**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**
**PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO**
**MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**

**BEATRIZ MARIA PEREIRA MAIA**

# PRODUTO EDUCACIONAL: DESCRIÇÃO DE SITUAÇÕES DIDÁTICAS SOBRE OS POLÍGONOS DE BRAHMAGUPTA AMPARADAS PELO SOFTWARE GEOGEBRA

**FORTALEZA**

**2021**

BEATRIZ MARIA PEREIRA MAIA

# PRODUTO EDUCACIONAL: DESCRIÇÃO DE SITUAÇÕES DIDÁTICAS SOBRE OS POLÍGONOS DE BRAHMAGUPTA AMPARADAS PELO SOFTWARE GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestra em Ensino de Ciências e Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.

FORTALEZA

2021

**SUMÁRIO**

# 1 INTRODUÇÃO

As atividades descritas neste Produto Educacional têm como objetivo nortear os professores da disciplina de História da Matemática, ou na formação inicial do professor, para o ensino de conceitos ligados aos polígonos de Brahmagupta, a partir da utilização do GeoGebra, software de geometria dinâmica, com o intuito de tornar o aluno ativo ao longo do processo de ensino e aprendizagem.

Nesse sentido, as sequências didáticas foram estruturadas conforme as dialéticas da Teoria das Situações Didáticas (TSD), sendo elas, ação, formulação, validação e institucionalização. No momento da ação, de posse do problema proposto pelo docente, o aluno é levado a tomar decisões com base em seus saberes adquiridos anteriormente, dentro ou fora do ambiente escolar.

Em seguida, no momento da formulação, ele explica as estratégias utilizada na fase anterior e valida seu modelo utilizando uma linguagem adequada para a prova do seu resultado. Por fim, no momento da institucionalização, o professor retoma o controle da sala e expõe suas intenções com para a atividade sugerida, bem como ajuda aqueles alunos que não conseguiram concluir a resolução do problema.

Ao longo desse processo foi utilizado o Geogebra, como recurso auxiliar, para os professores e alunos, pois trata-se de uma ferramenta gratuita e de fácil acesso que promove a interação entre professor-aluno, facilita a compreensão do conteúdo estudado, dinamizando as construções, estimulando a criatividade e o pensamento lógico dos envolvidos.

Dessa maneira, as cinco situações didáticas apresentadas nesse caderno além de trazer as previsões dos alunos, traz ao docente ainda a lista de conhecimentos prévios dos alunos em cada uma delas, e com o processo de construção das figuras do Geogebra, ou seja, a descrição do passo a passo das funções utilizadas no software resultando na figura desejada.

Espera-se, com esse material, contribuir com o ensino de conceitos ligados à geometria a partir de uma perspectiva dinâmica e colaborativa, levando para os futuros professores de Matemática uma experiência didática diferenciada e fomentando pesquisas futuras acerca do aprimoramento do processo de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos historicamente desenvolvidos, alinhados à tecnologia da informação.

## 2 SITUAÇÃO DIDÁTICA 1

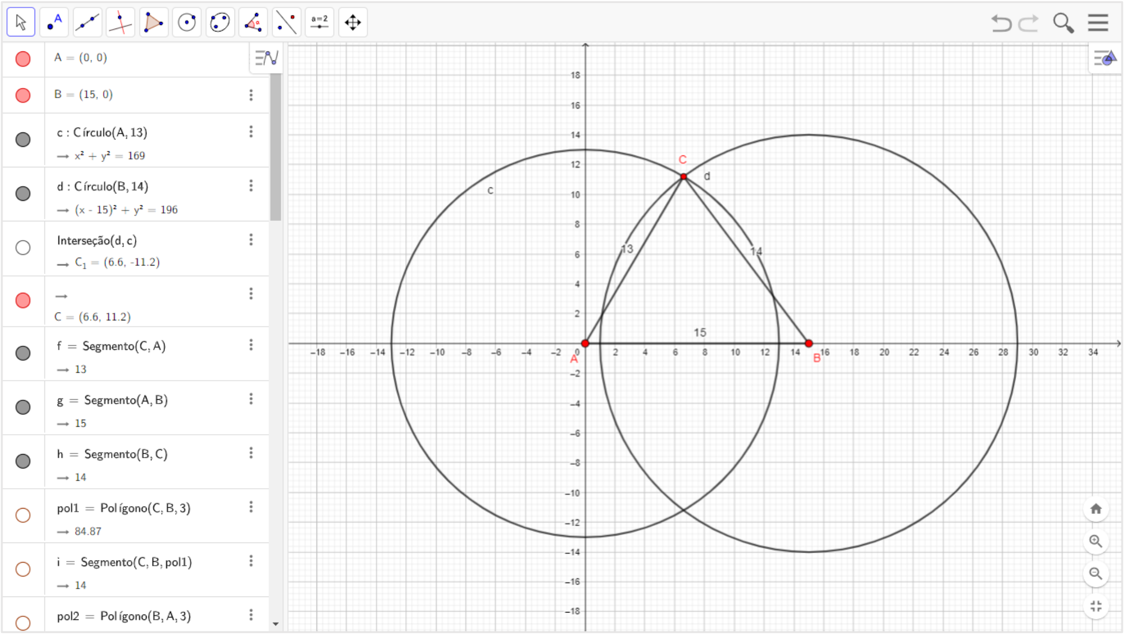
**Conhecimentos prévios** – Propriedades dos triângulos equiláteros, conhecimentos básicos de desenho geométrico e exemplos de triângulos de Brahmagupta.

(Problema 1 – Elaborado pela autora ) – Dado um triângulo ABC de Brahmagupta, se construirmos triângulos equiláteros a partir de seus lados, tais que não possuam pontos internos em comum com o triângulo ABC, prove que o triângulo formado a partir dos centros desses três triângulos equiláteros, são vértices de um triângulo que também será equilátero.

**Situação de Ação** – De posse do problema, nessa etapa os alunos são convidados a analisar o contexto da situação e tomar decisões, colocando em prática seus saberes adquiridos até então, com o intuito de solucionar a situação problema proposta pelo docente. Dessa forma, analisando o problema, é fundamental que os discentes escolham um triângulo de Brahmagupta e leve as informações do enunciado para o software Geogebra, podendo assim buscar soluções para a situação a partir da visualização da imagem.

**Situação de Formulação** – É chegado o momento em que os discentes formulam suas estratégias de resolução do problema, trocando mensagens com os demais envolvidos. Nesse instante, espera-se que eles façam uso do software Geogebra. Dessa forma, de posse do triângulo de Brahmagupta escolhido, para a representação do problema faremos com o triângulo cujos lados são 13 cm, 14 cm e 15 cm (Figura 1), inicia-se a construção.

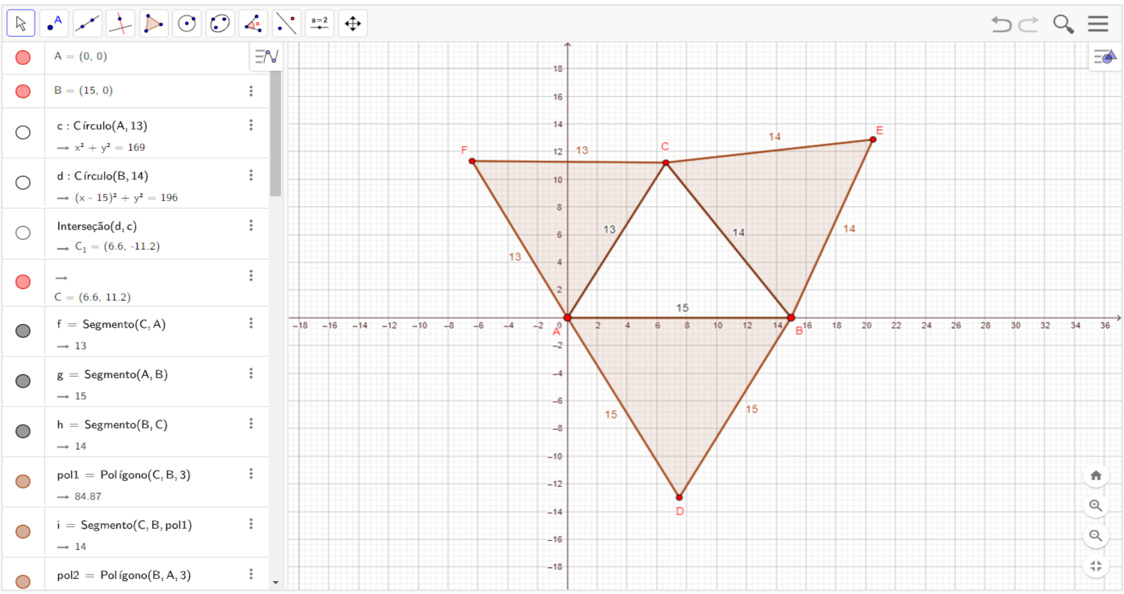
Figura 1 – Triângulo ABC de Brahmagupta




Fonte: Elaborado pela autora

Seguindo, conforme o enunciado, os discentes deverão construir triângulos equiláteros externamente ao triângulo ABC, tal que um dos lados seja comum ao triângulo ABC. Logo, sobre o lado AB constrói-se um triângulo equilátero de lado 15 cm, analogamente sobre o lado BC constrói-se um triângulo equilátero de lado 14 cm e sobre o lado AC constrói-se um triângulo equilátero de lado 13 cm (Figura 2).

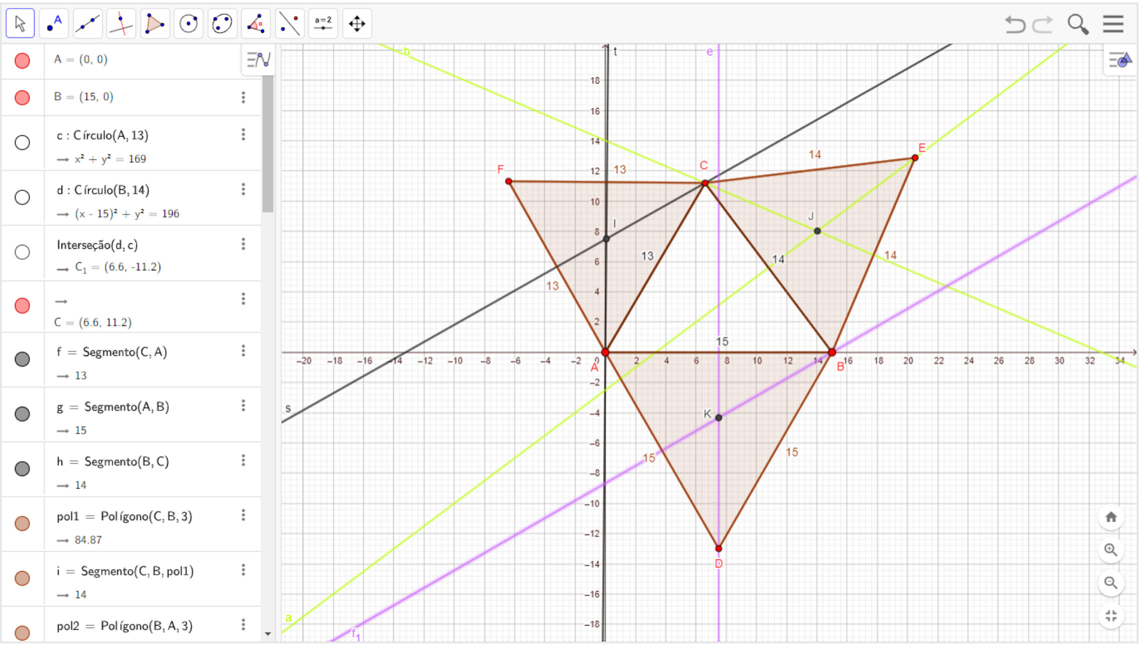
Figura 2 – Construção dos triângulos equiláteros ABD, BCE e ACF




Fonte: Elaborado pela autora

Ainda nessa etapa, é necessário que os discentes verifiquem se o triângulo formado a partir dos centros dos triângulos equiláteros, construídos anteriormente, também é um triângulo equilátero. Dessa maneira, trançando as bissetrizes dos ângulos do triângulo ABD, encontra-se o ponto K, centro desse triângulo. Analogamente, traçando as bissetrizes dos ângulos dos triângulos BCE e ACF, encontra-se respectivamente, os pontos J e I (Figura 3).

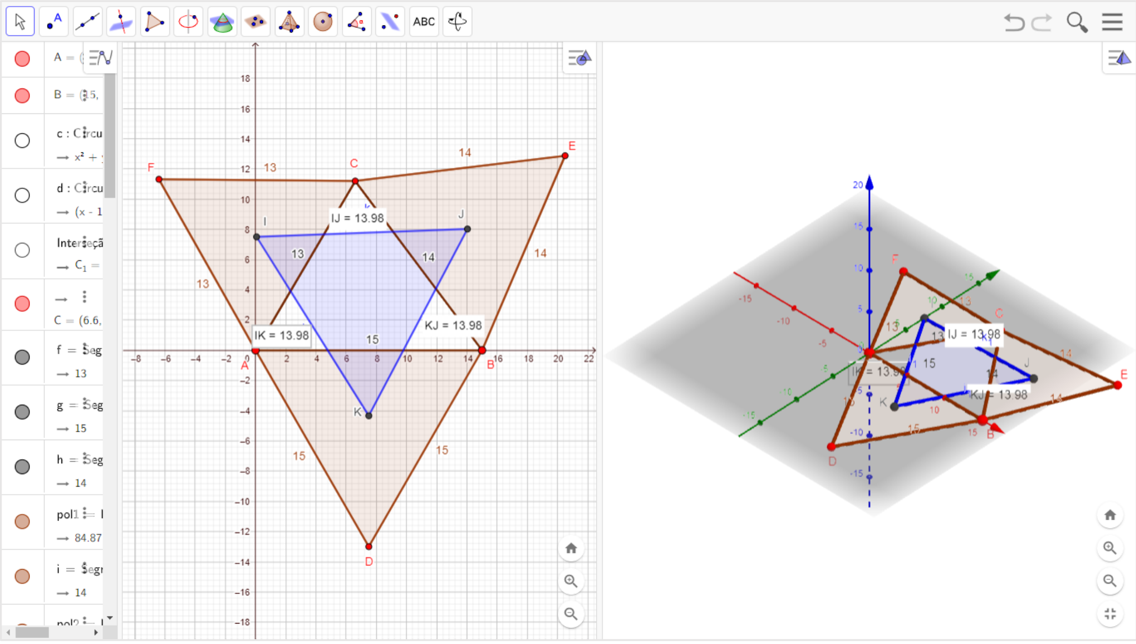
Figura 3 – Centros dos triângulos equiláteros.




Fonte: Elaborado pela autora

Unindo os centros dos triângulos equiláteros, temos o novo triângulo IJK cujos lados são 13,98 cm, chegando a solução do problema proposto (Figura 4). Caso necessário, o professor poderá fazer intervenções afim de conduzir os alunos para o caminho da melhor resolução, mas tomando as devidas precauções para não mostrar a resposta final.

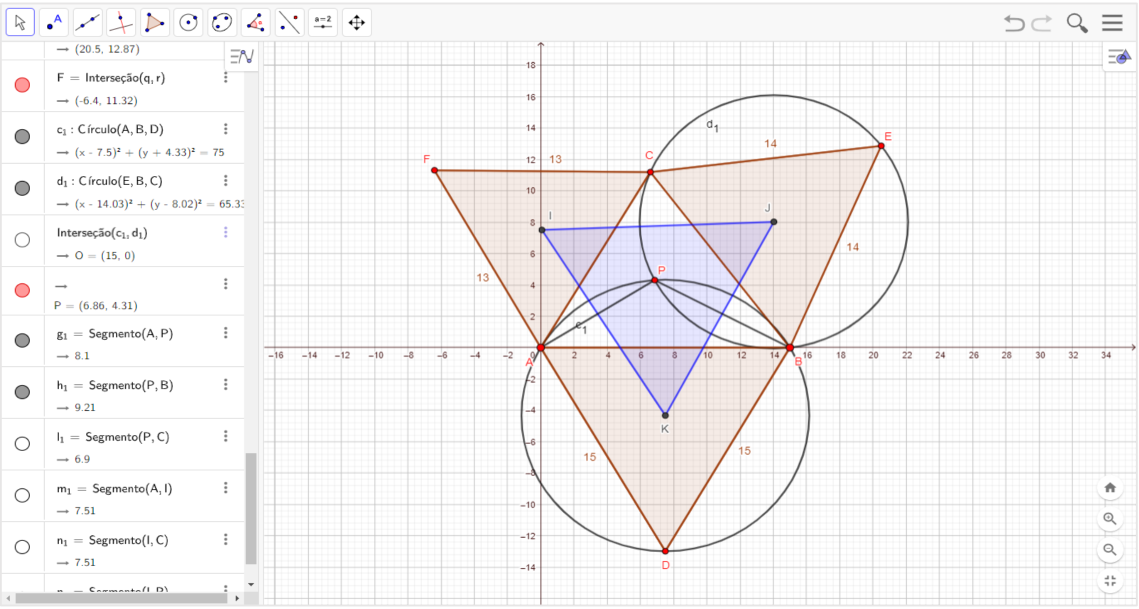
Figura 4 – Representação 2D/3D do triângulo IJK



Fonte: Elaborado pela autora

**Situação de Validação** – É chegada a etapa em que o discente deverá validar o argumento apresentado na etapa anterior através de uma linguagem apropriada, como explica Barbosa (2016). Para isso, deseja-se que os alunos utilizem o construção feita por eles para fazer esse processo. Na figura 5, mostra-se a construção de duas circunferências $c_1$ e $d_1$ circunscritas aos triângulos ABD e BCE, que passam por um mesmo ponto P.

