



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS RUSSAS
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

JOÃO PAULO MAIA JUNQUEIRA

**ESTUDO SOBRE A PROPAGAÇÃO DE ONDAS MECÂNICAS NO PLANO EM
CRISTAIS FONÔNICOS BIDIMENSIONAIS SEGUNDO O CARPETE DE SIERPINSKI**

RUSSAS - CE

2022

JOÃO PAULO MAIA JUNQUEIRA

ESTUDO SOBRE A PROPAGAÇÃO DE ONDAS MECÂNICAS NO PLANO EM CRISTAIS
FONÔNICOS BIDIMENSIONAIS SEGUNDO O CARPETE DE SIERPINSKI

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso de Graduação em Engenharia Civil
do Campus Russas da Universidade Federal do
Ceará como requisito parcial à obtenção do grau
de bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Humberto
Oliveira Costa

RUSSAS - CE

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

J94e Junqueira, João Paulo Maia.
Estudo sobre a propagação de ondas mecânicas no plano em cristais fonônicos bidimensionais segundo o
carpete de Sierpinski / João Paulo Maia Junqueira. – 2022.
48 f. : il. color.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Universidade Federal do Ceará, Campus de Russas,
Curso de Curso de Engenharia Civil, Russas, 2022.
Orientação: Prof. Dr. Carlos Humberto Oliveira Costa.

1. Fonônica. 2. Cristais fonônicos. 3. Carpete de Sierpinski. 4. Bandas fonônicas proibidas. 5. COMSOL. I.
Título.

CDD 620

JOÃO PAULO MAIA JUNQUEIRA

ESTUDO SOBRE A PROPAGAÇÃO DE ONDAS MECÂNICAS NO PLANO EM CRISTAIS
FONÔNICOS BIDIMENSIONAIS SEGUNDO O CARPETE DE SIERPINSKI

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso de Graduação em Engenharia Civil
do Campus Russas da Universidade Federal do
Ceará como requisito parcial à obtenção do grau
de bacharel em Engenharia Civil.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Humberto Oliveira Costa (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Anderson Magno Chaves Cunha
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Antônio Neves da Silva
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Im Memoriam, a meu avô paterno José Junqueiro
Filho e meu avô materno José Aldahi de Sousa.
A minha família, por todo o auxílio e esforço a
mim prestados.

AGRADECIMENTOS

A Deus e a minha família que me ajudaram a vencer todos os obstáculos que apareceram durante o período de curso. Ao meu Professor Orientador Professor Dr. Carlos Humberto Oliveira Costa, que durante 12 meses me acompanhou pontualmente, dando todo o auxílio necessário para a elaboração deste trabalho. Ao Professor Dr. Claudionor Gomes Bezerra, por ter cedido a licença do Software. A todos os professores do Curso de Engenharia Civil do campus da Universidade Federal do Ceará (UFC) em Russas, que através de seus ensinamentos permitiram que eu pudesse estar concluindo este trabalho. A todos os meus colegas de curso, que me incentivaram e me auxiliaram ao longo do curso. A UFC e a Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (FUNCAP), por todo o suporte intelectual e auxílio financeiro a mim prestados. A Assistência Estudantil, pelo suporte financeiro, sem o qual não teria chegado até aqui.

“O que sabemos é uma gota; o que ignoramos é um oceano.”

(Isaac Newton)

RESUMO

Os cristais fonônicos são estruturas periódicas artificiais que podem ser fabricados utilizando dois ou mais materiais com diferentes propriedades mecânicas distintas. Além disso, sabe-se que a utilização de estruturas segundo redes fractais possui um grande potencial de aplicação devido a apresentarem resultados que não são obtidos nas redes regulares, é possível projetar importantes avanços no estudo de propagação de ondas mecânicas em cristais com geometrias bidimensionais como, por exemplo, aplicações em filtros acústicos. O presente trabalho busca obter numericamente a estrutura de bandas de ondas mecânicas e identificar as faixas de frequência onde elas são proibidas de se propagarem. Para tanto, foi utilizado o *software* COMSOL Multiphysics[®], onde foram modeladas redes cristalinas com geometria fractal conforme o Carpete de Sierpinski quadrado e analisamos as três primeiras gerações deste fractal. Consideramos dois sistemas, um constituído de cilindros quadrados de chumbo (Pb) imersos numa matriz e epóxi; e um segundo sistema composto de cilindros quadrados de quartzo (SiO₂) também embebidos numa matriz de epóxi. Através dos gráficos de dispersão de ondas mecânicas nestes sistemas, analisamos a influência dos materiais constituintes e das gerações do fractal e, posteriormente, foi realizada comparações nos efeitos de geração de bandas proibidas entre os sistemas estudados e suas possíveis aplicações.

Palavras-Chave: fonônica; cristais fonônicos; carpete de Sierpinski; bandas fonônicas proibidas; método dos elementos finitos; COMSOL.

ABSTRACT

Phononic crystals are artificial periodic structures that can be manufactured by using two or more materials with different mechanical properties. In addition, one can know the use of structures according fractal lattices have an enormous potential application, such as applications in acoustic filters, due to they present results that can not be obtained in regular crystals. The present work intends to numerically obtain the structure of mechanical wave bands and identify the frequency ranges where they are prohibited of propagating. For this, the COMSOL Multiphysics[®] software was used, where bidimensional crystalline lattices with fractal geometry were modeled according to the square Sierpinski Carpet and analyzed as three first generations of this fractal. We consider two systems, one consisting of square cylinders of lead (Pb) in a matrix and epoxy; and a second system composed of square cylinders of quartz (SiO₂) also embedded in an epoxy matrix. By means of dispersion curves of wave mechanics on these systems, the influence of the constituent materials and generations of the fractal were analyzed and, later, comparisons were made in the effects of the generation systems and forbidden bands between the studied systems and their possible applications.

Keywords: phononics; phononic crystals; Sierpinski carpets; phononic bandgaps; element finite method; COMSOL.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação de exemplos de Redes de Bravais (a) rede quadrada; (b) rede hexagonal; (c) rede retângular; (d) rede retangular centrada; (e) Rede oblíqua.	17
Figura 2 – Exemplo de construção da primeira zona de Brillouin para uma rede oblíqua em duas dimensões	21
Figura 3 – Exemplos de geometria fractal	22
Figura 4 – Exemplo de uma estrutura fractal construída iterativamente retratando a característica de auto-semelhança.	23
Figura 5 – Níveis de formação da Curva de Koch.	24
Figura 6 – Níveis de formação da Curva de Peano.	25
Figura 7 – Triângulo de Sierpinski.	26
Figura 8 – Tapete de Sierpinski.	26
Figura 9 – Obra de arte moderna de E. Sempere localizada em Madri, representa um cristal fonônico bidimensional de hastes de aço com um diâmetro de 2,9 cm dispostos em uma rede quadrada com um período de 10 cm.	28
Figura 10 – Malha computacional de uma Célula Unitária de uma Placa de Cristal Fonônico.	34
Figura 11 – Modelo de células unitárias de Tapete de Sierpinski com diferentes gerações: a) L1, b) L2 e c) L3 respectivamente.	38
Figura 12 – Primeira Zona de Brillouin Rede Quadrada	38
Figura 13 – Curvas de dispersão da célula unitária de tapete de Sierpinski de 1ª geração (L1) formado por cilindros quadrados de Pb mergulhado em uma matriz de Epoxi	41
Figura 14 – Curvas de dispersão da célula unitária de tapete de Sierpinski de 2ª geração (L2) formado por cilindros quadrados de Pb mergulhado em uma matriz de Epoxi	42
Figura 15 – Curvas de dispersão da célula unitária de tapete de Sierpinski de 3ª geração (L3) formado por cilindros quadrados de Pb mergulhado em uma matriz de Epoxi	43
Figura 16 – Curvas de dispersão da célula unitária de tapete de Sierpinski de 1ª (L1) formado por cilindros quadrados de Quartzo (SiO ₂) mergulhado em uma matriz de Epoxi	44

Figura 17 – Curvas de dispersão da célula unitária de tapete de Sierpinski de 2° (L2) formado por cilindros quadrados de Quartzo (SiO_2) mergulhado em uma matriz de Epoxi	45
Figura 18 – Curvas de dispersão da célula unitária de tapete de Sierpinski de 3° (L3) formado por cilindros quadrados de Quartzo (SiO_2) mergulhado em uma matriz de Epoxi	46

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Constantes dos materiais considerados neste trabalho.	39
--	----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	REDES CRISTALINAS E FRACTAIS	16
2.1	Redes de Bravais	16
2.1.1	<i>Célula unitária</i>	18
2.1.2	<i>Rede recíproca</i>	18
2.1.3	<i>Célula de Wigner-Seitz</i>	20
2.1.4	<i>Zona de Brillouin</i>	20
2.2	Geometria Fractal	21
2.2.1	<i>Carpete de Sierpinski</i>	21
2.2.2	<i>Características de um Fractal</i>	22
2.2.3	<i>Fractais de Sierpinski</i>	25
3	CRISTAIS FONÔNICOS	27
3.1	Introdução aos Cristais Fonônicos	27
3.2	Aplicações	29
3.3	Equação de onda	29
3.4	Teorema de Bloch	30
3.5	Métodos de análise de Cristais Fonônicos	32
3.5.1	<i>Espalhamento Múltiplo de Camadas</i>	32
3.5.2	<i>Método de expansão de ondas planas</i>	33
3.5.3	<i>Método dos Elementos Finitos</i>	33
3.5.4	<i>Método de Domínio de Tempo de Diferenças Finitas</i>	34
3.6	Relação de propriedades de dispersão	35
3.6.1	<i>Bandas proibidas</i>	35
3.7	Comsol	37
3.7.1	<i>Módulo Structural Mechanics</i>	37
3.8	Modelo Analizado	38
4	RESULTADOS	41
4.1	Gráficos de dispersão das estruturas compostas por cilindros de Pb em matriz de epóxi	41

4.2	Gráficos de dispersão das estruturas compostas por cilindros de quartzo (SiO₂) em matriz de epóxi	43
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	47
	REFERÊNCIAS	48

1 INTRODUÇÃO

Após a proposição dos cristais fonônicos nas últimas duas décadas, é possível notar um crescente interesse de pesquisa dedicado às propriedades de propagação de ondas elásticas em meios periódicos. Os cristais fonônicos (PnCs, do inglês *phononic crystals*) são compósitos periódicos artificiais que podem ser projetados através da variação de dois ou mais materiais com diferentes propriedades mecânicas periódicas. Tais estruturas artificiais podem apresentar bandas proibidas ou *bandgaps* em que as vibrações mecânicas são proibidas de se propagarem em qualquer direção. Esta habilidade de criar bandas fonônicas proibidas é similar à criação das bandas eletrônicas e fotônicas proibidas nos semicondutores e cristais fotônicos, respectivamente. Devido a esse fenômeno físico único, os PnCs têm várias potenciais aplicações como em filtros acústicos, isolamento acústico, atenuação de vibração e foco de fônon, etc (JR; SANTOS, 2016). O principal fundamento físico da origem das bandas proibidas pode ser visualizado na escala micro, baseando-se na teoria da onda clássica para descrever as ressonâncias de Bragg e Mie, respectivamente, baseada no espalhamento da propagação das ondas mecânicas e eletromagnéticas dentro do cristal (JR; SANTOS, 2016).

Devido as potenciais aplicações dos PnCs, Jr e Santos (2016) discorre que é essencial projetar estruturas que têm um grande diferença entre as características das bandas proibidas do cristal fonônico. Os *bandgaps* são determinados por vários fatores, entre eles parâmetros intrínsecos ao material e até mesmo parâmetros geométricos (SHI, 2011). Outros fatores também devem ser levados em conta tais como, as características direcionais de propagação de onda nesse tipo de estruturas, na qual, segundo Huang (2017), ondas elásticas só se propagam em certas direções das estruturas periódicas, embora as frequências das ondas estejam dentro das direcionais ou mesmo nas bandas permitidas. Nesse sentido, muitos trabalhos têm utilizado principalmente estruturas com geometrias que apresentem comportamento de propagação de onda mais conhecido. Ruzzene e colaboradores Gonella (2008), por exemplo, desenvolveram seus principais trabalhos levando em conta estruturas com redes hexagonais bidimensionais (2D), placas periodicamente perfuradas e redes periódicas não lineares. Mais recentemente, a propagação de ondas por estruturas fractais ou quasicristais tem sido explorada por muitos pesquisadores.

Segundo Oliveira (2008), as estruturas fractais foram definidos pela primeira vez por Benoit Mandelbrot, em 1975, como forma de classificar estruturas cujo dimensões não eram números inteiros. A geometria fractal possui características geométricas únicas que ocorrem

na natureza. Os fractais são usados para descrever a ramificação de folhas e plantas de árvores, terreno acidentado, recorte da linha costeira e muitos outros exemplos na natureza. Devido aos potenciais fins de utilização, a geometria fractal tem sido aplicada em vários campos como compressão de imagem, análise de alta altitude fenômenos de relâmpagos, além de servir de estrutura geométrica para uma rede de cristais. Um dos mais conhecidos dentre as estruturas fractais, o carpete de Sierpinski é um fractal determinístico e uma generalização do conjunto apresentada em duas dimensões na qual é construído começando com um quadrado no plano, subdividindo-o em nove quadrados congruentes menores, removendo o quadrado central, então subdividindo os oito quadrados restantes em nove quadrados menores congruentes em cada um dos quais o o central é descartado Mead (2009).

