega_T = \lambda = 0$  a fim de desconsiderar a influência da GAS no parâmetro de estado. Na figura 14a consideramos  $\zeta = 0.005$  e podemos ver que em torno de  $\kappa = 0$  o buraco de minhoca não é atravessável. No entanto, aumentando o valor de  $\kappa$ , teremos a possibilidade de o buraco de minhoca ser atravessável com matéria ordinária, enquanto diminuindo o valor de  $\kappa$  a atravessabilidade só é possível com a presença de matéria exótica ( $\omega_t < 0$ ). Também podemos ver, comparando as figuras 14a, 14b e 14c, que aumentando o valor de  $\zeta$  haverá também um aumento de regiões em que o buraco de minhoca é atravessável. Esta dependência de  $\zeta$  é esperada, desde que quanto maior o valor de  $\zeta$  maior será a influência quântica no buraco de minhoca.

#### 4.4 O caso geral esférico

Seguindo exatamente o mesmo procedimento que foi feito no caso anterior, vamos considerar o escalar de Ricci como função *cutoff*,  $f = \xi R$ , e consideramos uma equação de estado da forma  $p_r = \omega(r)\rho$ , tal que o parâmetro de estado  $\omega(r)$  é uma função dependente da posição. Além disso, consideramos um buraco de minhoca esférico e negligenciamos as forças de maré, isto é,  $\Phi(r) = 0$ . Com isto, a equação diferencial para a função forma é aquela dada pela equação (4.25), onde novamente  $u \equiv r/r_t$  e  $\tilde{b} \equiv b/r_t$ .

A fim de resolver esta equação vamos novamente utilizar o método de iteração,

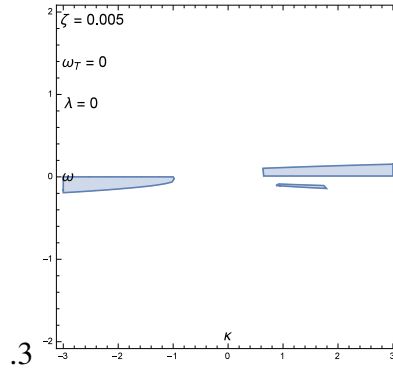


Figura 11

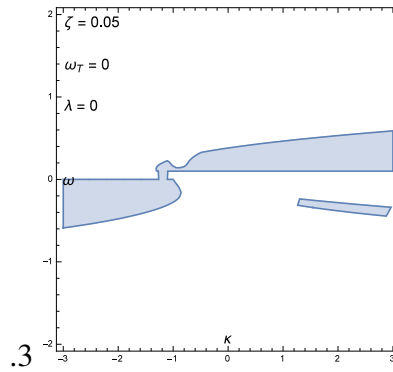


Figura 12

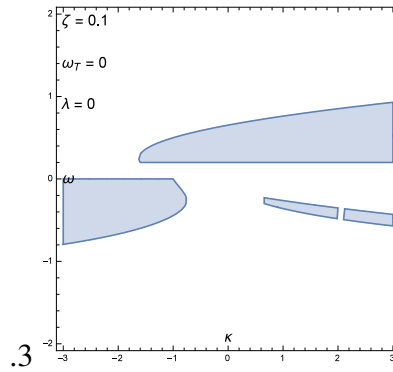


Figura 13

Figura 14: Em (a) vemos a região de atravessabilidade para buracos de minhoca pseudoesféricos no contexto da GAS para  $\zeta = 0.005$ , em (b) temos  $\zeta = 0.05$  enquanto em (c)  $\zeta = 0.1$ . Em todos os casos  $\omega_T = \lambda = 0$ .

assim como fizemos anteriormente. A solução de ordem zero é a solução da equação (4.25) com o lado direito sendo zero, fornecendo

$$\tilde{b}_{(0)}(u) = \omega_t^{\frac{1}{\kappa - \omega_t}} u^{\frac{1}{\kappa - \omega_t}} (\kappa(u - 1) + \omega_t)^{\frac{1}{\omega_t - \kappa}}, \quad (4.50)$$

com a condição de contorno  $\tilde{b}_{(0)}(1) = 1$ . Usando a expressão acima para  $\tilde{b}_{(0)}$ , a função cutoff é dada por

$$f = \xi R = 2\zeta \omega_t^{\frac{1}{\kappa - \omega_t}} u^{\frac{1}{\kappa - \omega_t} - 3} [\kappa(u - 1) + \omega_t]^{\frac{1}{\omega_t - \kappa} - 1}, \quad (4.51)$$

que fornece a seguinte equação diferencial para termo de 1° ordem  $\tilde{b}_{(1)}$

$$\begin{aligned} \omega_{(0)}\tilde{b}_{(1)} + \omega_{(1)}\dot{\tilde{b}}_{(0)} + \tilde{b}_{(1)} = & \frac{1}{\omega_t^2(2\zeta + \omega_t)^2} \zeta \{ \kappa^2(u-1)[10\zeta + \omega_t(8\zeta + 5\omega_t + 6)] \\ & + 2\zeta\kappa[2u(\omega_t + 2)(2\omega_t + 1) - \omega_t(5\omega_t + 11) - 4] + \kappa\omega_t[2u(\omega_t(5\omega_t + 9) + 3) - \omega_t(11\omega_t + 19) - 6] \\ & + (\omega_t + 1)(3\omega_t + 1)[(7u - 8)\omega_t^2 + 2\zeta(u(4\omega_t - 1) - 5\omega_t + 1)] \} \end{aligned} \quad (4.52)$$

Similarmente ao que foi feito no caso pseudoesférico, a fim de resolver devidamente a equação (4.52) para  $\tilde{b}_{(1)}$ , devemos considerar a expansão até primeira ordem de  $\omega_{(1)}$  em torno da garganta como  $\omega_{(1)} = \omega_T \zeta + \lambda \zeta(u - 1)$ .

No caso esférico, assim como no pseudoesférico, a solução para  $\tilde{b}_{(1)}$ , e consequentemente para  $\tilde{b}(u)$ , é expressada em termos de funções hipergeométricas  ${}_2F_1$ , e dado por

$$\begin{aligned} \tilde{b}(u) = & \frac{1}{\omega_t^2(\kappa - \omega_t)^2} \left\{ \frac{\zeta(\kappa - \omega_t)}{(2\zeta + \omega_t)^2} [-\omega_t^{\frac{1}{\kappa - \omega_t} + 1} {}_2F_1(1, 1, 1 + \frac{1}{\omega_t - \kappa}, \frac{\kappa}{\kappa - \omega_t}) u^{\frac{1}{\kappa - \omega_t}} (\omega_t + \kappa(u - 1))^{\frac{1}{\omega_t - \kappa}} \times \right. \\ & \times [\kappa^2(10\zeta + \omega_t(8\zeta + 5\omega_t + 6)) + \kappa(8\zeta + \omega_t(22\zeta + \omega_t(10\zeta + 11\omega_t + 19) + 6)) + 2(\omega_t + 1)(3\omega_t + 1) \\ & \left. (-\zeta + 5\zeta\omega_t + 4\omega_t^2)] + \frac{1}{\kappa} [(\kappa - \omega_t)(\omega_t + \kappa(u - 1)) {}_2F_1(1, 1, 1 + \frac{1}{\omega_t - \kappa}, \frac{u\kappa}{\kappa - \omega_t}) (\kappa^2(10\zeta + \omega_t(8\zeta + 5\omega_t + \right. \\ & \left. 6)) + (\omega_t + 1)(3\omega_t + 1)(-2\zeta + 8\zeta\omega_t + 7\omega_t^2) + 2\kappa(4\zeta + \omega_t(10\zeta + \omega_t(4\zeta + 5\omega_t + 9) + 3))) + \right. \\ & \left. + \frac{\omega_t}{-\kappa + \omega_t + 1} [\kappa\omega_t^{\frac{1}{\kappa - \omega_t}} {}_2F_1(1, 1, 2 + \frac{1}{\omega_t - \kappa}, \frac{\kappa}{\kappa - \omega_t}) u^{\frac{1}{\kappa - \omega_t}} (\omega_t + \kappa(u - 1))^{\frac{1}{\omega_t - \kappa}} + (\kappa - \omega_t - 1)(\kappa - \omega_t)] \times \right. \\ & \left. \times (\kappa^2(2\zeta(5\omega_t + 6) + \omega_t(6\omega_t + 7)) + \kappa(2\zeta(7\omega_t(\omega_t + 2) + 5) + \omega_t(\omega_t(13\omega_t + 22) + 7)) \right. \\ & \left. + (\omega_t + 1)(3\omega_t + 1)(-2\zeta + 8\zeta\omega_t + 7\omega_t^2))] + \omega_t^{\frac{1}{\kappa - \omega_t} + 1} u^{\frac{1}{\kappa - \omega_t}} (\omega_t + \kappa(u - 1))^{\frac{1}{\omega_t - \kappa} - 1} \times \right. \\ & \left. \times [\zeta\omega_t(\omega_T - \lambda)(\omega_t + \kappa(u - 1))(-\log(\omega_t + \kappa(u - 1)) + \log(\omega_t) + \log(u)) \right. \\ & \left. (\kappa - \omega_t)(-\omega_t(\omega_t^2 + \zeta\lambda(u - 1)) + \kappa^2(u - 1)\omega_t - \kappa(u - 2)\omega_t^2 + \zeta\kappa(u - 1)\omega_T)] \right\} \end{aligned} \quad (4.53)$$

Assim, a atravessabilidade do buraco de minhoca serão estudados sob diferentes configurações dos parâmetros, isto é,  $(\omega_t, \omega_T, \kappa, \lambda, \zeta)$ . Como notado anteriormente, a atravessabilidade do buraco de minhoca é estudada analisando a região de validade das três condições.

- Condição da garganta: Desde que estamos considerando um modelo sem com forças de maré nulas, não haverá horizonte de eventos enquanto que a condição de mínimo,  $\tilde{b}(1) = 1$ , é satisfeita por construção. Portanto, resta apenas a condição flare-out,  $\dot{\tilde{b}}(1) < 1$ , que fornece para o nosso modelo

$$-\frac{\zeta(\kappa + 1) + \zeta\omega_t(\kappa + 3\omega_t - \omega_T + 6) + \omega_t^2 - 2\zeta^2\omega_T}{\omega_t^2(2\zeta + \omega_t)} < 1. \quad (4.54)$$

Note que, diferentemente do caso pseudoesférico, neste caso a condição flare-out é satis-

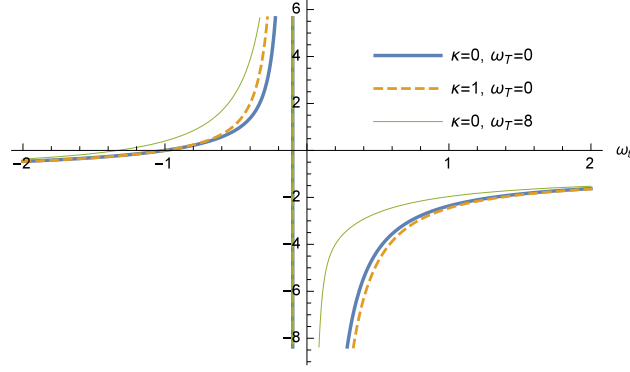


Figura 15: Condição flare-out para o buraco de minhoca esférico no contexto da GAS com  $\zeta = 0.05$

feita para  $\omega_t < -1$ , representando uma região com matéria do tipo *Phantom*.

- Condição *Antiscreening*: Como já mencionado no caso anterior, esta condição está inteiramente relacionada a GAS, e exige que  $f(\chi)|_{u \rightarrow u_0} > 0$ , que para nosso modelo fornece

$$\frac{2\zeta \left( \zeta \omega_t (\kappa - \omega_T + 6) + \zeta (\kappa - 2\zeta \omega_T + 1) + (3\zeta + 1) \omega_t^2 \right)}{\omega_t^2 (2\zeta + \omega_t)} > 0 \quad (4.55)$$

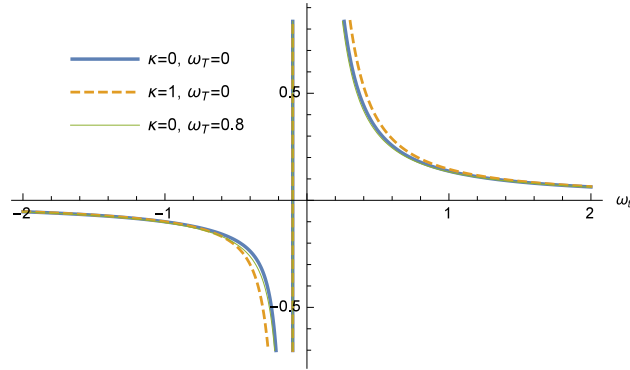


Figura 16: Condição antiscreening para o buraco de minhoca esférico no contexto da GAS com  $\zeta = 0.05$

- A condição nula de energia: A condição nula de energia radial para um modelo com zero forças de maré, pode ser escrita diretamente das equações de Einstein (5.6) e (5.7), que substituindo a função forma  $\tilde{b}(u)$  e a função cutoff  $f(u)$ , fornecendo  $p_r + \rho > 0$  como apresentado em (4.56).

Note que para as três condições no caso esférico, diferentemente do caso pseudoesférico, a divergência aparece quando  $\omega_t = -2\zeta$ . No entanto, similarmente ao caso pseudoesférico, a dependência de  $\lambda$  está presente apenas na condição nula de energia.

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{8\pi\omega_t^5(2\zeta + \omega_t)^3} [\zeta\omega_t(\kappa - \omega_T + 6) + \zeta(\kappa - 2\zeta\omega_T + 1) + \omega_t^3 + (5\zeta + 1)\omega_t^2] \{-2\zeta^2\omega_t^2[2\zeta(\lambda + 11)] \\
& + 3\kappa^2 + \kappa(8\zeta - \omega_T + 14) - (2\zeta + 1)\omega_T + 8\} + \zeta^2\omega_t[-(10\zeta + 7)\kappa^2 + 4\kappa(\zeta(2\omega_T - 9) - 2) \\
& + 2\zeta(-2\zeta\lambda + 2(\zeta + 2)\omega_T - 7) - 1 - \zeta\omega_t^3[14\zeta\kappa + \kappa + \zeta(30\zeta + \lambda - \omega_T + 35) + 1] \\
& + 4\zeta^3(\kappa + 1)(2\zeta\omega_T - 3\kappa) + \omega_t^5 + 3\zeta(1 - 8\zeta)\omega_t^4\} > 0 \tag{4.56}
\end{aligned}$$

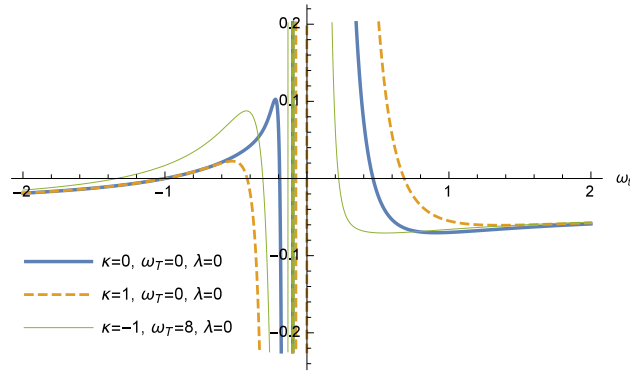


Figura 17:  $p_r + \rho$  para o buraco de minhoca esférico no contexto da GAS com  $\zeta = 0.05$ .

Deve ser notado aqui que, sob uma escolha particular dos parâmetros,  $\omega_t = 1, \omega_T = 8$  e  $\kappa = \lambda = 0$  podemos recuperar exatamente o resultado encontrado por [65] sobre o parâmetro de estado  $\omega$  no buraco de minhoca Ellis-Bronnikov para aproximação de pequeno  $\xi$ .

Finalmente, analogamente ao que foi feito na seção anterior, a fim de estudar atravessabilidade no presente contexto, precisamos investigar a região no espaço dos parâmetros onde todas as condições acima são satisfeitas simultaneamente.

Como podemos ver na figura 21, plotamos a região de validade no espaço dos parâmetros onde todas as condições são satisfeitas simultaneamente na garganta do buraco de minhoca. Analogamente ao que fizemos na seção anterior, consideramos inicialmente  $\omega_T = \lambda = 0$  a fim de desconsiderar a influência da GAS no parâmetro de estado. Na figura 21a nós consideramos  $\zeta = 0.005$  e podemos ver que há uma estreita região onde o buraco de minhoca é atravessável com matéria ordinária quando  $\kappa \geq 0$ . No entanto, para  $\kappa < 0$  a atravessabilidade torna-se permitida também no caso em que há a presença de matéria exótica ( $\omega < 0$ ). Similarmente ao caso pseudoesférico, comparando as figuras 21a, 21b e 21c, que o aumento nos valores de  $\zeta$  leva a um aumento de regiões atravessáveis.

É importante notar que, ao contrário do que é notado em [64], no caso esférico também há a possibilidade de o buraco de minhoca ser atravessável com matéria ordinária no contexto da GAS quando consideramos uma equação de estado não-linear.



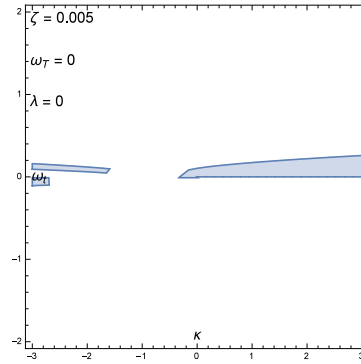


Figura 18

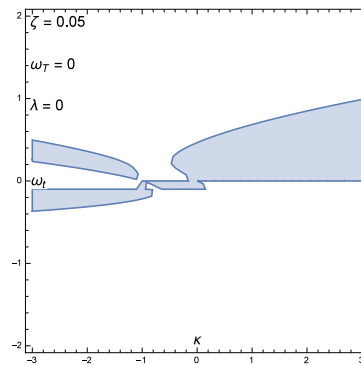


Figura 19

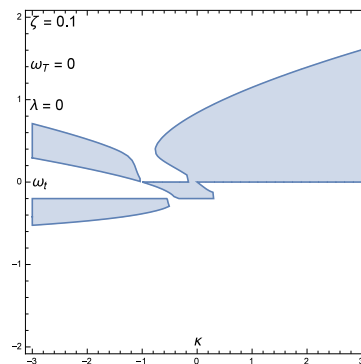


Figura 20

Figura 21: Em (a) vemos a região de atravessabilidade para buracos de minhoca esféricos no contexto da GAS para  $\zeta = 0.005$ , em (b) nós colocamos  $\zeta = 0.05$  enquanto em (c)  $\zeta = 0.1$ . Em todos os casos temos  $\omega_T = \lambda = 0$ .

