



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JOSÉ WÁLISSEON VIEIRA DE SOUSA

PRINCÍPIO DE HARNACK DE FRONTEIRA PARA O OPERADOR
 p -LAPLACIANO

FORTALEZA

2020

JOSÉ WÁLISSEON VIEIRA DE SOUSA

PRINCÍPIO DE HARNACK DE FRONTEIRA PARA O OPERADOR
p-LAPLACIANO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. José Ederson Melo Braga

FORTALEZA

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S697p Sousa, José Wálisson Vieira de.
Princípio de Harnack de fronteira para o operador p-Laplaciano / José Wálisson Vieira de Sousa. –
2020.
71 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação
em Matemática, Fortaleza, 2020.
Orientação: Prof. Dr. José Ederson Melo Braga.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Desigualdade de Harnack de fronteira. 3. p-Laplaciano. 4.
Estimativa de Carleson. 5. Condição da esfera. I. Título.

CDD 510

JOSÉ WÁLISSEON VIEIRA DE SOUSA

PRINCÍPIO DE HARNACK DE FRONTEIRA PARA O OPERADOR
p-LAPLACIANO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Análise.

Aprovada em: 12/11/2020.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Ederson Melo Braga (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Diego Ribeiro Moreira
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Diego Eloi Misquita Gomes
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

AGRADECIMENTOS

À Deus, que por sua infinita misericórdia me permitiu chegar até aqui.

À minha família, que sempre me apoiou e esteve comigo em todos os momentos. Minha mãe, Cleonice, de uma trajetória heróica como mãe e pai em minha criação, e meus irmãos, Aline e Moisés, que sempre estiveram ao meu lado quando precisei.

Também sou grato aos meus tios que me acolheram nesta cidade no início da minha jornada, e aos meus primos, que sempre manifestaram preocupação comigo, com respeito aos meus estudos.

Aos meus amigos e irmãos da igreja por sempre orarem e torcerem por mim. Em especial meu irmão Felipe, pelo imenso apoio a minha carreira.

Ao Prof. Dr. Ederson Braga, por prontamente aceitar-me como orientando e, mesmo com muitas ocupações, me ajudar com esta dissertação, lendo e relendo quantas vezes foram necessárias.

Aos professores participantes da banca examinadora, pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões. Em especial, ao Prof. Dr. Diego Moreira, cujas cadeiras ministradas tiveram grande contribuição para a escrita deste texto.

À todos os muitos amigos que fiz durante esses quase seis anos de UFC, dentre os quais posso citar Rodrigo Ribeiro, Mateus, Gleyce, Bianca, Rayane, Allen, Alan, Rafael e Douglas. Também aos velhos amigos, Gabriel, Caio, parceiro de bolsa da graduação e a quem devo muito das cadeiras de física, Isnard, pelas visitas e estudos e, juntamente com Lucas Damasceno, pelo eterno trio LIZ. Também ao Dimas e ao Pedro, pelos bons momentos e pelas infinitas caronas.

Aos amigos João Paulo e Lia pela presença constante nas aulas da cadeira de estágio. Minha eterna gratidão também ao Lucas Holanda, a quem devo bastante por muito ter me ajudado durante a graduação, sem dúvidas eu não estaria aqui sem sua ajuda.

Aqueles cujo contato se intensificou nesse período de pandemia: Selene, Karen e Carlos André. Sou muito grato pelas conversas, pela força e pela torcida em todos os momentos.

À minha grandíssima amiga Camila, pelos muitos momentos divertidos e pelas centenas de milhares de conversas desde o início da graduação.

Ao Valderlanio. Este, sem dúvidas, merece uma dissertação inteira para listar todos os motivos pelo qual sou grato. Desde a graduação, passando pelas cadeiras de mestrado e até este trabalho tem sua participação ao me ajudar com revisões de texto e com um resultado.

Por fim, sou muito grato a Andrea pelas muitas dúvidas tiradas e por sua imensa paciência para comigo.

“Se te mostrares frouxo no dia da angústia,
a tua força será pequena.” (BÍBLIA. A. T.
Provérbios, 1995, p. 632)

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar, e provar, o Princípio de Harnack de Fronteira para o p -Laplaciano em domínios suaves. O autor disserta sobre o resultado de H. Aikawa e N. Shanmugalingam, apresentando detalhes fundamentais antes omitidos, além de também apresentar resultados preparatórios e/ou relacionados. Para isso serão apresentadas as propriedades do p -Laplaciano e das funções p -harmônicas, entre as quais estão a Desigualdade de Harnack e o Princípio da Comparação. Logo em seguida é provada, com detalhes, uma caracterização geométrica para domínios $C^{1,1}$. Mais precisamente, todo domínio limitado de classe $C^{1,1}$ satisfaz a condição da bola e vice-versa. Este é um resultado bastante conhecido, mas quase nunca demonstrado. Por fim, o autor junta todos os resultados anteriores com a Estimativa de Carleson para provar o Princípio de Harnack de Fronteira. Este teorema garante que, em um domínio limitado, quaisquer duas funções p -harmônicas, que se anulam em uma parte da fronteira deste domínio, se deterioram a mesma taxa à medida que se aproximam de uma porção menor da fronteira. Sua demonstração se baseia no uso das condições interior/exterior da bola, e nos resultados citados acima, para provar que as funções p -harmônicas são uniformemente comparáveis com a função $\delta_D(\cdot)$, que assume, em cada ponto $x \in D$, o valor da distância de x até a fronteira ∂D .

Palavras-chave: equações diferenciais parciais; desigualdade de Harnack de fronteira; p -Laplaciano; estimativa de Carleson; condição da esfera.

ABSTRACT

The aim of this dissertation is to present, and prove, the Boundary Harnack Principle for the p -Laplacian in smooth domains. The author talks about the results of H. Aikawa and N. Shanmugalingam, presenting fundamental details previously omitted, in addition to presenting preparatory and / or related results. For that, the properties of p -Laplacian operator and p -harmonic functions will be presented, among which are Harnack's Inequality and the Comparison Principle. Soon after, a geometric characterization for $C^{1,1}$ domains is proved in detail. More precisely, any limited domain of class $C^{1,1}$ satisfies the condition of the ball and vice versa. This is a well-known result, but almost never demonstrated. Finally, the author combines all previous results with Carleson's Estimate to prove the Boundary Harnack Principle. This theorem guarantees that, in a bounded domain, two p -harmonic functions, vanishing on a portion of the boundary of this domain, decay at the same rate as they approach a smaller part of the boundary. His demonstration is based on the use of the interior/exterior ball condition, and in the results mentioned above, to prove that the p -harmonic functions are uniformly comparable with the function $\delta_D(\cdot)$, which assumes in each point $x \in D$, the value of the distance from x to the ∂D .

Keywords: partial differential equations; boundary Harnack principle; p -Laplacian; Carleson estimate; ball condition.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Família de bolas cobrindo γ	19
Figura 2 – Lema das quatro bolas.	26
Figura 3 – Triângulo isósceles.	28
Figura 4 – A função φ e a disposição de A e B	31
Figura 5 – Condição da bola em η e ângulo entre os vetores \vec{v} e \vec{w}	31
Figura 6 – Representação geométrica do Lema 3.9.	38
Figura 7 – Domínio D depois de um movimento rígido.	39
Figura 8 – Princípio de Harnack de Fronteira.	44
Figura 9 – Estimativa inferior.	47
Figura 10 – Critério para z estar em $B(\xi^i, R - \epsilon r)$	48
Figura 11 – O triângulo isósceles formado por \vec{u} e $R\vec{e}_n$	49
Figura 12 – Cobertura de S	52
Figura 13 – Posição dos elementos.	56
Figura 14 – Área de comparação.	58
Figura 15 – Bola contida em $B_{\frac{2r_1}{3}} \cap \{v = 1\}$	68
Figura 16 – Esboço do caso $x \in \{\delta_D < 1/16\}$	69

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbb{R}^n	Espaço Euclidiano n -dimensional
(x', x_n)	Dado $x \in \mathbb{R}^n$, iremos identificá-lo por $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$
\vec{e}_n	Vetor $(0, 0, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$
\overrightarrow{PQ}	O vetor $Q - P$ de origem P e extremidade Q
$ \cdot $	Pode ser a norma euclidiana, módulo, ou medida n -dimensional de Lebesgue
dist	Distância Euclidiana
$B(x, r)$	Bola aberta de centro x e raio r : $\{y \in \mathbb{R}^n ; y - x < r\}$
$S(x, r)$	Esfera de centro x e raio r : $\{y \in \mathbb{R}^n ; y - x = r\}$
$B_{n-1}(x', r)$	Bola aberta $(n - 1)$ -dimensional: $\{y' \in \mathbb{R}^{n-1} ; y' - x' < r\}$
Ω	A menos de menção, representa um subconjunto aberto e conexo de \mathbb{R}^n
Ω^c	Representa o conjunto $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, complementar de Ω
$\partial\Omega$	O bordo, ou fronteira, de Ω .
D	D está associado a um domínio $C^{1,1}$ ou que satisfaz a condição da bola
η^i	Dado $\eta \in \partial D$, η^i é tal que $S(\eta^i, R) \cap \partial D = \eta$ e $B(\eta^i, R) \subset D$
η^e	Dado $\eta \in \partial D$, η^e é tal que $S(\eta^e, R) \cap \partial D = \eta$ e $B(\eta^e, R) \subset D^c$
log	Aqui log representa o logaritmo natural (base e)
$\langle u, v \rangle$	Produto interno entre u e v
$\angle(u, v)$	Ângulo entre os vetores u e v
$\partial u / \partial x_i$	Derivada parcial de u na direção de \vec{e}_i
div	Operador divergente
∇	Vetor gradiente: $(\partial / \partial x_1, \dots, \partial / \partial x_n)$
\Subset	Se $A \Subset B$ é porque existe $K \subset B$, compacto, tal que $A \subset K$
\approx	$f \approx g$ quando existe $C \geq 1$, constante universal, tal que $C^{-1}f \leq g \leq Cf$
\equiv	$f \equiv g$ quando $f(x) = g(x)$ para todo x onde f e g estão definidas
$r \ll 1$	O número r pode ser tomado suficientemente pequeno
supp	O suporte de uma função: $\text{supp } u := \overline{\{x; u(x) \neq 0\}}$
δ_Ω	A função distância ao bordo do conjunto Ω : $\delta_\Omega(x) := \text{dist}(x, \partial\Omega)$
Δ_p	Operador p -Laplaciano, definido no capítulo que leva o mesmo nome
$G_r(x, y)$	Função p -harmônica definida no capítulo sobre o p -Laplaciano
$u _{\Omega_0}$	Restrição de u ao conjunto Ω_0
$L^p(\Omega)$	A classe de funções que satisfazem $(\int_\Omega f ^p)^{1/p} < \infty$
$W^{1,p}(\Omega)$	O conjunto $\{u \in L^p(\Omega) ; \partial u / \partial x_i \in L^p(\Omega), i = 1, \dots, n\}$
$W_{\text{loc}}^{1,p}(\Omega)$	Denota o conjunto $\{u \in L^p(\Omega) ; u \in W^{1,p}(\Omega_0) \ \forall \Omega_0 \Subset \Omega\}$
$W_c^{1,p}(\Omega)$	$\{u \in W^{1,p}(\Omega) ; \text{supp } u \Subset \Omega\}$

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	O OPERADOR p -LAPLACIANO	12
2.1	Solução fraca e princípio da comparação	12
2.2	Desigualdade de Harnack	16
3	CARACTERIZAÇÃO GEOMÉTRICA PARA DOMÍNIOS DE CLASSE $C^{1,1}$	23
3.1	Conceitos e resultados preparatórios	23
3.2	Domínios $C^{1,1}$ satisfazem a condição da bola	28
3.3	Domínios que satisfazem a condição da bola são $C^{1,1}$	29
4	PRINCÍPIO DE HARNACK DE FRONTEIRA PARA O p - LAPLACIANO	43
4.1	Princípio de Hopf - estimativa inferior	45
4.2	Estimativa superior	54
4.3	PHF para funções p -harmônicas	59
5	CONCLUSÃO	61
	REFERÊNCIAS	62
	APÊNDICE A – ESTIMATIVA DE CARLESON	65

1 INTRODUÇÃO

Nesta dissertação abordaremos o Princípio de Harnack de Fronteira (PHF), do inglês *Boundary Harnack Principle* (BHP), para o operador p -Laplaciano. Vale ressaltar que também é muito comum o uso de *Boundary Harnack Inequality*, ou Desigualdade de Harnack de Fronteira, para se referir ao mesmo resultado. Trata-se, como o próprio nome sugere, de uma versão de fronteira do clássico resultado de EDP: a Desigualdade de Harnack¹.

A Desigualdade de Harnack é um dos assuntos centrais no estudo de EDPs, sendo uma ferramenta poderosíssima e útil para diversos fins. Em rápidas palavras, ela garante que, para funções harmônicas não negativas em um aberto Ω , o ínfimo e o supremo são comparáveis no aberto $\Omega_0 \Subset \Omega$, e, o mais importante, a constante de comparação independe da função.

Uma versão não tão familiar, mas equivalente, desse resultado pode ser enunciada do seguinte modo. Se $\Omega_0 \Subset \Omega$, existe $C \geq 1$ tal que para todas $u, v \geq 0$ harmônicas em Ω vale

$$\frac{u(x)/u(y)}{v(x)/v(y)} \leq C \quad \forall x, y \in \Omega_0.$$

Estando diante desta versão podemos nos perguntar o que acontece quando retiramos a hipótese $\Omega_0 \Subset \Omega$ e permitimos que Ω_0 toque a fronteira de Ω . Esta é uma boa motivação para o PHF.

Seguindo a literatura clássica, por Princípio de Harnack de Fronteira (PHF), nos referimos a propriedade de duas funções harmônicas u, v se anulando em uma parte da fronteira de um domínio D satisfazerem

$$\frac{u(x)/u(y)}{v(x)/v(y)} \leq C$$

para todos x, y em uma porção de D , e com $C \geq 1$ dependendo apenas de parâmetros universais.

Desde a década de 1970, o PHF tem chamado a atenção de muitos matemáticos. Proposto inicialmente em (KEMPER, 1972) para domínios Lipschitz, apesar de conter um erro na demonstração, depois comunicado em (KEMPER, 1976), o PHF foi de fato provado em (DAHLBERG, 1977), (ANCONA, 1978) e (WU, 1978) de maneira independente. Desde então tem ganhado bastante destaque dentre os artigos de EDP e teoria do potencial, aparecendo frequentemente no estudo de medida harmônica e de *Martin boundary*, como pode ser visto em todos os artigos citados nesta introdução.

¹Ao longo deste texto o termo “Desigualdade de Harnack”, sem fazer distinção entre interior ou de fronteira, refere-se ao resultado clássico (interior) de EDP.

No decorrer de todos esses anos, muitas foram as generalizações do PHF. Em (JERISON e KENIG, 1982) os autores introduzem e provam o PHF para domínios NTA (do inglês *non-tangentially accessible*), uma classe que generaliza domínios Lipschitz. Já em (BASS e BURDZY, 1991) e (BAÑUELOS, BASS, e BURDZY, 1991) tal resultado é provado para domínios Holder, este primeiro de forma interessante por adotar uma abordagem com técnicas de probabilidade, apesar de produzir um PHF um pouco mais fraco que o apresentado aqui. Ainda sobre estender domínios, em (AIKAWA, 2001) o autor generaliza o PHF, em sua versão *scale invariant*, para domínio uniforme, classe mais geral que os NTAs.

Também foram muitas as generalizações de operadores, como no nosso caso, inspirado em (AIKAWA *et al.*, 2007). Neste trabalho temos por objetivo principal enunciar e provar um teorema do tipo PHF para o operador p -Laplaciano em um domínio $C^{1,1}$. Obviamente, ao longo do texto também temos vários objetivos secundários que também merecem destaque, entre eles apresentar o p -Laplaciano e provar a equivalência entre domínios $C^{1,1}$ e domínios que satisfazem a condição da bola.

Seguiremos o roteiro a seguir.

Primeiramente definiremos o p -Laplaciano e funções p -harmônicas, como também veremos algumas de suas propriedades. Provaremos o princípio da comparação para funções p -harmônicas e apresentaremos a Desigualdade de Harnack para o operador em questão, bem como provaremos vários resultados que decorrem dela.

Em seguida provaremos uma importante caracterização geométrica de domínios $C^{1,1}$: os que satisfazem a condição (uniforme) da bola. Se trata de um resultado folclórico, no sentido de ser muito usado e aceito entre os matemáticos mas quase nunca provado. Apesar de usarmos somente resultados simples, sua demonstração se faz cuidadosamente por conter muitas etapas e algumas contas que requerem bastante atenção. Tal caracterização se faz importante na prova do PHF pela boa ligação que o operador p -Laplaciano tem com a geometria do domínio.

Por fim, no último capítulo, provaremos o PHF para o p -Laplaciano, principal resultado desta dissertação. Sua demonstração apoia-se em dois resultados, a saber, estimativa inferior, conhecida na literatura como Princípio de Hopf, e estimativa superior. Para a primeira usamos uma combinação da Desigualdade de Harnack juntamente com o princípio da comparação, enquanto para a segunda estimativa fazemos uso de outra ferramenta bastante importante, conhecida como estimativa de Carleson e novamente em uso conjunto com o princípio da comparação.

2 O OPERADOR p -LAPLACIANO

Na teoria clássica de equações elípticas de segunda ordem temos, sem dúvidas, o Laplaciano como protótipo e operador mais importante. Neste capítulo vamos nos dedicar ao estudo do p -Laplaciano, $p \in (1, \infty)$, denotado por Δ_p , e definido, classicamente, por

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u),$$

donde o Laplaciano surge como caso particular ao fazermos $p = 2$. Assim como o Laplaciano, esse operador é elíptico¹ e de segunda ordem, porém com a diferença de ser não linear. No quesito aplicações à outras áreas, enquanto o caso linear ($p = 2$) está bem consolidado e dispensa apresentações, o p -Laplaciano, nos demais casos, está relacionado com o estudo de fluidos não Newtonianos, com glaciologia (estudo das geleiras), teoria da elasticidade não linear, extração de petróleo, entre outros. Não entraremos no âmbito aplicações, mas o leitor pode estar consultando (GLOWINSKI e RAPPAZ, 2003), (BENEDIKT *et al.*, 2018), (MASTORAKIS e FATHABADI, 2009), e todas as suas respectivas referências, para um melhor entendimento do p -Laplaciano quanto as suas origens e aplicações.

Ao longo deste capítulo, Ω sempre estará, a menos de menção do contrário, representando um domínio limitado n -dimensional, isto é, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto limitado, aberto e conexo.

2.1 Solução fraca e princípio da comparação

Nosso principal objetivo ao estudar o p -Laplaciano neste capítulo é exibir propriedades das funções p -harmônicas que nos serão úteis para a demonstração do teorema principal. Classicamente dizemos que u é solução da equação do p -Laplaciano quando $\Delta_p u = 0$. Acontece que na maioria das vezes nos falta regularidade para tratar o modo clássico e temos que partir para definições mais gerais. Começemos por definir formalmente do que se trata tais funções.

Definição 2.1 (Função p -harmônica). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio e $1 < p < \infty$. Definimos que $u \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\Omega)$ é solução fraca (sentido das distribuições) da equação do p -Laplaciano em Ω se*

$$\int_{\Omega} \langle |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla \varphi \rangle dx = 0 \quad \text{para toda } \varphi \in W_c^{1,p}(\Omega).$$

Além disso, quando u é contínua em Ω dizemos que u é uma função p -harmônica.

¹Apesar de elíptico, o p -Laplaciano não é uniformemente elíptico, podendo ser singular, no caso de $1 < p < 2$, ou degenerado, quando $p > 2$, nos pontos críticos $\{\nabla u = 0\}$.

Em particular, soluções clássicas da equação do p -Laplaciano são funções p -harmônicas. Em todo caso, não causando confusão aqui neste texto, usaremos a equação $\Delta_p u = 0$ para abreviar que u é uma função p -harmônica (sentido das distribuições).

Definição 2.2 (Solução Fundamental). *Dado $1 < p < \infty$, chamamos de solução fundamental do p -Laplaciano a função*

$$\phi_p(x) := \begin{cases} -\log|x| & \text{para } p = n, \\ |x|^{(p-n)/(p-1)} & \text{para } p \neq n. \end{cases} \quad (1)$$

É fácil verificar que, como o próprio nome sugere, ϕ_p é p -harmônica para $x \neq 0$, mas por completude apresentaremos as contas aqui.

Teorema 2.3. *A função ϕ_p dada como em (1) é p -harmônica.*

Prova. Primeiro façamos o caso $p = n$, onde temos $\phi(x) := \phi_p(x) = \phi_n(x) = -\log|x|$.

Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$. Como $\partial f / \partial x_i(x) = x_i/|x|$, então

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial(-\log|x|)}{\partial x_i} = -\frac{x_i}{|x|^2}.$$

Daí

$$\nabla \phi(x) = -\frac{x}{|x|^2}$$

e assim

$$|\nabla \phi(x)|^{p-2} = \frac{1}{|x|^{n-2}} \quad \text{desde que } n = p.$$

Definindo $X(x) := |\nabla \phi(x)|^{p-2} \nabla \phi(x) = -x/|x|^n$, mostrar que ϕ satisfaz $\Delta_p \phi = 0$ é mostrar que $\operatorname{div} X = 0$. Relembre que, se $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ é um campo de vetores,

$$\operatorname{div} X(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i}(x),$$

e, como

$$X_i(x) = -\frac{x_i}{|x|^n},$$

então

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_i}(x) = -\frac{1}{|x|^n} + \frac{nx_i^2|x|^{n-2}}{|x|^{2n}}.$$

Portanto,

$$\operatorname{div} X = -\frac{n}{|x|^n} + n\frac{|x|^2}{|x|^{n+2}} = 0.$$

Para o caso $n \neq p$ nos permita redefinir ϕ para o novo p por $\phi(x) = |x|^\alpha$, onde $\alpha := (p-n)/(p-1)$. Assim conseguimos obter

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) = \alpha|x|^{\alpha-1} \frac{x_i}{|x|},$$

logo,

$$\nabla\phi(x) = \alpha|x|^{\alpha-2}x$$

e, conseqüentemente,

$$|\nabla\phi(x)|^{p-2} = |\alpha|^{p-2}|x|^{(p-2)/(\alpha-1)}.$$

Se fizermos $X(x) := |\nabla\phi(x)|^{p-2}\nabla\phi(x)$ podemos concluir que $X(x) = -\lambda x/|x|^n$, onde $\lambda = -\alpha|\alpha|^{p-2}$. Aproveitando os cálculos do caso anterior, obtemos

$$\operatorname{div} X = \lambda \left(\frac{n}{|x|^n} - \frac{n}{|x|^n} \right) = 0.$$

Isso acaba a demonstração. \square

Não é difícil ver que translações e dilatações de ϕ_p ainda são p -harmônicas. Segue, portanto, o seguinte resultado.

Proposição 2.4. *Para cada $r > 0$, a função $G_r: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dada por*

$$G_r(x, z) = \begin{cases} \log\left(\frac{r}{|x-z|}\right), & \text{se } p = n, \\ \left(\frac{|x-z|}{r}\right)^{\frac{p-n}{p-1}} - 1, & \text{se } 1 < p < n, \\ 1 - \left(\frac{|x-z|}{r}\right)^{\frac{p-n}{p-1}}, & \text{se } p > n. \end{cases} \quad (2)$$

é p -harmônica quando x é diferente de z .