Diante do conhecimento do potencial de aplicação de estruturas de redes com fractais, é possível projetar importantes avanços no estudo de propagação de ondas mecânicas em cristais com geometrias bidimensionais, assim como, também será possível obter maiores conhecimentos sobre as propriedades de determinados materiais que venham a constituir tais estruturas. Com isso, o presente trabalho busca obter a estrutura de bandas e identificar as faixas de frequência onde não há propagação de onda mecânica, ou seja, os *bandgaps*. Para tanto, foi utilizado o *software* COMSOL Multiphysics[®], que é um programa baseado no método de elementos finitos, para resolver a equação diferencial que define a propagação das ondas mecânicas. Dentro do escopo da metodologia do trabalho, serão modeladas redes de cristais com geometria fractal quadrada, na qual serão produzidas 3 gerações de fractais, visando a posterior análise do gráfico de dispersão de ondas e bandas proibidas referente a cada estrutura.

No Capítulo 2, será dada uma introdução aos cristais fonônicos apresentando suas principais definições e apontando no processo suas principais características, das quais servirão de embasamento teórico para o objeto de estudo do presente trabalho. Também serão abordados conceitos muito importantes no que diz respeito ao estudo de redes cristalinas, tais como, redes de Bravais, zona de Brillouin e a conceituação do carpete de Sierpinski. Será discutido a principal justificativa para utilização dessa geometria, apontando no processo, as possíveis diferenças encontradas na mudança de geração do fractal.

Nos tópicos referentes ao Capítulo 3, será discutida toda a fundamentação teórica inerente ao estudo de dispersão de ondas mecânicas em cristais fonônicos, abordando os principais pontos nos conceitos de bandas proibidas. Também será dada uma breve introdução sobre a análise por elementos finitos, método numérico utilizado pelo COMSOL Multiphysics[®], a qual

é imprescindível para entender o funcionamento do *software*, auxiliando assim, na interpretação os dados de saída, bem como no entendimento da sua acurácia.

No Capítulo 4 será apresentado os resultados dos diagramas de dispersão para as diferentes redes estudadas. Será discutido, com base nos resultados, o comportamento das curvas de dispersão com relação a disposição geométrica da rede e dos materiais utilizados, além de apontar os principais causas para os resultados obtidos neste estudo.

No capítulo 5 serão apresentadas as principais conclusões alcançadas nesse trabalho e ideias futuras. Também será discutido potenciais materiais para utilização, bem como a construção de redes com outras geometrias a título de comparação, com vistas em melhorar o trabalho de estudo de propagação de ondas em redes cristalinas.

2 REDES CRISTALINAS E FRACTAIS

Neste capítulo será dada uma pequena introdução aos conceitos de redes cristalinas e estruturas fractais, com ênfase no carpete de Sierpinski, apontando suas principais características. Também serão abordado conceitos muito importantes no que diz respeito ao estudo de redes cristalinas, tais como, redes de Bravais, zona de Brillouin. Será mostrado a principal justificativa para a utilização dessa geometria, apontando no processo, as possíveis diferenças encontradas na mudança de geração do fractal.

2.1 Redes de Bravais

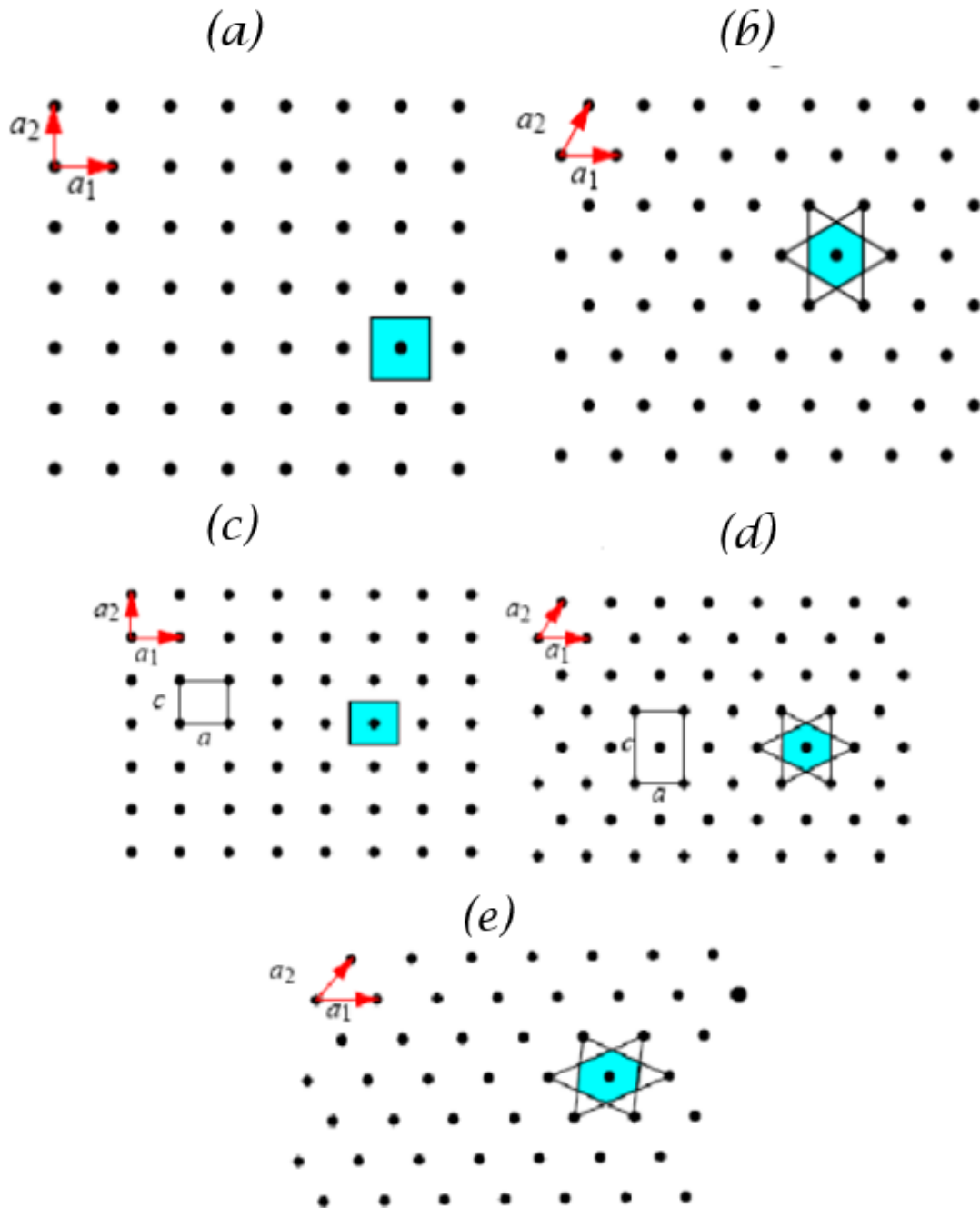
Um cristal é um sólido onde os átomos estão dispostos na forma de uma rede, que é um arranjo de pontos na qual o mesmo padrão de posição entre os pontos se repete indefinidamente. Kittel (1978) evidencia essa principal característica de uma rede através de uma analogia a uma treliça, onde “se alguém se movesse de um lugar para outro sobre uma treliça, tirando fotos, seria impossível distinguir uma parte da treliça de outra”. Por serem mais fáceis de se imaginar e entender, além de ocorrerem na natureza como superfície e interface de redes tridimensionais, as redes bidimensionais apresentam maior presença em estudos envolvendo redes cristalinas, e todas as definições centrais serão primeiro introduzidas em um configuração bidimensional. Um conceito muito importante no estudo de redes cristalinas é a rede de Bravais. As redes de Bravais, segundo Kittel (1978), são um arranjo infinito de pontos discretos, na qual a orientação e localização desses pontos são determinados pela multiplicação de um número inteiro por uma soma de vetores, definidos como vetores da base. Em duas dimensões eles assumem a forma:

$$\vec{R} = n_1 \vec{a}_1 + n_2 \vec{a}_2 \quad (n_1 \text{ e } n_2 \in \mathbb{Z}). \quad (2.1)$$

Kittel (1978) destaca que esses vetores bidimensionais também são chamados de vetores primitivos e devem ser linearmente independentes. É importante notar que, a escolha desses vetores não é única, ou seja, cada um escolhe levando em conta seus próprios fatores tais como, o grau de simplicidade, se há possibilidade de geração da rede pretendida e até mesmo se será gerado alguma simetria mais agradável. Tendo como foco principal o estudo das redes de Bravais bidimensionais, Kittel (1978) aponta os principais tipos de redes: rede quadrada, que é simétrica quando refletida em ambos os eixos x e y com rotações de 90° ; rede retangular, que é uma rede quadrada comprimida ao longo de um eixo e, assim, perde a simetria rotacional de 90° ;

rede hexagonal ou triangular, que não varia quando refletida entre os eixos, mesmo com rotações de 60° ; rede retangular centrada, que resulta de uma compressão da rede hexagonal e perde suas características de simetria rotacional de 60° ; e a rede oblíqua, que é resultante de uma escolha arbitrária dos vetores da base e sem nenhum símbolo especial (ver Fig. 1).

Figura 1 – Representação de exemplos de Redes de Bravais (a) rede quadrada; (b) rede hexagonal; (c) rede retângular; (d) rede retangular centrada; (e) Rede oblíqua.



2.1.1 Célula unitária

Tendo em vista que as redes são criadas pela repetição de pequenas unidades básicas distribuídas continuamente no espaço, Marder (2010) define que a informação completa de um cristal pode estar contida em uma pequena região do espaço. Essa região, escolhida para ser o menor possível, é chamada de célula unitária primitiva. A célula unitária também pode ser definida como a menor porção do cristal que ainda conserva as propriedades originais do mesmo. Para uma rede quadrada, por exemplo, um quadrado pode ser usado como uma célula primitiva, como mostrado na Fig. 1.

É importante notar que as células unitárias nem sempre são únicas, e Marder (2010) discute que, no entanto, todas as opções diferentes devem ter exatamente a mesma área. A razão é que em uma rede de Bravais a célula primitiva contém exatamente uma partícula, enquanto as células primitivas enchem o cristal de ponta a ponta; portanto, o volume da célula primitiva é exatamente o inverso da densidade do cristal. As partículas ou pontos constituintes da célula unitária necessitam ser equivalentes, pois, segundo Kittel (1978), uma vez que todos os pontos são equivalentes, a rede de Bravais deve ser, é claro, finita, mas se elas forem grandes o suficiente, a vasta maioria dos pontos estará tão longe da superfície que não será afetada por sua existência. A partir disso, temos que a idealização de sistema infinito é muito útil. É possível dizer que se o estudo em interesse são os efeitos de superfície, o conceito de rede de Bravais é muito relevante, no entanto, Kittel (1978) pontua que a partir daí deve-se pensar no cristal físico como preenchendo apenas uma parte finita da rede de Bravais ideal e não o todo.

2.1.2 Rede recíproca

O conceito de rede recíproca é comumente relacionado como uma abstração geométrica, compreensível apenas em termos de álgebra vetorial e se tratando de uma difícil teoria de difração. No entanto, Ashcroft *et al.* (2016) ressalta que o conceito de rede recíproca pode ser abordado de duas maneiras. Em primeiro lugar, os vetores de célula unitária de rede recíproca podem ser definidos em termos dos vetores da célula unitária da rede direta \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , e as propriedades geométricas da rede recíproca desenvolvida a partir deles.

Considere uma rede direta constituída por um conjunto de pontos \vec{R} e uma onda plana em três dimensões, dada pela equação: $\psi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$. Para alguns vetores \vec{k} , esta onda não terá a mesma periodicidade da rede de Bravais, ou seja, não será invariante pelas mesmas condições

de simetria. No entanto, existe um conjunto de todos os vetores de onda \vec{G} , definida como rede recíproca da rede de Bravais, para os quais as ondas planas terão a mesma periodicidade da rede de Bravais. Isto significa dizer que a onda plana $e^{i\vec{G}\cdot\vec{r}}$ é invariante pelas mesmas operações de simetria de translação da rede de Bravais (ASHCROFT *et al.*, 2016). A partir disso temos:

$$e^{i\vec{G}\cdot(\vec{R}+\vec{r})} = e^{i\vec{G}\cdot\vec{r}}. \quad (2.2)$$

Logo para todo \vec{R} temos:

$$e^{i\vec{G}\cdot\vec{R}} = 1, \quad (2.3)$$

e com isso,

$$\vec{G}\cdot\vec{R} = 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}). \quad (2.4)$$

Considerando agora \vec{b}_1 , \vec{b}_2 e \vec{b}_3 vetores primitivos da rede recíproca, que são ortogonais e constituídos a partir dos vetores primitivos \vec{a}_1 , \vec{a}_2 e \vec{a}_3 de uma rede cristalina da seguinte forma

$$\vec{b}_1 = 2\pi \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \times \vec{a}_3}; \quad \vec{b}_2 = 2\pi \frac{\vec{a}_3 \times \vec{a}_1}{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \times \vec{a}_3}; \quad \vec{b}_3 = 2\pi \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \times \vec{a}_3} \quad (2.5)$$

Kittel (1978) mostra que se \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} forem vetores primitivos da rede cristalina, então \vec{b}_1 , \vec{b}_2 e \vec{b}_3 são vetores primitivos da rede recíproca. Cada vetor acima mencionado é ortogonal a dois outros vetores dos eixos da rede cristalina. Qualquer conjunto arbitrário de vetores primitivos \vec{a}_1 , \vec{a}_2 e \vec{a}_3 de uma rede cristalina conduz ao mesmo conjunto de pontos da rede recíproca

$$\vec{G} = h\vec{b}_1 + k\vec{b}_2 + l\vec{b}_3, \quad (h, k, l \in \mathbb{Z}) \quad (2.6)$$

Qualquer vetor \vec{G} dessa forma é denominado vetor da rede recíproca. Em cada estrutura cristalina é possível identificar duas redes: a rede cristalina e a rede recíproca (KITTEL, 1978).

