



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ESTRUTURAL E CONSTRUÇÃO CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL
MESTRADO ACADÊMICO EM ENGENHARIA CIVIL

FRANCISCO DAVYD PEREIRA SILVA

**ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA DE PLACAS E CASCAS DE MATERIAL COM
GRADAÇÃO FUNCIONAL UTILIZANDO ELEMENTOS DE BÉZIER**

FORTALEZA

2021

FRANCISCO DAVYD PEREIRA SILVA

ANÁLISE ISOGOMÉTRICA DE PLACAS E CASCAS DE MATERIAL COM GRADAÇÃO
FUNCIONAL UTILIZANDO ELEMENTOS DE BÉZIER

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia Civil do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Estruturas

Orientador: Prof. D.Sc. Evandro Parente Junior

Coorientador: Prof. D.Sc. João Batista Marques de Sousa Junior

FORTALEZA

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- S58a Silva, Francisco Davyd Pereira.
Análise Isogeométrica de placas e cascas de material com gradação funcional utilizando elementos de Bézier / Francisco Davyd Pereira Silva. – 2021.
131 f. : il. color.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Fortaleza, 2021.
Orientação: Prof. Dr. Evandro Parente Junior.
Coorientação: Prof. Dr. João Batista Marques de Sousa Junior.
1. Análise Isogeométrica. 2. Triângulos de Bézier. 3. Materiais com gradação funcional. 4. Flambagem térmica. I. Título.

CDD 624.1

FRANCISCO DAVYD PEREIRA SILVA

ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA DE PLACAS E CASCAS DE MATERIAL COM GRADAÇÃO
FUNCIONAL UTILIZANDO ELEMENTOS DE BÉZIER

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia Civil do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Centro de Tecnologia da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Civil. Área de Concentração: Estruturas

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. D.Sc. Evandro Parente Junior (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. D.Sc. João Batista Marques de Sousa
Junior (Coorientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. D.Sc. Antônio Macário Cartaxo de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. PhD Eliseu Lucena Neto
Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA)

À minha família, por acreditar e investir em mim.
Mãe e pai, seus cuidados, empenho e dedicação
me deram a certeza para seguir firme nessa ca-
minhada.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, a Deus, por estar sempre presente em minha vida, me guiar e permitir mais esse passo em minha jornada.

Aos meus pais, Maria e Milton, pelo amor, suporte e dedicação todos esses anos.

A minha noiva, Luana, pelo amor, paciência e apoio em todas as minhas decisões.

A minha irmã, Cinthya, pelo apoio, preocupação e cuidado diário.

A todos os professores que contribuíram para a formação do meu conhecimento ao longo do mestrado, em especial, ao meu orientador, Evandro Parente Júnior, pela orientação dada em todos os momentos, pela dedicação e profissionalismo que guia sua vida acadêmica (grande exemplo a ser seguido).

A UFC, LMCV e CAPES, pelo apoio financeiro para a realização deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho trata da análise não linear geométrica e da estabilidade de estruturas com gradação funcional considerando carregamentos termomecânicos. Aspectos como a carga crítica e o caminho pós-crítico de placas e cascas abatidas com gradação funcional foram estudados. A modelagem dessas estruturas foi realizada utilizando a Análise Isogeométrica (AIG), que é um método numérico de análise estrutural que utiliza como funções de aproximação as mesmas funções utilizadas pelos programas CAD para representação da geometria (ex. Bézier, B-Splines, NURBS). A AIG apresenta vantagens como representação exata da geometria, facilidade de refinamento do modelo e integração mais simples entre os programas de CAD e de análise estrutural. Porém, esse método apresenta problemas na união das etapas de modelagem da geometria do problema e a análise numérica, devido ao paradigma de representações de fronteiras adotado nos sistemas CAD, que não fornece a parametrização do interior da região analisada. Uma alternativa a essa problemática é a utilização dos elementos triangulares Bézier, pois possibilitam a conexão automatizada entre o modelo CAD e o modelo de análise. A formulação apresentada é baseada na teoria de Reissner-Mindlin para placas e cascas considerando o cisalhamento transversal e de Marguerre para análise não linear de cascas abatidas. Diante do exposto, o presente trabalho avalia o desempenho dos elementos triangulares de Bézier em diferentes exemplos. Em todos os testes os elementos apresentaram resultados satisfatórios e mostraram que não foi necessária nenhuma técnica especial de integração para combater o problema do travamento inerente à formulação adotada, sendo utilizada a integração completa correspondente à quadratura triangular de Gauss. Formulações que consideram os efeitos térmicos de estruturas com gradação funcional foram desenvolvidas e implementadas no *software* acadêmico FAST. Exemplos disponíveis na literatura foram utilizados com o intuito de validar as implementações. Os resultados obtidos foram excelentes e confirmaram a correta implementação dos efeitos térmicos. Nos estudos da flambagem térmica de estruturas de materiais com gradação funcional (MGF), verificou-se que as condições de contorno, variação da fração de volume e o método de homogeneização para a determinação das propriedades efetivas apresentam grande influência sobre a temperatura crítica de flambagem e o comportamento pós-crítico de estruturas com gradação funcional.

Palavras-chave: Análise Isogeométrica. Triângulos de Bézier. Materiais com Gradação Funcional. Flambagem Térmica.

ABSTRACT

This work deals with the stability and geometrically nonlinear analysis of functionally graded structures considering thermomechanical loads. Aspects such as the critical load and post-critical path of functionally graded plates and shallow shells were studied. The modeling of these structures was performed using Isogeometric Analysis (IGA), which is a numerical method of structural analysis that uses as approximation functions the same functions used by CAD programs for geometry representation (e.g. Bézier, B-Splines, NURBS). IGA presents advantages such as exact geometry representation, ease of model refinement and simpler integration between CAD programs and structural analysis programs. However, this method presents problems in the union of the problem geometry modeling steps and the numerical analysis, due to the boundary representation paradigm adopted in CAD systems, which does not provide the parameterization of the interior of the analyzed region. An alternative to this problem is the use of Bézier triangular elements, as they enable the automated connection between the CAD model and the analysis model. The presented formulation is based on Reissner-Mindlin plate theory considering the transverse shear and Marguerre nonlinear theory of shallow shells. Given the above, this work evaluates the performance of Bézier triangular elements in different examples. In all tests, the elements presented satisfactory results and showed that no special integration technique was needed to combat the locking problem inherent to the adopted formulation, being used the full integration by Gaussian quadrature. Formulations that consider the thermal effects of functionally graded structures were developed and implemented in the academic software FAST. Examples available in the literature were used in order to validate the implementations. The results obtained were excellent and confirmed the correct implementation of the thermal effects. In studies of thermal buckling of functionally graded materials (FGM) structures, it was found that boundary conditions, volume fraction variation, and the homogenization method for the determination of effective properties have a strong influence on the critical buckling temperature and post-critical behavior of functionally graded structures.

Keywords: Isogeometric Analysis. Bézier Triangles. Functionally Graded Materials. Thermal Buckling.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Geometria deformada e indeformada de uma aresta de uma placa sob a FSDT.	20
Figura 2 – Seção transversal de modelos de MGF.	25
Figura 3 – Variação da fração de volume ao longo de uma seção.	27
Figura 4 – Representação de objetos utilizando múltiplos <i>patches</i> de NURBS em B-Rep.	30
Figura 5 – Exemplo de curvas de Bézier de grau 3.	32
Figura 6 – Polinômios de Bernstein para vários graus.	34
Figura 7 – Efeito da variação do peso.	35
Figura 8 – Funções de base <i>B-Splines</i> $p = 2$ e vetor de <i>knots</i> $\Xi = [0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5]$.	36
Figura 9 – Funções de base B-Splines e suas continuidades no interior dos spans de um vetor de <i>knots</i> $\Xi = [0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5]$.	37
Figura 10 – Efeito da multiplicidade em uma <i>B-Spline</i> quadrático.	37
Figura 11 – Inserção de <i>knot</i> em uma curva <i>B-Spline</i> quadrático.	39
Figura 12 – Inserção de <i>knot</i> .	39
Figura 13 – Elevação de grau.	40
Figura 14 – Refinamento k .	40
Figura 15 – Semicircunferência modelada com NURBS e arco de 180° modelado com <i>B-Spline</i> não racional.	41
Figura 16 – Superfície de Bézier com grau 3×2 .	43
Figura 17 – Malha de controle de um <i>patch</i> triangular de Bézier.	43
Figura 18 – Geometria para as coordenadas baricêntricas do ponto P.	44
Figura 19 – Superfície NURBS.	45
Figura 20 – Exemplo de modelo considerando múltiplos <i>patches</i> .	46
Figura 21 – Modelo com NURBS e <i>T-Splines</i> .	47
Figura 22 – Modelo 2D e suas parametrizações usando <i>patches</i> NURBS e triângulos racionais de Bézier.	49
Figura 23 – Elementos isogeométricos do <i>patch</i> .	56
Figura 24 – Mapeamentos realizados na AIG para integração numérica.	57
Figura 25 – <i>Patch</i> de um triângulo de Bézier cúbico.	58
Figura 26 – Caminho de equilíbrio com <i>Snap-Through</i> e <i>Snap-Back</i> .	61
Figura 27 – Método do Comprimento de arco.	65

