UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

O Teorema de Comparação do Hessiano e Aplicações Sobre Variedades Completas com Curvatura de Ricci Não-Negativa

José Nazareno Cardeal Fonteles

Esta Monografia foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática, outorgado pela Universidade Federal do Ceará, e encontra-se a disposição na biblioteca da referida Universidade.

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita de conformidade com as normas da ética científica.

Monografia aprovada em 04 de Agosto de 1998.

Banca Examinadora

Prof. Gregório Pacelli Feitosa Bessa
(Orientador)

Prof. Luquesio Petrola de Melo Jorge

Prof. Geraldo de Oliveira Filho

Universidade Federal do Ceará

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

O Teorema de Comparação do Hessiano e Aplicações sobre Variedades Completas com Curvatura de Ricci não negativa

José Nazareno Cardeal Fonteles

1998

Ofereço

à minha esposa Nereida
e ao meu amigo Marcílio.

ÍNDICE

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, agradeço a todos aqueles professores da Universidade Federal do Ceará e da Universidade Federal do Piauí, em particular ao Prof. João Xavier, que com seus esforços individuais e coletivos ajudaram a concretizar a idéia do mestrado interinstitucional em Matemática. Dificilmente, sem esta oportunidade, estaria escrevendo estas linhas agora.

Gostaria de ressaltar a minha gratidão pela oportunidade de uma convivência saudável que desfrutei com professores, funcionários e colegas, num ambiente de dedicação profissional e relações amistosas.

Agradeço, enfim, ao meu orientador Prof. G. Pacelli Bessa e ao colega Barnabé, que de forma desprendida me ajudou em "algumas contas" dessa dissertação.

INTRODUÇÃO

Nesta dissertação, como o próprio título indica, apresentamos o Teorema de Comparação do Hessiano e aplicações relacionadas com o Laplaciano da função distância sobre variedades completas com curvatura de Ricci não negativa.

No capítulo II é demonstrado o Teorema de Comparação do Hessiano e o Lema do Índice, o qual é utilizado na demonstração do referido teorema.

Por outro lado, no capítulo III, são demonstrados cinco proposições, sendo a primeira delas o Teorema de Comparação do Laplaciano. A segunda é uma consequência da primeira e a terceira generaliza a segunda, no sentido das distribuições.

Finalmente, as duas últimas proposições tratam da comparação com volumes, encerrando-se com o seguinte corolário da proposição 5: *Uma variedade riemanniana M, completa e não compacta, com $Ric(M) \geq 0$, tem volume infinito.*

Capítulo I

PRELIMINARES

Seja M uma variedade riemanniana completa de dimensão n. Escolhamos um ponto $P \in M$ e definamos a função $\rho : M \to \mathbb{R}$ por $\rho(x) := d(x, P) :=$ distância geodésica de x a P. Sabemos que ρ é uma função contínua de Lipschitz sobre M. Em virtude disso e do Teorema de Rademacher [9] da teoria da medida geométrica, ρ é diferenciável em quase todo ponto de M. Noutras palavras, a menos de um conjunto de medida nula, ρ é diferenciável em M.

Na verdade, como explicamos a seguir, ρ é diferenciável em $M \setminus Cut(P)$[1], onde $Cut(P)$ é o *cut locus* de P, o qual é um conjunto de medida nula.

Consideremos a aplicação exponencial $\exp_P : T_PM \to M$. Dado um vetor $v \in T_PM$, com $||v|| = \langle v, v\rangle^{\frac{1}{2}}$, seja $\gamma(t)$ a única geodésica tal que $\gamma(0) = P$ e $\gamma'(0) = v$. Então teremos que $\exp_P(tv) = \gamma(t)$, para $t > 0$. Sabemos que para um t conveniente γ é a única geodésica minimizante que liga P a $\exp_P(tv)$, sendo $d(\exp_P)_{tv} : T_{tv}(T_PM) \to T_{\gamma(t)}M$ um isomorfismo.

Agora definamos $t_0 = \sup A$, onde A é o conjunto dos $t > 0$ tais que γ é a única geodésica minimizante que liga P a $\gamma(t)$. Se $t_0 < \infty$, então denominamos $\gamma(t_0)$ de *ponto mínimo* de P ao longo de γ. O cut locus de P, denotado por $Cut(P)$, é exatamente o conjunto de todos os pontos mínimos de P ao longo de todas as geodésicas que partem de P. [5]

Uma outra propriedade relevante relacionada com o cut locus de P é a seguinte: $(\exp_P)^{-1}|_{M\setminus Cut(P)}$ é um difeomorfismo. Noutros termos, indicando por $D_P := \exp_P^{-1}(M \setminus Cut(P))$, a restrição $\exp_P : D_P \to M \setminus Cut(P)$ é um difeomorfismo. Com isto podemos definir uma carta normal maximal na vizinhança de todo ponto $P \in M$. Por outro lado $Cut(P) = \partial \exp_P(D_P)$, o que permite concluir que o $Cut(P)$ tem medida nula em M. [6]

Em virtude de $\exp_P : D_P \to M \setminus Cut(P)$ ser um difeomorfismo, segue-se que a função distância $\rho(x) = d(x, P)$ é diferenciável em $M \setminus Cut(P)$. Para maior clareza, observe que se $d : T_PM \to \mathbb{R}$ é a função distância sobre T_PM relativa a origem 0 então $\rho(x) = (d \circ \exp_P^{-1})(x)$.

---

[1] Entenda $M \setminus Cut(P)$ como $(M - \{P\}) \setminus Cut(P)$.