Apartir disso, a definição de rede recíproca nos permite escrever muitos problemas de Física do Estado sólido. Portanto, temos que uma rede recíproca é um conjunto de pontos agrupados de forma periódica na qual fazem parte do espaço vetorial resultante depois da discretização dos pontos no espaço através da série de Fourier de forma que a rede cristalina é

uma rede no espaço real, ao passo que a rede recíproca é uma rede no espaço de Fourier associado. Os vetores de onda são sempre desenhados no espaço. Toda posição no espaço de Fourier pode ter um significado porém, existe uma importância maior para os pontos determinados pelo conjunto de vetores \vec{G} .

2.1.3 Célula de Wigner-Seitz

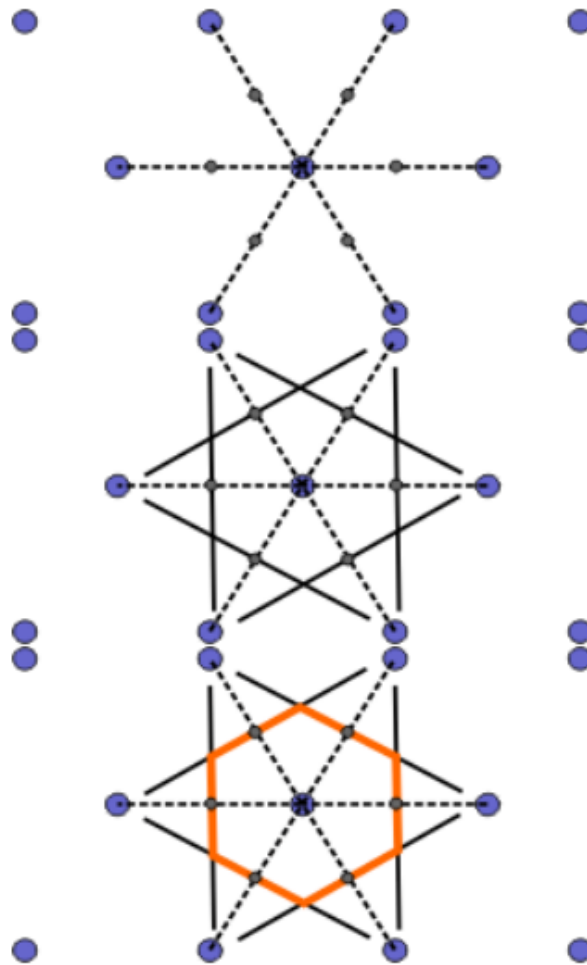
É conveniente ter uma maneira padrão de construir a célula primitiva e é valioso ter uma célula primitiva invariante em todas as operações de simetria que deixam o cristal invariante. Essa construção é fornecida pela célula primitiva de Wigner-Seitz e é construída associando a cada ponto da rede todo o espaço que está mais próximo a ele do que a qualquer outro ponto da rede. Como essa relação não muda em nenhuma operação que deixe a rede invariante, a célula de Wigner-Seitz exibe a simetria completa da rede (ver Fig. 2).

2.1.4 Zona de Brillouin

Uma célula unitária primitiva da rede recíproca pode ser construída segundo o modelo de Wigner-Seitz, isto é, um conjunto de planos bissetores e perpendiculares aos vetores da rede recíproca formando a célula unitária primitiva, a qual possui todas as propriedades de simetria da rede recíproca. Esta célula é denominada primeira zona de Brillouin que, por definição, é o menor volume inteiramente contido no interior dos planos bissetores perpendiculares aos vetores da rede recíproca desenhados a partir da origem (MARDER, 2010).

De acordo com Kittel (1978), a construção da zona de Brillouin é a única utilizada na teoria das bandas de energia dos elétrons e na expressão das excitações elementares dos cristais. Teoria essa que constrói um paralelo interessante com o objeto de estudo do presente trabalho. O conjunto de planos bissetores e perpendiculares aos vetores da rede recíproca é de particular importância na teoria de propagação de ondas no cristal, pois, o vetor de onda associado é desenhado da origem até um ponto qualquer destes planos, satisfaz a condição de difração de Bragg (MARDER, 2010). A zona de Brillouin é definida em sua essência como uma célula de Wigner-Seitz na rede recíproca.

Figura 2 – Exemplo de construção da primeira zona de Brillouin para uma rede oblíqua em duas dimensões



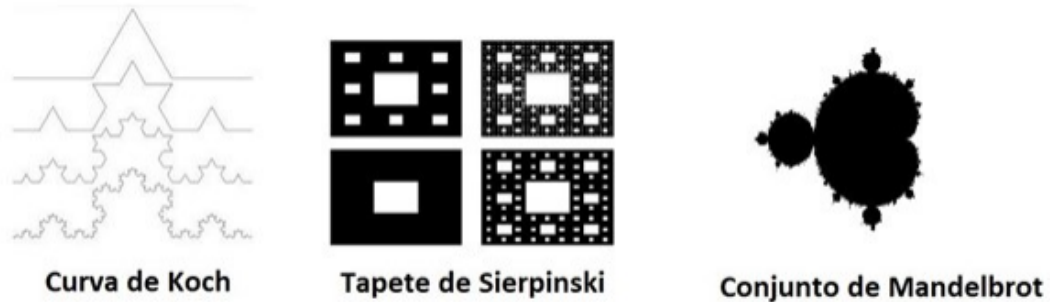
Fonte: Kittel (1978)

2.2 Geometria Fractal

2.2.1 *Carpete de Sierpinski*

O termo fractal surgiu em 1975, empregado pelo matemático polonês Benoit Mandelbrot, que foi responsável pela criação de um dos fractais mais conhecidos – o conjunto de Mandelbrot, (MEDEIROS, 2013). Tal termo é de origem latina que advém do adjetivo *fractus* e deriva do verbo *frangere* – que significa quebrar, fracionar. No meio matemático, é sabido que a geometria fractal surgiu da necessidade de estudar as propriedades dos fractais e descrever as formas geométricas encontradas na natureza as quais não eram descritas pela geometria tradicional ou geometria euclidiana, (MEDEIROS, 2013). A partir disso, podemos definir os fractais como estruturas diferentes das que se costuma observar na natureza, em que governa

Figura 3 – Exemplos de geometria fractal



Fonte: Medeiros (2013)

a geometria euclidiana. Um fractal é uma forma geométrica áspera, rude ou fragmentada, que pode ser subdivida em partes, em que cada pedaço dessa subdivisão é uma cópia exata do todo, na qual é gerado a partir de uma fórmula matemática, muitas vezes simples, mas que aplicada de forma iterativa, produz resultados fascinantes e impressionantes.

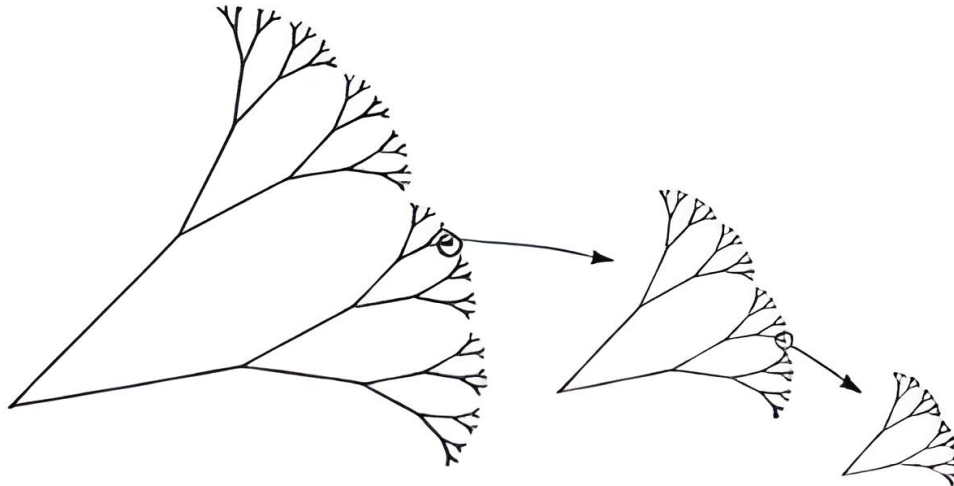
Dentre os fractais mais conhecidos estão o conjunto de Cantor, o triângulo de Sierpinski, a curva de Peano, o floco de neve de Koch, que pode ser observado nas Figs. 3, 4, 5, 6, 7 e 8. Sua aplicabilidade permeia diversas áreas do conhecimento, tais como a biologia, geografia, medicina, música, economia, análise de imagens por satélites, na tecnologia e arte gerada por computadores, entre outros, (ARAUJO, 2011). Tendo como base o aspecto infinito, isso contribui para estender o nosso conceito de geometria clássica composta por pontos, linhas e círculos para o conceito com o irregular, desmanchado e singular, podendo assim descrever os mais variados tipos de padrões, formas geométricas, representações de terrenos, plantas e outros elementos da natureza (NAKAMOTO, 2020). Segundo Medeiros (2013), para ser considerada um fractal, a geometria deve apresentar determinadas características, tais como, autossimilaridade, complexidade infinita, simplicidade da lei de formação e estrutura fina.

2.2.2 Características de um Fractal

Segundo Medeiros (2013) a autossimilaridade, de forma ampla, é uma característica necessária para se caracterizar um fractal, a qual possibilita que uma parte dessa figura se assemelhe a uma parte maior, ou à figura como um todo. A autossimilaridade é uma característica integrante ao processo de construção dos fractais, pois essas figuras são formadas por um processo recursivo indefinido, sendo assim, quanto maior a quantidade de iterações, mais detalhada será a figura, tendo uma imagem infinita (NAKAMOTO, 2020).

Com isso, diversos autores enfatizam que somente o fato de uma forma geométrica

Figura 4 – Exemplo de uma estrutura fractal construída iterativamente retratando a característica de auto-semelhança.



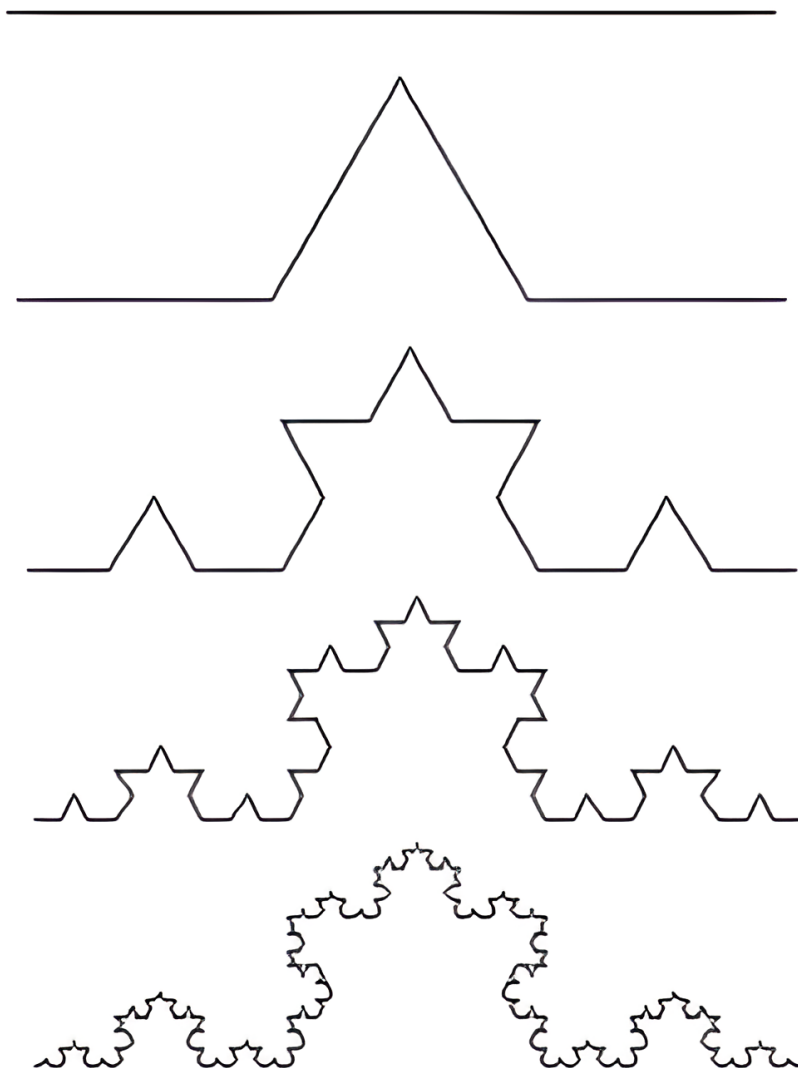
Fonte: Medeiros (2013)

sucedem processos iterativos não o define como um fractal, e Nakamoto (2020) aborda um desses exemplos na qual, se retirarmos um pequeno pedaço de um segmento de reta e reproduzirmos esse procedimento inúmeras vezes, não será obtido um fractal, e, sim, um segmento de reta cada vez menor. Existem dois tipos de auto-semelhança: auto-semelhança exata e auto-semelhança estatística. Os fractais que possuem auto-semelhança exata são gerados a partir de reproduções exatas de si mesmo em menor escala (MEDEIROS, 2013), como podemos observar na Fig. 4.