Figura 28 – Possíveis soluções para $\delta\lambda$	66
Figura 29 – Tipos de perda de estabilidade.	69
Figura 30 – Pontos críticos e caminhos de equilíbrio.	71
Figura 31 – Estrutura global do FAST.	73
Figura 32 – Geometria do <i>Patch Test</i>	77
Figura 33 – Esforços aplicados no <i>Patch test</i>	77
Figura 34 – Geometria da placa quadrada.	78
Figura 35 – Malha utilizada para a placa quadrada.	78
Figura 36 – SS1 - Deslocamentos na placa quadrada.	80
Figura 37 – SS2 - Deslocamentos na placa quadrada.	80
Figura 38 – Engastado - Deslocamentos na placa quadrada.	80
Figura 39 – Um Quarto da Placa Circular.	81
Figura 40 – Malha utilizada para o quarto da placa circular.	81
Figura 41 – SS1 - Deslocamentos na placa circular.	82
Figura 42 – Engastado - Deslocamentos na placa circular.	83
Figura 43 – Malha utilizada para a placa quadrada.	84
Figura 44 – Modos de vibração da placa quadrada.	85
Figura 45 – Malha utilizada para a placa circular.	86
Figura 46 – Modos de vibração da placa circular.	87
Figura 47 – Barra simplesmente apoiada.	88
Figura 48 – Caminhos de equilíbrio.	89
Figura 49 – Placa com quatro furos.	90
Figura 50 – Modos de vibração para a placa com placa com quatro furos (ENG).	91
Figura 51 – Placa com furo em forma de coração.	92
Figura 52 – Modos de vibração de uma placa com furo em forma de coração (SA).	93
Figura 53 – Malha (8 × 8) utilizada.	94
Figura 54 – Fração de volume ao longo da espessura.	95
Figura 55 – Temperatura de flambagem de placas engastadas para diferentes N com $a/h = 100$	96
Figura 56 – 1º Modo de flambagem ($Al - Al_2O_3$) com $N = 1$	97
Figura 57 – Temperatura de flambagem de placas engastadas ($SUS304 - Si_3N_4$) para diferentes N	99

Figura 58 – Aumento uniforme de temperatura para a placa engastada.	100
Figura 59 – Caminhos de equilíbrio de placas imperfeitas.	101
Figura 60 – Aumento uniforme de temperatura para diferentes relações a/h	102
Figura 61 – Aumento linear de temperatura para a placa engastada.	103
Figura 62 – Aumento uniforme de temperatura para a placa simplesmente apoiada (SS2).	104
Figura 63 – Aumento linear de temperatura para a placa simplesmente apoiada (SS2).	104
Figura 64 – Malha utilizada para a placa circular sujeita a uma variação uniforme de temperatura.	105
Figura 65 – Temperatura de flambagem de placa circular engastada ($SUS304/Si_3N_4$) para diferentes N	106
Figura 66 – Aumento uniforme de temperatura para a placa circular engastada ($SUS304/Si_3N_4$).	107
Figura 67 – Aumento uniforme de temperatura para a placa circular engastada (Al/Al_2O_3).	107
Figura 68 – 1º Modo de flambagem da placa circular ($N = 1$).	108
Figura 69 – Caminhos de equilíbrio de placa circular imperfeita ($N = 1$).	109
Figura 70 – Geometria da placa anelar.	109
Figura 71 – Malha utilizada na placa anelar.	110
Figura 72 – Temperatura de flambagem da placa anelar - ($Al - Al_2O_3$).	111
Figura 73 – Temperatura de flambagem da placa anelar - ($SUS304 - Si_3N_4$).	112
Figura 74 – Geometria e condições de contorno do painel cilíndrico.	113
Figura 75 – Malha utilizada no painel cilíndrico.	113
Figura 76 – Caminho de equilíbrio - $h = 12,7$ mm.	114
Figura 77 – Caminho de equilíbrio - $h = 6,35$ mm.	114
Figura 78 – Caminhos primários e secundários das cascas MGF ($h = 6,35$ mm).	115

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Solução do sistema estendido.	70
Tabela 1 – Resultados do <i>Patch test</i>	78
Tabela 2 – Deslocamentos no centro de uma placa quadrada.	79
Tabela 3 – Frequências naturais (ϖ) da placa quadrada.	85
Tabela 4 – Frequências naturais (ϖ) da placa circular.	86
Tabela 5 – Frequências naturais ω [Hz] da placa com quatro furos.	90
Tabela 6 – Frequências naturais (ϖ) da placa com furo em forma de coração.	92
Tabela 7 – Propriedades da placa isotrópica.	94
Tabela 8 – Estudo de malha para temperatura crítica.	94
Tabela 9 – Propriedades do <i>Al</i> e do <i>Al₂O₃</i>	95
Tabela 10 – Temperatura crítica (K) de uma placa quadrada engastada de FGM (<i>Al/Al₂O₃</i>) sujeita a uma variação uniforme de temperatura.	96
Tabela 11 – Coeficientes termodependentes.	97
Tabela 12 – Propriedades para $T_{ref} = 300K$	97
Tabela 13 – Temperatura crítica (K) de uma placa quadrada engastada de MGF (<i>SUS304</i> - <i>Si₃N₄</i>) sujeita a uma variação uniforme de temperatura.	98
Tabela 14 – Propriedades do <i>Ni</i> e do <i>Al₂O₃</i>	99
Tabela 15 – Temperatura crítica (<i>K</i>) da placa anelar isotrópica ($N = 0$).	110
Tabela 16 – Propriedades dos materiais.	112
Tabela 17 – Diferenças entre as cargas dos pontos limites e as cargas de bifurcação.	116

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Objetivos e contribuições	16
1.2	Organização do Texto	17
2	PLACAS E CASCAS COM GRADAÇÃO FUNCIONAL	18
2.1	Teoria de Reissner-Mindlin	19
2.2	Tensões e Esforços Internos	23
2.3	Materiais com gradação funcional	25
2.3.1	<i>Propriedades Efetivas</i>	28
3	MODELAGEM GEOMÉTRICA	30
3.1	Representação de Curvas	31
3.1.1	<i>Curvas de Bézier</i>	32
3.1.2	<i>Curvas B-Splines e NURBS</i>	35
3.1.2.1	<i>Refinamentos</i>	38
3.1.2.2	<i>NURBS</i>	41
3.2	Representação de Superfícies	42
3.2.1	<i>Superfícies de Bézier</i>	42
3.2.2	<i>Triângulos de Bézier</i>	43
3.2.3	<i>Superfícies NURBS</i>	45
3.2.3.1	<i>Múltiplos Patches</i>	45
3.2.4	<i>T-Splines e Outras Representações</i>	46
3.3	Representação por fronteira (B-Rep)	48
4	ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA	50
4.1	Deslocamentos e Deformações	51
4.2	Equações de Equilíbrio	53
4.2.1	<i>Matriz de Rigidez</i>	55
4.3	Elemento Isogeométrico	56
4.3.1	<i>Travamento</i>	58
4.4	Análise Estática	59
4.4.1	<i>Métodos de Newton-Raphson com Restrição</i>	61
4.4.1.1	<i>Método do Controle de Deslocamento</i>	63

4.4.1.2	<i>Método do Comprimento de Arco</i>	64
4.4.1.3	<i>Cálculo do vetor $\bar{\mathbf{f}}$</i>	67
4.5	Estabilidade	68
4.6	Frequências naturais e modos de vibrações	72
4.7	Implementações Computacionais	72
5	EXEMPLOS NUMÉRICOS	76
5.1	Exemplos de Verificação	76
5.1.1	<i>Patch Test</i>	76
5.1.2	<i>Placa quadrada submetida a uma carga transversal uniformemente distribuída</i>	77
5.1.3	<i>Placa circular submetida a uma carga transversal uniformemente distribuída</i>	81
5.1.4	<i>Vibração de uma placa quadrada</i>	83
5.1.5	<i>Vibração de uma placa circular</i>	84
5.1.6	<i>Flambagem térmica de uma barra</i>	86
5.2	Aplicações	89
5.2.1	<i>Vibração de uma placa retangular com quatro furos</i>	89
5.2.2	<i>Vibração de uma placa com furo em forma de coração</i>	91
5.2.3	<i>Flambagem térmica de placas quadradas</i>	93
5.2.4	<i>Flambagem térmica de placas circulares</i>	104
5.2.5	<i>Flambagem térmica de placas anelares</i>	109
5.2.6	<i>Painéis de MGF sujeitos à carga concentrada transversal</i>	112
6	CONCLUSÃO	117
6.1	Sugestões para trabalhos futuros	118
	REFERÊNCIAS	120

1 INTRODUÇÃO

O conceito de Materiais com Gradação Funcional (MGF) (*Functionally Graded Materials* – FGM) foi proposto em 1984 por um grupo de pesquisadores japoneses, em Sendai - Japão, sendo o seu uso associado a barreiras térmicas (KOIZUMI, 1997). A utilização desses materiais na engenharia tem crescido cada vez mais devido a suas características atraentes como variação contínua e suave de seus componentes, melhor distribuição de tensões residuais e maior tenacidade à fratura.