Muitas vezes é interessante observar classes mais gerais que soluções fracas.

Definição 2.5. *Definimos que $v \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\Omega)$ é supersolução fraca do p -Laplaciano em Ω , ou simplesmente p -supersolução quando*

$$\int_{\Omega} \langle |\nabla v|^{p-2}\nabla v, \nabla \eta \rangle dx \geq 0$$

para toda função não negativa $\eta \in W_c^{1,p}(\Omega)$. A desigualdade contrária define uma p -subsolução.

Encerraremos a seção com o Princípio da Comparação. Quando estamos lidando com operadores lineares, tal resultado sai como uma aplicação sem complexidade do Princípio do Máximo. No caso não linear, não só tem uma demonstração mais complexa, como é um dos pilares do estudo de equações elípticas de segunda ordem, sendo ainda uma área ativa de pesquisa.

Teorema 2.6 (Princípio da Comparação). *Sejam u e v funções contínuas em Ω , com u sendo p -subsolução e v uma p -supersolução. Se $u \leq v$ em $\partial\Omega$, então $u \leq v$ em Ω .*

Prova. Dado $\varepsilon > 0$, considere o conjunto $\Omega_\varepsilon := \{x ; u(x) - v(x) > \varepsilon\}$. Vê-se facilmente que tal conjunto é aberto e, além disso, $\Omega_\varepsilon \Subset \Omega$, pela continuidade de u e v . Como u e v são, p -subsolução e p -supersolução, respectivamente, vale

$$\int_{\Omega} \langle |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla \eta \rangle dx \leq 0 \leq \int_{\Omega} \langle |\nabla v|^{p-2} \nabla v, \nabla \eta \rangle dx$$

para toda $\eta \in W_c^{1,p}(\Omega)$ não negativa. Consequentemente,

$$\int_{\Omega} \langle |\nabla v|^{p-2} \nabla v - |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla \eta \rangle dx \geq 0 \quad (3)$$

para toda $\eta \in W_c^{1,p}(\Omega)$ não negativa.

Ao tomarmos a função não negativa $\eta(x) := \max\{u(x) - v(x) - \varepsilon, 0\}$, é claro que $\eta \in W^{1,p}(\Omega)$ e, se $x \notin \Omega_\varepsilon$ então $u(x) - v(x) - \varepsilon \leq 0$ e assim $\eta(x) = 0$. Portanto, $\text{supp}(\eta) \subset \Omega_\varepsilon$ e então $\eta \in W_c^{1,p}(\Omega)$. Substituindo η em (3) ficamos com

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \langle |\nabla v|^{p-2} \nabla v - |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla v - \nabla u \rangle dx \leq 0, \quad (4)$$

mas isso só é possível se a integral acima for nula e, ainda assim, somente no caso de termos $\nabla v - \nabla u = 0$ para quase todo ponto em Ω_ε . Do contrário, se existe $D \subset \Omega_\varepsilon$ de medida positiva tal que $\nabla v - \nabla u \neq 0$ nesse conjunto, então, em D teremos

$$\begin{aligned} \langle |\nabla v|^{p-2} \nabla v - |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla v - \nabla u \rangle &= |\nabla v|^p + |\nabla u|^p - (|\nabla v|^{p-2} + |\nabla u|^{p-2}) (\langle \nabla v, \nabla u \rangle) \\ &\geq |\nabla v|^p + |\nabla u|^p - (|\nabla v|^{p-2} + |\nabla u|^{p-2}) (|\nabla v| |\nabla u|) \\ &= |\nabla v|^{p-1} (|\nabla v| - |\nabla u|) - |\nabla u|^{p-1} (|\nabla v| - |\nabla u|) \\ &= (|\nabla v|^{p-1} - |\nabla u|^{p-1}) (|\nabla v| - |\nabla u|) \\ &> 0, \end{aligned}$$

o qual contradiz o fato de ser não-positiva a integral em (4). Portanto, $\nabla v - \nabla u = 0$ para quase todo ponto em Ω_ε . Nesse caso temos $u(x) = v(x) + C$ em Ω_ε , onde $C \in \mathbb{R}$ é constante. Mas em $\partial\Omega_\varepsilon$ vale $u = v + \varepsilon$, daí

$$u = v + \varepsilon \text{ em } \Omega_\varepsilon.$$

Desde que $u \leq v + \varepsilon$ em $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$, obtemos que $u \leq v + \varepsilon$ em Ω . Pela arbitrariedade de ε podemos concluir que $u \leq v$ em Ω , como queríamos. \square

Como corolário obtemos o Princípio da Comparação para funções p -harmônicas, uma vez que essas são contínuas e simultaneamente p -subsoluções e p -supersoluções.

2.2 Desigualdade de Harnack

Em (HARNACK, 1887), Carl Gustav Axel Harnack propõe e prova, em dimensão 2, uma desigualdade para funções harmônicas que mais tarde ficaria conhecida por trazer seu nome. Na sua forma mais conhecida, devido a (KELLOGG, 1929), ela assegura que para uma função harmônica não negativa u , definida em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, domínio que contém a bola $\overline{B(x_0, 2r)}$, existe $C > 1$ que independe de u para o qual se tem

$$\sup_{B(x_0, r)} u \leq C \inf_{B(x_0, r)} u.$$

Dada a universalidade de C , tal resultado firmou-se dentre os mais importantes no estudo de EDPs pois dá um controle do quanto variam as funções harmônicas e este controle independe da função em questão. Ao longo dos anos foi sendo aperfeiçoado e generalizado para diversos outros operadores muito mais complexos que o Laplaciano. Uma boa referência com parte dessa evolução é (KASSMANN, 2007).

Para demonstrar nosso objetivo, no capítulo final, precisamos da seguinte Desigualdade de Harnack para o operador p -Laplaciano.

Teorema 2.7 (Desigualdade de Harnack). *Suponha que $u \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\Omega)$ seja p -harmônica e não negativa em $B(x_0, 2r) \subset \Omega$. Então, existe $C = C(n, p) \geq 1$ tal que*

$$\sup_{B(x_0, r)} u \leq C \inf_{B(x_0, r)} u.$$

Observação: A conclusão desse teorema é na verdade equivalente a provarmos que existe um tal C satisfazendo $u(x) \leq Cu(y)$ para todos $x, y \in B(x_0, r)$. Além disso, é importante dizer que o teorema ainda é válido quando temos u sendo solução fraca de $\Delta_p u = 0$, isto é, não necessariamente contínua. Nesse caso pode ser necessário trocar ínfimo e supremo por ínfimo e supremo essenciais.

Não apresentaremos aqui a demonstração deste resultado. Acontece que, apesar de termos o mesmo resultado do Laplaciano, devemos ter em mente que sua constatação fica cada vez mais longa e complexa a depender do operador. Em (LINDQVIST, 2019) temos uma demonstração desse teorema para o caso do p -Laplaciano seguindo principalmente as ideias de (MOSER, 1961), que sem dúvidas é um dos mais importantes artigos do assunto. Também o leitor está convidado a ver artigos clássicos como (SERRIN, 1963), (SERRIN, 1964), (TRUDINGER, 1967) e (LIEBERMAN, 1991) para demonstrações mais gerais.

Na verdade, podemos usar o resultado anterior (repetidas vezes) a fim de obter uma versão refinada, na qual ganhamos de uma forma bem mais explícita a constante de comparação. Esta versão é apresentada e demonstrada em (BRAGA, 2017) para equações totalmente não lineares e depois usada em (BRAGA e MOREIRA, 2020) numa

versão para um operador que generaliza o p -Laplaciano. Também pode-se encontrar uma demonstração detalhada em (BRAGA, 2015).

Aqui já a enunciamos da maneira escalonada sob a observação de que, sendo u uma função p -harmônica e positiva em $B(x_0, R)$, a função $v(y) := u(x_0 + Ry)$ definida em $B(0, 1)$ também é positiva e p -harmônica.

Teorema 2.8 (Desigualdade de Harnack Refinada). *Suponha que $u \geq 0$ seja p -harmônica em $B(x_0, R)$, onde $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é fixo. Então existem $C, \tau_0 > 0$ dependendo apenas de n e p tais que*

$$\sup_{B(x_0, r)} u \leq CR^{2\tau_0} (R - r)^{-2\tau_0} \inf_{B(x_0, r)} u \quad \forall 0 < r < R.$$

Em particular, para $\gamma \in (0, 1)$, vale

$$\sup_{B(x_0, \gamma R)} u \leq C(1 - \gamma)^{-2\tau_0} \inf_{B(x_0, \gamma R)} u.$$

Prova. Corolário 4.1 de (BRAGA, 2015). □

Observação: Podemos destacar a mesma observação do caso anterior, sobre comparar quaisquer dois valores por $u(x)$ e $u(y)$ para $x, y \in B(x_0, \gamma R)$, mas sem dúvidas o destaque maior fica pela independência que a constante de Harnack tem dos raios das bolas. Pela última equação fica evidente que $\bar{C} := C(1 - \gamma)^{-2\tau_0}$ depende apenas de n , p e da razão γ entre esses raios.

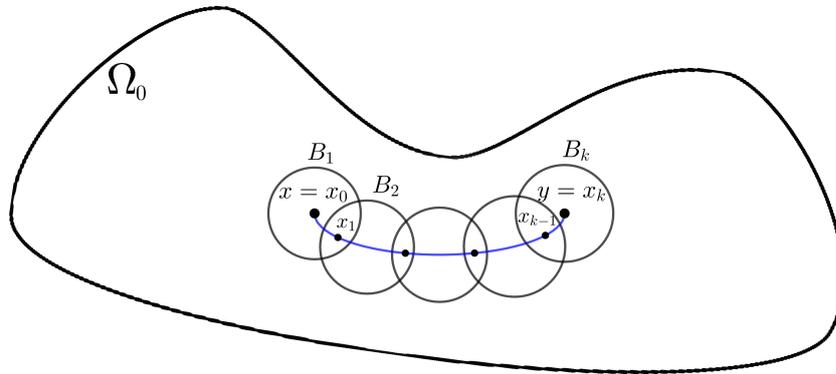
Além disso, podemos estabelecer a Desigualdade de Harnack para conjuntos mais gerais que bolas.

Teorema 2.9 (Desigualdade de Harnack generalizada). *Seja $\Omega_0 \Subset \Omega$. Suponha que $u \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\Omega)$ seja p -harmônica e não negativa em Ω . Então existe $C = C(n, p, \Omega_0) \geq 1$ tal que*

$$\sup_{\Omega_0} u \leq C \inf_{\Omega_0} u.$$

Prova. Fazemos inicialmente o caso em que Ω_0 é conexo por caminhos. Como $\Omega_0 \Subset \Omega$, $\overline{\Omega_0}$ é compacto. Diante disso, é fácil obter uma cobertura finita de $\overline{\Omega_0}$ por bolas abertas $\{B_i\}_{i=1}^N$ onde $B_i = B(x_i, r)$, de modo que $B(x_i, 2r) \subset \Omega$.

Dados x, y arbitrários em Ω_0 existirá um caminho γ os conectando. Tal γ (na verdade seu traço) é também um conjunto compacto e, além disso, podemos cobri-lo por uma subfamília finita $\{B_j\}_{j=1}^k \subset \{B_i\}_{i=1}^N$, onde podemos supor, sem perda, que $B_j \cap B_{j+1} \neq \emptyset$ para todo $1 \leq j \leq k - 1$. Desta forma podemos tomar uma sequência, em γ , $\{x_0 = x, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k = y\}$, onde $x_j \in B_j \cap B_{j+1}$, para $j = \{1, \dots, k-1\}$ (Figura 1), e em cada par consecutivo desses pontos aplicar a Desigualdade de Harnack para bolas.

Figura 1 – Família de bolas cobrindo γ 

Fonte: elaborada pelo autor.

Assim, teremos como resultado

$$u(x) \leq C_1 u(x_1) \leq C_1 C_2 u(x_2) \leq \dots \leq C_1 \dots C_k u(x_k) = C_1 \dots C_k u(y) \leq C u(y),$$

onde $C = C_1 \dots C_N \geq 1$. O teorema está assim provado para conjuntos conexos por caminhos, dada a arbitrariedade de x e y .

Para o caso geral nossa estratégia será envolver Ω_0 em um conjunto conexo por caminhos que ainda esteja compactamente contido em Ω .

Tome $\delta = \text{dist}(\overline{\Omega_0}, \partial\Omega)$ e considere a família $\mathcal{B} = \{B_\lambda\}_{\lambda \in L}$, formada por todas as bolas $B_\lambda = B(x_\lambda, \delta)$, centradas em $x_\lambda \in \Omega$, que satisfazem $B(x_\lambda, 4\delta) \subset \Omega$. Como Ω é um conjunto limitado, será compacto o conjunto $K := \overline{\bigcup_{\lambda \in L} B_\lambda}$. Sendo ainda $\text{dist}(x, \partial\Omega) \geq 4\delta$ para todo $x \in \Omega_0$, temos $\Omega_0 \subset K$.

Para cada $\lambda \in L$ defina $\tilde{B}_\lambda = B(x_\lambda, 2\delta)$. Afirmamos que $\bigcup_{\lambda \in L} \tilde{B}_\lambda$ é cobertura aberta de K . De fato, tome arbitrariamente $x \in K$. Existe uma sequência $\{x_k\} \subset \bigcup_{\lambda \in L} B_\lambda$ tal que $x_k \rightarrow x$. Então vai existir um $k_0 \in \mathbb{N}$ para o qual $|x_{k_0} - x| < \delta/2$. Sendo λ_0 tal que $x_{k_0} \in B_{\lambda_0}$, concluímos

$$|x_{\lambda_0} - x| \leq \underbrace{|x_{\lambda_0} - x_{k_0}|}_{< \delta} + \underbrace{|x_{k_0} - x|}_{< \delta/2} < 2\delta.$$

Portanto $x \in \tilde{B}_{\lambda_0}$, provando nossa afirmação.

Sendo $K \subset \bigcup_{\lambda \in L} \tilde{B}_\lambda$ compacto, existe uma subcobertura finita $\{B_i\}_{i=1}^m \subset \{\tilde{B}_\lambda\}_{\lambda \in L}$ tal que $B_i = B(x_{\lambda_i}, 2\delta)$ e $\Omega_0 \subset K \subset \bigcup_{i=1}^m B_i$. Sendo Ω um domínio, podemos considerar caminhos que ligam os centros das bolas B_i . Precisamente seja γ_i um caminho que conecta x_{λ_i} e $x_{\lambda_{i+1}}$. Pela compacidade de cada γ_i , podemos concluir que o conjunto

$S := (\bigcup_{i=1}^m \overline{B_i}) \cup (\bigcup_{i=1}^{m-1} \gamma_i)$ é também compacto, novamente com o abuso de estar tratando do conjunto traço de γ_i em vez do caminho γ_i propriamente dito.

Acabamos de obter um conjunto S conexo por caminhos que satisfaz $\Omega_0 \Subset S \Subset \Omega$ e então, usando a primeira parte da demonstração,

$$\sup_{\Omega_0} u \leq \sup_S u \leq C \inf_S u \leq C \inf_{\Omega_0} u,$$

com $C \geq 1$ como queríamos. \square

Da Desigualdade de Harnack decorrem vários resultados importantes dentre os quais listaremos alguns. Mas antes, apresentaremos o seguinte lema, de rápida demonstração e que ajuda na prova do próximo resultado.

Lema 2.10. *Seja $\omega: (0, R_0] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não decrescente. Suponha que existem $0 < \gamma, \tau < 1$ para os quais ω satisfaz a desigualdade*

$$\omega(\tau R) \leq \gamma \omega(R), \quad \forall R \leq R_0. \quad (5)$$

Então, dados quaisquer $\mu \in (0, 1)$ e $R \leq R_0$, constatamos que

$$\omega(R) \leq C \left(\frac{R}{R_0} \right)^\alpha \omega(R_0), \quad (6)$$

onde $C = C(\gamma)$ e $\alpha = \alpha(\gamma, \tau, \mu)$ são constantes positivas.

Prova. De início, tome arbitrariamente $R_1 \leq R_0$ e fixe-o. Por (5) obtemos

$$\omega(\tau R) \leq \gamma \omega(R), \quad \forall R \leq R_1.$$

Consequentemente

$$\omega(\tau^2 R) = \omega(\tau(\tau R)) \leq \gamma \omega(\tau R) \leq \gamma^2 \omega(R), \quad \forall R \leq R_1.$$

E, indutivamente,

$$\omega(\tau^m R) \leq \gamma^m \omega(R), \quad \forall m \in \mathbb{N}, \forall R \leq R_1. \quad (7)$$

Para todo $R \leq R_1$ podemos tomar m de forma que $\tau^m \leq R/R_1 \leq \tau^{m-1}$. Por um lado, ao invocarmos a monotonicidade de ω , obtemos

$$\omega(R) \leq \omega(\tau^{m-1} R_1) \leq \gamma^{m-1} \omega(R_1) \leq \gamma^{m-1} \omega(R_0). \quad (8)$$

Por outro lado,

$$(\gamma^m)^{\log \tau / \log \gamma} = (\gamma^m)^{\log_\gamma \tau} = \tau^m \leq \frac{R}{R_1},$$

que implica

$$\gamma^{m-1} \leq \frac{1}{\gamma} \left(\frac{R}{R_1} \right)^{\log \gamma / \log \tau}. \quad (9)$$

Por juntar (8) e (9), podemos concluir

$$\omega(R) \leq \frac{1}{\gamma} \left(\frac{R}{R_1} \right)^{\log \gamma / \log \tau} \omega(R_0),$$

e por tomar $R_1 = R_0^{1-\mu} R^\mu \leq R_0$ concluimos

$$\omega(R) \leq \frac{1}{\gamma} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{(1-\mu)\log \gamma / \log \tau} \omega(R_0),$$

como nos foi designado em (6), com $\alpha := (1 - \mu)\log \gamma / \log \tau$ e $C := 1/\gamma$. \square

Definição 2.11 (Função Hölder contínua). *Uma função u definida $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é dita ser Hölder Contínua em X com expoente α , ou simplesmente α -Hölder Contínua, quando existem $\alpha = \alpha(n, p) > 0$ e $L > 0$ tais que*

$$|u(x) - u(y)| \leq L|x - y|^\alpha \quad \text{para } x, y \in X.$$

Quando $\alpha = 1$ na definição acima, u é chamada Lipschitz.

Decorre da Desigualdade de Harnack este fato importantíssimo para o estudo de regularidade de soluções.

Corolário 2.12 (Hölder continuidade das soluções). *Seja u função p -harmônica em $\Omega \ni B(x_0, 2r)$. Então u é Hölder contínua em $B(x_0, r)$.*

Prova. Vamos começar definindo, para qualquer número $R > 0$, $B_R := B(x_0, R)$, $M(R) := \sup_{B_R} u$, $m(R) := \inf_{B_R} u$ e $\omega(R) := M(R) - m(R)$.

Tome $x, y \in B(x_0, r)$ arbitrários. Temos dois casos.

- Caso 1: $|x - y| \geq r$.

Nesse caso observe que as funções $u - m(2r)$ e $M(2r) - u$ são p -harmônicas e não negativas em $B(x_0, 2r)$. Pela Desigualdade de Harnack, existe $C \geq 1$ dependendo apenas de parâmetros universais, e não da função, tal que

$$M(r) - m(2r) = \sup_{B_r} (u - m(2r)) \leq C \inf_{B_r} (u - m(2r)) = C(m(r) - m(2r)) \quad (10)$$

e

$$M(2r) - m(r) = \sup_{B_r} (M(2r) - u) \leq C \inf_{B_r} (M(2r) - u) = C(M(2r) - M(r)). \quad (11)$$

Somando (10) e (11) podemos concluir que

$$\omega(r) \leq \lambda\omega(2r), \quad \text{onde } \lambda := \frac{C-1}{C+1} < 1. \quad (12)$$

Na verdade podemos concluir que

$$\omega(\rho/2) \leq \lambda\omega(\rho), \quad \forall \rho \leq 2r.$$

Por consequência, usando o Lema 2.10 com $R_0 = 2r$, $R = \rho$, $\tau = 1/2$ e $\gamma = \lambda$, chegamos em

$$\omega(\rho) \leq A \left(\frac{\rho}{2r}\right)^\alpha \omega(2r) = L_1 \rho^\alpha \quad \text{para } 0 < \rho \leq 2r, \quad (13)$$

onde $L_1 := A\omega(2r)/(2r)^\alpha$, com $A = 1/\lambda$ dependendo apenas de λ , bem como e α , uma vez que o τ do lema aqui é constante e o μ também pode ser fixado previamente. Fazendo $\rho_1 = |x_0 - x| < r$ e $\rho_2 = |x_0 - y| < r$ obtemos

$$|u(x_0) - u(x)| \leq \omega(\rho_1) \leq L_1 \rho_1^\alpha = L_1 |x_0 - x|^\alpha < L_1 |x - y|^\alpha \quad \text{e,}$$

$$|u(x_0) - u(y)| \leq \omega(\rho_2) \leq L_1 \rho_2^\alpha = L_1 |x_0 - y|^\alpha < L_1 |x - y|^\alpha.$$

Portanto,

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x_0) - u(x)| + |u(x_0) - u(y)| \leq 2L_1 |x - y|^\alpha.$$

- Caso 2: $|x - y| < r$.

Fazendo $R = r/2$ podemos repetir o mesmo processo do caso anterior com x em vez de x_0 , e valerá (13) para R no lugar de r . Então, se fizermos $\rho = |x - y| < 2R$, teremos um L_2 , dependendo de λ e r , mas que possivelmente é diferente de L_1 , satisfazendo

$$|u(x) - u(y)| \leq \omega(\rho) \leq L_2 \rho^\alpha = L_2 |x - y|^\alpha.$$

Detalhe para o fato do α ser o mesmo em ambos os casos, uma vez que pelo Lema 2.10 este só depende das constantes τ e γ , cujos valores são, respectivamente, $1/2$ e λ nos casos acima. Para finalizar basta tomar $L = \max\{2L_1, L_2\}$, e ao pegarmos x, y arbitrários, teremos a condição de Hölder continuidade para L e α que independem dos pontos escolhidos.

□

Observação: Desde que a Desigualdade de Harnack pode dispensar continuidade, esta propriedade se torna apenas uma redundância na definição de função p -harmônica, uma vez que o último teorema também pode ser enunciado e continua válido para soluções fracas.

Quando estamos nos referindo a Ω como \mathbb{R}^n , ganhamos da Desigualdade de Harnack o seguinte Teorema do tipo Liouville.

Corolário 2.13 (Teorema de Liouville). *Seja u função p -harmônica em \mathbb{R}^n limitada superiormente ou inferiormente. Então u é uma função constante.*

Prova. Sem perdas, suponha u limitada superiormente, isto é, $u \leq M = \sup_{\mathbb{R}^n} u < +\infty$. Agora defina $v := M - u$ e considere $\varepsilon > 0$ arbitrário. É fácil ver que v é p -harmônica e não negativa. Pela Desigualdade de Harnack vale

$$0 \leq \sup_{B(0,r)} v \leq C \inf_{B(0,r)} v, \quad \forall r > 0.$$

Em particular, já que $\inf_{\mathbb{R}^n} v = 0$, podemos escolher r grande suficiente para que $\inf_{B(0,r)} v < \varepsilon$, daí

$$0 \leq \sup_{B(0,r)} v \leq C \inf_{B(0,r)} v < C\varepsilon.$$

Pela arbitrariedade de ε podemos concluir que $v \equiv 0$ e assim $u \equiv M$. □

Corolário 2.14 (Princípio do Máximo Forte). *Seja u função p -harmônica em um domínio Ω que atinge o máximo em um ponto $x_0 \in \Omega$ (ponto interior). Então u é função constante.*

Prova. Seja x_0 ponto interior de Ω . Como $\sup_{\Omega} u = u(x_0)$, se definirmos $v := u(x_0) - u$, podemos facilmente constatar que v é função não negativa e ainda p -harmônica em Ω .