Desta forma, podemos falar em gradiente, Hessiano e Laplaciano da função distância $\rho(x)$ no domínio $M \setminus Cut(P)$. No caso do gradiente $\nabla\rho$ podemos verificar que $|\nabla\rho|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\rho_i\rho_j = 1$, onde $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ e (g_{ij}) é a matriz associada à métrica riemanniana na carta normal maximal referida acima. E para o Hessiano e Laplaciano usamos as seguintes definições: [10]

Dados $X, Y \in T_P M$, sejam $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ campos vetoriais diferenciáveis que estendam X, Y numa vizinhança de P. Então definimos:

$$Hess(f)(X,Y) = H(f)(X,Y) := (\widetilde{X}\widetilde{Y}f)(x) - \left(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\right) f(x)$$

$$\Delta f := \text{ traço de } H(f)(X,Y),$$

onde $f \in C^2(M)$.

Também, esclarecemos que, neste trabalho, a curvatura de Ricci de uma variedade riemanniana M^n, é a forma bilinear simétrica $Ric(M) : T_P M \times T_P M \rightarrow \mathbb{R}$ definida como o traço da transformação linear $z \rightarrow R(z,x)y$, tal que: se $x = e_n$, então

$$Ric(x,x) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(e_i,x)x, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} k(e_i,x),$$

onde $\{e_i\}$ é uma base ortonormal de $T_P M$ e k é a curvatura seccional do 2-plano determinado por $\{e_i, x\}$ em P.

Finalmente, as propriedades básicas de campos de Jacobi e volume riemanniano que usamos estão claramente expostas nas referências [5] e [2].

Capítulo II

O TEOREMA DE COMPARAÇÃO DO HESSIANO

Fixemos um ponto x_0 de uma variedade riemanniana completa M, de dimensão n. Para $x \in M \setminus Cut(x_0)$, seja γ a geodésica minimizante que liga x_0 a x, parametrizada pelo comprimento de arco, tal que $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(r) = x$. Denotemos por X um vetor em T_xM tal que $\left\langle X, \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle(x) = 0$. Desde que x não seja um ponto conjugado de x_0, podemos estender X a um campo de Jacobi $\widetilde{X}$ ao longo de γ satisfazendo as condições: $\widetilde{X}(\gamma(0)) = 0$, $\widetilde{X}(\gamma(r)) = X$ e $\left[\widetilde{X}, \frac{\partial}{\partial r}\right] = 0$. Então, usando a definição de Hessiano para a função distância ρ, temos que:

$$\begin{aligned} H(\rho)(X,X) &= \widetilde{X}\widetilde{X}\rho - (\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{X})\rho \\ &= \widetilde{X}\left\langle \widetilde{X}, \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle - \left\langle \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{X}, \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle \\ &= \left\langle \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{X}, \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle + \left\langle \widetilde{X}, \nabla_{\widetilde{X}}\frac{\partial}{\partial r}\right\rangle - \left\langle \nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{X}, \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle \\ &= \left\langle \widetilde{X}, \nabla_{\widetilde{X}}\frac{\partial}{\partial r}\right\rangle. \end{aligned}$$

Mas $\left[\widetilde{X}, \frac{\partial}{\partial r}\right] = 0$, logo $\left\langle \widetilde{X}, \nabla_{\widetilde{X}}\frac{\partial}{\partial r}\right\rangle = \left\langle \widetilde{X}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\widetilde{X}\right\rangle$. Portanto $H(\rho)(X,X) = \left\langle \widetilde{X}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\widetilde{X}\right\rangle$. Segue-se disto que:

$$\begin{aligned} H(\rho)(X,X) &= \int_0^r \frac{d}{dt}\left\langle \widetilde{X}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\widetilde{X}\right\rangle dt \\ &= \int_0^r \left(\left|\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\widetilde{X}\right|^2 + \left\langle \widetilde{X}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\widetilde{X}\right\rangle\right) dt \end{aligned}$$

Sendo $\widetilde{X}$ um campo de Jacobi, então $\widetilde{X}$ satisfaz a equação de Jacobi:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\widetilde{X} + R\left(\widetilde{X}, \frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\partial}{\partial r} = 0.$$

Assim, obtemos:

$$H(\rho)(X,X) = \int_0^r \left(\left| \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \widetilde{X} \right|^2 - \left\langle R\left(\widetilde{X}, \frac{\partial}{\partial r}\right) \frac{\partial}{\partial r}, \widetilde{X} \right\rangle \right) dt,$$

onde R indica, aqui, o tensor curvatura de M. Como, usualmente, a "forma do índice " é denotada por $I_r(\widetilde{X}) = \int_0^r \left(\left| \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \widetilde{X} \right|^2 - \left\langle R\left(\widetilde{X}, \frac{\partial}{\partial r}\right) \frac{\partial}{\partial r}, \widetilde{X} \right\rangle \right) dt$, concluimos que $H(\rho)(X,X) = I_r(\widetilde{X})$.

A seguir enunciaremos e demonstraremos o teorema de comparação do Hessiano.

