



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA
DOUTORADO EM ENGENHARIA DE TELEINFORMÁTICA

GEORGE BARBOSA DA SILVA

A FUNÇÃO w_q DE LAMBERT-TSALLIS E SUAS APLICAÇÕES

FORTALEZA
2021

GEORGE BARBOSA DA SILVA

A FUNÇÃO W_q DE LAMBERT-TSALLIS E SUAS APLICAÇÕES

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Engenharia de Teleinformática. Área de concentração: Eletromagnetismo Aplicado

Orientador: Prof. Dr. Rubens Viana Ramos.

FORTALEZA

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S58f

Silva, George Barbosa da.

A função W_q de Lambert-Tsallis e suas aplicações / George Barbosa da Silva. – 2021.

51 f. : il. color.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Teleinformática, Fortaleza, 2021.

Orientação: Prof. Dr. Rubens Viana Ramos .

1. Função W de Lambert. 2. Função W_q de Lambert-Tsallis . 3. Q -exponencial . I. Título.

CDD 621.38

Aos meus pais: Luís Gonçalves e Maria do Socorro.

Aos meus filhos: Enzo e Sofia.

A minha esposa Luana e sua família e em especial Liliane. A minha cunhada Ariane (*in memoriam*) a melhor tia que meus filhos poderiam ter.

Aos meus irmãos: Gilberto e Gilvan.

Aos meus sobrinhos (as): Diego, Mayara, Davi Vinicius e Waleska e os demais que virão.

A toda minha família: tios (as) Gracinha, Evandro, Orlando, Socorro, Ornardes (*in memoriam*), a Francisco (*in memoriam*) que me motivou, mesmo sem saber, a estudar ciências; primos (as) e em especial Glauson, Eliano e Eliana.

A todos os meus amigos e professores com quem convivi durante todos esses anos de vida acadêmica.

Dedico!

AGRADECIMENTOS

Ao Grande Arquiteto do Universo, sem ele nada disso seria possível.

Ao meu amigo e que considero um irmão, o meu orientador Rubens Viana que é, certamente, o homem mais inteligente que já conheci. Agradeço a sua paciência e vontade constante em ensinar de maneira mais simples e eficaz possível os mais diversos assuntos, e que foi fundamental não só nessa Tese, mas nos bons exemplos de vida, conduta e retidão.

Aos meus professores do Grupo de Informação Quântica (GIQ): Hilma e João Batista por seus ensinamentos e contribuição no meu Doutorado. Aos meus amigos Claudomir, Leonardo, Samy, Daniel, Gisele, Ítalo, Fernando, Franklin, Glaucionor, Ranara, Geovan, Paulo Regis, Joacir, Jorge e Danilo.

Aos professores do PPGETI, pelos ensinamentos que completaram a minha formação, e ao funcionário Renato Barbosa, pelo trabalho competente na secretaria do PPGETI.

Por fim, a CAPES pelo custeio dos meus estudos de pós-graduação.

“Um dia aprendi que sonhos existem para tornarem-se realidade. E, desde aquele dia, já não durmo para descansar. Simplesmente durmo para sonhar.”

(Walter Disney)

RESUMO

No presente trabalho, após uma breve revisão da função W de Lambert, a função W_q de Lambert-Tsallis é introduzida. Basicamente, a função W_q é uma generalização da função W que resolve a equação $W_q(z)\exp_q(W_q(z)) = z$, na qual $\exp_q(z)$ é a função q -exponencial usada por Tsallis em mecânica estatística não extensiva. É mostrado que a função W_q tem um papel em sistemas com comportamentos descritos por uma lei de potência, similar ao papel da função W em sistemas descritos por uma lei exponencial. Exemplos de funções W_q para diferentes valores de q são apresentados, algumas propriedades de W_q são descritas e, por fim, aplicações de W_q em diferentes áreas da engenharia e da física são discutidas.

Palavras-chave: Função W de Lambert, Função W_q de Lambert-Tsallis, q -exponencial.

ABSTRACT

In the present work, after a brief review of the Lambert W function, the Lambert-Tsallis W_q function is introduced. Basically, the W_q function is a generalization of the W function that solves the equation $W_q(z)\exp_q(W_q(z)) = z$, where $\exp_q(z)$ is the q -exponential function used by Tsallis in non-extensive statistical mechanics. It is shown that W_q plays for systems described by a power-law, a similar role that the W function plays for systems described by an exponential-law. Examples of W_q functions for different values of q are provided, some properties are described and, at last, applications of W_q in different areas of engineering and physics are discussed.

Keyword: Lambert W Function, Lambert-Tsallis W_q function, q -exponential.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - $W(z)$ versus z	14
Figura 3.1 - $W_{q=3/2}$ versus z	27
Figura 3.2 - W_q versus z para $q = 0,75$, $q = 1$ e $q = 1,25$	27
Figura 3.3 - $y(t)$ versus t para três valores diferentes de q ($1/2$, 1 , 2).....	36

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	10
2 A FUNÇÃO W DE LAMBERT	13
2.1 Introdução.....	13
2.2 Propriedades da Função W de Lambert.....	14
2.3 Exemplos da Utilização da Função W de Lambert	16
2.4 Cálculo Numérico da Função W de Lambert	19
3 A FUNÇÃO W_q DE LAMBERT-TSALLIS E SUAS APLICAÇÕES.....	21
3.1 Introdução.....	21
3.2 As Funções q -Exponencial e q -Logaritmo.....	22
3.3 A Função W_q de Lambert-Tsallis.....	24
3.3.1 Propriedades da Função W_q de Lambert-Tsallis.....	28
3.3.2 Cálculo Numérico da Função W_q de Lambert-Tsallis.....	29
3.3.3 Aplicações da Função W_q de Lambert-Tsallis.....	30
4 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS.....	39
4.1 Conclusões.....	39
4.2 Perspectivas de Trabalhos Futuros	39
REFERÊNCIAS	40
APÊNDICE A – SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DO PROJÉTIL COM EXPQ	46
APÊNDICE B – ARTIGO DECORRENTE DA TESE	51

1. INTRODUÇÃO

A função W de Lambert (LAMBERT, 1758), (EULER, 1783) é uma função que aparece em soluções analíticas de problemas em diferentes áreas da engenharia, física e matemática. Basicamente, ela é definida a partir da seguinte equação $W(x)\exp(W(x)) = x$ ou, semelhantemente $a\exp(a) = b$ implica em $a = W(b)$. A partir de sua definição pode-se perceber que a função W é útil no modelamento de sistemas físicos que são descritos por uma lei exponencial como, por exemplo, um circuito de corrente contínua contendo apenas um resistor e um diodo. Adicionalmente, pode-se também notar a partir de sua definição que a função W possui uma relação importante com as funções exponencial e logaritmo. De fato, é possível calcular a função W a partir de uma relação de recorrência com a função logaritmo.

Em 1988, reconhecendo que a entropia de Boltzmann não se aplica a todos os sistemas físicos, Tsallis introduziu a sua entropia, chamada posteriormente de entropia de Tsallis (TSALLIS, 1988). A entropia de Tsallis, por sua vez, mostrou o caminho para generalizações das funções exponencial e logaritmo, as funções q -exponencial ($\exp_q(x)$) e q -logaritmo ($\ln_q(x)$), sendo q um número real, chamado de parâmetro de não extensividade, que parametriza as funções generalizadas. Ambas recuperam as funções originais quando q assume o valor 1. Existem outras generalizações como, por exemplo, as funções κ -exponencial e κ -logaritmo, propostas por Giorgio Kaniadakis (KANIADAKIS, 2002), em (DA SILVA, J. *et al*, 2020a), (DA SILVA, J. *et al*, 2020b) é apresentada a função $W\kappa$ de Lambert-Kaniadakis, mas que não são consideradas neste trabalho.

Diante do acima exposto, a presente tese responde à seguinte pergunta: existe uma função W_q , generalização de W , relacionada às funções q -exponencial e q -logaritmo, que resolva o problema $W_q(x)\exp_q(W_q(x)) = x$ ou, similarmente, $a\exp_q(a) = b$ implica em $a = W_q(b)$? A resposta é positiva. Existe toda uma família de funções $W_q(x)$, aqui chamada de função de Lambert-Tsallis. No caso particular de $q = 1$, a função de Lambert é recuperada. Além disso, o valor da função $W_q(x)$ pode ser calculado recursivamente a partir da função $\ln_q(x)$. Assim como a função original W , a função W_q encontra aplicações em diferentes áreas da engenharia, física e matemática como, por exemplo, processamento de imagens, circuitos eletrônicos, física de semicondutores, física quântica, física estatística e solução de polinômios, dentre outras. Entretanto, enquanto a função W pode aparecer em soluções analíticas de sistemas físicos com

comportamento exponencial, a função W_q pode aparecer em soluções analíticas de sistemas físicos com comportamento regido por uma lei de potência. Há de se destacar que essa ligação de W_q com uma lei de potência claramente a torna apta a ser raiz de certos polinômios quando a potência em questão é um número inteiro. Por exemplo, as raízes de um polinômio cúbico na forma deprimida (todo polinômio cúbico pode ser escrito na forma deprimida) e as raízes de um polinômio de grau cinco na forma de Bring-Jerrard (todo polinômio de grau cinco pode ser escrito na forma de Bring-Jerrard) são facilmente escritos em função de W_q . Essas soluções são bem mais compactas que as soluções encontradas em (BRING, *et al*, 1786), (BRING, 1864), (JERRARD,1852), (JERRARD,1859), (HARLEY, 1963), (WEISSTEIN,2002), (KLEIN, 1956). Tradicionalmente, a função \exp_q é utilizada em física-estatística, descrevendo distribuições de probabilidade q -exponencial, q -Gaussiana dentre outras. A introdução de W_q proporciona o uso direto da função \exp_q no modelamento de sistemas em diferentes áreas da física.

Já existem na literatura alguns trabalhos importantes com estudos, análises e aplicações da função W_q de Lambert-Tsallis, como a nova função de ativação para redes neurais do tipo Redes de Função de Base Radial em (DA SILVA J. L. M. *et al*, 2019), a função W_q foi usada no estudo do mapa logístico com decaimento exponencial deformado para determinar o ponto fixo e bem como para analisar a dinâmica da disentropia no regime caótico (DA SILVA, J. L. E *et al*, 2020b). A função W_q foi utilizada na solução de polinômios cúbicos (RAMOS, 2020a), e na determinação de limites da função de contagem de primos (RAMOS, 2020b), assim como na solução de problemas relativísticos em (RAMOS, 2020c). Recentemente em (RAMOS, 2021) foram feitas soluções analíticas das raízes de três classes de polinômios de grau cinco e mais recentemente o trabalho sobre o estudo de circuitos onde temos a relação corrente-tensão como em um circuito RCD (resistor-capacitor-diodo) em (DE ANDRADE, *et al*, 2021). Por fim, a nova função $R_{q,Q}(z)$, solução da equação $R_{q,Q}(z) \times_Q \exp_q(R_{q,Q}(z)) = z$ é apresentada em (RAMOS, 2020) como uma generalização de $W_q(z)$.