Os MGFs são compósitos de alto desempenho que apresentam variação gradual de composição ao longo de uma ou várias direções espaciais. Assim, a composição dos MGFs pode ser escolhida de forma a otimizar as características de serviço desejadas sob diferentes tipos de carregamentos (térmicos, mecânicos, elétricos, etc.), fabricando-os a partir de dois ou mais materiais diferentes (MIYAMOTO *et al.*, 1999; CHAREONSUK; VESSAKOSOL, 2011).

Nesse contexto, cabe destacar a combinação cerâmica-metal, em que os constituintes cerâmicos são capazes de resistir a ambientes de alta temperatura devido às suas melhores características de resistência, enquanto os constituintes metálicos proporcionam maior desempenho mecânico e reduzem a possibilidade de fratura catastrófica (SHEN, 2007).

Desta forma, a utilização de placas e cascas de MGFs apresenta diversas vantagens. Contudo, estas estruturas podem apresentar elevada esbelte e conseqüentemente sensibilidade ao colapso por perda de estabilidade, necessitando assim de investigação criteriosa sobre sua carga crítica, modos de flambagem e caminho pós-crítico. Assim, diversos trabalhos vêm sendo realizados no estudo de placas e cascas de MGF, com destaque para os efeitos dos carregamentos térmicos. Na e Kim (2006), Tran *et al.* (2016), Trabelsi *et al.* (2018) estudam a flambagem e o traçado do caminho pós-crítico de placas submetidas a carregamentos térmicos. Moita *et al.* (2018) fazem estudo semelhante para carregamentos termomecânicos.

O Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV) da Universidade Federal do Ceará (UFC) também vem apresentando contribuições a respeito do estudo dos MGFs (PRACIANO, 2018; AUAD, 2019; AUAD *et al.*, 2019; RIBEIRO *et al.*, 2020; MAIA, 2020; SILVA, 2020; MAIA *et al.*, 2021). Praciano (2018) estudou a estabilidade de placas laminadas e de MGF, com a formulação isogeométrica baseada nas teorias de Reissner-Mindlin para placas considerando o cisalhamento transversal e de Marguerre para análise não linear de cascas abatidas. Auad (2019) estudou cascas cilíndricas de MGF sujeitas a carregamentos mecânicos, com a formulação isogeométrica baseada na teoria não linear de Donnell. Ribeiro *et al.* (2020)

apresentam uma metodologia eficiente para otimização de estruturas de MGF utilizando modelos substitutos. Maia (2020) estudou a otimização de estruturas de MGF assistida por modelos substitutos em problemas com comportamento não linear. Maia *et al.* (2021) apresenta uma metodologia eficiente para otimização de estruturas de MGF usando uma abordagem baseada em Kriging.

Cabe destacar que os primeiros trabalhos desenvolvidos no LMCV não analisaram os MGFs sob cargas de temperatura, situação para a qual esses materiais foram inicialmente desenvolvidos. O primeiro trabalho no LMCV a realizar esse estudo foi realizado por Silva (2020), que desenvolveu uma metodologia baseada no Método dos Elementos Finitos para avaliar a distribuição de temperatura, a distribuição de tensões e a estabilidade em placas e cascas de MGFs utilizando elementos sólidos. Com isso, é necessário o desenvolvimento e implementação de formulações para considerar os esforços térmicos em estruturas de MGF para outros métodos de análise, como a análise Isogeométrica (AIG) e o próprio MEF, baseados em elementos de placa e casca na discretização do problema.

Com o intuito de projetar elementos de placas e cascas de materiais compósitos é necessário a determinação dos deslocamentos, deformações e tensões ocasionadas pelos esforços solicitantes através de técnicas de análises. Atualmente, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é a técnica mais utilizada com essa finalidade. Entretanto, esse método apresenta limitações que ocasionam erros inerentes à técnica, como os relacionados à representação geométrica da estrutura, salvo em modelos simples.

Um método alternativo ao MEF é a Análise Isogeométrica (AIG), desenvolvida por Hughes *et al.* (2005). A AIG busca integrar os conceitos de CAD (*Computer Aided Design*) e CAE (*Computer Aided Engineering*), utilizando as bases do sistema CAD (e.g. NURBS e *T-Splines*) como bases para os elementos isogeométricos. Desta forma, a geometria dos elementos é representada de forma exata, eliminando assim erros na representação geométrica que existe no MEF.

Apesar das vantagens apresentadas por Hughes *et al.* (2005), a integração entre os modelos CAD e CAE na AIG baseada em NURBS ou *T-Splines* não é trivial. Isso ocorre pois o paradigma de modelagem adotado na maioria dos sistemas CAD utiliza representações de fronteiras, mais conhecida como *Boundary representation* (B-Rep), para representar regiões com geometria e topologia complexas que não podem ser usados diretamente pelo CAE. Esse fato ocorre pois essas representações, que utilizam um conjunto de NURBS ou *T-Splines* como

superfícies delimitadoras, não apresentam parametrização no interior da região a ser analisada (ENGVALL; EVANS, 2016).

Engvall e Evans (2016) apresentam esse problema da parametrização de superfície para volume de estruturas sólidas da seguinte maneira: dada uma superfície NURBS ou *T-Spline* a partir do sistema CAD, busca-se gerar uma parametrização no interior do domínio do elemento correspondente de forma que:

1. A parametrização represente a geometria de forma exata;
2. A parametrização permita uma análise numérica adequada;
3. A parametrização seja definida por bases (funções polinomiais ou racionais) definidas por trechos que satisfaçam independência linear, partição da unidade, positividade e continuidade de alta ordem.

Para estruturas planas, a abordagem do problema é similar aos sólidos, porém a parametrização ocorre de curvas de contorno para superfícies.

Diversos trabalhos foram desenvolvidos buscando realizar parametrizações dos modelos geométricos com *B-Splines* (MARTIN *et al.*, 2008; XU *et al.*, 2013), NURBS (AIGNER *et al.*, 2009; AKHRAS *et al.*, 2016) e *T-Splines* (ESCOBAR *et al.*, 2011; LIU *et al.*, 2013). Entretanto, eles apresentaram dificuldades para gerar automaticamente malhas adequadas para análise de geometrias complexas.

O uso de elementos de Bézier é uma boa alternativa, pois facilita a conexão entre o modelo CAD baseado em B-Rep e o modelo de análise isogeométrica, além da representação de geometrias complexas com furos e bordas curvas. Com as adaptações necessárias, possibilita também, a utilização de técnicas de geração de malha já existentes. Fato que facilita a implementação e automação do processo, gerando modelos adequados para análise, preservando a geometria exata do modelo. Assim, diversos trabalhos vem sendo realizados utilizando os elementos de Bézier na AIG (JAXON; QIAN, 2014; XIA *et al.*, 2015; ENGVALL; EVANS, 2016; ENGVALL; EVANS, 2017; XIA; QIAN, 2017; LIU; JEFFERS, 2019).

O LMCV também vem apresentando contribuições a respeito da utilização dos elementos de Bézier na AIG (BARROSO *et al.*, 2016; BARROSO *et al.*, 2017; BARROSO *et al.*, 2019; SILVA *et al.*, 2020). Barroso *et al.* (2016) discutem a formulação e implementação de elementos triangulares de Bézier em um software acadêmico de elementos finitos. Barroso *et al.* (2017) realizam a geração de malhas isogeométricas, compostas por superfícies de Bézier planas dado um contorno definido por quatro curvas NURBS, utilizando Mapeamento Transfinito.