Teorema de Comparação do Hessiano. *Sejam:*

(i) *M_1 e M_2 duas variedades riemannianas completas de mesma dimensão n;*
(ii) *$\gamma_1 : [0,a] \to M_1$ e $\gamma_2 : [0,a] \to M_2$ duas geodésicas parametrizadas pelo comprimento de arco, tais que $\gamma_1 \cap Cut(\gamma_1(0)) = \emptyset$ e $\gamma_2 \cap Cut(\gamma_2(0)) = \emptyset$;*
(iii) *ρ_1 a função distância de $\gamma_1(0)$ em M_1 e ρ_2 a função distância de $\gamma_2(0)$ em M_2;*
(iv) *k_1 a curvatura seccional de M_1 e k_2 a curvatura seccional de M_2.*
Suponha que em $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)$, $0 \le t \le a$, se tenha

$$k_1\left(X_1, \frac{\partial}{\partial \gamma_1}\right) \ge k_2\left(X_2, \frac{\partial}{\partial \gamma_2}\right),$$

onde X_i é qualquer vetor unitário em $T_{\gamma_i(t)}M_i$ perpendicular a $\frac{\partial}{\partial \gamma_i}$, $i = 1,2$. Então:

$$H(\rho_1)(X_1,X_1) \le H(\rho_2)(X_2,X_2),$$

onde $X_i \in T_{\gamma_i(a)}M_i$ com $\left\langle X_i, \frac{\partial}{\partial \gamma_i} \right\rangle (\gamma_i(a)) = 0$ e $|X_i| = 1$, $i = 1,2$.

Demonstração: Sejam $E_1^i, \ldots, E_n^i$ um sistema ortonormal de campos vetoriais paralelos ao longo de γ_i, com $E_n^i = \frac{\partial}{\partial \gamma_i}$, $i = 1,2$. Como

$$H(\rho)(X,X) = \int_0^r \left(\left| \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \widetilde{X} \right|^2 - \left\langle R\left(\widetilde{X}, \frac{\partial}{\partial r}\right) \frac{\partial}{\partial r}, \widetilde{X} \right\rangle \right) dt,$$

então podemos escrever:

$$H(\rho_i)(X_i, X_i) = \int_0^a \left(\left| \nabla_{\frac{\partial}{\partial \gamma_i}} \widetilde{X}_i \right|^2 - \left\langle R_i \left(\widetilde{X}_i, \frac{\partial}{\partial \gamma_i} \right) \frac{\partial}{\partial \gamma_i}, \widetilde{X}_i \right\rangle \right) dt,$$

onde $\widetilde{X}_i$ é um campo de Jacobi ao longo de γ_i com $\widetilde{X}_i(\gamma_i(0)) = 0$, $\widetilde{X}_i(\gamma_i(a)) = X_i$. Desde que $\left\langle X_i, \dfrac{\partial}{\partial \gamma_i} \right\rangle = 0$, $\widetilde{X}_i$ é perpendicular a E_n^i em cada ponto de γ_i. Exprimindo $\widetilde{X}_2$ por $\widetilde{X}_2 = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j(t) E_j^2$, nós podemos tomar $\left\{E_j^1\right\}_{j=1}^n$ tal que $X_1 = \widetilde{X}_1(a) = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j(a) E_j^1(\gamma_1(a))$ e definir um campo vetorial Z ao longo de γ_1 assim: $Z = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j(t) E_j^1$. Logo, Z assume o mesmo valor que $\widetilde{X}_1$ em $t = 0$ e $t = a$. Além disso, $|Z| = |\widetilde{X}_2|$ e

$$\left| \nabla_{\frac{\partial}{\partial \gamma_2}} \widetilde{X}_2 \right| = \left| \sum \lambda_j'(t) E_j^2 \right| = \left| \sum \lambda_j'(t) E_j^1 \right| = \left| \nabla_{\frac{\partial}{\partial \gamma_1}} Z \right|.$$

Desde que pelo Lema do Índice, um campo de Jacobi minimiza a forma do índice entre todos os campos vetoriais ao longo da mesma geodésica com os mesmos valores de fronteira, nós obtemos:

$$\begin{aligned} H(\rho_1)(X_1, X_1) &= I_a(\widetilde{X}_1) \leq I_a(Z) \\ &= \int_0^a \left(\left| \nabla_{\frac{\partial}{\partial \gamma_1}} Z \right|^2 - \left\langle R_1 \left(Z, \frac{\partial}{\partial \gamma_1} \right) \frac{\partial}{\partial \gamma_1}, Z \right\rangle \right) dt \\ &= \int_0^a \left(\left| \nabla_{\frac{\partial}{\partial \gamma_2}} \widetilde{X}_2 \right|^2 - k_1 \left(Z, \frac{\partial}{\partial \gamma_1} \right) \right) dt. \end{aligned}$$

Mas, em virtude da hipótese sobre as curvaturas seccionais, nós temos que:

$$\begin{aligned} \int_0^a \left(\left| \nabla_{\frac{\partial}{\partial \gamma_2}} \widetilde{X}_2 \right|^2 - k_1 \left(Z, \frac{\partial}{\partial \gamma_1} \right) \right) dt &\leq \int_0^a \left(\left| \nabla_{\frac{\partial}{\partial \gamma_2}} \widetilde{X}_2 \right|^2 - k_2 \left(\widetilde{X}_2, \frac{\partial}{\partial \gamma_2} \right) \right) dt \\ &= I_a(\widetilde{X}_2) \\ &= H(\rho_2)(X_2, X_2). \end{aligned}$$

Assim concluimos a demonstração do teorema. ■

Pela importância do Lema do índice na demonstração do Teorema de Comparação do Hessiano, apresentamos o seu enunciado e sua demonstração, conforme [5].

Lema do Índice. *Seja $\gamma : [0,a] \to M$ uma geodésica sem pontos conjugados a $\gamma(0)$ no intervalo $(0,a]$. Seja J um campo de Jacobi ao longo de γ, com $\left\langle J, \gamma' \right\rangle = 0$, e seja V um campo de vetores diferenciável por partes ao longo de γ, com $\left\langle V, \gamma' \right\rangle = 0$. Suponhamos que $J(0) = V(0) = 0$ e que $J(t_0) = V(t_0)$, $t_0 \in (0,a]$. Então*

$$I_{t_0}(J) \leq I_{t_0}(V)$$

e a igualdade ocorre se e só se $V = J$ em $[0,t_0]$.

