UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

MATUSALÉM SARAIVA LOPES

FUNÇÕES EXPONENCIAIS REAIS, EXPONENCIAIS COMPLEXAS E DE MATRIZES

FORTALEZA
2022

MATUSALÉM SARAIVA LOPES

FUNÇÕES EXPONENCIAIS REAIS, EXPONENCIAIS COMPLEXAS E DE MATRIZES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo

FORTALEZA

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

L854f Lopes, Matusalém Saraiva.
Funções exponenciais reais, exponenciais complexas e de matrizes / Matusalém Saraiva Lopes. – 2022.
72 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2022.
Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo .

1. Exponenciais . 2. Logaritmo . 3. Exponencial complexa . 4. Exponencial de matrizes . I. Título.
CDD 510

MATUSALÉM SARAIVA LOPES

FUNÇÕES EXPONENCIAIS REAIS, EXPONENCIAIS COMPLEXAS E DE MATRIZES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em: 04 de março de 2022

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo
Universidade do Membro da Banca Dois (UFC)

Prof. Dr. Carlos Augusto David Ribeiro
Universidade Federal do Delta do Parnaíba (UFDPar)

Dedico este trabalho a minha esposa **Ellen Lopes de Lima** e aos meus filhos **Gabriel Pinagé Lopes** e **Samuel Pinagé Lopes** que juntos me fortaleceram nesta caminhada e também a todas as pessoas que perderam seus entes queridos durante a pandemia do corona vírus.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me manter confiante e disposto a continuar aprendendo. Em segundo lugar agradeço aos meus pais, minha esposa e meus filhos por compartilhar momentos de dificuldade e alegria. Agradeço aos meus colegas do Profmat e ao meu amigo Pedro Lima pelas discussões e apreço à matemática. Além disto, ao meu orientador professor Dr. Marcelo Ferreira de Melo que contribuiu significativamente para que esta dissertação fosse concluída. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

“O que sabemos é uma gota; o que ignoramos é um oceano.”

(Isaac Newton)

RESUMO

Neste trabalho fazemos um passeio pelas funções exponenciais. Analisamos seus conceitos básicos, além de sua aplicação e modelagem no Ensino Médio. Aplicando conceitos do Cálculo diferencial e integral para nos aprofundarmos em tópicos pouco abordados pelo professor da escola de nível médio. Tudo isto sendo considerado para as funções exponenciais reais, exponenciais para o corpo dos complexos e as exponenciais de matrizes.

Palavras-chave: exponenciais; exponenciais complexas; logaritmos; exponenciais de matrizes.

ABSTRACT

In this work we take a walk through exponential functions. We analyze its basic concepts, in addition to its application and modeling in High School. Applying concepts of differential and integral calculus to delve into topics rarely addressed by the high school teacher. All this being considered for the real exponential functions, exponentials for the field of complexes and the exponentials of matrices.

Keywords: exponentials; complex exponentials; logarithms; matrix exponentials.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho foi produzido durante o período muito crítico em nossa sociedade atual, a pandemia do coronavírus. A COVID-19 já matou, neste momento, 5,5 milhões de pessoas em todo o mundo, e sem dúvida a matemática esteve presente como uma forte ferramenta de estudo e controle de dados.

Compreender as exponenciais tem sido de fundamental importância para o cenário em que vivemos hoje. Como, por exemplo, compreender uma modelagem do aumento de casos de uma dada doença. Desta forma, devido à falta de tempo que muitos professores têm para preparar suas aulas e de modo que possam aprimorar seus conhecimentos para ser aplicado em sala de aula, venho com a proposta de oferecer um material desfragmentado que fala sobre as exponenciais.

As exponenciais são estudadas durante o ensino básico e superior, dividiremos então o trabalho em três partes. Na primeira parte falaremos sobre as exponenciais reais, dedicaremos uma subseção para a exponencial real estudada no ensino médio, suas definições, teoremas e aplicações com o objetivo de ajudar os alunos a compreenderem melhor o assunto e posteriormente outra subseção para os professores relembrarem alguns conceitos e propriedades vistos no ensino superior. Veremos que, mesmo com conceitos abstratos, conseguimos elaborar modelos concretos, os quais facilitarão nas tomadas de decisões. Analisaremos modelos que foram feitos por matemáticos, estatísticos referente ao coronavírus.

As duas próximas partes servirão como um aperfeiçoamento para o professor e quem sabe uma possível aplicação no ensino médio. Na segunda parte veremos as exponenciais complexas, mostraremos que todo complexo pode ser escrito em forma exponencial e resolveremos alguns exercícios que esteve presente no concurso do IME, como aplicação.

E por último estudaremos as exponenciais de matrizes com a intenção de mostrar a relação entre as funções exponenciais e as matrizes. Discutiremos até onde poderíamos apresentar para os alunos do ensino médio questões envolvendo exponenciais de matrizes.

2 EXPONENCIAIS REAIS

Entender as funções exponenciais se tornou essencial nos dias de hoje, pois estão presentes em modelos matemáticos da natureza e da sociedade, tais como datação de materiais arqueológicos, do aumento do número de bactérias em uma cultura, crescimento populacional, cálculos financeiros e outros. Devido os fenômenos serem influenciados por diversos fatores, fazendo com que os resultados sejam obtidos de formas aproximadas.

2.1 Exponenciais reais no ensino médio

A primeira experiência com números, durante a vida escolar, acontece no ensino infantil. No ensino fundamental os alunos terão o primeiro contato com potências e radiciação e é no ensino médio que estudaram as funções exponenciais. Os livros didáticos apresentam as funções exponenciais no primeiro ano do ensino médio, onde citamos bons exemplos: Dante (2004); Giovanni e Bonjorno (2002) e Iezzi *et al.* (2001). Na seção referente ao aprendizado de função exponencial são colocadas subseções onde será feita uma revisão de potências de expoentes naturais, potências de expoentes inteiros negativos, raiz n-ésima aritmética, potências de expoentes racionais, potência de expoente irracional e potências de expoente reais. Depois de revisto o conteúdo de potência e radiciação, os livros didáticos começam então a falar sobre as funções exponenciais. De fato, a importância de revisar o conteúdo de potência e radiciação é fundamental para aprender as funções exponenciais e a partir daí começaremos nossas discussões. Para o primeiro capítulo utilizaremos como base teórica os livros: Números e Funções Reais, coleção Profmat do saudoso professor Lima (2013) e o já tradicional livro de Cálculo, volume 1 do autor Stewart (2003).

Definição 1. . *Dado um número real a e um número natural n, com $n \geq 2$, a potência de base a e expoente n é indicada por a^n que é o produto de n fatores iguais a a.*

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n fatores}.$$

Se n = 1 então $a^1 = a$, uma vez que não há produto com um único fator e escrevemos indutivamente $a^{n+1} = a^n \cdot a$.

Depois de apresentada a definição, os livros didáticos costumam fazer alguns exemplos para que os alunos possam reconhecer a definição. Posteriormente são apresentadas as propriedades:

Proposição 1. . *Sejam a e b números reais e m e n naturais. Então*

I. $a^m.a^n = a^{m+n}$.

II. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}(a \neq 0 \quad e \quad m \geq n)$.

III. $(a.b)^n = a^n.b^n$.

IV. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}(b \neq 0)$.

V. $(a^m)^n = a^{m.n}$

Neste momento os livros didáticos do Ensino Médio não costumam colocar as demonstrações e usam apenas exemplos para que os alunos entendam de uma forma intuitiva.

Para a propriedade I, a prova pode ser feita por indução em n. Seja n =1 então $a^m.a^1 = a^{m+1}$, basta observar que $a^1 = a$ e fazer $n = m+1 \geq 2$, dai;

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n-1 fatores} \cdot a = a^{n-1} \cdot a$$

Logo, substituindo n por m+1 temos;

$$a^{m+1} = a^{(m+1)-1} \cdot a = a^m \cdot a^1$$

Provando agora para n+1 e supondo que a propriedade é válida para n, temos;

$$a^m \cdot a^{n+1} = a^m \cdot (a^n \cdot a^1) = (a^m \cdot a^n) \cdot a^1 = a^{m+n} \cdot a^1 = a^{m+n+1}$$

Portanto pelo Princípio de Indução Finita, temos que $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, para quaisquer m, n naturais. Observe também que na propriedade $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ temos as mesmas quantidades m+n de fatores a em ambos os membros, portanto para $m_1, m_2, \ldots, m_k$ quaisquer em $\mathbb{N}$,vale

$$a^{m_1} \cdot a^{m_2} \cdots a^{m_k} = a^{m_1+m_2+\cdots+m_k}$$

Em particular, se $m_1 = m_2 = \cdots = m_k = m$, temos $(a^m)^k = a^{mk}$. Provando assim a propriedade V. Um dos fatos pouco explorados nos livros didáticos são as sequências formadas quando $a > 1$ e $0 < a < 1$

Se $a > 1$ então, multiplicando ambos os membros da desigualdade por a, obtemos $a^2 > a$. Multiplicando novamente por a a desigualdade que obtemos, temos $a^3 > a^2$. Se continuarmos multiplicando de forma análoga, podemos concluir que

$$1 < a < a^2 < \ldots < a^n < a^{n+1} < \ldots$$

De um modo geral, multiplicando ambos os lados da desigualdade $a > 1$ por a^n teremos $a^{n+1} > a^n$ para todo n natural.

Fazendo agora o mesmo processo de multiplicar por a ambos os membros da desigualdade mas agora para $0 < a < 1$, obteremos

$$1 > a > a^2 > \ldots > a^n > a^{n+1} > \ldots$$

Portanto, para $a > 1$ temos uma sequência de termos a^n com n natural, crescente e para $0 < a < 1$ uma sequência decrescente. Se $a = 1$, formaremos uma sequência constante, com todos seus termos iguais a 1.

Neste momento poderia ser introduzida a definição de sequências limitadas e ilimitadas.

Definição 2. . *Uma sequência { x_n } é limitada se seu conjunto de valores for limitado, ou seja, existem números m e M tais que $m < x_n < M$ para todo n natural. Caso contrário é dita ilimitada.*

Então se { x_n } representa uma sequência numérica limitada, dizemos que existem números m e M tais que $m < x_n < M$ para todo n natural. Observe que quando $a > 1$, a sequência formada por a^n, com n$\in \mathbb{N}$ é crescente e ilimitada, pois não existe nem um número real que supere todas as potências de a^n, porém existem sequências que são crescentes e limitadas. Por exemplo

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1} \cdots$$

onde $\frac{n}{n+1} < 1$, para todo n natural.

Dando continuidade, a revisão de potências, o próximo passo será a extensão para potências com expoentes inteiros. Para isso precisamos atribuir um significado para à potência a^n tal que n $\in \mathbb{Z}$, de modo que a propriedade fundamental $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ seja preservada. Em primeiro lugar descobriremos um possível valor para a^0. Seja então $a^0 \cdot a^1 = a^{0+1} \Rightarrow a^0 \cdot a = a$. Logo a única solução possível é $a^0 = 1$

Observe agora que, para qualquer n $\in \mathbb{N}^*$ e $a \neq 0$, temos que

$$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$$

Logo,

$$a^{-n} \cdot a^n = 1 \Rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

De fato teremos que ter $a \neq 0$, pois caso contrário teríamos que $0^{-n} = \frac{1}{0^n} = \frac{1}{0}$ um absurdo.

Definição 3. . *Dado um número real a não negativo e um número natural n, $n \geq 1$, denomina-se raiz n-ésima aritmética de a o número real e não negativo b, tal que $b^n = a$ ou seja, $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$.*

Propriedades

I. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

II. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

III. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

IV. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$

V. $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a^m}} = \sqrt[np]{a^m}$

Demonstrando a propriedade I, temos que

$$\sqrt[n]{a.b} = (a.b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}.b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$$

Já para a segunda propriedade, termos que para $a \geq 0$ e $b > 0$, isto implica que

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Na propriedade III, faremos

$$(\sqrt[n]{a})^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Para a demonstração da propriedade IV

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m.p}{n.p}} = \sqrt[n.p]{a^{m.p}}$$

E finalmente demonstrando a propriedade V, veremos

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a^m}} = \sqrt[n]{a^{\frac{m}{p}}} = \left(a^{\frac{m}{p}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{p}\cdot\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{p.n}} = a^{\frac{m}{p}\cdot\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n.p}} = \sqrt[n.p]{a^m}$$

Seja agora então r um número racional tal que $r = \frac{m}{n}$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Para falarmos de potência de expoente racional, daremos um significado a a^r de modo que se preserve a propriedade $a^r.a^s = a^{r+s}$. Vejamos um exemplo de como podemos dar sentido para a potência $5^{\frac{1}{2}}$ de forma que a propriedade fundamental seja mantida.

$$5^{\frac{1}{2}}.5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 5^1 = 5$$

Pela definição de raiz quadrada $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$, pois $\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 5$. Generalizando temos que

$$(a^r)^n = a^r a^r \dots a^r = a^{r+r+\cdots+r} = a^{nr} = a^m$$

Logo a^r será um número real positivo que elevado a n é igual a a^m, portanto pela definição de raiz, temos que $a^r = \sqrt[n]{a^m}$

Para as potências de expoentes irracionais, os livros didáticos costumam apresentar apenas uma breve intuição. Informando que para dar sentido a uma potência de expoente irracional basta calcular as aproximações do expoente irracional e suas respectivas potências, onde quanto mais próximo o número racional estiver do expoente irracional, mais próximo estará a potência de expoente racional da potência desejada. Por exemplo, para caracterizar $3^{\sqrt{2}}$, primeiro fazemos as aproximações de $\sqrt{2}$ que são os números racionais: $1; 1,4; 1,41; 1,414; \cdots$ e depois calcularemos suas respectivas potências com expoentes racionais: $3^1; 3^{1,4}; 3^{1,41}; 3^{1,414}; \cdots$ que são valores aproximados de $3^{\sqrt{2}}$.

Para finalizar a revisão, boa parte dos livros didáticos relatam que, para as potências de expoente real, continuam válidas todas as propriedades apresentadas anteriormente quando $a > 0$ e $a^x > 0$, pelo motivo que algumas potências de base $a < 0$ e a potência de base a=0 não pertencerem aos números reais, de fato pois por exemplo; $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$ e $0^{-1} = \frac{1}{0} \notin \mathbb{R}$.