Por fim, a função W_q de Lambert-Tsallis apresenta uma interessante estrutura no plano complexo. Entretanto, nesta tese apenas as soluções reais são consideradas, uma vez que o interesse maior da tese além da introdução de W_q está na solução de problemas de engenharia e física.

Diante do acima exposto, a presente tese está dividida em quatro capítulos. O Capítulo 2 traz uma breve revisão da função W de Lambert, a descrição de algumas propriedades e a

solução de alguns problemas matemáticos utilizando-a. O Capítulo 3 faz a introdução da função W_q de Lambert-Tsallis, descreve algumas de suas propriedades, apresenta um pequeno algoritmo para o cálculo numérico de W_q e mostra várias aplicações de W_q em diferentes áreas da física e da engenharia. Por fim, o Capítulo 4 apresenta as conclusões e as perspectivas de trabalhos futuros.

2 A FUNÇÃO W DE LAMBERT

2.1 Introdução

Há inúmeras aplicações da Função W de Lambert na literatura nas mais diversas áreas nas soluções analíticas de problemas em matemática (CORLESS *et al.*, 1996), (BORWEIN *et al.*, 1999), (CHAPEAU-BLONDEAU *et al.*, 2002), ciência computacional (KLUSÁČEK, 2008), na cinemática enzimática (SCHNELL *et al.*, 1997), na engenharia (YI *et al.*, 2006); (YI *et al.*, 2007), em mecânica estatística (CAILLOL, 2003), na dinâmica dos fluidos (PUDASAINÉ, 2011), em cálculos de alcance de sistema a laser (STEINVALL, 2009), no estudo da velocidade de saída quanto a taxa de perda de massa do vento solar das partículas de plasma (CRANMER, 2004) e *etcétera e tal*.

A função $W(z)$ de Lambert é uma importante função elementar (CHOW, 1999), (como o são $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\exp(x)$, $\log(x)$, etc...) que encontra aplicações em diversos ramos da matemática, física e ciência da computação. A função $W(z)$ é formalmente definida, para qualquer número complexo z , como a função que é a solução da equação

$$W(z)e^{W(z)} = z. \quad (2.1)$$

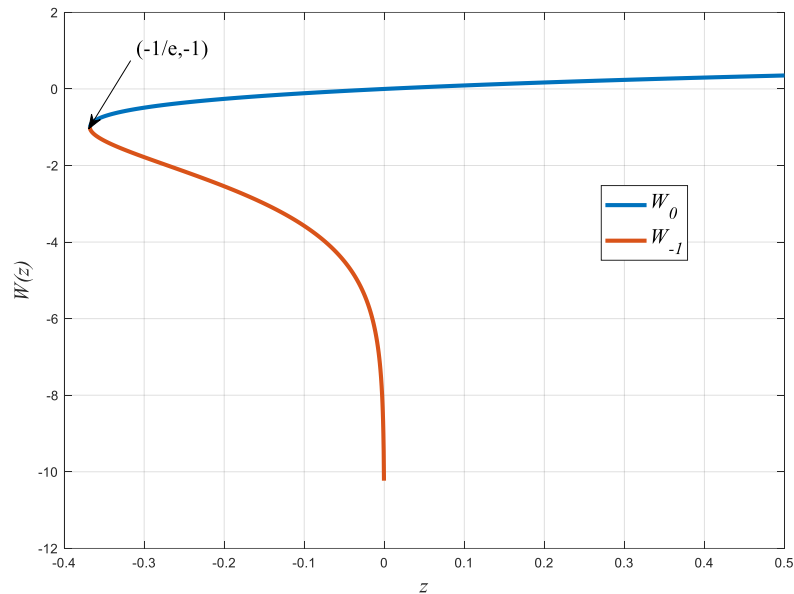
Como a função $W(z)$ é não injetora, existem infinitas soluções e elas são diferenciadas por um número inteiro, cada um representando um ramo de W . Desta forma, as soluções são representadas por $W_k(z)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$. É de especial interesse os casos em que as soluções são reais, o que ocorre nas soluções de problemas físicos, por exemplo. Se z é puramente real, três situações são possíveis:

- I) Existem duas soluções reais, $W_0(z)$ e $W_{-1}(z)$.
- II) Só há uma solução real, $W_0(z)$.
- III) Não há nenhuma solução real. Todos os outros ramos são soluções complexas, mesmo para z real.

Como citado no item I), para z real podem haver duas soluções reais, $W_0(z)$ e $W_{-1}(z)$. De fato, na faixa $-1/e \leq z \leq 0$ existem dois valores reais de $W(z)$. O ramo satisfazendo $W(z) \geq -1$ é o ramo principal chamado $W_0(z)$ enquanto que o ramo satisfazendo $W(z) \leq -1$ é chamado de $W_{-1}(z)$. Para

$z > 0$ só $W_0(z)$ é real e para $z < -1/e$ não há soluções reais. O gráfico da função $W(z)$ versus z é mostrado na Fig. 1.1.

Figura 1.1 - $W(z)$ versus z .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Portanto, $-1 < W_{-1}(z) < 0$ para $-1/e \leq z < 0$, e $-1 < W_0(z) < +\infty$ para $-1/e \leq z < +\infty$.

2.2 Propriedades da Função W de Lambert

A representação em série de W_0 é dada por (CORLESS *et al.*, 1996)

$$W_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} z^n. \quad (2.2)$$

Em (2.2) segue da inversão do Teorema de Lagrange (CARATHÉODORY, 1954).

O valor assintótico da função W_k é da forma (DENCE, 2013).

$$W_k(z) \approx \ln(z) + i2\pi k - \ln[\ln(z) + i2\pi k]. \quad (2.3)$$

A primeira e a segunda derivada da função W podem ser calculadas da seguinte forma

$$z = W(z)e^{W(z)} \Rightarrow \frac{dz}{dz} = \frac{dW(z)e^{W(z)}}{dz} \Rightarrow 1 = W(z)\frac{dW(z)}{dz}e^{W(z)} + \frac{dW(z)}{dz}e^{W(z)} \Rightarrow$$

$$\frac{dW(z)}{dz} = \frac{1}{[W(z)+1]e^{W(z)}} = \frac{W(z)}{z[W(z)+1]} \quad \text{para } z \neq 0. \quad (2.4)$$

De forma semelhante encontra-se

$$\frac{d^2W(z)}{dz^2} = -\frac{W(z)^2[W(z)+2]}{z^2[W(z)+1]^3}. \quad (2.5)$$

Em geral tem-se que

$$\frac{d^nW(z)}{dz^n} = -\frac{e^{-nW(z)}p_n(W(z))}{[W(z)+1]^{2n-1}} \quad \text{para } n \geq 1. \quad (2.6)$$

Em (2.6) os polinômios p_n obedecem à relação de recorrência

$$p_{n+1}(\omega) = -(n\omega + 3n - 1)p_n(\omega) + (\omega + 1)\frac{dp_n(\omega)}{d\omega} \quad \text{para } n \geq 1 \quad (2.7)$$

sendo $p_1(\omega) = 1$. Além disso, tem-se que $p_n(0) = (-n)^{(n-1)}/n!$ para $n \geq 1$. Por fim, as seguintes integrais podem ser encontradas na literatura (DENCE,2013).

$$\int W(x)dx = \frac{x[W(x)^2 + W(x) - 1]}{W(x)} + c \quad (2.8)$$

$$\int xW(x)dx = \frac{x^2 \left\{ [2W(x) - 1][2W(x)^2 + 1] \right\}}{8W(x)^2} + c. \quad (2.9)$$

2.3 Exemplos da Utilização da Função W de Lambert

Exemplo 1:

Por definição, a solução de $ye^y = x$ é $y = W(x)$, ou seja

$$ye^y = x \Rightarrow W(ye^y) = W(x) \Rightarrow W(ye^y) = y \Rightarrow y = W(x). \quad (2.10)$$

Exemplo 2:

$$\begin{aligned} y \ln(y) = x &\Rightarrow y = e^{x/y} \Rightarrow 1 = \frac{1}{y} e^{x/y} \Rightarrow x = \frac{x}{y} e^{x/y} \Rightarrow W(x) = W\left(\frac{x}{y} e^{x/y}\right) \\ &\Rightarrow W(x) = \frac{x}{y} \Rightarrow y = \frac{x}{W(x)}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Exemplo 3:

$$y \ln(y) = x \Rightarrow x = \ln(y) e^{\ln(y)} \Rightarrow W(x) = W[\ln(y) e^{\ln(y)}] \Rightarrow W(x) = \ln(y) \Rightarrow y = e^{W(x)}. \quad (2.12)$$

Exemplo 4:

$$\begin{aligned} \frac{\ln(y)}{y} = x &\Rightarrow \ln(y) = xy \Rightarrow y = e^{xy} \Rightarrow -xy = -xe^{xy} \Rightarrow -xye^{-xy} = -x \\ &\Rightarrow W(-xye^{-xy}) = W(-x) \Rightarrow -xy = W(-x) \Rightarrow y = -\frac{W(-x)}{x}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Exemplo 5:

$$x = y + \ln(y) \Rightarrow e^x = ye^y \Rightarrow W(e^x) = W(ye^y) \Rightarrow y = W(e^x). \quad (2.14)$$

Exemplo 6:

$$x = y + e^y \Rightarrow e^x = e^y e^{e^y} \Rightarrow W(e^x) = W(e^y e^{e^y}) \Rightarrow e^y = W(e^x) \Rightarrow y = \ln(W(e^x)). \quad (2.15)$$

Exemplo 7:

$$\begin{aligned} x = y + e^y &\Rightarrow (x - y) = e^y \Rightarrow (x - y)e^{-y} = 1 \Rightarrow (x - y)e^{(x-y)} = e^x \Rightarrow \\ W[(x - y)e^{(x-y)}] &= W(e^x) \Rightarrow (x - y) = W(e^x) \Rightarrow y = x - W(e^x). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Dos exemplos 6 e 7 tem-se que

$$\ln(W(e^x)) = x - W(e^x) \Rightarrow \ln(W(y)) = \ln(y) - W(y), \quad (2.17)$$

Válida no ramo principal quando $y > 0$.

