

Modelagem Dinâmica e Simulação de um Controlador PID e LQR para um Manipulador Cilíndrico

Josias G. Batista* Jonatha R. Costa** Darielson A. Souza*
Lucas V. O. Filgueiras* José N. N. Júnior*
Antônio B. S. Júnior** Laurinda L. N. Reis*

* Grupo de Pesquisa em Automação, Controle e Robótica -
Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Ceará
- UFC, Campus do Pici - Fortaleza, CE, Brasil, (e-mail:
josiasgb@dee.ufc.br, darielson@dee.ufc.br, lucas.filgueiras@dee.ufc.br).

** Instituto Federal do Ceará - IFCE Campus Maracanaú,
Maracanaú-CE (e-mail: jonatha.costa@ifce.edu.br)

Abstract: The use of industrial robots has grown over the years making production systems increasingly efficient, this requires the need for efficient controllers to control these robots, in addition to more accurate models. In this work the modeling of direct kinematics, differential kinematics (Jacobian) and dynamics of a cylindrical manipulator RPP (Rotational-Prismatic-Prismatic) are presented. As a result, a comparison of the performance of a PID (Proportional-Integral-Derivative) controller, in parallel and interactive form, and the LQR controller (Linear Quadratic Regulator) applied to the dynamic, uncoupled model, where independent torque control is performed, of each joint of the manipulator.

Resumo: A utilização de robôs industriais tem crescido ao longo do anos tornando os sistemas de produção cada vez mais eficientes, isso exige a necessidade de controladores eficientes para a realização do controle desses robôs, além de modelos mais precisos. Neste trabalho são apresentadas as modelagens da: cinemática direta, cinemática diferencial (Jacobiano) e dinâmica de um manipulador cilíndrico RPP (Rotacional-Prismático-Prismático). Como resultado é apresentada a comparação do desempenho de um controlador PID (Proporcional-Integral-Derivativo), na forma paralela e interativa e do controlador LQR (*Linear Quadratic Regulator*) aplicados ao modelo dinâmico, desacoplado, onde é realizado o controle de torque, independente, de cada junta do manipulador.

Keywords: PID Controller; LQR Controller; Robotics; Cylindrical Manipulator; Dynamic Model

Palavras-chaves: Controlador PID; Controlador LQR; Robótica; Manipulador Cilíndrico; Modelo Dinâmico.

1. INTRODUÇÃO

No intuito de suprir a sempre crescente atividade produtiva mundial, as indústrias dos mais diversos setores têm encontrado na modernização e na automação de seu chão de fábrica importantes aliados e, em especial, têm cada vez mais contado com a utilização de robôs na realização de tarefas. A difusão dos robôs em ambiente industrial propiciou, ao longo dos anos, que vários métodos de controle fossem desenvolvidos e adaptados para realizar tarefas com eficiência e rapidez. Estes robôs devem realizar as tarefas com muita perfeição e segurança, para isso necessitam de controladores apropriados e eficientes. Pinto et al. (2014).

O controle de manipuladores inclui alguns aspectos, como o projeto de trajetória e do controlador, onde redundância e destreza, por exemplo, são recursos desejáveis Masarati (2014). Desse modo um manipulador pode se beneficiar de sua configuração para encontrar posições melhores para

realizar uma determinada trajetória com o menor esforço possível, ou seja, gastar menos energia, isso significa um menor torque desenvolvido Chen et al. (2017).

Os controladores PID (Proporcional-Integral-Derivativo) ainda são os mais usados em muitas aplicações industriais, incluindo sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas. A maioria dos atuadores que acionam esses sistemas utilizam controladores PID. No entanto, o ajuste desses controladores ainda é um desafio e depende principalmente de métodos de tentativa e erro Alkhoori et al. (2017).

O PID é um mecanismo comum de *feedback* de controle amplamente utilizado no sistema de controle industrial. Um controlador PID estima um valor de "erro" como a diferença do valor de *set-point* do processo variável. O controlador tenta minimizar o erro alterando as entradas de controle do processo Khatoon et al. (2014).