Dado $x \in \Omega$ qualquer, como Ω é conexo por caminhos, existe um caminho γ conectando x e x_0 . O traço de γ é compacto, portanto, de modo semelhante ao da demonstração do Teorema 2.9, vamos considerar uma sequência finita de bolas cobrindo γ de tal forma que se tomarmos as bolas de mesmos centros e raio dobrado ainda estejam contidas em Ω .

Assim procedendo, chegamos em $v(x) \leq Cv(x_0) = 0$, donde segue que v é identicamente nula em Ω e, conseqüentemente, que $u \equiv u(x_0)$. □

3 CARACTERIZAÇÃO GEOMÉTRICA PARA DOMÍNIOS DE CLASSE $C^{1,1}$

Neste capítulo daremos uma prova da equivalência entre uma definição analítica e uma condição geométrica bastante conhecida, a saber, a condição da bola ou, por vezes chamada, condição da esfera. Para provar o princípio de Harnack de fronteira para domínios $C^{1,1}$, nossa estratégia passa por uma descrição geométrica para tais domínios.

No momento em que atribuímos uma caracterização geométrica, podemos começar a pensar além do cenário euclidiano. Diferente do caso $C^{1,1}$ cuja noção só faz sentido em domínios contidos em \mathbb{R}^n , quando dispomos de uma noção geométrica podemos estender as ideias e técnicas aqui usadas para espaços métricos mais gerais.

O teorema a seguir é o objetivo deste capítulo. Trata-se de um resultado bastante conhecido do folclore matemático, ou seja, um resultado bem aceito e utilizado por matemáticos, mas que sua demonstração é quase sempre omitida tornando difícil inclusive achar uma boa referência para citação. Estaremos seguindo as ideias usadas em (AIKAWA *et al.*, 2007), Lema 1.1, mas tentando preencher todos os detalhes. Outra boa referência é o artigo (LEWICKA e PERES, 2019) do qual retiramos o Lema das quatro bolas (Lema 3.5) que é enunciado na próxima seção e utilizado na seção seguinte.

Teorema 3.1. *Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado. D é $C^{1,1}$ se, e somente se, satisfaz a condição da bola.*

Vamos separar a demonstração deste teorema em duas proposições. Mas antes introduziremos os conceitos básicos.

3.1 Conceitos e resultados preparatórios

Começaremos com as duas principais definições do capítulo.

Definição 3.2 (Domínio $C^{1,1}$). *Um domínio (conjunto aberto conexo) $D \subset \mathbb{R}^n$ limitado é dito ser $C^{1,1}$ se existem constantes $C, r_0 > 0$ tais que, para todo $\xi \in \partial D$, existe um sistema de coordenadas com $\xi = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, e uma função $\varphi : U \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^{1,1}$ satisfazendo*

$$|\nabla\varphi(y') - \nabla\varphi(z')| \leq C|y' - z'|$$

e

$$B(\xi, r_0) \cap D = B(\xi, r_0) \cap \{(x', x_n); x_n > \varphi(x')\}.$$

Definição 3.3 (Condição da bola¹). *Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ domínio limitado. Dizemos que D satisfaz a condição da bola interior com raio R se existe $R > 0$ satisfazendo:*

$$\forall \xi \in \partial D, \exists \xi^i \in D; B(\xi^i, R) \subset D \text{ e } \xi \in S(\xi^i, R).$$

Dizemos que D satisfaz a condição da bola exterior com raio R se existe $R > 0$ satisfazendo:

$$\forall \xi \in \partial D, \exists \xi^e \in D^c; B(\xi^e, R) \subset D^c \text{ e } \xi \in S(\xi^e, R).$$

Finalmente, dizemos que D satisfaz a condição da bola quando satisfaz, simultaneamente, a condição da bola exterior e a condição da bola interior.

Observação: Como dito no início do capítulo, esta propriedade pode ser chamada de condição da esfera, ou propriedade da esfera. Em alguns artigos acha-se até quem use que D tem *curvatura limitada* para dar nome a essa propriedade. O fato é que trata-se de uma condição bastante explorada no estudo de EDPs, e um conceito relativamente antigo já aparecendo em (POINCARÉ, 1890).

Apresentaremos uma sequência de resultados essenciais para provar o objetivo do capítulo, alguns elementares, mas que não custam tanto ao ponto de serem omitidos.

Lema 3.4. *Dados $C, P \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$ tais que $P \in S(C, r)$, esfera de raio r com centro no ponto C . Então, para todo $Q \in \mathbb{R}^n$, são equivalentes:*

i) $Q \in B(C, r)$.

ii) $|\overrightarrow{PQ}| < 2r \cos \theta$, onde $\theta := \angle(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PC})$.

Se relembrarmos que $\cos(\angle(u, v)) = \langle u, v \rangle / |u||v|$ e $|\overrightarrow{PC}| = r$ podemos trocar o segundo item por:

ii') $|\overrightarrow{PQ}| < \frac{2\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PC} \rangle}{|\overrightarrow{PQ}|}$.

Prova. Sem perdas podemos supor que $P = 0$, ou seja, a origem do sistema, e que $C = (0', r) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Assim $\overrightarrow{PQ} = Q = (q_1, \dots, q_n)$ e $\overrightarrow{PC} = C$.

Primeiro suponha $Q \in B := B(C, r)$. Neste caso $\langle Q, C \rangle = rq_n > 0$ pois $B \subset \mathbb{R}^{n-1} \times (0, +\infty)$. Vamos mostrar que $|Q| < 2 \frac{\langle Q, C \rangle}{|Q|}$.

Tome $\lambda > 0$ tal que $\lambda|Q| = 2 \frac{\langle Q, C \rangle}{|Q|}$, ou seja, $\lambda = 2 \frac{\langle Q, C \rangle}{|Q|^2}$.

Afirmção 1. $\lambda Q \in S(C, r)$.

¹A rigor, como na literatura, caberia a palavra “uniforme” logo após “condição”, dada a uniformidade do raio. Mas isso não deve causar confusão.

Prova da Afirmação: De fato,

$$\begin{aligned} |\lambda Q - C|^2 &= |\lambda Q|^2 + |C|^2 - 2\lambda \langle Q, C \rangle \\ &= 4 \frac{\langle Q, C \rangle^2}{|Q|^2} + r^2 - 2 \cdot 2 \frac{\langle Q, C \rangle}{|Q|^2} \cdot \langle Q, C \rangle \\ &= r^2. \end{aligned}$$

Para mostrar que $|Q| < 2 \frac{\langle Q, C \rangle}{|Q|}$ só precisamos ter $\lambda > 1$, e isso ocorre, pois

$$Q \in B \Rightarrow |Q - C|^2 < r^2 \Rightarrow |Q|^2 + |C|^2 - 2\langle Q, C \rangle < r^2 \Rightarrow 1 < 2 \frac{\langle Q, C \rangle}{|Q|^2} = \lambda.$$

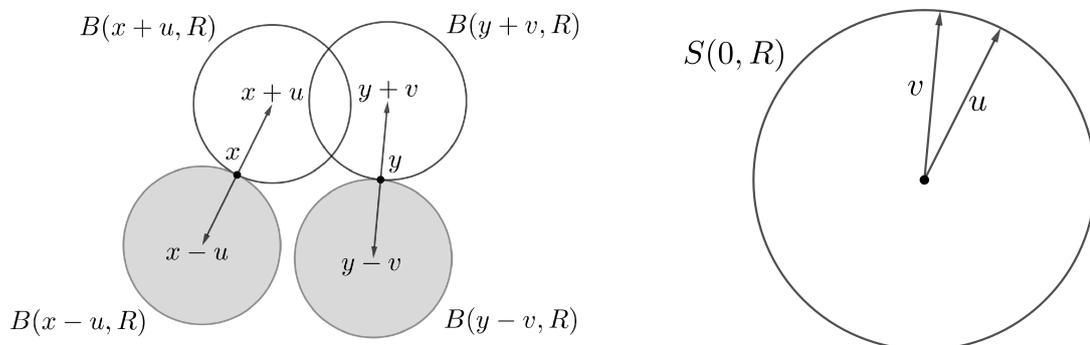
■

Suponhamos agora que $|Q| < 2r \cos \theta$ ou, equivalentemente, suponhamos $|Q| < 2 \frac{\langle Q, C \rangle}{|Q|}$. Neste caso, pela Afirmação 1, $\lambda Q \in S(C, r)$, onde $\lambda = 2 \frac{\langle Q, C \rangle}{|Q|^2}$ e que, por hipótese, $\lambda > 1$. Como \bar{B} é convexa, 0 e λQ pertencem a $S(C, r)$ e $Q \in (0, \lambda Q) \subset B$ segue que $Q \in B$, como queríamos. □

O lema a seguir, apesar de possuir um enunciado simples, assume papel de grande relevância nesta dissertação. É um resultado que por si só já acarreta muitas consequências, e que se encaixou perfeitamente aos nossos propósitos depois de reduzirmos o problema inicial da prova da boa definição da função da Proposição 3.8.

Lema 3.5 (Lema das quatro bolas). *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $u, v \in S(0, R)$. Se tivermos $B(x + u, R) \cap B(y - v, R) = \emptyset$ e $B(x - u, R) \cap B(y + v, R) = \emptyset$, então $|u - v| < |x - y|$ (Ver Figura 2).*

Figura 2 – Lema das quatro bolas



Fonte: elaborada pelo autor.

Prova. A menos de uma translação, podemos supor sem perda de generalidade que a origem é $(x+y)/2$, ou seja, $y = -x$ (isto é, devemos provar que $|u-v| < |x-(-x)| = 2|x|$).

Defina $z := x + \frac{u+v}{2}$ e veja que

$$\frac{u-v}{2} = \frac{u+v}{2} - v = z - x - v.$$

Logo,

$$\frac{u-v}{2} \in \overline{B(-x-v, |z|)}.$$

Ao mesmo tempo,

$$\frac{u-v}{2} = u - \frac{u+v}{2} = u - z + x \Rightarrow \frac{u-v}{2} \in \overline{B(x+u, |z|)}.$$

Assim,

$$\frac{u-v}{2} \in \overline{B(x+u, |z|)} \cap \overline{B(-x-v, |z|)}.$$

Portanto, usando da hipótese que $B(x+u, R) \cap B(-x-v, R) = \emptyset$, podemos concluir que

$$R^2 \leq |z|^2 = \left| x + \frac{u+v}{2} \right|^2. \quad (14)$$

Analogamente, fazendo $w := -x + \frac{u+v}{2}$ temos $\frac{v-u}{2} \in B(x-u, |w|) \cap B(-x+v, |w|)$. Então

$$R^2 \leq |w|^2 = \left| x - \frac{u+v}{2} \right|^2. \quad (15)$$

Somando (14) e (15) e usando a lei do paralelogramo² temos

$$\begin{aligned} 2R^2 &\leq \left| x + \frac{u+v}{2} \right|^2 + \left| x - \frac{u+v}{2} \right|^2 \\ &= 2 \left(|x|^2 + \left| \frac{u+v}{2} \right|^2 \right) \\ &= 2|x|^2 + \frac{1}{2}|u+v|^2, \end{aligned}$$

e, usando novamente a lei do paralelogramo,

²Em um espaço vetorial normado E , cuja norma $\|\cdot\|$ provém de um produto interno, vale, para $a, b \in E$:

$$2(\|a\|^2 + \|b\|^2) = \|a+b\|^2 + \|a-b\|^2.$$

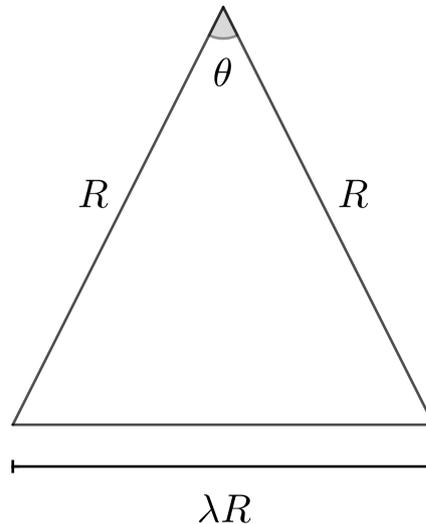
Vale mencionar que a recíproca também é verdadeira e se vale a igualdade acima, a norma provém de um produto interno.

$$\begin{aligned}
2|x|^2 + \frac{1}{2}|u+v|^2 &= 2|x|^2 + \frac{1}{2}[2|u|^2 + 2|v|^2 - |u-v|^2] \\
&= 2|x|^2 + |u|^2 + |v|^2 - \frac{|u-v|^2}{2} \\
&= 2|x|^2 + 2R^2 - \frac{|u-v|^2}{2}.
\end{aligned}$$

Consequentemente $2R^2 \leq 2|x|^2 + 2R^2 - \frac{|u-v|^2}{2}$, que por sua vez implica que $|u-v|^2 \leq 4|x|^2$, ou seja, $|u-v| \leq 2|x|$ como queríamos. \square

Lema 3.6. *No seguinte triângulo isósceles (Figura 3) vale que $\cos \theta = \frac{2-\lambda^2}{2}$, para $\lambda \in (0, 2)$. Consequentemente se $\lambda \leq 1$ temos $0 < \theta \leq \pi/3$.*

Figura 3 – Triângulo isósceles



Fonte: elaborada pelo autor.

Prova. É uma aplicação direta da lei dos cossenos. Dela decorre que

$$(\lambda R)^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos \theta.$$

Portanto,

$$\cos \theta = \frac{2 - \lambda^2}{2}.$$

Obviamente, se $\lambda \leq 1$, temos $\cos \theta \geq 1/2$ que por sua vez implica em $0 < \theta \leq \pi/3$. \square

Ao longo do restante do capítulo, D sempre será um domínio limitado.

3.2 Domínios $C^{1,1}$ satisfazem a condição da bola

Proposição 3.7. *Se $D \subset \mathbb{R}^n$ é $C^{1,1}$ então D satisfaz a condição da bola.*

Prova. Considere as constantes $C, r_0 > 0$ da Definição 3.2 para domínios $C^{1,1}$. Agora tome $\xi \in \partial D$ arbitrário. Para este ponto existe $\varphi: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^{1,1}$ tal que $B(\xi, r_0) \cap D = B(\xi, r_0) \cap \{(x', x_n); x_n > \varphi(x')\}$ e $|\nabla\varphi(y') - \nabla\varphi(z')| \leq C|y' - z'|$.

Observe que a menos de uma translação podemos supor, sem perda de generalidade, que $\xi = (0', 0) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, ou seja, $\varphi(0') = 0$. Como D é de classe $C^{1,1}$, sabemos que para cada ponto da fronteira de D existe espaço tangente e este é um espaço vetorial de dimensão $n - 1$, logo, também sem perdas, podemos supor, a menos de uma rotação, que o espaço tangente em ξ é \mathbb{R}^{n-1} . Mais precisamente, a menos de uma rotação podemos supor que $\nabla\varphi(0') = 0$.

Sendo $\nabla\varphi$ Lipschitz, então para todo $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ vale que

$$|\nabla\varphi(x')| = |\nabla\varphi(x') - \nabla\varphi(0')| \leq C|x' - 0'| = C|x'|.$$

E pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$\varphi(x') = \varphi(x') - \varphi(0') = \langle \nabla\varphi(\theta x'), x' \rangle.$$

Portanto, vale:

$$|\varphi(x')| = |\langle \nabla\varphi(\theta x'), x' \rangle| \leq |\nabla\varphi(\theta x')||x'| \leq C|\theta x'||x'| = C\theta|x'|^2 \leq C|x'|^2. \quad (16)$$

Fixado qualquer $r > 0$, temos $\xi = 0 \in S(r\vec{e}_n, r)$. Além disso, para qualquer $x = (x', x_n) \in S(r\vec{e}_n, r) \cap \{x_n < r\}$ vale

$$x_n = \psi_r(x') := r - \sqrt{r^2 - |x'|^2} = r \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{|x'|}{r}\right)^2} \right).$$

E, como

$$|x - r\vec{e}_n| = r \Rightarrow |x'|^2 + (x_n - r)^2 = r^2 \Rightarrow |x'|^2 \leq r^2 \Rightarrow \frac{|x'|}{r} \leq 1,$$

podemos usar o fato de

$$\sqrt{1-t} \leq 1 - \frac{t}{2}, \quad \forall t \in [0, 1]$$

para concluir que

$$\psi_r(x') \geq \frac{|x'|^2}{2r}, \quad \forall |x'| \leq r. \quad (17)$$

Tomando $r < \frac{1}{2C}$ e usando as equações (16) e (17) temos

$$\psi_r(x') \geq \frac{|x'|^2}{2r} > C|x'|^2 \geq |\varphi(x')|.$$

Então

$$\psi_r(x') > \varphi(x') > -\psi_r(x'),$$

ou seja,

$$x_n > \varphi(x') > -x_n, \quad \forall |x'| \leq r. \quad (18)$$

Podemos concluir, por (18), que o hemisfério inferior de $S(r\vec{e}_n, r)$ está contido em $\{(y', y_n) \in \mathbb{R}^n; y_n > \varphi(y')\}$ para todo $r < 1/2C$. Portanto, dado qualquer $r < 1/4C$ teremos

$$S(r\vec{e}_n, r) \subset \{(y', y_n) \in \mathbb{R}^n; y_n > \varphi(y')\}.$$

Ao mesmo tempo podemos tomar $r \ll 1$, digamos $r < \tilde{r}$, para algum $\tilde{r} > 0$ fixo, para que tenhamos $S(r\vec{e}_n, r) \subset B(\xi, r_0)$. Sendo assim, ao tomarmos $R < \min\{\tilde{r}, \frac{1}{4C}\}$ teremos

$$S(R\vec{e}_n, R) \subset B(\xi, r_0) \cap \{(y', y_n) \in \mathbb{R}^n; y_n > \varphi(y')\}.$$

Como

$$B(\xi, r_0) \cap D = B(\xi, r_0) \cap \{(y', y_n) \in \mathbb{R}^n; y_n > \varphi(y')\},$$

então $S(R\vec{e}_n, R) \subset D$. Claramente vale o mesmo para a bola em vez da esfera. Portanto, existe $R > 0$ tal que D satisfaz a condição da bola interior com raio R .

Analogamente $\varphi(x') > -x_n$ implica que $B(-R\vec{e}_n, R) \subset D^c$. Concluimos assim que D satisfaz a condição da bola exterior e, conseqüentemente, a condição da bola. \square

3.3 Domínios que satisfazem a condição da bola são $C^{1,1}$

Na presente seção vamos nos dedicar ao término da demonstração do Teorema 3.1. Vamos dividir a prova da seguinte proposição em passos, os quais serão chamados de afirmações, mas sempre lembrando que estamos dentro da prova da proposição principal.

Proposição 3.8. *Se D satisfaz a condição da bola com raio R , então D é $C^{1,1}$.*

Prova. Suponha que D seja domínio satisfazendo a condição da bola (Definição 3.3) e tome $\xi \in \partial D$. Devemos mostrar que existe $\varphi: U \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^{1,1}$ tal que $B(\xi, r_0) \cap D = B(\xi, r_0) \cap \{(x', x_n); x_n > \varphi(x')\}$ e $\nabla\varphi$ cumpra $|\nabla\varphi(y') - \nabla\varphi(z')| \leq C|y' - z'|$ para quaisquer $y', z' \in U$, onde C e r_0 são constantes positivas e universais.

Sem perda de generalidade podemos supor que $\xi = (0', 0) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, que $\xi^i = (0', R)$ e que $\xi^e = (0', -R)$. Neste caso teremos $B_\xi^i := B(\xi^i, R) = B(R\vec{e}_n, R)$ e $B_\xi^e := B(\xi^e, R) = B(-R\vec{e}_n, R)$.

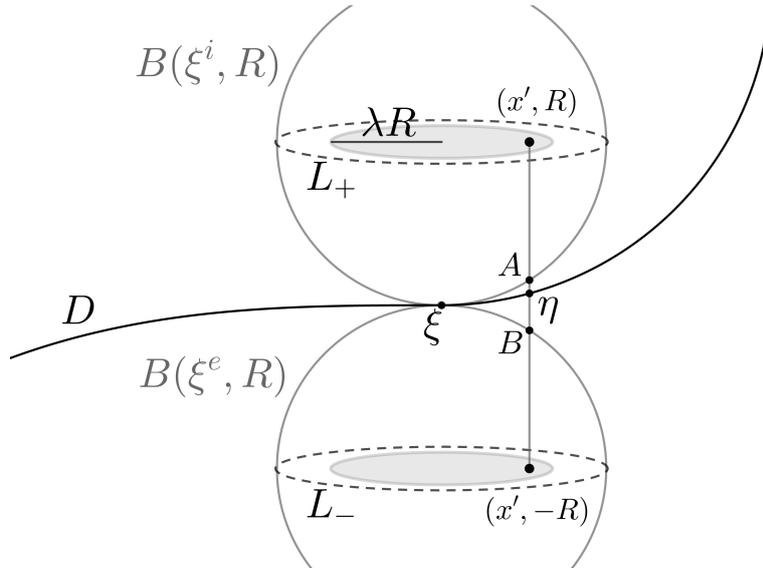
Tomando $L_+ := \{(x', R) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}; |x'| < R\}$ e $L_- := \{(x', -R); |x'| < R\}$, podemos definir $\varphi: B_{n-1}(0', \lambda R) \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$, com $\lambda < 1$ escolhido posteriormente, dada por $\varphi(x') = x_n$, onde $(x', x_n) \in \partial D \cap [(x', R), (x', -R)]$.

Afirmação 1 (Boa definição). *A função φ , acima apresentada, está bem definida, isto é, $\partial D \cap [(x', R), (x', -R)]$ tem um único elemento para $\lambda \ll 1$.*

Prova da Afirmação: De fato, como $(x', R) \in D$ e $(x', -R) \in D^c$ e o segmento fechado $[(x', R), (x', -R)]$ é conexo, então, pelo Teorema da Alfândega, temos no mínimo um elemento em $\partial D \cap [(x', R), (x', -R)]$. A unicidade vem da condição da bola, como veremos a seguir.

Seja $\eta = (x', x_n) \in \partial D \cap [(x', R), (x', -R)]$. Defina $A = (x', R - \sqrt{R^2 - |x'|^2})$ e $B = (x', -(R - \sqrt{R^2 - |x'|^2}))$, ou seja, A e B são pontos no qual o segmento intersecta as esferas interior e exterior respectivamente (Veja Figura 4). Como $[(x', R), A] \subset B_\xi^i \subset D$ e $(B, (x', -R)] \subset B_\xi^e \subset D^c$, tais segmentos não podem conter pontos da fronteira de D . Para mostrar que η é único, veremos que $[A, \eta] \subset D$ e $(\eta, B] \subset D^c$.