Barroso *et al.* (2019) apresentam um algoritmo para discretização automática de modelos isogeométricos planos. Silva *et al.* (2020) discute a definição dos elementos triangulares bidimensionais de Bézier, implementados por Barroso *et al.* (2016), e seu desempenho na AIG.

Desta forma, a utilização dos elementos de Bézier é capaz de solucionar um dos principais gargalos da AIG com NURBS ou *T-Splines*, que é a parametrização automática dos modelos CAD para os modelos de análise. É importante notar que esse tema é recente, sendo necessário o desenvolvimento de estudos e pesquisas com o intuito de ampliar os conhecimentos sobre o desempenho desta abordagem na análise de estruturas de materiais com gradação funcional sujeitas a esforços térmicos. Cabe destacar que os elementos triangulares de Bézier utilizados neste trabalho foram implementados por Barroso *et al.* (2016).

1.1 Objetivos e contribuições

Neste trabalho, o principal objetivo foi o desenvolvimento e a implementação de formulações para considerar os efeitos térmicos na análise isogeométrica de placas e cascas abatidas constituídas de materiais com gradação funcional baseadas no uso de triângulos racionais de Bézier. Foram adotadas as teorias de Reissner-Mindlin e Marguerre, considerando a não linearidade geométrica. Um objetivo complementar foi o estudo e a análise do desempenho dos elementos triangulares de Bézier na análise de placas homogêneas e com gradação funcional.

As implementações foram realizadas no *software* de código aberto FAST (*Finite Element Analysis Tool*), escrito em linguagem C++. O FAST está em desenvolvimento contínuo no Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV) da Universidade Federal do Ceará.

A partir das implementações, foi possível estudar o comportamento de estruturas de material compósito com gradação funcional submetidas a carregamentos térmicos, utilizando elementos isogeométricos de cascas abatidas discretizados a partir dos elementos triangulares de Bézier. Foi analisada a estabilidade de placas e cascas de material compósito obtendo a carga crítica, o comportamento pós-crítico e o traçado do caminho de equilíbrio. Os resultados apresentados foram excelentes quando comparados com trabalhos da literatura.

1.2 Organização do Texto

O presente trabalho está dividido em 6 capítulos. No Capítulo 1, é apresentada uma introdução acerca do tema do trabalho, incluindo alguns trabalhos já publicados e suas contribuições. Em seguida, ainda nesse capítulo, apresentou-se os objetivos e contribuições do trabalho.

No Capítulo 2, é apresentada uma pequena discussão sobre as teorias de placas e cascas. Em seguida é apresentada a formulação matemática da teoria de Reissner-Mindlin, considerando a teoria de Marguerre para deformações de membrana em cascas abatidas. Logo após, são mostrados conceitos básicos, relações constitutivas e esforços internos dos materiais com gradação funcional (MGF).

No Capítulo 3, são apresentadas definições acerca da Modelagem Geométrica, onde são abordadas as formulações das representações de Bézier, *B-Splines*, NURBS.

No Capítulo 4, é desenvolvida a formulação isogeométrica de casca abatida não linear geométrica. Também são desenvolvidas as expressões para o cálculo dos esforços internos e externos, da matriz de rigidez e de técnicas de resolução dos sistemas não lineares e traçado do caminho de equilíbrio.

No Capítulo 5, estão os exemplos numéricos, divididos em Exemplos de Verificação e Aplicações.

No Capítulo 6, são apresentadas as conclusões da dissertação e sugestões para trabalhos futuros.

2 PLACAS E CASCAS COM GRADAÇÃO FUNCIONAL

Placas e cascas são corpos delimitados por superfícies laterais cujas dimensões são grandes em comparação com a separação entre estas superfícies (DYM; SHAMES, 2013). Quando as superfícies delimitadoras são planas, os corpos são conhecidos como placas, já quando são curvas, são chamados de cascas. Exemplos de aplicações de placas e cascas na Engenharia são encontrados em forma de lajes de edifícios, tabuleiros de pontes, carrocerias de carros, cascos de navios, fuselagens de aviões entre muitos outros.

O comportamento estrutural das cascas é caracterizado principalmente por dois estados de deformações ocasionados pelas ações de membrana (*membrane*) e flexão (*bending*) (BISCHOFF *et al.*, 2004). Nas deformações dominadas pela flexão, o comprimento das fibras na superfície média são preservados. Já nas deformações dominadas pelas ações de membrana, as fibras acompanham as deformações da superfície média.

Elementos de placa/casca podem ser analisados de forma simplificada utilizando as chamadas teorias de placas/cascas. Nessas teorias, o problema tridimensional é transformado em um bidimensional devido à adoção de hipóteses simplificadoras relativas ao campo de deslocamentos. Dentre estas teorias destacam-se:

- Teoria de Kirchhoff-Love: considera que segmentos retos e perpendiculares à superfície média da placa permanecem retos e perpendiculares à superfície média após a deformação. Essa hipótese implica desprezar as deformações de cisalhamento transversal, limitando sua utilização apenas para placas finas;
- Teoria de Reissner-Mindlin: considera o efeito das deformações de cisalhamento constante ao longo da espessura da placa, assim essa teoria é conhecida como teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem (*First-Order Shear Deformation Theory* - FSDT). Ela pode ser utilizada tanto para placas finas como espessas;
- As teorias de alta ordem: conhecidas como *High-Order Shear Deformation Theories* - HSDTs, utilizam campos de deslocamentos capazes de descrever a variação não linear do cisalhamento ao longo espessura da placa.

A teoria de Reissner-Mindlin é mais atrativa para aplicação em softwares de elementos finitos, pois a continuidade C^0 é suficiente para os elementos, enquanto nos modelos de Kirchhoff-Love é necessário continuidade C^1 sobre os elementos e sua interface, algo que é muito complexo e caro de se implementar utilizando as funções de forma padrão do MEF que são os polinômios de Lagrange (ZAREH; QIAN, 2019). As teorias de alta ordem fornecem

resultados mais precisos, porém também requerem C^1 entre os elementos (TRAN *et al.*, 2016).

Aproveitando a elevada continuidade das funções de forma NURBS, vários estudos de cascas finas baseados na teoria de Kirchhoff–Love têm sido realizados no âmbito da AIG (KIENDL *et al.*, 2009; KIENDL *et al.*, 2010; COOX *et al.*, 2017; GRECO *et al.*, 2018; ZAREH; QIAN, 2019; SCHULTE *et al.*, 2020). Entretanto, conforme Nguyen-Thanh *et al.* (2011b), a utilização dessa teoria ocasiona dificuldades em impor as condições de contorno de rotação e são necessárias outras estratégias para conectar os *patches*, além da restrição da espessura imposta pela própria teoria.

Vários estudos da AIG baseados nas teorias de alta ordem também têm sido realizados (NGUYEN-XUAN *et al.*, 2013; THAI *et al.*, 2014; TRAN *et al.*, 2016; SHI *et al.*, 2018; DIWAN; MOHAMED, 2020; NGUYEN *et al.*, 2020). Porém, essas teorias apresentam mais termos no campo de deslocamentos, ocasionando um custo computacional significativamente maior, além de apresentar a mesma dificuldade da teoria de Kirchhoff–Love em problemas com múltiplos *patches*.

Desta forma, devido às dificuldades citadas anteriormente para a Teoria de Kirchhoff–Love e as teorias de alta ordem, neste trabalho será utilizada a teoria de Reissner–Mindlin, que facilita a imposição de condições de contorno e a conexão entre vários *patches*.