A técnica de controle LQR (*Linear Quadratic Regulator*) representa uma solução de controle intermediária, entre as técnicas de controle mais simples (PID) e as mais complexas (Preditivas), sob o ponto de vista de projeto e equacionamento de Oliveira et al. (2014). Através de um estado inicial qualquer, o problema do regulador ótimo é encontrar o vetor $u(t)$ que realize a transferência de um estado para outra região do espaço de estado desejada. Os sistemas que são ajustados de modo a fornecer um índice de desempenho mínimo são frequentemente chamados de sistemas de controle ótimo ROSA FILHO (2011).

Este trabalho tem como objetivo realizar a modelagem dinâmica de um manipulador cilíndrico e o projeto do controlador PID e LQR, aplicados ao modelo da dinâmica do manipulador, sendo realizado o controle de torque independente por junta. Neste, é realizada a simulação do controlador PID na forma interativa e paralela, e do controlador LQR utilizando o modelo dinâmico do manipulador.

Este artigo está organizado da seguinte maneira. A Seção 2 fornece as informações das características do manipulador, bem como a cinemática direta e a dinâmica. A Seção 3 apresenta o projeto do controlador PID e LQR. A simulação do controlador e os resultados obtidos são apresentados na Seção 4. Finalmente, as conclusões e trabalhos futuros são mencionados na Seção 5.

2. MODELO DINÂMICO DO MANIPULADOR CILÍNDRICO

Nesta seção são apresentadas as características do manipulador cilíndrico, objeto desse trabalho, bem como é apresentado o modelo da *cinemática direta* e a *dinâmica* do manipulador.

2.1 Características do Manipulador

Neste trabalho foi utilizado como planta, um manipulador robótico cilíndrico que é acionado por motores de indução trifásicos. Como pode ser observado na Figura 1, o primeiro grau de liberdade (GDL) possui um movimento rotacional em torno do eixo principal da estrutura, enquanto o segundo e terceiro possuem movimentos prismáticos, caracterizando-o como do tipo cilíndrico RPP (Rotacional-Prismático-Prismático).

O manipulador é acionado por três motores de indução trifásicos do tipo gaiola de esquilo. A potência dos motores foi escolhida de modo que fosse possível movimentar cada junta do manipulador.

2.2 Cinemática Direta

O modelo cinemático estabelece as estratégias adequadas de controle do robô, que resultem em uma melhor qualidade de seus movimentos. Diante da grande variedade e complexidade das estruturas que compõem os robôs manipuladores, a cinemática descreve o movimento relativo dos vários sistemas de referência à medida que a estrutura se movimenta, associando sistemas de referência às várias partes da estrutura Sanz (2009).

A dinâmica se ocupa da relação entre as forças que atuam sobre um corpo e o movimento que se origina. Portanto, o

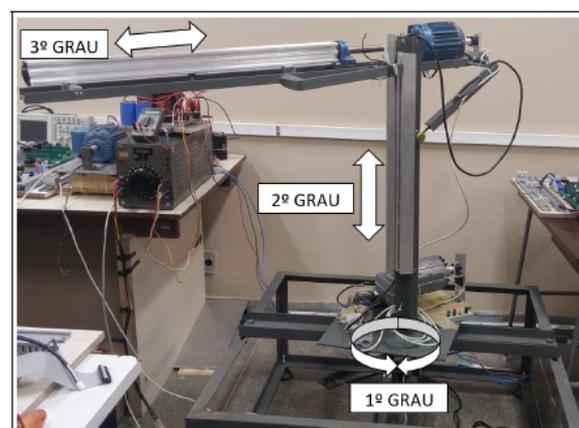


Figura 1. Estrutura do manipulador cilíndrico e os GDL existentes

modelo dinâmico de um robô industrial tem por objetivo conhecer a relação entre o movimento do robô e as forças aplicadas ao mesmo Sanz (2009).

Os conceitos fundamentais da cinemática de manipuladores com elos em série e como relacionar os sistemas de coordenadas das juntas foram introduzidos em 1955 por Jacques Denavit e Richard Hartenberg em seu artigo clássico "*Kinematic Synthesis of Linkages*". Neste artigo são apresentadas as bases para seu desenvolvimento em computadores digitais e até hoje denominada de convenção de Denavit-Hartenberg Hartenberg and Danavit (1964). Para o manipulador cilíndrico foram encontrados os parâmetros D-H mostrados na Tabela 1.