Figura 4 – A função φ e a disposição de A e B



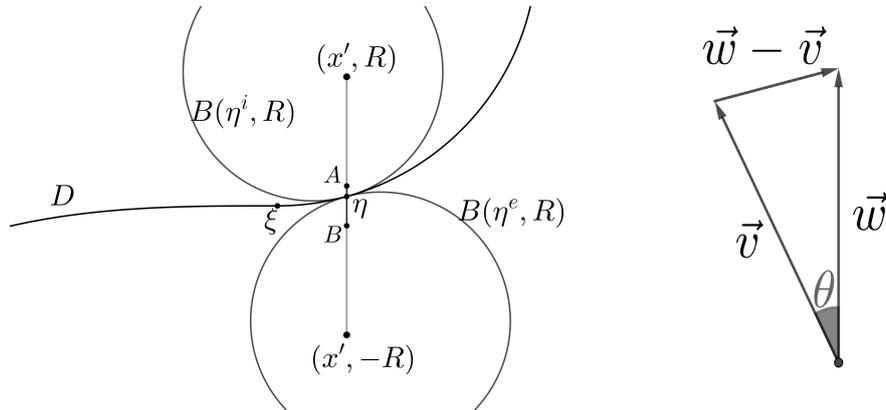
Fonte: elaborada pelo autor.

Vamos inicialmente mostrar que $[A, \eta] \subset D$. Em η usamos a condição da bola e obtemos $B_\eta^i = B(\eta^i, R) \subset D$ e $B_\eta^e = B(\eta^e, R) \subset D^c$ de tal forma que $\eta \in S(\eta^i, R) \cap S(\eta^e, R)$, como esquematizado na Figura 5. Provaremos que $A \in B_\eta^i$ e, por convexidade, teremos $[A, \eta] \subset B_\eta^i$.

Sejam $u = \vec{\eta A} = A - \eta$, $v = \vec{\eta \eta^i} = \eta^i - \eta$ e $w = R\vec{e}_n$. Note que u e w são paralelos e de mesmo sentido, portanto, $\theta := \angle(u, v) = \angle(w, v)$. Estes vetores e o ângulo entre eles foram destacados no lado direito da Figura 5. Pelo Lema 3.4,

$$A \in B_\eta^i \Leftrightarrow |u| < 2R \cos \theta. \quad (19)$$

Figura 5 – Condição da bola em η e ângulo entre os vetores \vec{v} e \vec{w}



Fonte: elaborada pelo autor.

Agora observe que $w, v \in S(0, R)$ e $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ satisfazem:

$$B(\xi + w, R) \cap B(\eta - v, R) = B_\xi^i \cap B_\eta^e = \emptyset = B_\xi^e \cap B_\eta^i = B(\xi - w, R) \cap B(\eta + v, R).$$

Então, pelo Lema 3.5, $|w - v| < |\xi - \eta| = |\eta|$. E, pela desigualdade triangular,

$$|\eta| = |(x', x_n)| \leq |x'| + |x_n| \leq |x'| + R - \sqrt{R^2 - |x'|^2}. \quad (20)$$

Desde que tenhamos $|w - v| \leq R$, o Lema 3.6 nos garante que

$$\theta \leq \pi/3,$$

e assim $\cos \theta \geq 1/2$. Esta última implicando que

$$R \leq 2R \cos \theta.$$

Além disso, é certo que

$$|u| = |\vec{\eta A}| < |B - A| = 2(R - \sqrt{R^2 - |x'|^2}). \quad (21)$$

Como queremos satisfazer o lado direito de (19), então nos é suficiente achar $\lambda \ll 1$ tal que $|\eta| \leq R$ e $|u| \leq R$. Utilizando-se das equações (20) e (21) encontraremos $\lambda > 0$ para o qual vale

$$|x'| + 2(R - \sqrt{R^2 - |x'|^2}) \leq R, \quad \forall |x'| < \lambda R.$$

Automaticamente teremos

$$|\eta| \leq |x'| + (R - \sqrt{R^2 - |x'|^2}) \leq R$$

e

$$|u| < 2(R - \sqrt{R^2 - |x'|^2}) \leq R.$$

Como a função $f(t) = t + 2(R - \sqrt{R^2 - t^2})$ é crescente para $t \in \mathbb{R}_+$, dado $\lambda < 1$ arbitrário temos, para qualquer $|x'| < \lambda R$,

$$\begin{aligned} |x'| + 2(R - \sqrt{R^2 - |x'|^2}) &\leq \lambda R + 2(R - \sqrt{R^2 - (\lambda R)^2}) \\ &= R(\lambda + 2(1 - \sqrt{1 - \lambda^2})). \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} R(\lambda + 2(1 - \sqrt{1 - \lambda^2})) \leq R &\Leftrightarrow (\lambda + 2(1 - \sqrt{1 - \lambda^2})) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow 5\lambda^2 + 2\lambda - 3 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda \in \left[-1, \frac{3}{5}\right]. \end{aligned}$$

Portanto, tomando $\lambda = 3/5$ teremos $|\eta| \leq R$ e $|u| \leq R$, e, por toda a discussão, obtemos o lado direito de (19). Portanto, $A \in B_\eta^i$ e assim $[A, \eta] \subset D$, por convexidade da bola.

Vamos provar agora que $[B, \eta] \subset D^c$, para o mesmo λ , mostrando que $B \in B_\eta^e$. Pelo Lema 3.4 é suficiente concluir que

$$|\vec{\eta B}| < 2R \cos \bar{\theta}, \quad \text{onde } \bar{\theta} := \angle(\vec{\eta B}, \vec{\eta \eta^e}).$$

Primeiro note que $\vec{\eta B} = -\vec{\eta A}$ e $\vec{\eta \eta^e} = -\vec{\eta \eta^i}$. Logo

$$\bar{\theta} = \angle(\vec{\eta B}, \vec{\eta \eta^e}) = \angle(-\vec{\eta A}, -\vec{\eta \eta^i}) = \angle(\vec{\eta A}, \vec{\eta \eta^i}) \leq \pi/3.$$

Isso implica que $2R \cos \bar{\theta} \geq R$ e, como $|\vec{\eta B}| < |B - A| < R \leq 2R \cos \bar{\theta}$, temos $B \in B_\eta^e$. Portanto, está provada a afirmação e $\varphi: B_{n-1}(0', \frac{3R}{5}) \rightarrow \mathbb{R}$ está bem definida. ■

Observação: Na demonstração acima, ao encontrarmos λ , há uma certa negligência ao fato de $3/5$ ser a melhor (no caso a maior) escolha. Ao longo da prova, optando por cálculos que facilitam o entendimento, acabamos por fazer algumas estimativas de forma grosseira. Sob nossa perspectiva, isso é irrelevante uma vez que nos basta exibir um λ .

Já temos nossa φ bem definida. Partiremos rumo a demonstrar que essa função é $C^{1,1}$. Nosso próximo passo é mostrar que tal φ é Lipschitz, que por sua vez isto ajudará na prova da diferenciabilidade.

Afirmção 2 (Lipschitz-Continuidade). *A função $\varphi: B_{n-1}(0', \frac{3R}{5}) \rightarrow \mathbb{R}$ é Lipschitz.*

Prova da Afirmação: Tome $x', y' \in B_{n-1}(0', \frac{3R}{5})$ arbitrários. Vamos mostrar que existe $C > 0$, constante universal, tal que $|\varphi(y') - \varphi(x')| \leq C|y' - x'|$. Primeiro definamos $\eta = (x', \varphi(x'))$ e $\rho = (y', \varphi(y'))$. Como ambos estão em ∂D e temos

$$\overline{B_\eta^i} \cap \partial D = \{\eta\} = \overline{B_\eta^e} \cap \partial D,$$

então

$$\rho \notin \overline{B_\eta^i} \text{ e } \rho \notin \overline{B_\eta^e},$$

ou seja, $|\rho - \eta^i| \geq R$ e $|\rho - \eta^e| \geq R$, onde η^i e η^e são da condição da bola em η , e $B_\eta^i = B(\eta^i, R)$ e $B_\eta^e = B(\eta^e, R)$.

Observemos que

$$\begin{aligned} |\rho - \eta^i| \geq R &\Rightarrow |\rho - \eta^i|^2 \geq R^2 \\ &\Rightarrow |\rho - \eta - (\eta^i - \eta)|^2 \geq R^2 \\ &\Rightarrow |\rho - \eta - \overrightarrow{\eta\eta^i}|^2 \geq R^2, \end{aligned}$$

fazendo $v = \overrightarrow{\eta\eta^i}$,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow |(\rho - \eta) - v|^2 \geq R^2 \\ &\Rightarrow |\rho - \eta|^2 + |v|^2 - 2\langle \rho - \eta, v \rangle \geq R^2. \end{aligned}$$

E, desde que $|v| = R$,

$$|\rho - \eta|^2 \geq 2\langle \rho - \eta, v \rangle. \quad (22)$$

Analogamente,

$$|\rho - \eta^e| \geq R \Rightarrow |\rho - \eta|^2 \geq -2\langle \rho - \eta, v \rangle, \quad (23)$$

com a observação que $\overrightarrow{\eta\eta^e} = -\overrightarrow{\eta\eta^i} = -v$.

Juntando (22) e (23), podemos concluir que

$$2|\langle \rho - \eta, v \rangle| \leq |\rho - \eta|^2 = |y' - x'|^2 + |\varphi(y') - \varphi(x')|^2. \quad (24)$$

Escrevendo $v = (v', v_n)$ temos também

$$\langle \rho - \eta, v \rangle = \langle y' - x', v' \rangle + (\varphi(y') - \varphi(x'))v_n.$$

Daí, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |\langle \rho - \eta, v \rangle| &= |\langle y' - x', v' \rangle + (\varphi(y') - \varphi(x'))v_n| \\ &\geq |\varphi(y') - \varphi(x')||v_n| - |\langle y' - x', v' \rangle| \\ &\geq |\varphi(y') - \varphi(x')||v_n| - |y' - x'||v'|. \end{aligned}$$

Mas isso acarreta

$$2(|\varphi(y') - \varphi(x')||v_n| - |y' - x'||v'|) \leq 2|\langle \rho - \eta, v \rangle| \leq |y' - x'|^2 + |\varphi(y') - \varphi(x')|^2,$$

onde (24) foi usado na última desigualdade. Portanto,

$$|\varphi(y') - \varphi(x')||v_n| \leq \frac{1}{2} \left[|y' - x'|^2 + |\varphi(y') - \varphi(x')|^2 \right] + |y' - x'||v'|.$$

Como $|v'| < R$, temos

$$|\varphi(y') - \varphi(x')||v_n| - \frac{1}{2} |\varphi(y') - \varphi(x')|^2 \leq \frac{1}{2} |y' - x'|^2 + |y' - x'|R$$

e então

$$|\varphi(y') - \varphi(x')| \left(|v_n| - \frac{|\varphi(y') - \varphi(x')|}{2} \right) \leq \left(\frac{|y' - x'|}{2} + R \right) |y' - x'|.$$

Observe que se $y', x' \in B_{n-1}(0', \frac{3R}{5})$ então $|y' - x'| < 6R/5$, daí

$$\frac{|y' - x'|}{2} + R < \frac{8R}{5}.$$

Então

$$|\varphi(y') - \varphi(x')| \left(|v_n| - \frac{|\varphi(y') - \varphi(x')|}{2} \right) \leq \frac{8R}{5} |y' - x'|. \quad (25)$$

Vamos então analisar $(|v_n| - |\varphi(y') - \varphi(x')|/2)$. Primeiro veja que

$$v_n = \langle v, e_n \rangle = R \frac{\langle v, e_n \rangle}{|v|} = R \cos \theta, \text{ onde } \theta = \angle(v, e_n).$$

E, como η pertence ao gráfico de φ , para o nosso $\lambda = 3/5$ temos $\theta \leq \pi/3$, que implica

$$v_n = |v_n| = R \cos \theta \geq R/2. \quad (26)$$

Agora veja que

$$|\varphi(y') - \varphi(x')| \leq |\varphi(y')| + |\varphi(x')| \leq 2 \left(R - \sqrt{R^2 - \left(\frac{3R}{5}\right)^2} \right),$$

ou seja,

$$\frac{|\varphi(y') - \varphi(x')|}{2} \leq R \left(1 - \sqrt{1 - \frac{9}{25}} \right) = \frac{R}{5}. \quad (27)$$

Juntando (26) e (27) obtemos

$$|v_n| - \frac{|\varphi(y') - \varphi(x')|}{2} \geq \frac{R}{2} - \frac{R}{5} = \frac{3R}{10},$$

que combinado com (25) nos permite concluir que

$$\frac{3R}{10} |\varphi(y') - \varphi(x')| \leq \frac{8R}{5} |y' - x'|,$$

que por sua vez resulta em $|\varphi(y') - \varphi(x')| \leq 16 |y' - x'| / 3$ e assim, φ é Lipschitz. \blacksquare

Afirmção 3 (Diferenciabilidade). $\varphi: B_{n-1}(0', \frac{3R}{5}) \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável.

Prova da Afirmção: Tome $x' \in B_{n-1}(0', \frac{3R}{5})$ arbitrário. Vamos mostrar que φ é diferenciável em x' , isto é, exibir um vetor $u' = u'(x') \in \mathbb{R}^{n-1}$ de tal forma que dado qualquer $y' \in B_{n-1}(0', \frac{3R}{5})$ tenhamos

$$\varphi(y') - \varphi(x') = \langle u', (y' - x') \rangle + r(y' - x')$$

satisfazendo

$$\lim_{y' \rightarrow x'} \frac{r(y' - x')}{|y' - x'|} = 0.$$

Mais precisamente, para x' vamos exibir u' tal que dado qualquer ε positivo, podemos exibir um δ também positivo, de tal forma que tenhamos

$$\left| \frac{\varphi(y') - \varphi(x') - \langle u', (y' - x') \rangle}{|y' - x'|} \right| < \varepsilon, \quad \forall y' \in B_{n-1}(x', \delta). \quad (28)$$

Começemos por notar que

$$|\varphi(y') - \varphi(x') - \langle u', (y' - x') \rangle| = | \langle (u', -1), (y' - x', \varphi(y') - \varphi(x')) \rangle |.$$

Se definirmos $\eta = (x', \varphi(x'))$ e $\rho = (y', \varphi(y'))$ teremos $\eta, \rho \in \partial D$ e ainda

$$|\varphi(y') - \varphi(x') - \langle u', (y' - x') \rangle| = | \langle (u', -1), (\rho - \eta) \rangle |. \quad (29)$$

Observe agora que, fazendo $v := \overrightarrow{\eta\eta^i} = (v', v_n)$ temos que $\angle(v, e_n) \leq \pi/3$, pela nossa escolha de λ na definição de φ . E isso implica que

$$\frac{v_n}{R} = \frac{v_n}{|v|} = \cos(\angle(v, e_n)) \geq \frac{1}{2}. \quad (30)$$

Logo, $v_n > 0$ e então podemos multiplicar v por $-1/v_n$.

Defina

$$u := \frac{v}{-v_n} = \left(\frac{v'}{-v_n}, -1 \right),$$

ou seja, $u' = v'/-v_n$.

Vamos então verificar que para tal u temos que para todo $\varepsilon > 0$ vale

$$\left| \frac{\langle u, (\rho - \eta) \rangle}{|y' - x'|} \right| < \varepsilon \quad (31)$$

sempre que y' está suficientemente próximo de x' . E, desde que usemos (29), isto acarretará em (28), que é nosso objetivo.

Como φ é Lipschitz, temos $|\varphi(y') - \varphi(x')| \leq L|y' - x'|$. Então

$$|\rho - \eta| \leq |y' - x'| + |\varphi(y') - \varphi(x')| \leq (1 + L)|y' - x'|.$$

Portanto,

$$\frac{1}{|\rho - \eta|} \geq \frac{1}{1 + L} \frac{1}{|y' - x'|},$$

ou seja,

$$\frac{1 + L}{|\rho - \eta|} \geq \frac{1}{|y' - x'|}.$$

Então

$$(1 + L) \frac{|\langle u, (\rho - \eta) \rangle|}{|\rho - \eta|} \geq \frac{|\langle u, (\rho - \eta) \rangle|}{|y' - x'|}$$

e assim

$$K \frac{|\langle u, (\rho - \eta) \rangle|}{|u||\rho - \eta|} \geq \frac{|\langle u, (\rho - \eta) \rangle|}{|y' - x'|}, \quad \text{onde } K = (1 + L)|u|. \quad (32)$$

Observe agora que

$$\frac{u}{|u|} = \frac{v' - v_n}{|v'|/|v_n|} = -\frac{v}{|v|}.$$

Então

$$\frac{|\langle u, (\rho - \eta) \rangle|}{|u||\rho - \eta|} = \frac{|\langle v, (\rho - \eta) \rangle|}{|v||\rho - \eta|}. \quad (33)$$

Se relembrarmos que $v = \overrightarrow{\eta\eta^i}$, o Lema 3.9 a seguir nos garante que, para o ε dado, existe um δ tal que

$$\frac{|\langle v, (\rho - \eta) \rangle|}{|v||\rho - \eta|} \leq \frac{\varepsilon}{K}$$

sempre que $|y' - x'| < \delta$. Portanto, usando as equações (32) e (33), podemos concluir que

$$\frac{|\langle u, (\rho - \eta) \rangle|}{|y' - x'|} \leq K \frac{|\langle u, (\rho - \eta) \rangle|}{|u||\rho - \eta|} = K \frac{|\langle v, (\rho - \eta) \rangle|}{|v||\rho - \eta|} \leq K \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$$

quando $|y' - x'| < \delta$. Isto nos dá (31), como queríamos.

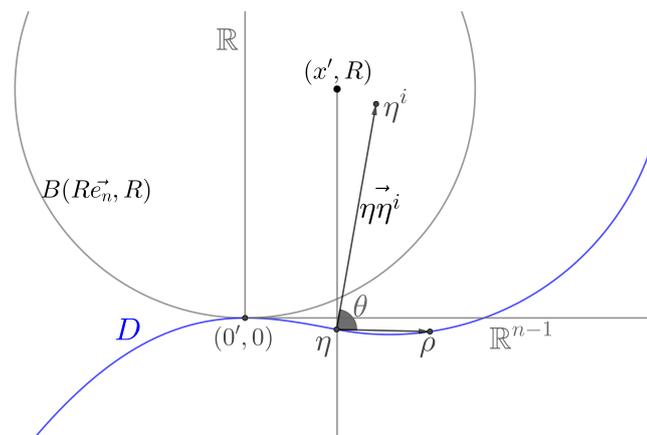
Então φ é diferenciável e $\nabla\varphi(x') = u' = v'/-v_n$, onde $v = \overrightarrow{\eta\eta^i}$ e $\eta = (x', \varphi(x'))$. ■

Lema 3.9. Dado $x' \in B_{n-1}(0', \frac{3R}{5})$, seja $\eta = (x', x_n)$ o único ponto de $\partial D \cap [(x', R)(x', -R)]$. Então, se $\rho = (y', y_n) \in \partial D$,

$$\lim_{y' \rightarrow x'} \left| \frac{\langle \overrightarrow{\eta\eta^i}, \rho - \eta \rangle}{|\overrightarrow{\eta\eta^i}| |\rho - \eta|} \right| = 0.$$

Ou seja, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\forall \rho = (y', y_n) \in \partial D$ com $y' \in B_{n-1}(x', \delta)$ temos $\left| \frac{\langle \overrightarrow{\eta\eta^i}, \rho - \eta \rangle}{|\overrightarrow{\eta\eta^i}| |\rho - \eta|} \right| < \varepsilon$. Em particular, se $\theta = \angle(\overrightarrow{\eta\eta^i}, \rho - \eta)$, teremos $\lim_{y' \rightarrow x'} \cos(\theta) = 0$. Veja a Figura 6 a seguir.

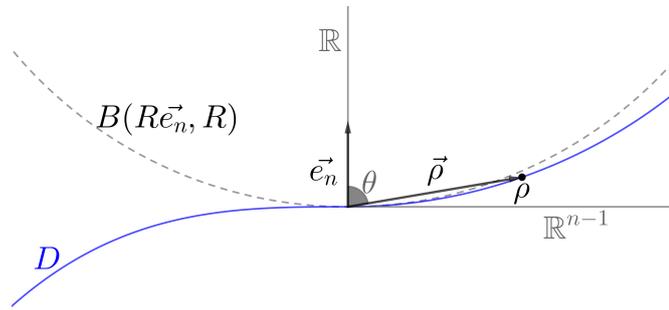
Figura 6 – Representação geométrica do Lema 3.9



Fonte: elaborada pelo autor.

Observação: Geometricamente, como visto na Figura 6, este lema diz que o ângulo entre o vetor $\overrightarrow{\eta\rho}$ e o vetor $\overrightarrow{\eta\eta^i}$ é tão perto de $\pi/2$ quanto se queira, desde que tomemos vizinhanças de x' cada vez menores. Ou seja, o vetor $\overrightarrow{\eta\rho}$ está cada vez mais se aproximando do plano tangente a $B(\eta^i, R)$ em η a medida que y' se aproxima de x' . Com esta observação torna-se claro que translações e rotações não interferirão no resultado. Para provar o Lema 3.9 é suficiente então provar o caso onde $\eta = 0$, $\eta^i = R\vec{e}_n$ e $\eta^e = -R\vec{e}_n$. Este caso é exibido na Figura 7.

Não provaremos, porém, o Lema 3.9 na forma que foi apresentada porque dispomos de uma versão mais forte, que também nos será útil, e da qual obtemos o Lema 3.9 como corolário.

Figura 7 – Domínio D depois de um movimento rígido

Fonte: elaborada pelo autor.

Lema 3.10. Dado $x' \in B_{n-1}(0', \frac{3R}{5})$, seja $\eta = (x', x_n)$ o único ponto de $\partial D \cap [(x', R)(x', -R)]$. Então existe $M > 0$ tal que, para todo $\rho = (y', y_n) \in \partial D$ diferente de η que satisfaz $|x' - y'| \leq R$,

$$\frac{|\langle \vec{\eta}^i, \rho - \eta \rangle|}{(|\eta^i| |\rho - \eta|)^2} \leq M.$$

Prova. Pelo mesmo argumento da observação, nos é suficiente provar para o caso em que $\eta = 0$ e $\eta^i = R\vec{e}_n$. Além disso, multiplicando por R^2 em ambos os lados basta provar que

$$\frac{|\langle \vec{e}_n, \rho \rangle|}{|\rho|^2} \leq \widetilde{M},$$

para algum $\widetilde{M} > 0$, ou seja,

$$\frac{|y_n|}{|y'|^2 + |y_n|^2} \leq \widetilde{M}.$$

Tome arbitrariamente um $\rho = (y', y_n) \in \partial D$ que satisfaz $0 < |x' - y'| \leq R$, ou, no nosso caso, simplesmente $0 < |y'| \leq R$. Considere a função $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ dada por

$$f(t) = \frac{t}{a^2 + t^2}, \text{ onde } a > 0 \text{ é fixo.}$$

Uma análise do comportamento da derivada de f nos permite concluir que f é crescente perto da origem, mais precisamente no intervalo $[0, a]$. Agora veja que, desde que $|y'| \leq R$, temos

$$\begin{aligned} R - |y'| \geq 0 &\Leftrightarrow (R - |y'|)(R - |y'|) \leq (R - |y'|)(R + |y'|) \\ &\Leftrightarrow (R - |y'|)^2 \leq R^2 - |y'|^2 \\ &\Leftrightarrow R - |y'| \leq \sqrt{R^2 - |y'|^2} \\ &\Leftrightarrow R - \sqrt{R^2 - |y'|^2} \leq |y'|. \end{aligned}$$

Então, se fizermos $a = |y'|$, $R - \sqrt{R^2 - |y'|^2}$ está no intervalo onde f é crescente. Finalmente, como $|y_n| \leq R - \sqrt{R^2 - |y'|^2}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{|y_n|}{|y'|^2 + |y_n|^2} &\leq \frac{\left| R - \sqrt{R^2 - |y'|^2} \right|}{|y'|^2 + \left| R - \sqrt{R^2 - |y'|^2} \right|^2} \\ &= \frac{\left(R - \sqrt{R^2 - |y'|^2} \right)}{|y'|^2 + \left(R - \sqrt{R^2 - |y'|^2} \right)^2} \\ &= \frac{(R - s)}{(R^2 - s^2) + (R - s)^2} \\ &= \frac{(R - s)}{(R - s)[(R + s) + (R - s)]} \\ &= \frac{1}{2R}, \end{aligned}$$

onde $s = \sqrt{R^2 - |y'|^2}$. E isto prova o lema. \square

Antes de provar que $\nabla\varphi$ é Lipschitz provaremos uma sequência de simples resultados, ao qual chamaremos também de Observações, mas estas iremos enumerar para facilitar a invocação dentro da prova da próxima afirmação. Para estas, lembre que estamos tratando de $\eta = (x', \varphi(x'))$ e também de $v = (v', v_n) = \overrightarrow{\eta\eta^i}$.