A estrutura fina é a característica que revela a quantidade infinita de detalhes de um fractal. É ela que faz com que o grau de detalhamento não diminua quando se examina apenas uma pequena porção arbitrária da figura. Desse modo, ao contrário do que ocorre com as figuras geométricas convencionais, como uma circunferência ou uma senoide, que vão perdendo suas características originais à medida que se amplia a escala de observação nos fractais, quanto mais ampliações vão ocorrendo mais detalhes são revelados, mesmo que o processo se repita indefinidamente (ARAÚJO, 2011). Outra característica importante é a complexidade infinita na qual indica a quantidade infinita de detalhes que possuem, e por isso não poderão ser representados completamente. Portanto, quanto maior o número de iterações do processo de geração dos fractais, mais detalhes serão apresentados e assim não se conseguirá representar completamente um objeto fractal, por isso essa característica é assim denominada (MEDEIROS, 2013).

Ao se olhar com mais detalhes no seu aspecto físico, os estágios de formação de uma figura com geometria fractal podem ser, iterativa, recorrente ou estocástica. A partir disso,

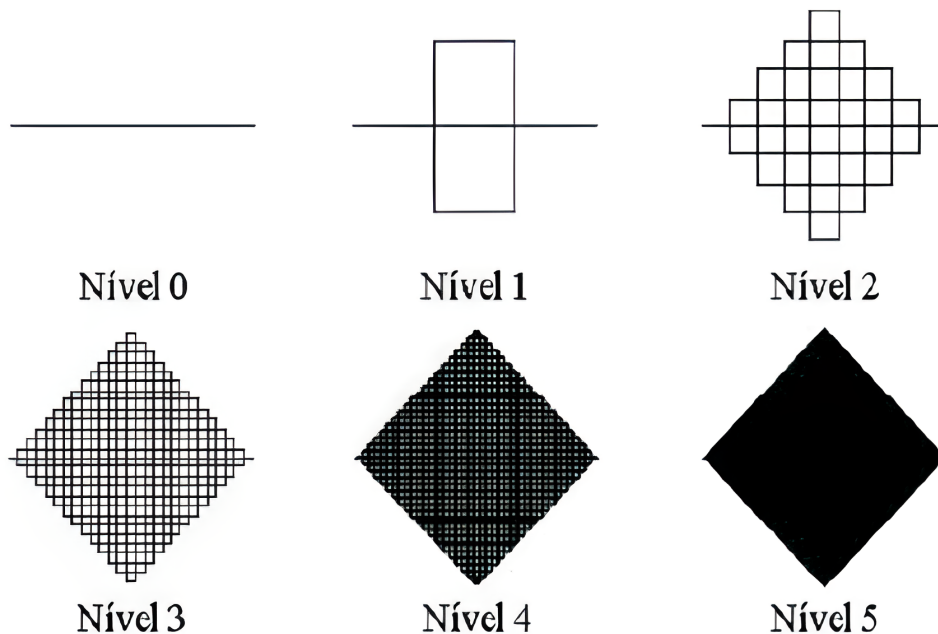
Figura 5 – Níveis de formação da Curva de Koch.



Fonte: Medeiros (2013)

Nakamoto (2020) ressalta que, apesar da sua riqueza de detalhes e de sua complexidade de estrutura, as figuras são formadas por processos relativamente simples e diretos, o que se refere à característica intitulada de Simplicidade da Lei de Formação. Ainda que sua construção seja simples, o processo de formação de um fractal quase sempre não é possível ser descrito apenas com equações simples, assim como geometrias clássicas. Segundo (MEDEIROS, 2013), isso se dá, pois a geometria euclidiana está diretamente ligada aos conceitos de altura, largura e comprimento. Já na geometria fractal, tem-se figuras que apresentam formas irregulares e dimensão fracionada.

Figura 6 – Níveis de formação da Curva de Peano.



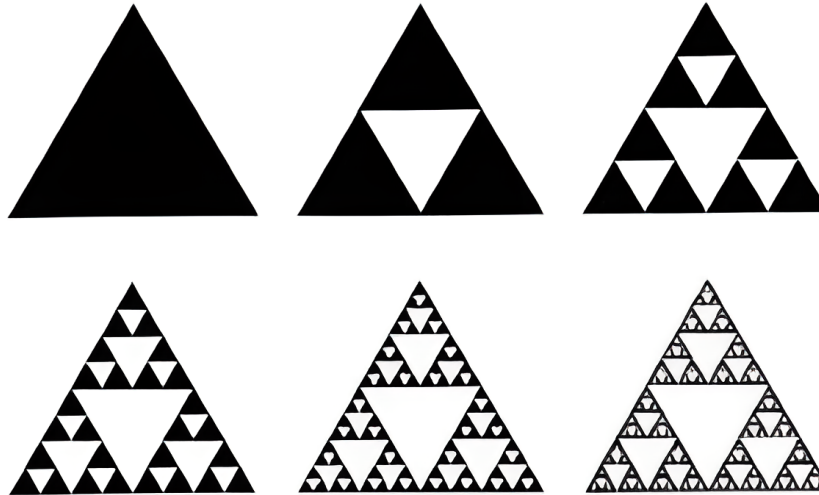
Fonte: Medeiros (2013)

2.2.3 *Fractais de Sierpinski*

Waclaw Sierpinski (1882-1969) foi um matemático polonês que atuava como professor e pesquisador na Universidade de Varsóvia. Dedicou parte de sua trajetória principalmente ao estudo da teoria dos conjuntos, mas também no ponto de ajuste da topologia e função de uma variável real, entre outros. Fez seu estudo em figuras geométricas que eram conhecidas por Triângulo de Sierpinski, Tapete de Sierpinski ou Fractal de Sierpinski, que se obtém como limite de um processo recursivo (ARAÚJO, 2014).

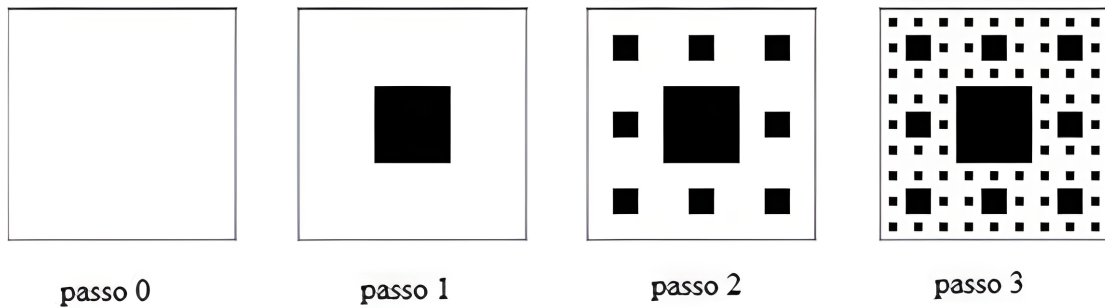
O tapete retangular de Sierpinski trata-se de uma figura plana obtida a partir do estudo do matemático polonês Waclaw Sierpinski. O processo de formação dessa figura acontece através de um processo iterativo de divisão de um retângulo em nove retângulos idênticos. Portanto, a cada nova iteração, temos uma repetição do procedimento sucessivamente ou até chegar ao número de iterações estabelecidas. Além de ser um fractal, segundo Carleti e Justino-Ribeiro (2014), o tapete de Sierpinski também é classificado como um geométrico, visto que possui todas as características que o definem como fractais, como a autossimilaridade, a estrutura fina e a simplicidade da lei de formação. Dependendo da sua lei de formação, o Tapete de Sierpinski pode apresentar várias configurações de acordo com os passos iterativos ou também conhecido como geração.

Figura 7 – Triângulo de Sierpinski.



Fonte: Araujo (2014)

Figura 8 – Tapete de Sierpinski.



Fonte: Medeiros (2013)

3 CRISTAIS FONÔNICOS

Neste capítulo abordamos brevemente o conceito de *band gaps* apresentando a principal teoria que fundamenta essa definição, bem como a analogia feita com a estrutura de bandas e dispersão de ondas no modo fotônico. Também será abordado o método de elementos finitos, que fundamenta o modelo gerado pelo *software* utilizado para geração dos gráficos de dispersão, além de toda a teoria que reforça o método. Em seguida discutiremos a importância do estudo de *band gaps* em cristais fonônicos bidimensionais e os efeitos gerados pelo uso da geometria fractal.

3.1 Introdução aos Cristais Fonônicos

Cristais fonônicos são estruturas dielétricas periódicas que podem fornecer eficiência muito maior do que os dispositivos ópticos tradicionais na geração, guia de ondas, focalização, divisão, desaceleração de ondas sonoras e etc. O estudo regular e intensivo de ondas sonoras em meios elásticos periódicos foi retardado em alguns anos, em comparação com estudos semelhantes de ondas eletromagnéticas (KHELIF, 2016). Nesse sentido, temos que as primeiras estruturas de bandas fonônicas para reticulados bidimensionais de cilindros sólidos em fundo sólido foram calculadas praticamente simultaneamente por Sigalas e Economou e Kushwaha et al, no final do século passado (KHELIF, 2016). Ainda nesse sentido, segundo Khelif (2016), a primeira medição experimental da atenuação do som devido à periodicidade foi realizada em condições ambientais usando uma escultura de E. Sempere, exposta ao ar livre em Madrid, como podemos ver na Fig. 9. Nesse caso, o coeficiente de transmissão para ondas sonoras que se propagam perpendicularmente às hastes apresentou uma frequência mínima em torno de 1,67 kHz, na qual foi originalmente atribuído a um *gap* de banda fonônica (KUSHWAHA, 1994).

A periodicidade dos cristais tem consequências importantes nas propriedades de transporte que eles exibem. Por exemplo, a periodicidade dos íons positivos em cristais atômicos e moleculares de metais, semicondutores e isolantes é responsável pela sequência de bandas de parada e passagem na estrutura de banda eletrônica desses materiais (MCGURN, 2020). Nesse sentido, tal importância pode ser justificada pelo fato de que a natureza da estrutura da banda é conhecida por ser um fator determinante na definição das propriedades de condutividade dos materiais (SOLYMAR; WALSH, 2010). Efeitos semelhantes de banda de parada e passagem, decorrentes da periodicidade, também são encontrados nas propriedades de transporte acústico

Figura 9 – Obra de arte moderna de E. Sempere localizada em Madri, representa um cristal fonônico bidimensional de hastes de aço com um diâmetro de 2,9 cm dispostos em uma rede quadrada com um período de 10 cm.



Fonte: McGurn (2020)

(óptico) de cristais fonônicos (MARDER, 2010). Em cristais fotônicos e fonônicos, o tamanho da rede e dos pedaços de material colocados na rede podem ser adaptados às radiações ópticas e acústicas a serem afetadas por sua tecnologia. Nesse sentido, os cristais fotônicos e fonônicos oferecem uma flexibilidade muito maior em suas aplicações do que outras estruturas, na qual os mesmos, diferentemente dos cristais atômicos por exemplo, podem ser estruturas projetadas, tornando-os assim, muito mais fáceis de adaptar as aplicações específicas.

Devido à periodicidade dos cristais fonônicos, as soluções modais de suas excitações assumem formas específicas que afetam muito as propriedades de transporte exibidas pelo sistema (MARDER, 2010). Especificamente, a forma geral das excitações que se propagam nestes tipos de materiais é composta por uma onda plana multiplicando uma função que é periódica na rede. Além disso, McGurn (2020) destaca que, os efeitos nas relações de dispersão deste tipo de estrutura modal aparecem como uma sequência de bandas de passagem e parada de frequência que são correlacionadas com o vetor de onda das formas de onda plana das soluções modais para uma sequência de diferentes bandas. Uma consequência disso é que as excitações

em frequências em uma banda de parada de um cristal fotônico ou fonônico não se propagam através da massa do cristal, e a propagação ocorre apenas nas bandas de passagem (MCGURN, 2020). Como resultado, as excitações só se movem através da massa de um cristal fotônico ou fonônico nos conjuntos de frequências da banda de passagem e aquelas nas frequências da banda de parada decaem rapidamente ao passar para a massa. Essa estrutura de banda de passagem do espectro de excitação em massa de cristais fotônicos e fonônicos está na raiz de muitas propriedades tecnológicas úteis (SOLYMAR; WALSH, 2010).

3.2 Aplicações

As estruturas de cristais fonônicos possuem grande potencial de aplicação nos mais diversos campos. Uma dessas aplicações, por exemplo, é em sensores biológicos, na qual Lucklum (2013) destaca, Pode-se esperar que o sensor fonônico tenha um grande impacto na medição, monitoramento ou análise de sistemas complexos. Isso especialmente aplica-se a biossensores ou sensores médicos como bem como sensores químicos para microrreatores. O autor ainda discorre que a capacidade dos sensores fonônicos para determinar propriedades volumétricas é alto, ou seja, pode-se investigar as propriedades das biomoléculas em seu ambiente fisiológico em volume muito pequeno sem a necessidade de imobilização do DNA, proteínas, etc.