Exemplo 8:

$$x = \frac{e^y}{y} \Rightarrow -ye^{-y} = -\frac{1}{x} \Rightarrow W(-ye^{-y}) = W\left(-\frac{1}{x}\right) \Rightarrow y = -W\left(-\frac{1}{x}\right). \quad (2.18)$$

Exemplo 9:

$$x = y^2 e^y \Rightarrow \pm x^{1/2} = ye^{y/2} \Rightarrow \frac{\pm x^{1/2}}{2} = \frac{y}{2} e^{y/2} \Rightarrow W\left(\frac{\pm x^{1/2}}{2}\right) = W\left(\frac{y}{2} e^{y/2}\right) \Rightarrow y = 2W\left(\frac{\pm x^{1/2}}{2}\right). \quad (2.19)$$

Exemplo 10:

$$\begin{aligned} x = e^y / y^2 &\Rightarrow \pm x^{1/2} = e^{y/2} / y \Rightarrow ye^{-y/2} = \pm x^{-1/2} \Rightarrow -\frac{y}{2} e^{-y/2} = \pm \frac{x^{-1/2}}{2} \\ &\Rightarrow W\left(-\frac{y}{2} e^{-y/2}\right) = W\left(\pm \frac{x^{-1/2}}{2}\right) \Rightarrow y = -2W\left(\pm \frac{x^{-1/2}}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Exemplo 11:

$$x = ye^{y^2} \Rightarrow x^2 = y^2 e^{2y^2} \Rightarrow W(2x^2) = W(2y^2 e^{2y^2}) \Rightarrow 2y^2 = W(2x^2) \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{W(2x^2)}{2}}. \quad (2.21)$$

Exemplo 12:

$$y = x^y \Rightarrow y = e^{y \ln(x)} \Rightarrow ye^{-y \ln(x)} = 1 \Rightarrow -y \ln(x) e^{-y \ln(x)} = -\ln(x) \Rightarrow W(-y \ln(x) e^{-y \ln(x)}) = W[-\ln(x)] \Rightarrow -y \ln(x) = W[-\ln(x)] \Rightarrow y = -\frac{W[-\ln(x)]}{\ln(x)}. \quad (2.22)$$

Exemplo 13:

Seja a seguinte equação diferencial de atraso com coeficientes constantes (CORLESS *et al.*, 1996)

$$\frac{dy}{dt} = ay(t-1). \quad (2.23)$$

Usando a solução teste $y = e^{\lambda t}$ em (2.23) tem-se

$$\lambda e^{\lambda t} = a e^{\lambda t} e^{-\lambda} \Rightarrow \lambda e^{\lambda} = a \Rightarrow \lambda = W_k(a). \quad (2.24)$$

Como a equação diferencial em (2.23) é linear, tem-se que a seguinte função também é solução

$$y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{W_k(a)t}. \quad (2.25)$$

Se pelo menos um dos $W_k(a)$ tiver parte real positiva, a solução $y(t)$ cresce exponencialmente.

Exemplo 14:

A distribuição espectral da radiação do corpo negro é dada por

$$\rho(\lambda, T) = \frac{8\pi hc/\lambda^5}{\exp(hc/\lambda kT) - 1}. \quad (2.26)$$

Em (2.26), h é a constante de Planck, c é a velocidade da luz, k é a constante de Boltzmann, λ é o comprimento de onda e T é a temperatura. O comprimento de onda no qual $\rho(\lambda, T)$ é máximo obedece à lei de deslocamento de Wien, $\lambda_{\max} T = b$, sendo b a constante de deslocamento de Wien. Para determinar o valor de b , pode-se derivar a distribuição de Planck em relação ao comprimento de onda e igualar o resultado a zero:

$$\frac{\partial \rho(\lambda, T)}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow -5 \exp\left(\frac{hc}{\lambda_{\max} kT}\right) + 5 + \exp\left(\frac{hc}{\lambda_{\max} kT}\right) \frac{hc}{\lambda_{\max} kT} = 0. \quad (2.27)$$

A solução analítica de (2.27) pode ser obtida com a função W de Lambert

$$\begin{aligned} -5 \exp\left(\frac{hc}{\lambda_{\max} kT}\right) + 5 + \exp\left(\frac{hc}{\lambda_{\max} kT}\right) \frac{hc}{\lambda_{\max} kT} = 0 &\Rightarrow \left(\frac{hc}{\lambda_{\max} kT} - 5\right) \exp\left(\frac{hc}{\lambda_{\max} kT}\right) = -5 \Rightarrow \\ \left(\frac{hc}{\lambda_{\max} kT} - 5\right) \exp\left(\frac{hc}{\lambda_{\max} kT} - 5\right) = -5 \exp(-5) &\Rightarrow W_0\left[\left(\frac{hc}{\lambda_{\max} kT} - 5\right) \exp\left(\frac{hc}{\lambda_{\max} kT} - 5\right)\right] = W_0[-5 \exp(-5)] \Rightarrow \\ \frac{hc}{\lambda_{\max} kT} - 5 = W_0[-5 \exp(-5)] &\Rightarrow \frac{hc}{\lambda_{\max} kT} = 5 + W_0[-5 \exp(-5)] \\ \Rightarrow \lambda_{\max} T = \frac{hc/k}{5 + W_0[-5 \exp(-5)]}. & \quad (2.28) \end{aligned}$$

Portanto, $b = 2.89310^{-3}$ mK.

2.4 Cálculo Numérico da Função W de Lambert

Não é objetivo da presente tese desenvolver ou melhorar técnicas numéricas para o cálculo da função W . Os principais softwares de cálculo numérico comerciais como *Maple*, *Mathematica* e *MATLAB* possuem a implementação da função que calcula W . Desta forma, a presente seção apenas discute de forma breve alguns métodos para o cálculo de W .

Em (CORLESS *et al.*, 1996) pode-se reescrever (2.1) da seguinte forma

$$W(z) = \ln(z) - \ln(W(z)). \quad (2.29)$$

Para $x > 0$ e $W(z) > 0$, a eq. (2.29) representa a parte positiva de W_0 . Portanto, pode-se usar (2.29) para calcular $W_0(z)$ quando $W_0(z) > 1$ ou, equivalentemente, $z > e$. Usando (2.29) de forma recursiva obtém-se

$$W_0(z) = \ln(z) - \ln\left(\ln(z) - \ln\left(\ln(z) - \ln\left(\ln(z) - \dots\right)\right)\right) = \ln \frac{z}{\ln \frac{z}{\ln \frac{z}{\dots}}}. \quad (2.30)$$

Para $x < 0$ e $W(z) < 0$, pode-se multiplicar ambos os lados de (2.1) por -1 e tomar o logaritmo:

$$\begin{aligned} W(z)e^{W(z)} = z &\Rightarrow -W(z)e^{W(z)} = -z \Rightarrow \ln(-W(z)e^{W(z)}) = \ln(-z) \Rightarrow \\ \ln(-W(z)) + W(z) &= \ln(-z) \Rightarrow W(z) = \ln(-z) - \ln(-W(z)). \end{aligned} \quad (2.31)$$

A eq. (2.31) pode ser usada para calcular o ramo W_{-1} . Usando (2.31) recursivamente obtém-se

$$W_{-1}(z) = \ln(-z) - \ln\left(-\ln(-z) - \ln\left(-\ln(-z) - \ln\left(-\ln(-z) - \dots\right)\right)\right) = \ln \frac{-z}{-\ln \frac{-z}{-\ln \frac{-z}{\dots}}}. \quad (2.32)$$

O software *Maple* calcula a função W de Lambert fazendo uso do método de Halley (BROWN, 1977), (ALEFELD, 1981), que é um método de terceira ordem (usa a aproximação da função com derivadas de até terceira ordem). O método consiste na iteração do mapa (CORLESS *et al.*, 1996; VALLURI *et al.*, 2000; VEBERIC, 2009; JENN, 2002)

$$w_{j+1} = w_j - \frac{w_j e^{w_j} - z}{(w_j + 1)e^{w_j} - \frac{(w_j + 2)(w_j e^{w_j} - z)}{2w_j + 2}}, \quad (2.33)$$

sendo z a variável de entrada. A função W_{-1} também pode ser calculada através de sua expansão em série (BLONDEAU *et al.*, 2002)

$$W_{-1}(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \mu_l p^l \quad (2.34)$$

$$\mu_k = \frac{k-1}{k+1} \left(\frac{\mu_{k-2}}{2} + \frac{\alpha_{k-2}}{4} \right) - \frac{\alpha_k}{2} - \frac{\mu_{k-2}}{k+1} \quad (2.35)$$

$$\alpha_k = \sum_{j=2}^{k-1} \mu_j \mu_{k+1-j} \quad (2.36)$$

$$\mu_0 = -1, \mu_1 = 1, \alpha_0 = 2, \alpha_1 = -1. \quad (2.37)$$

Em (2.34) $p = -[2(ez+1)]^{1/2}$. A série em (2.34) converge para $-2^{1/2} < p \leq 0$, ou seja, para $-1/e \leq z < 0$, exatamente o domínio de existência de W_{-1} . Os primeiros sete termos de (2.34) são:

$$W_{-1}(z) = -1 + p - \frac{1}{3}p^2 + \frac{11}{72}p^3 - \frac{43}{540}p^4 + \frac{769}{17280}p^5 - \frac{221}{8505}p^6. \quad (2.38)$$

Por fim, o sistema iterativo de Fritsch (FRITSCH *et al.*, 1973) usado em (VEBERIČ, 2012) é dado por

$$w_{j+1} = w_j (\varepsilon_j + 1) \quad (2.39)$$

$$\varepsilon_j = \left(\frac{z_j}{1+w_j} \right) \left(\frac{q_j - z_j}{q_j - 2z_j} \right) \quad (2.40)$$

$$q_j = 2 \left(1 + w_j \right) \left(1 + w_j + \frac{2}{3} z_j \right) \quad (2.41)$$

$$z_j = \ln \left(\frac{x}{w_j} \right) - w_j. \quad (2.42)$$

3 A FUNÇÃO W_q DE LAMBERT-TSALLIS E SUAS APLICAÇÕES

3.1 Introdução

Neste capítulo, a função W_q de Lambert-Tsallis é introduzida. Algumas de suas propriedades são discutidas, um algoritmo para o cálculo numérico de W_q é descrito e, por fim, aplicações de W_q em diferentes áreas da engenharia e da física são apresentadas.

3.2 As Funções q -Exponencial e q -Logaritmo

Podem ser encontradas na literatura (BORGES, 1998), (YAMANO, 2002), (CURADO,1990) (BORGES, 2004), (NIVANEN *et al.*2003), diferentes generalizações da função exponencial. No contexto da mecânica estatística não extensiva, surgem as funções exponencial e logarítmica generalizadas quando Tsallis introduziu sua entropia em (TSALLIS, 1988). Essas generalizações são parametrizadas por uma variável real usualmente chamada de ‘ q ’. Quando $q = 1$ (ou no limite quando q tende para 1), a função exponencial é recuperada. Neste trabalho estamos interessados na função q -exponencial de Tsallis (UMAROV *et al.*, 2008). As operações com a exponencial generalizada de Tsallis requerem o uso das operações q -adição, q -subtração, q -multiplicação e q -divisão definidas por (UMAROV *et al.*, 2008).