Observação 1. $\nabla\varphi(0') = 0'$.

De fato, lembre que

$$\nabla\varphi(x') = \frac{v'}{-v_n}.$$

No caso do ponto $0'$ temos $v = \vec{e}_n$ e assim $v'/-v_n = 0'$.

Observação 2. φ satisfaz $|\varphi(x')| \leq |x'|^2/R$.

Com efeito, sabemos que

$$|\varphi(x')| \leq R - \sqrt{R^2 - |x'|^2} = R \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{|x'|}{R} \right)^2} \right)$$

e que, para $0 < t \leq 1$, obtemos $1 - t \leq \sqrt{1 - t}$. Por consequência,

$$R \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{|x'|}{R} \right)^2} \right) \leq R \left(\frac{|x'|}{R} \right)^2 = \frac{|x'|^2}{R}.$$

Observação 3. $\nabla\varphi$ é função limitada.

De fato,

$$|\nabla\varphi(x')| = \frac{|v'|}{|v_n|} \leq \frac{|v|}{|v_n|} \leq \frac{R}{R/2} = 2,$$

pois de (26) resulta que $|v_n| \geq R/2$ para a nossa escolha de λ .

Por último temos uma observação trivial.

Observação 4. Da definição de $\nabla\varphi$ segue que

$$\frac{v}{R} = \frac{(\nabla\varphi(x'), -1)}{-\sqrt{1 + |\nabla\varphi(x')|^2}}.$$

Agora estamos aptos a provar que $\nabla\varphi$ é Lipschitz. Tudo o que já foi feito para $\lambda = 3/5$ continua válido para λ menor, em particular para $\lambda = 3/10$, onde podemos garantir a propriedade Lipschitz de $\nabla\varphi$.

Afirmção 4 ($\nabla\varphi$ é Lipschitz). $\nabla\varphi: B_{n-1}(0', \frac{3R}{10}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é Lipschitz.

Prova da Afirmção: Devemos provar que para quaisquer $x', y' \in B_{n-1}(0', \frac{3R}{10})$ vale

$$|\nabla\varphi(x') - \nabla\varphi(y')| \leq C |x' - y'|.$$

Como já feito outras vezes, a menos de um movimento rígido, é suficiente fazer para $y' = 0'$, ou seja, vamos provar que

$$|\nabla\varphi(x') - \nabla\varphi(0')| \leq C |x' - 0'|,$$

que pela Observação 1 é equivalente a

$$|\nabla\varphi(x')| \leq C |x'|. \quad (34)$$

De início, pelo Lema 3.10, fazendo $X' = x' + h'$, temos que

$$\left| \left\langle \frac{v}{R}, (X', \varphi(X')) - (x', \varphi(x')) \right\rangle \right| \leq M |(X', \varphi(X')) - (x', \varphi(x'))|^2. \quad (35)$$

Tomando $h' = -|x'| |\nabla\varphi(x')|^{-1} \nabla\varphi(x')$ veja que $|h'| = |x'|$ e então $|x' + h'| \leq 2|x'|$. Agora, usando a Observação 4, a substituição h' no lado esquerdo resulta em

$$\begin{aligned}
\left| \left\langle \frac{v}{R}, (X', \varphi(X')) - (x', \varphi(x')) \right\rangle \right| &= \left| \left\langle \frac{v}{R}, (h', \varphi(X') - \varphi(x')) \right\rangle \right| \\
&= \left| \left\langle \frac{(\nabla\varphi(x'), -1)}{-\sqrt{1 + |\nabla\varphi(x')|^2}}, (h', \varphi(X') - \varphi(x')) \right\rangle \right| \\
&= \left| \frac{\langle \nabla\varphi(x'), h' \rangle - (\varphi(X') - \varphi(x'))}{-\sqrt{1 + |\nabla\varphi(x')|^2}} \right| \\
&= \left| \frac{|x'| |\nabla\varphi(x')| + (\varphi(X') - \varphi(x'))}{\sqrt{1 + |\nabla\varphi(x')|^2}} \right|.
\end{aligned}$$

Enquanto que, do lado direito de (35), ao substituírmos $|h'|$ obtemos

$$\begin{aligned}
|(X', \varphi(X')) - (x', \varphi(x'))|^2 &= |(h', \varphi(X') - \varphi(x'))|^2 \\
&= |h'|^2 + |\varphi(X') - \varphi(x')|^2 \\
&= |x'|^2 + |\varphi(X') - \varphi(x')|^2.
\end{aligned}$$

Logo, (35) torna-se

$$\left| \frac{|x'| |\nabla\varphi(x')| + \varphi(X') - \varphi(x')}{\sqrt{1 + |\nabla\varphi(x')|^2}} \right| \leq M \left(|x'|^2 + |\varphi(X') - \varphi(x')|^2 \right). \quad (36)$$

Como $\nabla\varphi$ é limitado, pela Observação 3, então $\sqrt{1 + |\nabla\varphi(x')|^2}$ também é limitado, daí a constante M pode absorver este limitante nos deixando simplesmente com

$$||x'| |\nabla\varphi(x')| + \varphi(X') - \varphi(x')| \leq M \left(|x'|^2 + |\varphi(X') - \varphi(x')|^2 \right). \quad (37)$$

Usando este fato juntamente com desigualdade triangular inversa temos

$$\begin{aligned}
|x'| |\nabla\varphi(x')| - |\varphi(X') - \varphi(x')| &\leq ||x'| |\nabla\varphi(x')| + \varphi(X') - \varphi(x')| \\
&\leq M \left(|x'|^2 + |\varphi(X') - \varphi(x')|^2 \right),
\end{aligned}$$

e usando que φ é Lipschitz,

$$\begin{aligned}
 |x'| |\nabla\varphi(x')| - |\varphi(X') - \varphi(x')| &\leq M \left(|x'|^2 + L |X' - x'|^2 \right) \\
 &= M \left(|x'|^2 + L |h'|^2 \right) \\
 &= M \left(|x'|^2 + L |x'|^2 \right) \\
 &= M |x'|^2,
 \end{aligned}$$

onde novamente M absorveu outras constantes.

Portanto, como $|\varphi(x')| \leq |x'|^2/R$, pela Observação 2,

$$\begin{aligned}
 |x'| |\nabla\varphi(x')| &\leq M |x'|^2 + |\varphi(X') - \varphi(x')| \\
 &\leq M |x'|^2 + |\varphi(X')| + |\varphi(x')| \\
 &\leq M |x'|^2 + \frac{|x' + h'|^2}{R} + \frac{|x'|^2}{R} \\
 &\leq M |x'|^2 + \frac{(2|x'|)^2}{R} + \frac{|x'|^2}{R} \\
 &\leq C |x'|^2,
 \end{aligned}$$

donde segue que

$$|x'| |\nabla\varphi(x')| \leq C |x'|^2$$

e então

$$|\nabla\varphi(x')| \leq C |x'|,$$

como queríamos. ■

Isso termina a demonstração da Proposição 3.8. □

Ao juntarmos as Proposições 3.7 e 3.8, conseguimos finalmente provar o Teorema 3.1.

4 PRINCÍPIO DE HARNACK DE FRONTEIRA PARA O p -LAPLACIANO

No capítulo referente ao p -Laplaciano vimos um pouco sobre a Desigualdade de Harnack. Na sua versão mais conhecida, para o operador Laplaciano, temos que para $\Omega_0 \Subset \Omega$, existe $C \geq 1$ tal que para toda $u \geq 0$ harmônica em Ω vale

$$\frac{u(x)}{u(y)} \leq C, \quad \forall x, y \in \Omega_0.$$

Acontece que podemos reescrever o resultado numa versão não tão familiar. Se $\Omega_0 \Subset \Omega$, existe $C \geq 1$ tal que para todas $u, v > 0$ harmônicas em Ω vale

$$\frac{u(x)/u(y)}{v(x)/v(y)} \leq C, \quad \forall x, y \in \Omega_0.$$

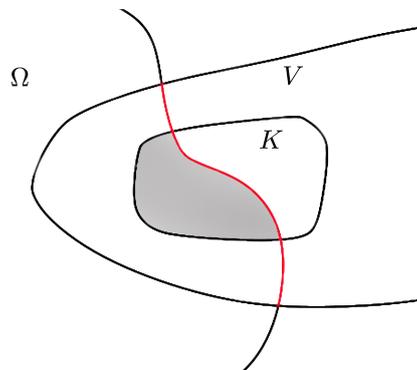
Não é difícil demonstrar a equivalência entre os dois resultados acima, inclusive é um bom exercício para o leitor. Entretanto, se nos restringirmos à segunda forma, retirando a hipótese de $\Omega_0 \Subset \Omega$ e permitindo que Ω_0 toque a fronteira de Ω , somos levados ao Princípio de Harnack de Fronteira.

Por Princípio de Harnack de Fronteira (PHF) nos referimos, genericamente, ao seguinte resultado: Dados um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, um aberto V e um compacto K satisfazendo $K \subset V$, $K \cap \Omega \neq \emptyset$ e $V \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, se u, v são funções harmônicas positivas em Ω que se anulam continuamente em $V \cap \partial\Omega$, então

$$\frac{u(x)/u(y)}{v(x)/v(y)} \leq A, \quad \forall x, y \in K \cap \Omega,$$

onde $A = A(\Omega, V, K) \geq 1$ não depende de u e v . Veja Figura 8.

Figura 8 – Princípio de Harnack de Fronteira



Fonte: elaborada pelo autor.

Como já citado na introdução desta dissertação, para o Laplaciano o resultado já está bem posto, e provado, desde muito tempo. Além disso, diversos resultados de caracterização também foram demonstrados. Por exemplo, sob determinadas condições,

a validade do PHF serve de caracterização para a classe de domínios uniformes, veja (AIKAWA, 2004). Ou, por exemplo, em (AIKAWA, 2008), prova-se a equivalência entre o PHF e a Estimativa de Carleson para funções harmônicas. Este resultado é desconhecido para o p -Laplaciano e, acreditamos que, a não linearidade do operador seja um dificultador para que um resultado desta natureza não tenha sido provado para funções p -harmônicas.

Já para o p -Laplaciano, embora bem mais recente, a teoria também tem recebido bastante atenção e desde o início do século tem se desenvolvido bastante. Neste capítulo provaremos o seguinte PHF para o p -Laplaciano em domínios $C^{1,1}$.

Teorema 4.1. *Seja D domínio $C^{1,1}$ e $1 < p < \infty$. Existem constantes $A, C > 1$, $R_0 > 0$ com as seguintes propriedades: Dados $0 < r < R_0$ e $\xi \in \partial D$, se u e v são funções p -harmônicas positivas em $D \cap B(\xi, Ar)$ se anulando em $\partial D \cap B(\xi, Ar)$, então*

$$\frac{u(x)/u(y)}{v(x)/v(y)} \leq C, \quad \forall x, y \in D \cap B(\xi, r).$$

Em geral, no caso de estarmos lidando com domínios consideravelmente suaves, as demonstrações parecem seguir a mesma ideia. O uso de barreiras juntamente com Princípio da Comparação e condições interiores e exteriores dependentes da geometria dos domínios é, aparentemente, o caminho padrão para a prova. No nosso caso não será diferente, mesmo diante de um operador mais complicado, a prova aqui apresentada consiste em usar a condição da bola, juntamente com as ferramentas citadas acima. Cabe apontar que nem sempre o domínio tem uma geometria boa o suficiente ou temos a oportunidade de construir barreiras uniformes que se adequem aos nossos interesses. Sendo assim, em novos cenários aparentemente mais hostis, outros argumentos para a demonstração do resultado tendem a surgir.

O ponto chave é que, dada a regularidade do domínio, temos, essencialmente, $\delta_D(\cdot) \approx u$, e é isso que vamos provar. Dividiremos a demonstração do PHF em duas partes. Para provar o Lema de Hopf, ou lema da estimativa inferior, usaremos a propriedade da bola interior e a Desigualdade de Harnack do p -Laplaciano em conjunto estratégico, precisamente um anel, donde usaremos uma função auxiliar G , que por sua vez satisfaz $G \approx \delta_D$, para comparar com um múltiplo da u . Nessa parte surge o Princípio da Comparação para garantir que essa comparação basta ser feita no bordo desse anel, finalizando a prova.

Para a outra estimativa é usado a Estimativa de Carleson, outro resultado que também se tornou padrão e fortemente ligado ao PHF. As ferramentas, a rigor, são as mesmas da estimativa inferior com a substituição da Desigualdade de Harnack pela estimativa de Carleson.

4.1 Princípio de Hopf - estimativa inferior

Antes de provarmos o Princípio de Hopf, apresentamos o seguinte lema, de nível elementar, mas com significativa importância para a demonstração do próximo resultado.

Lema 4.2. *Fixados $m \in \mathbb{N}$ e $\gamma > 1/2$, todo segmento de comprimento $\rho > 0$ pode ser coberto por 2^m bolas, centradas em pontos do segmento, de raios $\frac{\gamma\rho}{2^m}$.*

Prova. Seja $[a, b]$ segmento de tamanho ρ , façamos a prova por indução em k entre 0 e m .

Primeiro note que, no caso em que $k = 0$, precisamos cobrir $[a, b]$ com $2^0 = 1$ bola de raio $\frac{\gamma\rho}{2^0} = \gamma\rho$. Mas isso é simplesmente centrar uma bola de raio $\gamma\rho$ no ponto médio M de $[a, b]$.

Agora façamos para $k = 1$. Sendo M ainda o ponto médio de $[a, b]$, considere os intervalos $[a, M]$ e $[M, b]$, cujos comprimentos são $\tilde{\rho} = \rho/2$. Pelo caso anterior, sabemos que existe uma bola centrada em um ponto de $[a, M]$, de raio $\gamma\tilde{\rho} = \frac{\gamma\rho}{2}$, que cobre $[a, M]$. Analogamente para $[M, b]$. Acabamos de conseguir 2 bolas, centradas em pontos de $[a, b]$, de raios $\frac{\gamma\rho}{2}$, que cobre $[a, b]$. Isso nos dá ideia do passo de indução.

Suponhamos válido o resultado para $k = m - 1$. Provemos para m .

Novamente, sendo M o ponto médio de $[a, b]$. Por hipótese de indução existem 2^{m-1} bolas, centradas em pontos de $[a, M]$, cujos raios são $\frac{\gamma\tilde{\rho}}{2^{m-1}} = \frac{\gamma\rho}{2^m}$, onde $\tilde{\rho}$ é o comprimento de $[a, M]$. Analogamente para $[M, b]$. Isso nos dá $2^{m-1} + 2^{m-1} = 2^m$ bolas de raios $\frac{\gamma\rho}{2^m}$ cobrindo o segmento $[a, b]$, como queríamos. □

O resultado demonstrado acima é, claramente, verdade se trocarmos o segmento de comprimento ρ por outro de comprimento menor ou igual a ρ .

Para o que segue prosseguimos com o enunciado e a prova para o Princípio de Hopf para o p -Laplaciano.

Proposição 4.3. *Seja D domínio $C^{1,1}$ limitado. Existem $A \geq 1$ e $R_0 > 0$ com a seguinte propriedade:*

Dados arbitrários $\xi \in \partial D$ e $r \in (0, R_0)$, se u é positiva e p -harmônica em $B(\xi, 6r) \cap D$, então

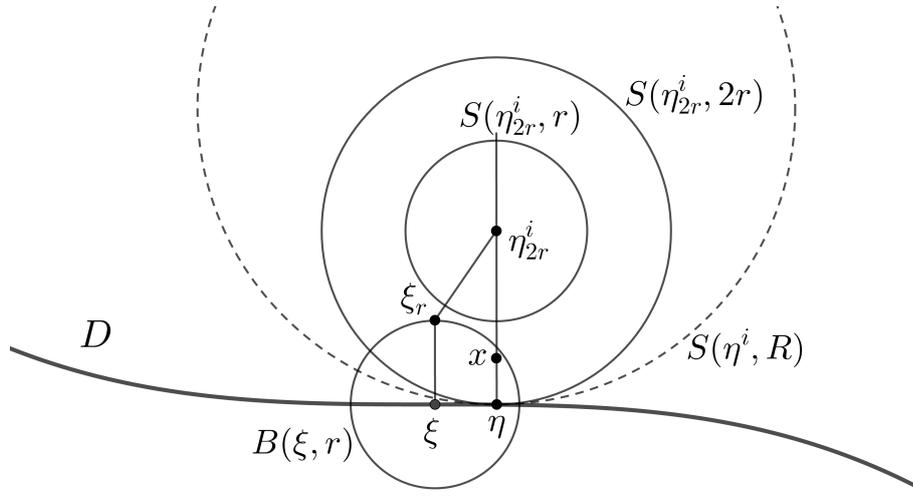
$$\frac{\delta_D(x)/\delta_D(\xi_r)}{u(x)/u(\xi_r)} \leq A, \quad \forall x \in B(\xi, r) \cap D,$$

onde $\xi_r \in [\xi, \xi^i]$ é tal que $\delta_D(\xi_r) = |\xi_r - \xi| = r$.

Prova. Seja $x \in B(\xi, r)$ com $0 < r < R/2$, onde R é da condição da bola. Tome $\eta \in \partial D$ tal que $\delta_D(x) = |\eta - x|$. Isto é possível pois $\{x\}$ é compacto e ∂D é fechado. Sendo D domínio $C^{1,1}$, existe $\eta^i \in D$ tal que $B(\eta^i, R) \subset D$ e $\eta \in S(\eta^i, R)$.

Tome $\eta_{2r}^i \in [\eta, \eta^i]$ tal que $\delta_D(\eta_{2r}^i) = |\eta_{2r}^i - \eta| = 2r (< R)$. Veja Figura 9.

Figura 9 – Estimativa inferior



Fonte: elaborada pelo autor. Adaptado de (AIKAWA *et al.*, 2007).

Observe que $B(\eta_{2r}^i, 2r) \subset B(\xi, 6r) \cap D$. De fato, seja $y \in B(\eta_{2r}^i, 2r)$, ou seja, $|y - \eta_{2r}^i| < 2r$. Daí

$$|y - \eta^i| \leq |y - \eta_{2r}^i| + |\eta_{2r}^i - \eta^i| < 2r + R - 2r = R.$$

Portanto, $B(\eta_{2r}^i, 2r) \subset B(\eta^i, R) \subset D$. Simultaneamente temos

$$\begin{aligned} |y - \xi| &= |y - \eta_{2r}^i + \eta_{2r}^i - \eta + \eta - x + x - \xi| \\ &\leq \underbrace{|y - \eta_{2r}^i|}_{< 2r} + \underbrace{|\eta_{2r}^i - \eta|}_{= 2r} + \underbrace{|\eta - x|}_{< |x - \xi|} + \underbrace{|x - \xi|}_{< r} \\ &< 6r. \end{aligned}$$

Desse modo, $y \in B(\xi, 6r)$ e, por consequência, $B(\eta_{2r}^i, 2r) \subset B(\xi, 6r) \cap D$.

Afirmção 1. *Existem $\epsilon > 0$, e $r_0 > 0$, dependendo de parâmetros universais, tais que $\text{dist}([\xi_r, \eta_{2r}^i], \partial D) \geq \epsilon r$ para $r < r_0$.*

Prova da Afirmção: Para uma demonstração do resultado acima, é suficiente provarmos que o segmento $[\xi_r, \eta_{2r}^i]$ está contido na bola $B(\xi^i, R - \epsilon r)$ para ϵ e r como na afirmação. Nosso trabalho consta em achar tais constantes.

Primeiro veja que ao tomarmos $\epsilon < 1$ teremos que $\xi_r \in B(\xi^i, R - \epsilon r)$. De fato, $|\xi^i - \xi_r| = R - r < R - \epsilon r$. Se conseguirmos mostrar que $\eta_{2r}^i \in B(\xi^i, R - \epsilon r)$, para $r \ll 1$, teremos, por convexidade da bola,

$$[\xi_r, \eta_{2r}^i] \Subset B(\xi^i, R - \epsilon r) \Subset B(\xi^i, R) \subset D. \quad (38)$$

Sem perda de generalidade podemos supor $\xi = 0$ e $\xi^i = R\vec{e}_n$. Pelo Lema 3.4 temos que $\eta_{2r}^i \in B(\xi^i, R - \epsilon r)$ se, e só se,

$$|\eta_{2r}^i - \epsilon r \vec{e}_n| < 2(R - \epsilon r) \cos \theta,$$

onde $\theta := \angle(\vec{e}_n, \eta_{2r}^i - \epsilon r \vec{e}_n)$.

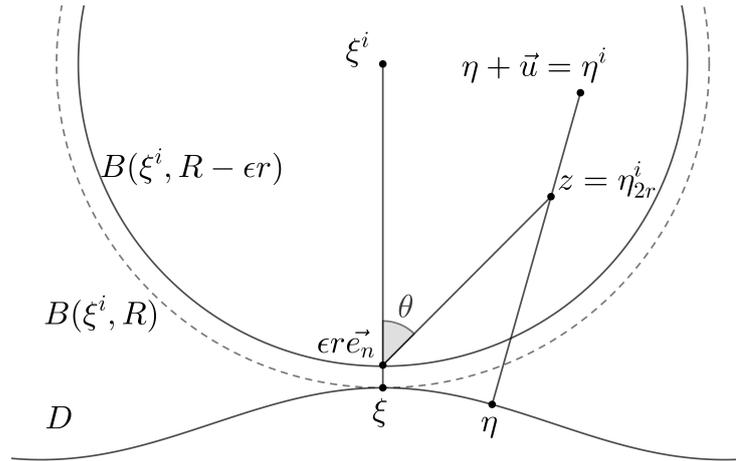
Para simplificar a notação, seja $z := \eta_{2r}^i$. Além disso, sejam $\eta = (\eta', \eta_n)$, $u = (u', u_n) := \vec{\eta}_{2r}^i$ e então $\eta^i = \eta + u$, como ilustrado na Figura 10. Nesse caso,

$$\cos \theta = \left\langle \vec{e}_n, \frac{z - \epsilon r \vec{e}_n}{|z - \epsilon r \vec{e}_n|} \right\rangle = \frac{z_n - \epsilon r}{|z - \epsilon r \vec{e}_n|}.$$

Então

$$|z - \epsilon r \vec{e}_n| < 2(R - \epsilon r) \cos \theta \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{(R - \epsilon r)(z_n - \epsilon r)}{|z - \epsilon r \vec{e}_n|^2}. \quad (39)$$

Figura 10 – Critério para z estar em $B(\xi^i, R - \epsilon r)$



Fonte: elaborada pelo autor.