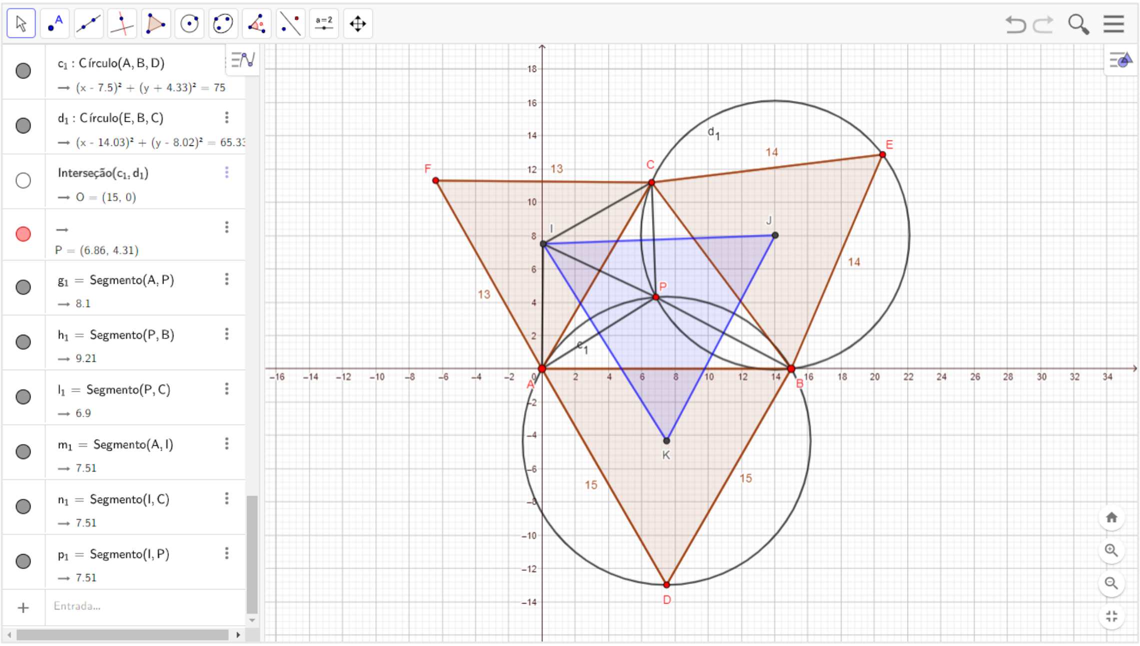
Figura 5 – Circunferências $c_1$ e $d_1$ circunscritas aos triângulos ABD e BCE




Fonte: Elaborado pela autora

Ao unir os pontos A, P, B e D, temos um quadrilátero inscritível a circunferência $c_1$. Dessa forma, como o triângulo ABD é equilátero temos que $A\widehat{D}B$ = 60º e, portanto $A\widehat{P}B$ = 120º. De forma análoga, os ângulos $B\widehat{P}C$ e $A\widehat{P}C$ são congruentes ao ângulo $A\widehat{P}B$. Traçando os segmentos $\overline{IA}$, $\overline{IP}$ e $\overline{IC}$ (Figura 6) temos que o segmento $\overline{IK}$ é mediatriz do segmento $\overline{AP}$, logo os ângulos $A\hat{I}K$ e $P\hat{I}K$ são congruentes. Da mesma maneira o segmento $\overline{IJ}$ é mediatriz do segmento $\overline{CP}$ e os ângulos $P\hat{I}J$ e $C\hat{I}J$ são congruentes. Como o ângulo $A\hat{I}C$ = 120º, então o ângulo $K\hat{I}J$ = 60º. Fazendo o mesmo processo, encontramos que os ângulos $I\hat{J}K = J\hat{K}I$ = 60°. Concluindo que o triângulo IJK é equilátero.

Figura 6 – Finalização da prova de que o triângulo IJK é equilátero



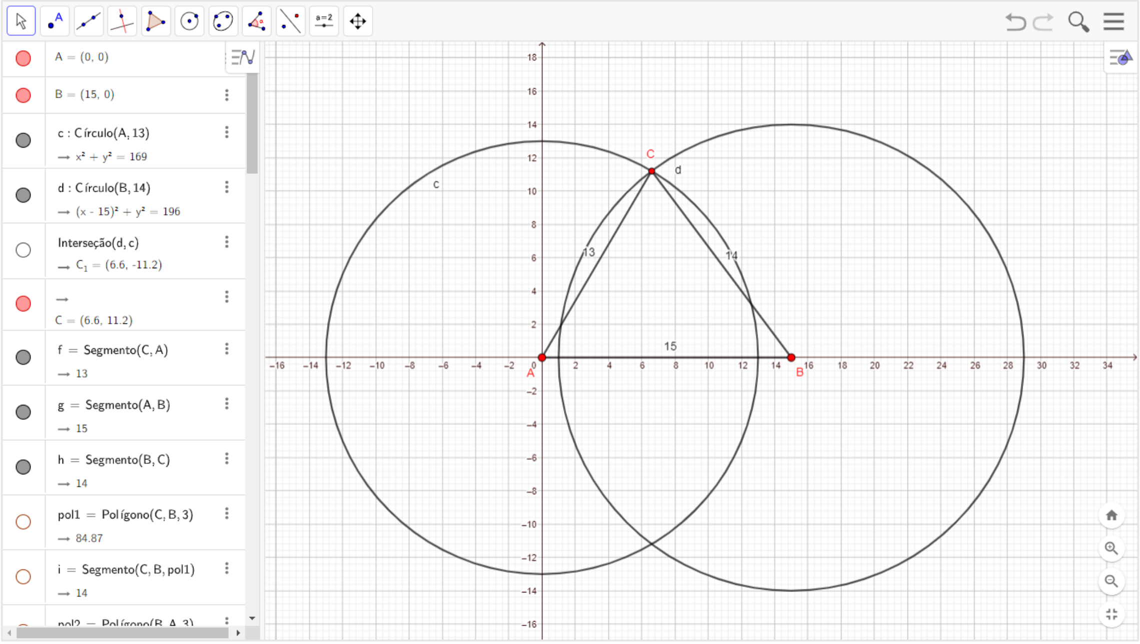

Fonte: Elaborado pela autora

**Situação de institucionalização** – Para finalizar o processo, nessa etapa "o professor fixa propositadamente e explicitamente o processo cognitivo do saber" Almouloud (2007, p. 36), ou seja o professor remota o controle da sala de aula, dialogando com os alunos sobre as suas intenções ao aplicar tal problema, auxiliando aqueles que não tenham obtido êxito na resolução do mesmo.

## CONSTRUÇÃO NO GEOGEBRA

1º passo: Para a construção do triângulo ABC de Brahmagupta, marca-se o ponto A com coordenadas (0,0) e o ponto B com coordenadas (15,0). Posteriormente, cria-se duas circunferências, uma com centro no ponto A e raio 13 cm e outra com centro no ponto B e raio 14 cm.  A intersecção das circunferências, representando pelo ponto C, é o terceiro vértice do triângulo, formando assim o triângulo de Brahmagupta de lados 13 cm, 14 cm e 15 cm (Figura 7).

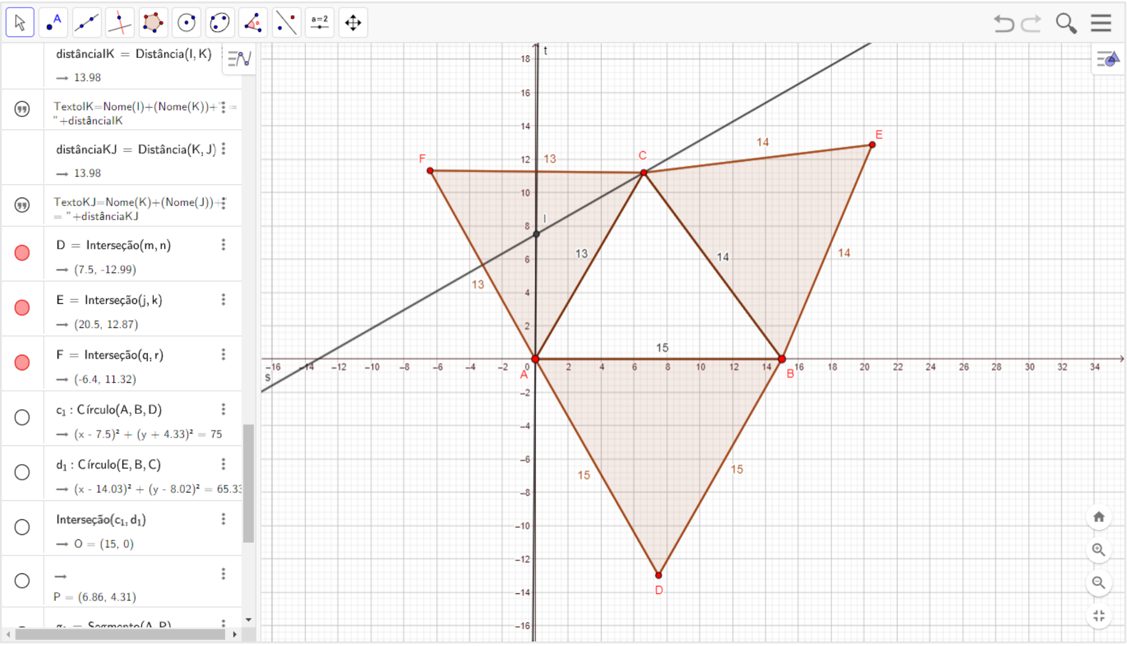
Figura 7 – Construção do triângulo 13 cm, 14 cm e 15 cm



Fonte: Elaborado pela autora

2º passo: Adiante, para a construção dos triângulos equiláteros externos ao triângulo ABC, seleciona-se a função “Polígono Regular” e marca-se a medida do segmento que será a medida dos lados do polígono, em seguida aponta-se a quantidade de vértice da referida figura. Dessa forma, para a construção do triângulo ABD, indica-se a medida do segmento AB e em seguida numera a quantidade de lados do polígono regular formado, ou seja 3. Para a construção dos triângulos BCE e ACF segue-se de forma análoga (Figura 8).

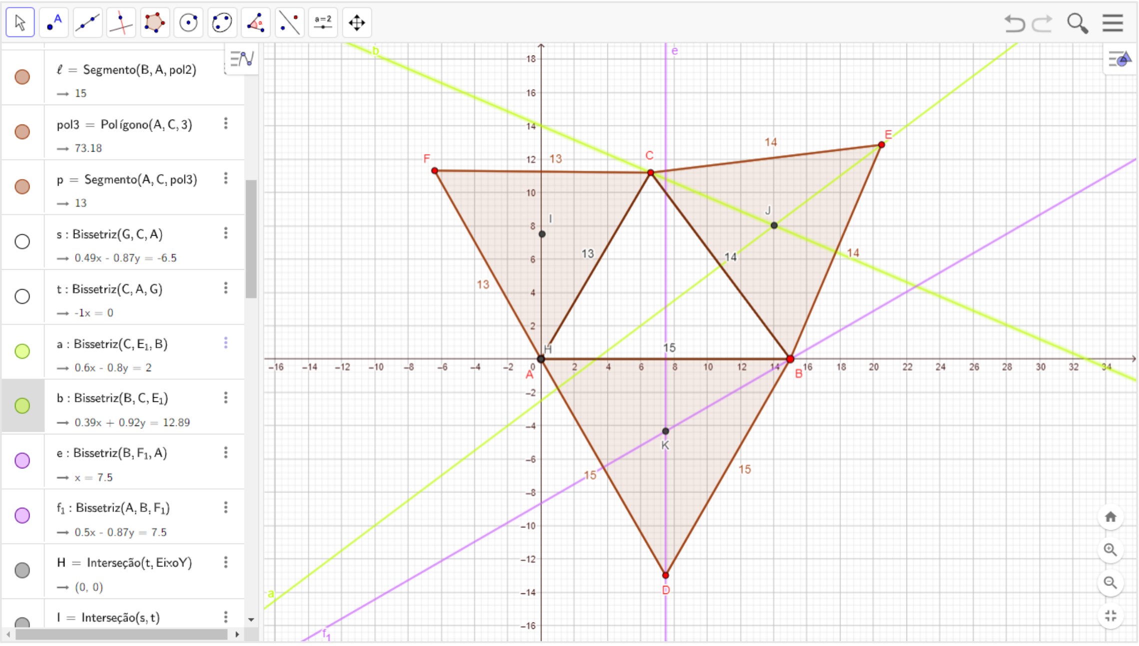
Figura 8 – Construção dos triângulos equiláteros




Fonte: Elaborado pela autora

3º passo: Nos triângulos equiláteros as cevianas e a mediatrizes coincidem, logos os pontos notáveis também. Dessa maneira, escolhemos traçar as bissetrizes dos triângulos para indicar o centro dos mesmo. Para isso, com o auxílio da função “Reta Perpendicular”, escolhe-se a função “Bissetriz”. Conforme mostrado na figura 8, o ponto I é a intersecção das bissetrizes do triângulo ACF, centro desse triângulo. Aplicando o mesmo processo, determina-se os pontos J e K, intersecções das bissetrizes dos triângulos BCE e ABD, respectivamente (Figura 9).

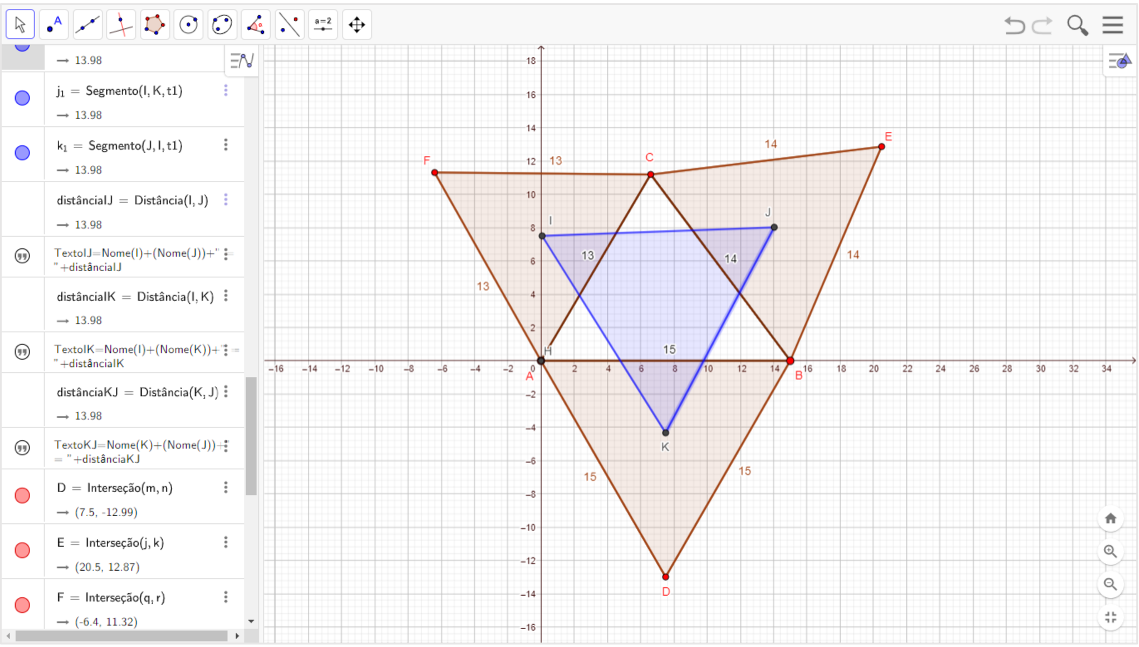
Figura 9 – Centros dos triângulos equiláteros externos ao triângulo ABC



Fonte: Elaborado pela autora

4º passo: A posteriori, unindo os centros dos triângulos equiláteros, por meio da função "Segmento" obtemos o triângulo IJK também equilátero (Figura 10).