Demonstração: O espaço vetorial $\mathfrak{J}$ dos campos de Jacobi J ao longo de γ com $J(0) = 0$ e $\left\langle J, \gamma' \right\rangle = 0$ tem dimensão $n-1$, onde $n = \dim M$. Seja $\{J_1, \ldots, J_{n-1}\}$ uma base para este espaço. Então $J = \sum_i \alpha_i J_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, onde os α_i são constantes. Como não existem pontos conjugados no intervalo $(0,a]$, para todo $t \neq 0$, os vetores $J_1(t), \ldots, J_{n-1}(t)$ formam uma base do complemento ortogonal de $\gamma'(t)$ em $T_{\gamma(t)}(M)$. Portanto, para $t \neq 0$, podemos escrever

$$V(t) = \sum_i f_i(t) J_i(t),$$

onde f_i são funções diferenciáveis por partes em $(0,a]$. Vamos mostrar que f_i pode ser estendida contínua e diferenciavelmente a $t = 0$, isto é, f_i é diferenciável por partes em $[0,a]$.

Para isto[2], escreva $J_i(t) = tA_i(t)$. Então $A_i(0) = J_i'(0)$, donde os $A_i(0)$ são linearmente independentes para todo $t \in [0,a]$, e podemos escrever $V(t) = \sum_i g_i(t) A_i(t)$ onde os g_i são funções diferenciáveis por partes em $[0,a]$ e $g_i(0) = 0$. Aplicando de novo o resultado de cálculo, temos que $g_i(t) = th_i(t)$, onde os $h_i(t)$ são diferenciáveis por partes em $[0,a]$. Como para $t \neq 0$, $f_i(t) = h_i(t)$, concluimos o afirmado.

---

[2] Estamos usando nesta passagem o seguinte lema do cálculo: *Seja $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável com $h(0) = 0$. Então existe uma função diferenciável $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$, com* $\phi(0) = \frac{dh}{dt}(0)$, $h(t) = t\phi(t)$, $t \in [0,1]$.

Vamos agora, mostrar que, no interior de cada subintervalo onde f_i é diferenciável,

$$\left\langle V', V' \right\rangle - \left\langle R(\gamma', V)\gamma', V \right\rangle = \left\langle \sum_i f_i' J_i, \sum_j f_j' J_j \right\rangle + \frac{d}{dt}\left\langle \sum_i f_i J_i, \sum_j f_j J_j' \right\rangle. \tag{2.1}$$

Com efeito, como

$$R(\gamma', V)\gamma' = R\left(\gamma', \sum_i f_i J_i\right)\gamma' = \sum_i f_i R(\gamma', J_i)\gamma' = -\sum_i f_i J_i'',$$

teremos

$$\begin{aligned}
&\left\langle V', V' \right\rangle - \left\langle R(\gamma', V)\gamma', V \right\rangle \\
= &\left\langle \sum_i f_i' J_i + \sum_i f_i J_i', \sum_j f_j' J_j + \sum_j f_j J_j' \right\rangle - \left\langle R(\gamma', V)\gamma', V \right\rangle \\
= &\left\langle \sum_i f_i' J_i, \sum_j f_j' J_j \right\rangle + \left\langle \sum_i f_i' J_i, \sum f_j J_j' \right\rangle \\
&+ \left\langle \sum_i f_i J_i', \sum_j f_j' J_j \right\rangle + \left\langle \sum_i f_i J_i', \sum_j f_j J_j' \right\rangle + \left\langle \sum_i f_i J_i'', \sum_j f_j J_j \right\rangle.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\langle \sum_i f_i J_i, \sum_j f_j J_j' \right\rangle &= \left\langle \sum_i f_i' J_i + \sum_i f_i J_i', \sum_j f_j J_j' \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \sum_i f_i J_i, \sum_j f_j' J_j' + \sum_j f_j J_j'' \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_i f_i' J_i, \sum_j f_j J_j' \right\rangle + \left\langle \sum_i f_i J_i', \sum_j f_j J_j' \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \sum_i f_i J_i, \sum_j f_j J_j'' \right\rangle + \left\langle \sum_i f_i J_i, \sum_j f_j' J_j' \right\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto, para provar (2.1), basta mostrar que

$$\left\langle \sum_i f_i J_i', \sum_j f_j' J_j \right\rangle = \left\langle \sum_i f_i J_i, \sum_j f_j' J_j' \right\rangle. \tag{2.2}$$

Para provar (2.2), escreveremos

$$h(t) = \left\langle J_i', J_j \right\rangle - \left\langle J_i, J_j' \right\rangle;$$

como $h(0) = 0$ e

$$\begin{aligned} h'(t) &= \left\langle J_i'', J_j \right\rangle + \left\langle J_i', J_j' \right\rangle - \left\langle J_i', J_j' \right\rangle - \left\langle J_i, J_j'' \right\rangle \\ &= -\left\langle R(\gamma', J_i)\gamma', J_i \right\rangle + \left\langle J_i, R(\gamma', J_j)\gamma' \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

concluimos que $h(t) \equiv 0$. Por distributividade, se obtém então (2.2) o que conclui a demonstração de (2.1).