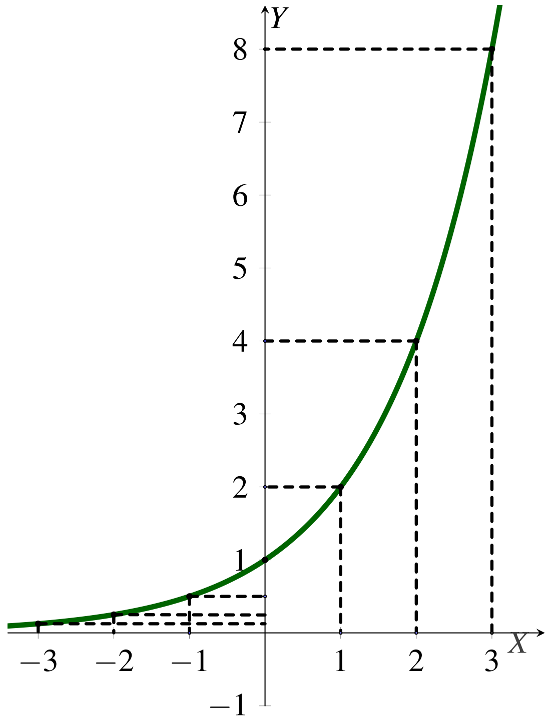
2.1.1 Função exponencial

Depois de feita a revisão de potências e radiciação é introduzida a seguinte definição.

Definição 4. *Seja então f uma função tal que* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_+$ *representada por* $f(x) = a^x$ *onde a é um número real, positivo e diferente de* 1. *Para este tipo de função chamaremos de função exponencial.*

Observe que as restrições $a > 0$ e $a \neq 1$ são necessárias para que a função esteja bem definida nos números reais. Se $a = 0$ e o expoente x for um número negativo ou se $a < 0$ e o expoente x for, por exemplo $\frac{1}{2}$, então $f(x)$ não existirá. A seguir apresentamos os gráficos de funções exponenciais. Primeiro veremos o caso da função $f(x) = a^x$, onde $a > 1$. Para isso observe a função $f(x) = 2^x$

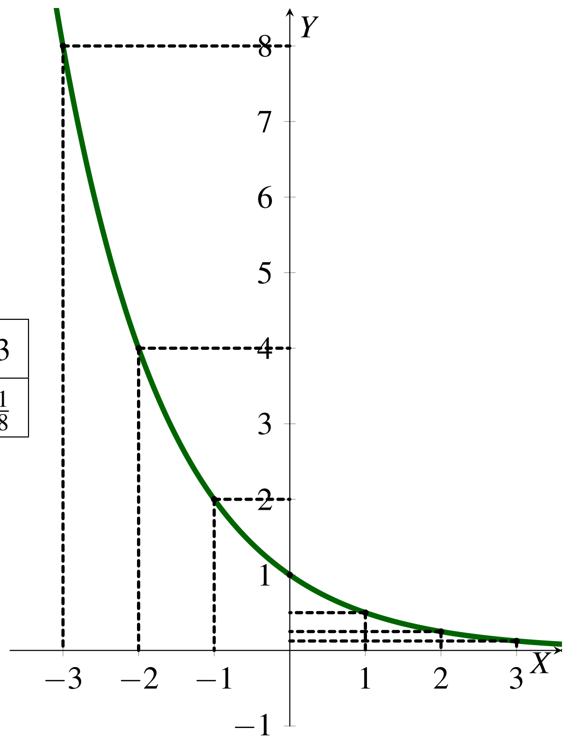
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8



Fonte-Elaborado pelo autor

E para o caso onde $0 < a < 1$, observe a função f(x)=$\left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



Fonte-Elaborado pelo autor

Os livros didáticos costumam fazer algumas observações para as curvas exponenciais, mostrando que para $a > 0$, a função é crescente e quando $0 < a < 1$, a função é decrescente. Contudo, muitas vezes falta explorar o fato da função exponencial ser ilimitada superiormente, contínua e sobrejetiva.

2.2 Exponenciais reais no ensino superior

Para compreendermos as funções exponenciais de uma forma mais ampla, precisamos de algumas ferramentas que encontramos quando estudamos a disciplina de cálculo, no ensino superior. Começaremos então definindo o limite de uma função. Para mais detalhes recomendamos Lima (2020).

Definição 5 (Limite de uma Função)**.** *Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número a, exceto possivelmente o próprio a. Então dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é L, e escrevemos*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

se para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que se $0 < |x-a| < \delta$ então

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

Provaremos que a função exponencial, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ dada por $f(x) = a^x$ é ilimitada superiormente.

Para uma função ser limitada em seu domínio, sua imagem deve estar contida em um intervalo, caso contrário a função é dita ilimitada. Para $a > 1$ e $x > 0$ teremos que a função cresce sem limites, logo não temos um número real r tal que $f(x) < r$ para todo $x \in \mathbb{R}$ ou seja $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$, de fato pois pela desigualdade de Bernoulli, temos que $(1+h)^x \geq 1+xh$, é válido para todo inteiro positivo x e $h \geq -1$, como $a > 1$ então $a^x \geq 1+xh$, portanto como $\lim_{x\to\infty}(1+xh) = +\infty$ já que $h > 0$ consequentemente $\lim_{x\to\infty}(a^x) = +\infty$

Para o caso em que $0 < a < 1$, basta observar quando $x < 0$, logo de forma análoga ao caso anterior, não temos um número real r tal que $f(x) < r$ para todo $x \in \mathbb{R}$, logo $\lim_{x\to-\infty}(a^x) = +\infty$.

No entanto se a função $f(x) = a^x$, com $a > 1$, tem os valores de x decrescendo ou seja $x \to -\infty$, temos que o $\lim_{x\to-\infty}(a^x) = 0$, do mesmo modo se $0 < a < 1$ e $x \to \infty$ então também temos $\lim_{x\to\infty}(a^x) = 0$, de fato pois $\frac{1}{a} > 0$ o que implica que $\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{a})^x = +\infty$, daí

$$\lim_{x\to\infty}(a^x) = \lim_{x\to\infty}(\frac{1}{a^{-x}}) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{a^x}}\right) = 0$$

Muitas vezes calcular o limite de uma função quando $x \to a$ equivale a calcular o valor de $f(a)$. Por exemplo, para calcular o limite de $\lim_{x\to 2}(x^2+x+2)$.

$$\lim_{x\to 2}(x^2+x+2) = \lim_{x\to 2}(x^2) + \lim_{x\to 2}(x) + \lim_{x\to 2}(2) = 2^2+2+2 = 8$$

e fazendo $f(2)$ quando $f(x) = x^2+x+2$, temos $f(2) = 2^2+2+2 = 8$

Neste caso dizemos que a função é contínua em x=2 onde 2 pertence ao domínio da função.

Definição 6 (Função contínua)**.** *Uma função é contínua em um ponto a, se*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = a^x$ é continua. Veja que $\lim_{x\to b} f(x) = f(b)$, para isso seja $x = b+h$, o que equivale dizer que $x-b = h$, fazendo então

$$|a^h - 1| < \frac{\varepsilon}{a^b}$$

como a^b é uma constante, segue $|f(x) - f(b)| = |a^x - a^b|$. Substituindo o valor indicado de x, obtemos:

$$|a^{b+h} - a^b| = |a^b(a^h - 1)| < \varepsilon$$

Portanto, $\lim_{x\to b} f(x) = f(b)$.

Lema 1. *Fixado o número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo não degenerado de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência a^r, com $r \in \mathbb{Q}$.*

Teorema 1 (Caracterização da Função Exponencial)**.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente). As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $f(nx) = f(x)^n$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$ *e todo* $x \in \mathbb{R}$*;*

(2) $f(x) = a^x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*, onde* $a = f(1)$*;*

(3) $f(x+y) = f(x).f(y)$ *para quaisquer* $x,y \in \mathbb{R}$*.*

Demonstração. *Provaremos as implicações* $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$. *Com a finalidade de mostrar que* $(1) \Rightarrow (2)$ *observe inicialmente que a hipótese (1) acarreta que ,para todo número racional* $r = \frac{m}{n}$ *(com* $m \in \mathbb{Z}$ *e* $n \in \mathbb{N}$*), tem-se,* $f(rx) = f(x)^r$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*. Com efeito, como* $nr = m$*, podemos escrever*

$$f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m,$$

logo, $f(rx) = f(x)^{m/n} = f(x)^r$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*.*

Assim, se pusermos $f(1) = a$*, teremos* $f(r) = f(r.1) = f(1)^r = a^r$ *para todo* $r \in \mathbb{Q}$*. Para completar a demonstração de que* $(1) \Rightarrow (2)$ *suponhamos, a fim de fixar as idéias, que* f *seja crescente, logo 1=* $f(0) < f(1) = a$*. Admitamos por absurdo, que existe* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) \neq a^x$*. Digamos, por exemplo, que seja* $f(x) < a^x$ *(o caso* $f(x) > a^x$ *seria tratado analogamente). Então, pelo fato que fixado um número real positivo* $a \neq 1$*, em todo intervalo* $\mathbb{R}^+$ *existe uma potência* a^r*, com* $r \in \mathbb{Q}$*. Logo existe um número racional* r *tal que* $f(x) < a^r < a^x$*, ou seja,* $f(x) < f(r) < a^x$*. Como* f *é crescente, tendo* $f(x) < f(r)$ *concluímos que* $x < r$*. Por outro lado, temos também* $a^r < a^x$*, logo* $r < x$*. Esta contradição completa a prova de* $(1) \Rightarrow (2)$*. Para,* $(2) \Rightarrow (3)$ *observe que* $f(x+y) = a^{x+y} = a^x.a^y = f(x).f(y)$ *e finalizando para* $(3) \Rightarrow (1)$ *basta fazer* $f(nx) = f(x+x+\cdots+x) = f(x).f(x).\cdots.f(x) = f(x)^n$*.*

Uma propriedade importante da função exponencial é que ela é bijetiva, ou seja, ela é sobrejetiva e injetiva. Seja então $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, a função exponencial tal que $f(x) = a^x$ com $a \neq 1$. Segundo Lima (2013), para provar que a função é sobrejetiva, usaremos o lema acima.

Portanto queremos que para todo $b > 0$ exista algum $x \in \mathbb{R}$, onde $a^x = b$,para isso basta agora escolher, para cada $n \in \mathbb{N}$, uma potência a^{r_n}, com $r_n \in \mathbb{Q}$, no intervalo $(b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n})$, de modo que $|b - a^r| < \frac{1}{n}$. Logo $\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = b$

Observe que se $a > 1$, podemos escolher as potências a^{r_n} de tal forma que

$$a^{r_1} < a^{r_2} < \ldots < a^{r_n} < \ldots < b < \ldots$$

Então fixando um $t \in \mathbb{Q}$ onde $b < a^t$ temos que

$$r_1 < r_2 < \ldots < r_n < \ldots < t < \ldots$$

de fato pois a função a^x é crescente. Portanto temos uma sequência (r_n) crescente e limitada superiormente por t e a completeza dos $\mathbb{R}$ que os r_n são aproximações por falta de um número real x o que equivale dizer que $\lim_{n\to\infty} r_n = x$ e como a função exponencial é contínua então $a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = b$ finalizando a demonstração.

Para injetividade, considerando $a > 1$ e dado $x_1 \neq x_2$, temos que se $x_1 < x_2$ então $a^{x_1} < a^{x_2}$ e por outro lado se $x_1 > x_2$ isto implica que $a^{x_1} > a^{x_2}$, isso acontece devido a monotonicidade da função a^x, daí podemos concluir que se $x_1 \neq x_2$ então $a^{x_1} \neq a^{x_2}$.

Analisando agora o Teorema da caracterização da função exponencial que foi visto anteriormente, verificaremos que a hipótese da monotonia pode ser substituída pela suposição de que f seja contínua, para isso, basta alterar na demonstração do Teorema 1 no passo $(1) \Rightarrow (2)$ apenas o caso x irracional, fazendo

$$x = \lim_{n\to\infty} r_n = r_n, r_n \in \mathbb{Q}$$

e pelo fato de f ser contínuo, então

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^x$$

Segundo Stewart (2003), as fórmulas do cálculo ficam simplificadas quando escolhemos para a base a aquela para qual resulta a reta tangente a $y = a^x$ em (0,1) com uma inclinação de exatamente 1 e por sorte este número existe. O número representado pelo caractere e que foi escolhido pelo matemático Leonhard Euler que possui como valor até a quinta casa decimal

$$e \approx 2,71828$$

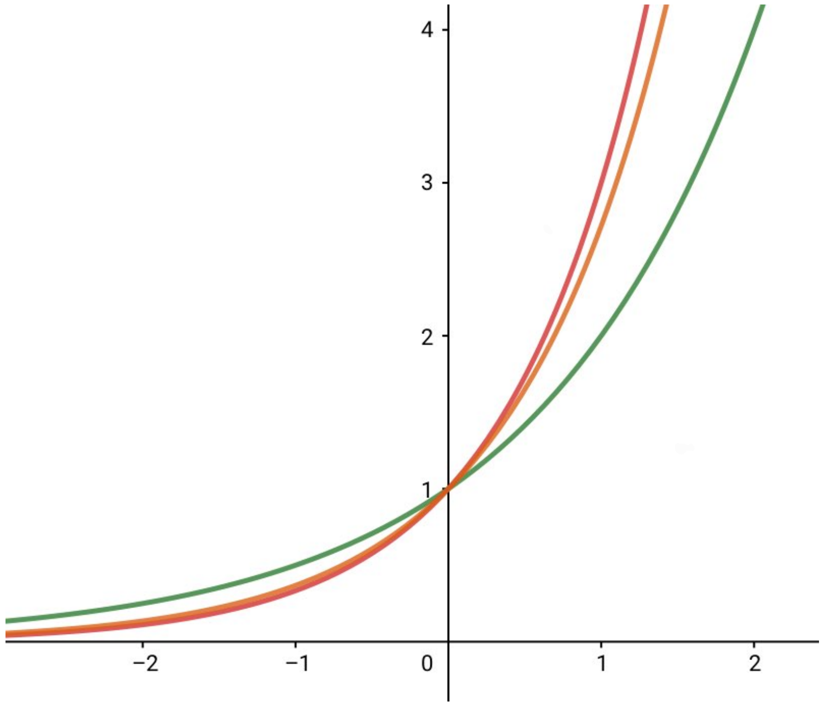
Para calcular o número e precisamos achar o valor mais próximo da expressão $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ quando x tende ao infinito ou seja

$$e = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Usando a calculadora podemos estimar este valor, veja a tabela abaixo

x	$\left(1+\frac{1}{x}\right)$	$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
1	2	2
5	1,2	2,48832
10	1,1	2,59374
100	1,01	2,70481
1.000	1,001	2,71692
10.000	1,0001	2,71814
100.000	1,00001	2,71826
1.000.000	1,000001	2,71828
10.000.000	1,0000001	2,71828

Observe também que o gráfico de $y = e^x$ está entre $y = 2^x$ e $y = 3^x$, de fato pois $2 < e < 3$.