Observe que $z = \eta + \frac{2r}{R}u$, logo, $z_n = \eta_n + \frac{2r}{R}u_n$. Como já visto em (18), na prova da Proposição 3.7, vale

$$R \left(-1 + \sqrt{1 - \left(\frac{|\eta'|}{R} \right)^2} \right) \leq \eta_n \leq R \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{|\eta'|}{R} \right)^2} \right).$$

E também vale $1 - t \leq \sqrt{1 - t}$ sempre que $0 < t < 1$. Portanto,

$$-R \left(\frac{|\eta'|}{R} \right)^2 \leq \eta_n \leq R \left(\frac{|\eta'|}{R} \right)^2,$$

ou seja,

$$-\frac{|\eta'|^2}{R} \leq \eta_n \leq \frac{|\eta'|^2}{R}.$$

Relembre que $|\xi - \eta| = |\eta| < 2r$ e com maior razão $|\eta'| < 2r$, daí

$$-\frac{(2r)^2}{R} \leq \eta_n \leq \frac{(2r)^2}{R}. \quad (40)$$

Portanto,

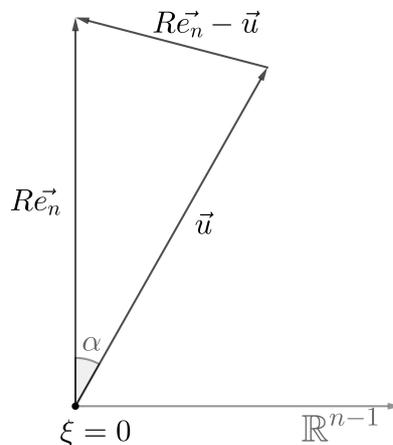
$$\frac{z_n - \epsilon r}{|z - \epsilon r \vec{e}_n|^2} = \frac{\eta_n + \frac{2r}{R}u_n - \epsilon r}{|z - \epsilon r \vec{e}_n|^2} \geq \frac{\frac{-(2r)^2}{R} + \frac{2r}{R}u_n - \epsilon r}{|z - \epsilon r \vec{e}_n|^2} = \frac{r(2u_n - 4r - R\epsilon)}{R|z - \epsilon r \vec{e}_n|^2}. \quad (41)$$

Pelo Lema 3.5 temos $|R\vec{e}_n - u| < |0 - \eta| = |\eta| < 2r$. Se tomarmos $2r < \lambda R$, onde $0 < \lambda < 1$ será escolhido posteriormente, teremos

$$\cos \alpha \geq \frac{2 - \lambda^2}{2}$$

pelo Lema 3.6, onde aqui $\alpha = \angle(e_n, u)$ (Ver Figura 11).

Figura 11 – O triângulo isósceles formado por \vec{u} e $R\vec{e}_n$



Fonte: elaborada pelo autor.

Como

$$u_n = \langle \vec{e}_n, u \rangle = R \left\langle \vec{e}_n, \frac{u}{R} \right\rangle = R \cos \alpha,$$

então

$$u_n \geq R \frac{2 - \lambda^2}{2},$$

e assim, $2u_n \geq R(2 - \lambda^2)$.

Desde que tomamos $2r < \lambda R$, obtivemos $4r < 2\lambda R$ e, como $\epsilon < 1$, $\epsilon R < R$. Portanto, $(2u_n - 4r - R\epsilon) > R(2 - \lambda^2) - 2\lambda R - R = R(1 - 2\lambda - \lambda^2)$. Então, substituindo em (41), teremos

$$\frac{r(2u_n - 4r - R\epsilon)}{R|z - \epsilon r \vec{e}_n|^2} > \frac{rR(1 - 2\lambda - \lambda^2)}{R|z - \epsilon r \vec{e}_n|^2} = \frac{r(1 - 2\lambda - \lambda^2)}{|z - \epsilon r \vec{e}_n|^2}.$$

Agora, como podemos tomar λ tão pequeno quanto quisermos, o escolhemos de modo que $1 - 2\lambda - \lambda^2 > 0$, a saber, $\lambda \in (0, \sqrt{2} - 1)$. Desta escolha, podemos observar que

$$\frac{r(1 - 2\lambda - \lambda^2)}{|z - \epsilon r \vec{e}_n|^2} > \frac{r(1 - 2\lambda - \lambda^2)}{(4 + \epsilon)^2 r^2} = \frac{(1 - 2\lambda - \lambda^2)}{(4 + \epsilon)^2 r},$$

uma vez que

$$|z - \epsilon r \vec{e}_n| \leq |\eta - \epsilon r \vec{e}_n| + |\eta - z| < 2r + \epsilon r + 2r < (4 + \epsilon)r.$$

Todos esses passos, desde (41), nos fizeram ver que

$$\frac{z_n - \epsilon r}{|z - \epsilon r \vec{e}_n|^2} > \frac{(1 - 2\lambda - \lambda^2)}{(4 + \epsilon)^2 r}.$$

Mas como nosso objetivo é o membro direito da equivalência (39), vamos prová-lo.

Usando a desigualdade acima, o fato de $2r < \lambda R$, e de estarmos considerando $\epsilon < 1$, veja que

$$\begin{aligned} \frac{(R - \epsilon r)(z_n - \epsilon r)}{|z - \epsilon r \vec{e}_n|^2} &> \frac{(R - \epsilon r)(1 - 2\lambda - \lambda^2)}{(4 + \epsilon)^2 r} \\ &> \frac{2(R - (\epsilon \lambda R)/2)(1 - 2\lambda - \lambda^2)}{\lambda R(4 + \epsilon)^2} \\ &= \frac{(2 - \epsilon \lambda)(1 - 2\lambda - \lambda^2)}{\lambda(4 + \epsilon)^2}. \end{aligned}$$

Em particular, tomando $\epsilon = \lambda$, acabamos de verificar que

$$\frac{(R - \epsilon r)(z_n - \epsilon r)}{|z - \epsilon r \vec{e}_n|^2} > \frac{(2 - \lambda^2)(1 - 2\lambda - \lambda^2)}{\lambda(4 + \lambda)^2}.$$

Este último indo para $+\infty$ quando λ tende a zero.

Em particular, existe um λ_0 , o qual podemos considerar menor que $\sqrt{2} - 1$, tal que

$$\frac{(2 - \lambda^2)(1 - 2\lambda - \lambda^2)}{\lambda(4 + \lambda)^2} > \frac{1}{2} \quad \forall 0 < \lambda \leq \lambda_0.$$

Isso implica na prova da afirmação, visto que λ dá o controle sobre as escolhas de ϵ e r . ■

Naturalmente não faz diferença supormos $\epsilon = 1/2^{k_0}$, $k_0 \in \mathbb{N}$, pois podemos simplesmente torná-lo menor.

Como

$$|\eta_{2r}^i - \xi_r| \leq |\eta_{2r}^i - x| + |x - \xi_r| < 4r,$$

podemos usar o Lema 4.2, com $m = k_0 + 2$, $\rho = 4r$ e $1/2 < \gamma < 1$ fixo, para garantir que existem 2^{k_0+2} bolas que cobrem $[\xi_r, \eta_{2r}^i]$, centradas em pontos de $[\xi_r, \eta_{2r}^i]$, e todas com raio igual a

$$\gamma \cdot \frac{1}{2^{k_0+2}} \cdot 4r = \gamma\epsilon r.$$

Sejam $\{x_1, \dots, x_{2^{k_0+2}}\}$ os centros das bolas. Como cada $x_i \in [\xi_r, \eta_{2r}^i]$ e temos pela afirmação que $\text{dist}([\xi_r, \eta_{2r}^i], \partial D) \geq \epsilon r$, então

$$B(x_i, \gamma\epsilon r) \subset B(x_i, \epsilon r) \subset D \cap B(\xi, 6r).$$

Note que, sendo u p -harmônica e positiva em $D \cap B(\xi, 6r)$, também será em cada $B(x_i, \epsilon r)$. Com isso, pela Desigualdade de Harnack Refinada (Teorema 2.8), existe $C = C(\gamma) \geq 1$, que independe de u , de r , de i ou de ϵ , tal que para quaisquer $y_1, y_2 \in B(x_i, \gamma\epsilon r)$, vale

$$u(y_1) \leq Cu(y_2).$$

Então, em um sistema semelhante ao da prova da Desigualdade de Harnack generalizada (Teorema 2.9), podemos usar essa cadeia de bolas que cobre $[\xi_r, \eta_{2r}^i]$ para comparar o valor de u em suas extremidades, isto é, existe um $C = C(\gamma) \geq 1$ (o mesmo da equação anterior) para o qual vale

$$u(\xi_r) \leq C^{2^{k_0+2}} u(\eta_{2r}^i).$$

Podemos ir além. Uma vez que

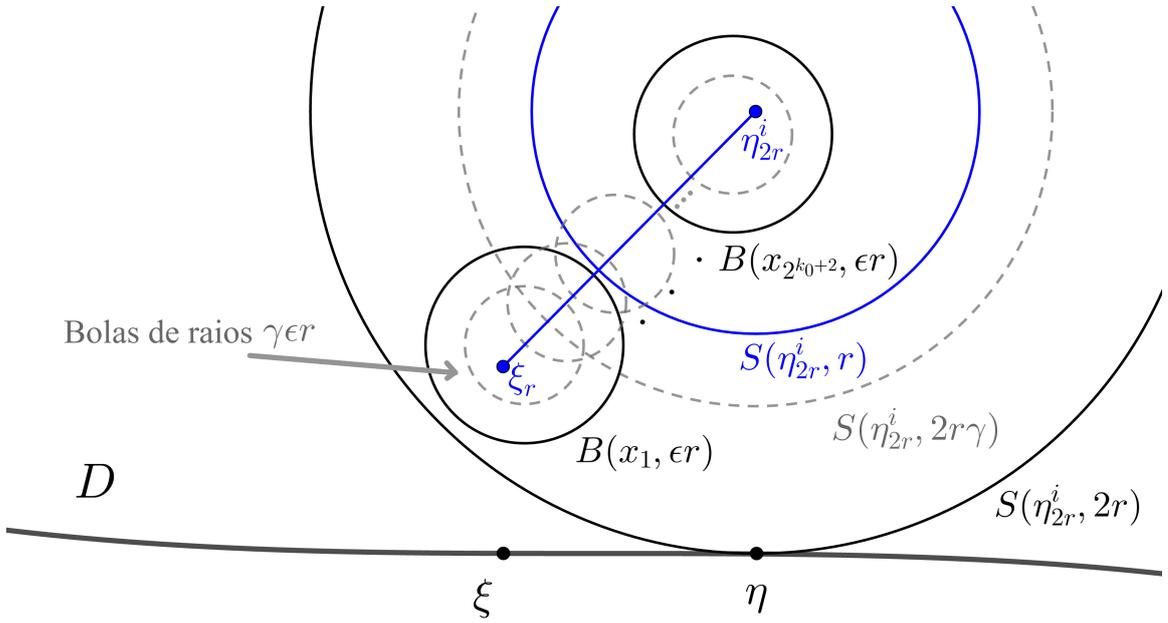
$$\overline{B(\eta_{2r}^i, r)} \subset B(\eta_{2r}^i, 2r\gamma) \subset B(\eta_{2r}^i, 2r) \subset D \cap B(\xi, 6r),$$

a mesma constante C pode ser usada para comparar η_{2r}^i com qualquer $y \in S(\eta_{2r}^i, r)$.

Juntando todos os passos, concluímos que existe uma constante $K = K(\gamma, k_0) = C^{2^{k_0+2}+1} \geq 1$, que independe de u e de r , na qual se faz válida a comparação entre os valores de u em todos os pontos de $S := [\xi_r, \eta_{2r}^i] \cup S(\eta_{2r}^i, r)$. Figura 12.

Em particular vale

$$u(\xi_r) \approx u(\eta_{2r}^i) \approx u(y), \quad \forall y \in S(\eta_{2r}^i, r). \quad (42)$$

Figura 12 – Cobertura de S 

Fonte: elaborada pelo autor.

Nosso objetivo é comparar $\frac{u}{u(\xi_r)}$ e $g := G(\cdot, \eta_{2r}^i)$ no anel $\mathcal{A} := B(\eta_{2r}^i, 2r) \setminus B(\eta_{2r}^i, r)$. Note que em \mathcal{A} temos

$$\Delta_p u = 0 = \Delta_p g,$$

então, pelo Princípio da Comparação (Teorema 2.6), é suficiente compará-las na fronteira de \mathcal{A} .

- Em $S(\eta_{2r}^i, 2r)$:

Seja $y \in S(\eta_{2r}^i, 2r)$. Por hipótese $\frac{u(y)}{u(\xi_r)} \geq 0$, enquanto que

$$g(y) = G_{2r}(y, \eta_{2r}^i) = \begin{cases} \log\left(\frac{2r}{|y - \eta_{2r}^i|}\right), & \text{se } p = n, \\ \left(\frac{|y - \eta_{2r}^i|}{2r}\right)^{\frac{p-n}{p-1}} - 1, & \text{se } 1 < p < n, \\ 1 - \left(\frac{|y - \eta_{2r}^i|}{2r}\right)^{\frac{p-n}{p-1}}, & \text{se } p > n. \end{cases}$$

Como $|y - \eta_{2r}^i| = 2r$, podemos concluir que $g(y) = 0$, independente do caso.

Logo $\frac{u}{u(\xi_r)} \geq g$ em $S(\eta_{2r}^i, 2r)$.

- Em $S(\eta_{2r}^i, r)$:

Seja agora $y \in S(\eta_{2r}^i, r)$. Aqui

$$g(y) = G_{2r}(y)(\eta_{2r}^i) = \begin{cases} \log\left(\frac{2r}{|y - \eta_{2r}^i|}\right) & = \log 2, & \text{se } p = n, \\ \left(\frac{|y - \eta_{2r}^i|}{2r}\right)^{\frac{p-n}{p-1}} - 1 & = 2^{\frac{n-p}{p-1}} - 1, & \text{se } 1 < p < n, \\ 1 - \left(\frac{|y - \eta_{2r}^i|}{2r}\right)^{\frac{p-n}{p-1}} & = 1 - 2^{\frac{n-p}{p-1}}, & \text{se } p > n, \end{cases}$$

ou seja, g é constante. Por outro lado, por (42), $\frac{u}{u(\xi_r)} \approx 1$. Logo, existe constante $\tilde{A} > 1$ tal que

$$\tilde{A} \frac{u(y)}{u(\xi_r)} \geq g(y), \quad \forall y \in S(\eta_{2r}^i, r).$$

Juntando os dois resultados, podemos concluir que

$$\tilde{A} \frac{u(y)}{u(\xi_r)} \geq g(y), \quad \forall y \in \partial\mathcal{A}.$$

Usando o Princípio da Comparação (Teorema 2.6) concluímos que $\tilde{A} \frac{u}{u(\xi_r)} \geq g$ em \mathcal{A} .

Observe que $x \in [\eta, \eta_{2r}^i] \cap \mathcal{A}$. De fato, como η é o elemento de ∂D que satisfaz a distância para x temos que o vetor ηx é perpendicular ao plano tangente a $S(\eta^i, R)$ no ponto η . O mesmo vale para o vetor $\eta \eta^i$. A justificativa da observação é concluída lembrando que $\delta_D(x) = |x - \eta| < r$, daí $x \in \mathcal{A}$.

Como $x \in [\eta, \eta_{2r}^i] \cap \mathcal{A}$, decorre que

$$\tilde{A} \frac{u(x)}{u(\xi_r)} \geq g(x) \approx \frac{\delta_D(x)}{r} \tag{43}$$

pelo Lema 4.4 a seguir. Obtemos assim um $A \geq 1$ tal que

$$A \frac{u(x)}{u(\xi_r)} \geq \frac{\delta_D(x)}{r} = \frac{\delta_D(x)}{\delta_D(\xi_r)},$$

como queríamos.

O R_0 é o mínimo entre $R/2$ e o raio obtido da afirmação. \square

Lema 4.4. *Vale $g \approx \frac{\delta_D(\cdot)}{r}$ em $[\eta, \eta_{2r}^i] \cap \mathcal{A}$.*

Prova. Note que

$$g(x) = \begin{cases} \log\left(\frac{2r}{|x - \eta_{2r}^i|}\right) & = \log\left(\frac{2r}{2r - \delta_D(x)}\right), & \text{se } p = n, \\ \left(\frac{|x - \eta_{2r}^i|}{2r}\right)^{\frac{p-n}{p-1}} - 1 & = \left(\frac{2r - \delta_D(x)}{2r}\right)^{\frac{p-n}{p-1}} - 1, & \text{se } 1 < p < n, \\ 1 - \left(\frac{|x - \eta_{2r}^i|}{2r}\right)^{\frac{p-n}{p-1}} & = 1 - \left(\frac{2r - \delta_D(x)}{2r}\right)^{\frac{p-n}{p-1}}, & \text{se } p > n. \end{cases}$$

Fazendo $y = \delta_D(x)/r$ devemos provar que

$$y \approx \begin{cases} \log\left(\frac{2}{2-y}\right), & \text{se } p = n, \\ \left(\frac{2-y}{2}\right)^{\frac{p-n}{p-1}} - 1, & \text{se } 1 < p < n, \\ 1 - \left(\frac{2-y}{2}\right)^{\frac{p-n}{p-1}}, & \text{se } p > n. \end{cases} \quad \text{para } y \in (0, 1).$$

Como os três casos são análogos, faremos o caso em que $p > n$. Vamos mostrar que

$$1 - \left(\frac{2-y}{2}\right)^{(p-n)/(p-1)} \approx y \quad \text{para } y \in (0, 1)$$

ou, equivalentemente,

$$f(y) := \frac{1 - \left(\frac{2-y}{2}\right)^{\frac{p-n}{p-1}}}{y} \approx 1 \quad \text{para } y \in (0, 1).$$

Para isto é suficiente mostrar que existe uma constante $C \geq 1$ para o qual vale

$$\frac{1}{C} \leq f(y) \leq C \quad \text{para todo } y \in (0, 1). \quad (44)$$

Analisando o sinal da derivada, podemos concluir que a função f é decrescente no intervalo estudado, com os seguintes valores:

Fazendo $a = (p-n)/(p-1)$,

$$f(1) = \frac{2^a - 1}{2^a}$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{a}{2}.$$

Basta tomar então

$$C := \max \left\{ \frac{a}{2}, \frac{2^a}{2^a - 1} \right\}$$

e automaticamente estaremos satisfazendo (44). \square

Por toda a discussão que antecede a equação (42), temos que \tilde{A} independe de r , dependendo apenas de parâmetros universais. Assim também é a constante do lema acima, uma vez que independe de y , independe de r . Isso permite concluir que a constante A , do Princípio de Hopf, independe de r desde que tomemos R_0 suficientemente pequeno.

4.2 Estimativa superior

Para provar a Desigualdade de Harnack até a fronteira temos como um dos principais ingredientes a estimativa de Carleson. Apresentada em (CARLESON, 1962), a Estimativa de Carleson e o PHF têm caminhado muito próximos ao longo de todos esses anos.

Em linguagem mais moderna, dizemos que vale a estimativa de Carleson em um domínio D se existem $\tilde{A} > 1$ e $\tilde{R} > 0$ satisfazendo, para quaisquer $\xi \in \partial D$ e $0 < \tilde{r} < \tilde{R}$, a condição de que para toda $u \geq 0$ função harmônica em $D \cap B(\xi, \tilde{A}\tilde{r})$, que se anula em $\partial D \cap B(\xi, \tilde{A}\tilde{r})$, vale:

Se $y \in D \cap B(\xi, \tilde{r})$ é tal que $\delta_D(y) \geq \varepsilon\tilde{r}$, onde $\varepsilon \in (0, 1)$, então

$$u(x) \leq C_\varepsilon u(y), \quad \forall x \in D \cap B(\xi, \tilde{r}), \quad (45)$$

para $C_\varepsilon = C_\varepsilon(D, \tilde{A}, \tilde{R}, \varepsilon) > 1$.

Automaticamente podemos pensar numa mesma noção para o p -Laplaciano. Neste caso, a boa notícia é que vale a estimativa de Carleson desde que o domínio D seja de classe $C^{1,1}$. Formalmente segue a estimativa de Carleson para o operador p -Laplaciano.

Teorema 4.5. *Seja D domínio $C^{1,1}$. Então existem $\tilde{A} > 1$ e $\tilde{R} > 0$, constantes universais, como acima, e também $C_\varepsilon = C_\varepsilon(D, \tilde{A}, \tilde{R}, \varepsilon) > 1$ satisfazendo (45) para toda $u \geq 0$ p -harmônica em $D \cap B(\xi, \tilde{A}\tilde{r})$ que se anula em $\partial D \cap B(\xi, \tilde{A}\tilde{r})$.*

Não sendo nosso principal objetivo desta dissertação, não provaremos, portanto, a Estimativa de Carleson como apresentada acima. Caso interesse o leitor, referenciamos (AIKAWA, SHANMUGALINGAM *et al.*, 2005), onde os autores provam o teorema anterior para domínios uniforme, donde vale automaticamente para domínios com condição da bola, uma vez que todo domínio $C^{1,1}$ é uniforme. No entanto apresentamos no APÊNDICE A a demonstração da seguinte Estimativa de Carleson, suficiente para nossos propósitos.

Teorema 4.6 (Estimativa de Carleson). *Dado D domínio $C^{1,1}$, existem $\tilde{C} \geq 1$, $\tilde{R} > 0$ tais que para todo $\xi \in \partial D$ e todo $\tilde{r} \in (0, \tilde{R})$ vale:*

Se u é não negativa e p -harmônica em $B(\xi, \tilde{r}) \cap D$, anulando-se continuamente em $B(\xi, \tilde{r}) \cap \partial D$, então

$$u(x) \leq \tilde{C}u(y), \quad \forall x \in B\left(\xi, \frac{\tilde{r}}{2}\right) \cap D,$$

onde $y \in D$ é tal que $\delta_D(y) = \tilde{r}/2$.

Decorre da Estimativa de Carleson a seguinte proposição, de suma importância para a prova do PHF.