Tabela 1. Parâmetros D-H do manipulador cilíndrico.

Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	0	0	0,245	θ_1
2	0,11	$-\pi/2$	d_2	0
3	0	0	d_3	0

Aplicando a conversão D-H, a partir dos parâmetros apresentados na Tabela 1, e calculando-se a matriz de transformação homogênea, encontra-se o modelo da cinemática direta que é dada por Spong and Vidyasagar (2008)

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta_1)(d_3 + 0,35) \\ \cos(\theta_1)(d_3 + 0,35) \\ 0,245 + d_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Qualquer posição do elemento final do robô pode ser encontrada no espaço de tarefa a partir das coordenadas no espaço das juntas como observado em (1).

2.3 Dinâmica do Manipulador Cilíndrico

A dinâmica do manipulador em estudo, será apresentada utilizando a mecânica Lagrangiana no espaço das juntas. Para o propósito de projetar um controlador, é necessário ter um modelo matemático que revele as propriedades dinâmicas do sistema Mittal and Nagrath (2003).

A formulação baseada no Lagrangiano do sistema mecânico é definida como

$$L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - P(q) \quad (2)$$

Para o manipulador cilíndrico em estudo foi calculado a energia cinética e potencial e em seguida aplicado a formulação baseada no Lagrangiano Siciliano et al. (2010).

O Jacobiano do manipulador é dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(\theta_1)d_3 & 0 & \sin(\theta_1) \\ -\sin(\theta_1)d_3 & 0 & \cos(\theta_1) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{d}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

A partir do Jacobiano pode-se determinar as velocidades e as equações da energia cinética, para tanto realizam-se algumas operações matemáticas e transformações. As equações da energia potencial, por sua vez, foram obtidas a partir da mecânica clássica Siciliano et al. (2010).

A partir da equação de Lagrange (2) são obtidas as equações de movimento do sistema dadas por:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau \quad (4)$$

onde $\tau \in \mathbb{R}^n$ são os torques (forças) aplicados às juntas. Assim, considerando a energia cinética do manipulador, a equação dinâmica do manipulador pode ser escrita em forma simplificada como:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (5)$$

onde $C \in \mathbb{R}^n$ é a matriz que descreve as forças centrípetas e de Coriolis, e $G = \frac{\partial q}{\partial q} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de gravidade.

Aplicando a formulação de Lagrange 2, e a partir da equação de movimento (4), realizando os cálculos das derivadas parciais, obtém-se as equações de torque de cada junta do manipulador Spong and Vidyasagar (2008), que são mostradas a seguir.

A primeira equação de movimento que descreve o torque da junta 1 é

$$\begin{aligned} \tau_1 = & -[(4m_1 \sin\theta_1 - 4m_2 \cos\theta_1)d_3 + I_3]\ddot{\theta}_1 \\ & + [(m_1 + m_2)(\sin\theta_1 \cos\theta_1)d_3]\ddot{d}_3 \\ & + [(m_1 \sin\theta_1 - m_2 \cos\theta_1)d_3]\dot{\theta}_1^2 \\ & - [m_1 \cos\theta_1 + m_2 \sin\theta_1]\dot{d}_3^2 \\ & - [(m_1 + m_2)(\sin\theta_1 \cos\theta_1)d_3]\dot{\theta}_1 \dot{d}_3 \end{aligned} \quad (6)$$

Da mesma forma, resolvendo as derivadas parciais para a segunda junta do manipulador, tem-se o torque da junta 2 encontradas a partir da equação de movimento da junta 2:

$$\tau_2 = m_3 \ddot{d}_2 + g(m_2 + m_3) \quad (7)$$

Seguindo a mesma ideia, as derivadas parciais para a terceira junta do manipulador, equação de movimento que descreve o torque da junta 3 será:

$$\begin{aligned} \tau_3 = & [m_1 \sin\theta_1 \cos\theta_1]\ddot{\theta}_1 \\ & - [2(m_1 \sin\theta_1 + m_2 \cos\theta_1)]\ddot{d}_3 \\ & + [2d_3(m_1 \sin\theta_1 - m_2 \cos\theta_1)]\dot{\theta}_1^2 \\ & - [(m_1 + m_2)(\sin\theta_1 \cos\theta_1)]\dot{\theta}_1 \dot{d}_3 \end{aligned} \quad (8)$$