Fonte-Elaborado pelo autor

Um exemplo interessante, que pode ser discutido no ensino médio é a comparação entre juros compostos em um período determinado como dia, mês ou ano e o mesmo período mas calculado de forma contínua.

Qual o valor será resgatado após dois anos se for investido uma quantia de 1000 reais a taxa de juros de 12% ao ano, sendo os juros calculados :

a) **Juros compostos anual**

Para isso basta aplicar na fórmula $M = C_0(1+i)^t$, onde

M é o montante

C_0 é o capital inicial

t é o número de anos

i é a taxa em anos

Portanto $M = 1000(1+0,12)^2 = 1.254,4$ reais

b) **Juros compostos contínuo**

Agora fazendo $M = C_0 e^{i.t}$, temos $M = 1000(e)^{0,12.2} = 1.271,24$ reais

Observando que o crescimento contínuo é maior que o crescimento anual.

2.2.1 Caracterização da função exponencial

A função exponencial é utilizada na modelagem matemática para resolver problemas. Cada função apresenta uma propriedade característica. Vamos analisar o que ocorre na variação de $f(x) = a^x$ quando x recebe um acréscimo h.

Seja $f(x) = a^x$ com a real positivo, $a \neq 0$ e h um número real qualquer, logo

$$f(x+h) - f(x) = a^{x+h} - a^x = a^x.a^h - a^x = a^x\left(a^h - 1\right) = a^x.k = k.a^x = kf(x)$$

Portanto, $f(x+h) - f(x) = k.f(x)$ onde $k = a^h - 1$ ou seja a variação correspondente da variável dependente $f(x+h) - f(x)$ é proporcional ao valor da variável dependente $f(x)$, onde a constante de proporcionalidade depende do acréscimo h. Podemos também escrever de forma equivalente

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)} = a^h - 1 \Leftrightarrow \frac{f(x+h)}{f(x)} = a^h$$

onde o quociente depende apenas de h e não de x.

Discutiremos os teoremas referentes à caracterização de uma função exponencial. Observe que o Teorema da Caracterização 1 já foi demonstrado anteriormente. Definiremos agora o que é uma função do tipo exponencial e posteriormente observaremos o que a caracteriza.

Definição 7. *Dada uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chamaremos de função do tipo exponencial quando $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde a e b são constantes positivas. Se $a > 1$, g é crescente e se $0 < a < 1$ g é decrescente.*

Teorema 2 (Caracterização das Funções de Tipo Exponencial)**.** *Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva(isto é, crescente ou decrescente). Suponhamos que, para quaisquer x e h em $\mathbb{R}$, o acréscimo relativo $[\frac{g(x+h)-g(x)}{g(x)}]$ dependa apenas de h, mas não de x. Então, se $b = g(0)$ e $a = g(1)/g(0)$, tem-se $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. *Como visto acima, a hipótese equivale a supor que a função $\varphi(h) = \frac{g(x+h)}{g(x)}$ independe de x. Substituindo se necessário, $g(x)$ por $f(x) = \frac{g(x)}{b}$, onde b=$g(0)$, f continua monótona e injetiva, com $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ independe de x e, agora, $f(0) = 1$. Então pondo x=0 na relação $\varphi(h) = \frac{f(x+h)}{f(x)}$, obtemos $\varphi(h) = f(h)$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Vemos assim que a função monótona injetiva f cumpre $f(x+h) = f(x).f(h)$, ou seja, $f(x+y) = f(x).f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Segue-se então do teorema anterior que $f(x) = a^x$, logo $g(x) = bf(x) = ba^x$, como queríamos demonstrar.*

Para o próximo teorema, observaremos as relações entre as funções exponenciais e progressões geométricas.

Definição 8. *Uma progressão geométrica é uma sequência (a_n) na qual é constante o quociente da divisão de cada termo pelo termo anterior. Esse quociente é chamado de razão da progressão e representado pela letra q. Isto é, $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = ... = \frac{a_n}{a_{n-1}} = ...$, ou ainda, $a_n = a_1 q^{n-1}$.*

Observe que a fórmula do termo geral da da progressão geométrica $a_n = a_1 q^{n-1}$ ou de forma equivalente $a_n = \frac{a_1}{q} q^n$ pode ser associada a função do tipo exponencial $f(x) = ba^x$. Fazendo as devidas comparações teremos,

$$a_n = f(x)$$

$$\frac{a_1}{q} = b$$

$$q = a.$$

Portanto, considerando uma progressão geométrica (PG)

$$x_n = x_1 q^{n-1}, \text{ onde } q > 0 \text{ e } q \neq 1.$$

Por definição teremos uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, onde $x(n) = \frac{x_1}{q} q^n$. Veja que x:$\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é a restrição a $\mathbb{N}$ da função do tipo exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = ba^x,$$

onde $b = \frac{x_1}{q}$ e a=q são constantes, com a > 0 e $a \neq 1$. De forma que a recíproca também é verdadeira pois dada uma função do tipo exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ba^x$, onde a,b$\in \mathbb{R}$ são constantes, com a > 0 e a$\neq$1, podemos associar uma PG $x(n) = x_1 q^{n-1}$. Para isso basta fazer q=a e $x_1 = bq$.

Exemplo 1. *a) $x_n = 6.2^{n-1}$ está associado a $f(x) = 3.2^x$.*

b)$f(x) = 64\left(\frac{1}{2}\right)^x$está associado a $x_n = 32.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Veja que as funções do tipo exponencial levam progressões aritméticas em progressões geométricas, de fato pois, seja $f(x) = ba^x$ uma função do tipo exponencial e com $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ elementos do domínio que constitui a PA, então substituindo os elementos da PA na função do tipo exponencial encontraremos as respectivas imagens

$$f(x_1) = ba^{x_1}, f(x_2) = ba^{x_2}, \ldots, f(x_n) = ba^{x_n}, \ldots$$

que formam uma progressão geométrica de razão a^r onde $r = x_{n+1} - x_n$, pois:

$$f(x_{n+1}) = ba^{x_{n+1}} = ba^{x_n+r} = ba^{x_n}.a^r = f(x_n).a^r$$

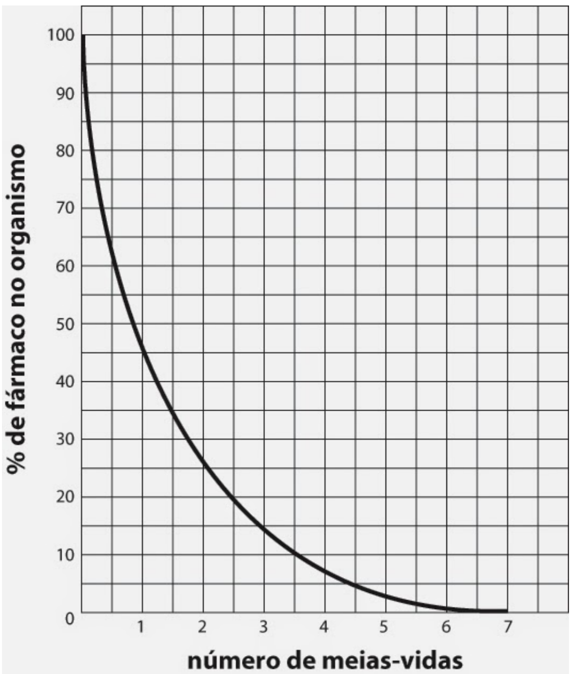
Portanto, como (n+1)-ésimo termo da PA é dado pela equação $x_{n+1} = x_1 + nr$, segue

$$f(x_{n+1}) = f(x_1 + nr) = ba^{x_1+nr} = ba^{x_1}.a^{nr} = ba^{x_1}.(a^r)^n = f(x_1).(a^r)^n$$

Fazendo agora $a^r = A$ e considerando em particular $x_1 = 0$ então $f(x_1) = b$, logo

$$f(x_{n+1}) = b.A^n$$

Exemplo 2 (ENEM 2007)**.** *A duração do efeito de alguns fármacos está relacionada à sua meia-vida, tempo necessário para que a quantidade original do fármaco no organismo se reduza à metade. A cada intervalo de tempo correspondente a uma meia-vida, a quantidade de fármaco existente no organismo no final do intervalo é igual a 50% da quantidade no início desse intervalo. O gráfico anterior representa, de forma genérica, o que acontece com a quantidade de*



Fonte: FUCHS, F. D.; WANNMA, C. I. Farmacologia clinica. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan,1992, p. 40.

fármaco no organismo humano ao longo do tempo. A meia-vida do antibiótico amoxicilina é de 1 hora. Assim, se uma dose desse antibiótico for injetada às 12 h em um paciente, o percentual dessa dose que restará em seu organismo às 13h30 será aproximadamente de

Para resolver a questão, considere a tabela abaixo, onde C_0 é a concentração inicial do fármaco.

Quantidade	C_0	$C_0/2$	$C_0/4$	$\cdots$	$C_0/2^n$
Número de meias-vidas	0	1	2	$\cdots$	n

Observe que as quantidades de amoxicilina no organismo formam uma progressão geométrica e o número de meias-vidas formam uma progressão aritmética. Portanto como visto anteriormente, a quantidade de amoxicilina no organismo em função do número de meias-vidas pode ser representada por uma função do tipo exponencial, logo,

$$f(t) = ba^t, onde \quad b = f(0) = C_0 \quad e \quad a = \frac{f(1)}{f(0)} = \frac{C_0/2}{C_0} = \frac{1}{2}$$

e a lei de formação é $f(t) = C_0\left(\frac{1}{2}\right)^t$. Para concluir, temos que passou 1,5 horas do momento em que o antibiótico foi aplicado no paciente, portanto

$$f(1,5) = C_0\left(\frac{1}{2}\right)^{1,5} \approx 0,35C_0$$

Ou seja, o percentual da dose que restará no organismo do paciente às 13h30 é de aproximadamente 35%.

Exemplo 3. *Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ uma função crescente ou decrescente que transforma a progressão aritmética 1, 2, 3, 4..... na progressão geométrica 1, 2, 4, 8,....., sendo $f(0) = \frac{1}{2}$ e $f(1) = 1$. Encontre a lei de formação desta função.*

De acordo com o teorema acima podemos classificar esta função como uma função do tipo exponencial portanto a lei de formação é dada por $f(n) = ba^n$, onde b=$f(0)$ e $a = \frac{f(1)}{f(0)}$, logo

$$a = \frac{f(1)}{f(0)} = \frac{1}{1/2} = 2$$

onde $b = f(0) = \frac{1}{2}$ e $f(1) = 1$ o primeiro termo da PG, portanto

$$f(n) = ba^n = \frac{1}{2}.2^n = 2^{n-1}.$$

Observe que a razão da progressão aritmética é $r = 1$ e que a razão da progressão geométrica é $q = a^r = 2^1 = 2$. Porém veja também o que aconteceria se quisermos encontrar uma lei de formação que transformasse a progressão aritmética 1,3,5,7... na progressão geométrica 1,2,4,8,..... De forma análogo ao exemplo anterior, temos

$$b = f(0) \quad e \quad a = \frac{f(1)}{f(0)}$$

porém para descobrir o valor de a, podemos adicionar a hipótese

$$q = a^r$$

daí, como a razão geométrica q=2 e a razão aritmética r=2 temos,

$$2 = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{2}.$$

Portanto

$$a = \frac{f(1)}{f(0)} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{1}{f(0)}$$

logo

$$b = f(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Daí

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}^x = \sqrt{2}^{x-1} = 2^{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}$$

Logo podemos concluir que dadas uma PA e uma PG teremos uma função do tipo exponencial $f(x) = ba^x$, onde b=$f(0)$ e $a = \frac{f(1)}{f(0)}$, que leva os elementos da PA na PG se a condição $q = a^r$ for satisfeita.

Conhecer como se caracteriza uma função exponencial é de extrema importância na resolução de problemas que envolvam funções, pois a partir daí, o aluno será capaz de identificar e posteriormente aplicar as propriedades de exponencial.

Nesta subseção vamos apresentar algumas propriedades e resultados interessantes sobre funções do tipo exponencial. Inicialmente, discutiremos agora se é possível caracterizar a função do tipo exponencial como uma função "monótona"que transforma qualquer progressão aritmética em progressão geométrica.

Para fixarmos, vamos provar alguns resultados. Vejamos o seguinte enunciado:

Teorema 3. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função que transforma qualquer PA em PG, e tem a propriedade* $f(0) = 1$. *Mostre que:*

a) $f(nx) = f(x)^n$, *para todo* $n \in \mathbb{Z}$ *e todo* $x \in \mathbb{R}$.

b) Pondo $a = f(1)$, *tem-se* $f(r) = a^r$ *para todo* $r \in \mathbb{Q}$.

Demonstração. *Separando os itens, temos:*

a) Dado $x \in \mathbb{R}$, *os números -x, 0, x estão em PA, logo* $f(-x)$, *1,* $f(x)$ *estão em PG, donde* $f(-x) = f(x)^{-1}$. *Dados* $x \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$, *os números 0, x, 2x,...,nx estão em PA, logo 1,* $f(x), f(2x), \cdots, f(nx)$ *estão em PG, donde* $f(nx) = f(x)^n$. *Finalmente para* $n < 0$ *inteiro,* $f(nx) = f(-(-nx)) = f(-nx)^{-1} = (f(-nx))^{-1} = (f(x)^{-n})^{-1} = f(x)^n$

b) Inicialmente, observe que temos

$$f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r.$$

Agora, veja que se $r = \frac{p}{q}$, *com* $p, q \in \mathbb{Z}$ *e* $q \neq 0$. *Assim,*

$f(1) = a$

$f(\frac{n}{n}) = a, (n \neq 0)$

$a = f(\frac{n}{n}) = f(\frac{1}{n})^n$

$f(\frac{1}{n}) = a^{\frac{1}{n}}, \forall n \in \mathbb{N}.$

Assim, podemos afirmar que para $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$ *temos* $f(r) = f(\frac{p}{q}) = a^{\frac{p}{q}}$.

Teorema 4. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função crescente (ou decrescente) que transforma qualquer progressão aritmética em uma progressão geométrica. Então, se* $b = f(0)$ *e* $a = \frac{f(1)}{f(0)}$ *tem-se* $f(x) = ba^x$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. *Seja* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x)}{b}$. *Temos que g transforma qualquer PA numa PG, e* $g(0) = 1$. *Pelo exemplo anterior,* $g(r) = a^r, \forall r \in \mathbb{Q}$.