No que segue, vamos investigar a presença de matéria exótica e as condições radiais de energia na garganta em duas classes distintas de buracos de minhoca, os Schwarzschild-like, e os de Ellis-Bronnikov generalizados no contexto da GAS.

## 5 DUAS CLASSES DE SOLUÇÕES DE BURACOS DE MINHOCA EM GAS: SCHWARZSCHILD-LIKE E OS DE ELLIS-BRONNIKOV GENERALIZADOS

Neste capítulo aplicamos os conceitos da GAS em métricas específicas de buracos de minhoca, isto é, conhecendo-se a função forma e função *redshift*. No caso, estudamos duas classes de buracos de minhoca: os Schwarzschild-like e os de Ellis-Bronnikov Generalizados, que foram estudados no contexto clássico da relatividade geral respectivamente em [21] e [100]. O objetivo é verificar a presença de matéria exótica e as condições radiais de energia na garganta destas soluções. Para o caso Schwarzschild-like vamos ver que apenas no caso particular Schwarzschild haverá possibilidade de as condições radiais de energia serem satisfeitas, e o problema da matéria exótica será resolvido apenas para uma parte das soluções Schwarzschild-like [99]. Já, para o caso de Ellis-Bronnikov generalizado, vamos ver que a GAS resolve o problema da matéria exótica apenas para um tipo particular de buracos de minhoca nessa gama de soluções [102].

### 5.1 Buracos de Minhoca Schwarzschild-like em GAS

Toda solução do tipo buraco de minhoca, que é estático e esfericamente simétrico, pode ser descrito pela métrica de Morris-Thorne:

$$ds^2 = e^{2\Phi(r)} dt^2 - \frac{dr^2}{1 - b(r)/r} - r^2 d\Omega_2, \quad (5.1)$$

onde  $d\Omega_2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$  é o elemento de linha de uma 2-esfera,  $e^{2\Phi(r)}$  é a função *redshift* e  $b(r)$  a função forma.

Considerando um fluido anisotrópico como fonte, para gerar o espaço-tempo determinado pelo buraco de minhoca  $T_{\nu}^{\mu} = \text{Diag}[\rho(r), -p_r(r), -p_l(r), -p_l(r)]$ , as equações de campo modificadas (3.95) levam a [64]:

$$\kappa\rho = (1+f)\frac{b'}{r^2} - (1-\frac{b}{r})(f'' + \frac{2}{r}f') + \frac{b'r-b}{2r^2}f', \quad (5.2)$$

$$\kappa p_r = -(1+f)\left(\frac{b}{r^3} - \frac{2\Phi'}{r}(1-\frac{b}{r})\right) + (1-\frac{b}{r})\left(\Phi' + \frac{2}{r}\right)f', \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \kappa p_l = & -(1+f)\left(\frac{b'r-b}{2r^2}(\Phi' + \frac{1}{r}) - (1-\frac{b}{r})(\Phi'' + \Phi'^2 + \frac{\Phi'}{r})\right) \\ & + (1-\frac{b}{r})\left((\Phi' + \frac{1}{r})f' + f''\right) - \frac{b'r-b}{2r^2}f', \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde ' denota diferenciação com respeito a coordenada  $r$ ,  $\kappa = 8\pi G_0$ , onde  $G_0$  é o valor da constante de Newton,  $\rho$  é a densidade de energia e  $p_r$  e  $p_l$  são as pressões radial e lateral, respectivamente.

Neste trabalho consideramos primeiramente o caso de buracos de minhoca Schwarzschild-like com força de maré nula, que é o caso particular onde a função *redshift* é igual a unidade, isto é,  $\Phi(r) = 0$ , e a função forma é linear em  $r$ ,  $b(r) = \alpha + \beta r$ , onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes. A condição de mínimo na garganta,  $b(r_t) = r_t$ , implica em  $\alpha = (1 - \beta)r_t$ , levando a  $b(r) = (1 - \beta)r_t + \beta r$ . Com isso, nossa métrica se torna:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{dr^2}{(1 - \beta)\left(1 - \frac{r_t}{r}\right)} - r^2 d\Omega^2. \quad (5.5)$$

onde  $r_t$  é o raio da garganta e  $\beta$  é uma constante. A condição flare-out,  $b'(r_t) \leq 1$ , implica que  $\beta \leq 1$ . Portanto, devemos ter  $\beta < 1$  para que a componente radial da métrica não divirja. O caso  $\beta = 0$  fornece o caso particular do buraco de minhoca Schwarzschild, que é assintoticamente plano. O caso onde  $\beta \neq 0$  caracteriza o buraco de minhoca Schwarzschild-like, que foram estudados no contexto da relatividade geral em [21]. Uma das consequências do parâmetro  $\beta$  é que a nova forma assintótica da métrica terá um déficit de ângulo sólido, se  $0 < \beta < 1$ , ou um excesso de ângulo sólido se  $\beta < 0$ . Com a métrica (5.5), nossas equações se tornam:

$$\kappa\rho = (1 + f)\frac{\beta}{r^2} - (1 - \beta)\left(1 - \frac{r_t}{r}\right)\left(f'' + \frac{2}{r}f'\right) - \frac{(1 - \beta)r_t}{2r^2}f', \quad (5.6)$$

$$\kappa p_r = -(1 + f)\frac{[(1 - \beta)r_t + \beta r]}{r^3} + \frac{2}{r}(1 - \beta)\left(1 - \frac{r_t}{r}\right)f', \quad (5.7)$$

$$\kappa p_l = (1 + f)\frac{(1 - \beta)r_t}{2r^3} + (1 - \beta)\left(1 - \frac{r_t}{r}\right)\left(\frac{1}{r}f' + f''\right) + \frac{(1 - \beta)r_t}{2r^2}f'. \quad (5.8)$$

Agora, devemos escolher a forma da função  $f = \xi/\chi$ . Como notado anteriormente,  $\xi$  é o parâmetro da teoria, que no limite  $\xi \rightarrow 0$  fornece o caso usual da relatividade geral, e  $\chi$  é escrito em termos de invariantes de curvatura. Para isso, iremos considerar modelos com o escalar de Ricci, quadrado do tensor de Ricci e o escalar de Kretschmann, que foram utilizados pelos autores em [64] para investigar as condições de atravessabilidade para a solução de Morris-Thorne no contexto da Gravidade Assintoticamente Segura. Eles encontraram que, dependendo dos valores dos parâmetros, essa solução permanece atravessável mas ainda na presença de matéria exótica. Neste sentido, iremos utilizar esses mesmos modelos para checar se a presença de matéria exótica é novamente vista para buracos de minhoca Schwarzschild-like nesse contexto quântico. Para a métrica (5.5) são dados respectivamente por

$$R = \frac{2\beta}{r^2}, R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = \frac{2r_t^2(1 - \beta)^2 + [(1 - \beta)r_t + 2\beta r]^2}{2r^6}, R_{\mu\nu\kappa\lambda}R^{\mu\nu\kappa\lambda} = \frac{2(1 - \beta)^2 r_t^2 + 4[(1 - \beta)r_t + \beta r]^2}{r^6}.$$

Portanto, a fim de garantir a positividade da função  $f$ , devemos escolher uma das formas para  $f$ :

$$f_1 = \xi R = \frac{2\xi\beta}{r^2}, \quad (5.9)$$

$$f_2 = \xi(R^{\mu\nu}R_{\mu\nu})^{1/2} = \frac{\xi \sqrt{2r_t^2(1-\beta)^2 + [(1-\beta)r_t + 2\beta r]^2}}{\sqrt{2}r^3}, \quad (5.10)$$

$$f_3 = \xi(R_{\mu\nu\kappa\lambda}R^{\mu\nu\kappa\lambda})^{1/2} = \frac{\xi \sqrt{2(1-\beta)^2 r_t^2 + 4[(1-\beta)r_t + \beta r]^2}}{r^3}. \quad (5.11)$$

Iremos primeiro considerar o caso particular do buraco de minhoca Schwarzschild, isto é,  $\beta = 0$ . Como podemos ver  $f_1 = 0$  nesse caso, então iremos apenas considerar  $f_2$  e  $f_3$  fornecendo para  $\beta = 0$ :

$$f_2 = \xi \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{r_t}{r^3}, \quad (5.12)$$

$$f_3 = \xi \sqrt{6} \frac{r_t}{r^3}. \quad (5.13)$$

Podemos facilmente ver que  $f_3 = 2f_2$ , e portanto, estes casos devem ter comportamentos similares. Vamos primeiro considerar o caso  $f_2$  para obter algumas conclusões e no fim plotamos os gráficos para o caso  $f_3$ .

A fim de verificar se as condições radiais de energia são satisfeitas na garganta de um buraco de minhoca Schwarzschild, usamos  $f_2$  nas equações modificadas da densidade de energia e pressões radiais e laterais, respectivamente dadas pelas Eqs. (5.6), (5.7) e (5.8), fornecendo para o caso  $\beta = 0$ :

$$\kappa\rho = \frac{\lambda r_t}{r^6} \left[ \frac{15r_t}{2} - 6r \right], \quad (5.14)$$

$$\kappa p_r = \frac{r_t}{r^6} [5\lambda r_t - 6\lambda r - r^3], \quad (5.15)$$

$$\kappa(\rho + p_r) = \frac{r_t}{r^6} \left[ \frac{25\lambda r_t}{2} - 12\lambda r - r^3 \right], \quad (5.16)$$

onde apenas por conveniência definimos  $\lambda = \xi \sqrt{\frac{3}{2}}$ . Como o fator multiplicativo das equações acima são sempre positivos, o que irá determinar o sinal de  $\rho$ ,  $p_r$  e  $\rho + p_r$  são os termos em parênteses. Interessantemente, estes termos para a densidade de energia  $\rho$  é uma função decrescente e linear em  $r$ , sendo positiva para  $r < \frac{15}{12}r_t$ , enquanto a pressão radial  $p_r$  e a soma  $\rho + p_r$  são equações cúbicas com comportamentos similares, isto é, são sempre funções decrescentes, começando positivas e mudando seus sinais em suas raízes.

Vamos analisar o comportamento dessas funções na garganta do buraco de minhoca

Schwarzschild. Em  $r = r_t$  obtemos para os parâmetros de estado:

$$\kappa\rho = \frac{3\lambda}{2r_t^4}, \quad (5.17)$$

$$\kappa p_r = -\frac{1}{r_t^4}(\lambda + r_t^2), \quad (5.18)$$

$$\kappa(\rho + p_r) = \frac{1}{r_t^4}\left(\frac{\lambda}{2} - r_t^2\right). \quad (5.19)$$

Como podemos ver, na garganta de um buraco de minhoca Schwarzschild a densidade de energia é uma constante positiva, logo,  $\rho > 0$  para todo  $r_t > 0$ . A soma  $\rho + p_r$  é positiva para  $r_t < \sqrt{\frac{\lambda}{2}}$  e portanto as condições nula e fraca de energia são satisfeitas para esses valores de  $r_t$ . Além disso, a pressão radial  $p_r$  é sempre crescente e negativa, tornando-se nula no limite  $r_t \rightarrow \infty$ , e é fácil mostrar que nós temos  $\rho > |p_r|$  para  $r_t < \sqrt{\frac{\lambda}{2}}$ . Portanto, a condição dominante de energia também é satisfeita para esses valores de  $r_t$ . Assim, as condições radiais de energia são satisfeitas na garganta de um buraco de minhoca Schwarzschild, dependendo da relação entre  $r_t$  e  $\lambda$ :

$$\begin{cases} \text{Nula:} & \rho + p_r > 0 & \text{se } r_t < \sqrt{\frac{\lambda}{2}}, \\ \text{Fraca:} & \rho \geq 0, \rho + p_r \geq 0 & \text{se } r_t < \sqrt{\frac{\lambda}{2}}, \\ \text{Dominante:} & \rho \geq 0, \rho \geq |p_r| & \text{se } r_t < \sqrt{\frac{\lambda}{2}}. \end{cases}$$

Então, vemos que para um buraco de minhoca Schwarzschild, as condições nula, fraca e dominante, são todas satisfeitas na garganta no contexto da GAS para  $r_t < \sqrt{\frac{\lambda}{2}}$ . Este resultado está em contraste com os resultados previstos pela teoria usual, como podemos ver tomando o limite  $\xi \rightarrow 0$ , onde nenhuma das condições de energia são satisfeitas. Agora, analisamos quais tipos de matéria cosmológica formando o buraco de minhoca são permitidos a fim de que as condições de energia sejam satisfeitas em sua garganta, isto é, considerando  $r_t < \sqrt{\frac{\lambda}{2}}$ .

Vamos começar procurando os tipos de matéria cosmológica que deveríamos ter na garganta de um buraco de minhoca Schwarzschild se todas as condições de energia são satisfeitas. Fazemos isto calculando o parâmetro de estado radial  $\omega(r) = p_r/\rho$ . Calculando  $\omega$  em  $r = r_t$  fornece:

$$\omega = -\frac{2}{3}\left(1 + \frac{r_t^2}{\lambda}\right), \quad (5.20)$$

e analisamos isto como uma função de  $r_t$ . Note que o termo entre parênteses é sempre positivo, e, portanto, teremos sempre  $\omega < 0$ . Esta característica é bastante notável, porque  $\omega \rightarrow \infty$  para um buraco de minhoca Schwarzschild no contexto da relatividade geral, enquanto no cenário GAS obtemos um valor finito de  $\omega$  em  $r_t$ . Além disso, podemos facilmente mostrar que para

$r_t < \sqrt{\frac{\lambda}{2}}$  obtemos  $-1 < \omega < -1/3$ . Ficamos com:

$$\begin{cases} \text{Quintess\^encia: } -1 < \omega < -1/3 & \text{se } r_t < \sqrt{\frac{\lambda}{2}}, \\ \text{Phantom: } \omega < -1 & \text{se } r_t > \sqrt{\frac{\lambda}{2}}. \end{cases} \quad (5.21)$$

Logo, se todas as condi\c7\~oes radiais de energia s\~ao satisfeitas, vemos que a garganta de um buraco de minhoca Schwarzschild deve ser formada por mat\^eria ex\~otica do tipo Quintess\^encia.

Agora, considerando  $r_t < \sqrt{\frac{\lambda}{2}}$ , isto \^e, o caso onde a garganta possui quintess\^encia como fonte, analisamos que tipo de mat\^eria devemos ter regi\~ao por regi\~ao, analisando o sinal de  $\omega(r) = p_r/\rho$ :

$$\omega(r) = \frac{5\lambda r_t - 6\lambda r - r^3}{\frac{15\lambda r_t}{2} - 6\lambda r}, \quad (5.22)$$

onde  $\lambda = \xi \sqrt{\frac{3}{2}}$  e  $r_t < \sqrt{\frac{\lambda}{2}}$ . Essa fun\c7\~ao possui uma ass\^intota em  $r = \frac{15r_t}{12}$  e podemos ver que para a regi\~ao  $r > \frac{15r_t}{12}$  n\~os sempre teremos mat\^eria ex\~otica com  $\omega > 1$ . Para  $r_- < r < \frac{15r_t}{12}$ , temos  $\omega < -1$ , uma regi\~ao com mat\^eria do tipo *Phantom*, onde  $r = r_-$  \^e o valor de  $r$  onde  $\omega = -1$ , ou equivalentemente, quando  $\rho + p_r = 0$ , que em termos de  $\lambda$  e  $r_t < \sqrt{\frac{\lambda}{2}}$  \^e dado por:

$$r_- = \frac{6,3496\lambda}{\sqrt[3]{\sqrt{625r_t^2\lambda^2 + 1024\lambda^3} - 25r_t\lambda}} - 0,629961 \sqrt[3]{\sqrt{625r_t^2\lambda^2 + 1024\lambda^3} - 25r_t\lambda}. \quad (5.23)$$

Finalmente, para  $r_t < r < r_-$  podemos ter uma regi\~ao com fluido quintessencial, isto \^e, mat\^eria ex\~otica com  $-1 < \omega < -1/3$ . Portanto, n\~os temos as solu\c7\~oes de  $\omega$  regi\~ao por regi\~ao para o buraco de minhoca Schwarzschild:

$$\begin{cases} \text{Quintess\^encia: } -1 < \omega < -1/3 & \text{se } r_t < r < r_-, \\ \text{Phantom: } \omega < -1 & \text{se } r_- < r < \frac{15r_t}{12}, \\ \text{Outras mat\^erias ex\~oticas: } \omega > 1 & \text{se } r > \frac{15r_t}{12}. \end{cases} \quad (5.24)$$

Como podemos ver, as corre\c7\~oes qu\^anticas levam a inevit\~avel presen\c7a de regi\~oes com mat\^eria ex\~otica do tipo *Phantom*, como fonte para o espa\c7o-tempo do buraco de minhoca. Estes resultados s\~ao bastante similares aos encontrados para o buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov [72, 73], que foi estudado por Alencar et al. [65]. Eles encontraram que no contexto da GAS, as condi\c7\~oes radiais de energia s\~ao satisfeitas na garganta para determinados valores de  $r_t$ , e, para isto, \^e necess\~ario mat\^eria ex\~otica do tipo quintess\^encia como fonte para a garganta. Al\^em disso, tamb\^em teremos a presen\c7a de regi\~oes com mat\^eria do tipo *Phantom*. Isso \^e exatamente o que acontece para buracos de minhoca Schwarzschild no contexto da GAS.

O comportamento de  $\omega$  para  $\lambda = 1$  e  $r_t^2 = 1/3$  pode ser visto na figura 22. Neste

caso teremos uma pequena região contendo quintessência para  $r > r_t = 1/\sqrt{3}$  entrando numa região do tipo *Phantom* em  $r = r_- \approx 0,587$  até o momento em que  $\omega$  diverge em  $r \approx 0,721$ , e para  $r > 0,721$  teremos matéria exótica com  $\omega > 1$ .