$$a +_q b =: a + b + (1 - q)ab \quad (3.1)$$

$$a -_q b =: (a - b) / [1 + (1 - q)b] \quad (3.2)$$

$$a \times_q b =: \max \left\{ \left[a^{(1-q)} + b^{(1-q)} - 1 \right]^{1/(1-q)}, 0 \right\} \equiv \left[a^{(1-q)} + b^{(1-q)} - 1 \right]_+^{1/(1-q)} \quad (3.3)$$

$$a \div_q b =: \left[a^{(1-q)} - b^{(1-q)} + 1 \right]^{1/(1-q)} \quad (3.4)$$

A função q -exponencial de Tsallis, por sua vez, é definida como

$$e_q^x =: \begin{cases} e^x & \text{se } q = 1 \\ \left[1 + (1 - q)x \right]^{1/(1-q)} & \text{se } q \neq 1 \text{ \& } 1 + (1 - q)x > 0. \\ 0^{1/(1-q)} & \text{se } q \neq 1 \text{ \& } 1 + (1 - q)x \leq 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Usando (3.1) -(3.4) as seguintes propriedades da exponencial generalizada de Tsallis podem ser obtidas

$$e_q^a e_q^b = e_q^{a+_q b} \quad (3.6)$$

$$e_q^{a+b} = e_q^a \times_q e_q^b \quad (3.7)$$

$$e_q^a / e_q^b = e_q^{a-b} \quad (3.8)$$

$$e_q^{a-b} = e_q^a \div_q e_q^b \quad (3.9)$$

Além disso, usando (3.1) -(3.9) podem-se obter as seguintes relações

$$1/e_q^b = e_q^0 / e_q^b = e_q^{0-q^b} = e_q^{(0-b)/[1+(1-q)b]} = e_q^{-b/[1+(1-q)b]}. \quad (3.10)$$

$$\left(e_q^x\right)^\alpha = \left\{ \left[1+(1-q)x\right]^{1/(1-q)} \right\}^\alpha = \left[1+(1-q)x\right]^{\alpha/(1-q)} = \left[1 + \frac{(1-q)}{\alpha} \alpha x\right]^{\alpha/(1-q)} = e_{1-(1-q)/\alpha}^{\alpha x} \quad (3.11)$$

$$\frac{d}{dt} e_q^{f(t)} = \frac{\left[e_q^{f(t)}\right]^q}{df(t)/dt}. \quad (3.12)$$

De (3.11) obtém-se, por exemplo, $e_q^x e_{2-q}^{-x} = 1$. A função inversa da q -exponencial é o logaritmo natural de Tsallis, definido como sendo

$$\ln_q(x) =: \begin{cases} \ln(x) & x > 0 \text{ \& } q = 1 \\ \frac{x^{(1-q)} - 1}{1-q} & x > 0 \text{ \& } q \neq 1 . \\ \text{não definido} & x \leq 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

Desta forma

$$e_q^{\ln_q(x)} = x \text{ para } x > 0 \quad (3.14)$$

$$\ln_q(e_q^x) = x \text{ para } 0 < e_q^x < \infty. \quad (3.15)$$

Novamente usando (3.1) -(3.4) as seguintes propriedades do logaritmo generalizado de Tsallis podem ser obtidas

$$\ln_q(ab) = \ln_q(a) +_q \ln_q(b) \quad (3.16)$$

$$\ln_q(a) + \ln_q(b) = \ln_q(a \times_q b) \quad (3.17)$$

$$\ln_q(a/b) = \ln_q(a) -_q \ln_q(b) \quad (3.18)$$

$$\ln_q(a) - \ln_q(b) = \ln_q(a \div_q b) \quad (3.19)$$

$$\ln_q(x^\alpha) = \frac{(x^\alpha)^{(1-q)} - 1}{1-q} = \alpha \frac{x^{\alpha(1-q)} - 1}{\alpha(1-q)} = \alpha \ln_{1-(1-q)\alpha}(x). \quad (3.20)$$

3.3 A Função W_q de Lambert-Tsallis

A função W_q de Lambert-Tsallis é definida como sendo a solução de

$$W_q(z) e_q^{W_q(z)} = z, \quad (3.21)$$

Usando as propriedades da q -exponencial (3.6) - (3.9) e do q -logaritmo (3.13) - (3.16), alguns problemas similares aos descritos no Cap. 2 podem ser resolvidos. Por exemplo:

Exemplo 1:

$$x = y +_q e_q^y \Rightarrow e_q^x = e_q^{y+_q e_q^y} = e_q^y e_q^{e_q^y} \Rightarrow W_q(e_q^x) = W_q(e_q^y e_q^{e_q^y}) \Rightarrow e_q^y = W_q(e_q^x) \Rightarrow y = \ln_q(W_q(e_q^x)). \quad (3.22)$$

Exemplo 2:

$$x = y +_q \ln_q(y) \Rightarrow e_q^x = e_q^{y+_q \ln_q(y)} = e_q^{\ln_q(y)} e_q^y = y e_q^y \Rightarrow W_q(e_q^x) = W_q(y e_q^y) \Rightarrow y = W_q(e_q^x). \quad (3.23)$$

Obviamente, $W_{q=1}(z) = W(z)$. Para $q \neq 1$, a eq. (3.21) pode ser reescrita como:

$$W_q(z) [1 + (1-q)W_q(z)]^{1/(1-q)} = z. \quad (3.24)$$

Ou seja,

$$W_q^{(1-q)} + (1-q)W_q^{(2-q)} - z^{(1-q)} = 0. \quad (3.25)$$

Pode-se notar que, para certos valores de q a equação (3.25) é um polinômio. Nesses casos, os diferentes ramos de W_q são raízes desse polinômio. Por exemplo, para $q = 0$ tem-se os dois ramos reais de W_q dados por

$$W_{q=0}^+(z) = \left(-1 + \sqrt{1+4z}\right)/2 \text{ for } z \geq -1/4 \quad (3.26)$$

$$W_{q=0}^-(z) = \left(-1 - \sqrt{1+4z}\right)/2 \text{ for } -1/4 \leq z \leq 0. \quad (3.27)$$

Por outro lado, para $q = 2$ há apenas um ramo real:

$$W_{q=2}(z) = \frac{z}{1+z}. \quad (3.28)$$

Além disso, pode-se verificar que

$$W_{\frac{3}{2}}^\pm(z) = \frac{2(z+1) \mp 2\sqrt{2z+1}}{z}, \quad z > -1/2, \quad (3.29)$$

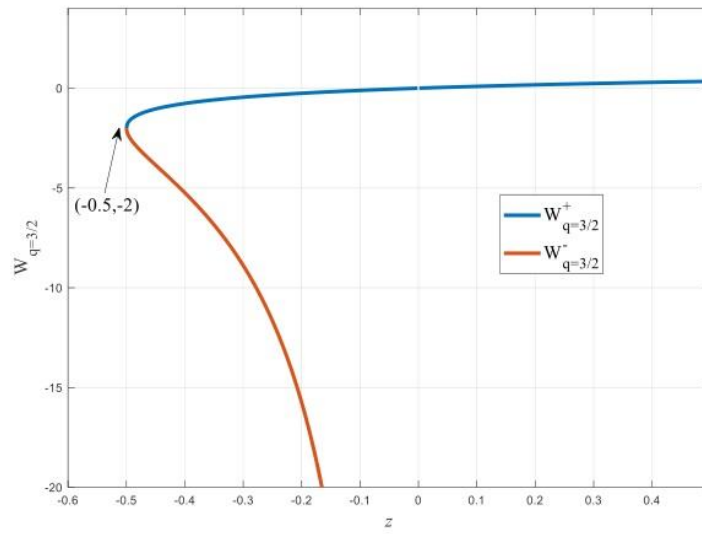
$$W_{\frac{1}{2}}(z) = \frac{\left[3\sqrt[3]{2z + \sqrt{\left(2z + \frac{8}{27}\right)^2 - \frac{64}{729} + \frac{8}{27}} - 2} \right]^2}{9\sqrt[3]{2z + \sqrt{\left(2z + \frac{8}{27}\right)^2 - \frac{64}{729} + \frac{8}{27}}}}, \quad z \geq -0.2950, \quad (3.30)$$

$$W_{\frac{4}{3}}(z) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{\sqrt{\frac{6562z + 2916}{z^3} - \frac{81}{z}}} - \frac{9\sqrt[3]{2}}{z \sqrt[3]{\sqrt{\frac{6561z + 2916}{z^3} - \frac{81}{z}}}}, \quad z \geq 0 \quad (3.31)$$

O ponto de ramificação da função W_q de Lambert-Tsallis ($dW_q/dz = \infty$) é o ponto ($z_b = \exp_q(1/(q-2))/(q-2)$, $W_q(z_b) = 1/(q-2)$), para $q \neq 2$. Não existe ponto de ramificação com z_b finito para $q = 2$. Por outro lado, para $q = 1$ o ponto de ramificação da função W de Lambert ($z_b = -1/e$, $W(z_b) = -1$) é recuperado. De uma forma geral, $W_q(z)$ também possui dois ramos de soluções reais, os quais estamos chamando de $W_q^+(z)$ e $W_q^-(z)$. O domínio de $W_q^+(z)$ é $z_b \leq z \leq +\infty$ enquanto que o domínio de $W_q^-(z)$ é $z_b \leq z \leq 0$.

A análise assintótica da função $W_q(z)$ varia de acordo com o valor de q então, como exemplo, vamos considerar apenas o caso $q = 3/2$. Neste caso, usando noções básicas de cálculo pode-se mostrar que: $\lim_{z \rightarrow 0} W_{3/2}^{\pm}(z) = 0$. Além disso, o domínio do ramo superior é $-1/2 < z < +\infty$ com o valor limite $\lim_{z \rightarrow +\infty} W_{3/2}^+(z) = 2$. Por outro lado, o domínio do ramo inferior é $-1/2 < z < 0$. Qualquer valor de $z < -1/2$ torna $W_{3/2}^{\pm}(z)$ complexo. Nota-se, entretanto, que em (3.29) é possível dar valores positivos para z e obter um valor real para $W_{3/2}^-(z)$, por exemplo, de acordo com (3.29), $W_{3/2}^-(1) = 4 + 2\sqrt{3}$. Entretanto, esses valores reais não satisfazem (3.21) e, portanto, $z > 0$ está realmente fora do domínio de $W_{3/2}^-(z)$. Observe que, de acordo com a eq. (3.5), o argumento de $\exp_{3/2}(x)$ deve ser menor que 2. Portanto, $W_{3/2}^-(z) \exp_{3/2}(W_{3/2}^-(z)) = z$ requer $W_{3/2}^-(z) < 2$ o que não ocorre para nenhum valor de $z \geq 0$. A Fig. 3.1 mostra a curva de $W_{q=3/2}$ versus z .

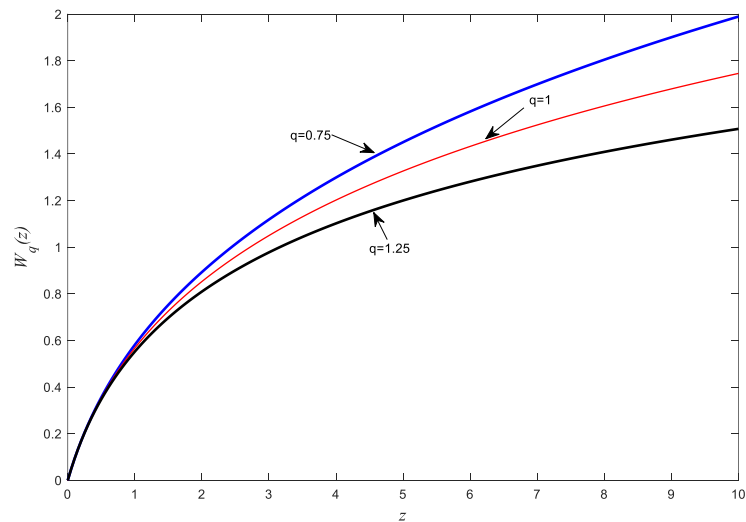
Figura 3.1 - $W_{q=3/2}$ versus z .