Afirmação: $g(x) = a^x$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Admita que g é crescente. Suponha, por absurdo, que $g(x) \neq a^x$, *para algum x irracional. Considere g(x)<0. (O outro caso é análogo!) Tome* $r \in \mathbb{Q}$ *tal que* $g(x) < a^r < a^x$, *ou seja,* $g(x) < g(r) < a^x$. *Sendo g é crescente, obtemos x< r. De* $a^r < a^x$, *obtemos r< x . (Absurdo!)*

$$Portanto, \quad f(x) = ba^x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Veja que as funções do tipo exponencial levam progressões aritméticas em progressões geométricas.

Teorema 5. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona e injetiva (isto é, crescente ou decrescente) que transforma toda progressão aritmética $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ numa progressão geométrica $y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots$, onde $y_n = f(x_n)$. Se pusermos $b = f(0)$ e $a = \frac{f(1)}{f(0)}$ teremos $f(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$*

Demonstração. *Seja $b = f(0)$. A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \frac{f(x)}{b}$, é monótona injetiva, continua transformando progressões aritméticas em progressões geométricas e agora tem-se $g(0) = 1$. Dado $x \in \mathbb{R}$ qualquer, a sequência $x, 0, -x$ é uma progressão aritmética, logo $g(x), 1, g(-x)$ é uma progressão geométrica de razão $g(-x)$. Segue-se $g(-x) = \frac{1}{g(x)}$. Seja agora $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, a sequência $0, x, 2x, \cdots, nx$ é uma progressão aritmética, logo $1, g(x), g(2x), \cdots, g(nx)$ é uma progressão geométrica, cuja razão evidentemente é $g(x)$. Então seu $(n+1)-$enésimo termo é $g(nx) = g(x)^n$. Se $-n$ é um inteiro negativo então $g(-nx) = \frac{1}{g(nx)} = \frac{1}{g(x)^n} = g(x)^{-n}$. Portanto, vale $g(nx) = g(x)^n$ para quaisquer $n \in \mathbb{Z}$e $x \in \mathbb{R}$. Segue-se do teorema de caracterização acima que, pondo $a = g(1) = \frac{f(1)}{f(0)}$, tem-se $g(x) = a^x$, ou seja, $f(x) = ba^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Observe que este resultado, válido para funções monótonas, também é válido para funções contínuas, como mostra o teorema a seguir.

Teorema 6. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua que transforma qualquer PA numa PG. Ponha $b = f(0)$ e $a = f(1)/f(0)$. Mostre que $f(x) = ba^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. *Vamos provar diretamente. Observe que em consequência de $g(r) = a^r$ quando r é racional podemos estender para toda a reta $\mathbb{R}$ usando a densidade de $\mathbb{Q}$. Para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ existe uma sequência $(r_n) \subset \mathbb{Q}$ tal que $r_n \to x$, quando $n \to \infty$. Assim, usando a continuidade de g, temos:*

$$\lim_{n \to \infty} g(r_n) = \lim_{n \to \infty} a^{r_n} = a^x.$$

É importante perceber que se for dada uma progressão aritmética e uma progressão geométrica com devidas restrições então seremos capaz de associá-las a um função do tipo exponencial.

Teorema 7. *Seja x_n uma progressão aritmética não constante e y_n uma progressão geométrica de razão positiva e diferente de 1. Então existe uma e somente uma, função do tipo exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ba^x$, tal que $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, \ldots, f(x_n) = y_n \ldots$*

Demonstração. *Suponha, por contradição, que temos duas funções distintas f e g do tipo exponenciais tais que $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e ocorre:*

$$f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, \ldots$$

$$g(x_1) = y_1, g(x_2) = y_2 \ldots$$

Agora, como f e g são distintas e do tipo exponencial, podemos supor que para os reais $b_1 < b_2$, temos:

$$f(x) = b_1 a^x$$

$$g(x) = b_2 a^x.$$

Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos $y_n = b_1 a^n = b_2 a^n$. Como $a > 1$ temos $b_1 = b_2$, contradição.

Se $f(x_n) = ba_1^n$ e $g(x_n) = ba_2^n$. Suponha, sem perda de generalidade, que $1 < a_1 < a_2$. Para cada n, temos $y_n = ba_1^n = ba_2^n$, seguindo para a conclusão de que $a_1 = a_2$, contradição.

Por fim, segue que se $b_1 < b_2$ e $1 < a_1 < a_2$ evidentemente f e g são distintas. A conclusão é de que f é única.

Dando continuidade ao estudo das funções do tipo exponencial, vamos apresentar a prova dos seguintes resultados:

Teorema 8. *Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por* $f(x) = \begin{cases} 2^x, & se\ x \in \mathbb{Q}; \\ 3^x, & se\ x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

a) Se (x_n) é uma PA com primeiro termo e razão racionais, mostre que $(f(x_n))$ é uma PG.

b) se (x_n) é uma PA com primeiro termo irracional e razão racional, mostre que $(f(x_n))$ é uma PG.

c) f não é crescente e descontínua.

d) *f não transforma qualquer PA em PG.*

Demonstração. *Vamos enumerar as provas dos itens anteriores:*

a) *Se (x_n) é uma PA com $x_1, r \in \mathbb{Q}$, então $x_n = x_1 + (n-1)r \in \mathbb{Q}$. Daí,*

$$f(x_n) = 2^{x_n} = 2^{x_1+(n-1)r}.$$

Logo $f(x_n)$ é uma PG.

b) *Seja $x_n = p + (n-1)q$ de forma que $p \notin \mathbb{Q}$ e $q \in \mathbb{Q}$. Vamos provar por indução. Veja*

$$f(x_1) = 3^p$$

$$f(x_2) = 3^p \cdot 3^q.$$

Suponha que para $n > 2$, ocorre de $\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\}$ser uma progressão geométrica de razão 3^q. Agora vamos analisar $f(x_{n+1})$. Veja que

$$f(x_n) = 3^{(p+(n-1)q)} = 3^p 3^{(n-1)q},$$

Facilmente concluímos que

$$f(x_{n+1}) = 3^q 3^{nq}.$$

Onde, por fim, temos $f(x_n)$ é uma PG de razão 3^q.

c) *Veja que f não é crescente. Tome $3 < \pi < 4$, então temos*

$$f(\pi) = 3^\pi > 3^3 = 27 > 16 = 2^4 = f(4).$$

Agora, vamos mostrar que f é descontínua. Como $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ são densos em $\mathbb{R}$, dado um ponto $a \in \mathbb{R}$ fixado, existem sequências $(r_n) \subseteq \mathbb{Q}$ e $(i_n) \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. De forma que para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $r_n < a < i_n$ e ambas as sequências convergem para a. Logo, temos

$$lim_{n\to\infty} f(r_n) = 2^a \neq 3^a = lim_{n\to\infty} f(i_n).$$

Portanto, descontínua.

d) *A resposta deste item é não. Considere a progressão aritmética $x_n = 2 - \pi + (n-1)\pi$. Veja os três primeiros termos:*

$$\begin{cases} x_1 = 2 - \pi \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 2 + \pi. \end{cases}$$

Porém quando aplicamos a sequência em f obtemos:

$$\begin{cases} f(x_1) = 9 \cdot 3^{-\pi} \\ f(x_2) = 2^2 = 4 \\ f(x_3) = 3^2 \cdot 3^{\pi} = 9 \cdot 3^{\pi}. \end{cases}$$

Evidentemente, $f(x_n)$ acima não é uma progressão geométrica.

Por fim, vamos apresentar um último exemplo de função do tipo exponencial.

Teorema 9. *Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = e^{7x+sen(2\pi x)}$. Vamos provar, os resultados seguintes sobre f:*

a) É crescente.

b) É contínua.

c) Para todo $x \in \mathbb{R}$ fixado, f transforma a PA $x, x+1, x+2, \ldots$ numa PG.

d) Contudo, f não transforma toda PA numa PG.

Demonstração. *Vamos iniciar separando as provas por itens:*

a) Temos que $f(x) = e^{7x+sen(2\pi x)}$, logo

$$f'(x) = f(x)[7 + 2\pi cos(2\pi x)] \geq f(x)(7 - 2\pi) > 0.$$

O que implica que f é crescente.

b) Veja que basta observarmos que f é uma função resultante de composição de funções contínuas.

c) Vamos provar por indução. Veja que $f(x) = e^{7x+sen(2\pi x)}$. E em consequência $f(x+1) = e^{7x+7+sen(2\pi(x+1))}$.

Observe que entre o segundo e o primeiro termos temos uma razão igual a e^7. Veja que quando fixamos x, em consequência de sen ser uma função periódica, ocorre $sen(2\pi x) = sen(2\pi(x+1))$. Suponha que para $n > 2$, temos uma PG $\{f(x), f(x+1), \ldots, f(x+n)\}$. Analogamente, sabemos que ocorre $sen(2\pi x + 2\pi n) = sen(2\pi x + 2\pi(n+1))$. Para concluirmos o passo indutivo, veja que ocorre:

$$\frac{f(x+(n+1))}{f(x+n)} = e^7 = \frac{f(x+n)}{f(x+(n-1))}.$$

Por indução, concluímos que temos uma PG.

d) *Observe que de fato não é qualquer PA que é levado em uma PG por f. considere a PA:* $x_n = \frac{(n-1)}{8}$.

Veja os três primeiros termos:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{1}{8} \\ x_3 = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Porém quando aplicamos a sequência em f obtemos:

$$\begin{cases} f(x_1) = 1 \\ f(x_2) = e^{\frac{7}{8}+\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ f(x_3) = e^{\frac{7}{4}+1}. \end{cases}$$

Observe que quando tomamos a razão

$$\frac{f(x_2)}{f(x_1)} = e^{\frac{7}{8}+\frac{\sqrt{2}}{2}} \neq e^{\frac{7}{8}+1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{f(x_3)}{f(x_2)}.$$

O que de fato, nos garante que não temos uma PG.

É importante também caracterizar a função $f(x) = e^{kx}$ via derivada, para isso apresentaremos a seguinte definição.

Definição 9. *A derivada de uma função f é a função denotada por f' onde para qualquer x no domínio de f temos*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

se esse limite existir.

Calculando agora a derivada da função exponencial $f(x) = a^x$ e usando a definição de derivada temos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h-1)}{h}$$

daí,

$$f'(x) = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h}$$

e quando x=0,

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Logo se a função exponencial $f(x) = a^x$ for derivável em zero então é derivável em toda parte e

$$f'(x) = f'(0)a^x$$

Portanto as funções exponenciais são aquelas onde a taxa de variação instantânea(derivada) é proporcional ao valor da própria função. Agora observe que a derivação mais simples ocorre quando $f'(0) = 1$ consequentemente escolhendo para a base a o número e temos:

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

2.2.2 Modelagem Exponencial

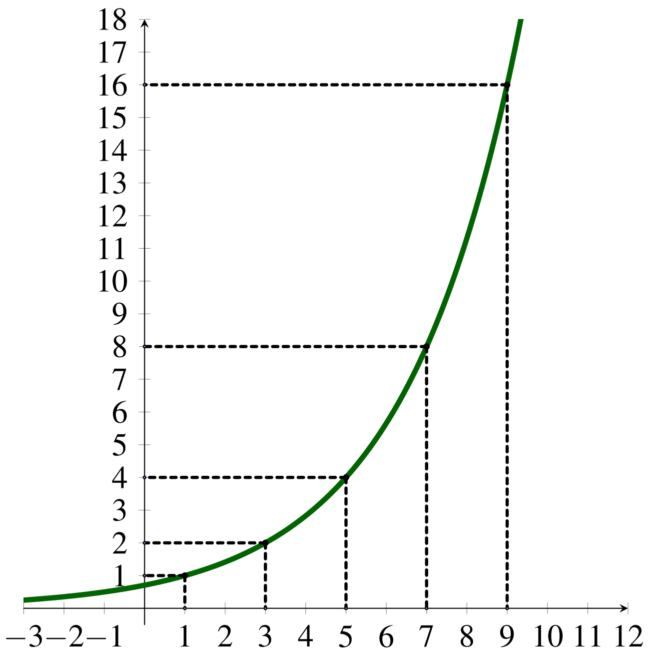
O parâmetro curricular nacional (PCN) de matemática, 1998, estabelece em um de seus aspectos, a ênfase na resolução de problemas, na exploração da matemática a partir dos problemas vividos no cotidiano e encontrada nas várias disciplinas. Também encontramos no (PCN Matemática,1998,32-33) que a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode aprender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas. Com base no PCN de matemática, muitos livros didáticos começam o capítulo de função exponencial com uma situação problema.

Suponha que no estado do Ceará o número de casos de Covid-19 venha dobrando a cada dois dias. Considere que no dia 15 de março de 2020, foi registrado o primeiro caso de pessoa infectada pelo coronavírus. Portanto temos que

Dia	Número de casos
1	1
3	2
5	4
7	8
9	16
11	32
...	
t	$2^{\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\right)}$

A partir dos dados da tabela acima podemos então perceber que se trata de uma função exponencial, pois a variação correspondente da variável dependente $f(x+t)-f(x)$ é proporcional ao valor da variável dependente $f(x)$, onde a constante de proporcionalidade depende do acréscimo t.

Seja então $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{+}$ tal que, $f(x)=2^{\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)}$, teremos como gráfico



Fonte-Elaborado pelo autor

Onde mostra o crescimento exponencial do número de pessoas que foram infectadas por dia. A partir da função podemos então determinar o número de pessoas infectadas em, por exemplo, 1 mês, considerando que as condições permanecem as mesmas do início da pandemia. Daí basta calcular o valor de $f(30)$.

$$f(30) = 2^{\left(\frac{30}{2} - \frac{1}{2}\right)} = 2^{\frac{29}{2}} \cong 23.170$$

Ou seja, em um mês teremos uma quantidade aproximada de 23.170 pessoas infectadas com o vírus da Covid-19. O exemplo serve para que o aluno possa entender melhor o crescimento do número de infectados porém não é suficiente para estimar um valor real pois existem outros fatores que influenciam na construção do modelo matemático.

3 EXPONENCIAIS COMPLEXAS

3.1 Os números complexos

Dando continuidade ao estudo das exponenciais, estudaremos agora como este parâmetro é abordado quando estamos a trabalhar sobre os complexos. Sugerimos que o leitor pouco familiarizado com o corpo dos complexos leia Brown e Churchill (2015) e Soares (2007). E seria adequado alguma noção de equações diferenciais ordinárias e álgebra linear, respectivamente: Tello (1979); Hoffman *et al.* (1973) e Silva (Campina Gande, 2001).