Os termos, nas equações de torque, $\ddot{\theta}_1$, \ddot{d}_2 , \ddot{d}_3 estão relacionados com as acelerações angulares dos elos, os termos $\dot{\theta}_1^2$, \dot{d}_2^2 , \dot{d}_3^2 são acelerações centrípetas, e os termos $\dot{\theta}_1 \dot{d}_2$, $\dot{\theta}_1 \dot{d}_3$, $\dot{d}_2 \dot{d}_3$ são as acelerações de Coriolis.

3. PROJETO DOS CONTROLADORES PID E LQR

Nesta seção são apresentados os projetos dos controladores PID e LQR aplicados ao modelo dinâmico de cada junta do manipulador.

3.1 Controlador PID

O controlador PID é o algoritmo de controle mais comum e a maioria das malhas de controle são governadas por este ou variações deste. O qual pode ser visto como um dispositivo que pode ser operado com algumas regras práticas, tanto quanto ser abordado analiticamente Åström and Häggglund (1995).

Para este trabalho utilizou-se o controlador PID na forma paralela e interativa. Os ganhos do PID utilizados para cada junta e para as duas formas supracitadas são apresentados na Tabela 2 a seguir:

Tabela 2. Ganhos dos PIDs para cada junta.

Junta	K	T _i	T _d
1	10	4,0	0,45
2	30	6,0	0,35
3	20	6,0	0,90

O controlador PID na forma paralela é apresentada por Åström and Häggglund (2006)

$$C(s) = K \left(1 + \frac{1}{KT_i s} + T_d s \right) \quad (9)$$

Na Figura 2 a seguir, é apresentada a estrutura do controlador PID na forma paralela representada através de diagrama de blocos.

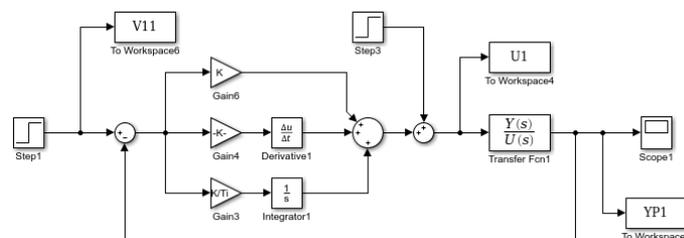


Figura 2. Estrutura do controlador PID na forma paralela.

Para o controlador PID na forma interativa também é apresentada a função de transferência do controlador, dada por Åström and Häggglund (2006)

$$C(s) = \frac{1 + sT_d + sT_i K(1 + sT_d)}{sT_i} \quad (10)$$

Na Figura 3 a seguir, também é apresentada a estrutura do controlador PID na forma interativa representada através de diagrama de blocos.

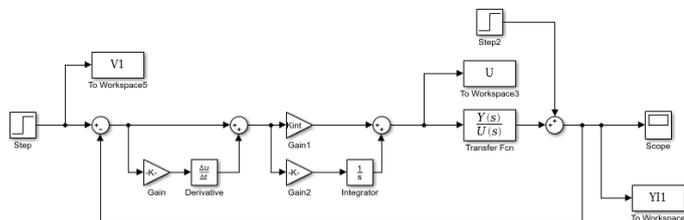


Figura 3. Estrutura do controlador PID na forma interativa.