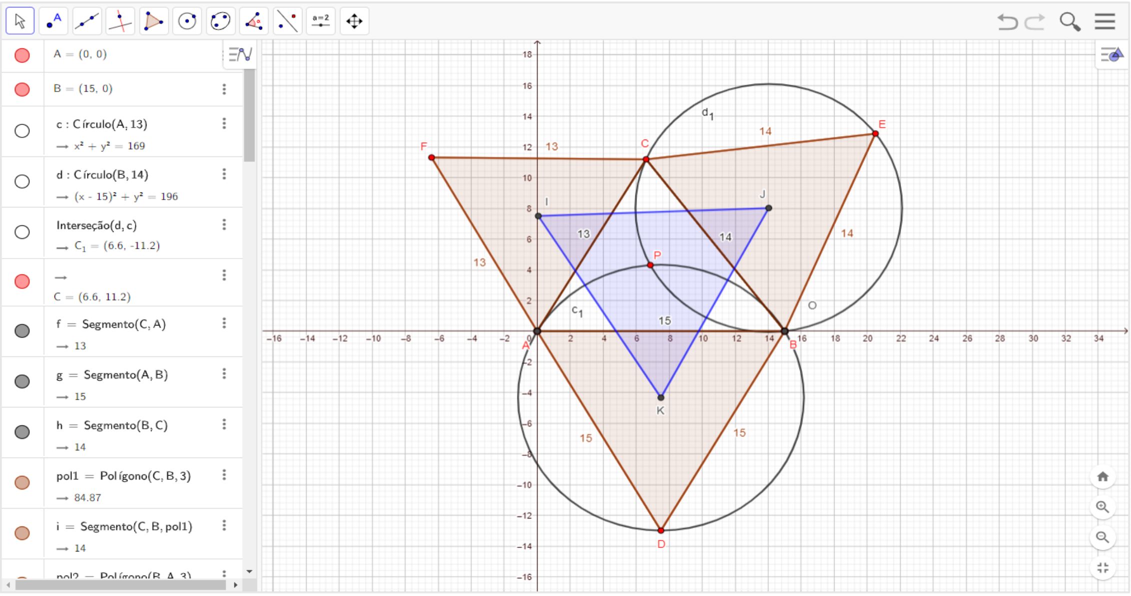
Figura 10 – Elaboração do triângulo IJK



Fonte: Elaborado pela autora

5º passo: Para a elaboração das figuras da situação de validação, cria-se duas circunferências circunscritas aos triângulos BCE e ABD. Para isso, selecionando a função “circunferência definida em três pontos”, marcamos os vértices dos triângulos desejados para inscreve-los na circunferência (Figura 11). Com a função “Ponto” assinalamos o ponto P, intersecção das circunferências $C_1$ e $D_1$.

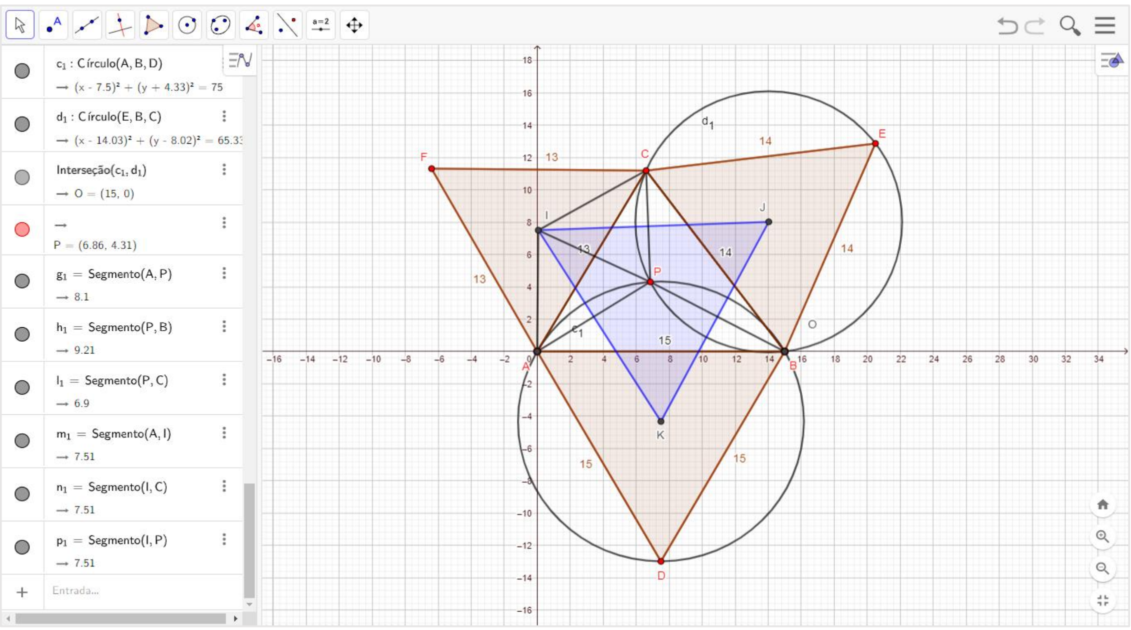
Figura 11 – Produção das circunferências $C_1$ e $D_1$.




Fonte: Elaborado pela autora

6º passo: Para a composição da última figura, com o auxílio da função “Segmento” unimos os pontos A, B, C e I ao ponto C e os pontos A e C ao ponto I.

Figura 12 – Elaboração da última figura da situação didática



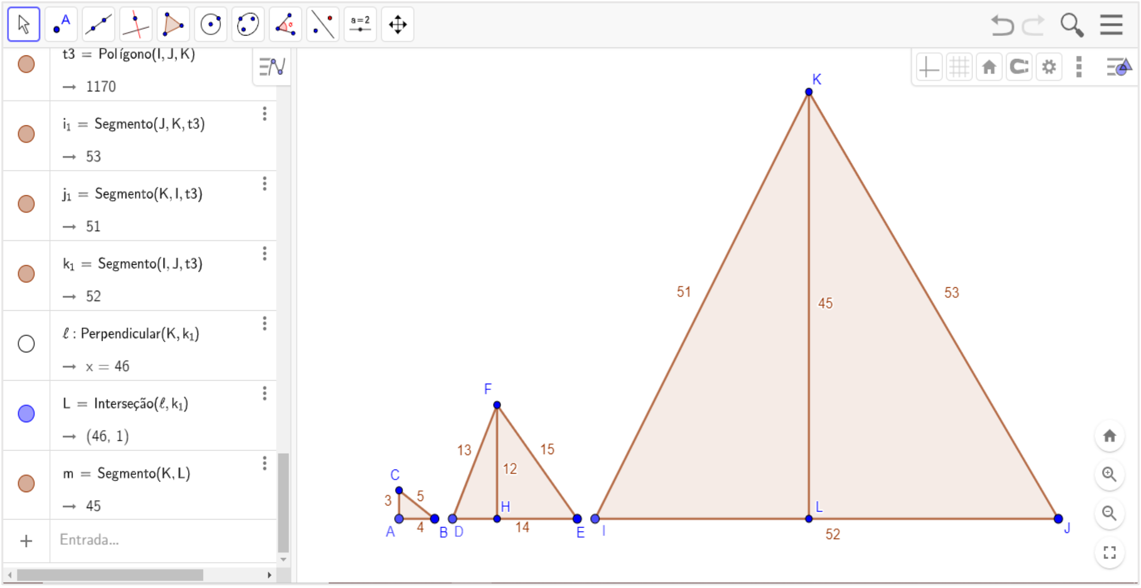

Fonte: Elaborado pela autora

## 3 SITUAÇÃO DIDÁTICA 2

**Conhecimentos prévios**: Sequência recursiva e análise de gráficos.

(Problema 2 – Elaborado pela autora ) Considerando os três triângulos de Brahmagupta apresentados abaixo, apresente o quarto triângulo dessa classe.

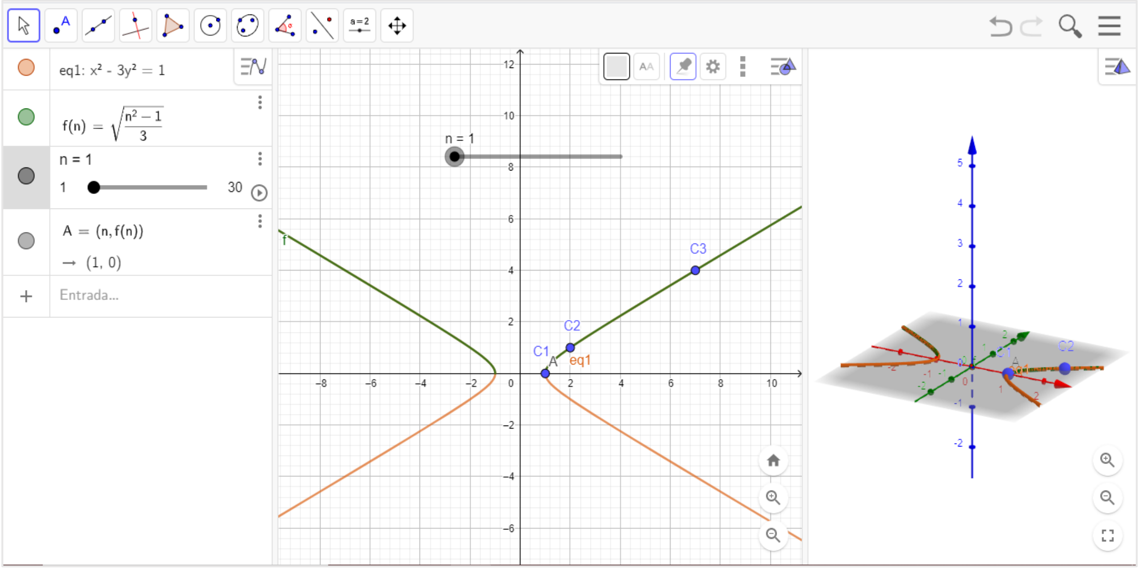
Figura 1 – Triângulos $B_1$, $B_2$ e $B_3$ de Brahmagupta




Fonte: Elaborado pela autora

**Situação de ação** – Inicialmente, espera-se que os alunos analisem as informações dos triângulos $B_1$, $B_2$ e $B_3$ em busca de padrões existente entre eles. Segundo Pommer (2013) nessa fase os estudantes estão tomando conhecimento do problema, se familiarizando com os dados apresentados, de modo a identificar as ferramentas necessárias para resolvê-lo, para que assim possa dar início a tomada de decisões. Ele poderá analisar a figura do Geogebra afim de buscar mais informações que possam o auxiliar na resolução do referido problema.

Figura 2 – Visualização 2D/3D da hipérbole formada pela equação de Pell definida por Brahmagupta no processo de construção dos triângulos.




Fonte: Elaborado pela autora

**Situação de Formulação** – Os alunos começaram a trocar mensagens escritas e orais entre eles sobre os possíveis padrões encontrados na análise do gráfico apresentado no Geogebra, podendo assim concluir que os números que compõem os pares ordenados da hipérbole devem ser inteiros positivos e estão associados aos lados e a altura de cada um dos triângulos de Brahmagupta. Espera-se, então, que os alunos observe que os lados dos triângulos estão associados aos valores da abscissa dos pontos que pertencem a hipérbole, podendo construir um padrão semelhante ao mostrado na tabela 2, onde L1, L2 e L3 são os lados dos triângulos.

Tabela 1 – Relação entre as coordenadas da hipérbole e os lados dos triângulos

| TRIÂNGULO | COORDENADAS DO PONTO | LADOS | | |
|---|---|---|---|---|
| | | L1 | L2 | L3 |
| $B_1$ | (2, 1) | $2 \cdot 2 - 1$ | $2 \cdot 2$ | $2 \cdot 2 + 1$ |
| $B_2$ | (7, 4) | $2 \cdot 7 - 1$ | $2 \cdot 7$ | $2 \cdot 7 + 1$ |
| $B_3$ | (26, 15) | $2 \cdot 26 - 1$ | $2 \cdot 26$ | $2 \cdot 7 + 1$ |
| $B_4$ | $(x_4, y_4)$ | $2x_4 - 1$ | $2x_4$ | $2x_4 + 1$ |

Fonte: Elaborado pela autora

Assim, para cada um dos triângulos espera-se que os alunos formem os pares ordenados a partir dos resultados da tabela, ou seja, o primeiro será (2, 1), o segundo (7,

4) e o terceiro (26, 15). Como eles já haviam percebido um padrão entre os pares ordenados da hipérbole espera-se que os mesmos observem a estruturação das sequencias para os valores de x, que serão iguais a $x_1 = 2$, $x_2 = 7$, $x_3 = 26$ ... e para os valores de y serão $y_1 = 3$, $y_2 = 4$, $y_3 = 15$... . Dessa forma encontrarão a recorrência para $x_n$ igual a $x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1}$ e para $y_n$ igual a $y_{n+1} = 4y_n - y_{n-1}$. Aplicando a recorrência para determinar o par $(x_{4,}y_4)$ os alunos deverão portanto obter como soluções para $x_4 = 4x_3 - x_2$, onde, $x_4 = 4 \cdot 26 - 7 = 97$ e $y_4 = 4y_3 - y_2$, onde, $y_4 = 4 \cdot 15 - 4 = 56$, o par (97, 56).

Uma vez que os alunos tenham definido que os lados do quarto triângulo seja determinado por ($2x_4$ – 1, $2x_4$, $2x_4$ + 1) e tendo calculado o valor de $x_4$ então, realizando uma substituição simples, encontrarão o quarto triângulo de Brahmagupta, sendo ele (193, 194, 195).

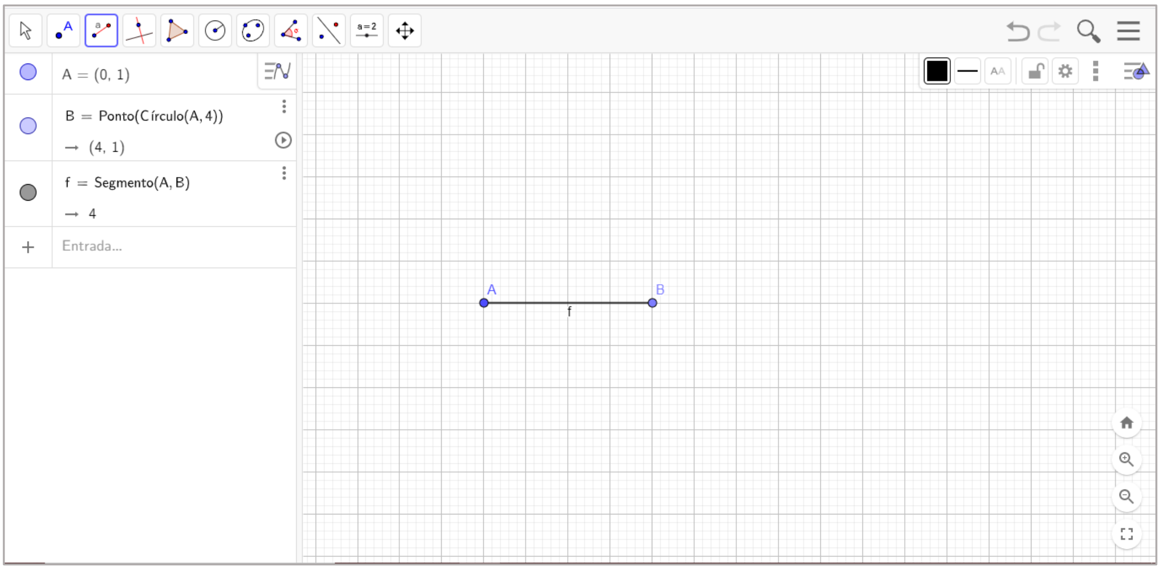
**Situação de Validação** – Nessa fase “o emissor deve justificar a exatidão e a pertinência de seu modelo e fornecer, se possível, uma validação semântica e sintática”. (ALMOULOUD, 2007, p. 39). Vale ressaltar que se os receptores não compreenderam e chegarem a discordar do modelo formulado na fase anterior, poderá argumentar e justificar o motivo da rejeição. O aluno, por sua vez, comprovará seu modelo inserindo a recorrência no Geogebra e verificando que o par ordenado (97, 56) pertence a hipérbole apresentada.