3.1.1 Exponencial complexa

Observemos que ao definirmos $f(x) = ke^{kx}$, podemos também caracterizar esta como sendo a única função derivável tal que $f'(x) = kf(x)$ e $f(0) = 1$. Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por $f(\theta) = \cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)$. Observe que esta é uma parametrização do círculo unitário $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. Perceba que:

1. $f(\theta + \phi) = f(\theta) \cdot f(\phi)$;
2. $f(0) = 1$;
3. $f'(\theta) = -\text{sen}(\theta) + i\cos(\theta) = if(\theta)$.

Isto nos motiva a escrever que $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)$. A partir da definição conseguimos concluir a identidade: $e^{i\pi} + 1 = 0$. Veja que outra motivação para se adotar tal notação vem das Séries de Taylor, podemos escrever:

$$(1)\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Veja que as funções seno e cosseno, pelas Series de Taylor, podem ser escritas como:

$$(2)\ \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!}$$

$$(3)\ \text{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Escreva em (1), $x = i\theta$. Observando que as potências de i tem valor igual a:

$$\begin{cases} i^1 = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \\ i^4 = 1. \end{cases}$$

Observando que encontramos (2) e (3) nesse processo, concluímos que $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\mathrm{sen}(\theta)$.

Definição 10. *A exponencial complexa, para $z \in \mathbb{C}$ com $z = x + iy$, é definida por*

$$e^z = e^x(cosy + iseny).$$

Por convenção, algumas vezes escrevemos exp(z) em vez de e^z. Como os números complexos contêm os números reais, de tal forma que, se $z = x + 0i$ para $x \in \mathbb{R}$ temos que $e^z = e^x$. Portanto é interessante observar a extensão de e^x para e^z. Primeiro veja que

$$|e^z| = e^x\sqrt{(cosy)^2 + (seny)^2} = e^x$$

Como $e^x > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, temos como consequência que para qualquer $z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$. Lembrando do curso de cálculo que a série de Taylor para e^x em torno de x =0 é

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \qquad -\infty < x < \infty$$

Vamos supor então que seja válida para $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ com $z \in \mathbb{C}$, portanto se z for um imaginário puro, ou seja, sua parte real é zero e z assume a forma $z = iy$. Substituindo temos

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \cdots + \frac{(iy)^n}{n!} + \cdots$$

Reorganizando, separando a soma em suas partes real e imaginária, segue

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} \cdots + (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + \cdots + \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} \cdots + (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right) i$$

Para concluir, temos que

$$cosx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$senx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

e portanto, chegamos na fórmula de Euler que é dada por $e^{iy} = cosy + iseny$, onde y é medido em radianos. Apesar de não mostrarmos que a série $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ pode ser usada para números complexos, pois teríamos que escrever sobre os critérios de convergência de séries de potências complexas. O que queremos é dar um sentido à fórmula de Euler. Agora, aplicando a fórmula de Euler na definição 10, temos

$$e^z = e^x(cosy + iseny) = e^x.e^{iy} \Leftrightarrow e^{x+iy} = e^x.e^{iy}$$

onde $z = x + iy$ com x e y números reais, portanto podemos associar a propriedade $e^{x_1}.e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$.

Deixamos ao leitor interessado a referência Soares (2007). Verificaremos a validade de algumas propriedades para os números complexos.

Proposição 2. *Seja z_1 e z_2 números complexos então $e^{z_1}.e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$*

Demonstração. *Como z_1 e z_2 são números complexos então podemos representá-los nas seguintes formas $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$, logo*

$$e^{z_1}.e^{z_2} = e^{x_1+iy_1}.e^{x_2+iy_2} = (e^{x_1}e^{iy_1})(e^{x_2}e^{iy_2}) = (e^{x_1}e^{x_2})(e^{iy_1}e^{iy_2}) = e^{x_1+x_2}.e^{i(y_1+y_2)}$$

De fato pois x_1 e x_2 pertencem aos reais e

$$\begin{aligned} e^{iy_1}e^{iy_2} &= (cosy_1 + iseny_1)(cosy_2 + iseny_2) \\ &= (cosy_1.cosy_2 - seny_1.seny_2) + i(seny_1.cosy_2 + cosy_1.seny_2) \\ &= cos(y_1 + y_2) + isen(y_1 + y_2) \\ &= e^{i(y_1+y_2)} \end{aligned}$$

e, como

$$(x_1 + x_2) + (i(y_1 + y_2)) = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = z_1 + z_2$$

Portanto,

$$e^{z_1}.e^{z_2} = e^{x_1+x_2}.e^{i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}$$

Lema 2. *Seja z um número complexo então $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$*

Demonstração. *Seja $z = x + iy$, com x e y números reais, aplincando a Proposição 2 e utilizando a fórmula de Euler, temos*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{e^z} &= \frac{1}{e^{x+iy}} \\
&= \frac{1}{e^x.e^{iy}} \\
&= \frac{1}{e^x.(cosy + iseny)} \\
&= \frac{1}{e^x}(cosy - iseny) \\
&= e^{-x}(cos(-y) + isen(-y)) \\
&= e^{-z}
\end{aligned}$$

Proposição 3. *Seja z_1 e z_2 números complexos então $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$*

Demonstração. *Para a demonstração utilizaremos a Proposição 2, fazendo*

$$e^{z_1 - z_2}.e^{z_2} = e^{z_1}$$

portanto, aplicando o Lema 2, multiplicando ambos os membros da igualdade anterior por e^{-z_2}, temos

$$e^{z_1 - z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$$

Proposição 4. *Seja z um número complexo e n um número inteiro qualquer então $(e^z)^n = e^{nz}$.*

Demonstração. *Provaremos utilizando indução. Para n=1, o resultado é óbvio. Considerando então válido para um $k \in \mathbb{N}$, provaremos sua validade para $k+1$, para isso*

$$(e^z)^{k+1} = (e^z)^k.(e^z)^1 = e^{kz}.e^z = e^{kz+z} = e^{(k+1)z}.$$

Agora estendendo a propriedade para $n \in \mathbb{Z}$. Basta considerar $n < 0$ e fazer $n = -m$ com $m \in \mathbb{N}$, daí

$$(e^z)^n = (e^z)^{-m} = \frac{1}{(e^z)^m} = \frac{1}{e^{mz}} = e^{-mz} = e^{nz}.$$

Portanto podemos afirmar que as propriedades acima da exponencial complexa também são válidas nas exponenciais reais, porém veremos que em alguns casos existem diferenças. Uma primeira diferença acontece quando $e^z < 0$ por exemplo, quando $e^z = e^{\pi i} = e^0(cos\pi + isen\pi) = -1 + 0 = -1 < 0$, portanto podemos ter exponenciais complexas com valores negativos, porém não é possível encontrar uma exponencial real negativa. Vale ressaltar que a equação $e^{\pi i}+1=0$ é também conhecida como a identidade de Euler, considerada por muitos matemáticos a identidade mais bela de toda a matemática. Ela relaciona cinco números fundamentais da matemática: e, π, i, 0 e 1; com as três operações básicas da matemática: adição, multiplicação e exponenciação. Outra diferença aparece quando extraímos uma raiz complexa mas antes provaremos o lema.

Lema 3. *Para todo $k \in \mathbb{Z}$ temos que $e^{iy} = e^{i(y+2k\pi)}$.*

Demonstração. *Para demonstrar basta aplicar a fórmula de Euler em $e^{i(y+2k\pi)}$ o que equivale dizer que $e^{i(y+2k\pi)} = cos(y+2k\pi)+isen(y+2k\pi)$, daí, como as funções seno e cosseno são periódicas, temos que, $cos(y+2k\pi)+isen(y+2k\pi) = cosy+iseny = e^{iy}$.*

Proposição 5. *Seja n um número inteiro positivo e z um número complexo qualquer então, para cada $z \in \mathbb{C}$ existem n números complexos $f(z)$tal que $f(z)^n = e^z$*

Demonstração. *Observe que podemos escrever:*

$$(e^z)^{\frac{1}{n}} = [e^{(x+iy)}]^{\frac{1}{n}} = [e^x e^{iy}]^{\frac{1}{n}} = [e^x e^{i(y+2k\pi\ )}]^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{x}{n}} e^{(\frac{iy+2ik\pi}{n})} = e^{\frac{x}{n}+\frac{iy+2ik\pi}{n}} = e^{\frac{z+2ik\pi}{n}}.$$

Para k variando de 1 até n, para $k > n$ ou $k < 0$ ocorrerá repetições. A periodicidade é uma outra diferença entre as exponencial complexa e real.

Definição 11 (Funções periódicas)**.** *Uma função $f : A \to \mathbb{C}$, $A \subseteq \mathbb{C}$, é periódica se existe um número complexo $p \neq 0$, onde $f(z+p) = f(z)$, para qualquer z pertencente ao domínio. Então será definido, o valor p como período da função.*

Observe que a condição dada na definição anterior para $p \neq 0$ é fundamental. Se $p = 0$, teríamos $f(z) = f(z)$ e, portanto toda função seria periódica.

Proposição 6. *A função exponencial complexa, $f(z) = e^z$ é periódica.*

Para demonstrar basta observar que, dado um um número complexo z qualquer, temos

$$e^{(z+2\pi i)} = e^x.e^{i(y+2\pi)}$$

aplicando o lema 3, quando k=1, então $e^x.e^{i(y+2\pi)} = e^x.e^{iy}$ e portanto

$$e^{(z+2\pi i)} = e^x.e^{iy} = e^{x+iy} = e^z$$

Logo temos que a função exponencial complexa $f(z) = e^z$ é periódica e possui período $2\pi i$. Já a função exponencial real $f(x) = e^x$ para $x \in \mathbb{R}$, não é periódica. Observe que a função exponencial complexa não é injetora já que $f(z) = e^z$ e $f(z + 2\pi i) = e^z$.

Podemos obter o conjugado de e^z basta fazer

$$\begin{aligned}
\overline{e^z} &= \overline{e^x(cosy + iseny)} \\
&= e^x(cosy - iseny) \\
&= e^x(cos(-y) + isen(-y)) \\
&= e^x.e^{-iy} \\
&= e^{x-iy} \\
&= e^{\overline{z}}
\end{aligned}$$

Lembrando que a função cosseno é par pois, $f(x) = cos(x) = cos(-x) = f(-x)$ e a função seno é ímpar de modo que $g(x) = sen(x) = -sen(-x) = -g(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Vamos agora provar um resultado relativo à derivada de uma função exponencial bem conhecido, ou simplesmente decorado, dos cursos de cálculo.

Definição 12. *Seja $f : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$ aberto, uma função complexa. f é holomorfa em A se $f'(z)$ existe para todo ponto $z \in A$.*

Teorema 10. *Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dada por $f(z) = e^z$. Então f é uma função holomorfa e temos $f'(z) = f(z)$, para todo $z \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. *Por definição, podemos escrever $f(z) = e^z = e^x(cos(y) + isen(y))$. Sendo $u = e^x cos(y)$ e $v = e^x sen(y)$, temos que:*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = e^x cos(y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x sen(y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = e^x seny \\ \frac{\partial v}{\partial y} = e^x cosy \end{cases}$$

Dando continuidade vamos apresentar mais um resultado.

Proposição 7. *Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa tal que $f(0) = 1$ e $f'(z) = f(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Então, $f(z) = e^z$, para todo $z \in \mathbb{C}$.*

Demonstração. *Defina* $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *por* $g(z) = e^{-z} f(z)$. *Observe que g é uma função holomorfa, pois é a composição de duas funções holomorfas. Derivando para cada* $z \in \mathbb{C}$ *temos:*

$$g'(z) = (e^{-z})' f(z) + e^{-z}(f(z))' = -e^{-z} f(z) + e^{-z} f'(z) = 0.$$

Isto nos garante que g é constante. Observe que $g(0) = e^0 f(0) = f(0) = 1$. *Assim, para cada* $z \in \mathbb{C}$ *temos* $e^{-z} f(z) = 1$. *Concluímos que* $f(z) = e^z$.

Poucos são os vestibulares que exigem o conteúdo de exponencial complexa, porém mostraremos uma questão que foi aplicada no vestibular IME- Instituto Militar de Engenharia.

Exemplo 4 (IME 2003)**.** *Seja z um número complexo de módulo unitário e n um número natural. Mostre que é real o complexo w dado por:*

$$w = \frac{z^n}{1 + z^{2n}}.$$

Solução:

Temos que a forma polar para z é $z = |z|.(cosx + isenx) = |z|e^{iy}$,como z é um complexo de módulo unitário, então $z = e^{iy}$, substituindo igualdade dada, temos

$$\begin{aligned} w &= \frac{(e^{iy})^n}{1 + (e^{iy})^{2n}} \\ &= \frac{e^{iyn}}{1 + e^{iy2n}} \\ &= \frac{1}{\frac{1+e^{iy2n}}{e^{iyn}}} \\ &= \frac{1}{e^{-iyn} + e^{iyn}} \qquad (1) \end{aligned}$$

No entanto, das relações $e^{iy} = cosy + iseny$ e $e^{-iy} = cosy - iseny$, temos as propriedades da forma de Euller

$$seny = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \quad e \quad cosy = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$$

Portanto, $e^{iyn} + e^{-iyn} = 2cos(ny)$. Sustituindo em (1), segue

$$\frac{1}{e^{-iyn} + e^{iyn}} = \frac{1}{cos(ny)}$$

que é um número real. Logo o complexo w é real puro.