Outra aplicação interessante, seria o isolamento acústico, que, a partir da atenuação sonora observada em estruturas de cristal fonônico, têm sido utilizadas para controle e isolamento de ruído (LUCKLUM, 2013). Nesse sentido, temos que o aumento do conhecimento do potencial de isolamento de vibrações por estruturas periódicas, vem contribuindo, mais recentemente para o aparecimento de tecnologias capazes de isolar completamente um ambiente do som (LUCKLUM, 2013). O isolamento de vibração e mesas livres de vibração em aeronaves seria um exemplo de tecnologia.

3.3 Equação de onda

O estudo da propagação de ondas em um meio periódico é baseado nas equações dinâmicas do movimento. A propagação da onda sonora está oscilando com o tempo e a sequência de coordenadas dos deslocamentos do material que é acompanhada por um padrão semelhante de pressão e/ou tensões elásticas de cisalhamento. Para um meio elástico homogêneo

e isotrópico caracterizado por densidade de massa, ρ , velocidade do som longitudinal, c_l , e transversal, c_t , a derivação da equação de onda pode ser encontrada (MCGURN, 2020). Em um meio de volume homogêneo, as ondas sonoras longitudinais e transversais são desacopladas e se propagam independentemente. O campo vetorial de deslocamento \vec{u} é potencial em uma onda longitudinal ($\vec{\nabla} \times \vec{u} = 0$) e é solenoidal ($\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$) em uma onda transversal (MCGURN, 2020). Na presença de um limite, a exigência de continuidade dos deslocamentos e tensões leva à mistura desses dois modos. Como é conhecido da teoria das ondas de Rayleigh superficiais (HUANG, 2017), o deslocamento elástico total é uma superposição de campos potenciais e solenóides que, portanto, não podem ser desacoplados. No caso geral de um meio elástico não homogêneo arbitrário, os deslocamentos longitudinal e transversal também não podem ser divididos e a equação de movimento para os componentes do vetor de deslocamento contém ambas as velocidades, c_l e c_t , (SOLYMAR; WALSH, 2010)

$$\rho \frac{\delta^2 u_i}{\delta t^2} = \vec{\nabla} \cdot \left(\rho c_t^2 \vec{\nabla} u_i \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(\rho c_t^2 \frac{\delta \vec{u}}{\delta x_i} \right) + \frac{\delta}{\delta x_i} \left[(\rho c_l^2 - 2c_t^2) \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right]. \quad (3.1)$$

Aqui $\rho = \rho(\vec{r})$, $c_l = c_l(\vec{r})$, e $c_t = c_t(\vec{r})$ são funções arbitrárias do vetor posição $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$. Essa complicada equação, segundo Wallis (1986), pode ser simplificada nos casos particulares em que nos concentraremos. Em um cristal fonônico, todas as funções que caracterizam as propriedades do material são periódicas no espaço e podem ser expandidas na série de Fourier sobre um conjunto infinito de vetores recíprocos \vec{G} . Por exemplo,

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}} \rho(\vec{G}) e^{i\vec{G} \cdot \vec{r}}, \quad (3.2)$$

onde o componente de Fourier é definido como segue

$$\rho(\vec{r}) = \frac{1}{V_c} \int_V \rho(\vec{G}) e^{i\vec{G} \cdot \vec{r}} d\vec{r}. \quad (3.3)$$

3.4 Teorema de Bloch

O teorema de *Bloch* é o resultado da aplicação do Teorema de Floquet em sistemas físicos com potenciais periódicos, como cristais bidimensionais. Segundo Huang (2017), o teorema de Bloch indica que a mudança proporcional na amplitude da onda que ocorre de célula para célula é irrelevante para a localização da célula unitária dentro do sistema. Ou seja, devido

a esta característica, a propagação de ondas em estruturas periódicas é geralmente analisada com base nesse teorema. Segundo Khelif (2016), a integral na Eq. (3.3) é tomada sobre o volume da célula unitária V_c , que no caso particular da periodicidade 2D é substituída pela área da célula unitária A_c , ou pelo período de rede L_c para super-redes 1D. O vetor deslocamento \vec{u} , sendo uma solução da onda Eq. (3.1), satisfaz o teorema de Bloch e também pode ser expandido sobre os vetores de rede recíproca como segue

$$\vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}_k(\vec{r}) = e^{i\vec{K}\cdot\vec{r}} \sum_{\vec{G}} \vec{u}_k(\vec{G}) e^{i\vec{G}\cdot\vec{r}} \quad (3.4)$$

O vetor de Bloch \vec{K} desempenha o papel do momento fonônico e seus valores possíveis varrem o interior da parte irreduzível da zona de Brillouin. A substituição das expansões de Fourier Eq.(3.1) e (3.2) (e expansões semelhantes para as constantes elásticas ρc_l^2 e ρc_t^2) leva a um conjunto de equações lineares homogêneas para os coeficientes $\vec{u}_k(\vec{G})$ (KHELIF, 2016). De acordo com (DEYMIER, 2013) este conjunto tem as soluções não triviais se o determinante deste conjunto de equações se anular. Como de costume, esta condição define a relação de dispersão, ou seja, a estrutura de banda onde um número infinito de frequências permitidas $\omega_n(\vec{K})$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) corresponde a cada valor do vetor Bloch \vec{K} . Nesse sentido, na prática, o tamanho do determinante e, portanto, o número de frequências permitidas (bandas), é limitado pelo número finito de ondas planas (vetores reticulados recíprocos) nas expansões (3.1) e (3.2) (SU, 2015).

Desse modo, em linhas gerais, Huang (2017) destaca que, ao aplicarmos o teorema de Bloch em uma equação de onda temos:

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{u}_k e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}, \quad (3.5)$$

na qual $\vec{K} = (k_x, k_y)$ é o vetor de onda de Bloch e a amplitude de onda $\vec{u}_k(\vec{r})$ é uma função periódica com a mesma periodicidade da célula unitária e t é o tempo (HUANG, 2017). A partir disso, temos

$$\vec{u}_k(\vec{r} + \vec{R}) = \vec{u}_k(\vec{r}), \quad (3.6)$$

onde \vec{R} é o vetor de rede da estrutura periódica. Tendo em vista a aplicação do teorema do Bloch, Mead (2009) ressalta que o mesmo permite que esses cálculos sejam realizados considerando

apenas uma das células unitárias de toda a estrutura periódica, aumentando substancialmente a eficiência da investigação. Com isso, as condições de contorno da célula unitária podem ser derivadas de acordo com as equações (3.2) e (3.3). Em termos computacionais, Liu Chien C. Chang (2007) acrescenta que, como a estrutura tem uma característica periódica no plano $x - y$, uma célula unitária pode servir como domínio da simulação computacional. Logo, a seguinte relação tem que ser satisfeita:

$$\vec{u}_k(\vec{r} + \vec{a}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{a}} \vec{u}_k(\vec{r}), \quad (3.7)$$

na qual a é a constante periódica, que também é igual ao comprimento do lado da célula unitária quadrada. Segundo Garcia-Pablos M. Sigalas (2000), ao inserir as Eqs. (3.2) e (3.4) na Eq. (3.1), as equações de onda podem então ser transformadas em uma equação de autovalor. No entanto, o problema é geralmente analisado através de um método de discretização, como o método dos elementos finitos (MEF). O MEF é uma abordagem comum para calcular as curvas de dispersão de estruturas periódicas. Nesse sentido, Huang (2017) acrescenta que a complexidade da célula unitária aumenta à medida que o estágio do tapete Sierpinski aumenta. A partir disso, outras abordagens, incluindo o método de expansão de ondas planas e o método de domínio de tempo de diferenças finitas são menos apropriadas em termos de convergência ou modelagem para estruturas complexas (GARCIA-PABLOS M. SIGALAS, 2000).

3.5 Métodos de análise de Cristais Fonônicos

3.5.1 Espalhamento Múltiplo de Camadas

O método de computação do tipo de espalhamento múltiplo (MEM) têm uma longa história em Matéria Condensada e Física de Partículas. De acordo com Khelif (2016), os métodos usados para cristais fonônicos têm uma estreita relação com aqueles usados para o tratamento de espalhamento de elétrons em sólidos e cálculo da estrutura de bandas de cristais fotônicos e transmissão através deles. A idéia básica do método faz uso do princípio da superposição para espalhadores não sobrepostos. Considerando um único espalhador com uma determinada forma, primeiro obtém-se o campo espalhado de uma onda plana incidente com determinada frequência angular e vetor de onda, e, em seguida, o campo espalhado de um conjunto de espalhadores é construído pela soma adequada de todas as contribuições individuais Khelif (2016). Nesse sentido, Khelif (2016) destaca que, o método MEM considera que um cristal

fonônico é constituído por uma pilha de camadas de cristais fonônicos. Ele procede camada por camada avaliando as propriedades de espalhamento do mesmo e daquelas camadas constituintes do cristal fonônico, para uma dada frequência e vetor de onda. Deymier (2013) discorre mais detalhadamente sobre o método.

3.5.2 Método de expansão de ondas planas

O método de expansão em ondas planas (MEOP) baseia-se em uma aplicação do teorema de Bloch-Floquet. Segundo McGurn (2020), qualquer modo próprio de um meio perfeitamente periódico (denominado onda de Bloch) é o produto de um termo tipo onda plana e uma função periódica na célula unitária. Nesse sentido, Deymier (2013) destaca que, no MEOP, a função periódica é considerada explicitamente por meio de sua expansão em série de Fourier. Especificamente, escrevemos para qualquer componente de deslocamento

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{G}} \vec{u}_{\vec{G}}(\omega, \vec{K}) e^{i(\omega t - \vec{K} \cdot \vec{r} - \vec{G} \cdot \vec{r})}, \quad (3.8)$$

onde os vetores da rede recíproca são (para o caso da rede quadrada) $\vec{G} = (2\pi m_1/a, 2\pi m_2/a, 2\pi m_3/a)$. É importante notar que os coeficientes de Fourier $\vec{u}_{\vec{G}}(\omega, \vec{K})$ são os da parte periódica da solução da onda de Bloch (MCGURN, 2020). A periodicidade da estrutura também é usada para expandir as constantes do material como séries de Fourier.

É importante notar que, segundo Huang (2017), o MEOP tem uma desvantagem que é aparente na Eq. (3.8). A expansão em série de Fourier do deslocamento e dos campos de tensão implicitamente torna a solução contínua em todo o interior da célula unitária. Em contrapartida, os deslocamentos e as tensões normais podem ser considerados contínuos em uma interface entre diferentes materiais sólidos, contudo, não é o caso das tensões de cisalhamento aplicadas ao longo da interface (MCGURN, 2020).

3.5.3 Método dos Elementos Finitos

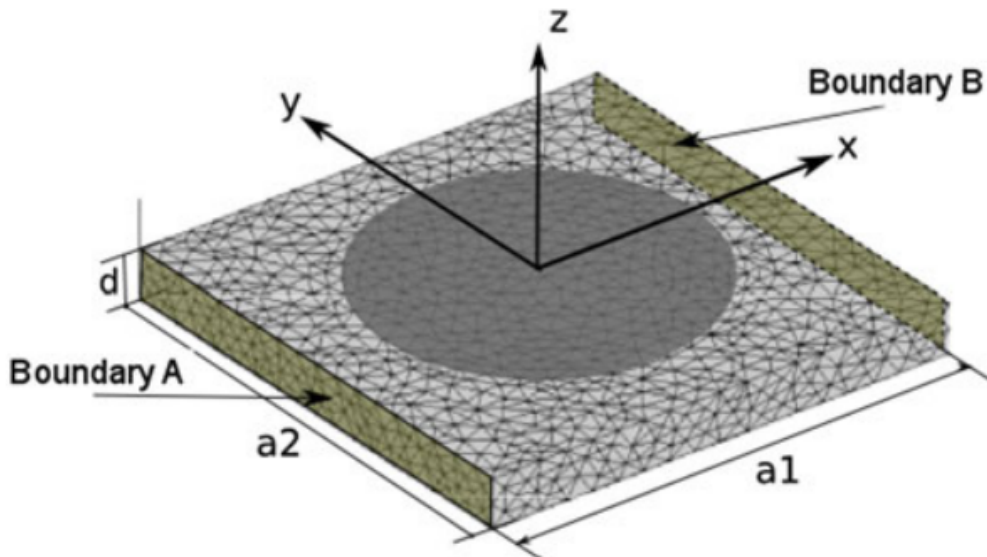
O método dos elementos finitos (MEF) é uma técnica numérica para resolver equações diferenciais parciais (EDPs) e equações integrais no domínio do tempo, bem como no domínio espectral. Segundo Liu Chien C. Chang (2007), o principal desafio do método é criar uma equação que se aproxime da equação a ser estudada e que seja numericamente convergente. De acordo com Khelif (2016), o MEF é um método poderoso adequado para resolver EDPs

em domínios complicados, para limites móveis - e quando a precisão desejada varia em todo o domínio. Basicamente o método funciona subdividindo a célula unitária em elementos finitos conectados por nós. De acordo com o teorema de Bloch-Floquet, todos os corpos obedecem a uma lei de periodicidade, produzindo, por exemplo, a seguinte relação entre os deslocamentos mecânicos \vec{u}_i para nós situados na fronteira da célula unitária

$$\vec{u}_i(x + ma_1, y + pa_2, z) = \vec{u}_i(x, y, z)e^{-i(k_x ma_1 + k_y pa_2)}, \quad (3.9)$$

onde k_x e k_y são as componentes dos vetores de onda de Bloch nas direções x e y , respectivamente. Considerando as condições de contorno periódicas acima, podemos reduzir o modelo a uma única célula unitária onde pode ser usado elementos finitos. Um esquema de elementos finitos de deslocamento mecânico (para sólidos elásticos) e potencial elétrico (para sólidos piezoelétricos) é usado. Em seus trabalhos, Claypool (2020) e Liu Chien C. Chang (2007) abordam o método mais detalhadamente.