Aplicando (2.1) a V e J, obteremos sucessivamente:

$$I_{t_0}(V) = \left\langle \sum_i f_i J_i, \sum_j f_j J_j' \right\rangle (t_0) + \int_0^{t_0} \left\langle \sum_i f_i' J_i, \sum_j f_j' J_j \right\rangle dt,$$

$$I_{t_0}(J) = \left\langle \sum_i \alpha_i J_i, \sum_j \alpha_j J_j' \right\rangle (t_0).$$

Como $J(t_0) = V(t_0)$, temos que $\alpha_i = f_i(t_0)$, donde

$$I_{t_0}(V) = I_{t_0}(J) + \int_0^{t_0} \left| \sum_i f_i' J_i \right|^2 dt. \tag{2.3}$$

Decorre de (2.3) que $I_{t_0}(V) \geq I_{t_0}(J)$, o que demonstra a primeira parte do lema. Se $I_{t_0}(V) = I_{t_0}(J)$, então $\sum_i f_i' J_i = 0$. Como os J_i são linearmente independentes para $t \neq 0$, concluimos, por continuidade, que $f_i' = 0$, para todo i e para todo $t \in [0, t_0]$. Portanto, $f_i = const.$, e como $f_i(t_0) = \alpha_i$, concluimos que $f_i(t) = \alpha_i$, isto é, $V = J$, como queríamos. ■

Capítulo III

APLICAÇÕES

Aplicação-1

Teorema de Comparação do Laplaciano. *Sejam:*
(i) M_1 *uma variedade riemanniana completa de dimensão* n*, com*

$$Ric(M_1) \geq -(n-1)k^2,$$

onde k *é uma constante não negativa;*
(ii) M_2 *o espaço forma de dimensão* n *e curvatura seccional* $-k^2$*;*
(iii) ρ_{M_1} *e* ρ_{M_2} *as funções distâncias sobre* M *e* $\overline{M}$*, respectivamente.*

Se $x \in M_1$ *e* ρ_{M_1} *é diferenciável em* x*, então para qualquer* $y \in M_2$*, com* $\rho_{M_2}(y) = \rho_{M_1}(x)$ *temos que:*

$$\Delta\rho_{M_1}(x) \leq \Delta\rho_{M_2}(y).$$

Demonstração: Sejam $\gamma_1 : [0,a] \to M_1$ e $\gamma_2 : [0,a] \to M_2$ duas geodésicas parametrizadas pelo comprimento de arco, tais que $\gamma_1 \cap Cut(\gamma_1(0)) = \emptyset$ e $\gamma_2 \cap Cut(\gamma_2(0)) = \emptyset$. E seja $\{X_1^i, \ldots, X_{n-1}^i, X_n^i = \frac{\partial}{\partial\gamma_i}\}$ uma base ortonormal de $T_{\gamma_i(a)}M_i$, $i = 1,2$. Então podemos escrever:

$$H(\rho_{M_i})(X_j^i, X_j^i) = \int_0^a \left(\left|\nabla_{\frac{\partial}{\partial\gamma_i}} \widetilde{X}_j^i\right|^2 - \left\langle R_i\left(\widetilde{X}_j^i, \frac{\partial}{\partial\gamma_i}\right)\frac{\partial}{\partial\gamma_i}, \widetilde{X}_j^i\right\rangle\right) dt,$$

onde $\widetilde{X}_j^i$ é um campo de Jacobi ao longo de γ_i, com $\widetilde{X}_j^i(\gamma_i(0)) = 0$, $\widetilde{X}_j^i(\gamma_i(a)) = X_j^i$.

Segue-se que:

$$\begin{aligned}
\Delta\rho_{M_1} &= \sum_{j=1}^{n-1} H(\rho_{M_1})(X_j^1, X_j^1) = \sum_{j=1}^{n-1} \int_0^a \left(\left|\nabla_{\frac{\partial}{\partial\gamma_1}} \widetilde{X}_j^1\right|^2 - \left\langle R_1\left(\widetilde{X}_j^1, \frac{\partial}{\partial\gamma_1}\right)\frac{\partial}{\partial\gamma_1}, \widetilde{X}_j^1\right\rangle\right) dt \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} I_a(X_j^1)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\Delta\rho_{M_2} &= \sum_{j=1}^{n-1} H(\rho_{M_2})(X_j^2, X_j^2) = \sum_{j=1}^{n-1}\int_0^a \left(\left|\nabla_{\frac{\partial}{\partial\gamma_2}}\widetilde{X}_j^2\right|^2 - \left\langle R_2\left(\widetilde{X}_j^2, \frac{\partial}{\partial\gamma_2}\right)\frac{\partial}{\partial\gamma_2}, \widetilde{X}_j^2\right\rangle\right) dt \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} I_a(X_j^2).\end{aligned}$$

Agora, procedendo de modo análogo ao que fizemos na demonstração do Teorema de Comparação do Hessiano, aplicamos o Lema do Índice aos campos vetoriais Z_j e obtemos: $I_a(X_j^1) \leq I_a(Z_j)$. Como, por hipótese,