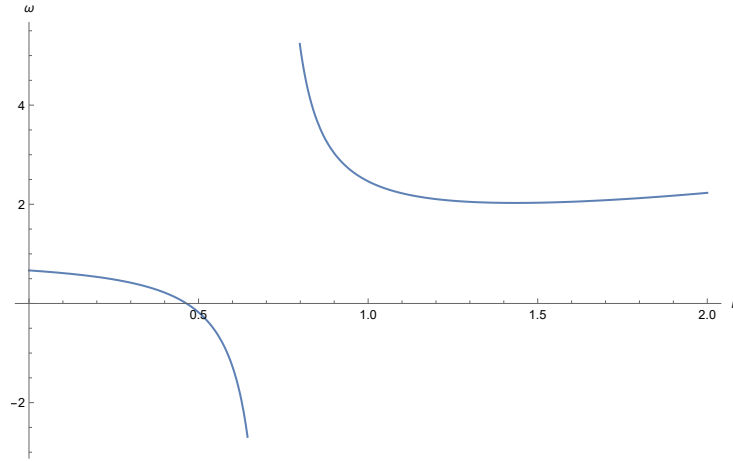


Figura 22: Plot de  $\omega(r)$  para um buraco de minhoca Schwarzschild ( $\beta = 0$ ) no contexto da GAS para  $\lambda = 1$  ( $\xi = \sqrt{2/3}$ ) e  $r_t^2 = 1/3$ .

Como o caso do escalar de Kretschmann tem basicamente o mesmo comportamento obtido com quadrado do tensor de Ricci, nós apenas mostramos o gráfico da expressão de  $\omega$ , que pode ser visto em 23 com os mesmos valores específicos acima, onde nós temos basicamente o mesmo comportamento do caso anterior.

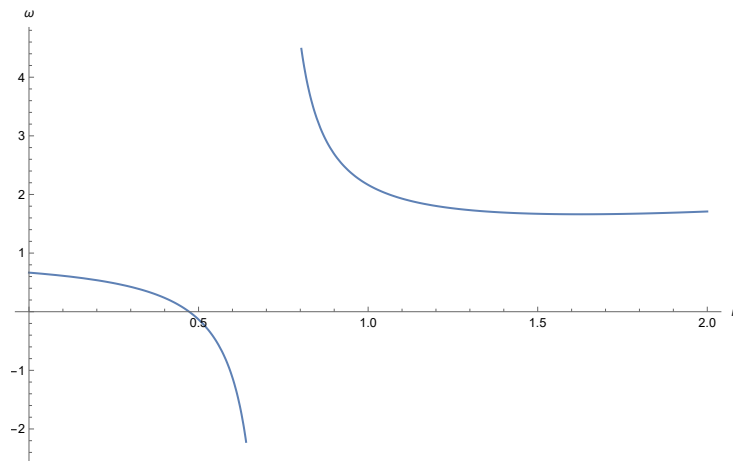


Figura 23: Plot de  $\omega(r)$  para um buraco de minhoca Schwarzschild ( $\beta = 0$ ) no contexto da GAS usando o escalar de Kretschmann, para  $\lambda = 1$  ( $\xi = \sqrt{2/3}$ ) e  $r_t^2 = 1/3$ .

Agora, viramos a atenção para o caso do buraco de minhoca Schwarzschild-like, isto é, considerando  $\beta \neq 0$ . Para isto consideramos a função definida a partir do escalar de Ricci  $f = f_1 = \xi R$ . A fim de garantir a condição  $f_1 > 0$  devemos separar  $f_1$  em duas formas,

dependendo do sinal de  $\beta$ :

$$f_1 = \begin{cases} -2\xi\beta/r^2 & \text{se } \beta < 0 \\ 2\xi\beta/r^2 & \text{se } 0 < \beta < 1 \end{cases} \quad (5.25)$$

Portanto, com a prescrição  $\xi \rightarrow -\xi$  podemos passar de um caso para outro.

Vamos analisar as condições radiais de energia na garganta de um buraco de minhoca Schwarzschild-like. Tais condições são verificadas na substituição de (5.25) nas Eqs. (5.6) e (5.7). Obtemos para o caso  $0 < \beta < 1$ :

$$\kappa\rho = \frac{\beta}{r^5} \left[ r^3 - 2\xi(2 - 3\beta)r + 6\xi r_t(1 - \beta) \right], \quad (5.26)$$

$$\kappa p_r = \frac{\beta}{r^5} \left[ -r^3 + r_t(1 - 1/\beta)r^2 - 2\xi(4 - 3\beta)r + 6\xi r_t(1 - \beta) \right], \quad (5.27)$$

$$\kappa(\rho + p_r) = \frac{\beta}{r^5} \left[ r_t(1 - 1/\beta)r^2 - 12\xi(1 - \beta)r + 12\xi r_t(1 - \beta) \right], \quad (5.28)$$

e o caso  $\beta < 0$  é obtido através da prescrição  $\xi \rightarrow -\xi$  fornecendo:

$$\kappa\rho = \frac{\beta}{r^5} \left[ r^3 + 2\xi(2 - 3\beta)r - 6\xi r_t(1 - \beta) \right], \quad (5.29)$$

$$\kappa p_r = \frac{\beta}{r^5} \left[ -r^3 + r_t(1 - 1/\beta)r^2 + 2\xi(4 - 3\beta)r - 6\xi r_t(1 - \beta) \right], \quad (5.30)$$

$$\kappa(\rho + p_r) = \frac{\beta}{r^5} \left[ r_t(1 - 1/\beta)r^2 + 12\xi(1 - \beta)r - 12\xi r_t(1 - \beta) \right]. \quad (5.31)$$

Novamente, o que irá determinar o sinal de  $\rho, p_r$  e  $\rho + p_r$  são os termos entre colchetes. Os termos de  $\rho$  e  $p_r$  são equações cúbicas que possuem apenas uma raiz real e o termo para  $\rho + p_r$  é uma equação quadrática. Prontamente se vê que essas expressões são todas positivas em  $r = 0$  se  $0 < \beta < 1$  e são todas negativas se  $\beta < 0$ . Portanto, próximo a  $r = 0$  podemos dizer que eles são todos positivos, satisfazendo as condições radiais de energia para ambas condições de  $\beta$ .

No entanto, como no caso  $\beta = 0$ , iremos primeiro analisar o sinal das quantidades  $\rho, p_r$ , e  $\rho + p_r$ , a fim de verificar se as condições nula ( $\rho + p_r \geq 0$ ), fraca ( $\rho \geq 0, \rho + p_r \geq 0$ ) e dominante ( $\rho \geq 0, \rho \geq |p_r|$ ) de energia são satisfeitas em regiões próximas à garganta. Para isto, consideramos as equações (5.26),(5.27),(5.28) em  $r = r_t$  fornecendo para o caso  $0 < \beta < 1$ :

$$\kappa\rho = \frac{\beta}{r_t^4} (2\xi + r_t^2), \quad (5.32)$$

$$\kappa p_r = -\frac{\beta}{r_t^4} \left( \frac{r_t^2}{\beta} + 2\xi \right), \quad (5.33)$$

$$\kappa(\rho + p_r) = \frac{(\beta - 1)}{r_t^2}. \quad (5.34)$$

Portanto, chegamos em algumas conclusões gerais para esse caso. Vemos que  $p_r$  deve ser uma função crescente de  $r_t$  e é sempre negativa, tal que  $p_r \rightarrow 0$  no limite  $r_t \rightarrow \infty$ . Por



outro lado, temos  $\rho > 0$  para todo  $r_t > 0$  desde que  $\rho$  é formado apenas por termos positivos. Finalmente, note que  $\rho + p_r < 0$  para todo  $r_t > 0$  devido à condição  $\beta < 1$ . Devido ao termo  $\beta^{-1}$  em  $p_r$  podemos notar que  $\rho \leq |p_r|$ . Assim, vemos que nenhuma das condições radiais de energia são satisfeitas em  $r_t$  para o caso  $0 < \beta < 1$ .

Fazendo  $\xi \rightarrow -\xi$  as equações de estado na garganta do buraco de minhoca para o caso  $\beta < 0$  fornecendo:

$$\kappa\rho = \frac{\beta}{r_t^4}(-2\xi + r_t^2), \quad (5.35)$$

$$\kappa p_r = \frac{\beta}{r_t^4}\left(-\frac{r_t^2}{\beta} + 2\xi\right), \quad (5.36)$$

$$\kappa(\rho + p_r) = \frac{(\beta - 1)}{r_t^2}. \quad (5.37)$$

Como podemos ver  $\rho + p_r$  permanece negativo para todo  $r_t > 0$  e portanto as condições radiais nula e fraca não são satisfeitas. Para  $\rho > 0$  devemos ter  $r_t < \sqrt{2\xi}$  e podemos notar que  $p_r < 0$  para todo  $r_t > 0$ . No entanto,  $\rho \leq |p_r|$  para  $r_t < \sqrt{2\xi}$  e portanto as condições radiais de energia também não são satisfeitas para o caso  $\beta < 0$ .

Os resultados da Relatividade Geral podem ser rapidamente recuperados fazendo o limite  $\xi \rightarrow 0$ , como podemos ver em Ref. [21]. No caso usual, as condições radiais de energia não são satisfeitas na garganta do buraco de minhoca e esta característica permanece no contexto da GAS, pelo menos para o caso do escalar de Ricci.

Agora, iremos investigar a presença de matéria exótica no buraco de minhoca Schwarzschild-like na teoria GAS, calculando o parâmetro de estado  $\omega(r) = p_r/\rho$ . Vamos primeiro ver que tipo de matéria é permitida na garganta do buraco de minhoca. Para isto, temos para o caso  $0 < \beta < 1$ :

$$\omega = \frac{-r_t^2/\beta - 2\xi}{r_t^2 + 2\xi},$$

e podemos analisar isso como uma função de  $r_t$ . Vemos imediatamente que  $\omega$  é sempre negativo nesse caso, e portanto, a garganta não pode ser formada por matéria ordinária ( $0 < \omega < 1$ ) ou matéria exótica com  $\omega > 1$ . Além disso, é fácil notar que  $\omega < -1$  para todo  $r_t > 0$  e concluímos que próximo a garganta devemos necessariamente ter fluido *Phantom*, se  $0 < \beta < 1$ . Novamente, esse é o mesmo resultado encontrado para o caso usual, como podemos ver tomando o limite  $\xi \rightarrow 0$ , fornecendo  $\omega = -1/\beta$ .

Fazendo  $\xi \rightarrow -\xi$  obtemos o parâmetro de estado em  $r = r_t$  para o caso  $\beta < 0$ :

$$\omega = \frac{-r_t^2/\beta + 2\xi}{r_t^2 - 2\xi}.$$

É fácil mostrar que para  $r_t < \sqrt{2\xi}$  sempre teremos  $\omega < -1$ , para todo  $\beta < 0$ , caracterizando um

buraco de minhoca com matéria do tipo *Phantom* em sua garganta. Mas, desta vez, temos a possibilidade de encontrar matéria não-exótica ( $0 < \omega < 1$ ) na garganta, desde que os valores de  $\beta$  sejam restringidos a  $\beta < -1$ . Obtemos facilmente:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Phantom:} & \omega < -1 \quad \text{se } r_t < \sqrt{2\xi} \quad \text{para todo } \beta < 0, \\ \text{Outras matérias exóticas:} & \omega > 1 \quad \text{se } \sqrt{2\xi} < r_t \quad \text{com } -1 < \beta < 0 \quad \text{ou } \sqrt{2\xi} < r_t < \sqrt{\frac{4\xi}{1+1/\beta}} \\ \text{Matéria Não-Exótica:} & 0 < \omega < 1 \quad \text{se } r_t > \sqrt{\frac{4\xi}{1+1/\beta}} \quad \text{com } \beta < -1. \end{array} \right. \quad (5.38)$$

Portanto, no caso  $\beta < 0$  temos a possibilidade de a garganta ser formada por matéria do tipo *Phantom* ( $\omega < -1$ ), matéria não-exótica ( $0 < \omega < 1$ ) ou outras matérias exóticas com  $\omega > 1$  dependendo dos valores de  $r_t$  e  $\beta$ . Este resultado difere do caso usual porque há a possibilidade de a garganta ser formada por um fluido *Phantom*, enquanto em Relatividade Geral nós sempre temos  $\omega = -1/\beta > 0$  em  $r = r_t$ , isto é, matéria ordinária ( $0 < \omega < 1$ ) se  $\beta < -1$  ou matéria exótica com  $\omega > 1$  se  $-1 < \beta < 0$  para regiões próximas à garganta.

Finalmente, analisamos que tipo de matéria devemos ter ao longo de todo o espaço-tempo determinado pelo buraco de minhoca Schwarzschild-like. Para isso, temos para o caso  $0 < \beta < 1$ :

$$\omega(r) = \frac{p_r(r)}{\rho(r)} = \frac{-r^3 + r_t(1 - 1/\beta)r^2 - 2\xi(4 - 3\beta)r + 6\xi r_t(1 - \beta)}{r^3 - 2\xi(2 - 3\beta)r + 6\xi r_t(1 - \beta)}.$$

Como notado anteriormente, neste caso nós sempre teremos fluido *Phantom* na garganta para todo  $r_t > 0$ . Note que o denominador é sempre uma função crescente e positiva para  $r > r_t > 0$ , e portanto, o que irá determinar o sinal da função acima é o denominador. Pode ser mostrado que o numerador é uma função decrescente, começando positiva e mudando seu sinal em sua raiz. No entanto, qualquer que seja o valor de  $r_t$ , sua raiz sempre será menor que  $r_t$ . Portanto, não podemos ter regiões com matéria não-exótica ( $0 < \omega < 1$ ) ou outras matérias exóticas com  $\omega > 1$ . Além disso, desde que  $r_t < r$ , sempre temos  $\rho \leq |p_r|$ , e então  $\omega < -1$  para todo  $0 < r_t < r$ . Portanto, para buracos de minhoca Schwarzschild-like com uma falta de ângulo sólido ( $0 < \beta < 1$ ) nós temos necessariamente um buraco de minhoca Fantasma. Mostramos essa característica na Fig. 24, onde podemos ver que toda a região do buraco de minhoca deve ser preenchida com matéria exótica do tipo Fantasma, com  $\omega \rightarrow -1$  quando  $r \rightarrow \infty$ .

Fazendo a mudança  $\xi \rightarrow -\xi$ , obtemos o parâmetro de estado  $\omega(r)$  para o caso  $\beta < 0$ :

$$\omega(r) = \frac{-r^3 + r_t(1 - 1/\beta)r^2 + 2\xi(4 - 3\beta)r - 6\xi r_t(1 - \beta)}{r^3 + 2\xi(2 - 3\beta)r - 6\xi r_t(1 - \beta)}.$$

Vamos considerar o caso onde a garganta possui matéria exótica do tipo Fantasma como fonte, isto é,  $r_t < \sqrt{2\xi}$  para todo  $\beta < 0$ . Neste caso, o denominador é uma função crescente, começando negativa para  $0 < r_t < r$  e mudando seu sinal em  $r = a$ , onde  $a$  é a raiz do denominador, que, em

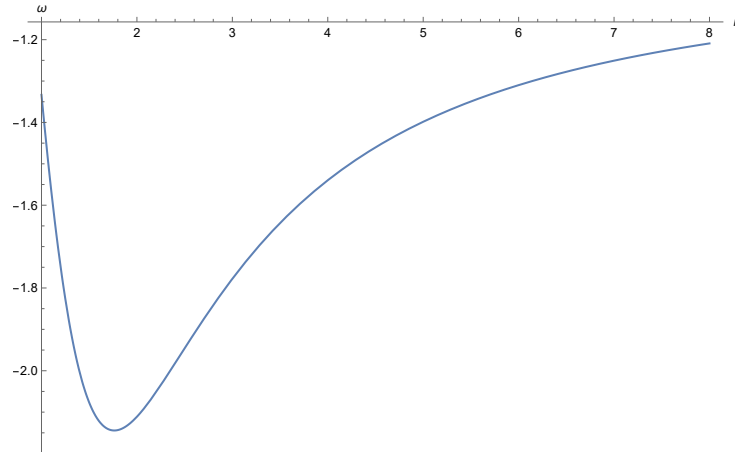


Figura 24: Plot de  $\omega(r)$  para um buraco de minhoca Schwarzschild-like, com  $r_t = 1 < r$ ,  $\xi = 1$  e  $\beta = 1/2$ , em unidades Planckianas.

termos de  $\xi$  e  $r_t < \sqrt{2\xi}$  é dado por:

$$a = \frac{2\sqrt[3]{3}(-2 + 3\beta)\xi + \left[27(1 - \beta)\xi r_t + \sqrt{24(2 - 3\beta)^3\xi^3 + 729(1 - \beta)^2\xi r_t^2}\right]^{2/3}}{3^{2/3} \left[27(1 - \beta)\xi r_t + \sqrt{24(2 - 3\beta)^3\xi^3 + 729(1 - \beta)^2\xi r_t^2}\right]^{1/3}}. \quad (5.39)$$

Portanto, o parâmetro de estado tem uma assíntota nesse caso, separando  $\omega$  em duas regiões. Além disso, o numerador tem uma região positiva para  $r_t < r < b$ , onde  $r = b$  é o valor de sua raiz, e torna-se negativo para  $r > b$ .

É fácil mostrar que teremos  $\omega < -1$  for  $r_t < r < a$ , mais matéria do tipo Fantasma além da região da garganta. Quando  $r > a$  há um decaimento suave de  $\omega$ , com  $\omega > 1$  para  $a < r < r_+$ , onde  $r = r_+$  é o valor da coordenada radial quando  $\omega = 1$ , dado por:

$$r_+ = \frac{r_t(1 - 1/\beta) + \sqrt{r_t^2(1 - 1/\beta)^2 + 32\xi}}{4}. \quad (5.40)$$

Portanto, devemos ter  $0 < \omega < 1$  para  $r_+ < r < b$ , onde  $\omega = 0$  em  $r = b$ . Interessantemente, se a garganta de um buraco de minhoca Schwarzschild-like com excesso de ângulo sólido ( $\beta < 0$ ) é formada por matéria do tipo *Phantom*, temos a possibilidade de uma região com matéria não-exótica ( $0 < \omega < 1$ ). Depois,  $\omega$  torna-se negativo novamente  $r > b$  e continua decaindo até atingir o valor  $-1/3$  para algum  $r = c$ , e tende a  $-1$  para  $r_t \rightarrow \infty$ . Logo, devemos ter uma grande

presença de fluido quintessencial para  $r > c$ , e facilmente obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \textit{Phantom}: & \omega < -1 & \text{se } r_t < r < a, \\ \text{Outras mat\u00e9rias ex\u00f3ticas}: & \omega > 1 & \text{se } a < r < r_+, \\ \text{Mat\u00e9ria n\u00e3o-ex\u00f3tica}: & 0 < \omega < 1 & \text{se } r_+ < r < b, \\ \text{Quintess\u00eancia}: & -1/3 < \omega < -1 & \text{se } r > c. \end{array} \right. \quad (5.41)$$

As caracter\u00edsticas acima para  $\omega$  neste caso, para  $\xi = 1$ ,  $r_t = 1$  e  $\beta = -1$ , \u00e9 mostrado na Fig. 25. Temos mat\u00e9ria do tipo *Phantom* para  $r_t = 1 < r < 1,08$  seguido por uma regi\u00e3o de mat\u00e9ria ex\u00f3tica com  $\omega > 1$  at\u00e9 alcan\u00e7ar a regi\u00e3o com mat\u00e9ria n\u00e3o-ex\u00f3tica ( $0 < \omega < 1$ ) para  $2 < r < 4,51$ . Finalmente, a regi\u00e3o final possui mat\u00e9ria ex\u00f3tica do tipo quintess\u00eancia como fonte para  $r > 6,45$ .