Na forma interativa, considerou-se aqui a restrição $T_i \geq 4T_d$, onde Åström and Hägglund (2006)

$$K = \frac{K'T'_i + T'_d}{T'_i} \quad (11)$$

$$T_i = T'_i + T'_d \quad (12)$$

$$T_d = \frac{T'_i T'_d}{T'_i + T'_d} \quad (13)$$

Se $T_i \geq 4T_d$, então

$$K' = \frac{k}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{1 - 4T_d}{T_i}}\right) \quad (14)$$

$$T'_i = \frac{T_i}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{1 - 4T_d}{T_i}}\right) \quad (15)$$

$$T'_d = \frac{T_d}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{1 - 4T_d}{T_i}}\right) \quad (16)$$

Para implementar os controladores em cada junta do manipulador foi necessário realizar o desacoplamento das equações de torque de cada junta onde obteve-se as seguintes equações Siciliano et al. (2010)

$$\tau_1 = -4m_1 d_3 \ddot{\theta}_1 + I_3 + m_1 d_3 \dot{\theta}_1^2 - m_2 \ddot{d}_3 \quad (17)$$

$$\tau_2 = m_3 \ddot{d}_2 + g(m_2 + m_3) \quad (18)$$

e

$$\tau_3 = -m_1 \ddot{d}_3 + 2d_3 m_1 \dot{\theta}_1^2 \quad (19)$$

A partir das equações 17, 18 e 19, encontrou-se as funções de transferências para cada junta. As funções de transferência foram desacopladas, ou seja, os termos que em um equação de torque de uma junta depende de outra foram consideradas iguais a zero.

Aplicando-se a transformada de Laplace nas equações supracitadas (desacopladas) e considerando-se o sinal de controle, têm-se as funções de transferência em malha fechada para as três juntas do manipulador

$$G_1(s) = \frac{20}{20s^2 - 2,5s + 1} \quad (20)$$

$$G_2(s) = \frac{2}{2s^2 + 1} \quad (21)$$

$$G_3(s) = \frac{5}{10s^2 + 1} \quad (22)$$

As equações acima são as funções de transferência de torque para as três juntas do manipulador, as quais foram utilizadas para realizar o controlador independente por junta.

3.2 Regulador Linear Quadrático - LQR

A planta do Regulador Linear Quadrático - LQR, invariante no tempo é dada pelo sistema genérico, descrito por equações de estados Da Silva et al. (2010):

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \quad (23)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (24)$$

A lei de controle de realimentação é definida como:

$$u(t) = -kx(t) \quad (25)$$

sendo k a matriz de realimentação de estados.

Substituindo 25 em 23, é possível obter a resposta em malha fechada

$$\dot{x}(t) = (A - Bk)x(t) \quad (26)$$

É possível obter a otimalidade do controle LQR minimizando-se o índice de desempenho dado por:

$$J = \int_0^{\infty} [x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)] dt \quad (27)$$

sendo Q uma matriz hermitiana definida positiva (ou semidefinida positiva) ou real simétrica e R é uma matriz hermitiana definida positiva ou real simétrica.

Essa é a forma geral do LQR onde $Q = C'C$, $Q' = Q \geq 0$ e $R = R' > 0$. Sua solução é dada por

$$G = R^{-1} B' k \quad (28)$$

A partir das equações 6, 7 e 8, que são os modelos dinâmicos de cada junta do manipulador, e após realizar-se uma linearização em torno de $\theta_1 = 90^\circ$, obtiveram-se as equações no modelo de espaço de estados de cada junta.

Para a **junta 1** do manipulador o modelo no espaço de estado é dado por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1,000 & 0 & 0 \\ 0 & -100,000 & 0,300 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1,667 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,100 \\ 0 \\ -2,500 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Os valores de Q , R e k utilizados para implementação do regulador LQR da junta 1 foram:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = [100] \text{ e}$$

$$k = [-0.0100 \quad -0.0001 \quad -1.3334 \quad -1.0329]$$

Para a **junta 2** do manipulador, o modelo no espaço de estado é dado por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1,000 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ -24.5130 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Os valores de Q , R e k utilizados para implementação do regulador LQR da junta 2 foram: $Q = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $R = [100]$ e

$$k = [-0.0141 \quad -0.0368]$$

Da mesma forma, para a **junta 3** do manipulador o modelo no espaço de estado é dado por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1,00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,00 \\ 0,20 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2,50 \\ 0 \\ 1,00 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Os valores de Q , R e k utilizados para implementação do regulador LQR da junta 3 foram:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R = [10] \text{ e}$$

$k = [-8.6145 \quad -12.4583 \quad -18.4413 \quad -28.5162]$ Os valores de A , B , C e D são as matrizes do modelo no espaço de estados de cada junta e os valores de Q , R e k são necessários para a implementação do controlador LQR.

4. RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES

Nesta seção são apresentados os resultados, através de simulações, do controlador PID na forma interativa e paralela e do LQR.

As simulações foram realizadas utilizando o modelo dinâmico onde é realizado o controle de torque independente por junta. O resultado é apresentado para a uma referência em degrau positivo, com o comando de torque igual a 10

Nm. Nas figuras 4, 5 e 6 a seguir, são apresentadas as respostas do controlador PID na forma paralela e interativa e o controlador LQR.

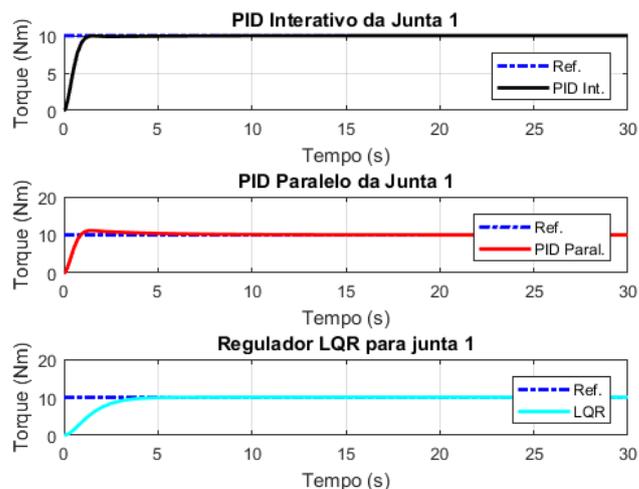


Figura 4. Resposta da simulação a junta 1.

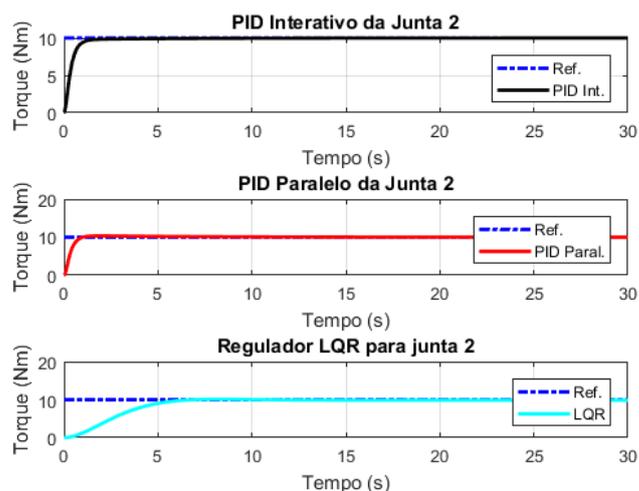


Figura 5. Resposta da simulação a junta 2.

5. CONCLUSÕES

As simulações mostraram e compararam os desempenhos consistentes e satisfatórios do sistema controlado por um controlador PID na forma interativa e paralela e para o LQR apresentados. Para mostrar a eficácia dos controladores propostos, foram introduzidas referências de degrau no sistema e a capacidade de cada controlador de seguir os sinais foi demonstrada através das simulações.

Pode se concluir que todos os controladores apresentaram resultados satisfatórios para o controle de torque aqui proposto. O controlador PID na forma paralela apresentou um pequeno *overshoot* nas juntas 1 e 3. A junta 2 não apresenta *overshoot* pois a mesma está sob ação da força da gravidade o que ocasiona em uma dinâmica mais lenta. Pode-se concluir ainda que, o controlador LQR