3.1.2 Logaritmo complexo

Sabemos que para os números reais a função logaritmo é a inversa da função exponencial, ou seja

$$log(x) = y \Leftrightarrow e^y = x$$

onde x é um número real positivo e y pertence aos reais. Agora quando se trata de função exponencial complexa teremos que fazer alguma restrição pois como visto a exponencial complexa é periódica.

$$e^z = e^{z+2\pi ij}, j \in \mathbb{R}$$

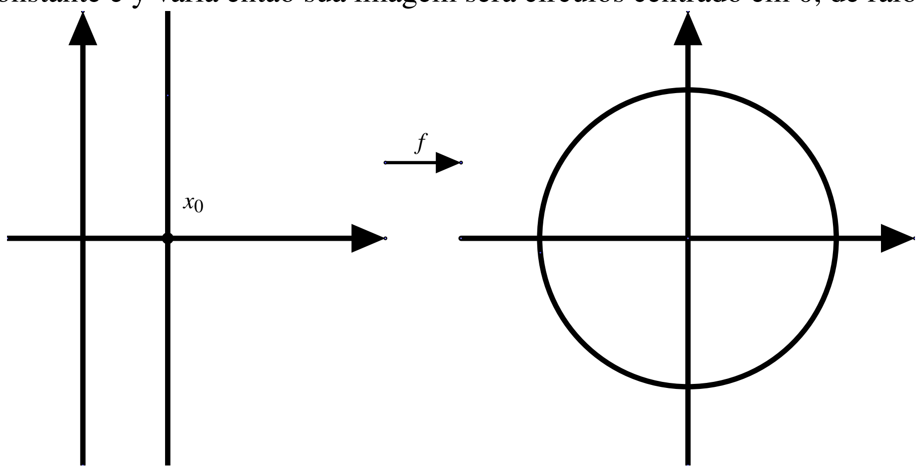
Portanto não temos uma única função f que satisfaz

$$exp(f(z)) = z$$

de fato pois, se tivermos uma função f então fazendo $g(x) = f(z) + 2\pi ik, \quad k \in \mathbb{Z}$, veja que

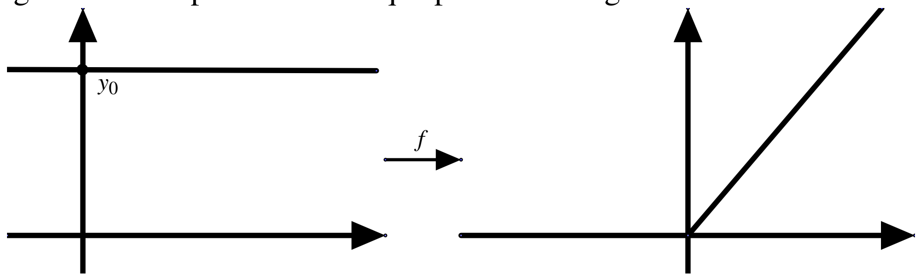
$$\begin{aligned} exp(g(z)) &= exp(f(z) + 2\pi ik) \\ &= exp(f(z))exp2\pi ik \\ &= exp(f(z)).(cos(2\pi k) + isen(2\pi k)) \\ &= exp(f(z)).(1 + i0) \\ &= exp(f(z)) \end{aligned}$$

É interessante observar o que acontece quando o domínio da função exponencial complexa $f(z) = e^z = e^x(cosy + iseny)$ com $z = x + iy$ são retas verticais $x = x_0$, para isso perceba que como x é constante e y varia então sua imagem será círculos centrado em 0, de raio e^{x_0}



Fonte-Elaborado pelo autor

Já para as retas horizontais $y = y_0$ temos agora, x variando e y constante daí resulta em uma imagem formada por semi-retas que partem da origem.



Fonte-Elaborado pelo autor

Definição 13 (Logaritmo de um número complexo)**.** *Seja o número complexo* $z = |z|(cos\theta + isen\theta) = re^{i\theta} \neq 0$ *(forma polar), definiremos como o logaritmo de um número complexo*

$$logz = logr + i\theta,$$

onde $logr$ *é o logaritmo natural do número* $r > 0$*.*

Caso $\theta = 0$ teremos o logaritmo real. Veja que a definição acima foi construída a partir da proposição ,

$$\text{se } z = e^w \text{ então } w = logz$$

Fazendo $z = re^{i\theta}, -\pi < \theta \leq \pi \quad e \quad w = u + iv$. Temos então que

$$re^{i\theta} = e^{u+iv} = e^u e^{iv} \qquad (1)$$

Calculando

$$|z| = \left|e^{u+iv}\right| = \left|e^u e^{iv}\right| = |e^u| = |e^u| . \left|e^{iv}\right| = |e^u| . |cosv + isenv| = |e^u|$$

logo

$$r = e^u \qquad (2)$$

e portanto

$$u = logr$$

onde log é o logaritmo real. Substituindo (2) em (1), temos

$$e^{i\theta} = e^{iv}$$

o que implica que

$$v = \theta + 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

logo

$$w = logz = u + iv = logr + i(\theta + 2\pi n) \quad n \in \mathbb{Z}$$

o que equivale a

$$log\ z = log\ r + iarg\ z$$

Exemplo 5 (O paradoxo de Bernoulli)**.** *Considere $z \in \mathbb{C}$, com $z \neq 0$. Veja que considerando que tanto z quanto z^2 pertencem ao domínio da função* log*. O chamado paradoxo de Bernoulli é o seguinte:*

$$(-z)^2 = z^2 \Rightarrow 2\log(-z) = 2\log z \Rightarrow (-z) = z.$$

Onde está o erro desta expressão?

Demonstração. *Em geral o erro está no uso da propriedade $log(z^2) = 2logz$. Tal propriedade foi omitida no enunciado. Contudo, veja que pode ocorrer do número z pertencer ao domínio da função* log*, mas seu quadrado z^2 não. Por exemplo, considere o ramo principal do logaritmo e faça $z = i$.*

Uma observação é que para definir um ramo do logaritmo complexo precisa-se retirar do plano $\mathbb{C}$ uma semirreta que emana da origem. Portanto como no exemplo anterior, pode ocorrer de um número complexo z pertencer ao domínio do log, mas z^2 pertencer à semirreta omitida para definir o log.

Exemplo 6. *Seja $z = 1 - \sqrt{3}i$, temos que r=2 e $\theta = -\frac{\pi}{3}$. Portanto,*

$$log(1-\sqrt{3}i) = log2 + i\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = log2 + \left(2k - \frac{1}{3}\right)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Exemplo 7. *Seja $z = 1$ então qual o valor de log1?*

Veja que r=1 e $\theta = 0$. Logo,

$$log1 = log1 + i\,(0 + 2k\pi) = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Daí podemos observar que o logaritmo pode assumir vários valores distintos o que caracteriza uma função multivalente. Para fazer a função logarítmica ficar univalente, teremos que restringir o argumento de z a um intervalo

$$2k\pi \leq \theta < 2(k+1)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

Fazendo isto, o logaritmo ficará bem definido e teremos uma função univalente onde k representa a determinação ou ramo do logaritmo.

Como vimos para $z \neq 0$ em $\mathbb{C}$, escrever $\log z = w$ equivale a escrever $z = e^w$, em que equivale a escrever $\log z = \ln |z| + i \arg z$. Para que isso represente uma função bem definida, precisamos nos restringir a subconjunto de $\mathbb{C}$ nos quais o argumento possa ser determinado univocamente. Veja que a função $f(z) = e^z$, com z completo cobre o plano menos a origem e perde a injetividade quando são dadas voltas no círculo unitário. Onde $e^{i\theta} = e^{i\theta+2\pi}$, justamente pela periodicidade das funções seno e cosseno.

Com este objetivo, para cada $0 \leq \phi < 2\pi$, considere a semirreta fechada partindo da origem $L_\phi = \{t(\cos\phi + \mathrm{sen}\phi); t \leq 0, t \in \mathbb{R}\}$ e ponha

$$\mathscr{D}_\phi = \mathbb{C} - L_\phi.$$

Veja que $\mathscr{D}_\phi$ é aberto conexo de $\mathbb{C}$ e, para todo $z \in \mathscr{D}\phi$, existe um único $\arg_\phi z$ satisfazendo $\phi < \arg_\phi z > \phi + 2\pi$. Portanto, podemos definir uma função, chamada de **ramo do logaritmo** $\log : \mathscr{D}_\phi \to \mathbb{C}$ por

$$\log z = \ln |z| + i \arg_\phi z.$$

Podemos, sem nem um problema, convencionar um outro intervalo diferente de $0 \leq \theta < 2\pi$ para representar o valor principal no entanto é necessário que tenha um comprimento de 2π. Seja $\log_k z$ o ramo do logaritmo, então

$$\log_k z = \log r + i\theta, \quad 2k\pi \leq \theta < 2(k+1)\pi.$$

Proposição 8. *Sejam* $U_1 = \{z \in \mathbb{C}; Re(z) > 0\}$*,* $U_2 = \{z \in \mathbb{C}; Im > 0\}$ *e* $U_3 = \{z \in \mathbb{C}; Im < 0\}$*. Os seguintes resultados são verdadeiros:*

a) $\mathscr{D}_0 = U_1 \cup U_2 \cup U_3$.

b) Em U_1*, tem-se* $\arg_0 z = arcsen[\frac{Im(z)}{|z|}]$.

c) Em $U_2 \cup U_3$*, tem-se* $\arg_0 z = arccos[\frac{Re(z)}{|z|}]$.

d) As funções $\arg_0 z$ *e* $\log z = |z| + i \arg_0 z$ *são contínuas em* $\mathscr{D}_0$.

Demonstração. *Vamos separar a prova por itens:*

a) É verdadeira, diretamente da definição.

b) Veja que $z = x + iy \in U_1 \Rightarrow x > 0$ *e* $\frac{\pi}{2} < \arg_0 z < \frac{\pi}{2} \Rightarrow sen(\arg_0 z) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{Im(z)}{|z|}$.

c) $z = x + iy \in U_2$ *(ou* $z \in U_3$*)* $\Rightarrow y > 0$ *(ou* $y < 0$*) e* $0 < \arg_0 z < \pi$ *(ou*$-\pi < \arg_0 z < 0$*)*

$\Rightarrow cos(\arg_0 z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{|z|}$.

d) Este item decorre dos dois itens anteriores.

Exemplo 8. *Mostre que*

$$\log\ i^2 = 2\log i$$

quando for utilizado o ramo

$$\log z = \log\ r + i\theta \quad \left(r > 0, \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{9\pi}{4}\right)$$

Mostraremos que o lado esquerdo da equação é igual ao lado direito, para isso temos que

$$\log\ i^2 = \log(-1) = \log\ 1 + i\pi = i\pi$$

por outro lado,

$$2\log\ i = 2\left(\log 1 + i\frac{\pi}{2}\right) = \pi i$$

logo

$$\log\ i^2 = 2\log i$$

Agora observe o que acontece se o ramo utilizado fosse

$$\log z = \log\ r + i\theta \quad \left(r > 0, \frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{11\pi}{4}\right)$$

daí

$$\log\ i^2 = \log(-1) = \log\ 1 + i\pi = i\pi$$

mas

$$2zlog\ i = 2\left(z\log 1 + i\frac{5\pi}{2}\right) = 5\pi i$$

e portanto teríamos

$$z\log\, i^2 \neq 2z\log i$$

Portanto é importante ficarmos atentos pois nem sempre as propriedades que são válidas quando utilizamos os logaritmos reais podem ser aplicadas nos logaritmos complexos.

Proposição 9. *Todo ramo do logaritmo* $\log : \mathscr{D}_\phi \to \mathbb{C}$, $\log z = ln|z| + i\arg_0 z$, *é uma função holomorfa e vale* $\log'(z) = \frac{1}{z}$, *para todo* $z \in \mathscr{D}_\phi$.

Demonstração. *Observe que* $\log$ *é uma função contínua. Dado* $z \in \mathscr{D}_\phi$, *escreva* $w = \log z$, *ou ainda* $e^w = z$. *Observe que a função exponencial é derivável em* w, *como vimos anteriormente neste texto. E além disto,* $e^{w\prime} = e^w \neq 0$, *a função inversa* $\log$ *é derivável em* z *e obtemos que sua derivável é igual a*

$$\log'(z) = \frac{1}{\exp' w} = \frac{1}{\exp w} = \frac{1}{z}.$$

Deixamos ao leitor mais ávido a sugestão de leitura Sotomayor (1979). Onde o autor apresenta o método de Picard, mostrando como surge a série e^x via solução da EDO $y' = y, y(0) = 1$ (série de potências). Por fim vamos apresentar o seguinte resultado:

Definição 14. *Seja* $\log : \mathscr{D}_\phi \to \mathbb{C}$ *um ramo de logaritmo. Dado* $\lambda \in \mathbb{C}$ *e* $z \in \mathscr{D}_\phi$, *definimos a potência*

$$z^\lambda = exp(\lambda logz)$$

Proposição 10. *Seja a função* $f : \mathscr{D}_\phi \to \mathbb{C}$, *dada por* $f(z) = z^\lambda$, *então:*

a) f *é contínua.*

b) f *é holomorfa e* $f'(z) = \lambda z^{\lambda-1}$.

Demonstração. *Separando a prova por itens, temos:*

a) De fato, f *é a composta de funções contínuas.*

b) Com efeito, $f'(z) = [exp(\lambda logz)]' = exp(\lambda logz)\frac{\lambda}{z} = \lambda\frac{exp(\lambda logz)}{exp(logz)} = \lambda exp[(\lambda-1)logz] = \lambda z^{\lambda-1}$.

Proposição 11. *Sejam* $z, w, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$. *Se as expressões a seguir estiverem bem defenidas em um ramo do logaritmo, então:*

a) $z^{\lambda+\mu} = z^{\lambda} z^{\mu}$.

b) $(zw)^{\lambda} = z^{\lambda} w^{\lambda}$.

Demonstração. *Separando a prova por itens, temos:*

a) $z^{\lambda+\mu} = e^{(\lambda+\mu)\log z} = e^{\lambda \log z + \mu \log z} = e^{\lambda \log z} e^{\mu \log z} = z^{\lambda} z^{\mu}$.

b) $(zw)^{\lambda} = e^{\lambda \log(zw)} = e^{\lambda(\log z + \log w)} = e^{\lambda \log z} e^{\lambda \log w} = z^{\lambda} w^{\lambda}$.

4 EXPONENCIAIS DE MATRIZES

Neste último capítulo, estudaremos as relações entre as exponenciais e as matrizes. Apesar de ser um conteúdo que não é ministrado no ensino médio, é de extrema importância que um professor da área de exatas tenha um conhecimento básico sobre o assunto. Nosso objetivo é mostrar algumas propriedades que se assemelham às exponenciais reais e complexas e dar exemplos de como resolver exponenciais de matrizes. Teremos como base de referência os livros: Lições de Equações Diferenciais Ordinárias, Sotomayor (1979) e Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Contorno, Boyce e DiPrima (2010). Por fim, como informativos deixamos a referência de Kreyszig *et al.* (2011) que oferece ferramentas numéricas para o cálculo de EDO de forma computacional.

Definição 15 (Exponencial de matriz tA)**.** *A exponencial de uma matriz quadrada tA(nxn) com $t \in \mathbb{R}$ é dada por*

$$e^{tA} := I + tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \frac{1}{3!}t^3A^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}t^kA^k$$

onde I é a matriz identidade, e mais, $I = A^0, A^1 = A$ e $A^{k+1} = A^k.A$, para $k \in \mathbb{N}$. Se t=1, a exponencial da matriz A é

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k$$

Agora, observe a semelhança com a função exponencial que é dada pela série de Taylor

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

onde ambas são convergentes, porém não cabe ao nosso objetivo fazer as demonstrações.