Figura 10 – Malha computacional de uma Célula Unitária de uma Placa de Cristal Fonônico.



Fonte: Aldekrim (2016)

3.5.4 Método de Domínio de Tempo de Diferenças Finitas

Diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD) é uma técnica de modelagem computacional eletrodinâmica e elastodinâmica bem conhecida. Por ser um método no domínio

do tempo, com a vantagem das soluções poderem cobrir uma ampla faixa de frequência com uma única simulação. O método FDTD pertence à classe geral de métodos de modelagem numérica no domínio do tempo diferencial baseados em grade Khelif (2016). Geralmente, as equações de onda dependentes do tempo - na forma diferencial parcial - são discretizadas usando aproximações de diferença central para as derivadas parciais de espaço e tempo Khelif (2016). As equações de diferenças finitas resultantes são resolvidas de maneira saltitante: no caso de onda elástica, as componentes do vetor campo deslocamento em um volume do espaço são resolvidas em um dado instante no tempo; então, os componentes do tensor do campo de tensões no mesmo volume espacial são resolvidos no próximo instante de tempo; e o processo é repetido até que o comportamento do campo de deslocamento elástico ou acústico em estado estacionário ou transiente desejado tenha evoluído completamente (KHELIF, 2016). Mais detalhes sobre o método são abordados em (KHELIF, 2016).

3.6 Relação de propriedades de dispersão

3.6.1 Bandas proibidas

O projeto de estruturas e materiais sujeitos a propagação de onda pode ser considerado uma nova aplicação ao método de otimização topológica. O método de análise é basicamente o mesmo, independente da natureza da onda, na qual pode ser ser elástica, acústica ou eletromagnética. O método consiste na construção de materiais periódicos ou estruturas que dificultam a propagação, gerando assim, os chamados band gaps ou (bandas proibidas). De acordo com Huang (2017), um band gap completo corresponde a uma faixa de frequência onde a propagação da onda elástica é reduzida em todas as direções. A colocação de uma excitação com frequências no band gap levará a um baixo nível de transmissão de ondas através do estrutura. Na última década, o interesse nos trabalhos de análise de bandas proibidas em materiais e estruturas fotônicos, vem causando uma busca por pesquisas que também investiguem bandas proibidas em estruturas fonônicos.

Apesar dos princípios básicos da propagação de ondas em meios elásticos, estarem a anos bem estabelecidos por (e.g. Brillouin 1953; Elachi 1976), Jensen (2003) ressalta que muitos trabalhos têm focado na demonstração teórica e experimental de bandas proibidas em materiais periódicos bidimensionais e tridimensionais para o caso fotônico, na qual podemos citar (por exemplo, Sigalas Economou 1992; Vasseur et al. 1998; Liu et al. 2000; Kushwaha 1996).

No entanto, diferentemente dos cristais fotônicos, as faixas de bandas proibidas dos materiais e estruturas fonônicos, até onde é possível saber, ainda não levaram diretamente a aplicações industriais, mas possuem aplicações potencialmente gratificantes em filtros de frequência com controle de bandas de passagem ou parada, como divisores de feixe, dispositivos de proteção de som ou vibração, lasers acústicos (phasers), espelhos acústicos perfeitos ou como guias de ondas elásticos como é destacado por Jensen (2003).

Ainda que a obtenção dos efeitos de bandas proibidas para a propagação de ondas de luz ou de som, em materiais artificiais periódicos de engenharia esteja estabelecido, é importante notar que existem grandes diferenças entre a fonônica e cristais fotônicos que tornam o estudo dos cristais fonônicos um assunto separado dos cristais fotônicos. Nesse sentido Sadat-Saleh S. (2009) destaca que no caso dos cristais fotônicos, o meio de propagação apresenta uma modulação periódica do índice de refração, o que pode impedir a propagação de ondas eletromagnéticas em uma faixa específica de comprimentos de onda, dando origem a band gaps fotônicos e permitindo adaptar as propriedades de dispersão da luz. Já no caso dos cristais fonônicos que por sua vez, são compósitos periódicos feitos de dois ou mais materiais com diferentes constantes elásticas e densidades, elas também podem impedir a propagação de ondas elásticas em determinadas frequências gamas e oferecem novas possibilidades de controle de propagação do som. Além disso, Liu Chien C. Chang (2007) enfatiza mais alguns pontos de diferença, tais como, materiais dielétricos geralmente suportam ondas eletromagnéticas transversais, enquanto materiais elásticos suportam tanto ondas transversais bem como ondas elásticas longitudinais. Ainda nesse sentido, os materiais fotônicos têm a maior velocidade de propagação no ar, enquanto materiais elásticos têm uma pequena velocidade longitudinal de propagação no ar. Por fim Liu Chien C. Chang (2007) ainda acrescenta que as propriedades físicas dos cristais fotônicos são determinados pelo contraste de constantes dielétricas, enquanto os cristais fonônicos são determinados tanto por contraste das constantes elásticas quanto a razão de densidade de massa dos materiais compostos.

Quando se fala nos principais fatores que influenciam na criação de bandas proibidas, é comum considerar o contraste gerado pelas diferenças nas constantes elásticas, como fator preponderante. No entanto, Liu Chien C. Chang (2007) enfatizam um outro elemento que na prática gera maiores diferenças no aparecimento de bandas proibidas e, tendo como base tal premissa, será enfatizado mais a frente que os materiais constituintes do modelo utilizado nesse trabalho, foram destacados de acordo com essa constatação.

A razão de densidade de massa é o fator chave para determinar a localização e o tamanho do gap. Se o contraste das constantes elásticas for grande, as bandas de alta frequência não são muito sensíveis à mudança da razão de densidade de massa, enquanto as bandas mais baixas são fortemente dependentes dessa mudança. Em geral, as bandas de frequência dos modos transversais são relativamente planas em comparação com as dos modos longitudinais. Liu Chien C. Chang (2007).

3.7 Comsol

O COMSOL Multiphysics® (conhecido como FEMLAB antes de 2005) é um pacote de software comercial de elementos finitos projetado para abordar uma ampla variedade de fenômenos físicos. O software permite ao usuário ter acesso a interfaces convencionais baseadas em física e sistemas acoplados de equações diferenciais parciais (EDP,s). Nesse sentido, o mesmo é capaz de gerar um fluxo de trabalho unificado para aplicações elétricas, mecânicas, de fluidos, acústicas e químicas.

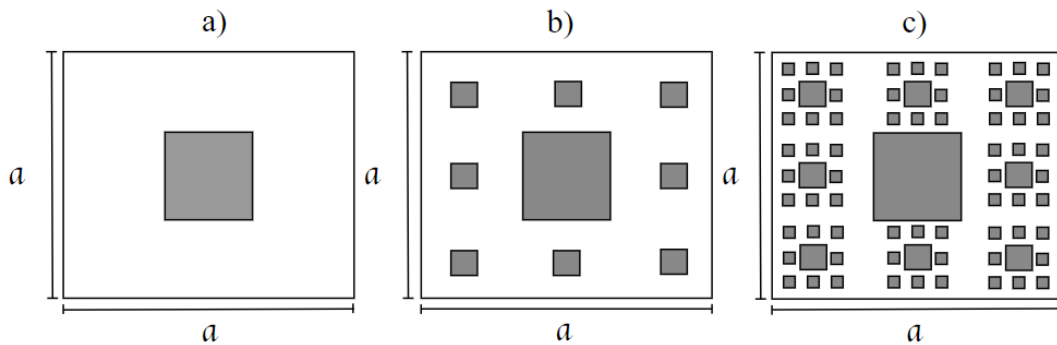
3.7.1 Módulo *Structural Mechanics*

O módulo *Structural Mechanics* é um pacote de software FEA adaptado para analisar o comportamento mecânico de estruturas sólidas. O módulo fornece ferramentas e funcionalidades de modelagem para mecânica de sólidos, dinâmica e vibrações, modelagem de materiais, cascas, vigas, contato, fraturas e muito mais Comsol (2020). As áreas de aplicação incluem engenharia mecânica, engenharia civil, geomecânica, biomecânica e dispositivos MEMS. O mesmo ainda pode fornecer acoplamentos multifísicos integrados que incluem estresse térmico, interação fluido-estrutura e piezoelectricidade Comsol (2020). Do ponto de vista de simulação numérica, o módulo trabalha com funcionalidades fornecendo um conjunto completo de ferramentas de modelagem para os vários tipos de análises estruturais. Com base no método dos elementos finitos, há funcionalidade, não apenas para modelar sólidos 3D, mas também para formulações 2D (tensão plana, deformação plana, deformação plana generalizada e simetria axial). Da mesma forma, há funcionalidade para cascas e placas, membranas, vigas, tubos, treliças e cabos, e transições entre todas essas diferentes formulações Comsol (2020). Este módulo do software é considerado o mais relevante, tendo em vista o principal alvo deste trabalho.

3.8 Modelo Analizado

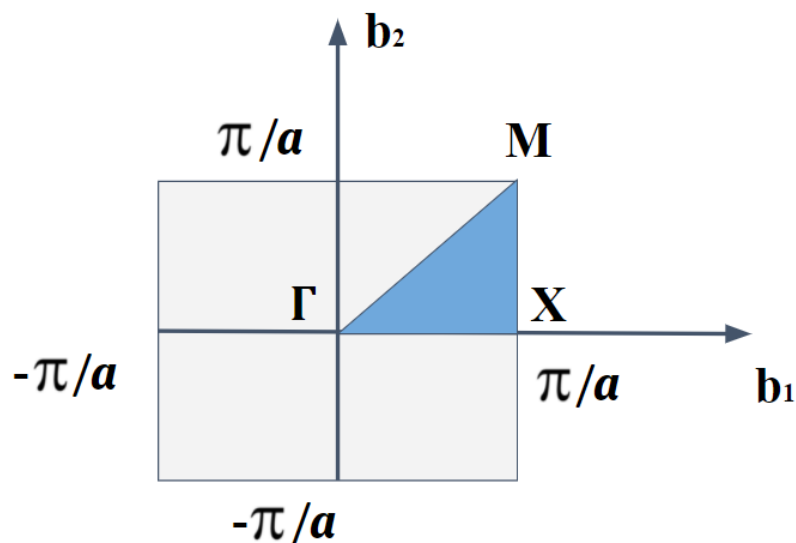
Assim como desenvolvido por Huang (2017) o modelo analisado neste trabalho traz células unitárias de uma geometria fractal de tapete de Sierpinski com três diferentes estágios de geração. Para a construção da geometria, uma célula unitária quadrada com constante periódica " a " foi dividida igualmente em nove pequenos quadrados, então um pequeno quadrado central foi extirpado e preenchido com o outro material para criar o tapete Sierpinski de 1º geração Huang (2017). O mesmo procedimento foi repetido nos oito pequenos quadrados restantes para construir a célula unitária do tapete Sierpinski de 2º e 3º gerações. A Fig. (11) ilustra o modelo estudado.

Figura 11 – Modelo de células unitárias de Tapete de Sierpinski com diferentes gerações: a) L1, b) L2 e c) L3 respectivamente.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 12 – Primeira Zona de Brillouin Rede Quadrada



Fonte: Elaborada pelo autor.

Seguindo o que Khelif A. (2006) formulou em suas simulações, no modelo apresentado, as regiões em cinza correspondem a cilindros quadrados de Pb, na primeira simulação, e Quartzo na segunda, ambos mergulhados em uma matriz de epoxi. Os materiais utilizados nesse trabalho foram escolhidos tendo como princípio o que já foi acima citado, na qual compostos formados por dois materiais que apresentem constantes elásticas muito diferentes entre si, tem o potencial de oferecer resultados mais interessantes em termos de propagação de onda Liu Chien C. Chang (2007). A partir disso, a matriz epoxi aqui utilizada apresenta baixos valores de constantes e propriedades físicas tais como, densidade, módulo de young e coeficiente de Poisson, todos esse dados foram utilizados tendo como base Khelif A. (2006). Igualmente para o Pb e o Quartzo, onde foram escolhidos por apresentarem propriedades discrepantes com relação a matriz utilizada e até mesmo entre si, fato esse importante para exercícios de comparação entre as duas simulações, atrelado a isso, o epóxi foi amplamente utilizado nos dois sistemas também tendo em vista um potencial de aplicação desses sistemas na construção civil, sabendo que o epóxi, por exemplo, já é comumente utilizado em sistemas de isolamento acústico e térmico, portanto os dados seguem como base, respectivamente, Huang (2017) e Khelif A. (2006).