2.1 Teoria de Reissner–Mindlin

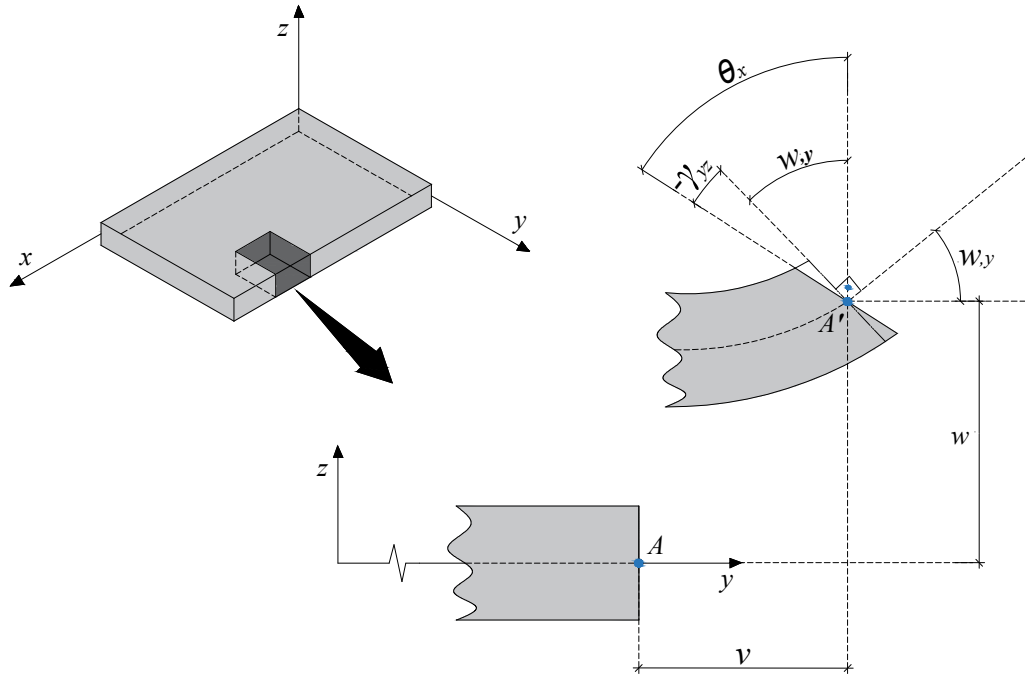
Reissner e Mindlin desenvolveram teorias de placa que consideravam o efeito do cisalhamento transversal constante ao longo da espessura da placa (FSDT). Essa teoria baseia-se nas seguintes hipóteses para o campo de deslocamento (ver Figura 1) (REDDY, 2004):

1. Os pontos da reta normal ao plano médio têm deslocamento transversal igual;
2. A tensão normal na direção transversal é desprezada ($\sigma_{zz} = 0$);
3. Segmentos retos e perpendiculares à superfície média da placa permanecem retos, mas não necessariamente perpendiculares ao eixo da placa após a deformação.

O campo de deslocamento, apresentado na Figura 1, pode ser escrito em qualquer ponto (x, y, z) da placa como:

$$\begin{aligned}\bar{u}(x, y, z, t) &= u(x, y, t) + z \theta_y(x, y, t) \\ \bar{v}(x, y, z, t) &= v(x, y, t) - z \theta_x(x, y, t) \\ \bar{w}(x, y, z, t) &= w(x, y, t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

Figura 1 – Geometria deformada e indeformada de uma aresta de uma placa sob a FSDT.



Fonte: elaborado pelo autor.

onde u , v e w são os deslocamentos ao longo dos eixos x , y e z , respectivamente, t é a coordenada do tempo, θ_x e θ_y são as rotações normais aos planos yz e xz . A Equação (2.1) pode ser escrita na forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 & -z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \Rightarrow \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{Z} \mathbf{u} \quad (2.2)$$

Considerando pequenos gradientes do deslocamento (análise linear), o campo de deformações no plano, a partir do campo de deslocamento expresso na Equação (2.1) pode ser dado por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^m \\ \varepsilon_y^m \\ \gamma_{xy}^m \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}^m + z \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\varepsilon}^m + \boldsymbol{\varepsilon}^b \quad (2.3)$$

onde ε^m e κ correspondem a deformação de membrana e a curvatura, respectivamente. Cabe destacar que devido a hipóteses cinemáticas adotadas, $\varepsilon_z = \partial \bar{w} / \partial z = 0$.

A partir da Equação (2.3), percebe-se que as deformações são compostas por uma parcela independente de z , que representa a deformação de membrana:

$$\varepsilon^m = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^m \\ \varepsilon_y^m \\ \gamma_{xy}^m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

e uma parcela que varia linearmente com a distância para a superfície média da placa e depende da curvatura:

$$\varepsilon^b = z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

As deformações devidas ao cisalhamento transversal podem ser calculadas por:

$$\gamma = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

Percebe-se que essas deformações são constantes ao longo da espessura da placa, ou seja independem da coordenada z , fato que não corresponde à solução da Teoria da Elasticidade, que apresenta uma variação parabólica. Para contornar esse problema será utilizado um fator de correção (k_s).

Para verificar a estabilidade de placas é necessário considerar a não linearidade geométrica. A partir dessa consideração, passa a existir interação entre os efeitos de membrana e flexão, ocasionados devido aos deslocamentos transversais. Assim, para levar em conta esse acoplamento, utilizam-se as deformações de von Kármán, que pode ser considerada um caso especial das deformações de Green, desprezando os termos não lineares relacionados às componentes do deslocamento nas direções do plano da placa (CRISFIELD, 1991). Assim, as

deformações de membrana são dadas por:

$$\varepsilon^m = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^m \\ \varepsilon_y^m \\ \gamma_{xy}^m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{Bmatrix} \Rightarrow \varepsilon^m = \varepsilon_0^m + \varepsilon_L^m \quad (2.7)$$

onde ε_0^m é a parcela linear devido a deslocamento no plano e ε_L^m é a parcela não linear causada pelos deslocamentos transversais.

A teoria não linear de placas de von Kármán foi estendida por Marguerre para elementos de cascas abatidas (CRISFIELD, 1991). Nessa teoria, as deformações de membrana são calculadas por:

$$\varepsilon^m = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^m \\ \varepsilon_y^m \\ \gamma_{xy}^m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(w+z_0)}{\partial x} \right]^2 \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial(w+z_0)}{\partial y} \right]^2 \\ \left[\frac{\partial(w+z_0)}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial(w+z_0)}{\partial y} \right] \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z_0}{\partial y} \right)^2 \\ \left(\frac{\partial z_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial z_0}{\partial y} \right) \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

onde $z_0(x, y)$ é a elevação da superfície média da casca. Desenvolvendo a Equação (2.8), tem-se:

$$\varepsilon^m = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial z_0}{\partial x} \right) \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial z_0}{\partial y} \right) \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial z_0}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial z_0}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

Esta equação mostra que as cascas abatidas apresentam acoplamento entre os deslocamentos transversais e as deformações de membrana por conta da curvatura inicial da casca, além do acoplamento devido ao termo não linear.

Neste trabalho, foi adotada a formulação cinemática para cascas abatidas baseada na Teoria de Reissner-Mindlin para deformações de flexão e cisalhamento transversal e na teoria de Marguerre para deformações de membrana não lineares, incluindo o efeito das curvaturas iniciais e rotações moderadas. Cabe destacar que esta formulação permite a análise não linear de placas perfeitas e imperfeitas e cascas abatidas de uma maneira mais simples e eficiente do que o uso de elementos de cascas gerais (PRACIANO *et al.*, 2019).

2.2 Tensões e Esforços Internos

Neste trabalho, considerou-se o MGF isotrópico e com comportamento linear elástico. Permitindo assim, a utilização da Lei de Hooke generalizada. Dessa maneira, a relação entre tensões e deformações, considerando os efeitos térmicos, é dada como:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \left(\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \Delta T \right) \Rightarrow \sigma = \mathbf{Q} \underbrace{(\varepsilon - \varepsilon^{th})}_{\varepsilon^{ef}} \quad (2.10)$$

$$\begin{pmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} \Rightarrow \tau = \mathbf{Q}_s \gamma \quad (2.11)$$

onde \mathbf{Q} e \mathbf{Q}_s são as matrizes constitutivas relacionadas com às deformações de membrana e cisalhamento, respectivamente, α é o coeficiente de expansão térmica, ΔT é a variação de temperatura e ε^{ef} , ε , ε^{th} e γ são as deformações efetivas, no plano, térmicas e de cisalhamento, respectivamente. Os termos das matrizes constitutivas \mathbf{Q} e \mathbf{Q}_s dependem das propriedades efetivas do MGF, que variam com a posição z , devido à variação das frações de volume e das propriedades de cada material ao longo da espessura, e podem ser calculados a partir das seguintes expressões:

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1 - \nu(z)^2}; \quad Q_{12} = \frac{E(z)\nu(z)}{1 - \nu(z)^2}; \quad Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1 + \nu(z))} \quad (2.12)$$

onde $E(z)$ é o módulo de elasticidade, $\nu(z)$ é o coeficiente de Poisson e $G(z)$ é o módulo de elasticidade ao cisalhamento.

A Equação (2.10) mostra que, para estruturas carregadas termicamente, as tensões não estão relacionadas diretamente com a deformação total, como no caso de estruturas carregadas apenas mecanicamente, mas sim por uma deformação efetiva (ε^{ef}) (PARENTE Jr. *et al.*, 2005).