**Situação de Institucionalização** – Para finalizar, nessa fase, o professor faz o fechamento retomando o controle das atividades, sintetizando os conhecimentos e as ligações com o saber cultural dos alunos, explica Margolinas (2004). O docente também deverá sanar qualquer dúvida que tenha surgir ao longo desse processo.

## CONSTRUÇÕES NO GEOGEBRA

1º Passo: Seleciona-se a opção “Segmento com Comprimento Fixo”, localizada na barra de ferramentas do software, para criar um segmento $\overline{AB}$ de 4 cm de comprimento;

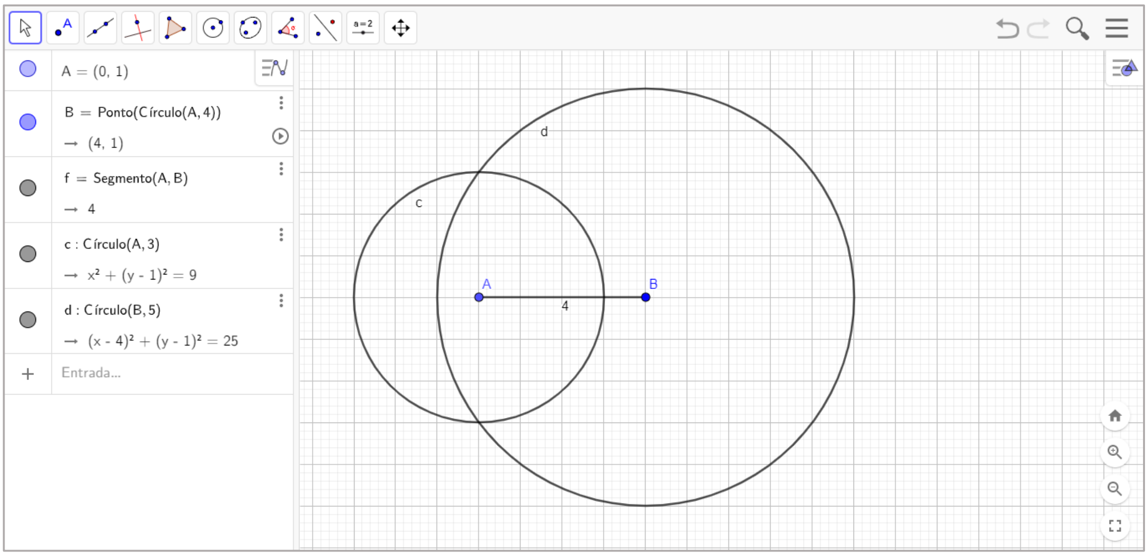
Figura 3 – Construção inicial do triângulo B1




Fonte: Elaborado pela autora

2º Passo: Também na barra de ferramentas, seleciona-se a opção “Círculo: centro e raio” e cria-se duas circunferências com centros em A e B com raios 3 cm e 5 cm, respectivamente;

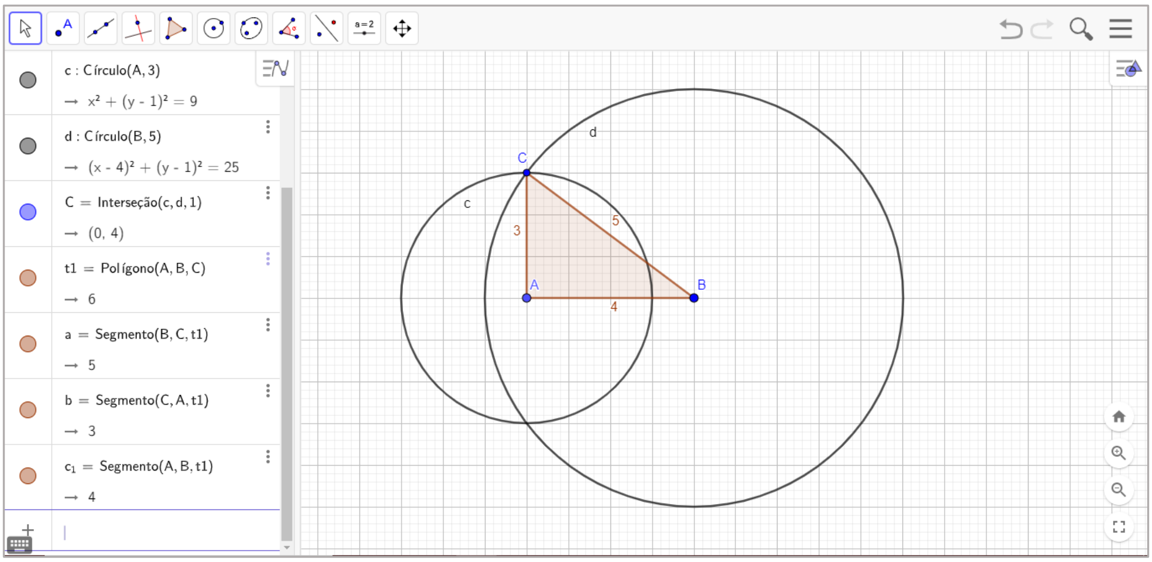
Figura 4 – Construção dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ do triângulo B1




Fonte: Elaborado pela autora

3º Passo: Marca-se o ponto C onde as duas circunferência se interceptam e na opção "Polígono" liga-se os pontos A, B e C, formando o triângulo B1;

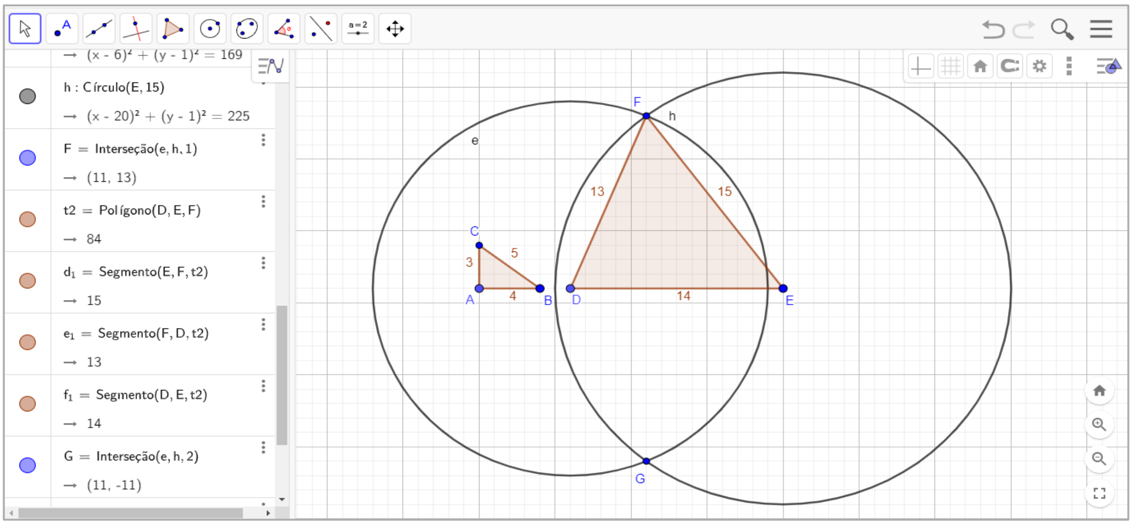
Figura 5 – Triângulo B1 de Brahmagupta




Fonte: Elaborado pela autora

4º Passo: Antes de iniciar a construção do triângulo B2, aconselha-se a ocultação das duas circunferências $c$ e $d$ desmarcando as opções "c : Círculo (A, 3)" e "d : Círculo (B, 5)" na janela algébrica, localizada no campo esquerdo do Geogebra. Para a construção do triângulo B2, segue-se o processo semelhante ao do triângulo B1, porém com a base $\overline{DE}$ com 14 cm de comprimento e as circunferências com raios 13 cm e 15 cm.

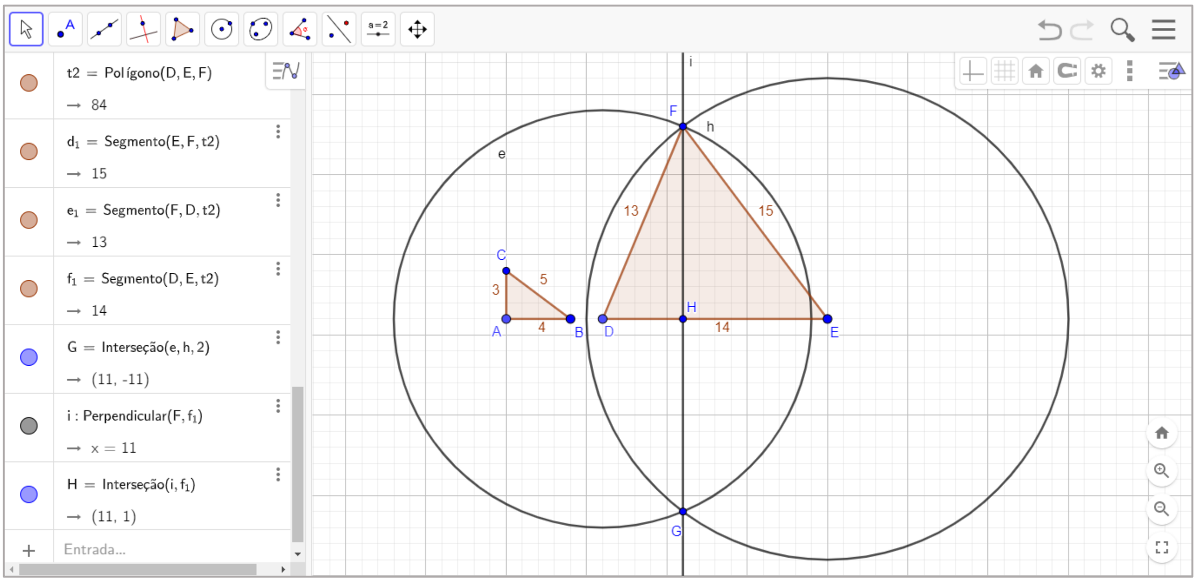
Figura 6 – Construção do triângulo B2 de Brahmagupta




Fonte: Elaborado pela autora

5º Passo: Ligando os pontos D, E, F (Intersecção entre as circunferências $e$ e $h$) tem-se o triângulo B2. Para determinar a altura relativa ao lado $\overline{\text{DE}}$, deve-se traçar uma reta pelos pontos F e G por meio da opção "Retas";

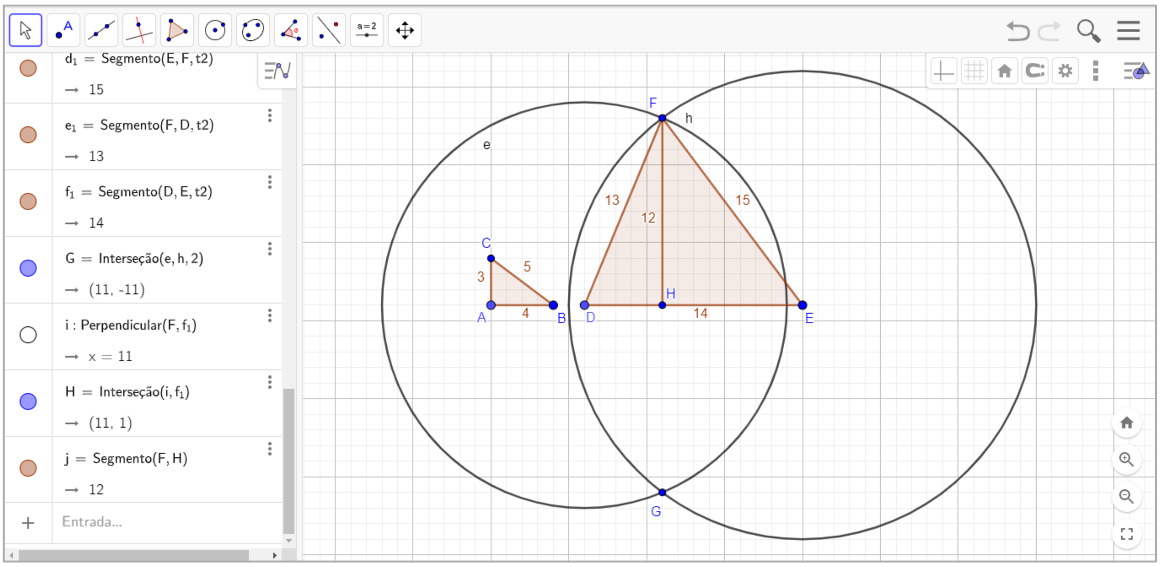
Figura 6 – Construção inicial da altura do triângulo B2 relativa ao lado $\overline{\text{DE}}$




Fonte: Elaborado pela autora

6º Passo: Desmarca-se a opção "i: Perpendicular (F, $f_1$)" e traça-se um segmento de reta com origem nos pontos F e H (intersecção entre a reta $i$ e o segmento $\overline{\text{DE}}$);

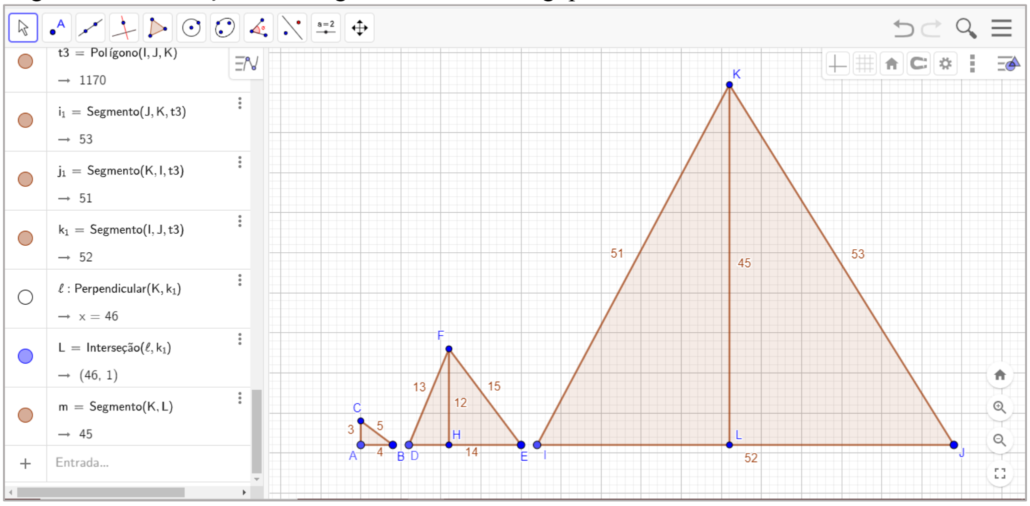
Figura 7 – Construção final da altura do triângulo B2 relativa ao lado $\overline{\text{DE}}$




Fonte: Elaborado pela autora

7º Passo: Para a construção do triângulo B3, segue-se o processo semelhante ao dos triângulos B1 e B2, porém com a base $\overline{IJ}$ com 52 cm de comprimento e as circunferências com raios 51 cm e 53 cm.

Figura 8 – Construção do triângulo B3 de Brahmagupta



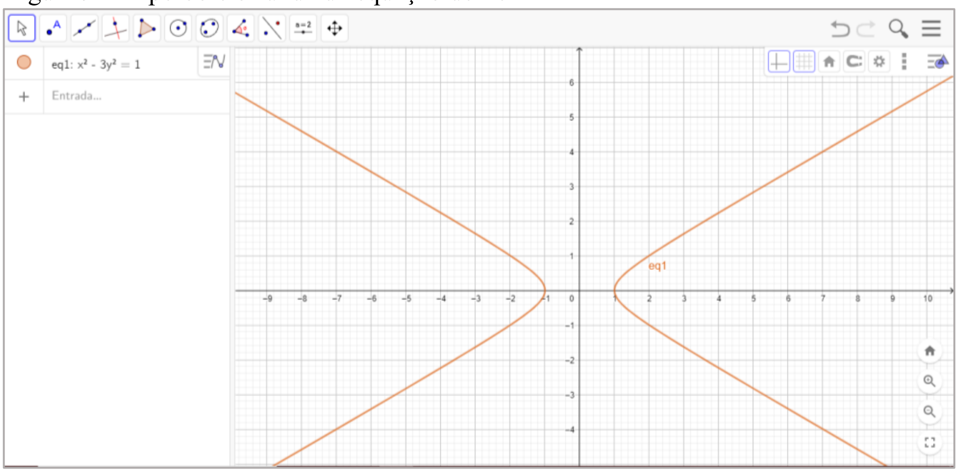

Fonte: Elaborado pela autora

8º Passo: Para finalizar, na opção "Janela de visualização" desmarca-se a opção "Malha" com o intuito de obter a construção mostrada na figura 15.