$$Ric(M_1) \geq -(n-1)k^2 = Ric(M_2)$$

e $\left|\nabla_{\frac{\partial}{\partial\gamma_2}}\widetilde{X}_j^2\right| = \left|\nabla_{\frac{\partial}{\partial\gamma_1}} Z_j\right|$, segue-se que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n-1} I_a(Z_j) &= \sum_{j=1}^{n-1}\int_0^a \left|\nabla_{\frac{\partial}{\partial\gamma_2}}\widetilde{X}_j^2\right|^2 dt - \int_0^a \sum_{j=1}^{n-1}\left\langle R_1\left(Z_j, \frac{\partial}{\partial\gamma_1}\right)\frac{\partial}{\partial\gamma_1}, Z_j\right\rangle dt \\ &= \sum_{j=1}^{n-1}\int_0^a \left|\nabla_{\frac{\partial}{\partial\gamma_2}}\widetilde{X}_j^2\right|^2 dt - \int_0^a Ric(M_1)dt \\ &\leq \sum_{j=1}^{n-1}\int_0^a \left|\nabla_{\frac{\partial}{\partial\gamma_2}}\widetilde{X}_j^2\right|^2 dt - \int_0^a Ric(M_2)dt \\ &= \sum_{j=1}^{n-1}\int_0^a \left(\left|\nabla_{\frac{\partial}{\partial\gamma_2}}\widetilde{X}_j^2\right|^2 - (-k^2)\right) dt = \sum_{j=1}^{n-1} I_a(X_j^2).\end{aligned}$$

Logo, $\Delta\rho_{M_1} \leq \Delta\rho_{M_2}$. ■

Aplicação-2

Proposição 2. *Seja M uma variedade riemanniana completa, com $Ric(M) \geq 0$. Seja $P \in M$ e $\rho(x) = d(x, P)$. Então, em qualquer ponto $x \in M$, em que ρ é diferenciável, vale:* $\Delta\rho \leq \dfrac{n-1}{\rho}$.

Demonstração: Provaremos abaixo que se $\overline{M}$ é o espaço forma de curvatura seccional constante $k = 0$, então $\Delta\overline{\rho} = \dfrac{n-1}{\overline{\rho}}$. Por hipótese $Ric(M) \geq 0$, então pelo Teorema de Comparação do Laplaciano, $\Delta\rho \leq \Delta\overline{\rho} = \dfrac{n-1}{\overline{\rho}} = \dfrac{n-1}{\rho}$.

Agora provemos que $\Delta\overline{\rho} = \dfrac{n-1}{\overline{\rho}} = \dfrac{n-1}{r}$. Sabemos que

$$H(\overline{\rho})(X,X) = \int_0^r \left(\left|\Delta_{\frac{\partial}{\partial r}} \widetilde{X}\right|^2 - \left\langle R\left(\widetilde{X}, \frac{\partial}{\partial r}\right), \widetilde{X} \right\rangle \right) dt,$$

onde $\widetilde{X}$ é o campo de Jacobi ao longo da geodésica minimizante γ satisfazendo $\widetilde{X}(0) = 0$ e $\widetilde{X}(\gamma(r)) = X$. Portanto, para se calcular $\Delta\overline{\rho}$, devem encontrar um campo de Jacobi ao longo de γ. Seja $\overline{M}$ o espaço forma de curvatura $k = 0$ e seja $X \in T_{\gamma(r)}\overline{M}$, com $X \perp \gamma'(r)$. Denotemos por $X(t)$, $0 \leq t \leq r$, o campo vetorial obtido por extensão paralela de X ao longo de γ. Então o campo de Jacobi $Y(t)$ ao longo de γ, com $Y(0) = 0$ e $Y(r) = X$, tem a forma: $Y(t) = f(t)X(t)$, onde a função $f(t)$ satisfaz a *equação de Jacobi*

$$(*) \begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2} f(t) = 0 \\ \\ f(0) = 0,\ f(r) = 1. \end{cases}$$

A solução de $(*)$ é $f(t) = \dfrac{t}{r}$.

Por outro lado, consideremos uma base ortonormal de $T_{\gamma(r)}\overline{M}$, $\{X_1^2, \ldots, X_{n-1}^2, \frac{\partial}{\partial r}\}$, paralela ao longo de γ. Então $\widetilde{X}_i = f(t)X_i(t)$ são campos de Jacobi com $\widetilde{X}_i(r) = X_i$. E usando a fórmula $H(\overline{\rho})(X_i, X_i) = I_r(X_i)$ e a definição de $\Delta\overline{\rho}$ obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta\overline{\rho} &= \sum_{i=1}^{n-1} H(\overline{\rho})(X_i, X_i) \\ &= (n-1)\int_0^r \left[\left| \frac{d}{dt} f(t) \right|^2 \right] dt \\ &= \frac{n-1}{r}. \end{aligned}$$

■

Aplicação-3

Proposição 3. *Seja M uma variedade riemanniana completa com $Ric(M) \geq 0$. Seja $P \in M$ e $\rho(x) = d(x, P)$. Então*

$$\int_M \rho \Delta \varphi \leq \int_M \frac{n-1}{\rho} \varphi,$$

onde $\varphi \in C_0^\infty(M)$, $\varphi \geq 0$.

Esta proposição, de modo sucinto, afirma que em M vale a desigualdade $\Delta \rho \leq \dfrac{n-1}{\rho}$, no sentido das distribuições.

Demonstração: Seja $\Omega = \exp_P(E_P)$, onde $E_P = \exp_P^{-1}(M \setminus Cut(P))$. Então temos $M = \Omega \cup Cut(P)$. Como $\varphi \in C_0^\infty(M)$, com $\varphi \geq 0$, e $Cut(P)$ tem medida nula, então podemos afirmar:

$$\int_M \rho \Delta \varphi = \int_\Omega \rho \Delta \varphi.$$

Sabemos que cada raio partindo da origem em $T_P M$, intersecta ∂E_P, em, no máximo, um ponto. Ou seja, E_P é um domínio estrelado. Logo podemos construir uma família de domínios estrelados diferenciáveis $E_P^\epsilon \subset E_P$, tais que $\lim\limits_{\epsilon \to 0} E_P^\epsilon = E_P$, isto é, $\bigcup\limits_{\epsilon > 0} E_P^\epsilon = E_P$.