Tabela 1 – Constantes dos materiais considerados neste trabalho.

Material	$\rho(kg/m^3)$	E (GPa)	ν
Pb	11600	40.82	0.37
Quartzo	2648	2.85	0.35
Epoxi	1142	4.35	0.378

Fonte: Adaptado de Huang (2017) e Khelif (2006).

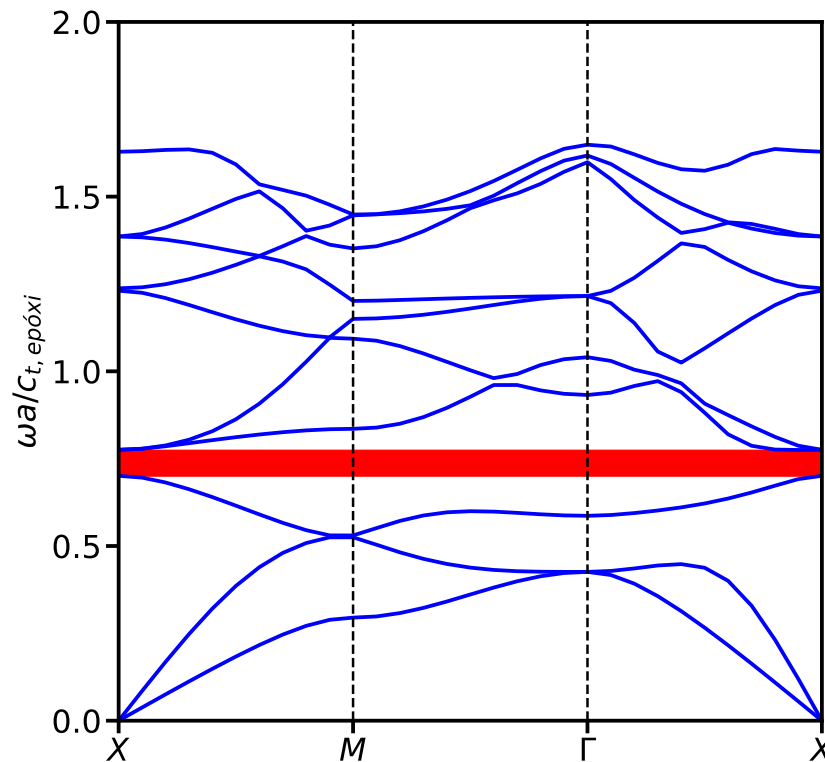
Para produção do gráfico de dispersão, foi utilizado a versão do COMSOL 5.6. Ainda em termos de geometria, é importante destacar que a primeira geração do Tapete de Sierpinski apresenta fração de preenchimento $f = 0,36$, que nada mais é do que a relação de área entre os cilindros quadrados e a matriz. Nos termos de saída da simulação, temos que em um dos eixos do gráfico de dispersão, a frequência, foi normalizada por $\omega a / c_{t,epóxi}$. Por conta da periodicidade do sistema, para o cálculo da relação de dispersão, foi considerado apenas a primeira zona de Brillouin, Fig. (12). O vetor de onda de bloch varia em toda a primeira zona de modo que a relação frequência-número de onda seja obtida. De acordo com Huang (2017) a primeira zona de Brillouin contém os pontos de alta simetria, ou seja, a região do triângulo formado pelos pontos $XMTX$ dentro da célula unitária, representa toda a célula em termos de relação de dispersão. A partir disso, temos que foi considerado apenas o vetor de onda de bloch nos pontos $XMTX$ para

se obter as curvas de dispersão.

4 RESULTADOS

Nesta seção, apresentamos os resultados dos gráficos de dispersão das estruturas de bandas de cristais fonônicos bidimensionais segundo a geometria do tapete de Sierpinski. Em todas as figuras deste capítulo, utilizamos o parâmetro de rede $a = 10$ mm e a velocidade de ondas transversais do epóxi $c_{t,epóxi} = 1.175,6$ m/s. Logo, para uma frequência reduzida $\omega a / c_{t,epóxi} = 1$, temos que a frequência angular e frequência da onda mecânica são, respectivamente, $\omega = 117,56 \times 10^3$ rad/s e $f = \omega / 2\pi \approx 18,71$ kHz.

Figura 13 – Curvas de dispersão da célula unitária de tapete de Sierpinski de 1ª geração (L1) formado por cilindros quadrados de Pb mergulhado em uma matriz de Epoxi

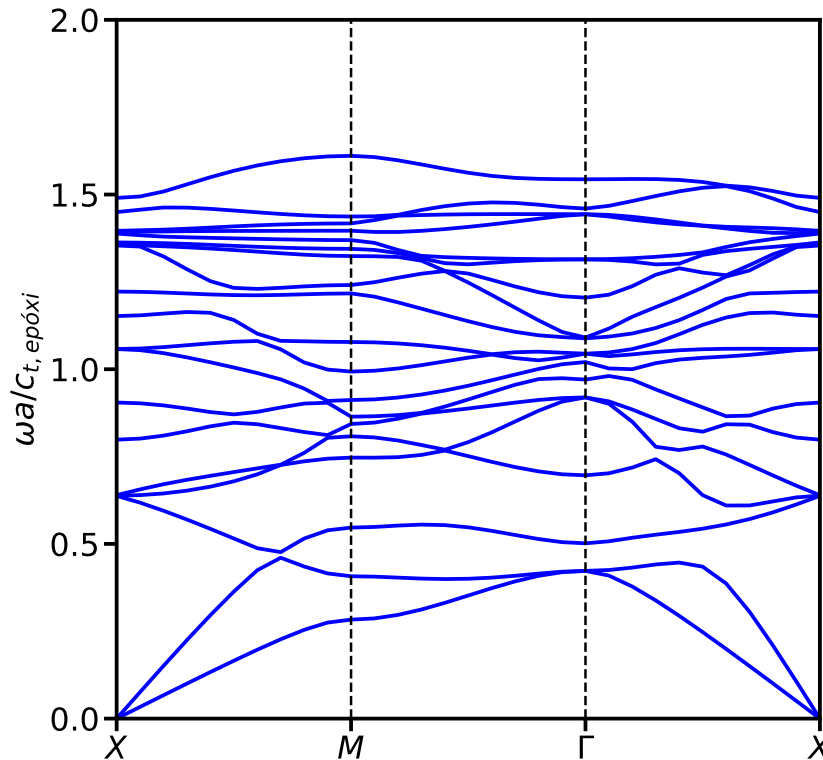


Fonte: Elaborada pelo autor.

4.1 Gráficos de dispersão das estruturas compostas por cilindros de Pb em matriz de epóxi

Na Fig. 13 apresentamos a curva de dispersão de ondas mecânicas em uma estrutura composta de cilindros quadrados de Pb imersos numa matriz de epóxi de acordo com a 1ª geração

Figura 14 – Curvas de dispersão da célula unitária de tapete de Sierpinski de 2º geração (L2) formado por cilindros quadrados de Pb mergulhado em uma matriz de Epóxi

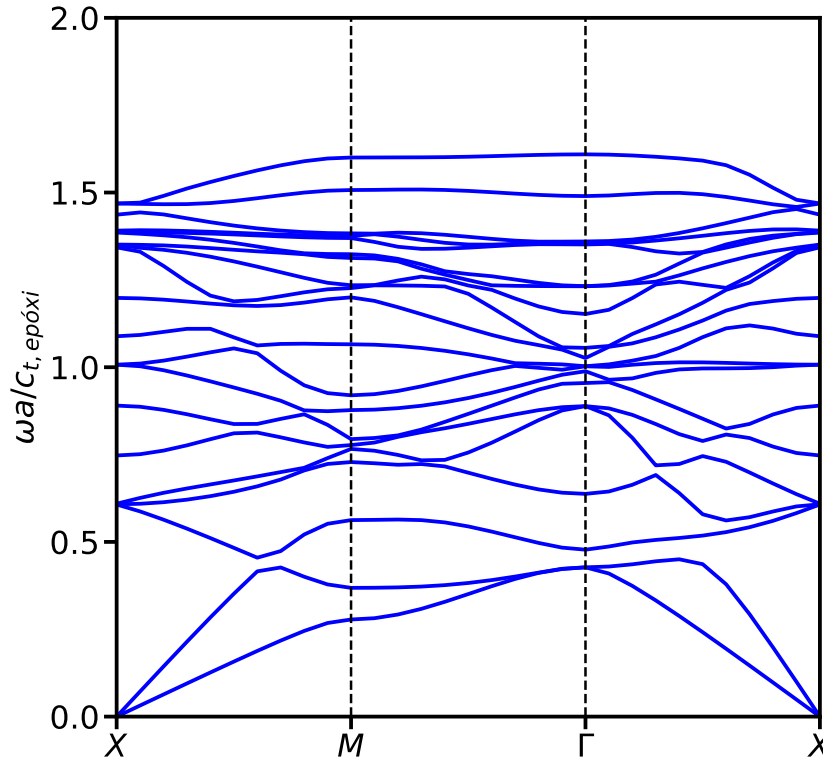


Fonte: Elaborada pelo autor.

(L1) do carpete de Sierpinski. Dela pode-se perceber que a estrutura de bandas apresenta uma faixa de banda proibida completa ou *complete band gap*, representado pelo retângulo vermelho, variando de $\omega a/c_{t,epóxi} \approx 0,7$ a $0,775$, o que corresponde a um *gap* na faixa de frequência de, aproximadamente, 13,1 a 14,5 kHz. Esta estrutura ainda apresenta *gaps* parciais entre as bandas 3 e 4, 4 e 5, 5 e 6 e entre as bandas 7 e 8 para a direção de propagação $M \rightarrow \Gamma$ (ao longo da diagonal do quadrado, conforme Fig. 12). Já para ondas se propagando na direção $\Gamma \rightarrow X$ (ao longo do eixo x), temos *gaps* parciais surgindo entre as bandas 2 e 3, e 3 e 4. Este comportamento é muito interessante pois permite o controle sobre a propagação da onda mecânica através da direção de propagação, o que é extremamente interessante para a fabricação de filtros acústicos ou guias de ondas curvos.

Nas Figs. 14 e 15 temos o mesmo que na Fig. 13, mas para as 2ª (L2) e 3ª (L3) gerações do carpete de Sierpinski. Primeiramente, observamos que uma banda proibida completa não mais aparece. Isto ocorre por conta do surgimento de novos modos de propagação que emergem exatamente na faixa de frequência que correspondia ao *band gap* completo no caso L1.

Figura 15 – Curvas de dispersão da célula unitária de tapete de Sierpinski de 3º geração (L3) formado por cilindros quadrados de Pb mergulhado em uma matriz de Epóxi



Fonte: Elaborada pelo autor.

O aparecimento de novos modos em regiões de bandas proibidas é um resultado esperado, uma vez que isso é um comportamento característico de cristais com geometrias fractais.

Ainda assim, temos a presença de *gaps* parciais. Para o caso L2, apresentado na Fig. 14, temos *gaps* entre as bandas 10 e 11, na direção $X \rightarrow M$; 2 e 3, 3 e 4, e 18 e 19, e 19 e 20, na direção $M \rightarrow \Gamma$; e entre as bandas 2 e 3, na direção $\Gamma \rightarrow X$. Já para o caso L3, mostrado na Fig. 15, a curva de dispersão apresenta *gaps* entre as bandas 2 e 3, e 10 e 11, na direção $X \rightarrow M$; 2 e 3, 3 e 4, e 17 e 18, na direção $M \rightarrow \Gamma$; e 2 e 3, na direção $\Gamma \rightarrow X$.

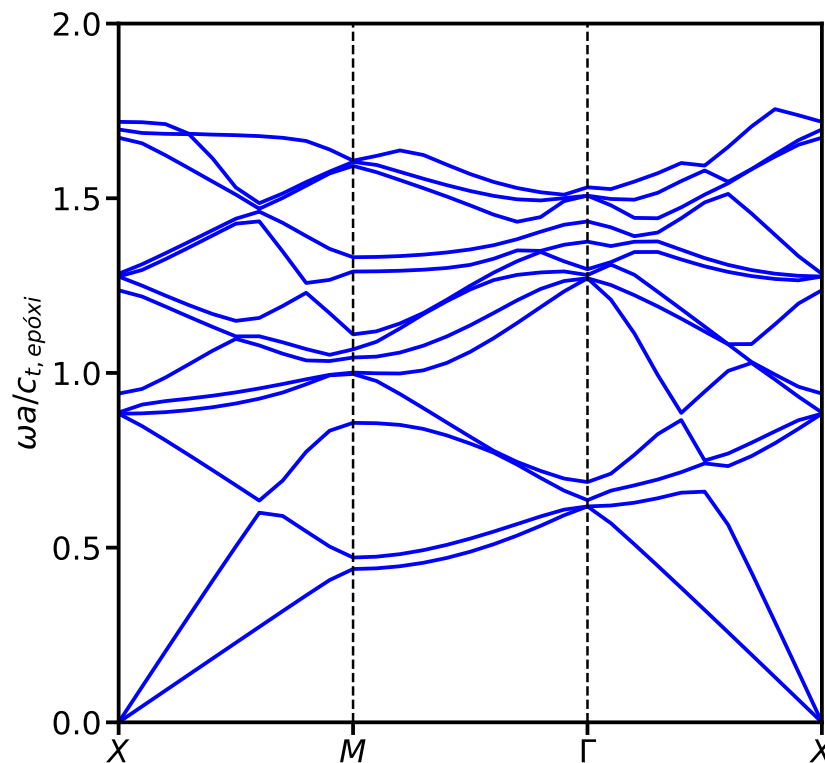
4.2 Gráficos de dispersão das estruturas compostas por cilindros de quartzo (SiO_2) em matriz de epóxi

As Figs. 16, 17 e 18 mostram os gráficos de dispersão da estrutura de célula unitária de carpete de Sierpinski composto por cilindros quadrados de quartzo (SiO_2) e matriz de epóxi, para as 1ª, 2ª e 3ª gerações, respectivamente. Neste caso, vemos que em nenhuma das gerações

investigadas observamos o aparecimento de uma banda proibida completa, apenas algumas poucas faixas de *gaps* parciais bastante estreitas, como, por exemplo, o *gap* entre a segunda e terceira bandas para ondas que se propagam na direção $X \rightarrow M$. Isso se deve ao fato de os parâmetros físicos dos materiais utilizados não serem muito distintos. Logo, apesar do fácil acesso e manuseio em laboratório, um cristal fonônico composto de cilindros quadrados de quartzo embebidos numa matriz de epoxi, segundo as três primeiras gerações do tapete de Sierpinski, não tem tanto interesse prático dentro da fonônica, principalmente por conta da ausência de bandas proibidas completas em sua estrutura de bandas.