Fonte: (RAMOS., 2020a).

A Fig. 3.2 mostra o gráfico $W_q(z)$ versus z no intervalo $[0,10]$, para três diferentes valores de q : 0,75, 1 e 1,25.

Figura 3.2 - W_q versus z para $q = 0,75$, $q = 1$ e $q = 1,25$



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.3.1 Propriedades da Função W_q de Lambert-Tsallis

Similarmente ao caso $q = 1$, podemos obter uma série de propriedades analíticas para o caso mais geral da função W_q de Lambert-Tsallis. Entre elas está a derivada primeira para o ramo principal de W_q obtida a partir de

$$\frac{d}{dz} \left(W_q(z) e_q^{W_q(z)} \right) = \frac{d}{dz} (z) \Rightarrow \frac{dW_q(z)}{dz} = \frac{-\left((1-q)W_q(z) + 1 \right)^{\frac{q}{q-1}}}{(q-2)W_q(z) - 1}, \quad (3.32)$$

sendo de fácil verificação que no limite q tendendo a 1 obtemos a derivada primeira da função W de Lambert

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{-\left((1-q)W_q(z) + 1 \right)^{\frac{q}{q-1}}}{(q-2)W_q(z) - 1} = \frac{W(z)}{z[W(z) + 1]}. \quad (3.33)$$

Portanto, usando (3.32) tem-se que

$$\frac{dW_{q=2}(z)}{dz} = \frac{1}{(z+1)} - \frac{z}{(z+1)^2}, \quad (3.34)$$

$$\frac{dW_{q=\frac{3}{2}}^+(z)}{dz} = \frac{\left(2z + 2\sqrt{(2z+1)} + 2 \right)}{\left(z^2 \sqrt{(2z+1)} \right)} \quad (3.35)$$

$$\frac{dW_{q=0}^+(z)}{dz} = \frac{1}{\sqrt{4z+1}}. \quad (3.36)$$

Por outro lado, enquanto para a função W de Lambert tem-se

$$W(z_1) + W(z_2) = W \left(z_1 z_2 \left(\frac{W(z_2) + W(z_1)}{W(z_1)W(z_2)} \right) \right) \quad (3.37)$$

para W_q tem-se

$$W_q(z_1) +_q W_q(z_2) = W_q \left[z_1 z_2 \left(\frac{W_q(z_1) +_q W_q(z_2)}{W_q(z_1)W_q(z_2)} \right) \right]. \quad (3.38)$$

3.3.2 Cálculo Numérico da Função W_q de Lambert-Tsallis

O cálculo numérico de W_q pode ser feito usando o método de Halley, (BROWN, 1977), (ALEFELD, 1981), (SCAVO *et al.*, 1995), (GUNDERSEN, *et al.*, 2006). Nesse método, a equação $f(x) = 0$ pode ser resolvida numericamente usando

$$x(j+1) = x(j) - \frac{2f(x(j))f'(x(j))}{2[f'(x(j))]^2 - f(x(j))f''(x(j))}. \quad (3.39)$$

Usando $f(W_q) = W_q \exp_q(W_q) - z = 0$ em (3.39), o seguinte mapa calcula $W_q(z)$:

$$w_q(j+1) = w_q(j) - \frac{\left[w_q(j) e_q^{w_q(j)} - z \right]}{\left[e_q^{w_q(j)} + w_q(j) e_q^{q w_q(j)} \right] - \Delta} \quad (3.40)$$

$$\Delta = \frac{\left[w_q(j) e_q^{w_q(j)} - z \right] \left[2 e_q^{q w_q(j)} + \frac{w_q(j)}{q} e_q^{\frac{(2q-1)w_q(j)}{2-1/q}} \right]}{2 \left[e_q^{w_q(j)} + w_q(j) e_q^{q w_q(j)} \right]}. \quad (3.41)$$

Deve-se levar em consideração que a convergência do mapa (3.40) - (3.41) depende de uma boa escolha do valor inicial do algoritmo na primeira iteração.

Pode-se notar também que para $z > 0$ e $W_q(z) > 0$, a função W_q de Lambert-Tsallis pode ser calculada recursivamente. Tomando o q -logaritmo em ambos os lados (3.21) ficamos com

$$\ln_q \left[W_q(x) e_q^{W_q(x)} \right] = \ln_q(x) \Rightarrow W_q(x) = \ln_q(x) -_q \ln_q \left[W_q(x) \right]. \quad (3.42)$$

Aplicando (3.42) recursivamente, obtém-se

$$W_q(x) = \ln_q(x) -_q \ln_q \left(\ln_q(x) -_q \ln_q \left(\ln_q(x) -_q \ln_q \left(\ln_q(x) -_q \dots \right) \right) \right) \Rightarrow W_q(x) = \ln_q \frac{x}{\ln_q \frac{x}{\ln_q \dots}}. \quad (3.43)$$

3.3.3 Aplicações da Função W_q de Lambert-Tsallis

Exemplo 1:

Inicialmente, vamos considerar a distribuição q -exponencial cuja função densidade de probabilidade é dada por (PICOLI, 2009)

$$f(x) = (2-q) \lambda e_q^{-\lambda x}. \quad (3.44)$$

Se o valor de $f(x_1)$ é conhecido, por exemplo, o valor de λ pode ser determinado da seguinte maneira:

$$f(x_1) = (2-q)\lambda e_q^{-\lambda x_1} \Rightarrow -\lambda x_1 e_q^{-\lambda x_1} = \frac{-x_1 f(x_1)}{(2-q)} \Rightarrow \lambda = -\frac{W_q(-x_1 f(x_1)/(2-q))}{x_1}. \quad (3.45)$$

Se ao invés de q -exponencial a distribuição considerada é uma distribuição a q -Gaussiana (PICOLI, 2009),

$$f(x) = \frac{\sqrt{\beta}}{C_q} e_q^{-\beta x^2} \quad (3.46)$$

$$C_q = \begin{cases} 2\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right) / \left[(3-q)\sqrt{1-q}\Gamma\left(\frac{3-q}{2(1-q)}\right) \right] & \text{for } -\infty < q < 1 \\ \sqrt{\pi} & \text{for } q = 1 \\ \sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{3-q}{2(1-q)}\right) / \left[\sqrt{q-1}\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right) \right] & \text{for } 1 < q < 3 \end{cases}, \quad (3.47)$$

o valor de β e pode ser obtido a partir de $f(x_1)$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned} f(x_1) = \frac{\sqrt{\beta}}{C_q} e_q^{-\beta x_1^2} \Rightarrow C_q^2 f^2(x_1) &= \beta \left[e_q^{-\beta x_1^2} \right]^2 = \beta e_{1-(1-q)/2}^{-2\beta x_1^2} \Rightarrow \\ -2x_1^2 \beta e_{1-(1-q)/2}^{-2\beta x_1^2} &= -2C_q^2 x_1^2 f^2(x_1) \Rightarrow \beta = -\frac{W_{1-(1-q)/2}(-2C_q^2 x_1^2 f^2(x_1))}{2x_1^2}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Exemplo 2:

A função W_q também pode ser usada para encontrar os pontos fixos de alguns mapas não lineares que empregam a função q -exponencial. Por exemplo, seja o seguinte mapa não linear com coeficientes constantes e usando a função q -exponencial:

$$x_{n+1} = (1-\alpha)x_n + \frac{P}{e_q^{\sigma x_n}}. \quad (3.49)$$

O ponto fixo requer $x_{n+1} = x_n = x$. Portanto, o ponto fixo pode ser encontrado da seguinte forma,

$$x = (1 - \alpha)x + \frac{p}{e_q^{\sigma x}} \Rightarrow \sigma x e_q^{\sigma x} = \frac{\sigma p}{\alpha} \Rightarrow x = \frac{W_q(\sigma p / \alpha)}{\sigma}. \quad (3.50)$$

Exemplo 3:

A função W_q também aparece na solução de alguns polinômios em (RAMOS, R. V.2020a) Por exemplo, seja o polinômio de grau 3 na forma deprimida: $x^3 + ax + b = 0$. Suas raízes são dadas por

$$x = \sqrt{\frac{a}{2} W_{1/2} \left(\frac{2b^2}{a^3} \right)}. \quad (3.51)$$

Como exemplos, considere-se inicialmente os polinômios $P_1(x)$ com $a = 1$ e $b = -1/2^{1/2}$ e $P_2(x)$ com $a = 1$ e $b = 1/2^{1/2}$. Nesse caso, suas raízes reais são, respectivamente, $[W_{1/2}(1)/2]^{1/2} = 0.5451$ e $-[W_{1/2}(1)/2]^{1/2} = -0.5451$. As raízes complexas $(\pm(0.2726 + 1.1058i))$ e $(\pm(0.2726 - 1.1058i))$ estão nos ramos complexos de $W_{1/2}(z)$ e podem ser encontradas numericamente.

Seja, agora, o polinômio $P(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$ que, na forma deprimida fica da forma $Q(y) = y^3 - (19/3)y + (56/27)$, com $y = x - 2/3$. As soluções de $Q(y) = 0$ usando (3.51) são $y_1 = \sqrt{-(19/6)W_{1/2}^+(-0,033867)} = 1/3$, $y_2 = \sqrt{-(19/6)W_{1/2}^-(-0,033867)} = 7/3$. Das relações de Girard tem-se que $y_1 + y_2 + y_3 = 0$ (pois o coeficiente de y^2 é zero), portanto $y_3 = -8/3$ que é obtido através de $y_3 = -\sqrt{-(19/6)W_{1/2}^+(0,033867e^{i\pi})}$. Nesta última raiz o valor inicial utilizado no mapa (3.40)-(3.41) foi $w_q(0) = -3/2$.