A formulação das equações de equilíbrio de placas e cascas será feita em termo dos esforços internos, que podem ser determinados a partir da integração das tensões, definidas nas Equações (2.10) e (2.11), ao longo da espessura da placa, como se segue:

$$\begin{aligned}
\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{Q} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{th}) dz \\
&= \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{Q} (\boldsymbol{\varepsilon}^m + z\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\varepsilon}^{th}) dz \\
&= \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{Q} (\boldsymbol{\varepsilon}^m + \boldsymbol{\kappa} z - \boldsymbol{\alpha} \Delta T) dz
\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{Q} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{th}) z dz \\
&= \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{Q} (\boldsymbol{\varepsilon}^m + z\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\varepsilon}^{th}) z dz \\
&= \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{Q} (\boldsymbol{\varepsilon}^m + \boldsymbol{\kappa} z - \boldsymbol{\alpha} \Delta T) z dz
\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\mathbf{V} = \begin{Bmatrix} V_{xz} \\ V_{yz} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz = \int_{-h/2}^{h/2} k_s \mathbf{Q}_s \boldsymbol{\gamma} dz \tag{2.15}$$

onde os termos das matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{Q}_s são dados pela Equação (2.12) e k_s é o fator de correção do cisalhamento. Destacando que os MGFs são considerados como materiais isotrópicos, porém não homogêneos, já que suas propriedades variam ao longo da espessura de forma contínua.

Os esforços também podem ser descritos em função das deformações de membrana, flexão e cisalhamento, resultando nas matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} e \mathbf{G} . Assim, de modo a simplificar as expressões anteriores, os esforços internos generalizados ($\hat{\boldsymbol{\sigma}}$), podem ser escritos como:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{V} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^m \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{N}^{th} \\ \mathbf{M}^{th} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \Rightarrow \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{th} \tag{2.16}$$

onde \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{D} e \mathbf{G} são as matrizes de rigidez extensional, de acoplamento membrana-flexão, flexional e de cisalhamento, respectivamente, e \mathbf{N}^{th} e \mathbf{M}^{th} são os esforços térmicos. Esses termos

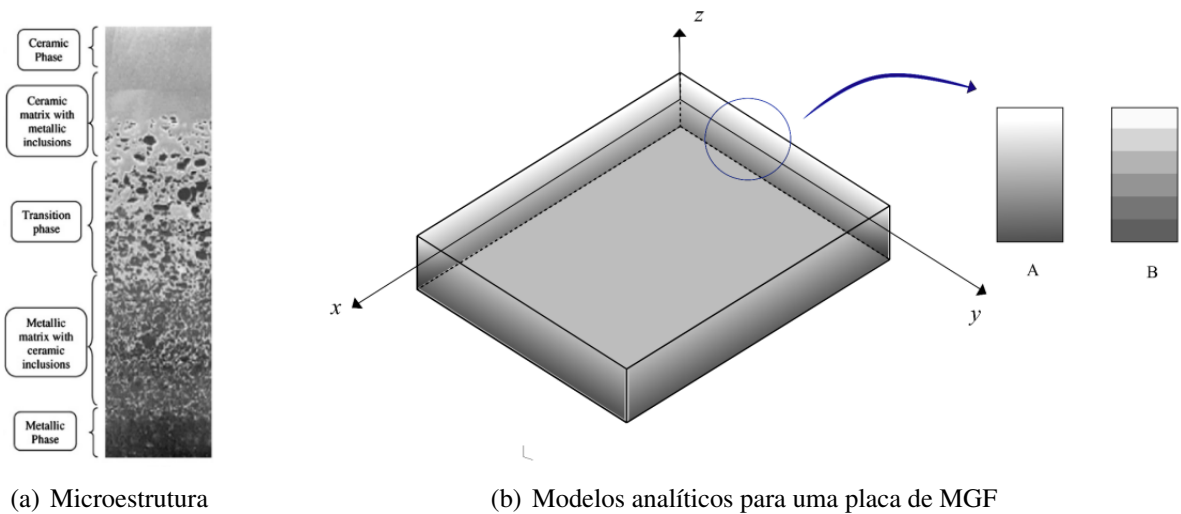
são dados por:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{Q} dz & \mathbf{B} &= \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{Q} z dz \\
 \mathbf{D} &= \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{Q} z^2 dz & \mathbf{G} &= \int_{-h/2}^{h/2} k_s \mathbf{Q}_s dz \\
 \mathbf{N}^{th} &= \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{Q} \alpha \Delta T dz & \mathbf{M}^{th} &= \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{Q} \alpha \Delta T z dz
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

2.3 Materiais com gradação funcional

Os Materiais com Gradação Funcional (MGF) são materiais compósitos formados por dois ou mais materiais misturados de forma não homogênea. Conforme Miyamoto *et al.* (1999), a composição e a estrutura do material mudam gradualmente ao longo do seu volume, como ilustrado na Fig.2 (a). Assim, suas características mecânicas variam de acordo com sua microestrutura e cada ponto do material apresenta propriedades diferentes.

Figura 2 – Seção transversal de modelos de MGF.



Fonte: (a) Jha *et al.* (2013), (b) Maia (2020).

A primeira aplicação dos MGFs ocorreu em um projeto de aviação espacial em 1984 no Laboratório Aeroespacial Nacional do Japão. O intuito da utilização desses materiais era evitar picos de tensão nas interfaces dos painéis da estrutura da aeronave do projeto. A combinação dos materiais utilizados serviu de barreira térmica capaz de suportar uma temperatura de superfície de 2000 K com gradiente de 1000 K em uma seção de 10 mm de espessura (JHA *et al.*, 2013).

Os MGFs mostram um gradiente composicional de um material para outro, o que nos compósitos tradicionais resulta em propriedades comprometedoras dos materiais constituintes

nas misturas homogêneas. O gradiente de composição introduz não homogeneidade na microestrutura que permite que os MGFs exibam variação no arranjo das propriedades do material (BOGGARAPU *et al.*, 2021).

Os MGFs têm grande potencial de aplicação em situações que apresentam condições severas, como em camadas de proteção térmica de aeronaves espaciais, tubulações de troca de calor, implantes biomédicos, revestimentos para reatores de fusão nuclear e etc. Várias combinações de diferentes materiais podem ser realizadas para criar novos materiais para a indústria aeroespacial, fábricas de produtos químicos, reatores de energia nuclear, etc. (JHA *et al.*, 2013).

Esse tipo de material compósito pode apresentar diferentes possibilidades de misturas com diversos componentes como metal-cerâmica, cerâmica-cerâmica, cerâmica-plástico, entre outros (UDUPA *et al.*, 2014).

É evidente na literatura que os MGFs têm recebido atenção significativa devido às suas propriedades graduais, destacando-se as aplicações relacionadas a barreiras térmica, onde os requisitos são direcionados para melhorar a resistência térmica, a oxidação e a corrosão.

Existem duas abordagens básicas para modelar MGFs. Na primeira, a distribuição da fração de volume é considerada contínua em uma ou mais direções, conforme representado pela seção transversal A na Fig. 2 (b). Na segunda, a estrutura de MGF é considerada multicamadas com a mesma fração de volume em cada camada, conforme representado pela seção transversal B na Fig. 2 (b) (MAIA, 2020). Neste trabalho, a graduação unidirecional contínua através da espessura é considerada.

Shen (2016) diz que o comportamento do MGF é definido pela chamada fração de volume, que representa a quantidade relativa em volume dos materiais constituintes. A fração de volume apresenta variação gradual na direção da gradação, fazendo com que as propriedades do material mudem nessa direção, que em geral é a espessura.