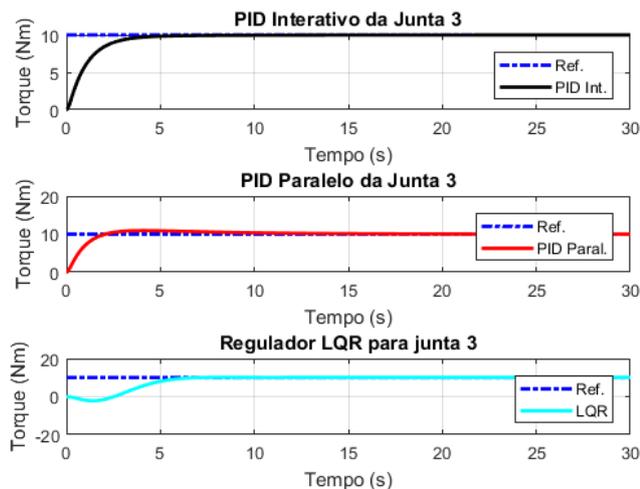


Figura 6. Resposta da simulação a junta 3.

apresenta-se como melhor opção para o controle de torque do manipulador, pois para a realização de tarefas de manipulação é necessário o desenvolvimento de torques suaves e não muito bruscos.

Como trabalhos futuros recomenda-se comparar os controladores aqui apresentados com outras formas de controles como LQG, controle preditivo, etc. Um outro trabalho que deve ser realizado é a implementação dos controladores PID e LQR no DSP (*Digital Signal Processor*) para controlar as juntas do manipulador aqui apresentado.

REFERÊNCIAS

- Alkhoori, F., Safwan, S.B., Zweiri, Y., Sahinkaya, M.N., and Seneviratne, L. (2017). Pid-lqr controllers for quad-rotor hovering mode. In *Systems and Informatics (ICSAI), 2017 4th International Conference on*, 50–54. IEEE.
- Åström, K.J. and Hägglund, T. (2006). Advanced pid control. In *The Instrumentation, Systems, and Automation Society*. Citeseer.
- Åström, K.J. and Hägglund, T. (1995). *PID controllers: theory, design, and tuning*, volume 2. Instrument society of America Research Triangle Park, NC.
- Chen, Y.J., Ju, M.Y., and Hwang, K.S. (2017). A virtual torque-based approach to kinematic control of redundant manipulators. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 64(2), 1728–1736.
- Da Silva, I.N., Spatti, D.H., and Flauzino, R.A. (2010). Redes neurais artificiais para engenharia e ciências aplicadas curso prático. São Paulo: Artliber.
- de Oliveira, T.C., Gaino, R., Covacic, M.R., Teixeira, M.C.M., and de Carvalho, A.A. (2014). Controle lqr aplicado ao movimento da articulação do joelho de pacientes paraplégicos. *Semina: Ciências Exatas e Tecnológicas*, 35(2), 231–246.
- Hartenberg, R. and Danavit, J. (1964). *Kinematic synthesis of linkages*. New York: McGraw-Hill.
- Khatoun, S., Gupta, D., and Das, L. (2014). Pid & lqr control for a quadrotor: Modeling and simulation. In *Advances in Computing, Communications and Informatics*

(*ICACCI, 2014 International Conference on*, 796–802. IEEE.

- Masarati, P. (2014). Computed torque control of redundant manipulators using general-purpose software in real-time. *Multibody System Dynamics*, 32(4), 403–428.
- Mittal, R. and Nagrath, I. (2003). *Robotics and control*. Tata McGraw-Hill.
- Pinto, M.F., Mendonça, T.R., Olivi, L.R., Costa, E.B., and Marcato, A.L. (2014). Modified approach using variable charges to solve inherent limitations of potential fields method. In *Industry Applications (INDUSCON), 2014 11th IEEE/IAS International Conference on*, 1–6. IEEE.
- ROSA FILHO, J.E.A. (2011). Contribuições de controle ótimo. *Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Estadual de Londrina, Londrina*.
- Sanz, P. (2009). Robotics: Modeling, planning, and control (siciliano, b. et al; 2009)[on the shelf]. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 16(4).
- Siciliano, B., Sciavicco, L., Villani, L., and Oriolo, G. (2010). *Robotics: modelling, planning and control*. Springer Science & Business Media.
- Spong, M.W. and Vidyasagar, M. (2008). *Robot dynamics and control*. John Wiley & Sons.