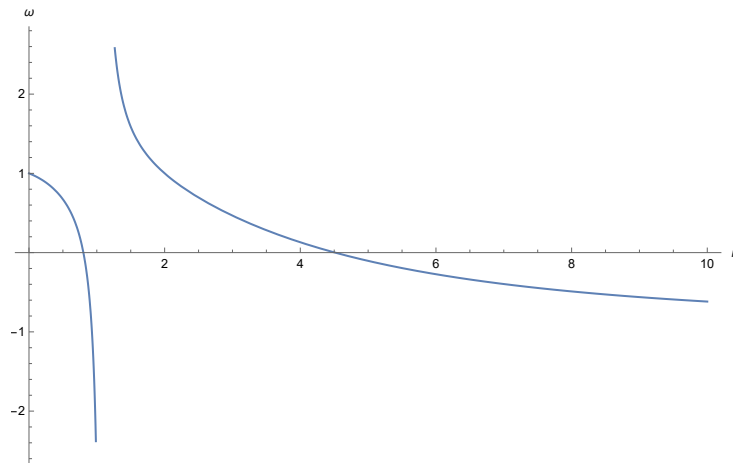


Figura 25: Plot de  $\omega(r)$  para um buraco de minhoca Schwarzschild-like ( $\beta < 0$ ) para  $\xi = 1$ ,  $r_t = 1$ , e  $\beta = -1$ .

## 5.2 Buracos de Minhoca Ellis-Bronnikov generalizados

O buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov generalizado [100, 101] \u00e9 definido a partir das fun\u00e7\u00f5es forma e *redshift* respectivamente dados por

$$b(r) = r - r^{3-2n} (r^n - r_t^n)^{2-\frac{2}{n}}, \quad (5.42)$$

$$\phi(r) = 0, \quad (5.43)$$

com  $r_t$  sendo o raio da garganta, assim como no caso anterior. Tamb\u00e9m como o caso anterior, temos  $\phi(r) = 0$  implicando em um buraco de minhoca *zero-tidal*, isto \u00e9, um buraco de minhoca onde n\u00e3o h\u00e1 efeitos das for\u00e7as de mar\u00e9. Esta solu\u00e7\u00e3o representa uma classe de buracos de minhoca classificados pelo par\u00e2metro  $n$  permitido a assumir apenas valores pares [100, 101], com  $n = 2$  sendo o caso usual do conhecido espa\u00e7o-tempo definido pelo buraco de minhoca

de Ellis-Bronnikov [72, 73], que já foram estudados no contexto da GAS em [65]. Sob estas considerações, as equações de campo modificadas (5.6) e (5.7) para este caso nos levam a

$$\begin{aligned} \kappa\rho = & r^{-2(n+1)}(r^n - r_t^n)^{-2/n}\{-r^2 r_t^{2n}[r^2 f'' - (n-3)rf' + (3-2n)f - 2n+3] + \\ & + r^{n+2} r_t^n [2r^2 f'' - (n-5)rf' - 2(n-2)f - 2n+4] + r^{2n}[(f+1)(r^n - r_t^n)^{2/n} - \\ & r^2(r^2 f'' + 2rf' + f + 1)]\}, \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$\kappa p_r = 2r^{1-2n} f' (r^n - r_t^n)^{2-\frac{2}{n}} + \frac{(-f-1)\left(r - r^{3-2n}(r^n - r_t^n)^{2-\frac{2}{n}}\right)}{r^3}, \quad (5.45)$$

$$\kappa p_l = r^{-2n}(r^n - r_t^n)^{\frac{n-2}{n}}\left(r^{n+1}(rf'' + f') + r_t^n(r((n-2)f' - rf'') + (n-1)f + n-1)\right) \quad (5.46)$$

onde  $\kappa = 8\pi G_0$ . Agora devemos escolher os invariantes de curvatura que vão definir a função *cutoff*  $f$ . Assim como fizemos para o caso do buraco de minhoca Schwarzschild as três escolhas mais comuns são o escalar de Ricci  $R$ , o quadrado do tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$  e o escalar de Kretschmann  $R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\mu\nu\lambda\rho}$ . Portanto, iremos definir  $f_1 = \xi R$ ,  $f_2 = \xi(R^{\mu\nu}R_{\mu\nu})^{1/2}$  e  $f_3 = \xi(R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\mu\nu\lambda\rho})^{1/2}$ , que para a métrica do buraco de Ellis-Bronnikov generalizado fornece

$$f_1 = -\frac{2\xi}{r^2}\left[-\left(2 - \frac{2}{n}\right)nr^{2-n}(r^n - r_t^n)^{1-\frac{2}{n}} - (3-2n)r^{2-2n}(r^n - r_t^n)^{2-\frac{2}{n}} + 1\right], \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} f_2 = & \left\{2r^{-4(n+1)}(r^n - r_t^n)^{-4/n}\left[-2(3(n-3)n+8)r^{n+4}r_t^{3n} + (n(3n-8)+6)r^4r_t^{4n} + \right. \right. \\ & + 2(n-3)r^{3n+2}r_t^n\left(r^2 - (r^n - r_t^n)^{2/n}\right) + r^{4n}\left(r^2 - (r^n - r_t^n)^{2/n}\right)^2 + \\ & \left. \left. + r^{2n+2}r_t^{2n}\left(2(n-2)(r^n - r_t^n)^{2/n} + 3((n-4)n+5)r^2\right)\right]\right\}^{1/2}\xi, \end{aligned} \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned} f_3 = & \left\{r^{-4(n+1)}(r^n - r_t^n)^{-4/n}\left[-4((n-2)n+2)r^{n+4}r_t^{3n} + (2(n-2)n+3)r^4r_t^{4n} + 4r^{3n+2}r_t^n\left((r^n - r_t^n)^{2/n} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. r^2\right) + r^{4n}\left(r^2 - (r^n - r_t^n)^{2/n}\right)^2 + 2r^{2n+2}r_t^{2n}\left(\left((n-2)n+4\right)r^2 - (r^n - r_t^n)^{2/n}\right)\right]\right\}^{1/2}\xi. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Agora, vamos utilizar estes três escalares de curvatura para fazer o *improvement* devido à GAS a fim de analisar a presença de matéria exótica em buracos de minhoca de Ellis-Bronnikov generalizados e se há a possibilidade de as condições radiais de energia serem satisfeitas na garganta. Para este fim devemos substituir as funções *cutoff* definidas acima e substituir nas equações (5.44) e (5.45). Por questão de clareza e organização vamos tratar cada uma das funções *cutoff* separadamente.

### 5.2.1 Escalar de Ricci

Para a função *cutoff* definida por (5.47) teremos

$$\begin{aligned} \kappa\rho = & r^{-4(n+1)}(r^n - r_t^n)^{-4/n} \{-2r^{3n+2}r_t^n(2(n(n^2 + n - 2) - 6)\xi r^2 + ((n-2)r^2 - 2(n-5)\xi) \\ & (r^n - r_t^n)^{2/n}) + -4((n-1)n(12n-11) - 6)\xi r^{n+4}r_t^{3n} + 6(2n-3)(2(n-1)n+1)\xi r^4 r_t^{4n} + \\ & + r^{4n}((r^n - r_t^n)^{2/n} - r^2)((r^2 - 2\xi)(r^n - r_t^n)^{2/n} + 6\xi r^2) + \\ & + r^{2n+2}r_t^{2n}(4(n(7(n-1)n-3) - 6)\xi r^2 + ((2n-3)r^2 - 4(n-3)\xi)(r^n - r_t^n)^{2/n})\}, \end{aligned} \quad (5.50)$$

$$\begin{aligned} \kappa p_r = & r^{-4(n+1)}(r^n - r_t^n)^{-4/n} \{-4(5n(2n-3) - 1)\xi r^{n+4}r_t^{3n} + 2(2n(4n-7) + 3)\xi r^4 r_t^{4n} + \\ & -2r^{3n+2}r_t^n(2(n(2n-1) - 7)\xi r^2 + (2(n+1)\xi + r^2)(r^n - r_t^n)^{2/n}) + \\ & -r^{4n}((r^n - r_t^n)^{2/n} - r^2)((r^2 - 2\xi)(r^n - r_t^n)^{2/n} - 6\xi r^2) + \\ & + r^{2n+2}r_t^{2n}(4(n(8n-9) - 8)\xi r^2 + (4n\xi + r^2)(r^n - r_t^n)^{2/n})\}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Note que para o caso particular  $n = 2$  recuperamos os resultados apresentados em [65] onde eles estudaram os efeitos da GAS na solução usual de Ellis-Bronnikov. Aqui, focamos apenas nas soluções generalizadas com  $n \geq 4$ .

Agora, vamos mostrar que, usando o escalar de Ricci para definir a função *cutoff*, apenas o caso  $n = 4$  fornece um resultado diferente para a densidade de energia  $\rho$  quando calculamos na garganta, enquanto para todos os outros casos com  $n \geq 6$  teremos o mesmo resultado. Já, para a pressão radial  $p_r$ , obtemos sempre o mesmo resultado para todas as soluções generalizadas  $n \geq 4$ . Para isto, é mais conveniente reescrever as Eqs. (5.50) e (5.51) na forma

$$\begin{aligned} \kappa\rho = & \frac{1}{r^2} - \frac{2\xi}{r^4} + r^{-2(1+n)}(r^n - r_t^n)^{\frac{-2+n}{n}}(-r^n(r^2 - 8\xi) + 3r_t^n(r^2 - 4\xi)) - 4n^2 r^{-4n} r_t^n (r^n - r_t^n)^{\frac{-4+n}{n}}(r^{2n} + \\ & 8r^n r_t^n - 15r_t^{2n})\xi \\ & - 6r^{-4n}(r^n - 3r_t^n)(r^n - r_t^n)^{\frac{-4+n}{n}}(r^{2n} + r_t^{2n})\xi - 4n^3 r^{-4n} r_t^n (r^n - r_t^n)^{\frac{-4+n}{n}}(r^{2n} - 6r^n r_t^n + 6r_t^{2n}) \\ & - 2nr^{-2(1+n)}r_t^n (r^n - r_t^n)^{-2+n}n(r^2 - 2\xi) + 4nr^{-4n}r_t^n (r^n - r_t^n)^{\frac{-4+n}{n}}(2r^{2n} - r^n r_t^n - 12r_t^{2n})\xi, \end{aligned} \quad (5.52)$$

e

$$\begin{aligned} \kappa p_r = & -\frac{1}{r^2} + \frac{2\xi}{r^4} - 8n^2 r^{-4n} r_t^n (r^n - 2r_t^n)(r^n - r_t^n)^{2-4/n}\xi - 2r^{-4n}(r^n - 3r_t^n)(r^n - r_t^n)^{2-4/n}(3r^n + r_t^n)\xi + \\ & r^{-2(1+n)}(r^n - r_t^n)^{\frac{-2+n}{n}}(r^{2+n} - r^2 r_t^n + 4r^n \xi) + 4nr^{-4n}r_t^n (r^n - 7r_t^n)(r^n - r_t^n)^{2-4/n}\xi \\ & - 4nr^{-2(1+n)}r_t^n (r^n - r_t^n)^{\frac{-2+n}{n}}\xi. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Primeiramente, olhando para a equação (5.52), podemos que para todo  $n \geq 6$  todos os termos do tipo  $r^n - r_t^n$  terão um expoente positivo e, portanto, no limite  $r \rightarrow r_t$  estes termos tendem à zero levando ao anulamento de todos os termos que dependem de  $n$ , restando apenas os dois

primeiros termos desta equação, que nos fornece

$$\kappa\rho(r_t) = \frac{r_t^2 - 2\xi}{r_t^4} \text{ para } n \geq 6. \quad (5.54)$$

Por outro lado, para  $n = 4$  na densidade de energia, todos os termos do tipo  $(r^n - r_t^n)$  com expoente  $\frac{-4+n}{n}$  serão iguais a unidade, enquanto aqueles com expoente  $\frac{-2+n}{n}$  permanecerão com um expoente positivo que desaparecem no limite  $r \rightarrow r_t$ , fornecendo

$$\kappa\rho(r_t) = \frac{r_t^2 - 26\xi}{r_t^4} \text{ para } n = 4. \quad (5.55)$$

Agora olhando para a equação da pressão radial (5.53), é fácil ver que para todo  $n \geq 4$  todos os termos do tipo  $(r^n - r_t^n)$  terão expoente positivo, e portanto, tomando o limite  $r \rightarrow r_t$  estes termos serão todos nulos, levando a anulação de todos os termos que dependem de  $n$ , e, então, a pressão radial será a mesma para todas as soluções generalizadas

$$\kappa p_r(r_t) = -\frac{(r_t^2 - 2\xi)}{r_t^4} \text{ para todo } n \geq 4. \quad (5.56)$$

Logo, notamos que, para todas as geometrias generalizadas com  $n \geq 6$ , teremos matéria na garganta que satisfaz a equação de estado  $p_r(r_t) = -\rho(r_t)$ , isto é, o parâmetro de estado  $\omega = -1$ . Este é o mesmo resultado previsto pela teoria clássica como pode ser visto em [100, 101]. Portanto, a GAS, usando o escalar de Ricci como função *cutoff*, não elimina o problema da matéria exótica na garganta para toda a classe de buracos de minhoca de Ellis-Bronnikov generalizados com  $n \geq 6$ . Portanto, vamos analisar os tipos de matéria e as condições radiais de energia apenas para o caso  $n = 4$ , pois é o único caso em que temos um resultado diferente do encontrado classicamente.

Para estudar as condições radiais de energia na garganta, pegamos os resultados da densidade de energia e pressão radial em  $r = r_t$  e  $n = 4$ :

$$\kappa\rho = \frac{1}{r_t^4} (r_t^2 - 26\xi), \quad (5.57)$$

$$\kappa p_r = -\frac{1}{r_t^4} (r_t^2 - 2\xi), \quad (5.58)$$

$$\kappa(\rho + p_r) = -\frac{24\xi}{r_t^4}. \quad (5.59)$$

As equações acima nos mostram que em torno da garganta sempre teremos  $\rho + p_r < 0$ , e, portanto, as condições radiais nula e fraca de energia nunca serão satisfeitas na garganta no contexto da GAS, assim como é observado na teoria clássica [101]. Além disso, é fácil notar que podemos ter matéria com densidade de energia positiva na garganta, desde que limitemos in-

feriormente o raio da garganta e impusermos  $r_t > \sqrt{26\xi}$ . Entretanto, se impusermos  $r_t > \sqrt{26}$ , podemos facilmente ver que sempre teremos  $|p_r| > \rho$  neste caso, e então, a condição radial dominante de energia também nunca será satisfeita. Portanto, podemos concluir que as condições radiais de energia não serão satisfeitas para o caso  $n = 4$  no contexto da GAS.

Agora, vamos investigar os tipos de matéria cosmológica permitidos na garganta de um buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov generalizado com  $n = 4$ , no contexto da GAS. Para fazermos esta análise, precisamos calcular o parâmetro de estado  $\omega(r) = p_r/\rho$  em  $r = r_t$  fornecendo

$$\omega(r_t) = \frac{2\xi - r_t^2}{r_t^2 - 26\xi}. \quad (5.60)$$

Analisando a expressão acima como uma função de  $r_t$ , facilmente obtemos

$$\left\{ \begin{array}{lll} \textit{Phantom}: & \omega < -1 & \text{se } r_t > \sqrt{26\xi}, \\ \textit{Matéria Exótica}: & \omega \geq 1 & \text{se } \sqrt{14\xi} \leq r_t < \sqrt{26\xi}, \\ \textit{Matéria Não-Exótica}: & 0 < \omega < 1 & \text{se } \sqrt{2\xi} < r_t < \sqrt{14\xi}, \\ \textit{Matéria Exótica}: & -1/3 < \omega < 0 & \text{se } r_t < \sqrt{2\xi}. \end{array} \right. \quad (5.61)$$

Podemos claramente ver que, ao contrário do que é previsto pela teoria clássica onde apenas matéria escura é permitida ( $\omega = -1$ ) na garganta [101], podemos ter vários tipos de matéria dependendo do valor escolhido para o raio da garganta  $r_t$ , incluindo matéria não-exótica. Mais precisamente teremos a possibilidade de matéria exótica com  $-1/3 < \omega < 0$  e  $\omega > 1$ , *Phantom* ( $\omega < -1$ ) e, como já dito, matéria não-exótica ( $0 < \omega < 1$ ) também. Portanto, embora as condições radiais de energia sejam violadas, a GAS resolveu o problema da matéria exótica na garganta de um buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov generalizado com  $n = 4$ , e para isto, precisamos escolher o valor do raio da garganta entre  $\sqrt{2\xi}$  e  $\sqrt{14\xi}$ .