Existem diferentes modelos para representar a variação contínua da fração de volume. Akbarzadeh *et al.* (2015) destaca os seguintes modelos, que apresentam expressões que variam na direção z (correspondente à espessura):

1. Lei da Potência (P-MGF):

$$V_{f_j} = V_{f_b} + (V_{f_t} - V_{f_b}) \left(\frac{2z + h}{2h} \right)^n \quad (2.18)$$

2. Sigmóide (S-MGF):

$$V_{f_j} = \begin{cases} V_{f_b} + (V_{f_t} - V_{f_b}) \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h-2z}{h}\right)^n\right), & 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \\ V_{f_b} + (V_{f_t} - V_{f_b}) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{h+2z}{h}\right)^n\right), & -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

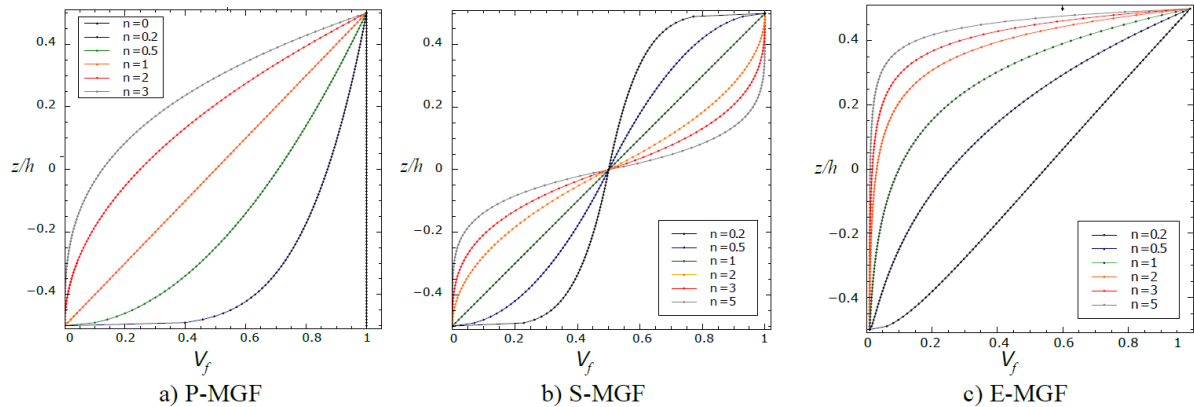
3. Exponencial (E-MGF):

$$V_{f_j} = V_{f_t} e^{\left(\ln\left(\frac{V_{f_b}}{V_{f_t}}\right)\left(\frac{h+2z}{h}\right)^n\right)} \quad (2.20)$$

onde V_{f_j} é a fração de volume do constituinte j , V_{f_t} e V_{f_b} são as frações de volume no topo ($z = +h/2$) e na base ($z = -h/2$), respectivamente, n é o fator de não homogeneidade e h é a espessura. A Figura 3 ilustra cada um dos modelos da distribuição da fração de volume apresentada anteriormente. Cabe destacar que a soma das frações de volume de todos os constituintes do MGF é unitária:

$$\sum_{j=1} V_{f_j} = 1 \quad (2.21)$$

Figura 3 – Variação da fração de volume ao longo de uma seção.



Fonte: Auad (2019).

As expressões anteriores que descrevem as frações de volume são facilmente ajustadas para obter as propriedades desejadas do material. Entretanto podem apresentar restrições na aplicação de problemas práticos, não sendo capaz de descrever com precisão as características dos materiais (DO *et al.*, 2019a). Com intuito de contornar essa limitação, outros modelos para descrever a fração de volume foram desenvolvidos. Destacam-se os trabalhos que utilizaram as funções *B-Splines* para isso, como se segue (LIEU; LEE, 2017; LIEU *et al.*, 2018; RIBEIRO *et*

al., 2020; MEDEIROS; PARENTE, 2020; MAIA *et al.*, 2021):

$$V_{f_j}(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p} V_{f_{ji}} \quad (2.22)$$

em que $V_{f_{ji}}$ é a fração de volume do constituinte j no i -ésimo ponto de controle, $N_{i,p}$ são as funções de base *B-Splines* definidas pelas Equações (3.15) e (3.16), n é o número de pontos de controle. A Equação (2.21) continua válida para esse modelo.

O comportamento microscópico do MGF pode ser determinado utilizando as propriedades de cada constituinte relacionadas com a fração de volume, pelas chamadas propriedades efetivas (P_{ef}), como o módulo de elasticidade (E), o coeficiente de Poisson (ν) e o coeficiente de expansão térmica (α) do MGF.

Um importante fator nas propriedades dos MGFs é a influência da temperatura, pois esses materiais são muito utilizados em problemas com elevadas temperaturas e gradientes térmicos. Conforme Reddy e Chin (1998), as propriedades dos materiais podem ser expressas em função da temperatura através da seguinte expressão:

$$P(T) = P_0 \left(\frac{P_{-1}}{T} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3 \right) \quad (2.23)$$

em que T é a temperatura em Kelvin e P_0 , P_{-1} , P_1 , P_2 , P_3 são coeficientes únicos de cada constituinte.

2.3.1 Propriedades Efetivas

A definição das propriedades efetivas de um material necessita da utilização de um processo apropriado de homogeneização micromecânica (SHEN, 2016). Nesse processo os parâmetros macroscópicos equivalentes são obtidos através das respostas estruturais de elementos representativos do volume, definidas em uma escala mais precisa (MEDEIROS Jr. *et al.*, 2019). Existem diferentes modelos que buscam determinar as propriedades efetivas (P_{ef}) dos MGFs, através desses processos de homogeneização micromecânica.

Um dos modelos mais simples e utilizado em grande parte das análises de estruturas de MGF é o modelo de Voigt. Nele, as propriedades efetivas do MGF pode ser expressas como (SHEN, 2016):

$$P_{ef} = \sum_{j=1} P_j V_j \quad (2.24)$$

onde P_j e V_j são a propriedade, definida pela Equação (2.23), e a fração de volume do material j .

Um outro modelo utilizado para MGFs que apresentam uma microestrutura com uma matriz bem definida, é o de Mori-Tanaka. Nesse modelo, as propriedades efetivas (subscrito f) do MGF, composto de uma matriz isotrópica de um determinado material (subscrito 1) reforçada por partículas esféricas também isotrópicas de outro material (subscrito 2), são dadas por (SHEN, 2016):

$$\frac{K_f - K_1}{K_2 - K_1} = \frac{V_2}{1 + (1 - V_2) \frac{3(K_2 - K_1)}{3K_1 + 4G_1}} \quad (2.25)$$

$$\frac{G_f - G_1}{G_2 - G_1} = \frac{V_2}{1 + (1 - V_2) \frac{(G_2 - G_1)}{G_1 + f_1}} \quad (2.26)$$

$$\frac{\alpha_f - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{\frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_1}}{\frac{1}{K_2} - \frac{1}{K_1}} \quad (2.27)$$

em que K é o módulo volumétrico, G é o módulo de cisalhamento, α é o coeficiente de expansão térmica e f_1 é um parâmetro dado por:

$$f_1 = \frac{G_1(9K_1 + 8G_1)}{6(K_1 + 2G_1)} \quad (2.28)$$

Depois disso, o módulo de Young (E) e o coeficiente de Poisson (ν) podem ser calculados como:

$$E = \frac{9K_f G_f}{3K_f + G_f}, \quad \nu = \frac{3K_f - 2G_f}{2(3K_f + G_f)} \quad (2.29)$$

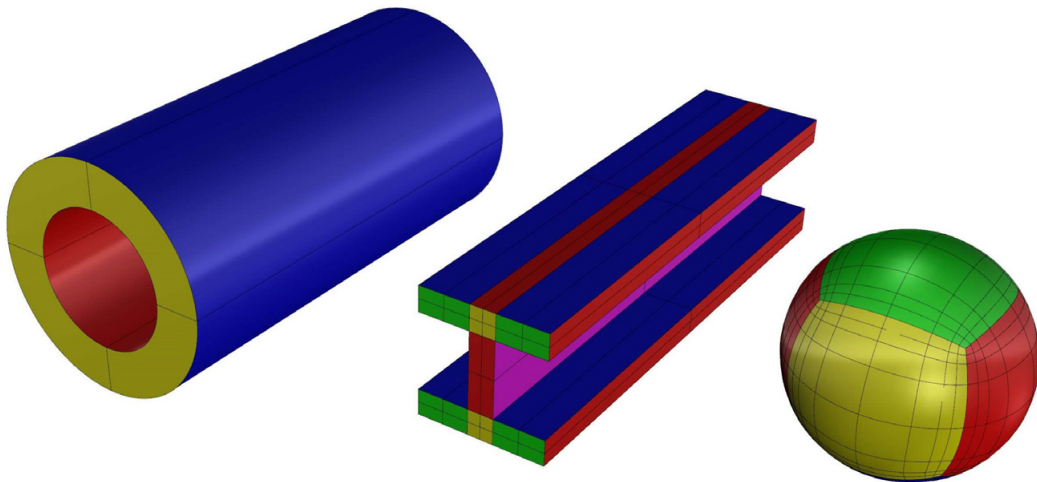
Outros modelos também são utilizados nos FGMs como: Auto-Consistente (*Self-Consistent*), onde as propriedades efetivas são determinadas assumindo uma configuração hipotética na qual uma única inclusão é incorporada diretamente no meio efetivo (HILL, 1965); Auto-Consistente Generalizado (*Generalized Self-Consistent*), que apresenta uma estratégia de homogenização melhorada em relação ao método Auto-Consistente (CHRISTENSEN; LO, 1979; BENVENISTE, 2008); Limites de Hashin-Shtrikman que apresenta a derivação de limites para os módulos elásticos efetivos de materiais multifásicos com o auxílio de princípios variacionais de elasticidade (HASHIN; SHTRIKMAN, 1963).