Proposição 4.7. *Seja D domínio $C^{1,1}$. Existem $A \geq 1$ e $R_0 > 0$ com a seguinte propriedade:*

Dados $\xi \in \partial D$ e $r \in (0, R_0)$, se $u > 0$ é função p -harmônica em $D \cap B(\xi, 14r)$ anulando-se em $\partial D \cap B(\xi, 14r)$, então

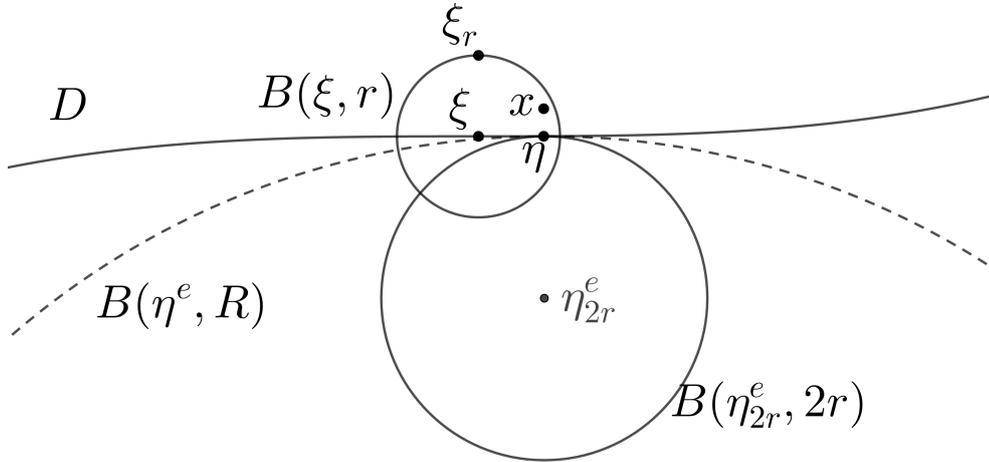
$$\frac{u(x)/u(\xi_r)}{\delta_D(x)/\delta_D(\xi_r)} \leq A, \quad \forall x \in B(\xi, r) \cap D,$$

onde $\xi_r \in [\xi, \xi^i]$ é tal que $\delta_D(\xi_r) = |\xi - \xi_r| = r$.

Prova. Desde que D é $C^{1,1}$ vale a estimativa de Carleson, Teorema 4.6, com $\tilde{R} > 0$ e $\tilde{C} \geq 1$. Seja $R_0 = \min \left\{ \tilde{R}/14, R/14 \right\}$, onde $R > 0$ é o da condição da bola, e tome arbitrariamente ξ e r como no enunciado.

Considerando $x \in D \cap B(\xi, r)$, sabemos que existe $\eta \in \partial D$ tal que $\delta_D(x) = |\eta - x|$, pois $\{x\}$ é compacto e ∂D é fechado. Pela condição da bola em η , existe η^e tal que $B(\eta^e, R) \subset D^c$ e $\eta \in S(\eta^e, R)$. Escolha η_{2r}^e como sendo o elemento de $[\eta, \eta^e]$ que satisfaz $|\eta_{2r}^e - \eta| = 2r$. Não é difícil ver que $B(\eta_{2r}^e, 2r) \subset B(\eta^e, R) \subset D^c$. Figura 13 a seguir.

Figura 13 – Posição dos elementos



Fonte: elaborada pelo autor.

Agora veja também que

$$|\eta_{2r}^e - \xi| \leq \underbrace{|\eta_{2r}^e - \eta|}_{=2r} + \underbrace{|\eta - x|}_{\leq |x - \xi|} + \underbrace{|x - \xi|}_{< r} < 4r. \quad (46)$$

Portanto, $\eta_{2r}^e \in B(\xi, 4r)$. Além disso

$$x \in \overline{B(\eta_{2r}^e, 3r)} \subset B(\xi, 7r), \quad (47)$$

uma vez que

$$|\eta_{2r}^e - x| \leq \underbrace{|\eta_{2r}^e - \eta|}_{=2r} + \underbrace{|\eta - x|}_{<r} < 3r,$$

e se $y \in B(\eta_{2r}^e, 3r)$ temos, usando (46),

$$|y - \xi| = |y - \eta_{2r}^e| + |\eta_{2r}^e - \xi| < 3r + 4r = 7r.$$

Seja ξ_{7r} o elemento de $[\xi, \xi^i]$ que satisfaz $\delta_D(\xi_{7r}) = 7r$ ($\leq R/2$).

Definindo $\tilde{r} := 14r$ teremos que $\tilde{r} < \tilde{R}$ e u é p -harmônica e positiva em $B(\xi, \tilde{r}) \cap D$. Podemos então usar o Teorema 4.6 para concluir que

$$u(z) \leq \tilde{C}u(\xi_{7r}), \quad \forall z \in B\left(\xi, \frac{\tilde{r}}{2}\right) \cap D = B(\xi, 7r) \cap D, \quad (48)$$

uma vez que $\delta_D(\xi_{7r}) = \tilde{r}/2$.

Claramente $[\xi_r, \xi_{7r}] \subset \overline{B(\xi^i, R-r)}$ e então $\text{dist}([\xi_r, \xi_{7r}], \partial D) \geq r$. Nesse caso podemos usar o Lema 4.2 e argumentos semelhantes aos usados para obter a relação (42), para cobrir o segmento $[\xi_r, \xi_{7r}]$ de comprimento $6r$, por bolas de raio γr de modo que as bolas de mesmos centros e raio r ainda estejam contidas em $D \cap B(\xi, 14r)$, onde $\gamma < 1$ é fixo.

Com isso obtemos

$$u(\xi_{7r}) \leq \overline{C}u(\xi_r), \quad (49)$$

para $\overline{C} = L^m$, onde $L \geq 1$ só depende de n e p (e de γ , mas este está fixado), e m é a quantidade de bolas para cobrir o segmento, dependendo apenas de γ e independentemente de r .

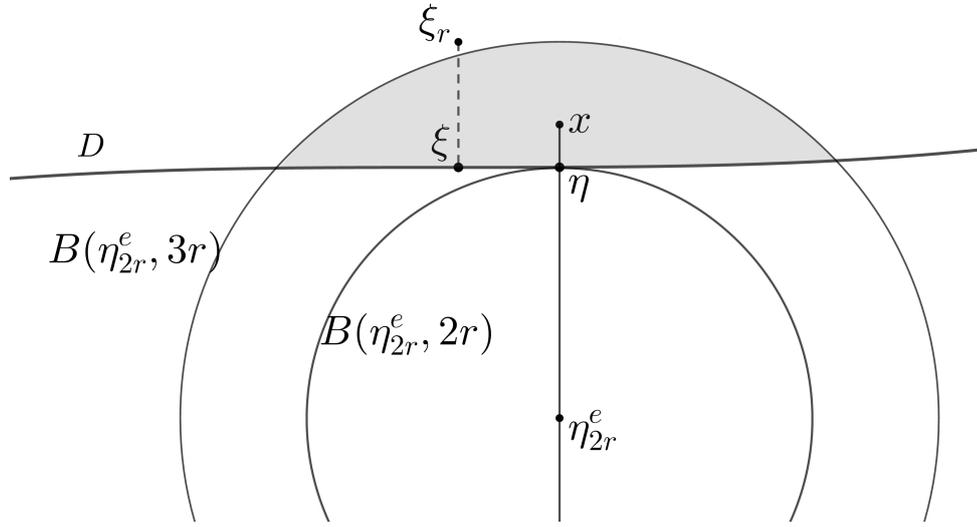
Ao juntarmos (48) e (49), concluímos

$$u(z) \leq Ku(\xi_r), \quad \forall z \in B(\xi, 7r) \cap D. \quad (50)$$

Em particular, $u \leq Ku(\xi_r)$ em $S(\eta_{2r}^e, 3r) \cap D$, por (47). Nosso objetivo é comparar as funções u e $h = -G_{2r}(\cdot, \eta_{2r}^e)$ no conjunto demarcado na Figura 14.

Quando $y \in S(\eta_{2r}^e, 3r)$ temos

Figura 14 – Área de comparação



Fonte: elaborada pelo autor.

$$G_{2r}(y, \eta_{2r}^e) = \begin{cases} \log\left(\frac{2r}{|y - \eta_{2r}^e|}\right) & = \log\left(\frac{2}{3}\right), & \text{se } p = n, \\ \left(\frac{|y - \eta_{2r}^e|}{2r}\right)^{\frac{p-n}{p-1}} - 1 & = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{p-n}{p-1}} - 1, & \text{se } 1 < p < n, \\ 1 - \left(\frac{|y - \eta_{2r}^e|}{2r}\right)^{\frac{p-n}{p-1}} & = 1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{p-n}{p-1}}, & \text{se } p > n. \end{cases}$$

Logo, $h(y) = -G_{2r}(y, \eta_{2r}^e) = C > 0$ para todo $y \in S(\eta_{2r}^e, 3r)$, onde $C > 0$ é constante que depende apenas de parâmetros universais, e assim, por (50), existe $\tilde{A} > 1$ tal que

$$\frac{u(y)}{u(\xi_r)} < \tilde{A}h(y), \quad \forall y \in S(\eta_{2r}^e, 3r).$$

Desde que $h = -G_{2r}(\cdot, \eta_{2r}^e)$ é função positiva e p -harmônica em $\mathbb{R}^n \setminus B(\eta_{2r}^e, 2r)$, e $u \equiv 0$ em $\partial D \cap B(\eta_{2r}^e, 3r) \subset \partial D \cap B(\xi, 7r)$ segue do Princípio da Comparação (Teorema 2.6) que

$$\frac{u(y)}{u(\xi_r)} \leq \tilde{A}h(y), \quad \forall y \in B(\eta_{2r}^e, 3r) \cap D.$$

Em particular, já que $x \in B(\eta_{2r}^e, 3r) \cap D$, temos

$$\frac{u(x)}{u(\xi_r)} \leq \tilde{A}h(x). \quad (51)$$

Agora note que x está na extensão do segmento $[\eta, \eta_{2r}^e]$ e

$$|x - \eta| = \delta_D(x) < r.$$

Assim $|x - \eta_{2r}^e| = \delta_D(x) + 2r$ e, em x , h torna-se

$$h(x) = -G_{2r}(x, \eta_{2r}^e) = \begin{cases} \log\left(\frac{2r + \delta_D(x)}{2r}\right), & \text{se } p = n, \\ 1 - \left(\frac{2r + \delta_D(x)}{2r}\right)^{\frac{p-n}{p-1}}, & \text{se } 1 < p < n, \\ \left(\frac{2r + \delta_D(x)}{2r}\right)^{\frac{p-n}{p-1}} - 1, & \text{se } p > n. \end{cases}$$

Pelo Lema 4.8 a seguir, fazendo $y = \delta_D(x)/r$, temos $h(x) \approx \delta_D(x)/r$. Juntando este fato com (51) garantimos a existência de um $A > 1$, dependendo somente de parâmetros globais, que satisfaz

$$\frac{u(x)}{u(\xi_r)} \leq A \frac{\delta_D(x)}{r}$$

e, portanto,

$$\frac{u(x)/u(\xi_r)}{\delta_D(x)/\delta_D(\xi_r)} \leq A.$$

□

Lema 4.8. *Em $(0, 1)$,*

$$y \approx \begin{cases} \log\left(\frac{2+y}{2}\right), & \text{se } p = n, \\ 1 - \left(\frac{2+y}{2}\right)^{\frac{p-n}{p-1}}, & \text{se } 1 < p < n, \\ \left(\frac{2+y}{2}\right)^{\frac{p-n}{p-1}} - 1, & \text{se } p > n. \end{cases}$$

Prova. Faremos o caso $n = p$, sabendo que os demais seguem exatamente do mesmo modo.

Provar que $\log \frac{2+y}{2} \approx y$ em $(0, 1)$, é equivalente a provar que

$$\frac{\log \frac{2+y}{2}}{y} \approx 1 \quad \text{em } (0, 1).$$

Para isso é suficiente mostrar que existe $C > 1$ tal que

$$\frac{1}{C} \leq \frac{\log \frac{2+y}{2}}{y} \leq C \quad \text{em } (0, 1).$$

Fazendo alguns cálculos conclui-se que $\log((2+y)/2)/y$ é função decrescente em $(0, 1)$. Além disso, por L'Hospital,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\log \frac{2+y}{2}}{y} \right) \stackrel{*}{=} \frac{1}{2} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{2}{2+y} \right) \right) = \frac{1}{2}$$

e

$$\lim_{y \rightarrow 1} \left(\frac{\log \frac{2+y}{2}}{y} \right) = \log \left(\frac{3}{2} \right).$$

Basta tomar

$$C = \max \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{\log(3/2)} \right\} = \frac{1}{\log(3/2)}.$$

□

4.3 PHF para funções p -harmônicas

O principal resultado desta dissertação é o seguinte princípio de Harnack de fronteira, que enunciaremos novamente, por comodidade.

Teorema 4.9. *Sejam D domínio limitado de classe $C^{1,1}$ e $1 < p < \infty$. Existem constantes $A, C > 1$, $R_0 > 0$ com a seguinte propriedade: Dados $0 < r < R_0$ e $\xi \in \partial D$, se u e v são funções p -harmônicas positivas em $D \cap B(\xi, Ar)$ se anulando em $\partial D \cap B(\xi, Ar)$, então*

$$\frac{u(x)/u(y)}{v(x)/v(y)} \leq C, \quad \forall x, y \in D \cap B(\xi, r).$$

Em palavras simples podemos concluir que em domínios que satisfazem a condição da bola, quaisquer funções p -harmônicas, como nas condições acima, têm a propriedade de decaírem a mesma taxa ou velocidade, a medida que seus valores são tomados próximos da fronteira. Sua prova apoia-se somente nas Proposições 4.3 e 4.7.

Prova. Sejam $R_0 = \min\{R_{0_1}, R_{0_2}\}$ e $A = 14 = \max\{6, 14\}$, onde R_{0_1} é da Proposição 4.3 e R_{0_2} da Proposição 4.7. Tome arbitrariamente um $\xi \in \partial D$ e $r \in (0, R_0)$. Além disso, tome ξ_r para ser o elemento de $[\xi, \xi^i]$ que satisfaz $\delta_D(\xi_r) = |\xi - \xi_r| = r$. Suponha que u, v são funções p -harmônicas e positivas em $D \cap B(\xi, Ar)$ se anulando em $\partial D \cap B(\xi, Ar)$. Juntando Proposição 4.3 e Proposição 4.7 obtemos:

$$\frac{u(x)}{u(\xi_r)} \leq A_2 \frac{\delta_D(x)}{\delta_D(\xi_r)} \leq A_2 A_1 \frac{v(x)}{v(\xi_r)}.$$

Donde concluímos,

$$\frac{u(x)/u(\xi_r)}{v(x)/v(\xi_r)} \leq A_2 A_1. \tag{52}$$

Analogamente temos:

$$\frac{v(y)}{v(\xi_r)} \leq A_2 \frac{\delta_D(y)}{\delta_D(\xi_r)} \leq A_2 A_1 \frac{u(y)}{u(\xi_r)}.$$

E assim,

$$\frac{v(y)/v(\xi_r)}{u(y)/u(\xi_r)} \leq A_2 A_1. \quad (53)$$

Por (52) e (53) podemos concluir que

$$\begin{aligned} \frac{u(x)/u(y)}{v(x)/v(y)} &= \frac{u(x)}{u(y)} \frac{v(y)}{v(x)} \\ &= \frac{u(x)/u(\xi_r)}{u(y)/u(\xi_r)} \frac{v(y)/v(\xi_r)}{v(x)/v(\xi_r)} \\ &= \frac{u(x)/u(\xi_r)}{v(x)/v(\xi_r)} \frac{v(y)/v(\xi_r)}{u(y)/u(\xi_r)} \\ &\leq (A_2 A_1)^2. \end{aligned}$$

A prova termina tomando $C = (A_2 A_1)^2 > 1$.

□

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho demonstramos o PHF para funções p -harmônicas positivas. Mais que isso, nesta demonstração conseguimos provar que em domínios $C^{1,1}$ há um bom comportamento das soluções no sentido de conseguirmos estimar a taxa de decaimento, a medida que nos aproximamos da fronteira, em função da distância do ponto ao bordo.

Provamos que os domínios $C^{1,1}$ podem ser identificados como aqueles que satisfazem a condição da bola. Para provar que em um domínio $C^{1,1}$ podemos colocar internamente e externamente uma bola com um raio que não depende do ponto, apenas usamos uma função auxiliar da qual seu gráfico é a região inferior de uma esfera, donde para r suficientemente pequeno podemos concluir que esta esfera está totalmente contida no domínio. Quanto a recíproca, supondo que o domínio satisfaça a condição da bola, a tarefa foi um pouco mais complexa. Começamos definindo a função candidata a ser de classe $C^{1,1}$. Nesta etapa o Lema das quatro bolas foi fundamental. Depois provamos que a função é Lipschitz e então usamos isso para mostrar a diferenciabilidade. Por fim, para constatar que o gradiente é Lipschitz usamos fortemente o Lema 3.10.

Provamos o PHF no último capítulo. Usamos de propriedades de funções p -harmônicas e exploramos a geometria do domínio. Condição da bola interior, Desigualdade de Harnack, Princípio da Comparação, solução fundamental, foram os elementos principais que conduziram a demonstração do Princípio de Hopf, que versa sobre uma estimativa inferior do PHF. Para a estimativa superior, usamos a condição da bola exterior e também o Princípio da Comparação mas, sem dúvidas, a Estimativa de Carleson é quem desempenha papel principal nessa etapa da demonstração. Em ambos os casos, sempre tivemos um norte: buscar comparar a função p -harmônica u com a função $\delta_D(\cdot)$, distância do ponto até a fronteira. Isso se dá pela boa regularidade do domínio.

Na prova do PHF se fez nítida a dependência da função p -harmônica G , definida por (2), tanto na estimativa inferior quanto na superior. Isso diz muito sobre possíveis generalizações desta prova para operadores mais gerais. Para tê-la como base, seu operador deve dispor de uma função que desempenhe papel semelhante.

Podemos citar, por exemplo, (ADAMOWICZ e LUNDSTRÖM, 2016) onde os autores provam para um operador que generaliza o p -Laplaciano, uma vez que em (ADAMOWICZ e LUNDSTRÖM, 2016) p é também uma função de x . A prova é basicamente a que foi apresentada aqui, apenas com adaptações, nada triviais, dos resultados principais.

Ainda sobre generalizações, também fica visível a dependência da condição da bola no domínio, o que deixa de fora muitos domínios para o qual não podemos imitar a prova, por exemplo a enorme classe de domínios Lipschitz. Apesar disso, outras provas surgem, com outros argumentos. Uma boa referência é (LEWIS e NYSTRÖM, 2007), onde temos uma demonstração do Princípio de Harnack de Fronteira para o p -Laplaciano em domínios Lipschitz.

REFERÊNCIAS

- ADAMOWICZ, Tomasz; LUNDSTRÖM, Niklas LP. The boundary Harnack inequality for variable exponent p -Laplacian, Carleson estimates, barrier functions and $p(\cdot)$ -harmonic measures. **Annali di Matematica Pura ed Applicata**, Germany, v. 195, n. 2, p. 623–658, 2016.
- AIKAWA, Hiroaki. Boundary Harnack principle and Martin boundary for a uniform domain. **Journal of the Mathematical Society of Japan**, Japan, v. 53, n. 1, p. 119–145, 2001.
- AIKAWA, Hiroaki. Potential-theoretic characterizations of nonsmooth domains. **Bulletin of the London Mathematical Society**, London, v. 36, n. 4, p. 469–482, 2004.
- AIKAWA, Hiroaki. Equivalence between the boundary Harnack principle and the Carleson estimate. **Mathematica Scandinavica**, Denmark, v. 103, n. 1, p. 61–76, 2008.
- AIKAWA, Hiroaki; KILPELÄINEN, Tero; SHANMUGALINGAM, Nageswari; ZHONG, Xiao. Boundary Harnack principle for p -harmonic functions in smooth Euclidean domains. **Potential Analysis**, Netherlands, v. 26, n. 3, p. 281–301, 2007.
- AIKAWA, Hiroaki; SHANMUGALINGAM, Nageswari; *et al.* Carleson type estimates for p -harmonic functions and the conformal Martin boundary of John domains in metric measure spaces. **The Michigan Mathematical Journal**, Michigan, v. 53, n. 1, p. 165–188, 2005.
- ANCONA, Alano. Principe de Harnack à la frontière et théorème de Fatou pour un opérateur elliptique dans un domaine lipschitzien. **Annales de l’Institut Fourier**, Grenoble, v. 28, n. 4, p. 169–213, 1978.
- BAÑUELOS, Rodrigo; BASS, Richard F; BURDZY, Krzysztof. Hölder domains and the boundary Harnack principle. **Duke Math. J.**, Durham, v. 64, n. 1, p. 195–200, 1991.
- BASS, Richard F; BURDZY, Krzysztof. A boundary Harnack principle in twisted Holder domains. **Annals of Mathematics**, United States, v. 134, n. 2, p. 253–276, 1991.
- BENEDIKT, Jiri; GIRG, Petr; KOTRLA, Lukáš; TAKAC, Peter. Origin of the p -Laplacian and A. Missbach. **Electronic Journal of Differential Equations**, United States, v. 2018, n. 16, p. 1–17, 2018.
- BRAGA, J Ederson M. A new proof of the Phragmén–Lindelöf Theorem for fully nonlinear equations. **Milan Journal of Mathematics**, Switzerland, v. 85, n. 2, p.

247–256, 2017.

BRAGA, J Ederson M; MOREIRA, Diego. Classification of nonnegative g -harmonic functions in half-spaces. **Potential Analysis**, Netherlands, v. 55, p. 1–19, 2020.

BRAGA, José Ederson Melo. **Problemas variacionais de fronteira livre com duas fases e resultados do tipo Phragmén-Lindelof regidos por equações elípticas não lineares singulares/degeneradas**. 2015. 126 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015.

CARLESON, Lennart. On the existence of boundary values for harmonic functions in several variables. **Arkiv för matematik**, Sweden, v. 4, n. 5, p. 393–399, 1962.

DAHLBERG, Björn EJ. Estimates of harmonic measure. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, Berlin, v. 65, n. 3, p. 275–288, 1977.

GILBARG, David; TRUDINGER, Neil S. **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order**. Berlin: Springer, 2001. Reimpressão da edição de 1998.

GLOWINSKI, Roland; RAPPAZ, Jacques. Approximation of a nonlinear elliptic problem arising in a non-newtonian fluid flow model in glaciology. **Mathematical Modelling and Numerical Analysis** = Modélisation Mathématique et Analyse Numérique, Paris, v. 37, n. 1, p. 175–186, 2003.

HARNACK, Axel. **Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentials und der eindeutigen Potentialfunktion in der Ebene**. Leipzig: B.G. Teubner, 1887.

JERISON, David S; KENIG, Carlos E. Boundary behavior of harmonic functions in non-tangentially accessible domains. **Advances in Mathematics**, Belgium, v. 46, n. 1, p. 80–147, 1982.

KASSMANN, Moritz. Harnack inequalities: an introduction. **Boundary Value Problems**, London, v. 2007, p. 1–21, 2007.

KELLOGG, Oliver D. **Foundations of potential theory**. Berlin: Julius Springer, 1929.

KEMPER, John T. A boundary Harnack principle for Lipschitz domains and the principle of positive singularities. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, United States, v. 25, n. 3, p. 247–255, 1972.

KEMPER, John T. A correction to: A boundary Harnack principle for lipschitz domains and the principle of positive singularities. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, United States, v. 29, n. 5, p. 555–555, 1976.

LEWICKA, Marta; PERES, Yuval. Which domains have two-sided supporting unit spheres at every boundary point? **Expositiones Mathematicae**, Germany, v. 38, n. 4, 2019.