Seja $\Omega_\epsilon = \exp_P(E_P^\epsilon)$. Então a forma estrelada de E_P^ϵ implica que $\dfrac{\partial \rho}{\partial v_\epsilon} > 0$ sobre $\partial \Omega_\epsilon$. E desde que ρ é diferenciável sobre $\overline{\Omega}_\epsilon \subset \Omega$, nós podemos aplicar a fórmula de Green II para obter:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\epsilon} \rho \Delta \varphi &= \int_{\Omega_\epsilon} \varphi \Delta \rho - \int_{\partial \Omega_\epsilon} \varphi \frac{\partial \rho}{\partial v_\epsilon} \\ &\leq \int_{\Omega_\epsilon} \varphi \Delta \rho. \end{aligned}$$

E usando a Proposição 2 chegamos em $\displaystyle\int_{\Omega_\epsilon} \varphi \Delta \rho \leq \int_{\Omega_\epsilon} \frac{n-1}{\rho} \varphi$. Logo, fazendo $\epsilon \to 0$ concluimos:

$$\int_M \rho\Delta\varphi = \int_\Omega \rho\Delta\varphi \leq \int_\Omega \frac{n-1}{\rho}\varphi = \int_M \frac{n-1}{\rho}\varphi.$$

■

Aplicação-4

Proposição 4. *Seja M^n uma variedade riemanniana completa com $Ric(M) \geq 0$. Então*

$$VolB_x(1) \geq \frac{VolB_x(\rho(x)+1)}{(\rho(x)+1)^n},$$

onde $\rho(x) = d(x,P)$ e P é um ponto fixo de M.

Demonstração: Seja x um ponto qualquer de M e seja σ a distância a x, isto é, $\sigma(y) = d(y,x)$. Denotemos por $B_x(t)$ a bola geodésica com centro x e raio t.

Provemos, primeiramente que a função definida por $F(t) = t^{-n}VolB_x(t)$ é decrescente para $t \geq 0$. Com efeito, sendo

$$\Delta\sigma^2 = \Delta\sigma\sigma = 2\sigma\Delta\sigma + 2\langle grad\ \sigma, grad\ \sigma\rangle = 2\sigma\Delta\sigma + 2,$$

temos, pelas proposições 2 e 3 que $\Delta\sigma^2 \leq 2(n-1)+2 = 2n$, no sentido das distribuições. Logo,

$$\int_{B_x(t)} \Delta\sigma^2 \leq 2nVolB_x(t). \tag{3.1}$$

Por outro lado, pelo teorema da divergência temos:

$$\begin{aligned}\int_{B_x(t)} \Delta\sigma^2 &= \int_{\partial B_x(t)} \frac{\partial\sigma^2}{\partial r} = 2tVol(\partial B_x(t)) \\ &= 2t\frac{\partial VolB_x(s)}{\partial s}|_{s=t}.\end{aligned}$$

Agora, colocando $V(t) = VolB_x(t)$, nós obtemos a partir de (3.1) que

$$2tV'(t) \leq 2nV(t).$$

Segue-se que $tV'(t) \leq nV(t)$, o que equivale a:

$$t^{-n}V'(t) - nt^{-n-1}V(t) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(t^{-n}V(t)) \leq 0.$$

Com isto concluimos que $F(t) = t^{-n}VolB_x(t)$ é decrescente.

Em virtude deste resultado deduzimos que

$$VolB_x(1) \geq t^{-n}VolB_x(t),$$

para $t \geq 1$.

E fazendo $t = \rho(x) + 1$, obtemos:

$$VolB_x(1) \geq (\rho(x) + 1)^{-n}VolB_x(\rho(x) + 1),$$

donde vem que

$$VolB_x(1) \geq \frac{VolB_x(\rho(x) + 1)}{(\rho(x) + 1)^n}.$$

■

Aplicação-5

Proposição 5. *Seja M^n uma variedade riemanniana completa e não compacta, com $Ric(M) \geq 0$. Então para qualquer $P \in M$ e $R > 1$, vale a desigualdade:*

$$VolB_P(2(R+1)) \geq \left(\frac{R-1}{2n}\right) VolB_P(1),$$

onde $B_P(r)$ é a bola geodésica de centro P e raio r.

Demonstração: Seja x_0 um ponto de $\partial B_P(R)$. Segue-se que $d(P, x_0) = R$. Se $\rho(x) = d(x, x_0)$, então,

$$\Delta\rho^2 = \Delta\rho\rho = 2\rho\Delta\rho + 2\,\langle grad\ \rho, grad\ \rho\rangle = 2\rho\Delta\rho + 2.$$

Desde que, por hipótese, $Ric(M) \geq 0$, então podemos aplicar a Proposição 2 para obter $\Delta\rho^2 \leq 2(n-1) + 2 = 2n$, em qualquer ponto x em que ρ seja diferenciável. E pela demonstração da Proposição 3 deduzimos:

$$\int_M \varphi\Delta\rho^2 \leq 2n\int_M \varphi, \text{ com } \varphi \in C_0^\infty(M), \varphi \geq 0. \tag{3.2}$$

Esta última desigualdade também vale para qualquer função de Lipschitz $\varphi \geq 0$ com suporte compacto, desde que qualquer função deste tipo pode ser aproximada em $C^0(M)$, por funções não-negativas pertencentes a $C_0^\infty(M)$.