Exemplo 9. *Calcule:*

a) $e^{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}$

b) $e^{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$

Solução:

a) Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, aplicando na definição 15, temos

$$
\begin{aligned}
e^{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix} \cdots \\
&= \begin{pmatrix} 1+2+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}\cdots & 0 \\ 0 & 1+3+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}\cdots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

onde

$$I = A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2+0.0 & 2.0+0.3 \\ 0.2+3.0 & 0.0+3.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A.A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2^2+0.0 & 2.0+0.3^2 \\ 0.2^2+3.0 & 0.0+3.3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$$

e assim é calculado as potências da matriz A.

b) De forma análoga ao item a, mas sendo agora a matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, então

$$
\begin{aligned}
e^{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} 1^2 & 1^2 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} 1^3 & 1^3 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix} \cdots \\
&= \begin{pmatrix} 1+1+\frac{1^2}{2!}+\frac{1^3}{3!}\cdots & 1+1+\frac{1^2}{2!}+\frac{1^3}{3!}\cdots \\ 0 & 1+2+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}\cdots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

A partir do exemplo acima é fácil constatar que a propriedade $e^{A+B} = e^A.e^B$ não funciona em geral. De fato, pois

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
e^{A+B} &= e^{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} 3^2 & 1^2 \\ 0 & 5^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} 3^3 & 1^3 \\ 0 & 5^3 \end{pmatrix} \cdots \\
&= \begin{pmatrix} 1+3+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}\cdots & 1+1+\frac{1^2}{2!}+\frac{1^3}{3!}\cdots \\ 0 & 1+5+\frac{5^2}{2!}+\frac{5^3}{3!}\cdots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^3 & e \\ 0 & e^5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Em contrapartida, temos também que

$$\begin{aligned}
e^A.e^B &= \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^2.e+0.0 & e^2.e+0.e^2 \\ 0.e+e^3.0 & 0.e+e^3.e^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^3 & e^3 \\ 0 & e^5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Exemplo 10 (Matriz Diagonal)**.** *Seja a matriz diagonal*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

por indução temos que

$$A^k = \begin{pmatrix} a_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n^k \end{pmatrix}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, portanto

$$
\begin{aligned}
e^A &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \\
&= I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a_1^2}{2!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{a_1^n}{n!} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a_1^3}{3!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{a_n^n}{n!} \end{pmatrix} + \dots \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_1^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_n^k}{k!} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{a_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{a_n} \end{pmatrix} \\
&= diag(e^{a_1}, \cdots, e^{a_n})
\end{aligned}
$$

Logo a exponencial de uma matriz diagonal é uma matriz diagonal. Um caso particular para observar é quando a matriz diagonal for nula, nesta situação teremos como resultado a matriz identidade.

Definição 16 (Matriz Nilpotente)**.** *Chamaremos de matriz nilpotente, a matriz A tal que $A^k = 0$, para algum k inteiro positivo e consequentemente teremos*

$$e^A = I + A + \cdots + \frac{A^{k-1}}{(k-1)!}$$

Exemplo 11 (Matriz Nilpotente)**.** *Considere a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

daí temos que

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A.A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

logo, $A^3 = 0$ e portanto $A^k = 0$ para qualquer $k \geq 3$, segue então que

$$\begin{aligned} e^A &= I + A + \frac{A^2}{2} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Proposição 12. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n e $t \in \mathbb{R}$ então*

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A.e^{tA} = e^{tA}.A$$

Demonstração. *Utilizando a definição 15 e derivando a exponencial e^{tA}, temos*

$$\begin{aligned} (e^{tA})' &= \left(I + tA + \frac{1}{2!} t^2 A^2 + \frac{1}{3!} t^3 A^3 + \cdots \right)' \\ &= 0 + A + \frac{2tA^2}{2!} + \frac{3t^2 A^3}{3!} + \cdots \\ &= A + tA^2 + \frac{t^2 A^3}{2!} + \cdots \\ &= A(I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \cdots) \quad ou \quad (I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \cdots)A \end{aligned}$$

logo

$$(e^{tA})' = A.e^{tA} \quad ou \quad (e^{tA})' = e^{tA}.A$$

Lema 4. *Seja A,B e C matrizes tal que B.C= C.A. Então, $B^n.C = C.A^n$, com $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. *Provaremos por indução em n. Para o caso inicial, $n = 1$,o resultado é imediato. Fazendo então para caso, $n = 2$, temos*

$$B^2.C = (B.B).C = B.(B.C) = B.(C.A) = (B.C).A = C.A.A = C.A^2$$

Considerando válido para $n > 2$ e provando para $n + 1$, segue

$$B^{n+1}.C = (B^n.B).C = B.(B^n.C),$$

e continuando, temos:

$$B.(C.A^n) = (B.C).A^n = C.A.A^n = C.A^n.A = C.A^{n+1}.$$

Proposição 13. *Sejam A, B e C matrizes tal que B.C= C.A. Então,* $e^{tB}C = Ce^{tA}$*, para todo* $t \in \mathbb{R}$

Demonstração. *Aplicando a definição 15 e utilizando o lema 4, temos*

$$\begin{aligned} e^{tB}C &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k B^k}{k!}\right) C \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k (B^k C)}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k (CA^k)}{k!} \\ &= C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \\ &= Ce^{tA} \end{aligned}$$

Proposição 14. *Sejam A e B matrizes tal que A.B= B.A. Então,* $e^{tA}B = Be^{tA}$ *e* $e^{tA}e^{tB} = e^{t(A+B)}$.

Demonstração. *Para a primeira parte, utilizaremos que, se AB=BA, então* $A^k B = B.A^k, k \in \mathbb{N}$*. A Demonstração é feita por indução de forma análoga ao lema 4. Portanto aplicando a definição 13*

$$\begin{aligned} e^{tA}B &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}\right) B \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k (A^k B)}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k (BA^k)}{k!} \\ &= B \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \\ &= Be^{tA} \end{aligned}$$

Para a segunda parte, considere a equação linear homogênea $X' = (A+B)X$*, com* $X(0) = I$*. Agora derive* $e^{tA}.e^{tB}$*,daí*

$$\left(e^{tA}.e^{tB}\right)' = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB}$$

Aplicando a primeira parte demonstração, segue da igualdade acima

$$Ae^{tA}e^{tB} + Be^{tA}e^{tB} = (A+B)e^{tA}e^{tB}$$

De modo análogo, derive $e^{t(A+B)}$, logo

$$\left(e^{t(A+B)}\right)' = (A+B)e^{t(A+B)}$$

Portanto temos que $e^{tA}e^{tB}$ e $e^{t(A+B)}$ são soluções da equação X'=(A+B)X, com X(0)=I. Porém a equação sugerida possui uma única solução, o que nos leva a concluir que

$$e^{tA}e^{tB} = e^{t(A+B)}.$$

Para a demonstração de que equação $X' = (A+B)X$, com $X(0) = I$, possui uma única solução, consulte o livro lições de equações diferenciais ordinárias de Jorge Sotomayor.

Exemplo 12. *Considere a matriz* $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$*, temos*

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\beta \\ -\alpha\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto pela proposição 9, temos

$$\begin{aligned} e^{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}} &= e^{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}} \\ &= e^{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}} . e^{\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} cos\beta & sen\beta \\ -sen\beta & cos\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{a}cos\beta & e^{a}sen\beta \\ -e^{a}sen\beta & e^{a}cos\beta \end{pmatrix} \\ &= e^{a} \begin{pmatrix} cos\beta & sen\beta \\ -sen\beta & cos\beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Veja que

$$
\begin{aligned}
e^{\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} -\beta^2 & 0 \\ 0 & -\beta^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} -\beta^3 & 0 \\ 0 & -\beta^3 \end{pmatrix} + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2!}\beta^2+\frac{1}{4!}\beta^4-\frac{1}{6!}\beta^6+\cdots & b-\frac{1}{3!}\beta^3+\frac{1}{5!}\beta^5-\frac{1}{7!}\beta^7+\cdots \\ -b+\frac{1}{3!}\beta^3-\frac{1}{5!}\beta^5+\frac{1}{7!}\beta^7+\cdots & 1-\frac{1}{2!}\beta^2+\frac{1}{4!}\beta^4-\frac{1}{6!}\beta^6+\cdots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} cos\beta & sen\beta \\ -sen\beta & cos\beta \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Utilizando a série de Taylor onde $cos\beta$ e $sen\beta$ é

$$sen\beta = b - \frac{1}{3!}\beta^3 + \frac{1}{5!}\beta^5 - \frac{1}{7!}\beta^7 + \cdots$$

e

$$cos\beta = 1 - \frac{1}{2!}\beta^2 + \frac{1}{4!}\beta^4 - \frac{1}{6!}\beta^6 + \cdots$$

Portanto, podemos observar algumas semelhanças entre as propriedades das exponenciais de matrizes e exponenciais de números reais ou complexos.

Veremos agora como fica a exponencial de matriz na forma de Jordan, e como colocar a matriz nesta forma facilita o cálculo de sua exponencial.

Teorema 11 (Forma Canônica de Jordan)**.** *Seja $T : V \to V$ um operador linear, onde $\Delta(t) = (t-\lambda_1)^{n_1}.(t-\lambda_2)^{n_2}.\cdots.(t-\lambda_r)^{n_r}$ representa o polinômio característico e $m(t) = (t-\lambda_1)^{m_1}.(t-\lambda_2)^{m_2}.\cdots.(t-\lambda_r)^{m_r}$ é o polinômio mínimo onde λ_i são escalares distintos. Portanto T possui uma representação matricial diagonal em blocos J, onde seus elementos diagonais são da forma*

$$J_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

De modo que para cada λ_i, os blocos correspondentes J_{ij} satisfaz as propriedades:

I.Existe, ao menos um J_{ij} de ordem m_i; todos os outros J_{ij} são de ordem $\leq m_i$;

II.A soma das ordens J_{ij} é n_i;

III.O número dos J_{ij} é igual a multiplicidade geométrica dos λ_i;

IV.O número dos J_{ij} de cada ordem possível é determinado de maneira única por T.

A demonstração pode ser encontrada no livro Álgebra Linear dos autores Hoffman,K;Kunze

Exemplo 13. *Dado o polinômio característico $\Delta(t) = (t-3)^2.(t-5)^3$ de um operador linear T. Quais possíveis formas canônicas de Jordan?*

Para isso basta observar que $t-3$ tem expoente 2 e portanto o número 3 deve aparecer duas vezes na diagonal principal e de forma análogo o número 5 deve aparecer três vezes. Daí teremos

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Que são as possíveis formas de Jordan que é definida pela multiplicação geométrica do polinômio característico. Caso, por exemplo, se dado o polinômio mínimo $m(t) = (t-3)^2(t-5)^2$, o resultado ficaria reduzido para

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Agora observe que podemos decompor cada bloco de Jordan na soma de duas matrizes, uma diagonal onde a diagonal principal é determinada pelo autovalor λ e a outra nilpotente. Ou melhor

$$J(\lambda) = \lambda I + E_1$$

onde E_1 é a matriz nilpotente nxn da forma

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Tal que os elementos que estão à direita dos elementos da diagonal principal é igual a 1 e o restante dos elementos é igual a zero. Portanto como $\lambda I.E_1 = E_1.(\lambda I)$, de fato pois

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

por outro lado,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto satisfaz a proposição 14 e podemos concluir que

$$\begin{aligned} e^{tJ(\lambda)} &= e^{t(\lambda I + E_1)} \\ &= e^{t\lambda} e^{tE_1} \\ &= e^{t\lambda}[I + E_1 t + \frac{{E_1}^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{{E_1}^{n-1} t^{n-1}}{(n-1)!}] \\ &= e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & t & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & t \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Lembrando que o autovalor λ de $j(\lambda)$ tem multiplicidade n se $J(\lambda)$ tiver ordem n. Para blocos associados a autovalores complexos, tal que α e β reais e $j(\alpha,\beta)$ com autovalores $\lambda = \alpha+\beta i$ e $\bar{\lambda} = \alpha-\beta i$. Temos de forma análoga que

$$
\begin{aligned}
J(\alpha,\beta) &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\beta & \alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\beta & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= diag[I(\alpha,\beta),\cdots,I(\alpha,\beta)]+E_2
\end{aligned}
$$

onde

$$
I(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad e \quad E_2 = E_1^2,
$$

agora observe que

$$
diag[I(\alpha,\beta),\cdots,I(\alpha,\beta)]E_2 = E_2 diag[I(\alpha,\beta),\cdots,I(\alpha,\beta)]
$$

de fato pois

$$
\begin{pmatrix} I(\alpha,\beta) & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I(\alpha,\beta) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I(\alpha,\beta) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I(\alpha,\beta) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & I(\alpha,\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I(\alpha,\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & I(\alpha,\beta) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I(\alpha,\beta) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por outro lado,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I(\alpha,\beta) & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I(\alpha,\beta) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I(\alpha,\beta) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I(\alpha,\beta) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & I(\alpha,\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I(\alpha,\beta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & I(\alpha,\beta) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I(\alpha,\beta) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto pela proposição 14 temos,

$$e^{tJ(\alpha,\beta)} = e^{diag[I(\alpha,\beta),\cdots,I(\alpha,\beta)]+E_2} = e^{tdiag[I(\alpha,\beta),\cdots,I(\alpha,\beta)]}e^{tE_2} = diag[e^{tI(\alpha,\beta)},\cdots,e^{tI(\alpha,\beta)}].e^{tE_2}$$

lembrado que a exponencial de uma matriz diagonal é uma matriz diagonal, visto no exemplo 4 e de forma análoga ao exemplo 13 temos que

$$e^{tI(\alpha,\beta)} = e^{t\alpha} \begin{pmatrix} cost\beta & sent\beta \\ -sent\beta & cost\beta \end{pmatrix}$$

logo

$$\begin{aligned} diag[e^{tI(\alpha,\beta)},\cdots,e^{tI(\alpha,\beta)}].e^{tE_2} &= dig[e^{t\alpha}\begin{pmatrix} cost\beta & sent\beta \\ -sent\beta & cost\beta \end{pmatrix},\cdots,e^{t\alpha}\begin{pmatrix} cost\beta & sent\beta \\ -sent\beta & cost\beta \end{pmatrix}].e^{tE_2} \\ &= e^{ta}dig[\begin{pmatrix} cost\beta & sent\beta \\ -sent\beta & cost\beta \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} cost\beta & sent\beta \\ -sent\beta & cost\beta \end{pmatrix}].e^{tE_2} \end{aligned}$$

ou para simplificar a notação, podemos fazer

$$e^{ta}dig[\begin{pmatrix} cost\beta & sent\beta \\ -sent\beta & cost\beta \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} cost\beta & sent\beta \\ -sent\beta & cost\beta \end{pmatrix}].e^{tE_2} = e^{at}diag[R(t,b),\cdots,R(t,b)]e^{tE_2}$$

onde $R(t,b) = \begin{pmatrix} cost\beta & sent\beta \\ -sent\beta & cost\beta \end{pmatrix}$

Portanto, escrevendo uma matriz qualquer A na sua forma de Jordan J, pela proposição 13 temos,

$$e^{tA}C = Ce^{tJ}$$

o que implica

$$e^{tA} = Ce^{tJ}C^{-1}$$

Um fato interessante a estudar está enunciado no teorema abaixo.