Considerando um valor para o raio da garganta tal que se tenha matéria não-exótica na garganta, mostramos graficamente o comportamento da densidade de energia  $\rho$ , da pressão radial  $p_r$ , dados pelas equações (5.50),(5.51) respectivamente, e a soma destas quantidades  $\rho + p_r$ , a fim de visualizar as condições de energia em regiões próximas, mas fora da garganta do buraco de minhoca. Os gráficos de  $\rho$ ,  $p_r$  e  $p_r + \rho$  podem ser vistos na figura (26), onde escolhemos  $\xi = 0.05$  e  $r_t = 0.8$  e  $n = 4$ . Olhando para a figura (26), podemos ver que temos uma região próxima à garganta onde ambas densidade de energia  $\rho$  e a soma  $p_r + \rho$  são positivas, e portanto teremos a validade das condições radiais de energia nula e fraca nesta região. Este é um resultado bastante notável, devido ao fato de que, no caso usual, a condição radial nula de energia nunca pode ser satisfeita [101]. Portanto, vemos que a GAS permite a validade da condição radial nula de energia em uma região próxima à garganta para o caso  $n = 4$  quando



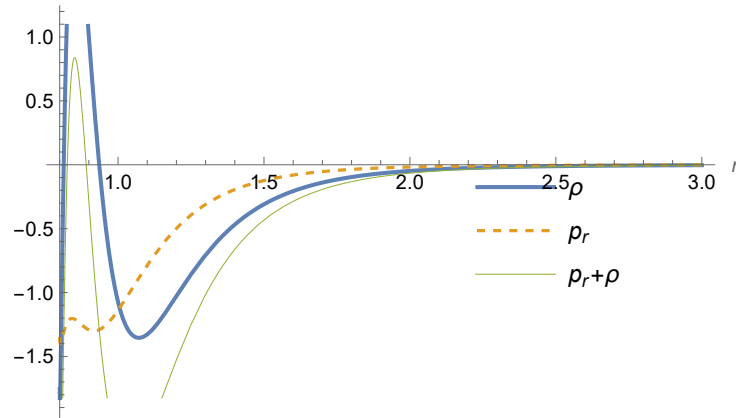


Figura 26: Gráfico de  $\rho$ ,  $p_r$  e  $p_r + \rho$  como funções de  $r$  para o buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov generalizado com  $n = 4$ . Para este gráfico colocamos  $\xi = 0.05$  e  $r_t = 0.8$ , para garantir que teremos matéria não-exótica na garganta.

usamos o escalar de Ricci para definir a função *cutoff*.

Além disso, é também instrutivo visualizar o comportamento do parâmetro de estado  $\omega(r)$  em regiões próximas à garganta, a fim de visualizar quais tipos de matéria são permitidos em outras regiões, à medida que nos afastamos da garganta. Considerando novamente que se tenha matéria não-exótica na garganta, isto é, em  $r = r_t$  mostramos graficamente o parâmetro de estado  $\omega = p_r/\rho$  como uma função da coordenada radial  $r$ . O gráfico pode ser visto na figura (fig.27), onde novamente escolhemos  $\xi = 0.05$  e  $r_t = 0.8$  para o caso  $n = 4$ .

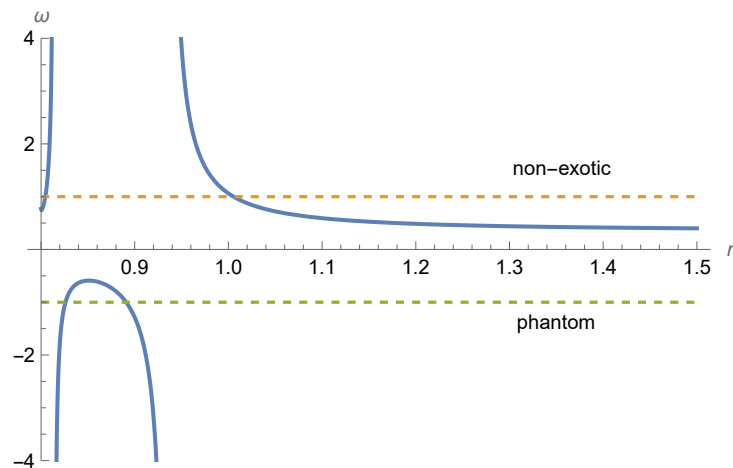


Figura 27: Parâmetro de estado  $\omega$  como uma função de  $r$ , para o buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov generalizado com  $n = 4$ . Neste caso colocamos  $r_t = 0.8$  e  $\xi = 0.05$ , a fim de que se tenha matéria não-exótica na garganta.

Olhando para a (27) podemos notar que teremos uma região com matéria exótica do tipo *Phantom* ( $\omega < -1$ ) seguida por uma região com matéria exótica do tipo Quintessência ( $-1 < \omega < -1/3$ ) decaindo novamente para uma região com *Phantom* novamente. Depois disso, entramos em uma região de matéria exótica com  $\omega > 1$  que decai suavemente em uma região do espaço onde teremos apenas matéria não-exótica como fonte. Mais uma vez obtemos um

resultado notável, pois, para o caso generalizado com  $n = 4$  no contexto da GAS, encontramos que devemos ter outros tipos de matéria além de *Phantom* (Quintessência, matéria exótica com  $\omega > 1$  e matéria não-exótica) para existir. Embora a presença de matéria extra além de *Phantom* em tais geometrias tenham sido notado classicamente [101], eles não determinam quais tipos de matéria essa matéria extra possa ser, e no contexto da GAS nós temos naturalmente, os possíveis candidatos, pelo menos para o caso  $n = 4$ .

### 5.2.2 *Quadrado do tensor de Ricci*

Agora vamos usar o quadrado do tensor de Ricci como *improvement* para definir a função *cutoff* dada pela equação (5.48). Primeiramente, iremos provar a mesma sentença que nós temos para o caso do escalar de Ricci, isto é, que na garganta de buracos de minhoca de Ellis-Bronnikov generalizados, nós temos correções devido à GAS apenas para o caso  $n = 4$ .

Para isto, consideramos primeiramente a densidade de energia dada pela equação (5.6). Como as expressões são muito grandes para serem colocadas aqui, vamos analisar a densidade de energia termo a termo, que por questão de brevidade nomeamos como  $\rho_I$ ,  $\rho_{II}$  e  $\rho_{III}$ .

O primeiro termo  $\rho_I$  da densidade de energia é dado por

$$\rho_I = (1 + f) \frac{b'}{r^2}, \quad (5.62)$$

que é fácil de ver que este termo fornecerá o mesmo resultado para todas as geometrias generalizadas com  $n \geq 4$ . Para notar este fato, usamos a função forma (5.42) e diferenciamos com respeito à  $r$  para obter

$$b'(r) = 1 - (3 - 2n)r^{2-2n}(r^n - r_t^n)^{2-2/n} - r^{2-n}(2n - 2)(r^n - r_t^n)^{1-2/n}, \quad (5.63)$$

que, calculando na garganta, é fácil ver que este termo fornece um valor diferente apenas para o caso usual  $n = 2$ , dado por  $b'(r_t) = -1$ , enquanto fornece  $b'(r_t) = 1$  para todo  $n \geq 4$ . Este fato de a condição *flare-out* não ser satisfeita está relacionado com o fato de que a matéria extra nestas soluções generalizadas devem satisfazer a condição nula média de energia [101]. Escrevendo a função *cutoff*  $f_2 = \xi \sqrt{R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}}$  em termos de  $b(r)$  temos

$$f_2 = \frac{\xi}{2r^3} \sqrt{2(b + rb')^2 + 4(b - rb')^2}, \quad (5.64)$$

podemos ver que, calculado na garganta, teremos um valor diferente apenas para o caso usual  $n = 2$ , dado por  $f_2(r_t) = 2\xi/r_t^2$ , e para as geometrias generalizadas com  $n \geq 4$  teremos como resultado  $f_2(r_t) = \sqrt{2}\xi/r_t^2$ , uma vez que na garganta nós sempre teremos  $b(r_t) = r_t$  e  $b'(r_t) = 1$  para todo  $n \geq 4$ . Em resumo, o primeiro termo da densidade de energia  $\rho_I$  fornece o seguinte

resultado quando calculado em  $r = r_t$  para todo  $n \geq 4$ :

$$\rho_I(r_t) = \frac{1}{r_t^4}(\xi \sqrt{2} + r_t^2) \text{ para todo } n \geq 4. \quad (5.65)$$

Agora, vamos analisar o segundo termo da densidade de energia  $\rho_{II}$ , que é dado por

$$\rho_{II} = \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left(f_2'' + \frac{2}{r} f_2'\right) = \left(1 - \frac{b}{r}\right) f_2'' + \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{2}{r} f_2'. \quad (5.66)$$

Este termo é muito longo para ser colocado aqui e então, para facilitar a análise, estudamos separadamente cada porção do termo  $\rho_{II}$ . A segunda porção, onde aparece apenas a derivada primeira de  $f_2$  é mais fácil de analisar e é dada por

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{2}{r} f_2' &= -2\sqrt{2}\xi r^{-6n-4} (r^n - r_t^n)^{2-\frac{4}{n}} \{(n^2 + n - 10)r^{3n+2} r_t^n (r^2 - (r^n - r_t^n)^{2/n}) - (n(3n(3n-7) + \\ &8) + 12)r^{n+4} r_t^{3n} + 2n(n(3n-8) + 6)r^4 r_t^{4n} + 2r^{4n} (r^2 - (r^n - r_t^n)^{2/n})^2 + \\ &r^{2n+2} r_t^{2n} (2(n-2)(n+1)(r^n - r_t^n)^{2/n} + (n(3(n-2)n-5) + 20)r^2)\} \\ &\{r^{-4(n+1)} (-2(3(n-3)n+8)r^{n+4} r_t^{3n} + (n(3n-8) + 6)r^4 r_t^{4n} + 2(n-3)r^{3n+2} r_t^n (r^2 - \\ &(r^n - r_t^n)^{2/n}) + r^{4n} (r^2 - (r^n - r_t^n)^{2/n})^2 + r^{2n+2} r_t^{2n} (2(n-2)(r^n - r_t^n)^{2/n} \\ &+ 3((n-4)n+5)r^2))\}^{-1/2}, \end{aligned} \quad (5.67)$$

onde podemos ver que, na garganta, este termo contribui apenas para o caso usual  $n = 2$  e desaparece para todas as soluções generalizadas com  $n \geq 4$ , devido ao fato de que todos os termos do tipo  $(r^n - r_t^n)$  terão um expoente positivo quando  $n \geq 4$  e então serão todos iguais a zero no limite  $r \rightarrow r_t$ . Agora, vamos analisar a primeira porção de  $\rho_{II}$ , que possui a derivada

segunda de  $f_2$ . Este termo é dado por

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{b}{r}\right) f_2'' &= \sqrt{2}\xi r^{-2(5n+4)}(r^n - r_t^n)^{1-4/n} \{(-3(n(n(n+2)+11) - 70)r^{8n+6}r_t^n(r^n - r_t^n)^{2/n} + \\
&(n(n(n(17-14n)+20) + 271) - 798)r^{7n+6}r_t^{2n}(r^n - r_t^n)^{2/n} + (1638 - n(n(n(9n-92) \\
&+ 74) + 20) + 787))r^{6n+6}r_t^{3n}(r^n - r_t^n)^{2/n} + 3(n(n(n(3n(7n-36) + 86) + 22) + 333) - \\
&634)r^{5n+6}r_t^{4n}(r^n - r_t^n)^{2/n} + (1248 - n(n(n(n(135n-578) + 545) + 26) + 616))r^{4n+6}r_t^{5n} \\
&(r^n - r_t^n)^{2/n} + (n(n(n(n(117n-482) + 545) - 130) + 226) - 444)r^{3n+6}r_t^{6n}(r^n - r_t^n)^{2/n} - \\
&6(n-2)(2n^2 + n + 1)(n(3n-8) + 6)r^{2n+6}r_t^{7n}(r^n - r_t^n)^{2/n} - 24r^{9n+6}(r^n - r_t^n)^{2/n} + \\
&3(n(n(n+2) + 11) - 74)r^{8n+4}r_t^n(r^n - r_t^n)^{4/n} + ((n-4)n(n(7n+12) + 41) + 540)r^{7n+4} \\
&r_t^{2n}(r^n - r_t^n)^{4/n} + (n(n((87-40n)n-40) + 255) - 622)r^{6n+4}r_t^{3n}(r^n - r_t^n)^{4/n} + \\
&(n(n(n(61n-160) + 143) - 224) + 360)r^{5n+4}r_t^{4n}(r^n - r_t^n)^{4/n} - 2(n(n(n(14n-43) + \\
&51) - 50) + 46)r^{4n+4}r_t^{5n}(r^n - r_t^n)^{4/n} + 36r^{9n+4}(r^n - r_t^n)^{4/n} + (86 - n(n(n+2) + 11)) \\
&r^{8n+2}r_t^n(r^n - r_t^n)^{6/n} + (n(n(5n-2) + 19) - 94)r^{7n+2}r_t^{2n}(r^n - r_t^n)^{6/n} - 2(n-2)(2n^2 + n + \\
&9)r^{6n+2}r_t^{3n}(r^n - r_t^n)^{6/n} - 24r^{9n+2}(r^n - r_t^n)^{6/n} - 6r^{8n}r_t^n(r^n - r_t^n)^{8/n} + 6r^{9n}(r^n - r_t^n)^{8/n} + \\
&(n(n(n+2) + 11) - 68)r^{8n+8}r_t^n + (n(n(n(7n-6) - 11) - 126) + 352)r^{7n+8}r_t^{2n} + \\
&(n(n(n(n(9n-52) - 9) + 54) + 546) - 1052)r^{6n+8}r_t^{3n} + (n(n(3n(n(n(3n-26) + 63) + \\
&48) - 292) - 1162) + 1946)r^{5n+8}r_t^{4n} + (n(n(1114 - n(2n(9n(4n-21) + 286) + 469))) + \\
&1089) - 2224)r^{4n+8}r_t^{5n} + (n(n(n(n(6n(33n-155) + 1301) + 518) - 2055) - 24) + \\
&1496)r^{3n+8}r_t^{6n} + (n(n(n(53 - 3n(n(84n-389) + 576))) + 1766) - 694) - 528)r^{2n+8} \\
&r_t^{7n} + (n(3n-8) + 6)(n(n(n(51n-104) + 7) + 88) + 12)r^{n+8}r_t^{8n} - 2n(2n+1)(n(3n-8) + \\
&6)^2 r^8 r_t^{9n} + 6r^{9n+8} \} \{ (r^{-4(n+1)}(2(n-3)r^{3n+2}(r^2 - (r^n - r_t^n)^{2/n})r_t^n + r^{2n+2}(2(n-2) \\
&(r^n - r_t^n)^{2/n} + 3((n-4)n+5)r^2)r_t^{2n} - 2(3(n-3)n+8)r^{n+4}r_t^{3n} + (n(3n-8) + 6)r^4 r_t^{4n} + \\
&r^{4n}(r^2 - (r^n - r_t^n)^{2/n})^2)^{-3/2} \}. \tag{5.68}
\end{aligned}$$

Embora este termo seja muito grande, podemos facilmente ver que ele será igual a zero para todas as geometrias com  $n \geq 6$  e fornece um resultado não-nulo apenas para o caso específico  $n = 4$ . Isto é devido ao termo  $(r^n - r_t^n)^{1-4/n}$  que está em evidência e portanto multiplicando todos os termos que estão entre as chaves. Este termo é nulo na garganta para todo  $n > 4$  permitido, visto que obtemos um expoente positivo nestes casos tal que no limite  $r \rightarrow r_t$  este termo será igual a zero, enquanto para  $n = 4$  este termo será igual a unidade no limite  $r \rightarrow r_t$  fornecendo

$$\left(1 - \frac{b}{r}\right) f_2'' = \frac{12\sqrt{2}\xi}{r_t^4} \text{ em } r = r_t \text{ e } n = 4. \tag{5.69}$$

Logo, juntando as duas porções de  $\rho_{II}$ , o segundo termo da densidade de energia fornece

$$\rho_{II}(r_t) = \frac{12\sqrt{2}\xi}{r_t^4} \text{ para } n = 4, \quad (5.70)$$

e é zero para todo  $n > 4$ .

Finalmente vamos analisar o último termo da densidade de energia  $\rho_{III}$ , que é dado por

$$\rho_{III} = \frac{b'r - b}{2r^2} f_2'. \quad (5.71)$$

Depois de organizarmos os termos, obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \frac{b'r - b}{2r^2} f_2' &= \{ \xi(24n^4 r^{2-6n} r_t^{3n} (r^n - 2r_t^n)(r^n - r_t^n)^{2-\frac{6}{n}} + n^3(8r^{2-6n} r_t^{2n} (r^n - r_t^n)^{2-\frac{6}{n}} (r^{2n} - 8r^n r_t^n + 22r_t^{2n}) - \\ &8r^{-4n} r_t^{2n} (r^n - 2r_t^n)(r^n - r_t^n)^{\frac{n-4}{n}}) + n^2(8r^{2-6n} r_t^{3n} (r^n - 28r_t^n)(r^n - r_t^n)^{2-\frac{6}{n}} - 32r^{-4n} r_t^{3n} \\ &(r^n - r_t^n)^{1-\frac{4}{n}}) + 16r^{-4n} r_t^n (2r^n - r_t^n)(r^n - 2r_t^n)(r^n - r_t^n)^{\frac{n-4}{n}} - 16r^{-2(n+1)} r_t^n (r^n - r_t^n)^{\frac{n-2}{n}} - \\ &16r^{2-5n} r_t^n (r^{2n} - 4r^n r_t^n + 6r_t^{2n})(r^n - r_t^n)^{2-\frac{6}{n}} + n(16r^{-2(n+1)} r_t^n (r^n - r_t^n)^{\frac{n-2}{n}} + 8r^{2-6n} r_t^n (- \\ &9r^{2n} r_t^n + 2r^{3n} + 16r^n r_t^{2n} + 12r_t^{3n})(r^n - r_t^n)^{2-\frac{6}{n}} - 8r^{-4n} r_t^n (4r^{2n} - 11r^n r_t^n + 2r_t^{2n})(r^n - r_t^n)^{\frac{n-4}{n}}) \} \\ &\{ 2\sqrt{2}r^{-4} [-2r(r - r^{3-2n}(r^n - r_t^n)^{2-\frac{2}{n}}) - ((2 - \frac{2}{n})nr^{2-n}(r^n - r_t^n)^{1-\frac{2}{n}}) - (3 - 2n)r^{2-2n} \\ &(r^n - r_t^n)^{2-\frac{2}{n}} + 1) + 3(r - r^{3-2n}(r^n - r_t^n)^{2-\frac{2}{n}})^2 + 3r^2(-((2 - \frac{2}{n})nr^{2-n}(r^n - r_t^n)^{1-\frac{2}{n}}) - \\ &(3 - 2n)r^{2-2n}(r^n - r_t^n)^{2-\frac{2}{n}} + 1)^2]^{-1/2} \}. \quad (5.72) \end{aligned}$$

Usando os mesmos argumentos de antes, podemos ver que todos os termos do tipo  $(r^n - r_t^n)$  não serão zero na garganta apenas para o caso particular  $n = 4$ , pois, para todo  $n > 4$  todos os termos  $(r^n - r_t^n)$  irão possuir um expoente positivo e, portanto, serão iguais a zero no limite  $r \rightarrow r_t$ . Então, colocando  $n = 4$  no termo  $\rho_{III}$  e tomando o limite  $r \rightarrow r_t$  obtemos

$$\rho_{III}(r_t) = \frac{18\sqrt{2}\xi}{r_t^4} \text{ em } r = r_t \text{ e } n = 4, \quad (5.73)$$

e é igual a zero para todas as soluções generalizadas com  $n > 4$ . Finalmente, obtemos as expressões para a densidade de energia na garganta de buracos de minhoca de Ellis-Bronnikov generalizados no contexto da GAS

$$\kappa\rho(r_t) = \begin{cases} \frac{r_t^2 + 7\sqrt{2}\xi}{r_t^4}, & \text{para } n = 4 \\ \frac{1}{r_t^4}(\xi\sqrt{2} + r_t^2) & \text{para } n > 4, \end{cases} \quad (5.74)$$

onde a densidade de energia é dada por  $\rho = \rho_I + \rho_{II} + \rho_{III}$ .