**Para a construção exposta na figura 16, segue-se o processo:**

1º Passo: Insere-se na janela algébrica a equação de Pell $x^2 - 3y^2 = 1$.

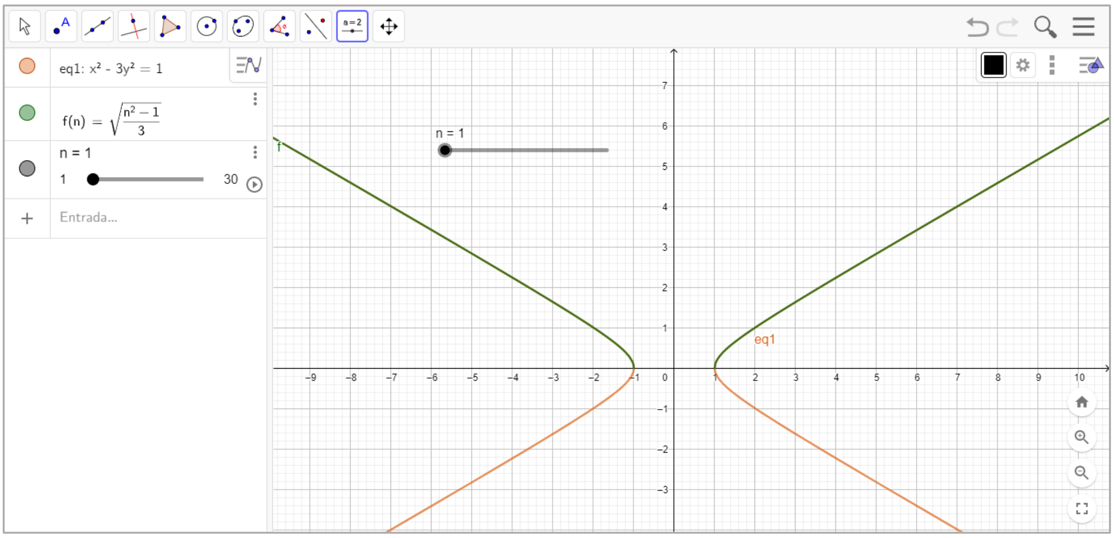
Figura 9 – Hipérbole oriunda da equação de Pell




Fonte: Elaborado pela autora

2º Passo: Para inserir o controle deslizante, deve-se construir a função $f(n) = \sqrt{\frac{n^2-1}{3}}$, com $n \in \mathbb{Z}$.

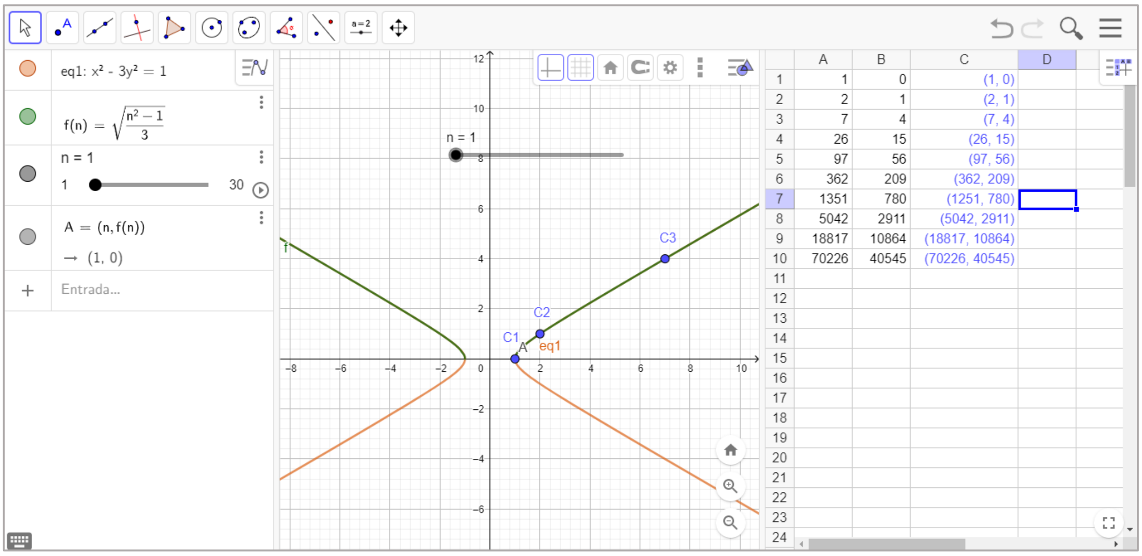
Figura 10 – Construção da função f(n) e controle deslizante




Fonte: Elaborado pela autora

3º Passo: Inclui-se o ponto $A(n, f(n))$, criando também uma planilha com as colunas n, f(n) e (n, f(n)), respectivamente, de acordo com as recorrências $x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1}$ e $y_{n+1} = 4y_n - y_{n-1}$, com a primeira solução (1, 0) e a segunda (2, 1). Dessa forma cria-se os pontos C1, C2, C3, ... através das soluções.

Figura 11 – Construção da planilha




Fonte: Elaborado pela autora

4º Passo: Finalmente, seleciona-se a opção “Janela de visualização 3D”, obtendo a figura 16.

# 4 SITUAÇÃO DIDÁTICA 3

**Conhecimentos prévios** – Propriedades dos polígonos inscritíveis e manuseio com o Geogebra.

(Problema 5 – Elaborado pela autora ) – Combinando os triângulos heronianos (10, 17, 21), (68, 75, 77), (76, 85, 105) e (65, 297, 340) é possível construir um hexágono de Brahmagupta. Obedecendo as propriedades de tal polígono, mostre que ele é inscritível.

**Situação de Ação** – É o momento da tomada de decisão, o objetivo é apresentar a prova de que o hexágono construído é inscritível, para isso, os saberes são colocados em prática. Espera-se que os estudantes analisem os triângulos apresentados afim de traçar estratégias para, a partir deles, construir o hexágono de Brahmagupta, afim de responder o problema. Para isso, presume-se que os mesmos utilizem o software de geometria dinâmica, o Geogebra, para auxiliá-los durante o processo. Segundo Pommer (2013) nessa fase os estudantes estão tomando conhecimento do problema, se familiarizando com os dados apresentados, de modo a identificar as ferramentas necessárias para resolvê-lo, para que assim possa dar início a tomada de decisões.

**Situação de Formulação** – O estudante transforma o conhecimento implícito em explícito, ou seja, eles deverão explicar as estratégias usadas para solucionar o problema. Presume-se que ele construa o hexágono no Geogebra para que assim possa visualizar se o mesmo será cíclico ou não. De início, espera-se que o estudante questione-se a respeito de como construir tal polígono. Para isso, ele deverá sobrepor os lados comuns dos triângulos apresentados no problema. No entanto, para realizar tal ação, o aluno deverá ampliar os triângulos primitivos, pois os mesmos não possuem lados iguais. Dessa forma, ele deverá determinar o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) de um dos lados dos triângulos primitivos, assim, escolhendo os lados 17, 68, 85 e 340, respectivamente, obtém-se MMC igual a 340, dessa forma para que os triângulos tenham um lado 340 em comum, efetua-se as transformações descritas na tabela 4 abaixo.

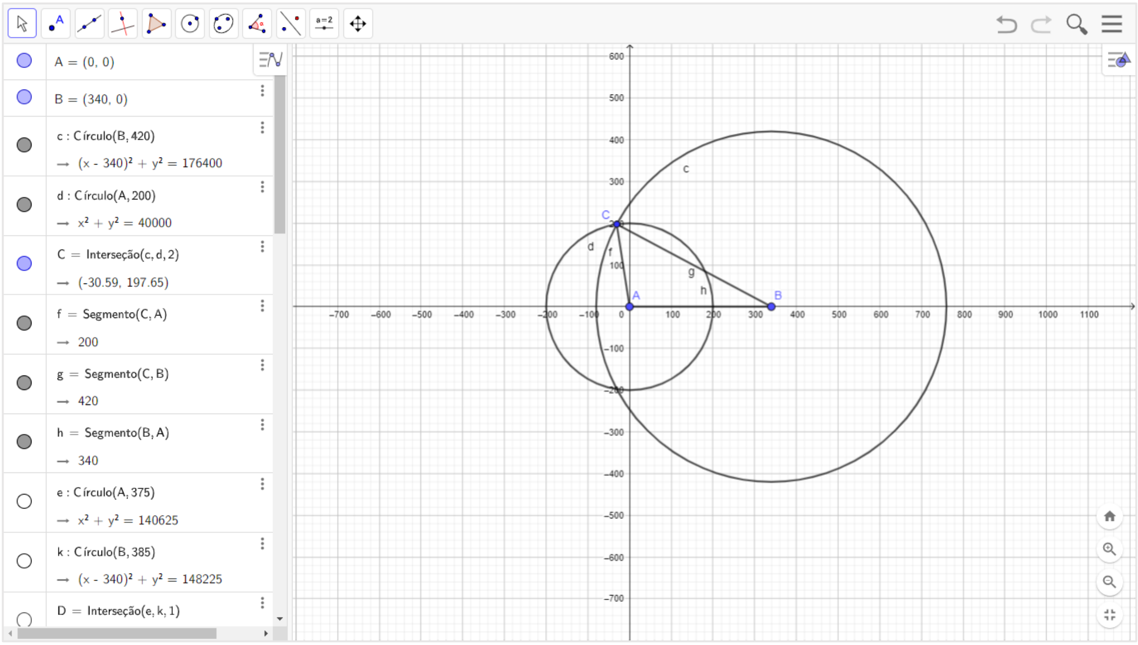
Tabela 4 – Processo de ampliação dos triângulos primitivos

| TRIÂNGULO | AMPLIAÇÃO | TRIÂNGULO AMPLIADO |
|---|---|---|
| (10, 17, 21) | 20 vezes | (200, 340, 420) |
| (68, 75, 77) | 5 vezes | (340, 375, 385) |
| (45, 85, 104) | 4 vezes | (180, 340, 416) |
| (66, 297, 340) | 1 vez | (66, 297, 340) |

Fonte: Elaborado pela autora

De posse dos resultados apresentados na tabela, espera-se que o estudante leve-o para o Geogebra para assim analisar o polígono construído e poder verificar se é cíclico ou não. De início, com base em seus conhecimentos de desenho geométrico, espera-se que o alunos construa o primeiro triângulo (Figura 1) como vértices nos pontos A, B e C.

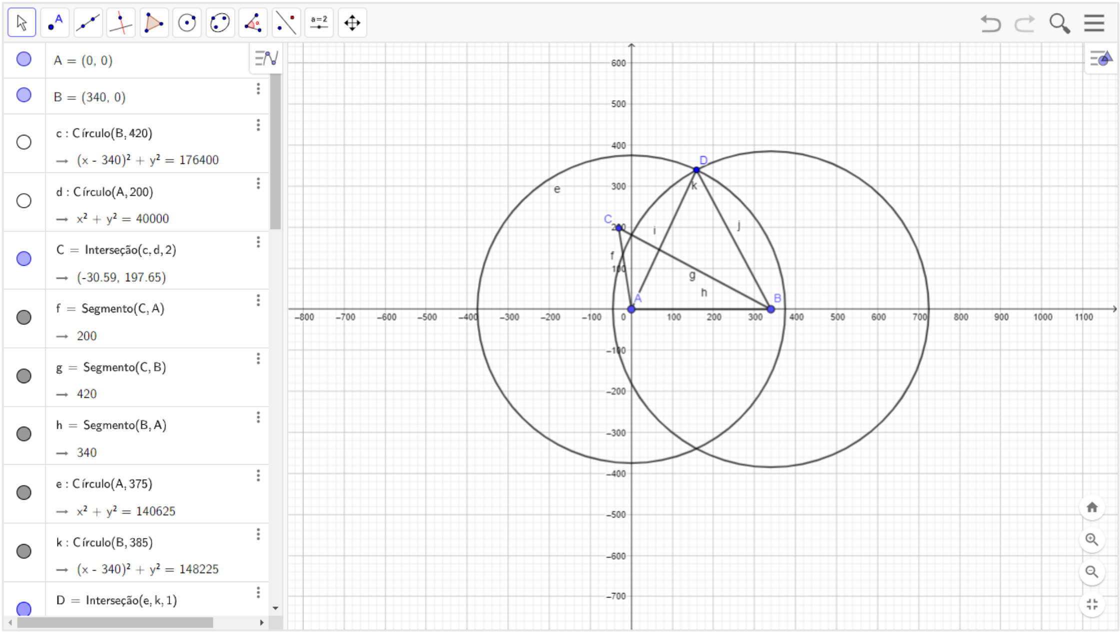
Figura 1 – Construção do triângulo ABC




Fonte: Elaborado pela autora

Em seguida, eles deverão observar que o segundo triângulo deverá ser posicionado sob um dos lados do triângulo ABC. Escolhendo o lado AB comum, o aluno constrói o triângulo ABD, tal que os pontos C e D fiquem no mesmo semiplano em relação à reta AB (Figura 2).

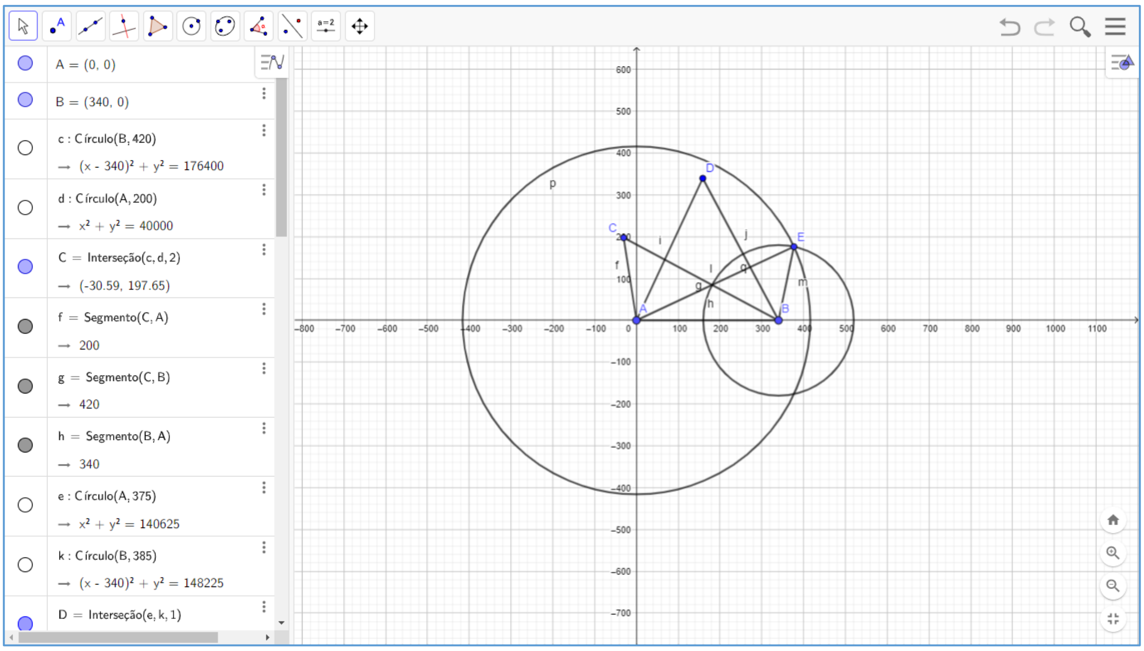
Figura 2 – Construção do triângulo ABD




Fonte: Elaborado pela autora

De forma análoga os alunos deverão construir o triângulo ABE, no mesmo semiplano dos triângulos ABC e ABD, com o lado AB comum.