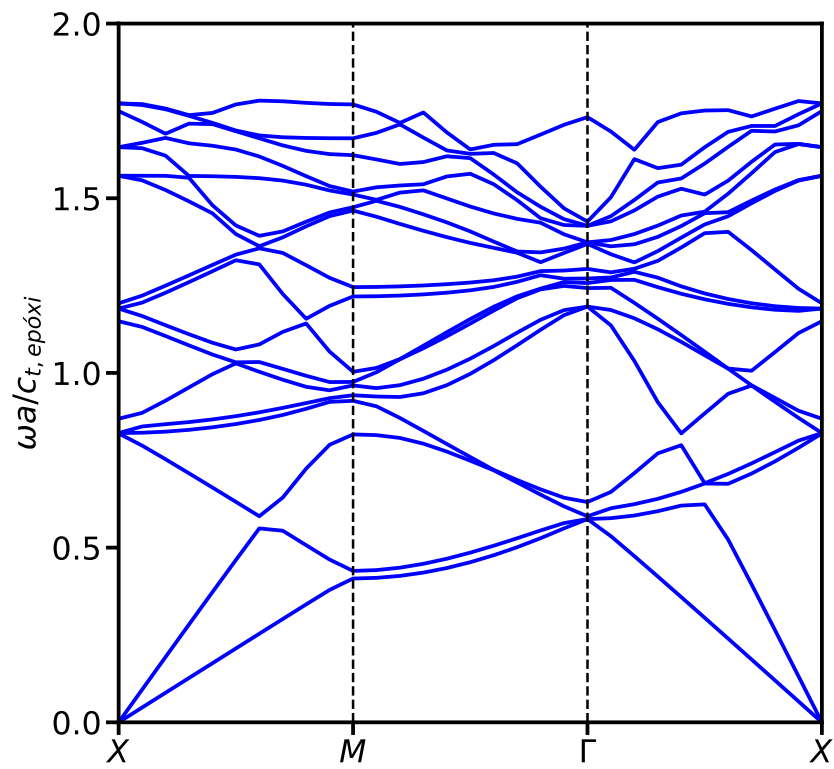
Ainda assim, percebe-se a existência de muitos cones de Dirac nos pontos de alta simetria e que podem ser manipulados para fins de estudos de modos topológicos, o que os torna em bons candidatos nesta área de pesquisa.

Figura 16 – Curvas de dispersão da célula unitária de tapete de Sierpinski de 1° (L1) formado por cilindros quadrados de Quartzo (SiO_2) mergulhado em uma matriz de Epoxi



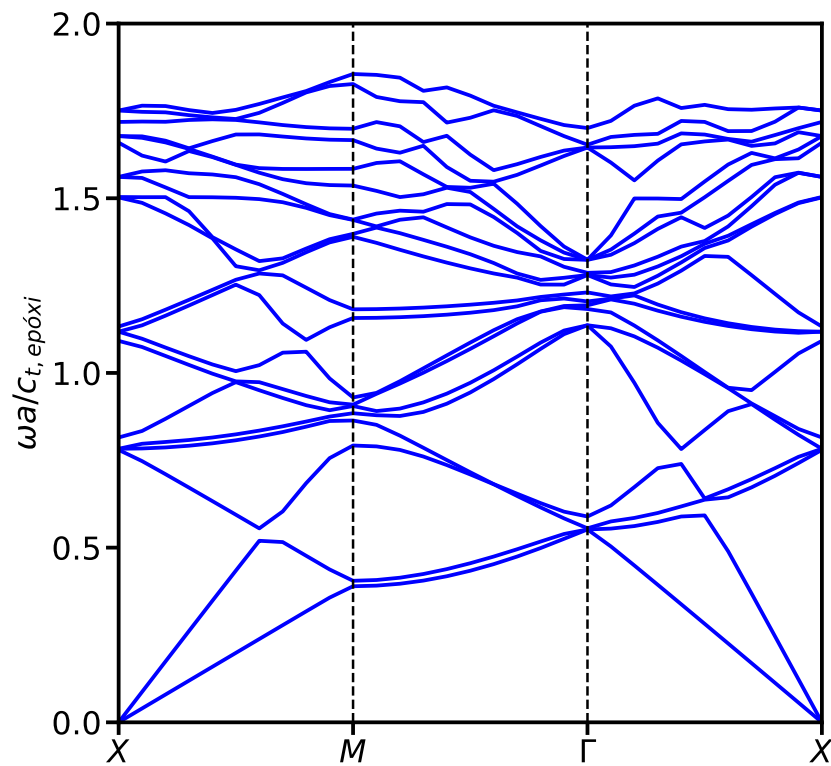
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 17 – Curvas de dispersão da célula unitária de tapete de Sierpinski de 2º (L2) formado por cilindros quadrados de Quartzo (SiO_2) mergulhado em uma matriz de Epóxi



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 18 – Curvas de dispersão da célula unitária de tapete de Sierpinski de 3º (L3) formado por cilindros quadrados de Quartzo (SiO_2) mergulhado em uma matriz de Epóxi



Fonte: Elaborada pelo autor.

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Estruturas periódicas de carpete de Sierpinski, incluindo cilindros quadrados de chumbo (Pb) e quartzo inseridos em uma matriz de epoxi, foram exploradas detalhadamente neste estudo. As relações de dispersão dos sistemas com diferentes gerações foram investigadas em termos de aparecimento de bandas proibidas. Tendo em vista os resultados obtidos através dos gráficos de dispersão, temos que a geometria de carpete de Sierpinski utilizada nos dois sistemas, influenciou de modo que ao analisar os resultados de um mesmo sistema ao longo das gerações do fractal, é possível notar que a estrutura de bandas tendem a se aproximarem em uma faixa de frequência específica, onde no primeiro sistema por exemplo, a partir da segunda geração uma faixa de banda proibida desaparece em decorrência desse comportamento.

Analisando comparativamente os gráficos de dispersão, temos que é possível concluir que em termos de geração de bandas proibidas o sistema chumbo/epoxi mostrou uma faixa de banda proibida completa na primeira geração, tendo como consequência a inibição da propagação de onda nas direções correspondentes. Logo, apresentando melhores resultados e maior potencial de aplicações. O sistema quartzo/epoxi em contrapartida, apresentou resultados não tão promissores, principalmente por conta da ausência de faixa de bandas proibidas completas em todas as gerações. Esse comportamento pode ser explicado por exemplo, por conta do quartzo apresentar propriedades elásticas um pouco menos discrepantes com relação as propriedades do epoxi, principalmente quando comparado ao chumbo.

Apesar dos resultados não tão promissores do sistema quartzo/Epoxi, temos ainda algumas possíveis aplicações desse sistema, entre outros fatores, por conta da existências de cones de Dirac nos pontos de alta simetria, nesse sentido, uma possível aplicação desse sistema seria a manipulação dos mesmos para fins de estudos de modos topológicos.

Outra ideia, seria analisar o comportamento de ambos os sistemas utilizando a mesma geometria em um plano inclinado por ângulos diferentes, a análise comparativa entre esses sistemas nos diferentes ângulos de inclinação, tem um grande potencial de geração de bons resultados no que diz respeito a faixas de bandas proibidas.

REFERÊNCIAS

- ARAUJO, A. T. G. de. **Noções de geometria fractal elementar.** (Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT)) - Universidade Federal de Sergipe - São Cristóvão - SE, 2014.
- ARAUJO, G. L. R. de. **Efeito da inclinação do plano de terra para antenas de microfita multicamadas com elementos parasitas fractais.** (Mestrado em Automação e Sistemas; Engenharia de Computação; Telecomunicações) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte - Natal, 2011.
- ASHCROFT, N.; ASHCROFT, M.; WEI, D.; MERMIN, N.; LEARNING, C. **Solid State Physics: Revised Edition.** [S. l.]: CENGAGE Learning Asia, 2016. ISBN 9789814369893.
- CARLETI, M.; JUSTINO-RIBEIRO, J. **Antenas impressas baseadas no tapete de sierpinski.** In: . [S. l.: s. n.], 2014.
- DEYMIER, P. A. **Acoustic metamaterials and phononic crystals.** Springer, v. 1, p. 100–113, 2013.
- GARCIA-PABLOS M. SIGALAS, F. d. E. M. T.-M. K. N. G. D. **Theory and experiments on elastic band gaps.** v. 84, p. 19, 2000.
- GONELLA, M. R. S. **Analysis of in-plane wave propagation in hexagonal and re-entrant lattices.** Journal of Sound and Vibration, Elsevier, v. 312, p. 125–139, 2008.
- HUANG, e. a. J. **Analysis of in-plane wave propagation in periodic structures with sierpinski-carpet unit cells.** Journal of Sound and Vibration 395, Elsevier, v. 395, p. 127–141, 2017.
- JENSEN, O. S. e J. S. **Systematic design of phononic band-gap materials and structures by topology optimization.** mathematical physical and engineering sciences, Royal Society, v. 361, p. 1001–1019, 2003.
- JR, E. M.; SANTOS, J. D. **Bandas proibidas de ondas elásticas em cristais fonônicos sustentáveis.** 05 2016.
- KHELIF, A. **Phononic Crystals Fundamentals and Applications.** 1. ed. [S. l.]: Springer, 2016. ISBN 978-1-4614-9392-1.
- KHELIF A., A. B. M. S. A. A. . L.-V. **Complete band gaps in two-dimensional phononic crystal slabs.** Physical Review, v. 4, p. 74, 2006.
- KITTEL, C. **Introduction to Solid State Physics.** 5. ed. [S. l.]: John Wiley SONS, INC, PUBLICATION, 1978.
- KUSHWAHA, M. **Theory of acoustic band structure of periodic elastic composites.** p. 49, 1994.
- LIU CHIEN C. CHANG, R.-L. C. e. C. C. C. Y.-H. **Phononic band gaps of elastic periodic structures: A homogenization theory study.** PHYSICAL REVIEW B, Elsevier, v. 75, n. 1-8, p. 05410–1–05410–8, 2007.
- LUCKLUM, R. **Phononic crystals and applications.** Research Gate, 2013.

MARDER, M. P. **Condensed Matter Physics. 2. ed.** [S. l.]: John Wiley SONS, INC, PUBLICATION, 2010. ISBN 978-0-470-61798-4.

MCGURN, A. **Introduction to Photonic and Phononic Crystals and Metamaterials.** 1. ed. [S. l.]: Morgan Claypool, 2020. ISBN 9781681737614.

MEAD, D. J. **The forced vibration of one-dimensional multi-coupled periodic structures: An application to finite element analysis.** Journal of Sound and Vibration, Elsevier, v. 319, p. 282–304, 2009.

MEDEIROS, T. E. de L. **Antenas de microfita sobre substrato dielétrico organizado de forma quase periódica.** Universidade Federal rural do semi árido Programa de Pós-Graduação em Sistemas de Comunicação e Automação - PPGSCA, 2013.

NAKAMOTO, R. **Antenas fractais tapete de sierpinski.** (Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Curitiba, 2020.

OLIVEIRA, E. E. C. de. **Antenas de microfita com patch quase-fractal para aplicações em redes wpan/wlan.** Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e de Computação, Elsevier, p. 125–139, 2008.

SADAT-SALEH S., B. S. B. F. I. B. M.-P. . L. V. **Tailoring simultaneous photonic and phononic band gaps.** Journal of Applied Physics, v. 7, p. 106, 2009.

SHI, H.-J. X. e Z.-F. **Vibration attenuation in periodic composite timoshenko beams on pasternak foundation.** Structural Engineering and Mechanics, Elsevier, v. 40, p. 373–392, 2011.

SOLYMAR, L. O.; WALSH. **Electrical properties of materials.** Oxford University Press, v. 8, p. 15, 2010.

SU, Y.-C. **Design of elastic metamaterials.** Open Access Dissertations, v. 1, p. 118–121,

2015. WALLIS, R. F. **Electromagnetic surface excitations.** Springer-Verlag, v. 1, p. 1, 1986.