Agora, vamos analisar a expressão para a pressão radial  $p_r$ . Olhando para a ex-

pressão de  $p_r$  dada por (5.7), vemos que para um modelo *zero-tidal* é dada por

$$p_r = -(1+f)\frac{b}{r^3} + \left(1 - \frac{b}{r}\right)\frac{2}{r}f'. \quad (5.75)$$

Note que o segundo termo de  $p_r$  é exatamente igual a segunda porção do termo  $\rho_{II}$  da densidade de energia, dado pela equação (5.67). Logo, assim como foi argumentado anteriormente, este termo será nulo em  $r = r_t$  para todas as geometrias generalizadas, isto é, para todo  $n \geq 4$ . Portanto, apenas o primeiro termo da pressão radial contribui quando calculamos a pressão radial na garganta. Além disso, note que em  $r = r_t$ , o primeiro termo da pressão radial é exatamente o negativo de  $\rho_I$ , pois, na garganta temos  $b(r_t) = r_t$  e isto dividido por  $r_t^3$  fornece  $1/r_t^2$ . Então, como a função *cutoff* tem o mesmo valor para todo  $n \geq 4$ , podemos ver imediatamente que  $p_r(r_t) = -\rho_I(r_t)$  neste caso. Portanto, obtemos a expressão da pressão radial na garganta de buracos de minhoca Ellis-Bronnikov generalizados quando usamos o quadrado do tensor de Ricci como *improvement*

$$\kappa p_r(r_t) = -\frac{1}{r_t^4}(\xi\sqrt{2} + r_t^2) \text{ para todo } n \geq 4. \quad (5.76)$$

Mais uma vez chegamos a conclusão, dessa vez usando o quadrado do tensor de Ricci como *improvement*, que apenas o caso particular  $n = 4$  irá possuir correções na garganta devido à GAS. Pode ser notado que mais uma vez teremos matéria na garganta obedecendo à equação de estado  $p_r = -\rho$  para todos os casos com  $n > 4$ . Novamente, este é o mesmo resultado obtido classicamente, onde na garganta necessariamente temos matéria escura como fonte ( $\omega(r_t) = -1$ ) [101]. Logo, iremos focar no estudo das condições radiais de energia e dos tipos permitidos de matéria cosmológica apenas para o caso  $n = 4$ .

Para estudar as condições radiais de energia na garganta, listamos as expressões para a densidade de energia, pressão radial e a soma de ambas, que para o caso  $n = 4$  são dadas respectivamente por

$$\kappa\rho(r_t) = \frac{r_t^2 + 7\sqrt{2}\xi}{r_t^4}, \quad (5.77)$$

$$\kappa p_r(r_t) = -\frac{1}{r_t^4}(\xi\sqrt{2} + r_t^2), \quad (5.78)$$

$$\kappa(\rho + p_r) = \frac{6\sqrt{2}\xi}{r_t^4}. \quad (5.79)$$

Podemos ver imediatamente que neste caso sempre temos  $\rho > 0$  e  $\rho + p_r > 0$  independente do valor escolhemos para o raio da garganta  $r_t$ . Então, vemos que automaticamente as condições radiais de energia nula e fraca sempre serão satisfeitas na garganta para a solução generalizada com  $n = 4$ . Além disso, também é fácil notar que sempre teremos  $\rho > |p_r|$  na garganta, para todo  $r_t > 0$ , e, portanto a condição radial dominante de energia também sempre será satisfeita

na garganta, independente do valor de seu raio. Este resultado é bastante interessante, pois, ao usarmos o quadrado do tensor de Ricci para definir a função *cutoff*, vemos que as condições radiais de energia sempre são satisfeitas na garganta, em contraste do que é observado classicamente [101]. Também, este resultado é muito diferente do que obtemos quando usamos o escalar de Ricci como *improvement*, devido ao fato de que a soma  $\rho + p_r$  sempre será negativa neste caso, e a densidade de energia será positiva dependendo do valor que escolhermos de  $r_t$ . Aqui, no caso do quadrado do tensor de Ricci, vemos que as condições radiais de energia serão sempre satisfeitas na garganta, para todo  $r_t > 0$ . Com isto em mente, vamos analisar os tipos de matéria cosmológica permitidos na garganta, calculando o parâmetro de estado  $\omega = p_r/\rho$  em  $r = r_t$ . Para o caso  $n = 4$  temos

$$\omega(r_t) = \frac{r_t^2 + 7\sqrt{2}\xi}{-r_t^2 - \sqrt{2}\xi}. \quad (5.80)$$

Analisando a expressão acima como uma função de  $r_t$  facilmente vemos que neste caso nós sempre teremos matéria exótica do tipo *Phantom* ( $\omega(r_t) < -1$ ) na garganta, independentemente dos valores que escolhermos para seu raio. Mais uma vez, obtemos um resultado totalmente diferente daquele encontrado com o escalar de Ricci onde o problema da matéria exótica na garganta foi curado. Interessantemente, no caso do quadrado do tensor de Ricci, vemos que é permitido matéria na garganta que satisfaz as condições radiais de energia, no entanto, sempre haverá matéria exótica do tipo *Phantom*, tudo isso para o caso particular  $n = 4$ .

Embora no contexto da GAS, seja permitido apenas matéria exótica do tipo *Phantom* na garganta neste caso, plotamos o comportamento da densidade de energia  $\rho$ , da pressão radial  $p_r$ , e da soma  $\rho + p_r$ , que pode ser visto na figura (28). Vamos ver se em regiões próximas à garganta há a possibilidade de as condições radiais de energia serem satisfeitas. Uma vez que o modelo do quadrado do tensor de Ricci também fornece um resultado diferente apenas para o caso  $n = 4$ , vamos focar neste caso em particular. Olhando para a figura (28) podemos ver

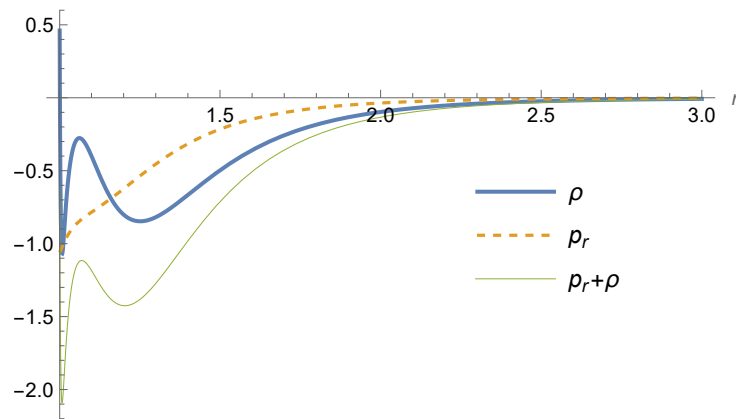


Figura 28: Densidade de energia  $\rho$ , pressão radial  $p_r$  e a soma  $\rho + p_r$  como uma função da coordenada radial  $r$ , utilizando o modelo do quadrado do tensor de Ricci. Neste caso colocamos  $r_t = 1$  e  $\xi = 0.05$ .

que as condições radiais de energia não são satisfeitas em regiões próximas a garganta para o caso  $n = 4$ , assim como temos na teoria usual [101]. Isto é porque temos  $\rho < 0$  e  $\rho + p_r < 0$  nesta região. Mais uma vez, estes resultados estão em total contraste com os resultados obtidos quando usamos o modelo com o escalar de Ricci.

Assim como fizemos para o caso anterior, plotamos o comportamento do parâmetro de estado  $\omega(r)$  para o caso  $n = 4$  em regiões próximas à garganta  $r_t$ . Interessantemente, olhando para o gráfico de  $\omega(r)$ , mostrado na figura (29), neste caso nós temos matéria do tipo *Phantom* apenas na garganta, enquanto em regiões fora da garganta nós temos matéria exótica com  $\omega(r) > 1$  e então entramos em uma região com matéria não-exótica. Mais uma vez, a GAS trouxe naturalmente outros de tipos de matéria extra além de *Phantom* como fonte para as geometrias generalizadas, porém apenas para o caso particular  $n = 4$ .

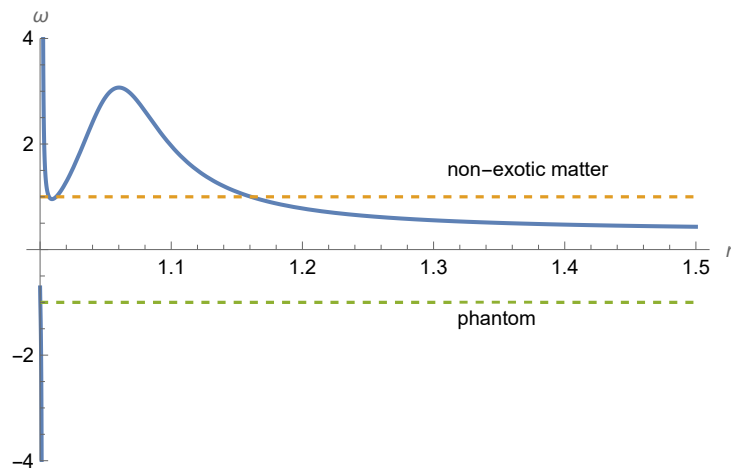


Figura 29: Parâmetro de estado  $\omega$  como uma função da coordenada radial  $r$  no modelo do quadrado do tensor de Ricci. Para este gráfico colocamos  $r_t = 1$  e  $\xi = 0.05$ .

### 5.2.3 Escalar de Kretschmann

Finalmente, analisamos a presença de matéria exótica e as condições radiais de energia para as geometrias generalizadas de Ellis-Bronnikov, mas utilizando o modelo com o escalar de Kretschmann, com a função *cutoff* dada por (5.49).

Primeiro, vamos falar sobre a densidade de energia  $\rho$ . Assim como fizemos para o caso do quadrado do tensor de Ricci, vamos fazer a análise termo a termo, para que se torne mais conveniente o estudo. Para isso, dividimos a densidade de energia em expressões que iremos chamar de  $\rho_I$ ,  $\rho_{II}$  and  $\rho_{III}$ , respectivamente, tal que  $\rho = \rho_I + \rho_{II} + \rho_{III}$ .

O termo  $\rho_I$  da densidade de energia é dado pela seguinte expressão

$$\rho_I = (1 + f_3) \frac{b'}{r^2}, \quad (5.81)$$

e, como vimos, nós sempre temos  $b'(r_t) = 1$  para todas as geometrias generalizadas, isto é, para



todo  $n \geq 4$ . Escrevendo a função *cutoff* em termos de  $b(r)$ , ele será um funcional de  $b(r)$  e de suas derivadas, e portanto, fornece o mesmo resultado na garganta para todas as soluções generalizadas. No caso do escalar de Kretschmann,  $f_3$  é escrito em termos de  $b(r)$  pela expressão

$$f_3 = \xi \sqrt{\frac{2r^2 b'(r)^2 - 4rb(r)b'(r) + 6b(r)^2}{r^6}}, \quad (5.82)$$

que, quando calculado em  $r = r_t$  e usando os fatos  $b(r_t) = r_t$  e  $b'(r_t) = 1$ , que vale para todos os casos  $n \geq 4$ , encontramos

$$f_3(r_t) = \frac{2\xi}{r_t^2} \text{ para todo } n \geq 4, \quad (5.83)$$

e isto resulta para a seguinte forma do termo  $\rho_I$ , na garganta

$$\rho_I = \left(1 + \frac{2\xi}{r_t^2}\right) \frac{1}{r_t^2} = \frac{1}{r_t^4} (r_t^2 + 2\xi), \text{ para todo } n \geq 4. \quad (5.84)$$

Olhando agora para o termo  $\rho_{II}$ , que é dado por

$$\rho_{II} = \left(1 - \frac{b}{r}\right) \left(f_3'' + \frac{2}{r} f_3'\right), \quad (5.85)$$

nós novamente seguimos a mesma linha de pensamento que fizemos no caso do quadrado do tensor de Ricci, a fim de facilitar a análise. Primeiro analisamos a segunda porção de  $\rho_{II}$ , que contém a derivada primeira de  $f_3$ , dada por

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{2}{r} f_3' &= 8\xi r^{-6n-4} (r^n - r_t^n)^{2-\frac{4}{n}} \{ (r^{2n+2} r_t^{2n} ((n^3 + 5)r^2 - (n+1)(r^n - r_t^n)^{2/n}) - (n(n(3n-4) + 2) \\ &+ 3)r^{n+4} r_t^{3n} + n(2(n-2)n + 3)r^4 r_t^{4n} + (n+3)r^{3n+2} r_t^n ((r^n - r_t^n)^{2/n} - r^2) + r^{4n} (r^2 - \\ &(r^n - r_t^n)^{2/n})^2) \} [r^{-4(n+1)} (-4((n-2)n + 2)r^{n+4} r_t^{3n} + (2(n-2)n + 3)r^4 r_t^{4n} + \\ &4r^{3n+2} r_t^n ((r^n - r_t^n)^{2/n} - r^2) + r^{4n} (r^2 - (r^n - r_t^n)^{2/n})^2 + 2r^{2n+2} r_t^{2n} (((n-2)n + 4)r^2 - \\ &(r^n - r_t^n)^{2/n}))]^{-1/2}, \end{aligned} \quad (5.86)$$

e facilmente vemos que este termo contribui na garganta apenas para o caso usual  $n = 2$ , enquanto para as soluções generalizadas  $n \geq 4$  este termo sempre será zero, pois, usando o mesmo argumento, vemos que o termo  $(r^n - r_t^n)^{2-4/n}$  multiplica todos os outros termos dentro das chaves, e então, para  $n \geq 4$  este termo terá um expoente positivo que será zero no limite  $r \rightarrow r_t$ . Consequentemente, isto leva a resultado nulo na garganta para todo  $n \geq 4$ . Agora, analisando a

primeira porção de  $\rho_{II}$ , que possui a derivada segunda de  $f_3$ , temos

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{b}{r}\right) f_3'' &= 4r^{-2(5n+4)}(r^n - r_t^n)^{2-4/n} \{ (3(n(n+4) + 19)r^{7n+6}r_t^n(r^n - r_t^n)^{2/n} - (n(2n+1)(2n^2 + 13) + \\
&135)r^{6n+6}r_t^{2n}(r^n - r_t^n)^{2/n} + 6(n(n(n(4n-1) + 8) - 1) + 30)r^{5n+6}r_t^{3n}(r^n - r_t^n)^{2/n} - \\
&6(n(n(8n^2 - 6n + 7) - 1) + 22)r^{4n+6}r_t^{4n}(r^n - r_t^n)^{2/n} + (n(n(40n^2 - 46n) - 2) + 51) \\
&r^{3n+6}r_t^{5n}(r^n - r_t^n)^{2/n} - 3(2(n-2)n + 3)(2n^2 + n + 1)r^{2n+6}r_t^{6n}(r^n - r_t^n)^{2/n} - \\
&12r^{8n+6}(r^n - r_t^n)^{2/n} - 3(n(n+4) + 19)r^{7n+4}r_t^n(r^n - r_t^n)^{4/n} + (n(2n+1)(n^2 + 8) + \\
&81)r^{6n+4}r_t^{2n}(r^n - r_t^n)^{4/n} + (n(n((13-9n)n - 28) + 5) - 53)r^{5n+4}r_t^{3n}(r^n - r_t^n)^{4/n} + \\
&(n(2n(n(4n-11) + 18) - 23) + 19)r^{4n+4}r_t^{4n}(r^n - r_t^n)^{4/n} + 18r^{8n+4}(r^n - r_t^n)^{4/n} + \\
&(n(n+4) + 19)r^{7n+2}r_t^n(r^n - r_t^n)^{6/n}(2n^2 + n + 9)r^{6n+2}r_t^2n(r^n - r_t^n)^{6/n} - \\
&12r^{8n+2}(r^n - r_t^n)^{6/n} + 3r^{8n}(r^n - r_t^n)^{8/n} - (n(n+4) + 19)r^{7n+8}r_t^n + (n(2n+1)(n^2 + 6) + \\
&63)r^{6n+8}r_t^{2n} + (-((n(15n+7) + 20)n^2) + n - 127)r^{5n+8}r_t^{3n} + (n(2n(n(n^2 + n + 16) + \\
&5) + 8) - 17) + 165)r^{4n+8}r_t^4n((2n(n(n(7n-9) + 21) + 17) - 37)n^2 + 133)r^{3n+8}r_t^{5n} + \\
&(n(n(2n(5n(3n-7) + 39) + 41) - 102) + 50) + 57)r^{2n+8}r_t^{6n} - (2(n-2)n + 3) \\
&(n(n(13(n-1)n + 2) + 19) + 3)r^{n+8}r_t^{7n} + n(2n+1)(2(n-2)n + 3)^2r^8r_t^{8n} + 3r^{8n+8}\xi \} \\
&\{ [r^{-4(n+1)}(4r^{3n+2}(r^n - r_t^n)^{2/n} - r^2)r_t^n + 2r^{2n+2}(((n-2)n + 4)r^2 - (r^n - r_t^n)^{2/n})r_t^{2n} - \\
&4((n-2)n + 2)r^{n+4}r_t^{3n} + (2(n-2)n + 3)r^4r_t^{4n} + r^{4n}(r^2 - (r^n - r_t^n)^{2/n})^2)]^{-3/2} \}, \quad (5.87)
\end{aligned}$$

onde podemos ver que mais uma vez haverá um termo  $(r^n - r_t^n)^{2-4/n}$  e então, chegamos a mesma conclusão, isto é, que este termo contribui com um resultado não nulo na garganta apenas para o caso usual  $n = 2$  enquanto para todas as soluções generalizadas com  $n \geq 4$  este termo sempre será zero na garganta, pois para estes casos o termo  $(r^n - r_t^n)^{2-4/n}$  possuirá um expoente positivo que se anula no limite  $r \rightarrow r_t$ , e isto leva, conseqüentemente, a anulação de todos os outros termos. Portanto, em  $r = r_t$  o termo  $\rho_{II}$  sempre será zero para todas as soluções generalizadas quando usamos o escalar de Kretschmann como modelo

$$\rho_{II} = 0, \text{ in } r = r_t \text{ para todo } n \geq 4. \quad (5.88)$$

Finalmente, analisamos o termo  $\rho_{III}$  da densidade de energia, que é dado por

$$\rho_{III} = \frac{b'r - b}{2r^2} f_3', \quad (5.89)$$

que é dado por

$$\begin{aligned} \frac{b'r-b}{2r^2}f_3' &= 4(n-1)\xi r^{-6n-4}r_t^n(r^n-r_t^n)^{1-4/n}\{(r^{2n+2}r_t^{2n}((n^3+5)r^2-(n+1)(r^n-r_t^n)^{2/n})- \\ &\quad (n(n(3n-4)+2)+3)r^{n+4}r_t^{3n}+n(2(n-2)n+3)r^4r_t^{4n}+(n+3)r^{3n+2}r_t^n(r^n-r_t^n)^{2/n}-r^2)+ \\ &\quad r^{4n}(r^2-(r^n-r_t^n)^{2/n})^2)\} \\ &\quad \{[r^{-4(n+1)}(-4((n-2)n+2)r^{n+4}r_t^{3n}+(2(n-2)n+3)r^4r_t^{4n}+4r^{3n+2}r_t^n((r^n-r_t^n)^{2/n}-r^2) \\ &\quad +r^{4n}(r^2-(r^n-r_t^n)^{2/n})^2+2r^{2n+2}r_t^{2n}(((n-2)n+4)r^2-(r^n-r_t^n)^{2/n}))]\}^{-1/2}\}. \end{aligned} \quad (5.90)$$