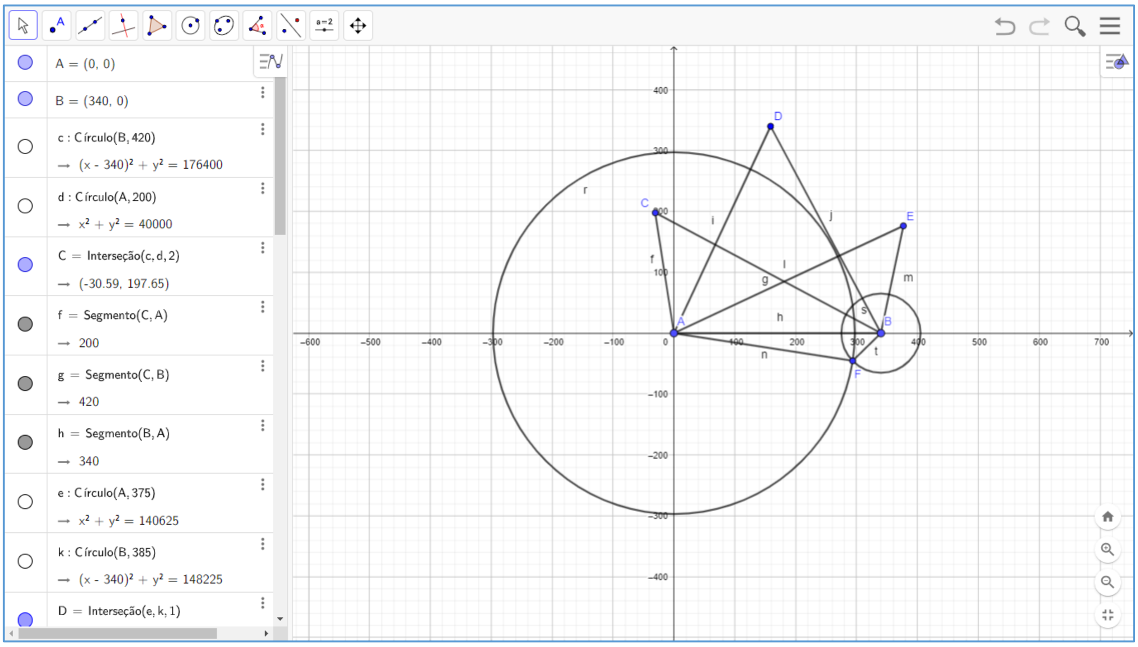
Figura 3 – Construção do triângulo ABE




Fonte: Elaborado pela autora

Por fim, aguarda-se que os discentes construam o quarto e último triângulo ABF com o lado AB também comum mas com o vértice F no outro semiplano (Figura 4). Caso eles construam no mesmo semiplano dos demais perceberão que não formará o hexágono desejado.

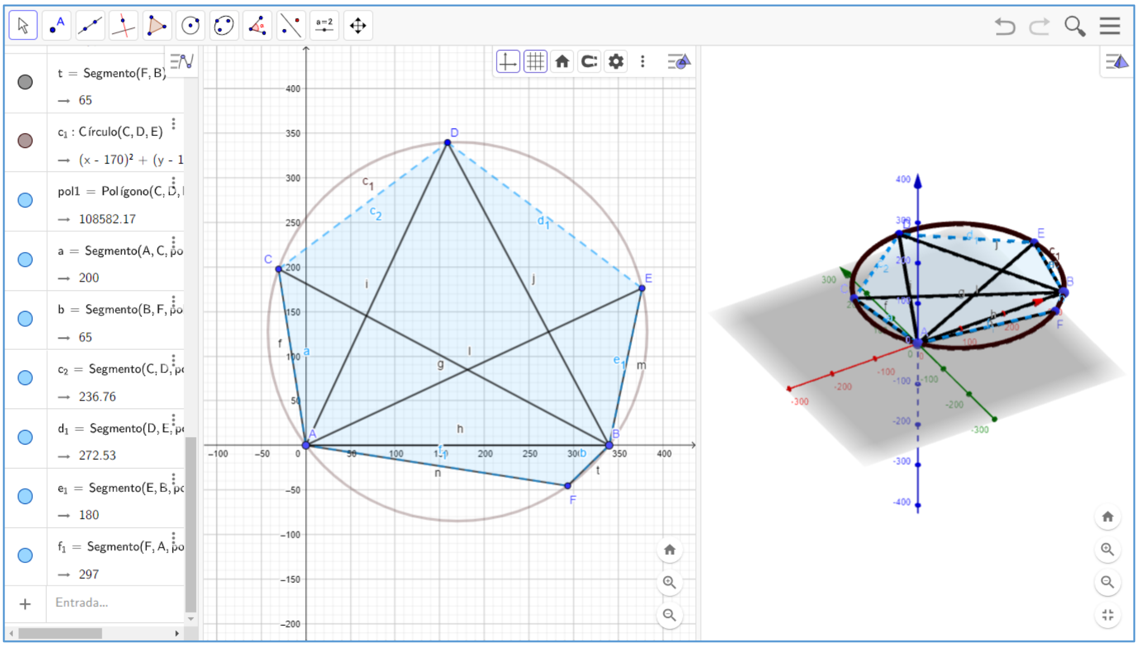
Figura 4 – Construção do triângulo ABF




Fonte: Elaborado pela autora

Uma vez formados os quatro triângulos, os alunos deverão unir os vértices, formando o hexágono ACDEBF. Dessa maneira, construindo uma circunferência circunscrita a um dos triângulos pode-se observar que todos os vértices do hexágono serão pontos da circunferência, provando assim que o hexágono de Brahmagupta é cíclico (Figura 5).

Figura 5 – Visualização do hexágono de Brahmagupta em 2D e 3D



Fonte: Elaborado pela autora

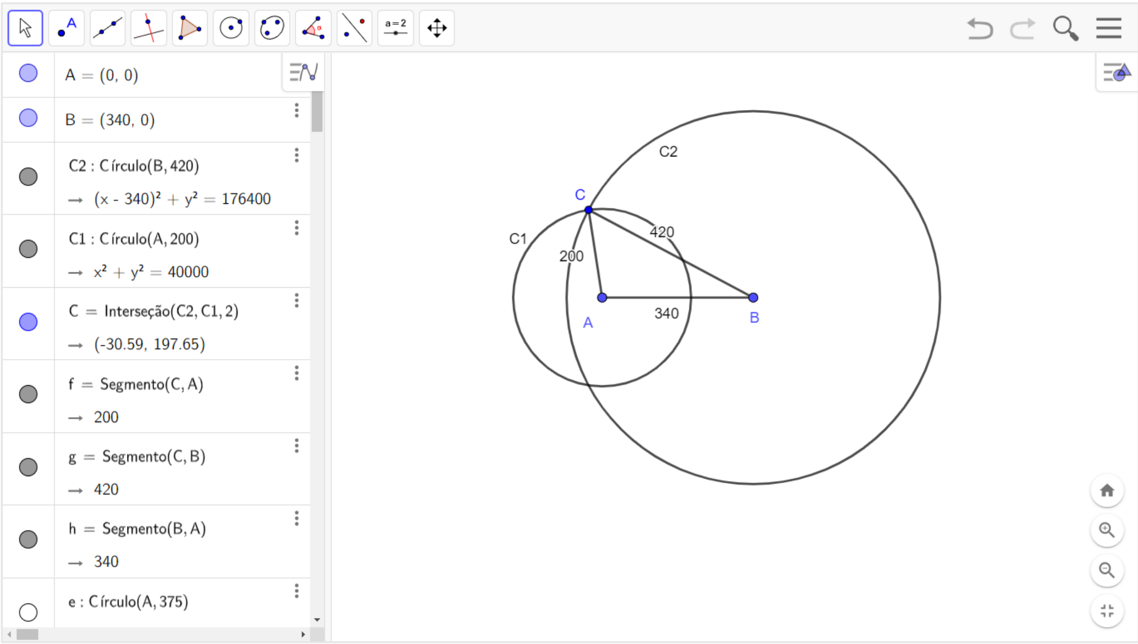
**Situação de Validação** – É chegado o momento que o estudante deve provar a estratégia utilizada por ele durante a resolução do problema dentro de um determinado contexto matemático. Nessa fase "o emissor deve justificar a exatidão e a pertinência de seu modelo e fornecer, se possível, uma validação semântica e sintática". (ALMOULOUD, 2007, p. 39). A validação do modelo apresentado poderá ser feita a partir das propriedades dos hexágonos inscritíveis no livro "A Matemática do Ensino Médio" de autoria de Lima *et al* (2016), onde poderá provar a veracidade da construção feita no Geogebra e do raciocínio apresentado.

**Situação de institucionalização** – O professor retoma o controle da turma, confrontando os modelos apresentados por ele e o descrito na literatura, explica Margolinas (2004). Ainda nessa etapa, o docente apresenta suas reais intenções acerca da atividade realizada, resumindo todo o processo que foi sendo construído ao longo do trabalho.

## CONSTRUÇÃO NO GEOGEBRA

1º Passo: Para a elaboração do Hexágono apresentado na situação didática 4, marca-se dois pontos distintos no plano, um ponto A (0,0) e B (340,0) para a construção do primeiro triângulo (200, 340, 420), com vértices nos pontos A, B e C. Posteriormente, com o auxílio da função “círculo: centro e raio” faz-se duas circunferências: $C_1$ de centro em A e raio 200 e $C_2$ de centro em B e raio 420. Unindo os centros das circunferências ao ponto de intersecção, cria-se o triângulo ABC.

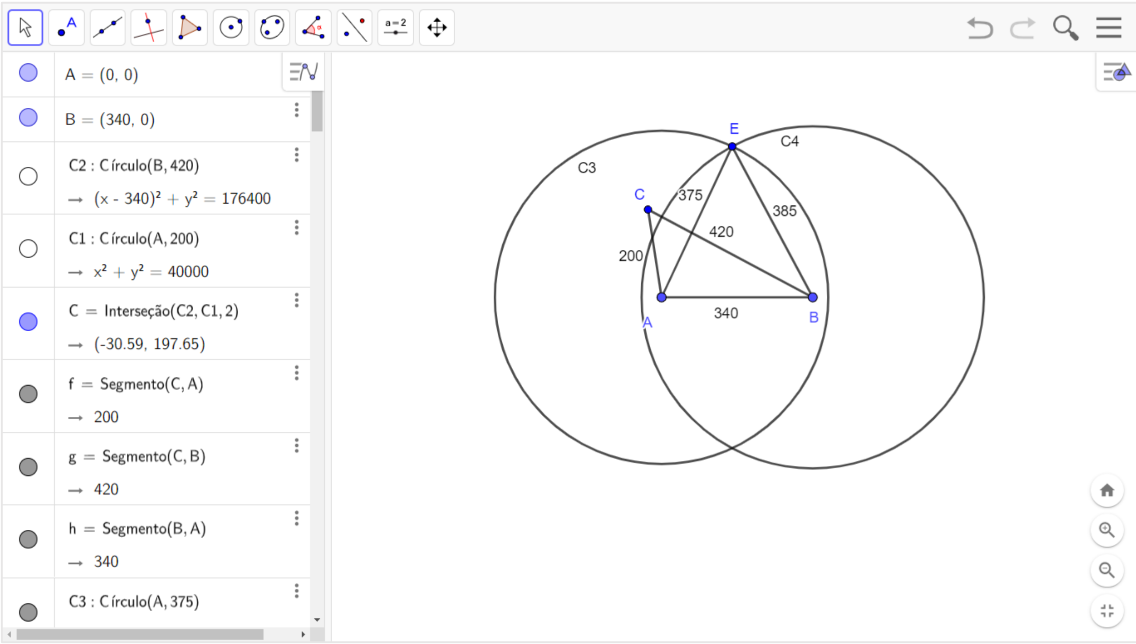
Figura 6 – Construção do triângulo (200, 340, 420)




Fonte: Elaborado pela autora

2º Passo: Para a construção do triângulo (340, 375, 385) segue-se processo análogo ao apresentado no passo anterior utilizando os pontos A e B de forma que os triângulos tenham o lado $\overline{AB}$ comum. Novamente cria-se uma circunferência C3 de centro em A e raio 375 e outra circunferência C4 de centro em B e raio 385. Unindo o ponto A e B ao ponto E, interseção das circunferências C3 e C4, tem-se o triângulo ABD cujos lados medem 340, 375, 385.

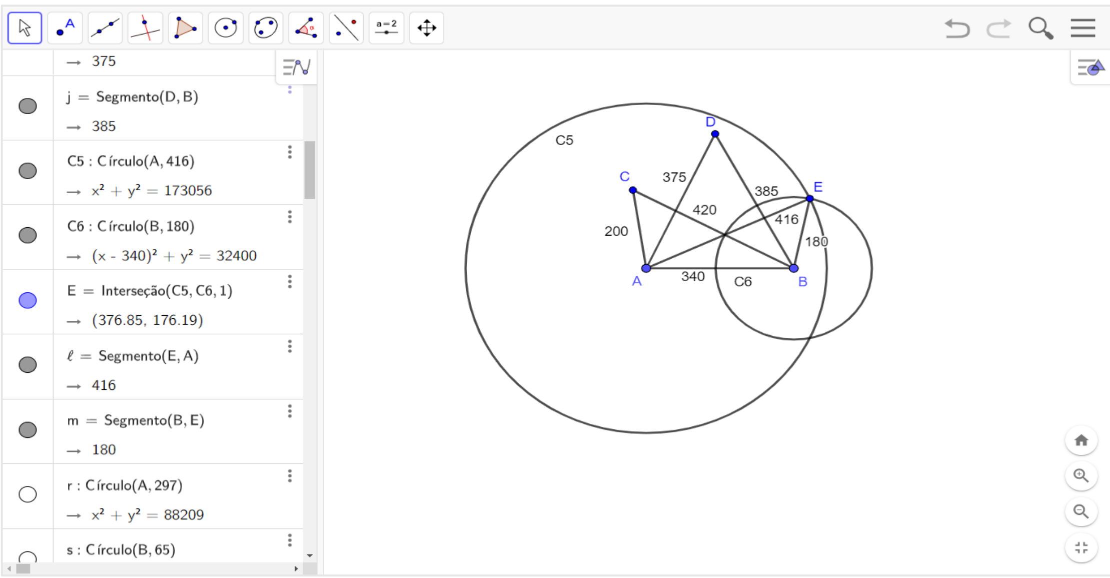
Figura 7 – Construção do triângulo 340, 375, 385.




Fonte: Elaborado pela autora

3º Passo: Para a construção do triângulo (180, 340, 416) segue-se o mesmo processo citado anteriormente. Com o auxílio da função “círculo: centro e raio” cria-se duas circunferências: C5 de centro no ponto A e raio 416 e C6 de centro em B de raio 180. Unindo os pontos A e B a ao ponto E, intersecção das circunferências C5 e C6, obtém-se o triângulo desejado.

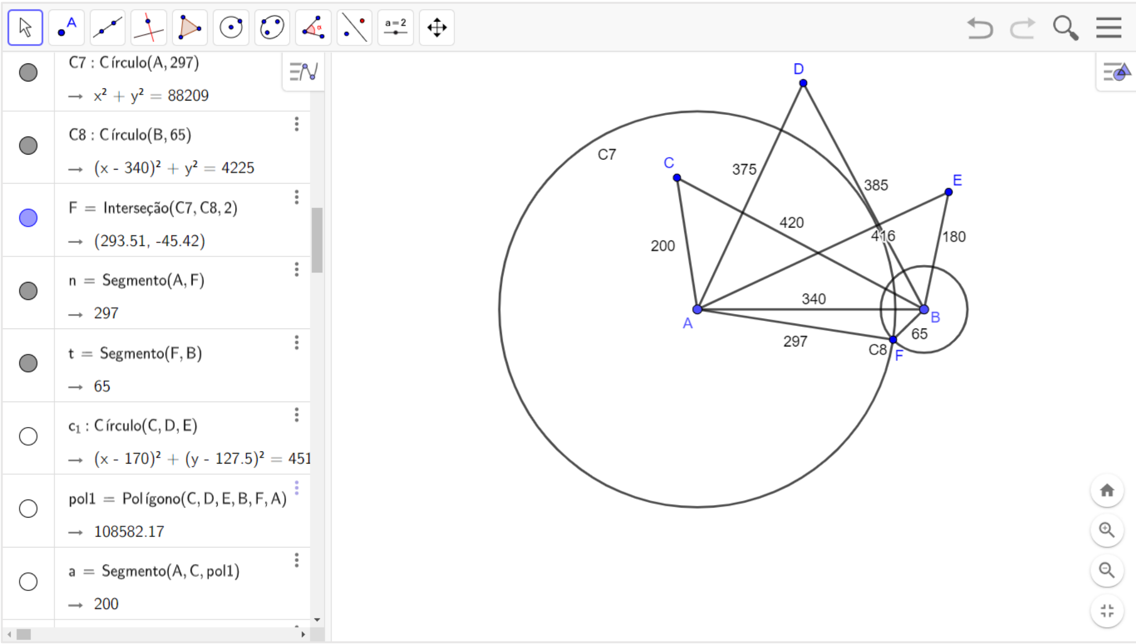
Figura 8 – Construção do triângulo (180, 340, 416)




Fonte: Elaborado pela autora

4º Passo: Para a construção do último triângulo (66, 297, 340) constrói-se as circunferências C7 e C8 com centros em A e B e raios respectivamente, 297 e 66. Unindo os pontos a intersecção de C7 e C8, cria-se o triângulo desejado.