Exemplo 4:

O logaritmo de Kaniadakis é dado por

$$y = \ln_{\kappa}(x) = \frac{x^{\kappa} - x^{-\kappa}}{2\kappa}, \quad (3.52)$$

sendo κ o parâmetro de generalização: $\ln_{\kappa=0}(x) = \ln(x)$. Se o valor de $\ln_{\kappa}(x)$ é conhecido, então o valor do argumento x pode ser encontrado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x^{\kappa} - x^{-\kappa} &= x^{\kappa}(1 - x^{-2\kappa}) = x^{\kappa}e_0^{-x^{-2\kappa}} = 2\kappa y \Rightarrow [x^{\kappa}e_0^{-x^{-2\kappa}}]^{-2} = [2\kappa y]^{-2} \Rightarrow \\ 2x^{-2\kappa}e_{3/2}^{2x^{-2\kappa}} &= 2[2\kappa y]^{-2} \Rightarrow 2x^{-2\kappa} = W_{3/2}(2[2\kappa y]^{-2}) \Rightarrow x = \left[\frac{1}{2} W_{3/2} \left(\frac{1}{2\kappa^2 y^2} \right) \right]^{\frac{1}{2\kappa}}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Exemplo 5:

A função inversa da função cosseno hiperbólico pode ser escrita usando W_q :

$$\begin{aligned} \cosh(x) = y &\Rightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} = y \Rightarrow e^x(1 + e^{-2x}) = e^x e_0^{e^{-2x}} = 2y \Rightarrow e^{-2x} [e_0^{e^{-2x}}]^{-2} = \frac{1}{4y^2} \Rightarrow \\ -2e^{-2x} e_{3/2}^{-2e^{-2x}} &= -\frac{1}{2y^2} \Rightarrow -2e^{-2x} = W_{3/2} \left[-\frac{1}{2y^2} \right] \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \ln \left\{ -\frac{1}{2} W_{3/2} \left[-\frac{1}{2y^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Exemplo 6:

A dinâmica de um corpo de massa m inicialmente em repouso, em uma altura d , e que cai sob ação da gravidade, sofrendo uma resistência do ar que é proporcional ao quadrado da velocidade, satisfaz à seguinte equação diferencial:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2 \quad (3.55a)$$

$$\frac{dx}{dt} = v. \quad (3.55b)$$

Em (3.55) g é a aceleração da gravidade, m é a massa, k é a constante que leva em consideração as propriedades aerodinâmicas do corpo, x é a posição e v é a velocidade. A solução para a posição $x(t)$ encontrada na literatura é dada por (GREINER, 2006)

$$x(t) = d - \frac{m}{k} \ln \left[\cosh \left(\sqrt{\frac{kg}{m}} t \right) \right]. \quad (3.56)$$

Usando eq. (3.54), tem-se que o tempo t_{fim} para a posição x_{fim} ser alcançada é dado por

$$t_{fim} = -\sqrt{\frac{m}{gk}} \frac{1}{2} \ln \left\{ -\frac{1}{2} W_{3/2} \left[-\frac{1}{2e^{\frac{2k}{m}(d-x_{fim})}} \right] \right\}. \quad (3.57)$$

Exemplo 7:

A função W de Lambert tem sido usada na análise do alcance de projeteis considerando que a resistência do ar depende de forma linear da velocidade. Por exemplo, uma análise do movimento de projeteis é feita em (HU *et al.*, 2002), no qual usando a função de W Lambert é verificado que há relação direta ente a altura do ponto de lançamento e o alcance. Nos trabalhos de (MORALES, 2005) tem-se uma série de resultados numéricos a partir de expressões analíticas obtidas em termos da função W de Lambert para o alcance e o melhor ângulo de um projétil com arrasto linear. Em (WARBURTON *et al.*, 2004), (PACKEL *et al.*, 2004), (STEWART *et al.*, 2006), tem-se a utilização da função W de Lambert para estudo e resolução de problemas no movimento de projeteis com a resistência do ar. E ainda em (ERLICHSON, 1983), tem-se o estudo do problema do movimento de projeteis em situações com e sem a resistência do ar com o uso de simulações computacionais usando o método de Runge-Kutta.

O conjunto de equações diferenciais que modelam o movimento de um projétil em um meio resistivo (a resistência é proporcional à velocidade via constante k) são

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + k \frac{dy}{dt} + g = 0 \quad (3.58)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} = 0. \quad (3.59)$$

As soluções das Eqs. (3.58) e (3.59) são, respectivamente (PACKEL *et al.*, 2004),

$$y(t) = -\frac{tg}{k} - \alpha + \alpha e^{-kt} \quad (3.60)$$

$$x(t) = \frac{1}{k} \left[v \cos(\theta) (1 - e^{-kt}) \right] \quad (3.61)$$

$$\alpha = \frac{g}{k^2} \left(-1 - \frac{kv \sin(\theta)}{g} \right). \quad (3.62)$$

Nas equações (3.60) -(3.62) v é a velocidade no tempo $t = 0$ e θ é o angulo de elevação. O alcance é o valor de $x(t = t_{fim})$ e t_{fim} é obtido de $y(t = t_{fim}) = 0$. Portanto, usando (3.60) obtém-se ($k^2 \alpha / g > 1$) (PACKEL *et al.*, 2004)

$$\begin{aligned} -\frac{tg}{k} - \alpha + \alpha e^{-kt} &= \left(-\frac{tg}{k} - \alpha \right) e^{kt/2} + \alpha e^{-kt/2} \Rightarrow \left(-\frac{tg}{k} - \alpha \right) e^{kt/2} = -\alpha e^{-kt/2} \Rightarrow \left(-\frac{tg}{k} - \alpha \right) e^{kt} = -\alpha \\ \left(kt + \frac{\alpha k^2}{g} \right) e^{kt} e^{\frac{\alpha k^2}{g}} &= \frac{k^2 \alpha}{g} e^{\frac{\alpha k^2}{g}} \Rightarrow \left(kt + \frac{\alpha k^2}{g} \right) e^{kt + \frac{\alpha k^2}{g}} = \frac{k^2 \alpha}{g} e^{\frac{\alpha k^2}{g}} \Rightarrow kt + \frac{\alpha k^2}{g} = W \left(\frac{k^2 \alpha}{g} e^{\frac{\alpha k^2}{g}} \right) \Rightarrow \\ t_{fim} &= -\frac{k\alpha}{g} + \frac{1}{k} W \left(\frac{k^2 \alpha}{g} \exp \left(\frac{k^2 \alpha}{g} \right) \right), \end{aligned} \quad (3.63)$$

e o alcance é obtido usando (3.63) em (3.61).

Agora, vamos supor que o movimento vertical seja governado pela seguinte equação diferencial não linear

$$\frac{\alpha e^{-kt}}{q} \frac{d^2y}{dt^2} - \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 - 2 \frac{g}{k} \frac{dy}{dt} - \frac{g^2}{k^2} = 0, \quad (3.64)$$

cuja solução é

$$y(t) = -t \frac{g}{k} - \alpha + \alpha e_q^{-kt}, \quad (3.65)$$

como é mostrado no Apêndice III. Para determinar t_{fim} tal que $y(t_{fim}) = 0$, fazemos

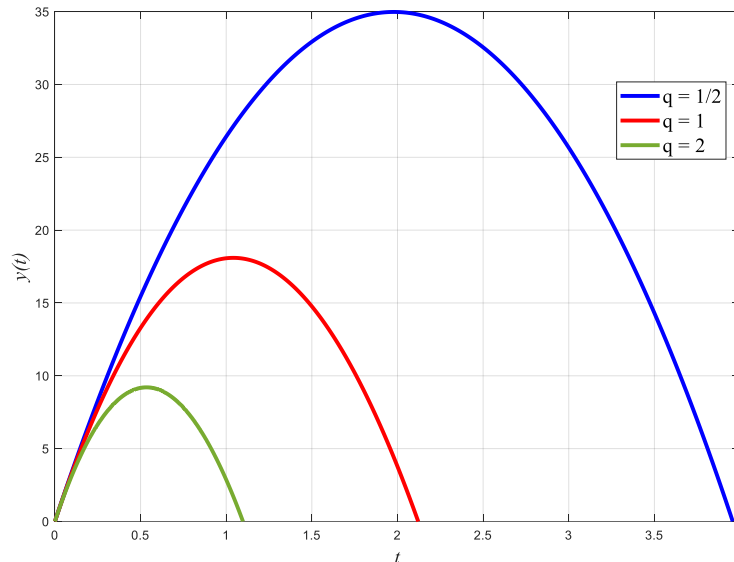
$$0 = -t \frac{g}{k} - \alpha + \alpha e^{-kt} \Rightarrow -k t e^{-kt} = -t^2 \frac{g}{\alpha} - kt \Rightarrow t = -\frac{1}{k} W_q \left(-t^2 \frac{g}{\alpha} - kt \right). \quad (3.66)$$

Como não é possível isolar a variável t em (3.66), pode-se tentar encontrar a solução de (3.66) encontrando numericamente o ponto fixo do mapa

$$t_{n+1} = -\frac{1}{k} W_q \left(-t_n^2 \frac{g}{\alpha} - kt_n \right). \quad (3.67)$$

A Fig. 3.3 mostra (em um exemplo sem unidade) o gráfico da eq. (3.65) ($k = 0.1$, $g = 32.2$, $v = 50$ e $\theta = \pi/4$) para três diferentes valores de q (0.5, 1, 2). Os valores de t_{fim} obtidos usando a eq. (3.67) são: $q = 0.5 \rightarrow t_{fim} = 3.957$, $q = 1 \rightarrow t_{fim} = 2.121$, $q = 2 \rightarrow t_{fim} = 1.097$. Todos esses valores estão em bom acordo com os valores de alcance mostrados no gráfico da Fig. 3.3.

Figura 3.3 - $y(t)$ versus t para três valores diferentes de q (1/2, 1, 2).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Por exemplo, para $q = 2$ o ponto fixo $t_{n+1} = t_n = t_{fim}$ é dado por $t_{fim} = -(k\alpha/g + 1/k) = 1.097$.

Exemplo 8:

Seja uma espira de raio R pela qual flui uma corrente I . O campo magnético em um ponto axial a uma distância z do centro da espira é dado por

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{k}. \quad (3.68)$$

Em (3.68) μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo. O valor de R para que o valor do módulo do campo na distância z seja igual a B , é dado por

$$\begin{aligned} |B| &= \frac{\mu_0 I R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}} \Rightarrow \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{2|B|}{\mu_0 I} \Rightarrow \frac{R^2}{\left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{3/2}} = \frac{2|B|z^3}{\mu_0 I} \Rightarrow R^2 \left(e_0^{\frac{R^2}{z^2}}\right)^{-3/2} = \frac{2|B|z^3}{\mu_0 I} \Rightarrow \\ R^2 e^{\frac{3R^2}{2z^2}} &= \frac{2|B|z^3}{\mu_0 I} \Rightarrow -\frac{3R^2}{2z^2} e^{\frac{3R^2}{2z^2}} = -\frac{3|B|z}{\mu_0 I} \Rightarrow -\frac{3R^2}{2z^2} = W_{5/3}\left(-\frac{3|B|z}{\mu_0 I}\right) \Rightarrow R = \sqrt{-\frac{2z^2}{3} W_{5/3}\left(-\frac{3|B|z}{\mu_0 I}\right)}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

que é válido no intervalo $0 \leq Bz/(\mu_0 I) \leq 0.1925$.

Exemplo 9:

Uma cavidade óptica pode ser construída com dois espelhos separados por um distancia d . Os espelhos possuem coeficiente de refletividade dados por R_1 e R_2 . Se o índice de refração do meio entre os espelhos é n e o comprimento de onda da radiação utilizada é dado por λ , então o fator de qualidade dessa cavidade, que é uma medida de seletividade da ressonância, é dada por

$$Q = \frac{2\pi n d}{\lambda} \frac{(R_1 R_2)^{1/4}}{1 - (R_1 R_2)^{1/2}} \quad (3.70)$$

Se o valor de Q for estabelecido a priori, o produto das refletividades é dado por

$$R_1 R_2 = \frac{1}{4} W_{3/2}^2 \left(\frac{Q^2 \lambda^2}{2\pi^2 n^2 d^2} \right). \quad (3.71)$$

Como discutido anteriormente, $\lim_{z \rightarrow \infty} W_{3/2}^+(z) = \mathbf{2}$, portanto, $\lim_{Q \rightarrow \infty} R_1 R_2 = \mathbf{1}$, como esperado.