Teorema 12 (Determinante da função exponencial de uma matriz)**.**

$$det(e^A) = e^{tr(A)}$$

onde A é uma matriz nxn.

Demonstração. *Dividiremos a demonstração em três partes. Primeiro considere a matriz A de ordem n como sendo diagonal. Portanto podemos escrever na forma*

$$A = diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

e como visto no exemplo 10, temos que $e^A = diag(e^{\lambda_1},e^{\lambda_2},\cdots,e^{\lambda_n})$*. Calculando agora* $det(e^A)$*, segue*

$$det(e^A) = det(diag(e^{\lambda_1},e^{\lambda_2},\cdots,e^{\lambda_n})) = e^{\lambda_1}.e^{\lambda_2}.\cdots.e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n} = e^{tr(A)}$$

Agora considere o caso em que a matriz A é diagonalizada ou seja para a matriz A existe uma matriz C onde $A = CBC^{-1}$ e B é uma matriz diagonal. Aplicando a definição 15 de exponencial de matriz

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots$$

agora substituindo A temos

$$e^A = I + CBC^{-1} + \frac{1}{2!}(CBC^{-1})^2 + \frac{1}{3!}(CBC^{-1})^3 + \cdots$$

veja que

$$(CBC^{-1})^2 = (CBC^{-1}).(CBC^{-1}) = CB(C^{-1}).C)BC^{-1} = CBIBC^{-1} = CBBC^{-1} = CB^2C^{-1}$$

e sucessivamente temos por indução que

$$(CBC^{-1})^3 = CB^3C^{-1}, (CBC^{-1})^4 = CB^4C^{-1}, \cdots$$

logo

$$e^A = I + CBC^{-1} + \frac{1}{2!}CB^2C^{-1} + \frac{1}{3!}CB^3C^{-1} + \cdots = C[I + B + \frac{1}{2!}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 + \cdots]C^{-1}$$

daí

$$e^A = Ce^BC^{-1}.$$

Como o determinante de um produto de matrizes quadradas é o produto de seus determinantes, segue que

$$\begin{aligned}
det(e^A) &= det(Ce^BC^{-1}) \\
&= det(C).det(e^B).det(C^{-1}) \\
&= det(C).det(C^{-1}).det(e^B) \\
&= det(C.C^{-1}).det(e^B) \\
&= det(I).det(e^B) \\
&= det(e^B) \\
&= e^{trB}.
\end{aligned}$$

Considerando o teorema onde diz que o traço de uma matriz é igual a soma de seus autovalores contados com sua multiplicidade. Logo

$$tr(B) = tr(A)$$

e consequentemente

$$det(e^A) = e^{trA}.$$

Agora, para finalizar de uma forma geral. Seja A uma matriz qualquer nxn então existe uma matriz C de ordem n tal que

$$C^{-1}AC = J \rightarrow A = CJC^{-1}$$

onde J é a forma canônica de Jordan e de modo análogo ao caso anterior temos

$$e^A = e^{CJC^{-1}} = Ce^JC^{-1}$$

logo

$$det(e^A) = det(Ce^JC^{-1}) = det(e^J).$$

Observe que o $det(e^J)$ é igual ao produtos dos elementos da diagonal principal e mais, os elementos na diagonal principal de e^J são a função exponencial dos elementos na diagonal principal principal de J

$$det(e^J) = \prod e^{J_{i,j}} = e^{\sum J_{i,j}} = e^{trJ}$$

porém o traço de J é igual ao traço de A, então

$$det(e^A) = e^{trA}.$$

4.1 Aplicação de exponenciais de matrizes

A exponencial de matrizes pode ser aplicada para solucionar sistemas homogêneos de equações diferenciais lineares de primeira ordem, assunto que é visto no curso de cálculo no ensino superior.

Seja o sistema de equações diferenciais lineares homogêneas de primeira ordem com coeficientes constantes:

$$\begin{cases} x_1'(t) &=& a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n \\ x_2'(t) &=& a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n'(t) &=& a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n \end{cases}$$

onde sua forma matricial é representada por

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Daí, fazendo

$$\text{X=}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad \text{A=}\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

temos

$$X' = AX$$

Corolário 1. *Se A é uma matriz quadrada de ordem n e* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *então*

$$X(t) = e^{tA}x_0$$

é a única solução do sistema linear homogêneo com condição inicial $X(0) = x_0$

Exemplo 14. *Seja o sistema linear homogêneo dado por*

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} &=& Ax \\ X(0) &=& B \end{cases}$$

onde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ -12 & 0 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Como estamos resolvendo um problema de valor inicial então, de acordo com o corolário teremos como solução para o sistema, $X(t) = e^{tA}B$. *Portanto utilizando a forma de Jordan da* *matriz A que é dada por*

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

onde $A = C.J_A.C^{-1}$ *de tal forma que*

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e como visto anteriormente, sabemos que $e^{tA} = Ce^{tJ}C^{-1}$ *e mais*

$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & te^{-3t} \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

e portanto

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & te^{-3t} \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 3e^{-3t}t & e^{-3t} & e^{-3t}t \\ -3e^t + 3e^{-3t} & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Agora para calcular a solução para o problema de valor inicial, basta fazer

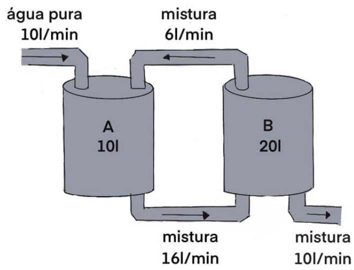
$$X(t) = e^{tA}.B$$

ou seja

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 3e^{-3t}t & e^{-3t} & e^{-3t}t \\ -3e^t + 3e^{-3t} & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \\ 5e^{-3t}t - e^{-3t} \\ -3e^t + 5e^{-3t} \end{bmatrix}$$

Exemplo 15. *Considere dois tanques A e B. Os líquidos bem misturados são bombeados entre os tanques conforme a ilustração abaixo*

Sejam $x_1(t)$ *e* $x_2(t)$ *a quantidade de sal (medido em quilos) nos tanques A e B no instante t, respectivamente. A taxa a qual* $x_1(t)$ *e* $x_2(t)$ *varia é dada por,*



Fonte: Elaborado pelo autor

$\frac{d(x_i)}{dt}$=*(Taxa de entrada de sal) - (Taxa de saída de sal)=* $T_e - T_s$ *para todo* $i \in 1,2$.

A taxa de entrada de sal T_e *(em quilogramas por min) é igual a taxa de entrada de salmoura (em litros por min) multiplicado pela concentração de sal no fluxo de entrada (em quilogramas por litros).*

Já a taxa de saída T_s *(em quilogramas por min) é igual a taxa de saída de salmoura (em litros por min) multiplicado pela concentração de sal no fluxo de saída (em quilogramas por litros).*

Considere que no tempo t=0, o tanque A contém 10 litros de água pura e o tanque B contém 20 litros de uma mistura de água com 12 kg de sal. Encontre a quantidade de sal em cada tanque no instante de tempo t.

Demonstração. *Dos tanques A e B obtemos as seguintes equações diferenciais.*

$$\frac{dx_1}{dt} = 6\frac{l}{min}.\frac{x_2(t)}{20}\frac{Kg}{l} - 16\frac{l}{min}.\frac{x_1(t)}{10}\frac{Kg}{l}$$

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{3}{10}x_2(t) - \frac{8}{5}x_1(t)\frac{Kg}{min}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 16\frac{l}{min}.\frac{x_1(t)}{10}\frac{Kg}{l} - (10+6)\frac{l}{min}.\frac{x_2(t)}{20}\frac{Kg}{l}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{8}{5}x_1(t) - \frac{4}{5}x_2(t)\frac{Kg}{min}$$

E portanto podemos formar o sistema de equações diferenciais,

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{3}{10}x_2(t) - \frac{8}{5}x_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{8}{5}x_1(t) - \frac{4}{5}x_2(t) \\ x_1(0) = 0, x_2(0) = 12 \end{cases}$$

Onde podemos representar na forma matricial,

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} & = & Ax \\ X(0) & = & B \end{cases}$$

onde

$$x = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -\frac{8}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{8}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Calculando os autovalores a partir da equação característica $det(A - \lambda I) = 0$, *obtemos* $\lambda_1 = -\frac{2}{5}$ *e* $\lambda_2 = -2$ *e consequentemente teremos que os autovetores associados são* $v_1 = \binom{1}{4}$ *e* $v_2 = \binom{-3}{4}$. *Logo pelo fato dos dois autovetores serem linearmente independentes temos que a matriz A é diagonalizável, tal que* $A = CDC^{-1}$ *e portanto*

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{16} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \frac{-2}{5} & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Como estamos resolvendo um problema de valor inicial então, de acordo com o corolário teremos como solução para o sistema, $X(t) = e^{tA}B$. *Daí fazendo*

$$e^{tA} = Ce^{tD}C^{-1}$$

Teremos

$$\begin{aligned} Ce^{tD}C^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{\frac{-2}{5}t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{16} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{16} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{e^{-\frac{2t}{5}} + 3e^{-2t}}{4} & \frac{3e^{-\frac{2t}{5}} - 3e^{-2t}}{16} \\ e^{-\frac{2t}{5}} - e^{-2t} & \frac{3e^{-\frac{2t}{5}} + e^{-2t}}{4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Restando apenas multiplicar este resultado pela matriz B, assim

$$\begin{aligned}
X(t) &= e^{tA}B \\
&= Ce^{tD}C^{-1}B \\
&= \begin{bmatrix} \frac{e^{-\frac{2t}{5}}+3e^{-2t}}{4} & \frac{3e^{-\frac{2t}{5}}-3e^{-2t}}{16} \\ e^{-\frac{2t}{5}}-e^{-2t} & \frac{3e^{-\frac{2t}{5}}+e^{-2t}}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{9}{4}e^{-\frac{2t}{5}} - \frac{9}{4}e^{-2t} \\ 9e^{-\frac{2t}{5}} + 3e^{-2t} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ou seja, a solução é dada por,

$$x_1(t) = \frac{9}{4}e^{-\frac{2t}{5}} - \frac{9}{4}e^{-2t}$$

$$x_2(t) = 9e^{-\frac{2t}{5}} + 3e^{-2t}.$$

5 CONCLUSÃO

Apresentamos com o decorrer do texto um material com o intuito de desenvolver, relembrar e aprimorar o professor de nível médio. Tendo para isto, relembrado conceitos que foram abordados no Cálculo e de forma mais profunda na Análise Matemática. Estes dois temas que pouco são abordados, ou nunca, no ensino médio. Contudo, são valiosíssimos para o professor de matemática.

Sabemos que em sala de aula o professor de matemática se vê questionado: como um dado conteúdo pode ser aplicado no mundo real? Estamos interessados em apresentar uma abordagem prática para que o professor possa aplicar em sala. Assim apresentamos na Subseção 2.2.2 um exemplo de como pode ser feita uma modelagem de função exponencial. Esta modelagem pode ser modificada para se adequar ao nível e à turma.

Dando continuidade, passamos ao decorrer do texto conteúdos subsequentes que envolvem funções exponenciais. Como no caso da exponenciais complexas e exponenciais em matrizes. Veja que as funções exponenciais surgem naturalmente quando estudamos os números complexos. Apresentamos resultados e exemplos de como o professor pode desenvolver em turmas de nível mais avançado, como visto no Exemplo 15.

Finalizamos esta dissertação com o anseio de que esta obra posso motivar os colegas professores a desenvolver um ensino matemático mais sólido e que possa a partir deste evoluir para trabalhos envolvendo conteúdos relativos à Análise Matemática junto aos alunos do ensino médio. Ainda que de forma basal. Devo ressaltar que o caminho percorrido por este mestrado foi muito engrandecedor e que o leitor possa ter aproveitado nosso texto para o seu desenvolvimento matemático. Obrigado.

REFERÊNCIAS

BOYCE, W.; DIPRIMA, R. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. [*S. l.*]: Grupo Gen - LTC, 2010.

BROWN, J.; CHURCHILL, R. **Variáveis Complexas e Aplicações**. 9. ed. McGraw Hill Brasil, 2015. ISBN 9788580555189. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=KlsbCgAAQBAJ. Acesso em: 8 jan. 2022.

DANTE, L. R. **Matemática:** ensino médio. São Paulo: Ática. v. 1, 2004.

GIOVANNI, J.; BONJORNO, J. **Matemática completa**. FTD, 2002. ISBN 9788532248275. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=ARDHkQEACAAJ. Acesso em: 8 jan. 2022.

HOFFMAN, K.; KUNZE, R.; FINSTERBUSCH, H. E. **Álgebra linear**. [*S. l.*]: Prentice-Hall Hispanoamericana, 1973.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PéRIGO, R.; ALMEIDA, N. de. **Matemática:**: ciência e aplicações 1 [ensino médio]. Atual, 2001. ISBN 9788535702217. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=FXQTAgAACAAJ. Acesso em: 8 jan. 2022.

KREYSZIG, E.; KREYSZIG, H.; NORMINTON, E. J. **Advanced engineering mathematics**. 10. ed. Hoboken, NJ: Wiley, 2011.

LIMA, E. L. **Números e funções reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).

LIMA, E. L. **Análise real**. Rio de Janeiro: IMPA, 2020. v. 1.

SILVA, M. B. **Soluções de sistema de equações diferenciais lineares**. 2001. 75 f. Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Matemática). Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Gande, 2001.

SOARES, M. **Calculo em uma variável complexa**. IMPA, 2007. (Matematica universitaria). Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=GVX0nAEACAAJ. Acesso em: 8 jan. 2022.

SOTOMAYOR, J. **Lições de equações diferenciais ordinárias**. Rio de Janeiro: IMPA, 1979. (Projeto Euclides, v.4).

STEWART, J. **Cálculo**. [*S. l.*]: Editora Cengage Learning, 2003. v. 1.

TELLO, J. **Licoes de equações diferenciais ordinarias**. Rio de Janeiro: Instituto de Matematica Pura e Aplicada, 1979. (Projeto Euclides). Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=Y-r8GgAACAAJ. Acesso em: 8 jan. 2022.