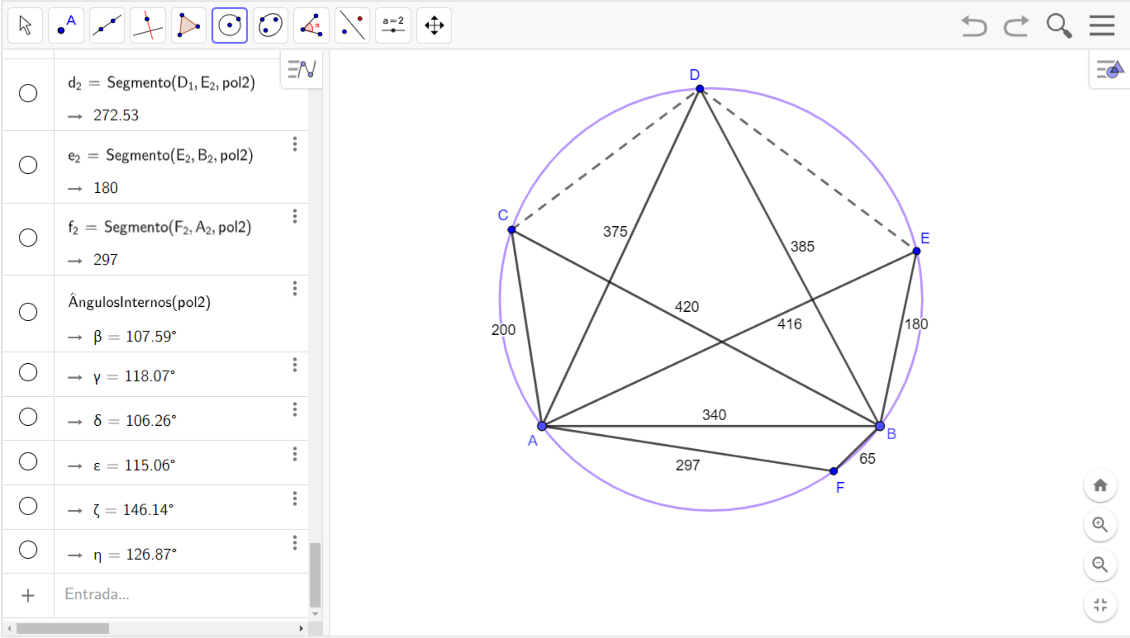
Figura 9 – Construção do triângulo (66, 297, 340)




Fonte: Elaborado pela autora

5º Passo: Com o auxílio da função “segmento” unisse os pontos C e E ao ponto D. E, finalmente, com a função “Círculo definido por três pontos” seleciona-se quaisquer três pontos do hexágono.

Figura 10 – Hexágono ABCDEF




Fonte: Elaborado pela autora

6º Passo: Para destacar em cores os triângulos construídos seleciona-se a opção “Polígonos”.

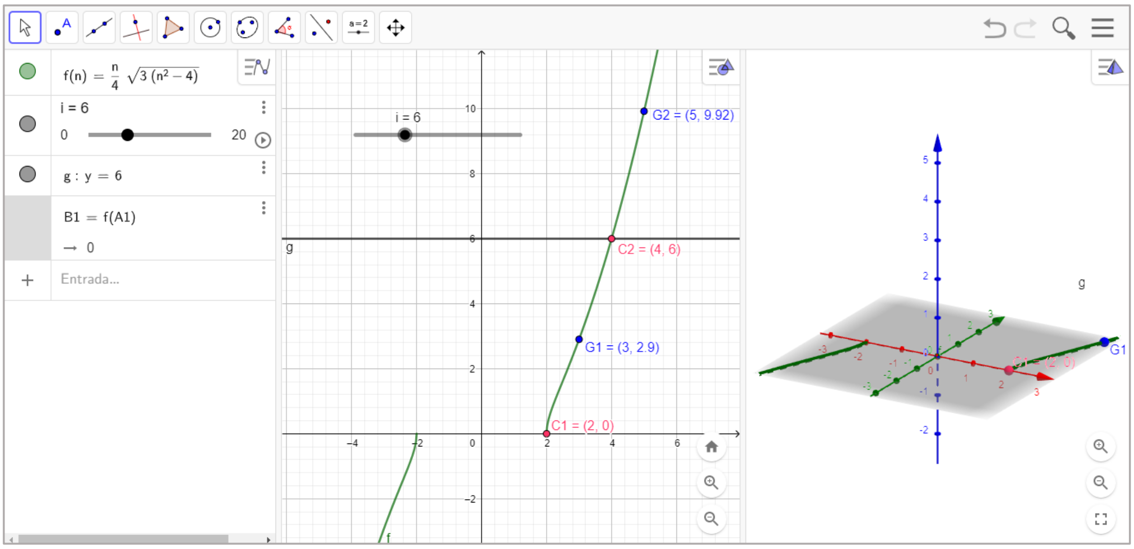
# 5 SITUAÇÃO DIDÁTICA 4

**Conhecimentos prévios** – Definição de triângulo de Brahmagupta, relações de área de um triângulo e interpretação de gráficos.

(Problema 4 – Elaborado pela autora ) Se os números inteiros consecutivos n – 1, n, n + 1 são lados de um triângulos de Brahmagupta, mostre que n é um número par.

**Situação de Ação** – O professor fará a exposição da construção do Geogebra, conforme apresentada na figura 5, com o intuito de colaborar com o processo de compreensão dos alunos para o que está sendo questionado no problema. Inicialmente, os estudantes perceberão o gráfico de uma função f, e sobre ela dois tipos de pontos: os que possuem abscissas pares (C1 e C2) e abscissas ímpares (G1 e G2).

Figura 1 – Visualização 2D/3D da relação entre os lados de um triângulo de Brahmagupta e sua respectiva área.




Fonte: Elaborado pela autora

**Situação de formulação** – Ao haver trocas de mensagens escritas e/ou verbais, os alunos perceberão que no gráfico os valores do eixo x referem-se a um dos lados de um triângulo e os valores do eixo y determinarão sua respectiva área. Essa determinação pode ser concluída após os alunos discutirem que se os triângulos de Brahmagupta possuem lados consecutivos, então considerando n = 4, então seus lados serão 3, 4, 5. Dessa foram, como trata-se de um triângulo retângulo sua área poderá ser expressa por $S = \frac{b \cdot h}{2}$, portanto $S = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$.

Com isso, os alunos devem checar que nem todos os pontos do eixo x onde b é par será um lado do triângulo de Brahmagupta, isso porque no caso do ponto C3, a área será um número racional e os triângulos dessa classe devem possuir lados e área números inteiros positivos. Partindo desse raciocínio, concluirão que n não poderá ser ímpar pois ao checarem o Geogebra, verão que nos pontos G1, G2, G3, ..., $G_n$ as áreas também serão números racionais. Eles também perceberão que ao manusear o controle deslizante i referente a reta auxiliar, destacada em azul, os pontos de intersecção da mesma com a função f sob um dos pontos de C, será exatamente o lado par e a área de um triângulo de Brahmagupta.

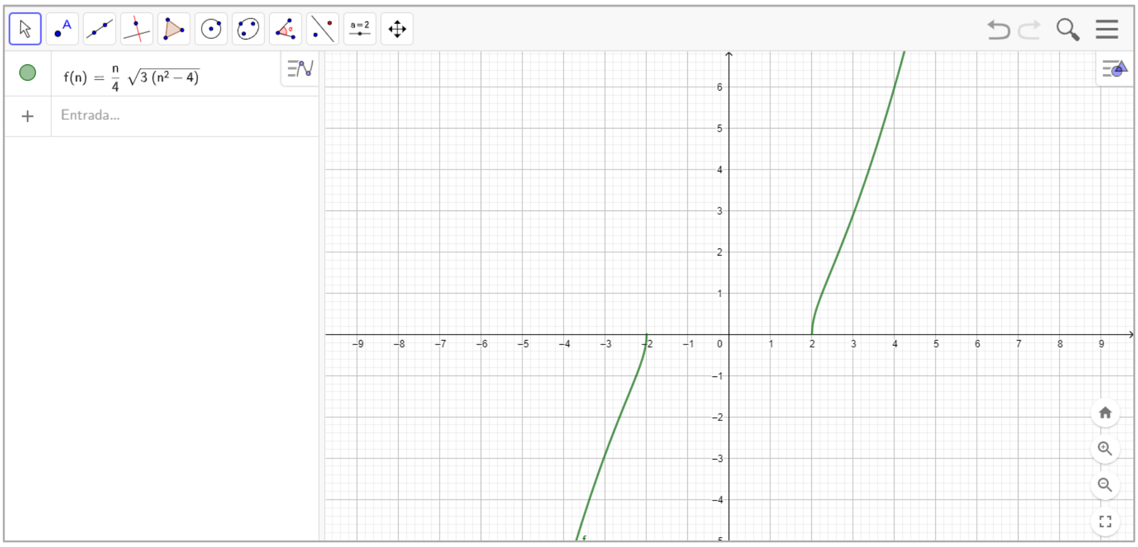
**Situação de Validação** – Espera-se que os alunos procurem comprovar a veracidade do modelo formulado na etapa anterior. Para isso, os alunos poderão validar seu modelo a partir da relação de Heron, conforme apresentado na dissertação de Pereira (2015), para calcular a área de um triângulo qualquer a partir da medida de seus lados, e comparar a solução com os dados apresentados no Geogebra.

**Situação de Institucionalização** – Nessa fase, o professor volta a ter o controle das atividades, formalizando o resultado apresentado pelos alunos. Conforme Almouloud (2007, p. 40), "o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber". Dessa forma, o professor poderá confrontar os modelos matemáticos e computacional.

## CONSTRUÇÃO NO GEOGEBRA

1º Passo: Insere-se a função $f(n) = \frac{n}{4}\sqrt{3(n^2 - 4)}$;

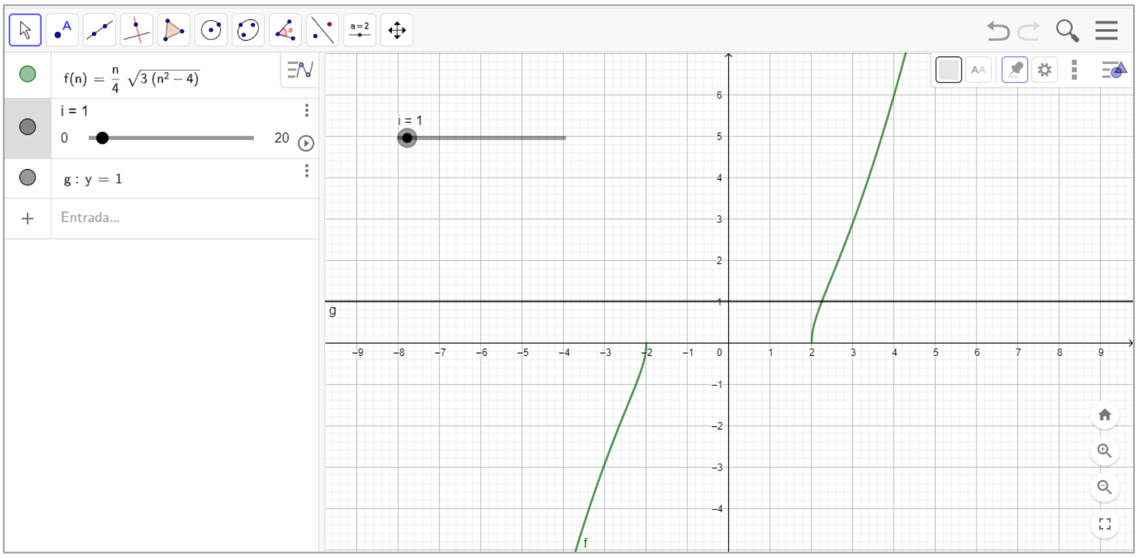
Figura 2 – Construção do gráfico da função f(n)




Fonte: Elaborado pela autora

2º Passo: Cria-se um controle deslizante $i$ variando nos inteiros, e em seguida cria-se a função constante $y = i$;

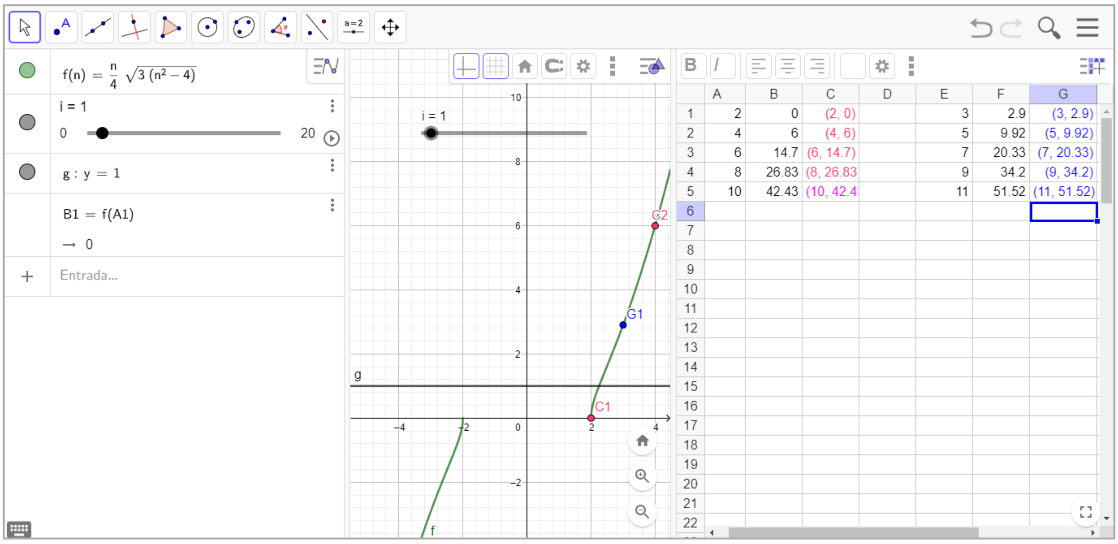
Figura 3 – Construção do controle deslizante




Fonte: Elaborado pela autora

3º Passo: Cria-se uma planilha com a função $f$ obtendo os pontos C1, C2, C3, ... com as abscissas pares e G1, G2, G3, ... com as abscissas ímpares;

Figura 4 – Construção da tabela




Fonte: Elaborado pela autora

4º Passo: Finalmente, seleciona-se a opção "Janela de visualização 3D", obtendo a figura 27.

# 6 SITUAÇÃO DIDÁTICA 5

**Conhecimentos prévios** – Noções básicas de construção no software GeoGebra e propriedades dos quadriláteros de Brahmagupta.

(Problema 5 – Elaborado pela autora ) A construção de um quadrilátero de Brahmagupta pode ser feita a partir da sobreposição de triângulos heronianos. Dessa forma, apresente um quadrilátero de Brahmagupta formado por dois triângulos heronianos a sua escolha.

**Situação de ação** – Inicialmente, o professor, apresentará para os estudantes uma lista contendo seis triângulos heronianos de classes distintas. Ao analisarem, os alunos perceberão que não será possível fazer a sobreposição pois a medida de seus lados são distintos. Dessa forma, buscarão maneiras de ampliação ou de redução dos triângulos primitivos.