4 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS

4.1 Conclusões

1. A presente tese introduziu uma nova função matemática, chamada de função W_q de Lambert-Tsallis, que torna possível ou facilita a obtenção de soluções analíticas para problemas que sejam descritos por uma lei de potência. Desta forma, a função W_q encontra aplicações em diferentes áreas da matemática, física e engenharia.
2. Um algoritmo numérico para o cálculo das soluções reais da função W_q foi apresentado.

4.2 Perspectivas de Trabalhos Futuros

1. Aprofundar os estudos nos ramos complexos da função de Lambert-Tsallis.
2. Empregar a função de Lambert-Tsallis na resolução analítica de problemas de teoria quântica e clássica da informação.
3. Pesquisar mapas não lineares que utilizam a função q -exponencial e tentar relacionar parâmetros da dinâmica com a função W_q .

REFERÊNCIAS

ALEFELD, G. On the convergence of Halley's Method. **The American Mathematical Monthly**, v. 88, n. 7, p. 530-536, 1981.

BLONDEAU, F. C.; MONIR, A. Numerical evaluation of the Lambert W function and application to generation of generalized Gaussian noise with exponent 1/2. **IEEE transactions on signal processing**, v. 50, n. 9, p. 2160-2165, 2002.

BORGES, E. P. On a q-generalization of circular and hyperbolic functions. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, v. 31, n. 23, p. 5281, 1998.

BORGES, Ernesto P. A possible deformed algebra and calculus inspired in nonextensive thermostatics. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 340, n. 1-3, p. 95-101, 2004.

BORWEIN, J. M.; CORLESS, Robert M. Emerging tools for experimental mathematics. **The American mathematical monthly**, v. 106, n. 10, p. 889-909, 1999.

BRING, E. S.; SOMMELIUS, S. G. Meletemata quædam mathematica circa transformationem æquationem algebraicarum. **Typis Berlingianis**, 1786.

BRING, E. S., **Quart. J. Math**, 6 (1864).

BROWN JR, G. H. On Halley's variation of Newton's method. **The American Mathematical Monthly**, v. 84, n. 9, p. 726-728, 1977.

CAILLOL, J. M. Some applications of the Lambert W function to classical statistical mechanics. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, v. 36, n. 42, p. 10431, 2003.

CARATHÉODORY, C. **Theory of functions of a complex variable**, Chelsea Pub. Company, New York, 1954.

CHAPEAU-BLONDEAU, F.; MONIR, A. Numerical evaluation of the Lambert W function and application to generation of generalized Gaussian noise with exponent 1/2. **IEEE transactions on signal processing**, v. 50, n. 9, p. 2160-2165, 2002.

CHOW, T. Y. What is a closed-Form Number? **The American mathematical monthly**, v. 106, n. 5, p. 440-448, 1999.

CORLESS, R. M.; GONNET, G. H.; HARE, D. E.; JEFFREY, D. J.; KNUTH, D. E. On the Lambert W function. **Advances in Computational mathematics**, v. 5, p. 329 – 359, 1996.

CRANMER, Steven R. New views of the solar wind with the Lambert W function. **American Journal of Physics**, v. 72, n. 11, p. 1397-1403, 2004.

CURADO, E. M. F.; TSALLIS, C. Generalized statistical mechanics: connection with thermodynamics. **J. Phys. A**, v. 24, n. CBPF-NF-90-041, p. 3187, 1990.

DA SILVA J. L. M., MENDES F. V., RAMOS R. V., Radial basis function network using Lambert–Tsallis W_q function, **Physica A** 534, 122168/1-9,2019.

DA SILVA, J. L. E.; DA SILVA, G. B.; RAMOS, R. V. The Lambert-Kaniadakis W_κ function. **Physics Letters A**, v. 384, n. 8, p. 126175, 2020a.

DA SILVA, J. L. E.; DA SILVA, G. B.; RAMOS, R. V. **Applications of Lambert-Tsallis and Lambert-Kaniadakis Functions in Differential and Difference Equations with Deformed Exponential Decay**. 2020b. Disponível em: < <https://arxiv.org/abs/2001.11955> >.

DA SILVA, J. L. E.; RAMOS, R. V. **Transcendental Numbers and the Lambert-Tsallis Function**.2020. Disponível em: < <https://arxiv.org/abs/2004.07101> >.

DE ANDRADE, J. S.; NOBREGA, K. Z.; RAMOS, R. V. Analytical Solution of the Current-Voltage Characteristics of Circuits with Power-Law Dependence of the Current on the Applied Voltage Using the Lambert-Tsallis W_q Function. **IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs**, 2021.

DENCE, T. P. **A brief look into the Lambert W function**. 2013. Disponível em: < https://www.scirp.org/html/5-7401300_32486.htm?pagespeed=noscript >.

EULER, L. De serie Lambertine plurimisq̄ue eius insignibus proprietatibus. **Acta Academiae scientiarum imperialis petropolitanae**, p. 29-51, 1783.

ERLICHSON, H. Maximum projectile range with drag and lift, with particular application to golf. **American Journal of Physics**, v. 51, n. 4, p. 357-362, 1983.

FRITSCH, F. N.; SHAFER, R. E.; CROWLEY, W. P. Algorithm 443: Solution of the transcendental equation $We^w = x$. **Comm. ACM**, v. 16, p. 123-124, 1973.

GREINER, W. Classical mechanics: point particles and relativity. **Springer Science & Business Media**, 2006.

GUNDERSEN, G.; STEIHAUG, T. Sparsity in higher order methods in optimization. **Reports in Informatics**, v. 327, 2006.

HARLEY, R. **A Contribution to the History of the Problem of the Reduction of the General Equation of the Fifth Degree to a Trinomial Form**. Parker, 1863.

HU, H.; ZHAO, Y.P.; GUO, Y.J.; ZHENG, M.N. **Análise do movimento linear do projétil resistido usando a função Lambert W** Acta Mech, 223, pp. 441 – 447, 2012.

JENN, D. C. Applications of the Lambert W function in Electromagnetics. **IEEE Antennas and Propagation Magazine**, v. 44, n. 3, p. 139-142, 2002.

JERRARD, G. B. LXIV. On the possibility of solving equations of any degree however elevated. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, v. 3, n. 20, p. 457-460, 1852.

JERRARD, G. B; An essay on the resolution of equations, **Taylor and Francis**, 1859.

KANIADAKIS, G. Statistical mechanics in the context of special relativity. **Physical review E**, v. 66, p. 056-125, 2002.

KLEIN, F. **The Icosahedron: and the solution of equations of the fifth degree**. Dover Publications, 1956.

KLUSÁČEK D, RUDOVÁ H, BARAGLIA R., PASQUALI M., CAPNINI G. Comparison of multi-criteria scheduling techniques. **In: Grid Computing**. Springer, Boston, MA, 2008. p. 173-184.

LAMBERT, J. H. Observationes variae in mathesin puram. **Acta Helvetica**, v. 3, n. 1, p. 128-168, 1758.

EULER, Leonhard. De serie Lambertine plurimisque eius insignibus proprietatibus. **Acta Academiae scientiarum imperialis petropolitanae**, p. 29-51, 1783.

MORALES, D.A. Exact expressions for the range and the optimal angle of a projectile with linear drag. **Canadian Journal of Physics**, v. 83, n. 1, p. 67-83, 2005.

NIVANEN, Laurent; LE MEHAUTE, Alain; WANG, Qiuping A. Generalized algebra within a nonextensive statistics. **Reports on Mathematical Physics**, v. 52, n. 3, p. 437-444, 2003.

PACKEL, E. W.; YUEN, D. S. Projectile motion with resistance and the Lambert W function. **The College Mathematics Journal**, v. 35, n. 5, p. 337-350, 2004.

PICOLI, J. R. S.; MENDES, R.S.; MALACARNE, L.C.; SANTOS, R. P. B. q-distributions in complex systems: A brief review. **Brazilian Journal of Physics**, v. 39, n. 2A, p. 468-474, 2009.

PUDASAINI, S. P. Some exact solutions for debris and avalanche flows. **Physics of Fluids**, v. 23, n. 4, p. 043301, 2011.

RAMOS, R. V., The Rq, Q function and the q-diode, **Physica A**, 556, 124851 2020. DOI: 10.1016/j.physa. 2020.124851.

RAMOS, R. V. **Lambert-Tsallis Function and Cubic Equation**. Researchgate. net, 2020a. Disponível em: <<https://www.researchgate.net/publication/339274107>> .

RAMOS, R. V. **New relations between Prime Counting and Logarithmic Integral Functions using the generalized Lambert-Tsallis Function**. Researchgate. net, 2020b. Disponível em: <<https://www.researchgate.net/publication/343450836>> .

RAMOS, R. V. **Using the Lambert-Tsallis Function in the Solution of Basic Relativistic Problems**. Researchgate. net, 2020c. Disponível em: <<https://www.researchgate.net/publication/339003658>> .

RAMOS, R. V. **Analytical Solutions for the Roots of some Quintic Functions Using the Lambert-Tsallis Wq Function**. Researchgate. net, 2021. Disponível em: <<https://www.researchgate.net/publication/357756306>> .

RAMOS, R. V., DA SILVA, J. L. E.; Calculation of the disentropy of the Wigner function using the Lambert–Tsallis W q function with non-integer q values. **Journal of the Optical Society of America B**, v. 37, n. 7, p. 2035-2040, 2020.

SCAVO, T. R.; THOO, J. B. On the geometry of Halley's method. **The American mathematical monthly**, v. 102, n. 5, p. 417-426, 1995.

SCHNELL, S.; MENDOZA, C. Closed form solution for time-dependent enzyme kinetics. **Journal of theoretical Biology**, v. 187, n. 2, p. 207-212, 1997.

STEINVALL, O. Laser system range calculations and the Lambert W function. **Applied optics**, v. 48, n. 4, p. B1-B7, 2009

STEWART, S. M. An analytic approach to projectile motion in a linear resisting medium. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 37, n. 4, p. 411-431, 2006.

TSALLIS, C. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. **Journal of statistical physics**, v. 52, n. 1, p. 479-487, 1988.

TSALLIS, C.; MENDES, R.S.; PLASTINO, Anel R. The role of constraints within generalized nonextensive statistics. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 261, n. 3-4, p. 534-554, 1998.

YAMANO, T. Some properties of q-logarithm and q-exponential functions in Tsallis statistics. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 305, n. 3-4, p. 486-496, 2002.

UMAROV, S. C.; TSALLIS, C. STEINBERG, S. On a q -Central Limit Theorem Consistent with Nonextensive Statistical Mechanics, **Milan J. Math. Birkhauser Verlag**. 76, pp. 307–328, 2008.

VALLURI, S. R.; JEFREY, D. J.; CORLESS, R. M. Some applications of the Lambert W function to Physics, **Canadian Journal of Physics**, v. 78, n° 9, p. 823-831, 2000.

VEBERIČ, D., Lambert W function for applications in physics. **Computer Physics Communications**, v. 183, n. 12, p. 2622-2628, 2012.