Novamente, pode ser notado que este termo sempre será nulo para todas as geometrias generalizadas, isto é, para todo  $n \geq 4$ . Usando o mesmo argumento, isso é devido ao fato de que, para  $n > 4$ , o termo  $(r^n - r_t^n)^{1-4/n}$  multiplicando todos os outros termos dentro das chaves, será nulo no limite  $r \rightarrow r_t$ , levando conseqüentemente a anulação  $\rho_{III}$ . E, se  $n = 4$ , embora isso forneça o termo  $(r^n - r_t^n)^0$ , que é igual a unidade, os termos entre as chaves serão iguais a zero. Logo, temos que o termo  $\rho_{III}$  da densidade de energia também será igual a zero para todas as soluções generalizadas quando usamos o escalar de Kretschmann como modelo

$$\rho_{III} = 0 \text{ in } r = r_t \text{ para todo } n \geq 4. \quad (5.91)$$

Como a densidade de energia é dada por  $\rho = \rho_I - \rho_{II} + \rho_{III}$ , e apenas o termo  $\rho_I$  contribui na garganta, chegamos a seguinte conclusão

$$\rho(r_t) = \frac{1}{r_t^4}(r_t^2 + 2\xi) \text{ para todo } n \geq 4. \quad (5.92)$$

O escalar de Kretschmann é o único invariante de curvatura considerado aqui que fornece o mesmo resultado para a densidade de energia na garganta para todos os casos generalizados.

Agora, usando a expressão para a pressão radial

$$p_r = -(1 + f_3)\frac{b}{r^3} + \left(1 - \frac{b}{r}\right)\frac{2}{r}f_3', \quad (5.93)$$

podemos notar que, similarmente ao caso anterior, o segundo termo da pressão radial é igual à porção da primeira derivada de  $f_3$  de  $\rho_{II}$  da densidade de energia, que, como vimos, será sempre igual a zero na garganta quando usamos o escalar de Kretschmann. O primeiro termo da pressão radial na garganta fornece exatamente o negativo de  $\rho_I$ , pois sempre temos  $b(r_t) = r_t$  para as soluções generalizadas, que dividido por  $r_t^3$  fornece o fator multiplicativo  $1/r_t^2$ . Como  $f_3(r_t)$  sempre será  $f_3(r_t) = 2\xi/r_t^2$  para todas as soluções generalizadas, temos que a pressão radial terá o mesmo resultado para todo  $n \geq 4$ , sendo dado por

$$p_r = -\frac{1}{r_t^4}(2\xi + r_t^2) \text{ for all } n \geq 4, \quad (5.94)$$

Interessantemente, quando utilizamos o escalar de Kretschmann para definir a função *cutoff*, encontramos a equação de estado na garganta  $p_r = -\rho$  para todas as soluções generalizadas. Ou seja, sempre temos matéria exótica na garganta satisfazendo  $\omega(r_t) = -1$ , e este é o mesmo resultado previsto pela teoria clássica, isto é, não temos correções na garganta devido à GAS quando usamos o escalar de Kretschmann como *improvement*.

## 6 CONCLUSÕES

Neste trabalho, investigamos as condições de atravessabilidade e a presença de matéria exótica de buracos de minhoca no contexto da Gravidade Assintoticamente Segura (GAS).

No caso do estudo da atravessabilidade de um buraco de minhoca no contexto da GAS, nós estudamos dois casos diferentes, os buracos de minhoca esféricos e pseudoesféricos. Para a análise da atravessabilidade consideramos apenas regiões próximas a garganta do buraco de minhoca com a escolha específica de  $f = \xi R$  como função anti-screening. Além disso, consideramos um fluido com equação de estado não-linear como fonte tal que o parâmetro de estado  $\omega(u) = \omega_{(0)}(u) + \omega_{(1)}(u, \zeta)$  é escrito em termos de um parte dependente da GAS e a outra não.

Para ambos os casos esférico e pseudoesférico obtemos funções forma que são expressas em termos de hipergeométricas  ${}_2F_1$  sob a consideração de um buraco de minhoca com forças de maré nulas, isto é, considerando a função redshift nula  $\Phi = 0$ . A partir da expressão da função forma foi possível realizar o estudo das condições de atravessabilidade no contexto da GAS.

Para o buraco de minhoca pseudoesférico, quando  $\omega_T = \kappa = \lambda = 0$  e  $\omega_t \neq 0$  a função forma recupera os resultados obtido em [64]. A condição flare-out neste caso exclui a possibilidade de matéria do tipo *Phantom* na garganta enquanto as outras duas restrições permitem. Estudamos a região onde as três condições de atravessabilidade são válidas simultaneamente onde nós mostramos que, exatamente na garganta, nós temos atravessabilidade apenas com matéria exótica se  $\kappa > 0$ , e para o caso de  $\kappa < 0$  nós temos atravessabilidade contendo matéria exótica do tipo Quintessência.

Já para o caso de buracos de minhoca esféricos, quando  $\omega_t = 1$ ,  $\omega_T = 8$  e  $\kappa = \lambda = 0$ , recuperamos exatamente o caso estudado em [65] do estado de parâmetro  $\omega$  na garganta no buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov para a aproximação de  $\xi$  pequeno. Analogamente a análise feita para o caso pseudoesférico, todas as três condições de atravessabilidade foram estudadas. Neste caso, a condição *flare-out* permite a presença de matéria do tipo *Phantom* mas a condição *anti-screening* proíbe esta situação. Mostramos a região de validade das três condições onde nós temos uma grande região de atravessabilidade com matéria não-exótica quando  $\kappa = 0$ , diferentemente do que foi notado em [64].

Finalmente, no caso do estudo da atravessabilidade, mostramos que em ambos os casos de o buraco de minhoca ser pseudoesférico ou esférico, haverá regiões atravessáveis dependendo fortemente dos valores do parâmetro  $\zeta$ . Uma tal dependência é esperada, desde que,

quanto maior o valor de  $\zeta$  maior a influência quântica sob o buraco de minhoca.

Depois, consideramos o caso particular de um buraco de minhoca Schwarzschild, que é assintoticamente plano, usando o quadrado do tensor de Ricci e o escalar de Kretschmann como *cutoff*. Ambos os modelos fornecem correções idênticas nesse caso, visto que eles são proporcionais. Neste caso mostramos que as condições radiais de energia são satisfeitas para regiões próximas de sua garganta, desde que tenhamos  $r_t < \sqrt{\frac{\lambda}{2}}$ , onde definimos  $\lambda = \sqrt{\frac{3}{2}}\xi$ . Além disso, analisando o sinal do parâmetro de estado  $\omega = p_r/\rho$  como uma função de  $r_t$ , determinamos que as correções quânticas implicam a presença de matéria exótica na garganta do tipo Quintessência ( $-1 < \omega < -1/3$ ) se  $r_t < \sqrt{\frac{\lambda}{2}}$  ou do tipo *Phantom* ( $\omega < -1$ ) se  $r_t > \sqrt{\frac{\lambda}{2}}$ , onde nós vemos que se as condições radiais de energia são satisfeitas, a garganta deve necessariamente ter matéria do tipo Quintessência como fonte. Estes resultados são bastante diferentes daqueles obtidos pela Relatividade Geral, visto que  $\omega(r_t)$  diverge no caso usual.

Depois, listamos os tipos de fontes permitidos ao longo do espaço-tempo gerado pelo buraco de minhoca Schwarzschild na teoria modificada devido à GAS, se as condições de energia são satisfeitas na garganta. Com essas considerações, mostramos que o buraco de minhoca pode ser separado em três regiões, à medida que nos afastamos da região da garganta. Primeiro, encontramos uma pequena extensão contendo matéria do tipo Quintessência. Prosseguindo, entramos numa região que possui matéria do tipo *Phantom* como fonte, finalizando com uma região preenchida com matéria exótica com  $\omega > 1$ . Estas características foram mostradas na Fig. 22 para o modelo com o quadrado do tensor de Ricci, e na Fig. 23 para o modelo do escalar de Kretschmann, onde nós temos basicamente o mesmo comportamento. Estes resultados são análogos aos encontrados para outros buracos de minhoca assintoticamente planos, tais como o de Ellis-Bronnikov, estudado no contexto da GAS em [65], onde os autores mostraram que é possível que as condições de energia sejam satisfeitas na garganta, mas a presença de matéria exótica, tais como *Phantom* ou Quintessência, é sempre necessária.

Repetimos o mesmo procedimento descrito acima para o caso mais geral de buracos de minhoca Schwarzschild-like, cuja nova forma assintótica é deformada por um aumento ou decréscimo no ângulo sólido da esfera, dependendo do sinal da constante  $\beta$ . Nós vimos que, assim como no contexto da relatividade geral, as condições radiais de energia não são satisfeitas na garganta em ambos os casos. Analisando o parâmetro de estado  $\omega$  como uma função de  $r_t$ , nós mostramos que, quando há uma falta de ângulo sólido, nós necessariamente temos matéria do tipo *Phantom* na garganta, e quando há um excesso de ângulo sólido, a garganta pode ser formada por matéria exótica com  $\omega > 1$ , matéria não-exótica ( $0 < \omega < 1$ ) ou matéria do tipo *Phantom*, dependendo dos valores de  $r_t$  e  $\beta$ . Estes resultados são também obtidos no caso usual, exceto para o último, onde a possibilidade de a garganta ser formada por matéria do tipo *Phantom* surge devido os efeitos quânticos considerados aqui.

Finalmente, foi estudado os tipos de matéria permitidos ao longo do espaço-tempo determinado pelo buraco de minhoca Schwarzschild-*like*. Foi mostrado que para uma falta de ângulo sólido, além de sua garganta, necessariamente teremos matéria do tipo *Phantom* para toda a extensão do buraco de minhoca, caracterizando um buraco de minhoca *Phantom*, como vimos na Fig. 24. Para um excesso de ângulo sólido, consideramos que a garganta é formada por matéria do tipo *Phantom*, induzido pelas correções quânticas, e vimos que neste caso o buraco de minhoca pode ser dividido em quatro regiões. Primeiro, uma pequena região contendo matéria do tipo *Phantom* seguido por uma região de matéria exótica com  $\omega > 1$ . Então, entramos numa região que possui matéria não-exótica como fonte, e a região final é formada por matéria do tipo Quintessência.

Portanto, podemos concluir que as correções quânticas devido à GAS no caso Schwarzschild-*like*, forneceram a possibilidade de matéria satisfazendo as condições radiais de energia na garganta apenas no caso assintoticamente plano, embora nesse caso seja necessário a presença de matéria exótica do tipo Quintessência. Isto implica na presença de muita matéria exótica através do espaço-tempo modificado, tal como matéria do tipo *Phantom*. No caso de ter uma deformação na forma assintótica da métrica, as condições radiais de energia não são satisfeitas na garganta, mas, as correções quânticas implicam mais uma vez a possibilidade de ter regiões com matéria do tipo Fantasma, como foi encontrado para outros buracos de minhoca no contexto da GAS, tal como o buraco de minhoca de Ellis-Bronnikov. Esses resultados apoiam a ideia de que a presença de um fluido *Phantom* é inevitável no contexto de Gravidade Assintoticamente Segura, e talvez em outros modelos de gravitação quântica.

Já, para o caso dos buracos de minhoca de Ellis-Bronnikov generalizados, estudamos esta classe usando modelos com o escalar de Ricci  $R$ , quadrado do tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$  e o escalar de Kretschmann  $R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$ , respectivamente.

Usando o escalar de Ricci vimos que a GAS trouxe correções para a matéria na garganta apenas para o caso particular  $n = 4$ , onde temos a possibilidade de vários tipos diferentes de matéria, incluindo não-exótica. Este resultado é totalmente diferente do obtido pela teoria clássica, onde vimos que na garganta nós necessariamente temos energia escura ( $\omega = -1$ ). No entanto, neste caso, as condições radiais de energia não são satisfeitas na garganta, embora haverá uma pequena região próxima da garganta onde temos matéria satisfazendo as condições radiais de energia, como visto na figura (26). Esta característica é notável, uma vez que classicamente a condição radial nula de energia nunca é satisfeita [101]. Também, olhando para a figura (27), matéria não-exótica na garganta implica a existência de vários tipos de matéria além de *Phantom*, à medida que nos movemos para outras regiões do espaço. Assim, a GAS trouxe naturalmente os tipos de matéria extra para tais soluções generalizadas, que devem existir para essas soluções serem possíveis, como notado em [101].

Entretanto, quando usamos o quadrado do tensor de Ricci obtivemos um resultado bastante diferente do esperado. Embora neste caso nós tenhamos correções na garganta apenas para o caso  $n = 4$  também, neste caso haverá sempre matéria exótica do tipo *Phantom*. Portanto, o problema da matéria exótica na garganta não pode ser resolvido neste caso. Porém, neste caso teremos a possibilidade de as condições radiais de energia serem satisfeitas na garganta. Ao contrário do caso com escalar de Ricci, quando nos movemos para regiões próximas à garganta, as condições radiais de energia não podem ser satisfeitas, assim como na teoria clássica [101]. Além disso, quando analisamos o parâmetro de estado como uma função de  $r$ , embora tenhamos apenas *Phantom* na garganta, mais uma vez vimos a presença de matérias extra como fonte, incluindo não-exótica. Mias uma vez a GAS nos trouxe de forma natural os possível candidatos de matéria extra que suportam essas geometrias generalizadas.

Quando utilizamos o escalar de Kretschmann, surpreendentemente neste caso não temos correções na garganta devido à GAS, isto é, a garganta necessariamente terá energia escura como fonte, pois haverá matéria que satisfaz a equação de estado  $p_r = -\rho$ , isto é, sempre teremos  $\omega = -1$  na garganta.

Então, vemos que apenas no caso do escalar de Ricci o método GAS curou o problema da matéria exótica na garganta apenas para o caso particular  $n = 4$ , embora as condições radiais de energia não possam ser satisfeitas na garganta, apenas em uma pequena região próxima. Quando usamos o quadrado do tensor de Ricci, temos correções na garganta apenas para o caso  $n = 4$  também, mas a presença de matéria exótica do tipo *Phantom* na garganta é inevitável, no entanto, teremos a validade das condições radiais de energia. E usando o escalar de Kretschmann vimos que não haverá nenhuma correção na garganta para todas as soluções generalizadas. Portanto, vemos que o método GAS não curou o problema da matéria exótica para as soluções de Ellis-Bronnikov generalizadas com  $n \geq 6$ , pelo menos quando usamos o escalar de Ricci, quadrado do tensor de Ricci e o escalar de Kretschmann para definir a função *cutoff*. Isto mostra que a GAS nem sempre pode ser esperada resolver o problema da matéria exótica em buracos de minhoca, contrário de outros resultados encontrados para outras geometrias diferentes [64, 65, 98].