Tabela 1 – Triângulos heronianos

| TRIÂNGULOS HERONIANOS | |
|---|---|
| $T_1$ | (4, 5, 3) |
| $T_2$ | (17, 21, 10) |
| $T_3$ | (68, 77, 75) |
| $T_4$ | (85, 76, 105) |
| $T_5$ | (85, 104, 45) |
| $T_6$ | (68, 75, 13) |

Fonte: Elaborado pela autora

**Situação de formulação** – Nesse momento os alunos, com o auxílio do software de geometria dinâmica GeoGebra e trocando informações entre si, observarão que para ampliar os triângulos escolhidos devem determinar o mínimo múltiplo comum de um dos lados dos triângulos para assim obter o lado comum. Tomaremos como exemplo os triângulos $T_1$ e $T_2$ com lados, respectivamente, (3, 4, 5) e (10, 17, 21). Escolhendo os lados 3 e 10, obtém-se o MMC igual a 30, dessa forma para que os dois triângulos tenham um lado 30 em comum, multiplica-se o primeiro por 10 e o segundo por 3.

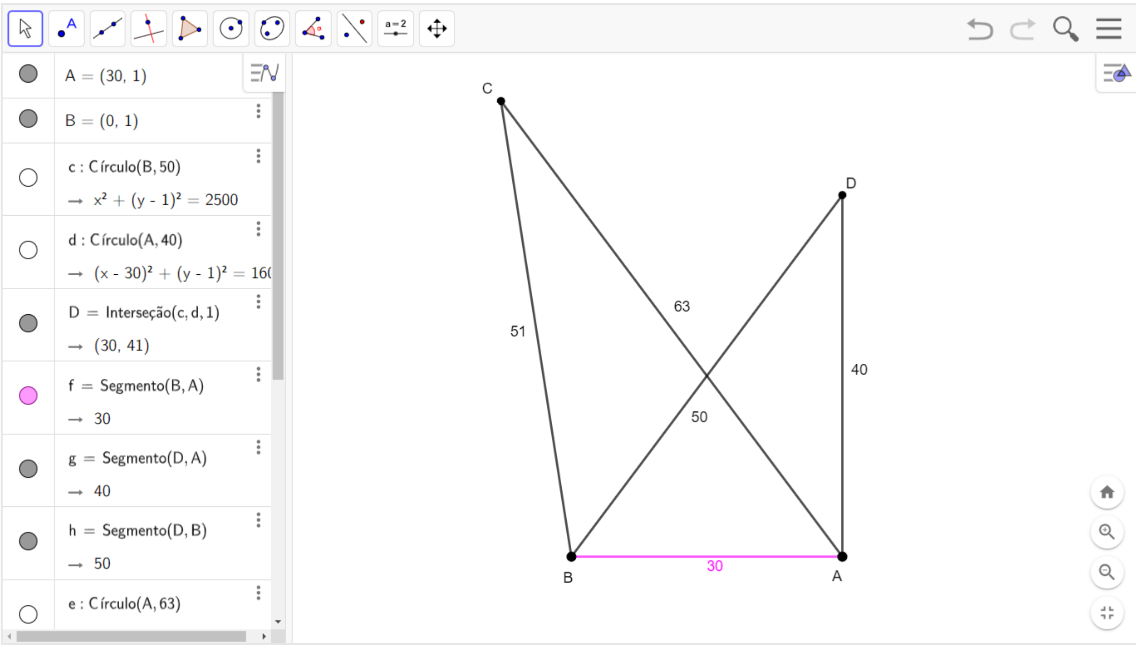
Tabela 2 – Processo de ampliação dos triângulos primitivos

| | $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|---|
| LADOS | $3 \cdot 10 = 30$ | $17 \cdot 3 = 51$ |
| | $4 \cdot 10 = 40$ | $21 \cdot 3 = 63$ |
| | $5 \cdot 10 = 50$ | $10 \cdot 3 = 30$ |
| AMPLIAÇÃO | (30, 40, 50) | (51, 63, 30) |

Fonte: Elaborado pela autora

Realizando a sobreposição, os alunos obterão o polígono mostrado na imagem abaixo, onde $T_1$ e $T_2$ estão sendo representados, respectivamente, pelos triângulos ABD e ABC.

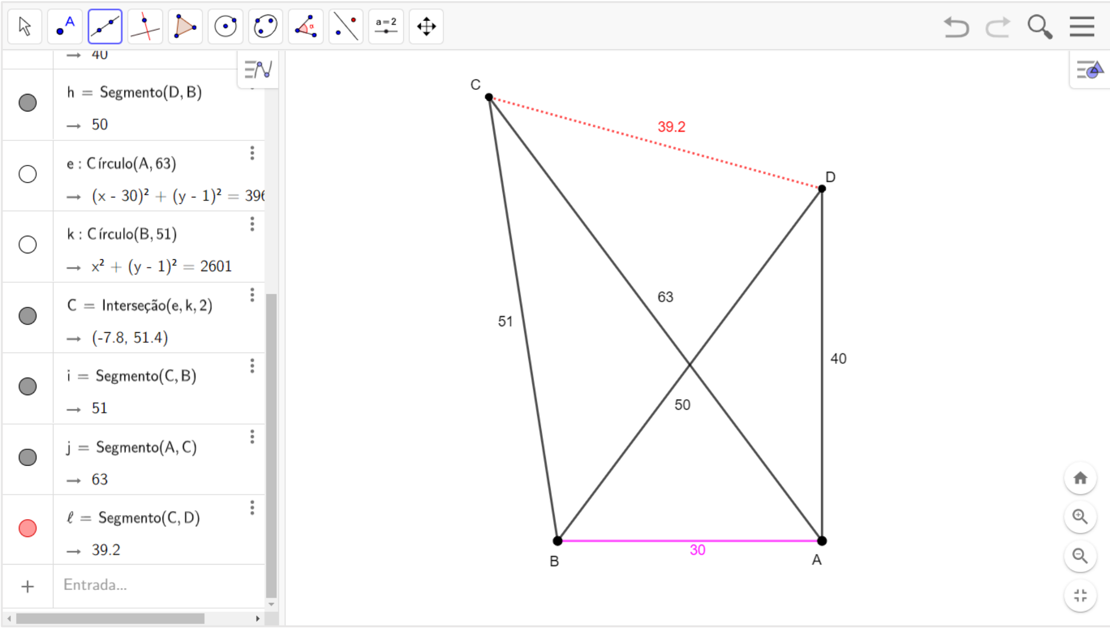
Figura 1 – Sobreposição dos triângulos $T_1$ e $T_2$




Fonte: Elaborado pela autora

Com o auxílio da função “segmento” os alunos poderão unir os vértices C e D para obter sua medida e formar assim um quadrilátero.

Figura 2 – Construção do quadrilátero ABCD




Fonte: Elaborado pela autora

Espera-se que os estudantes percebam que o polígono não é de Brahmagupta pois para isso ele deve apresentar os lados e a área inteiros. Assim, os alunos poderão multiplicar os lados do quadrilátero por um valor de forma a obter números inteiros. No exemplo mostrado acima, multiplicando os lados por 5 teremos o quadrilátero de lados iguais a AB = 150, CB = 255, CD = 196 e AD = 200 e área inteira. Dessa forma, o novo quadrilátero será um quadrilátero de Brahmagupta.

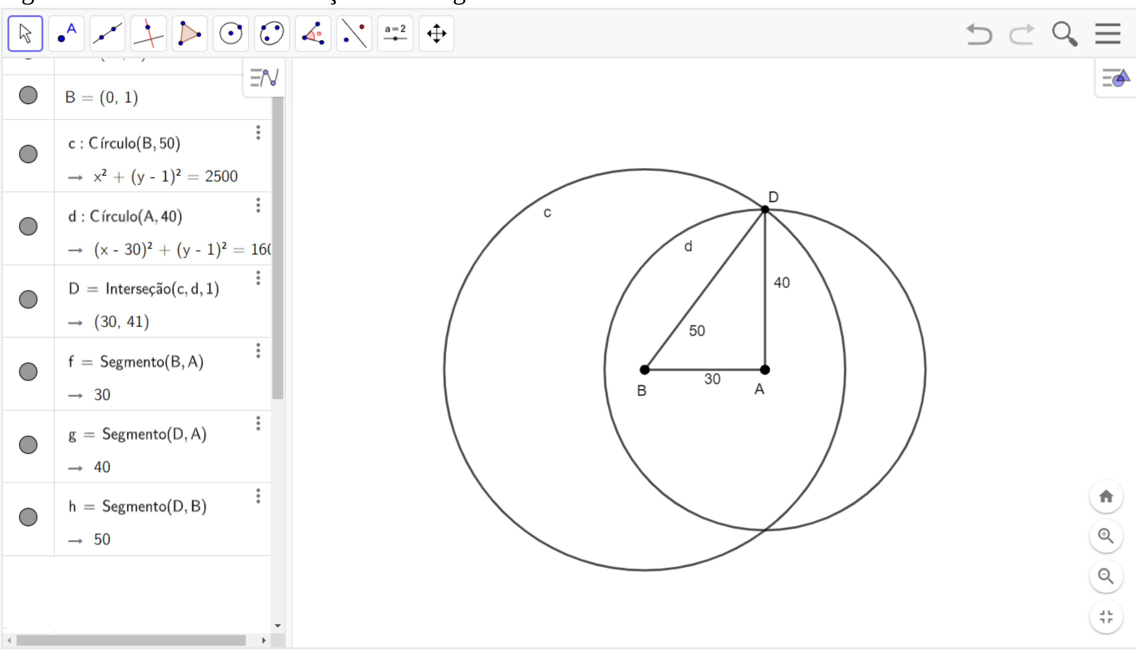
**Situação de Validação** – Nesse momento, conforme Barbosa (2016), os estudantes devem apresentar a validade do modelo criado por ele. Dessa forma, espera-se que os alunos busquem na literatura meios de fazê-lo. Para isso, eles poderão validar suas resoluções comparando os modelos criados aos resultados apresentados no artigo de Sastry (2005), onde está descrito um processo algébrico para construir quadriláteros de Brahmagupta. E, para verificar se a área é inteira, os estudantes podem utilizar a relação indicada pelo matemático Carl Anton Bretschneider.

**Situação de Institucionalização** – Finalizando esse processo, explica Margolinas (2004), o docente volta a ter o controle das atividades, sanando as dúvidas apresentadas pelos alunos ao longo do processo. Ainda nessa etapa o professor analisar e discutir os modelos matemáticos a construção feita pelos estudantes.

## CONSTRUÇÃO NO GEOGEBRA

1º Passo: Para construir o triângulo ABD, cria-se dois pontos A e B com coordenadas, respectivamente iguais a (30, 1) e (0,1). Em seguida, para determinar o terceiro vértice e assim obter o triângulo, constrói-se duas circunferências, com centros nos pontos A e B. Para isso utiliza-se a função “Círculo: centro e raio”. As circunferências de centro em A e B devem ter, respectivamente, raios iguais a 40 cm e 50 cm. A união do ponto D, intersecção das circunferências, com os pontos A e B, formam o primeiro triângulo heroniano, figura 3.

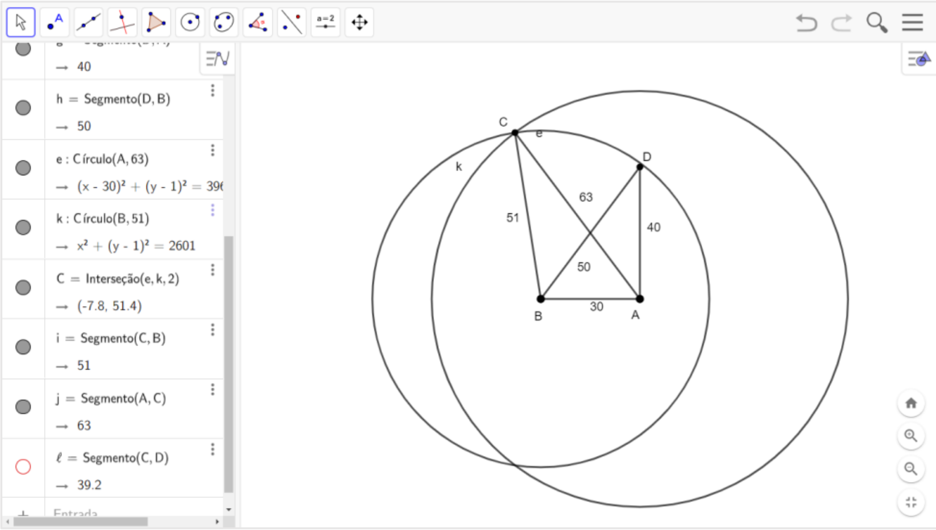
Figura 3 – Processo de construção do triângulo ABD




Fonte: Elaborado pela autora

2º Passo: Para a construção do segundo triângulo heroniano, segue processo semelhante ao realizado anteriormente. No entanto, como os triângulos devem ser sobrepostos no segmento AB, o mesmo também será criado sobre os pontos A e B. Dessa forma, cria-se uma nova circunferência de centro em A e raio 63 cm e uma nova circunferência de centro em B e raio 51 cm. Unindo o ponto de C, intersecção das circunferências, aos pontos A e B forma-se o triângulo heroniano ABC.

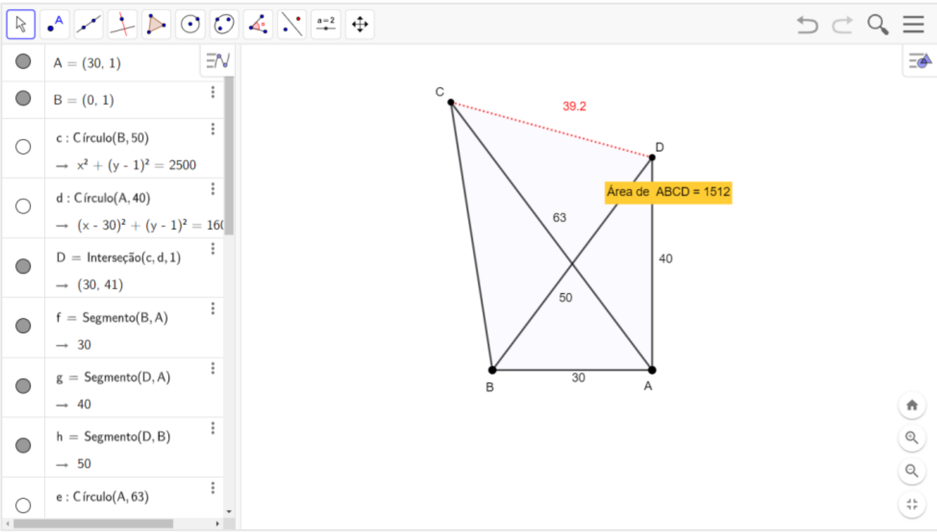
Figura 4 – Processo de construção do triângulo ABC




Fonte: Elaborado pela autora

3º Passo: Um vez sobrepostos e unindo os vértices C e D tem-se o quadrilátero ABCD. Para determinar o valor de sua área, une-se os vértice por meio da função "Polígono" formando a região ABCD. Em seguida seleciona-se a função "Área" para o software apresentar seu valor.

Figura 5 – Processo de construção do quadrilátero ABCD




Fonte: Elaborado pela autora

# REFERÊNCIAS


ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática.** Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

BARBOSA, Gerson Silva. Teoria das situações didática e suas influências na sala de aula. *In*: XII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA., 2016, São Paulo. **Anais [...] .** São Paulo: Sbem, 2016. p. 1-12. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/7303_4383_ID.pdf. Acesso em: 02 maio 2020

MARGOLINAS, Claire. **Points de vue de l'élève et du professeur. Essai de développement de la théorie des situations didactiques**. 2004. Tese de Doutorado. Université de Provence-Aix-Marseille I. Disponível em: https://tel.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/429580/filename/HDR_complet_Margolinas.pdf Acesso em: 02 maio 2020.

PEREIRA, Marivaldo Bispo. **Triângulos de Heron**. 2015. 45 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2015.

POMMER, Wagner Marcelo; POMMER, Clarice P. C. R. O contrato didático na sala de aula de matemática. *In*: SEMINÁRIO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DE NOVA ANDRADINA, 5., 2013, Nova Andradina, MS. **[Anais]**. Nova Andradina, UEMS, 2013.

SASTRY, K. R. S. Brahmagupta Quadrilaterals. **Forum Geometricorum**, Florida, v. 2, p. 167-173, dez. 2002. Disponível em: http://forumgeom.fau.edu/FG2002volume2/FG200221.pdf. Acesso em: 12 abr. 2020.