VEBERIČ, D, **Having fun with Lambert $W(x)$ function**, GAP-2009-114. Disponível em: <
<http://arxiv.org/abs/1003.1628>>.

WARBURTON, R. D. H.; WANG, J. Analysis of asymptotic projectile motion with air resistance using the Lambert W function. **American Journal of Physics**, v. 72, n. 11, p. 1404-1407, 2004.

WEISSTEIN, Eric W. CRC Concise encyclopedia of mathematics. **CRC press**, 2002.

YI, S.; NELSON, P. W.; ULSOY, A. G. Chatter stability analysis using the matrix lambert function and bifurcation analysis. **In: International Manufacturing Science and Engineering Conference**. 2006. p. 1103-1111.

YI, S.; NELSON, P. W.; ULSOY, A. G. Delay differential equations via the matrix Lambert W function and bifurcation analysis: application to machine tool chatter. **Mathematical Biosciences & Engineering**, v. 4, n. 2, p. 355, 2007

APÊNDICE A – SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DO PROJÉTIL COM EXPQ

Demonstração de que equação (3.63) tem como solução (3.64)

$$\frac{\alpha e^{-kt}}{q} \frac{d^2 y}{dt^2} - \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 - 2 \frac{g}{k} \frac{dy}{dt} - \frac{g^2}{k^2} = 0, \quad (\text{C.1})$$

$$y(t) = -t \frac{g}{k} - \alpha + \alpha e_q^{-kt}. \quad (\text{C.2})$$

Sabendo que: $y(t) = -t \frac{g}{k} - \alpha + \alpha e_q^{-kt}$,

Para derivada primeira

$$\frac{d}{dt} e_q^{f(t)} = \frac{(e_q^{f(t)})^q}{df(t)/dt}$$

Então

$$y'(t) = -\frac{g}{k} + \alpha \frac{[(e_q^{-kt})^q]}{-k} \Rightarrow y'(t) = -\frac{g}{k} - \alpha \frac{[(e_q^{-kt})^q]}{k}$$

Para derivada segunda da exponencia de q :

$$\frac{d^2}{dt^2} e_q^{f(t)} = \frac{d(e_q^{f(t)})^q}{dt} \cdot \frac{1}{df(t)/dt} + \frac{d}{dt} \frac{1}{df(t)/dt} \cdot (e_q^{f(t)})^q$$

$$\frac{d^2}{dt^2} e_q^{f(t)} = \frac{d(e_q^{f(t)})^q}{dt} \cdot \frac{1}{df(t)/dt} + \frac{d}{dt} \left[\frac{(e_q^{f(t)})^q}{f(t)} \right]$$

Como:

$$\frac{d}{dt}(f/g) = \frac{\frac{d(f)}{dt} \cdot (g) - \frac{d(g)}{dt} \cdot (f)}{(g)^2}$$

Logo:

$$\frac{d^2}{dt^2} e_q^{f(t)} = \frac{d(e_q^{f(t)})^q}{dt} \cdot \frac{1}{df(t)/dt} + \left[\frac{\frac{d}{dt}(e_q^{f(t)}) f(t) - (e_q^{f(t)})^q \cdot \frac{df(t)}{dt}}{f(t)^2} \right]$$

$$\frac{d^2}{dt^2} e_q^{f(t)} = \frac{d(e_q^{f(t)})^q}{dt} \cdot \frac{1}{df(t)/dt} + \left[\frac{\frac{d}{dt}(e_q^{f(t)}) f(t) - (e_q^{f(t)})^q \cdot \frac{df(t)}{dt}}{[f(t)]^2} \right]$$

$$\frac{d^2}{dt^2} e_q^{f(t)} = (e_q^{-kt})^q \cdot \left(\frac{1}{-k} \right) + \left[\frac{(e_q^{-kt})^q \cdot (-kt) - t \cdot (e_q^{-kt})^q}{(-kt)^2} \right]$$

$$\frac{d^2}{dt^2} e_q^{f(t)} = -\frac{(e_q^{-kt})^q}{k} + \left[\frac{(e_q^{-kt})^q \cdot (-kt) - t \cdot (e_q^{-kt})^q}{(-kt)^2} \right]$$

$$\frac{d^2}{dt^2} e_q^{f(t)} = -\frac{(e_q^{-kt})^q}{k} + \frac{(e_q^{-kt})^q \cdot (-kt)}{(-kt)^2} - \frac{t \cdot (e_q^{-kt})^q}{(-kt)^2}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} e_q^{f(t)} = -\frac{(e_q^{-kt})^q}{k} + \frac{(e_q^{-kt})^q}{(-kt)} - \frac{t \cdot (e_q^{-kt})^q}{(-kt)^2}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} e_q^{f(t)} = -\frac{(e_q^{-kt})^q}{k} - \frac{(e_q^{-kt})^q}{(kt)} - \frac{t \cdot (e_q^{-kt})^q}{k^2 t^2}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} e_q^{f(t)} = -\frac{(e_q^{-kt})^q}{k} - \frac{(e_q^{-kt})^q}{(kt)} - \frac{(e_q^{-kt})^q}{k^2 t}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} e_q^{f(t)} = \frac{(e_q^{-kt})^q}{k} \left[-1 - \frac{1}{t} - \frac{1}{kt} \right]$$

Então teremos como derivada primeira e segunda as equações respectivamente:

$$y'(t) = -\frac{g}{k} - \alpha \frac{[(e_q^{-kt})^q]}{k}$$

$$y''(t) = -\alpha (e_q^{-kt})^q \left[-1 - \frac{1}{t} - \frac{1}{kt} \right] \Rightarrow y''(t) = -\alpha \left\{ \frac{(e_q^{-kt})^q \left[-1 - \frac{1}{t} - \frac{1}{kt} \right]}{k} \right\}$$

$$\Rightarrow y''(t) = -\alpha \left\{ \frac{(e_q^{-kt})^q \left[-1 - \frac{1}{t} - \frac{1}{kt} \right]}{k} \cdot k \right\} \Rightarrow y''(t) = -\alpha \left\{ (e_q^{-kt})^q \left[-1 - \frac{1}{t} - \frac{1}{kt} \right] \right\}$$

$$\Rightarrow y''(t) = -\alpha (e_q^{-kt})^q \left[-1 - \frac{1}{t} - \frac{1}{kt} \right].$$

Como (C.1) é:

$$\frac{\alpha e_q^{-kt}}{q} \frac{d^2 y}{dt^2} - \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 - 2 \frac{g}{k} \frac{dy}{dt} - \frac{g^2}{k^2} = 0.$$

Colocando (C.3) e (C.4) em (C.1) teremos

$$\frac{\alpha e_q^{-kt}}{q} \left(-\alpha (e_q^{-kt})^q \left[-1 - \frac{1}{t} - \frac{1}{kt} \right] \right) - \left(-\frac{g}{k} - \alpha \frac{[(e_q^{-kt})^q]}{k} \right)^2 - 2 \frac{g}{k} \left(-\frac{g}{k} - \alpha \frac{[(e_q^{-kt})^q]}{k} \right) - \frac{g^2}{k^2} = 0$$

$$\frac{\alpha e_q^{-kt}}{q} \left(-\alpha (e_q^{-kt})^q \left[-1 - \frac{1}{t} - \frac{1}{kt} \right] \right) - \left(-\frac{g}{k} - \alpha \frac{[(e_q^{-kt})^q]}{k} \right)^2 - 2 \frac{g}{k} \left(-\frac{g}{k} - \alpha \frac{[(e_q^{-kt})^q]}{k} \right) - \frac{g^2}{k^2} = 0$$

$$\frac{\alpha e_q^{-kt}}{q} \left(-\alpha (e_q^{-kt})^q \left[-1 - \frac{1}{t} - \frac{1}{kt} \right] \right) - \left(-\frac{g}{k} - \alpha \frac{[(e_q^{-kt})^q]}{k} \right)^2 = 2 \frac{g}{k} \left(-\frac{g}{k} - \alpha \frac{[(e_q^{-kt})^q]}{k} \right) + \frac{g^2}{k^2}$$

$$\frac{\alpha e_q^{-kt}}{q} \left(-\alpha (e_q^{-kt})^q \left[-1 - \frac{1}{t} - \frac{1}{kt} \right] \right) = \left(-\frac{g}{k} - \alpha \frac{[(e_q^{-kt})^q]}{k} \right)^2 + 2 \frac{g}{k} \left(-\frac{g}{k} - \alpha \frac{[(e_q^{-kt})^q]}{k} \right) + \frac{g^2}{k^2}$$

$$\Rightarrow \alpha \frac{k^2 e_q^{-kt}}{q} \left(\frac{kt+k+1}{kt} \right) - \alpha (e_q^{-kt})^q + 4g = 0$$

$$\Rightarrow \alpha \frac{k e_q^{-kt}}{q} \frac{1}{t} (kt+k+1) - \alpha (e_q^{-kt})^q + 4g = 0$$

$$\Rightarrow \frac{k e_q^{-kt}}{q} \frac{1}{t} (kt+k+1) = (e_q^{-kt})^q - \frac{4g}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{k^2 e_q^{-kt}}{q} + \frac{k^2 e_q^{-kt}}{q} \frac{1}{t} + \frac{k e_q^{-kt}}{q} \frac{1}{t} = (e_q^{-kt})^q - \frac{4g}{\alpha}$$

Usando artifícios matemáticos chegamos à solução:

$$y(t) = -t \frac{g}{k} - \alpha + \alpha e_q^{-kt}.$$

APÊNDICE B – ARTIGO DECORRENTE DA TESE

- 1) SILVA, G. B.; RAMOS, R. V. The Lambert-Tsallis W_q function, **Physica A**, v. 525, p. 164-170, 2019.

Physica A 525 (2019) 164–170



Contents lists available at ScienceDirect

Physica A

journal homepage: www.elsevier.com/locate/physa



The Lambert–Tsallis W_q function

G.B. da Silva, R.V. Ramos*

Lab. of Quantum Information Technology, Department of Teleinformatic Engineering – Federal University of Ceara - DETI/UFC, C.P. 6007 – Campus do Pici, 60455-970 Fortaleza-Ce, Brazil



HIGHLIGHTS

- Lambert–Tsallis W_q function.
- Disentropy.
- Disentanglement of $C^2 \otimes C^2$ and pure $C^2 \otimes C^2 \otimes C^2$ states.

ARTICLE INFO

Article history:
Received 26 January 2019
Received in revised form 15 March 2019
Available online 24 March 2019

Keywords:
Lambert W function
 q -exponential
Entanglement

ABSTRACT

In the present work, we introduce the Lambert–Tsallis W_q function. It is a generalization of the Lambert W function, that solves the equation $W_q(z) \exp_q(W_q(z)) = z$, where $\exp_q(z)$ is the q -exponential used by Tsallis in nonextensive statistical mechanics. Here, we show some analytical results and its numerical calculation. We also introduce the disentropy, a function based on W_q that plays the opposite role of the entropy. At last, we use the disentropy for calculation of the disentanglement of two-qubit states.

© 2019 Elsevier B.V. All rights reserved.