LEWIS, John L; NYSTRÖM, Kaj. Boundary behaviour for p harmonic functions in Lipschitz and starlike Lipschitz ring domains. **Annales scientifiques de l'École normale supérieure**, France, v. 40, n. 5, p. 765–813, 2007.

LIEBERMAN, Gary M. The natural generalization of the natural conditions of ladyzhenskaya and urall'tseva for elliptic equations. **Communications in Partial Differential Equations**, United States, v. 16, n. 2-3, p. 311–361, 1991.

LINDQVIST, Peter. **Notes on the stationary p-Laplace equation**. New York: Springer, 2019.

MASTORAKIS, Nikos; FATHABADI, Hassan. On the solution of p-Laplacian for non-Newtonian fluid flow. **WSEAS Transactions on Mathematics**, Atenas, v. 8, n. 6, p. 238–245, 2009.

MOSER, Jürgen. On Harnack's theorem for elliptic differential equations. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, United States, v. 14, n. 3, p. 577–591, 1961.

POINCARÉ, Henri. Sur les Equations aux Dérivées Partielles de la Physique Mathématique. **American Journal of Mathematics**, United States, v. 12, n. 3, p. 211–294, 1890.

SERRIN, James. A Harnack inequality for nonlinear equations. **Bulletin of the American Mathematical Society**, United States, v. 69, n. 4, p. 481–486, 1963.

SERRIN, James. Local behavior of solutions of quasi-linear equations. **Acta Mathematica**, Sweden, v. 111, n. 1, p. 247–302, 1964.

TRUDINGER, Neil S. On Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, United States, v. 20, n. 4, p. 721–747, 1967.

WU, Jang-Mei G. Comparisons of kernel functions boundary Harnack principle and relative Fatou theorem on Lipschitz domains. **Annales de l'Institut Fourier**, Grenoble, v. 28, n. 4, p. 147–167, 1978.

APÊNDICE A – ESTIMATIVA DE CARLESON

Existem na literatura diferentes provas para a Estimativa de Carleson. No entanto, para esta versão abaixo apresentada, seguiremos o recente artigo (BRAGA e MOREIRA, 2020), cujos resultados podem ser encontrados, de maneira mais detalhada, em (BRAGA, 2015). Faremos pequenas alterações uma vez que lá é feito para um domínio um pouco melhor. Entretanto, o autor faz para um operador que generaliza o p -Laplaciano, fazendo com que alguns teoremas tenha sua validade sem alterar a prova, nesse caso iremos simplesmente citá-los, ou cuja mudança é mínima ao ponto de ser suficiente um comentário.

No que segue, representaremos por $B_r^+(\xi)$ o conjunto $B_r(\xi) \cap D$, onde D é um domínio $C^{1,1}$ e $\xi \in \partial D$. No caso de ξ ser a origem, o omitiremos. Ainda sobre esses elementos, usaremos $B'_r(\xi)$ para representar $B_r(\xi) \cap \partial D$, fazendo com $\xi = 0$ como caso anterior.

Teorema 5.1. *Seja D domínio $C^{1,1}$. Então existem $C, R_0 > 0$ tais que para todo $\xi \in \partial D$ e todo $r \in (0, R_0)$ vale:*

Se u é não negativa e p -harmônica em $B_r^+(\xi)$, anulando-se continuamente em $B'_r(\xi)$, então

$$u(x) \leq Cu(y) \quad \forall x \in B_{\frac{r}{2}}^+(\xi),$$

onde $y \in D$ é tal que $\delta_D(y) \geq r/2$.

Depois de muitas reduções, usando argumentos de translação e rotação, *scaling* e Harnack interior, nos é suficiente mostrar a seguinte versão.

Teorema 5.2. *Seja D domínio $C^{1,1}$ tal que $\xi = 0 \in \partial D$ e $\xi^i = R\vec{e}_n$, onde R é um raio fixo da condição da bola que também podemos supor $R > 2$. Suponha que $u \geq 0$ seja p -harmônica em B_1^+ e se anule continuamente em B'_1 . Se $u(\frac{1}{2}\vec{e}_n) = 1$, então*

$$u(x) \leq C \quad \forall x \in B_{\frac{1}{2}}^+,$$

onde $C > 0$ é independente de u .

Antes de provarmos o teorema, vamos apresentar alguns resultados preliminares. A partir de agora considere D suficientemente expandido, como no enunciado do Teorema anterior, digamos com $R > 2$, onde R é da condição da bola, e também supomos $\xi = 0 \in \partial D$ e $\xi^i = R\vec{e}_n$.

Lema 5.3. *Suponha que $u \geq 0$ seja p -harmônica em B_1^+ e se anule continuamente em B'_1 . Considere*

$$\bar{u} = \begin{cases} u(x), & \text{se } x \in B_1^+, \\ 0, & \text{se } x \in B_1 \setminus B_1^+. \end{cases}$$

Então $\Delta_p \bar{u} \geq 0$ em B_1 .

Prova. Apesar do domínio um pouco diferente, devido a notação (propositalmente) aqui escolhida, a prova é *ipsis litteris* a mesma dada no Lema 4.1 de (BRAGA, 2015), apenas fazendo $g(t) = t^{p-1}$. \square

O seguinte resultado, conhecido na literatura como *weak Harnack inequality*, é um caso particular de um resultado de Gary Lieberman, de seu famoso artigo (LIEBERMAN, 1991).

Teorema 5.4. *Seja $u \in W^{1,p}(B_R)$ função não-negativa e limitada que satisfaz $\Delta_p u \leq 0$ em B_R . Então existem constantes positivas a, C universais que satisfazem*

$$\left[\frac{1}{R^n} \int_{B_{\frac{2R}{3}}} u^a dx \right]^{\frac{1}{a}} \leq C \inf_{B_{\frac{R}{2}}} u.$$

Prova. Vide Teorema 1.3 em (LIEBERMAN, 1991). \square

Lema 5.5 (Lema da oscilação, de De Giorgi). *Suponha que $u \geq 0$ seja p -harmônica em B_1^+ e se anule continuamente em B'_1 . Então, para $0 < r_1 \leq r_2 < 1$, existe $\sigma \in (0, 1)$, que não depende de u , tal que*

$$\sup_{B_{r_1}^+} u \leq \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^\sigma \sup_{B_{r_2}^+} u. \quad (54)$$

Prova. Suponha válido para o caso $S := \sup_{B_{r_1}^+} u = 1$. Nesse cenário, para o caso $S \in \mathbb{R}$ geral, tomemos $w = u/S$. Uma verificação simples permite mostrar que $w \geq 0$ é p -harmônica em B_1^+ , se anula continuamente em B'_1 , e $\sup_{B_{r_1}^+} w = 1$, donde conseguimos recuperar (54) para u . Portanto, nos é suficiente fazer o caso $S = 1$.

Comece por considerar \bar{u} , a extensão de u por zero para B_1 . Como $\Delta_p \bar{u} \geq 0$, ao definirmos $v = 1 - \bar{u}$, teremos $v \geq 0$ dentro das hipóteses do Teorema 5.4, nesse caso, existem $C > 1, a > 0$ tais que

$$\left[\frac{1}{r_1^n} \int_{B_{\frac{2r_1}{3}}} v^a dx \right]^{\frac{1}{a}} \leq C \inf_{B_{\frac{r_1}{2}}} v.$$

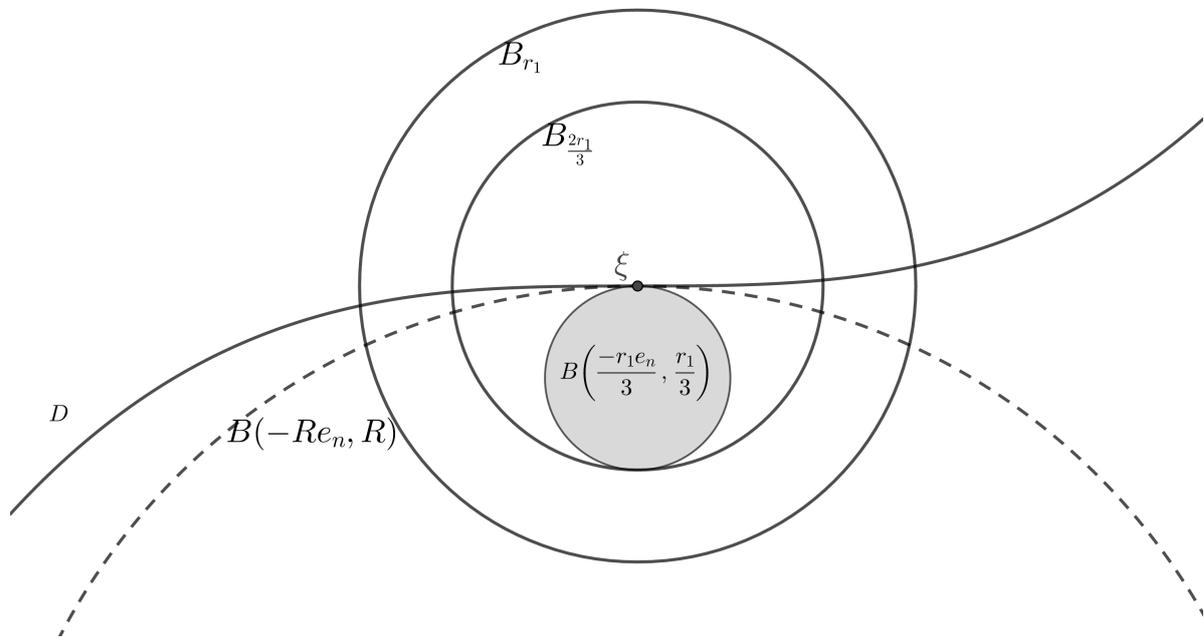
Portanto,

$$C \inf_{B_{\frac{r_1}{2}}} v \geq \frac{1}{r_1^{n/a}} \left[\int_{B_{\frac{2r_1}{3}} \cap \{v=1\}} v^a dx \right]^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{r_1^{n/a}} \left| B_{\frac{2r_1}{3}} \cap \{v=1\} \right|^{\frac{1}{a}}. \quad (55)$$

Como $D^c \cap B_1 \subset \{v=1\}$ e D está suficientemente expandido, temos $\frac{2r_1}{3} < \frac{R}{2}$ e assim, como na Figura 15,

$$B\left(-\frac{r_1}{3}e_n, \frac{r_1}{3}\right) \subset B(-Re_n, R) \cap B_{\frac{2r_1}{3}} \subset D^c \cap B_{\frac{2r_1}{3}} \subset \{v=1\} \cap B_{\frac{2r_1}{3}}.$$

Figura 15 – Bola contida em $B_{\frac{2r_1}{3}} \cap \{v = 1\}$



Fonte: elaborada pelo autor.

Daí, usando (55),

$$C \inf_{B_{\frac{r_1}{2}}} v \geq \frac{|B_{\frac{2r_1}{3}} \cap \{v = 1\}|^{\frac{1}{a}}}{r_1^{n/a}} \geq \frac{|B(-\frac{r_1}{3}e_n, \frac{r_1}{3})|^{\frac{1}{a}}}{r_1^{n/a}} = \left(\frac{r_1}{3r_1}\right)^{n/a} |B_1|^{1/a}.$$

Ou seja, existe $0 < \mu < 1$ tal que $\mu \leq \inf_{B_{\frac{r_1}{2}}} v$. Portanto,

$$\sup_{B_{\frac{r_1}{2}}} u \leq (1 - \mu) \sup_{B_{r_1}} u,$$

e isto prova que a oscilação de u decai geometricamente. O resto segue por Lema 2.10 \square

A seguir provaremos, adaptando a demonstração dada em (BRAGA, 2015), um tipo de Desigualdade de Harnack no complemento de faixas.

Proposição 5.6. *Suponha que $u \geq 0$ seja p -harmônica em B_1^+ e se anule continuamente em B_1' . Então, para todo $s \in (0, 1/2)$,*

$$\sup_{B_{\frac{3}{4}}^+ \cap \{x; \delta_D(x) \geq s\}} u \leq C_0 s^{-\tau} u\left(\frac{1}{2}\vec{e}_n\right), \quad (56)$$

onde C_0 é universal e $\tau = 2\tau_0$

Prova. Seja $x \in B_{\frac{3}{4}}^+ \cap \{\delta_D \geq s\}$. Se $x \in \{\delta_D \geq 1/16\}$ segue da Desigualdade de Harnack, e do fato que $s < 1$, que

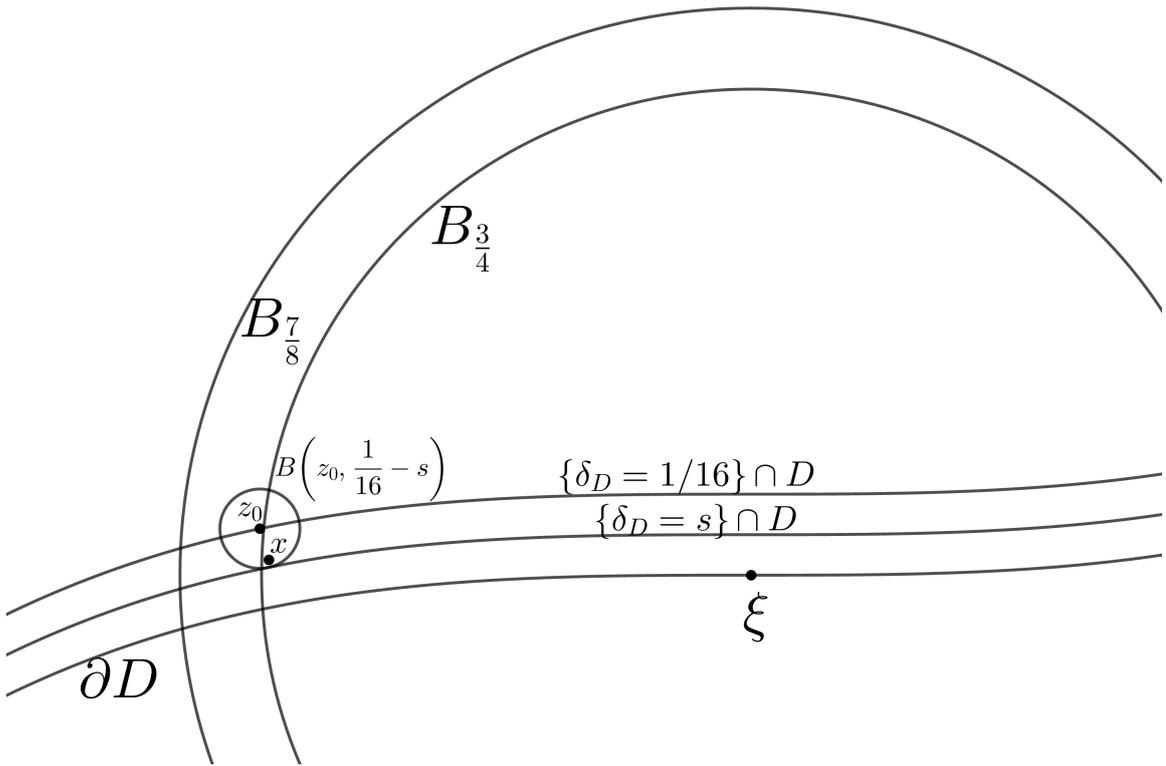
$$\sup_{\Omega_0} u \leq C_1 u \left(\frac{1}{2} e_n \right) \leq C_1 s^{-\tau} u \left(\frac{1}{2} e_n \right) \quad (57)$$

onde $C_1 = C_1(\Omega_0)$ para $\Omega_0 = B_{\frac{3}{4}}^+ \cap \{\delta_D \geq 1/16\}$.

Agora, se $x \in \{\delta_D < 1/16\}$ temos, obrigatoriamente, $0 < s < 1/16$. Tomando $z_0 \in \{\delta_D = 1/16\}$ tal que $\text{dist}(x, \{\delta_D = 1/16\}) = |x - z_0|$, obtemos que $x \in B(z_0, 1/16 - s)$ e, conseqüentemente, $|z_0| < 7/8$. Veja Figura 16. Usando a Desigualdade de Harnack refinada (Teorema 2.8), com $R = 1/16$ e $r = 1/16 - s$, chegamos em

$$u(x) \leq \sup_{B(z_0, 1/16 - s)} u \leq C 16^{-2\tau_0} s^{-2\tau_0} \inf_{B(z_0, 1/16 - s)} u \leq C (16s)^{-2\tau_0} u(z_0). \quad (58)$$

Figura 16 – Esboço do caso $x \in \{\delta_D < 1/16\}$



Fonte: elaborada pelo autor.

Novamente, por Harnack clássico, podemos comparar z_0 e $\frac{1}{2} e_n$, uma vez que ambos pertencem a $\Omega_1 := B_{\frac{7}{8}}^+ \cap \{\delta_D \geq 1/16\} \in B_1^+$, nos retornando

$$u(z_0) \leq \tilde{C} u \left(\frac{1}{2} e_n \right),$$

onde $\tilde{C} = \tilde{C}(\Omega_1)$.

Juntando a desigualdade acima com (58) concluímos

$$u(x) < C_2 s^{-2\tau_0} u\left(\frac{1}{2}e_n\right),$$

onde $C_2 = C_2(\Omega_1, \tau_0)$. Daí,

$$\sup_{B_{\frac{3}{4}}^+ \cap \{s \leq \delta_D < 1/6\}} u \leq C_2 s^{-2\tau_0} u\left(\frac{1}{2}e_n\right). \quad (59)$$

Juntando (57) e (59) obtemos (56) por tomar $C_0 = \max\{C_1, C_2\}$. \square

Finalmente estamos aptos a provar a estimativa de Carleson.

Prova do Teorema 5.2: Vamos mostrar que

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}^+} u \leq M_0 := (16\Theta)^\tau C_0, \quad (60)$$

onde $\Theta := \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\frac{\sigma j}{\tau}}$, para $\sigma > 0$ dado no Lema 5.5, e τ, C_0 dados na Proposição 5.6. A escolha de tal M_0 faz com que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2^{j\sigma} M_0}{C_0}\right)^{-\frac{1}{\tau}} = \left(\frac{M_0}{C_0}\right)^{-\frac{1}{\tau}} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{\frac{-j\sigma}{\tau}} \leq \frac{1}{16}. \quad (61)$$

Suponha, por contradição, que não vale (60). Nesse caso existe $u_0 \geq 0$, p -harmônica em B_1^+ , que anule em B_1' , e $x_0 \in B_{\frac{1}{2}}^+$ tais que $u_0(x_0) \geq M_0$. Pelo Princípio do Máximo, e por u_0 se anular em B_1' , podemos tomar logo $x_0 \in \partial B_{\frac{1}{2}}^+ \setminus B_1'$. Além disso, como u_0 é contínua, vale $\sup_{B_{\frac{3}{4}}^+} u_0 < \infty$.

Denominaremos por η_j o elemento de ∂D que satisfaz $\delta_D(x_j) = |x_j - \eta_j|$, onde $x_j \in D$. Usando a Proposição 5.6 com $s = |x_0 - \eta_0| =: d_0$ (veja que $|x_0 - \eta_0| \leq |x_0 - 0| \leq \frac{1}{2}$) temos

$$M_0 \leq u_0(x_0) \leq \sup_{B_{\frac{3}{4}}^+ \cap \{x; \delta_D(x) \geq d_0\}} u_0 \leq C_0 d_0^{-\tau} \underbrace{u\left(\frac{1}{2}e_n\right)}_{=1},$$

nos permitindo concluir que $d_0 \leq \left(\frac{M_0}{C_0}\right)^{-\frac{1}{\tau}}$. Portanto, por (61) temos

$$d_0 \sum_{j=0}^{\infty} 2^{\frac{-j\sigma}{\tau}} \leq \frac{1}{16}$$

e então

$$2d_0 \sum_{j=0}^{\infty} 2^{\frac{-j\sigma}{\tau}} \leq \frac{1}{8},$$

daí,

$$\frac{1}{2} + 2d_0 \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\frac{j\sigma}{\tau}} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} < \frac{3}{4}. \quad (62)$$

Desde que

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\frac{j\sigma}{\tau}} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-\frac{j\sigma}{\tau}},$$

podemos concluir que $\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\frac{j\sigma}{\tau}} > 1$, e junto com (62) chegamos em

$$\frac{1}{2} + 2d_0 < \frac{3}{4}.$$

Portanto,

$$B_{2d_0}^+(\eta_0) \subset B_{\frac{3}{4}}^+.$$

Assim, como u_0 é p -harmônica em $B_{2d_0}^+(\eta_0)$, existe $x_1 \in \overline{B_{2d_0}^+(\eta_0)} \subset \overline{B_{\frac{3}{4}}^+}$ tal que

$$u_0(x_1) = \sup_{B_{2d_0}^+(\eta_0)} u_0,$$

e, claramente,

$$\sup_{B_{d_0}^+(\eta_0)} u_0 \geq u_0(x_0) \geq M_0.$$

Usando as duas últimas equações junto com Lema 5.5 e Proposição 5.6 com $s = |x_1 - \eta_1| =: d_1$ temos

$$C_0 d_1^{-\tau} \geq \sup_{B_{\frac{3}{4}}^+ \cap \{x; \delta_D(x) \geq d_1\}} u_0 \geq u_0(x_1) = \sup_{B_{2d_0}^+(\eta_0)} u_0 \geq 2^\sigma \sup_{B_{d_0}^+(\eta_0)} u_0 \geq 2^\sigma M_0.$$

Daí,

$$d_1 \leq \left(\frac{2^\sigma M_0}{C_0} \right)^{-\frac{1}{\tau}}.$$

Novamente por (61) temos $\frac{1}{2} + 2(d_0 + d_1) < \frac{3}{4}$, nos permitindo concluir que $B_{2d_1}^+(\eta_1) \subset B_{\frac{3}{4}}^+$. Assim como anteriormente, tome $x_2 \in \overline{B_{2d_1}^+(\eta_1)} \subset \overline{B_{\frac{3}{4}}^+}$ para ser tal que

$$u_0(x_2) = \sup_{B_{2d_1}^+(\eta_1)} u_0.$$

Outra vez usando Lema 5.5 e Proposição 5.6 com $s = |x_2 - \eta_2| =: d_2$ concluímos que

$$C_0 d_2^{-\tau} \geq \sup_{B_{\frac{3}{4}}^+ \cap \{x; \delta_D(x) \geq d_2\}} u_0 \geq u_0(x_2) = \sup_{B_{2d_1}^+(\eta_1)} u_0 \geq 2^\sigma \sup_{B_{d_1}^+(\eta_1)} u_0 \geq 2^{2\sigma} M_0.$$

Daí,

$$d_2 \leq \left(\frac{2^{2\sigma} M_0}{C_0} \right)^{-\frac{1}{\tau}}.$$

Usando novamente (61) obtemos $1/2 + 2(d_0 + d_1 + d_2) < 3/4$ e assim $B_{2d_2}^+(\eta_2) \subset B_{\frac{3}{4}}^+$. Continuando este processo indefinidamente, pois (61) nos permite, obtemos uma sequência $\{x_n\} \subset \overline{B_{\frac{3}{4}}^+}$ satisfazendo, para $d_n := |x_n - \eta_n|$,

$$C_0 d_n^{-\tau} \geq u_0(x_n) \geq 2^{n\sigma} M_0.$$

Em outras palavras, $u_0(x_n) \rightarrow \infty$ para uma sequência totalmente contida no compacto $\overline{B_{\frac{3}{4}}^+}$, o que viola a continuidade de u_0 e torna o teorema verdadeiro. ■