Agora seja $\varphi(x) = \psi(\rho(x))$, onde $\psi(t) = \begin{cases} 1, \text{ se } 0 \leq t \leq R-1, \\ \frac{1}{2}(R+1-t), \text{ se } R-1 < t < R+1, \\ 0, \text{ se } t \geq R+1. \end{cases}$

Então φ é de Lipschitz e $\sup\varphi \subset B_{x_0}(R+1)$. Pela Fórmula de Green I temos:

$$\begin{aligned} \int_M \varphi\Delta\rho^2 &= -\int_{B_{x_0}(R+1)} \nabla\varphi.\nabla\rho^2 = \\ &= -2\int_{B_{x_0}(R+1)} \psi'(\rho(x))\rho|\nabla\rho|^2. \end{aligned}$$

Sendo $\psi(t) = \frac{1}{2}(R+1-t)$, se $R-1 < t < R+1$ e $\psi(t) = 1$, se $0 \leq t \leq R-1$, então $\psi'(\rho(x)) = -\frac{1}{2}$ se $x \in B_{x_0}(R+1) \setminus B_{x_0}(R-1)$ e $\psi'(\rho(x)) = 0$ se $x \in B_{x_0}(R-1)$. Além disso, temos que $|\nabla\rho|^2 = 1$. Logo,

$$\begin{aligned} -2\int_{B_{x_0}(R+1)} \psi'(\rho(x))\rho|\nabla\rho|^2 &= \int_{B_{x_0}(R+1)\setminus B_{x_0}(R-1)} \rho \\ &\geq (R-1)Vol[B_{x_0}(R+1) \setminus B_{x_0}(R-1)]. \end{aligned}$$

Logo $\int_M \varphi\Delta\rho^2 \geq (R-1)Vol[B_{x_0}(R+1) \setminus B_{x_0}(R-1)]$.
Usando esta última desigualdade combinada com (3.2) deduzimos:

$$\begin{aligned} (R-1)Vol[B_{x_0}(R+1) \setminus B_{x_0}(R-1)] &\leq 2n\int_M \varphi = \\ &= 2n\int_{B_{x_0}(R+1)} \varphi \leq 2nVolB_{x_0}(R+1). \end{aligned}$$

Como M não é compacta, então $B_P(1) \subset B_{x_0}(R+1) \setminus B_{x_0}(R-1)$. Segue-se que $2nVolB_{x_0}(R+1) \geq (R-1)VolB_P(1)$. Também temos que

$$B_P(2(R+1)) \supset B_{x_0}(R+1).$$

Portanto, concluimos:

$$VolB_P(2(R+1)) \geq \left(\frac{R-1}{2n}\right) VolB_P(1).$$

■

Uma consequência imediata da Proposição 5 é o seguinte corolário:

Uma variedade riemanniana M, completa e não compacta, com $Ric(M) \geq 0$ tem volume infinito.

Apêndice

Teorema da Divergência. *Seja M uma variedade riemanniana orientada, compacta com bordo ∂M. Se X é um campo de vetores C^1 em M, então:*

$$\int_M divX dM = \int_{\partial M} \langle X, v \rangle \, dA,$$

onde dM é o elemento de volume de M, dA é o elemento de volume de ∂M e v é a normal unitária exterior ao longo do bordo de M.

São conseguências deste teorema as conhecidas fórmulas de Green, que enunciamos a seguir. [2]

Fórmula de Green I: *Seja $f : M \to \mathbb{R} \in C^2(M)$, $h : M \to \mathbb{R} \in C^1(M)$, com ao menos uma delas com suporte compacto. Então*

$$\int_M \{h\Delta f + \langle \nabla f, \nabla h \rangle\} \, dM = 0.$$

Se ambos, f e h, são C^2, então:

$$\int_M \{h\Delta f - f\Delta h\} \, dM = 0.$$

Observação: Para provar esta fórmula use o Teorema da Divergência para $X = h \; grad \; f = h\nabla f$, e definição $\Delta g = div \; grad \; g$.

Fórmula de Green II: *Dados M, v como no teorema da divergência, sejam f e h funções tais que $f \in C^2(M)$, $h \in C^1(M)$ e, ao menos, uma delas tenha suporte compacto. Então*

$$\int_M \{h\Delta f + \langle grad \; f, grad \; h \rangle\} \, dM = \int_{\partial M} h \langle v, grad \; f \rangle \, dA.$$

Se ambos, f e h, são C^2, então

$$\int_M \{h\Delta f - f\Delta h\} \, dM = \int_{\partial M} \{h \langle v, grad \; f \rangle - f \langle v, grad \; h \rangle\} \, dA.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] Bredon, E. G., Topology and Geometry, Springer-Verlag, New York, 1995.

[2] Chavel, I., Riemannian Geometry - A Modern Introduction, Cambridge University Press, U.S.A., 1995.

[3] Cheeger, I., Critical Points of Distance Functions and Applications to Geometry, Lectures Notes, 1990.

[4] Cheeger, J. and Ebin, D. S., Comparison Theorems in Riemannian Geometry, North Holland, Amsterdam, 1975.

[5] Do Carmo, Manfredo P., Geometria Riemanniana, 2ª edição, IMPA, 1988.

[6] Gallot, S., Hulin, D. and La Fontaine, J., Riemanniana Geometry, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1990.

[7] Hirsch, M. W., Differencial Topology, Springer-Verlag, New York, 1976.

[8] Li, Peter, Lecture Notes on Geometric Analysis, University of California, U.S.A., 1996.

[9] Morgan, F., Geometric Measure Theory, Academic Press, IME, U.S.A., 1988.

[10] Schöen, R. and Yau, S. - T., Lectures on Differencial Geometry, International Press, U.S.A., 1994.