## REFERÊNCIAS

- [1] A. Einstein and N. Rosen, *Phys. Rev.* **48**, 73-77 (1935) doi:10.1103/PhysRev.48.73
- [2] C. W. Misner and J. A. Wheeler, *Annals Phys.* **2**, 525-603 (1957) doi:10.1016/0003-4916(57)90049-0
- [3] M. S. Morris and K. S. Thorne, *Am. J. Phys.* **56**, 395-412 (1988) doi:10.1119/1.15620
- [4] M. Cataldo, L. Liempi and P. Rodríguez, *Phys. Rev. D* **91**, no.12, 124039 (2015) doi:10.1103/PhysRevD.91.124039 [arXiv:1506.04685 [gr-qc]].
- [5] K. A. Bronnikov and M. V. Skvortsova, *Grav. Cosmol.* **20**, 171-175 (2014) doi:10.1134/S0202289314030062 [arXiv:1404.5750 [gr-qc]].
- [6] M. Visser, “Lorentzian wormholes: From Einstein to Hawking.”(AIP, New York, 1995).
- [7] J.L. Blázquez-Salcedo, C. Knoll and E. Radu, *Phys. Rev. Lett.* **126**, no.10, 101102 (2021) doi:10.1103/PhysRevLett.126.101102 [arXiv:2010.07317 [gr-qc]].
- [8] R. A. Konoplya and A. Zhidenko, *Phys. Rev. Lett.* **128**, no.9, 091104 (2022) doi:10.1103/PhysRevLett.128.091104 [arXiv:2106.05034 [gr-qc]].
- [9] S. V. Sushkov, *Phys. Rev. D* **71**, 043520 (2005) doi:10.1103/PhysRevD.71.043520 [arXiv:gr-qc/0502084 [gr-qc]].
- [10] F. S. N. Lobo, *Phys. Rev. D* **71**, 084011 (2005) doi:10.1103/PhysRevD.71.084011 [arXiv:gr-qc/0502099 [gr-qc]].
- [11] R. Garattini, *Eur. Phys. J. C* **79**, no.11, 951 (2019) doi:10.1140/epjc/s10052-019-7468-y [arXiv:1907.03623 [gr-qc]].
- [12] K. Jusufi, P. Channuie and M. Jamil, *Eur. Phys. J. C* **80**, no.2, 127 (2020) doi:10.1140/epjc/s10052-020-7690-7 [arXiv:2002.01341 [gr-qc]].
- [13] G. Alencar, V. B. Bezerra and C. R. Muniz, *Eur. Phys. J. C* **81**, no.10, 924 (2021) doi:10.1140/epjc/s10052-021-09734-0 [arXiv:2104.13952 [gr-qc]].
- [14] P. H. F. Oliveira, G. Alencar, I. C. Jardim and R. R. Landim, [arXiv:2107.00605 [hep-th]].
- [15] Í. D. D. Carvalho, G. Alencar and C. R. Muniz, *Int. J. Mod. Phys. D* **31**, no.03, 2250011 (2022) doi:10.1142/S0218271822500110 [arXiv:2106.11801 [gr-qc]].
- [16] J. P. S. Lemos and F. S. N. Lobo, *Phys. Rev. D* **69**, 104007 (2004) doi:10.1103/PhysRevD.69.104007 [arXiv:gr-qc/0402099 [gr-qc]].
- [17] C. Barcelo, L. J. Garay, P. F. Gonzalez-Diaz and G. A. Mena Marugan, *Phys. Rev. D* **53**, 3162-3171 (1996) doi:10.1103/PhysRevD.53.3162 [arXiv:gr-qc/9510047 [gr-qc]].
- [18] J. P. S. Lemos, F. S. N. Lobo and S. Quinet de Oliveira, *Phys. Rev. D* **68**, 064004 (2003) doi:10.1103/PhysRevD.68.064004 [arXiv:gr-qc/0302049 [gr-qc]].

- [19] N. Dadhich, S. Kar, S. Mukherji and M. Visser, Phys. Rev. D **65**, 064004 (2002) doi:10.1103/PhysRevD.65.064004 [arXiv:gr-qc/0109069 [gr-qc]].
- [20] M. Cataldo, P. Salgado and P. Minning, Phys. Rev. D **66**, 124008 (2002) doi:10.1103/PhysRevD.66.124008 [arXiv:hep-th/0210142 [hep-th]].
- [21] M. Cataldo, L. Liempi and P. Rodríguez, Eur. Phys. J. C **77**, no.11, 748 (2017) doi:10.1140/epjc/s10052-017-5332-5
- [22] S. Weinberg, in *Understanding the Fundamental Constituents of Matter*, edited by A. Zichichi, New York: Plenum Press (1978),  
S. Weinberg, in *General Relativity*, edited by S.W. Hawking and W. Isreal, Cambridge: Cambridge University Press (1979),  
D. Becker and M. Reuter, JHEP **2012**, 172 (2012),  
M. Niedermaier and M. Reuter, Liv. Rev. Rel. **9**, 5 (2006).
- [23] M. Reuter, Phys. Rev. D **57**, 971-985 (1998) doi:10.1103/PhysRevD.57.971 [arXiv:hep-th/9605030 [hep-th]].
- [24] O. Lauscher and M. Reuter, Phys. Rev. D **65**, 025013 (2002) doi:10.1103/PhysRevD.65.025013 [arXiv:hep-th/0108040 [hep-th]].
- [25] D. F. Litim, Phys. Rev. Lett. **92**, 201301 (2004) doi:10.1103/PhysRevLett.92.201301 [arXiv:hep-th/0312114 [hep-th]].
- [26] P. F. Machado and F. Saueressig, Phys. Rev. D **77**, 124045 (2008) doi:10.1103/PhysRevD.77.124045 [arXiv:0712.0445 [hep-th]].
- [27] D. Benedetti, P. F. Machado and F. Saueressig, Mod. Phys. Lett. A **24**, 2233-2241 (2009) doi:10.1142/S0217732309031521 [arXiv:0901.2984 [hep-th]].
- [28] E. Manrique, S. Rechenberger and F. Saueressig, Phys. Rev. Lett. **106**, 251302 (2011) doi:10.1103/PhysRevLett.106.251302 [arXiv:1102.5012 [hep-th]].
- [29] N. Christiansen, D. F. Litim, J. M. Pawłowski and A. Rodigast, Phys. Lett. B **728**, 114-117 (2014) doi:10.1016/j.physletb.2013.11.025 [arXiv:1209.4038 [hep-th]].
- [30] T. R. Morris and Z. H. Slade, JHEP **11**, 094 (2015) doi:10.1007/JHEP11(2015)094 [arXiv:1507.08657 [hep-th]].
- [31] M. Demmel, F. Saueressig and O. Zanusso, JHEP **08**, 113 (2015) doi:10.1007/JHEP08(2015)113 [arXiv:1504.07656 [hep-th]].
- [32] A. Platania and F. Saueressig, Found. Phys. **48**, no.10, 1291-1304 (2018) doi:10.1007/s10701-018-0181-0 [arXiv:1710.01972 [hep-th]].
- [33] N. Christiansen, K. Falls, J. M. Pawłowski and M. Reichert, Phys. Rev. D **97**, no.4, 046007 (2018) doi:10.1103/PhysRevD.97.046007 [arXiv:1711.09259 [hep-th]].
- [34] K. G. Falls, D. F. Litim and J. Schröder, Phys. Rev. D **99**, no.12, 126015 (2019) doi:10.1103/PhysRevD.99.126015 [arXiv:1810.08550 [gr-qc]].
- [35] G. Narain and R. Percacci, Class. Quant. Grav. **27**, 075001 (2010) doi:10.1088/0264-9381/27/7/075001 [arXiv:0911.0386 [hep-th]].

- [36] K. y. Oda and M. Yamada, *Class. Quant. Grav.* **33**, no.12, 125011 (2016) doi:10.1088/0264-9381/33/12/125011 [arXiv:1510.03734 [hep-th]].
- [37] A. Eichhorn and A. Held, *Phys. Lett. B* **777**, 217-221 (2018) doi:10.1016/j.physletb.2017.12.040 [arXiv:1707.01107 [hep-th]].
- [38] A. Eichhorn and M. Schiffer, *Phys. Lett. B* **793**, 383-389 (2019) doi:10.1016/j.physletb.2019.05.005 [arXiv:1902.06479 [hep-th]].
- [39] M. Reichert and J. Smirnov, *Phys. Rev. D* **101**, no.6, 063015 (2020) doi:10.1103/PhysRevD.101.063015 [arXiv:1911.00012 [hep-ph]].
- [40] J. Daas, W. Oosters, F. Saueressig and J. Wang, *Phys. Lett. B* **809**, 135775 (2020) doi:10.1016/j.physletb.2020.135775 [arXiv:2005.12356 [hep-th]].
- [41] A. Bonanno and A. Platania, *Phys. Lett. B* **750**, 638-642 (2015) doi:10.1016/j.physletb.2015.10.005 [arXiv:1507.03375 [gr-qc]].
- [42] A. Bonanno, B. Koch and A. Platania, *Class. Quant. Grav.* **34**, no.9, 095012 (2017) doi:10.1088/1361-6382/aa6788 [arXiv:1610.05299 [gr-qc]].
- [43] A. Bonanno, G. Gionti, S.J. and A. Platania, *Class. Quant. Grav.* **35**, no.6, 065004 (2018) doi:10.1088/1361-6382/aaa535 [arXiv:1710.06317 [gr-qc]].
- [44] A. Bonanno, A. Platania and F. Saueressig, *Phys. Lett. B* **784**, 229-236 (2018) doi:10.1016/j.physletb.2018.06.047 [arXiv:1803.02355 [gr-qc]].
- [45] A. Platania, *Universe* **5**, no.8, 189 (2019) doi:10.3390/universe5080189 [arXiv:1908.03897 [gr-qc]].
- [46] A. Platania, *Front. in Phys.* **8**, 188 (2020) doi:10.3389/fphy.2020.00188 [arXiv:2003.13656 [gr-qc]].
- [47] A. Bonanno, B. Koch and A. Platania, *Found. Phys.* **48**, no.10, 1393-1406 (2018) doi:10.1007/s10701-018-0195-7 [arXiv:1710.10845 [gr-qc]].
- [48] A. Adeifeoba, A. Eichhorn and A. Platania, *Class. Quant. Grav.* **35**, no.22, 225007 (2018) doi:10.1088/1361-6382/aae6ef [arXiv:1808.03472 [gr-qc]].
- [49] C. Wetterich, *Nucl. Phys. B* **352**, 529-584 (1991) doi:10.1016/0550-3213(91)90099-J
- [50] D. Dou and R. Percacci, *Class. Quant. Grav.* **15**, 3449-3468 (1998) doi:10.1088/0264-9381/15/11/011 [arXiv:hep-th/9707239 [hep-th]].
- [51] M. Reuter and F. Saueressig, *Phys. Rev. D* **65**, 065016 (2002) doi:10.1103/PhysRevD.65.065016 [arXiv:hep-th/0110054 [hep-th]].
- [52] R. Percacci and D. Perini, *Phys. Rev. D* **68**, 044018 (2003) doi:10.1103/PhysRevD.68.044018 [arXiv:hep-th/0304222 [hep-th]].
- [53] M. Reuter and F. Saueressig, *Phys. Rev. D* **66**, 125001 (2002) doi:10.1103/PhysRevD.66.125001 [arXiv:hep-th/0206145 [hep-th]].
- [54] W. Souma, *Prog. Theor. Phys.* **102**, 181-195 (1999) doi:10.1143/PTP.102.181 [arXiv:hep-th/9907027 [hep-th]].

- [55] M. Reuter and H. Weyer, Phys. Rev. D **69**, 104022 (2004)  
doi:10.1103/PhysRevD.69.104022 [arXiv:hep-th/0311196 [hep-th]].
- [56] D. C. Rodrigues, B. Chauvineau and O. F. Piattella, JCAP **09**, 009 (2015)  
doi:10.1088/1475-7516/2015/09/009 [arXiv:1504.05119 [gr-qc]].
- [57] M. Reuter and H. Weyer, JCAP **12**, 001 (2004) doi:10.1088/1475-7516/2004/12/001  
[arXiv:hep-th/0410119 [hep-th]].
- [58] A. Bonanno and M. Reuter, Phys. Rev. D **62**, 043008 (2000)  
doi:10.1103/PhysRevD.62.043008 [arXiv:hep-th/0002196 [hep-th]].
- [59] A. Bonanno and M. Reuter, Phys. Rev. D **73**, 083005 (2006)  
doi:10.1103/PhysRevD.73.083005 [arXiv:hep-th/0602159 [hep-th]].
- [60] A. Bonanno and M. Reuter, Int. J. Mod. Phys. D **13**, 107-122 (2004)  
doi:10.1142/S0218271804003809 [arXiv:astro-ph/0210472 [astro-ph]].
- [61] M. Reuter and H. Weyer, Phys. Rev. D **70**, 124028 (2004)  
doi:10.1103/PhysRevD.70.124028 [arXiv:hep-th/0410117 [hep-th]].
- [62] R. Moti and A. Shojai, Phys. Lett. B **793**, 313-319 (2019)  
doi:10.1016/j.physletb.2019.04.062 [arXiv:1812.09135 [gr-qc]].
- [63] R. Moti and A. Shojai, Phys. Rev. D **101**, no.6, 064013 (2020)  
doi:10.1103/PhysRevD.101.064013 [arXiv:1909.07959 [gr-qc]].
- [64] R. Moti and A. Shojai, Phys. Rev. D **101**, no.12, 124042 (2020)  
doi:10.1103/PhysRevD.101.124042 [arXiv:2006.06190 [gr-qc]].
- [65] G. Alencar, V. B. Bezerra, C. R. Muniz and H. S. Vieira, Universe **7**, no.7, 238 (2021)  
doi:10.3390/universe7070238 [arXiv:2106.02476 [gr-qc]].
- [66] S. M. Carroll, “Spacetime and Geometry”, San Francisco, USA: Addison-Wesley (2004).
- [67] Wald, Robert M., “General Relativity”, Chicago :University of Chicago Press (1984).
- [68] R. D’Inverno, “Introducing Einstein’s Relativity”, Clarendon Press (1992).
- [69] Hawking, S. and Ellis, G., “The Large Scale Structure of Space-Time”, Cambridge University Press (1973).
- [70] Poisson, E., “A Relativist’s Toolkit: The mathematics of Black Holes Mechanics”, Cambridge University Press (2004).
- [71] R. W. Fuller and J. A. Wheeler, Phys. Rev. **128**, 919-929 (1962)  
doi:10.1103/PhysRev.128.919
- [72] H. G. Ellis, J. Math. Phys. **14**, 104-118 (1973) doi:10.1063/1.1666161
- [73] K. A. Bronnikov, Acta Phys. Polon. B **4**, 251-266 (1973)
- [74] F. Saueressig, N. Alkofer, G. D’Odorico and F. Vidotto, PoS **FFP14**, 174 (2016)  
doi:10.22323/1.224.0174 [arXiv:1503.06472 [hep-th]].

- [75] J. M. Pawłowski and D. Stock, *Phys. Rev. D* **98**, no.10, 106008 (2018) doi:10.1103/PhysRevD.98.106008 [arXiv:1807.10512 [hep-th]].
- [76] A. Platania, *Eur. Phys. J. C* **79**, no.6, 470 (2019) doi:10.1140/epjc/s10052-019-6990-2 [arXiv:1903.10411 [gr-qc]].
- [77] L. Bosma, B. Knorr and F. Saueressig, *Phys. Rev. Lett.* **123**, no.10, 101301 (2019) doi:10.1103/PhysRevLett.123.101301 [arXiv:1904.04845 [hep-th]].
- [78] A. Ishibashi, N. Ohta and D. Yamaguchi, *Phys. Rev. D* **104**, no.6, 066016 (2021) doi:10.1103/PhysRevD.104.066016 [arXiv:2106.05015 [hep-th]].
- [79] J. N. Borissova and A. Eichhorn, *Universe* **7**, no.3, 48 (2021) doi:10.3390/universe7030048 [arXiv:2012.08570 [gr-qc]].
- [80] J. Chojnacki and J. H. Kwapisz, [arXiv:2111.08407 [gr-qc]].
- [81] B. L. Giacchini, T. d. Netto and L. Modesto, *Phys. Rev. D* **104**, no.8, 084072 (2021) doi:10.1103/PhysRevD.104.084072 [arXiv:2105.00300 [gr-qc]].
- [82] J. Chojnacki and J. Kwapisz, *Phys. Rev. D* **104**, no.10, 103504 (2021) doi:10.1103/PhysRevD.104.103504 [arXiv:2102.13556 [gr-qc]].
- [83] M. Reuter and F. Saueressig, “Quantum Gravity and the Functional Renormalization Group: The Road towards Asymptotic Safety”, Cambridge University Press (2019).
- [84] M. H. Goroff and A. Sagnotti, *Phys. Lett. B* **160**, 81-86 (1985) doi:10.1016/0370-2693(85)91470-4
- [85] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, *Ann. Inst. H. Poincare Phys. Theor. A* **20**, 69-94 (1974)
- [86] J. F. Donoghue, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2996-2999 (1994) doi:10.1103/PhysRevLett.72.2996 [arXiv:gr-qc/9310024 [gr-qc]].
- [87] J. F. Donoghue, *Phys. Rev. D* **50**, 3874-3888 (1994) doi:10.1103/PhysRevD.50.3874 [arXiv:gr-qc/9405057 [gr-qc]].
- [88] K. G. Wilson and J. B. Kogut, *Phys. Rept.* **12**, 75-199 (1974) doi:10.1016/0370-1573(74)90023-4
- [89] K. G. Wilson, *Rev. Mod. Phys.* **47**, 773 (1975) doi:10.1103/RevModPhys.47.773
- [90] L. P. Kadanoff, “Statistical physics: Statics, dynamics and renormalization”, World Scientific Publishing Company (2000).
- [91] K. Gawedzki and A. Kupiainen, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 363-365 (1985) doi:10.1103/PhysRevLett.55.363
- [92] K. Gawedzki and A. Kupiainen, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 2191-2194 (1985) doi:10.1103/PhysRevLett.54.2191
- [93] K. Gawedzki and A. Kupiainen, *Commun. Math. Phys.* **102**, 1 (1985) doi:10.1007/BF01208817

- [94] J. Berges, N. Tetradis and C. Wetterich, Phys. Rept. **363**, 223-386 (2002) doi:10.1016/S0370-1573(01)00098-9 [arXiv:hep-ph/0005122 [hep-ph]].
- [95] C. Wetterich, Int. J. Mod. Phys. A **16**, 1951-1982 (2001) doi:10.1142/S0217751X01004591 [arXiv:hep-ph/0101178 [hep-ph]].
- [96] O. Ruiz and E. Tuiran, [arXiv:2112.12519 [gr-qc]].
- [97] B. Koch and F. Saueressig, Class. Quant. Grav. **31**, 015006 (2014) doi:10.1088/0264-9381/31/1/015006 [arXiv:1306.1546 [hep-th]].
- [98] M. Nilton, J. Furtado and G. Alencar, Phys. Rev. D **105**, no.8, 084048 (2022) doi:10.1103/PhysRevD.105.084048 [arXiv:2202.04188 [gr-qc]].
- [99] G. Alencar and M. Nilton, Universe **7**, no.9, 332 (2021) doi:10.3390/universe7090332 [arXiv:2108.07912 [gr-qc]].
- [100] S. Kar, S. Minwalla, D. Mishra and D. Sahdev, Phys. Rev. D **51**, 1632-1638 (1995) doi:10.1103/PhysRevD.51.1632
- [101] P. Dutta Roy, S. Aneesh and S. Kar, Eur. Phys. J. C **80**, no.9, 850 (2020) doi:10.1140/epjc/s10052-020-8409-5 [arXiv:1910.08746 [gr-qc]].
- [102] M. Nilton, J. Furtado, G. Alencar and R. R. Landim, [arXiv:2203.08860 [gr-qc]].
- [103] T. Mueller *et al.*, Catalogue of Spacetimes, <http://go.visus.uni-stuttgart.de>.