3 MODELAGEM GEOMÉTRICA

A Modelagem Geométrica é um ramo da matemática aplicada que estuda métodos e algoritmos para a descrição e manipulação matemática de formas geométricas. Muito utilizada como base para sistemas de computação gráfica, como em sistemas CAD (*Computer Aided Design*), que são ferramentas que auxiliam na elaboração de projetos em várias áreas como na indústria automobilística, arquitetura, engenharia civil, mecânica entre outras.

Os *softwares* CAD vêm apresentando papel cada vez mais relevante no âmbito da análise estrutural, sendo usados como ferramentas de pré-processamento para geração da geometria dos modelos de análise. Em grande parte dos *softwares* CAD, a representação do modelo geométrico é dada por representação pela fronteira (*Boundary Representation - B-Rep*), onde o objeto é definido por entidades que limitam suas bordas ou fronteiras, usualmente curvas e superfícies NURBS ou *T-Splines*. A Figura 4 ilustra exemplos de modelos geométricos formados por um conjunto de superfícies ou *patches* NURBS, em que cada cor representa uma superfície NURBS diferente.

Figura 4 – Representação de objetos utilizando múltiplos *patches* de NURBS em B-Rep.



Fonte: Engvall e Evans (2017).

A Análise Isogeométrica (AIG) (HUGHES *et al.*, 2005) propõem integrar as ferramentas CAD como as ferramentas de análise, conhecidas com CAE (*Computer Aided Engineering*). Para isso, utilizam as mesmas funções de base dos sistemas CAD para representar o campo de deslocamentos. Entretanto, essa integração entre os modelos CAD e CAE na AIG baseada em NURBS ou *T-Splines* não é simples devido à natureza do produto tensorial dessas bases, que limita a capacidade de criar parametrizações adequadas de estruturas com geometrias

complexas (ENGVALL; EVANS, 2016).

A seguir serão discutidas formas de descrição de curvas e superfícies, bem como a representação de modelos geométricos complexos.

3.1 Representação de Curvas

A forma mais simples de se definir uma curva plana no espaço é através de uma equação na forma explícita no seguinte formato:

$$y = f(x) \tag{3.1}$$

Usando essa forma, a representação de uma parábola pode ser escrita como:

$$y = ax^2 + bx + c \tag{3.2}$$

Equações implícitas de uma curva no plano x - y são escritas no formato:

$$f(x, y) = 0 \tag{3.3}$$

essa equação descreve uma relação implícita entre as coordenadas x e y dos pontos sobre a curva. Como exemplo, a representação implícita de uma parábola é:

$$f(x, y) = ax^2 + bx + c - y = 0 \tag{3.4}$$

A forma explícita só pode ser utilizada para curvas onde existam apenas um valor de y para cada valor de x , já a forma implícita não apresenta essa limitação. Entretanto, a avaliação de uma curva na forma explícita é realizada de maneira trivial, enquanto as curvas implícitas requerem que esta avaliação seja feita por métodos iterativos.

Devido aos problemas citados anteriormente, uma outra forma de representação da curva é bastante utilizada na modelagem geométrica, que é a representação paramétrica. Matematicamente, pode-se representar uma curva paramétrica como:

$$\mathbf{C}(x, y) = \mathbf{p}(t) \tag{3.5}$$

onde \mathbf{p} é um ponto da curva e t é a coordenada paramétrica associada. Verifica-se que a mudança entre a representação explícita e a representação paramétrica pode ser realizada diretamente através do uso das relações:

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \tag{3.6}$$

Como ilustração, uma circunferência de raio unitário pode ser definida por funções paramétricas da seguinte forma:

$$\mathbf{C}(t) = (\cos(t), \sin(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (3.7)$$

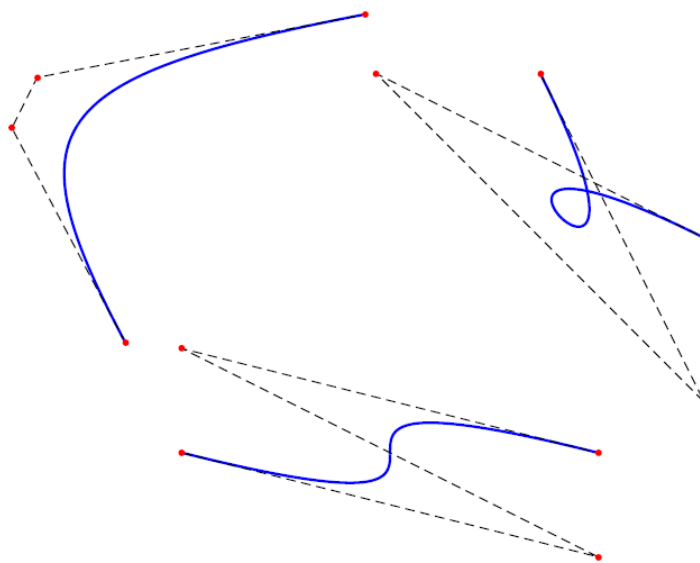
Piegl e Tiller (1997) dizem que as representações paramétricas são mais adequadas para representar formas no computador. Essa representação será a utilizada nas formulações de Bézier, *B-Spline* e NURBS que serão apresentadas nas seções seguintes.

3.1.1 Curvas de Bézier

As curvas de Bézier foram criadas pelo francês Paul De Casteljaou (1959), engenheiro da Citroën. Entretanto, essas curvas foram popularizadas pelo engenheiro da Renault, Pierre Bézier, que as utilizou no design de automóveis. Apesar de terem sido criadas para projetos automobilísticos, atualmente são utilizadas em inúmeras aplicações em *softwares* de computação gráfica como *Photoshop*, *Processing*, *Inkscape*, *CorelDRAW* entre outros.

A curva é definida a partir de um conjunto de pontos de controle e sua geometria pode ser alterada de forma simples movendo esses pontos. A Figura 5 apresenta exemplos de curvas de Bézier de grau 3 (linhas cheias) com o polígono formado pelos pontos de controle (linha tracejada). Percebe-se que apenas os pontos de controle extremos pertencem às curvas, mostrando que os pontos de controle interno não são necessariamente pontos de interpolação.

Figura 5 – Exemplo de curvas de Bézier de grau 3.



Fonte: Barroso (2015).

Uma curva de Bézier de grau p é definida por:

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^{p+1} B_{i,p}(\xi) \mathbf{p}_i \quad (3.8)$$

onde \mathbf{p}_i são os pontos de controle, $B_{i,p}$ são os polinômios de Bernstein (LORENTZ, 1986) de grau p e ξ é a coordenada paramétrica. Percebe-se pela Equação (3.8) que cada curva de grau p possui $p + 1$ pontos de controle.

Conforme Sederberg (2014), levando em consideração um intervalo paramétrico da curva de $[0,1]$, os polinômios de Bernstein são definidos pela expressão:

$$B_{i,p}(\xi) = \binom{p}{i} (1 - \xi)^{p-i} \xi^i, \quad i = 0, 1, \dots, p \quad (3.9)$$

onde os coeficientes binomiais são definidos por:

$$\binom{p}{i} = \frac{p!}{i! (p-i)!} \quad (3.10)$$

A Figura 6 apresenta polinômios de Bernstein de diferentes graus.

Piegl e Tiller (1997) citam importantes propriedades dos polinômios de Bernstein:

- Não-Negatividade: $B_{i,p}(\xi) \geq 0$;
- Partição da unidade: $\sum_{i=1}^{p+1} B_{i,p}(\xi) = 1$;
- $B_{0,p}(0) = B_{p,p}(1) = 1$;
- Simetria: $B_{i,p}(\xi) = B_{p-i,p}(1 - \xi)$;
- Cada polinômio $B_{i,p}(\xi)$ possui um único máximo, assim, ao se mover um ponto de controle, a mudança na forma da curva ocorrerá de forma dominante na vizinhança do ponto movido, essa característica é chamada de controle pseudo-local;
- Podem ser calculados através da fórmula recursiva:

$$B_{i,p}(\xi) = (1 - \xi) B_{i,p-1}(\xi) + \xi B_{i-1,p-1}(\xi) \quad (3.11)$$

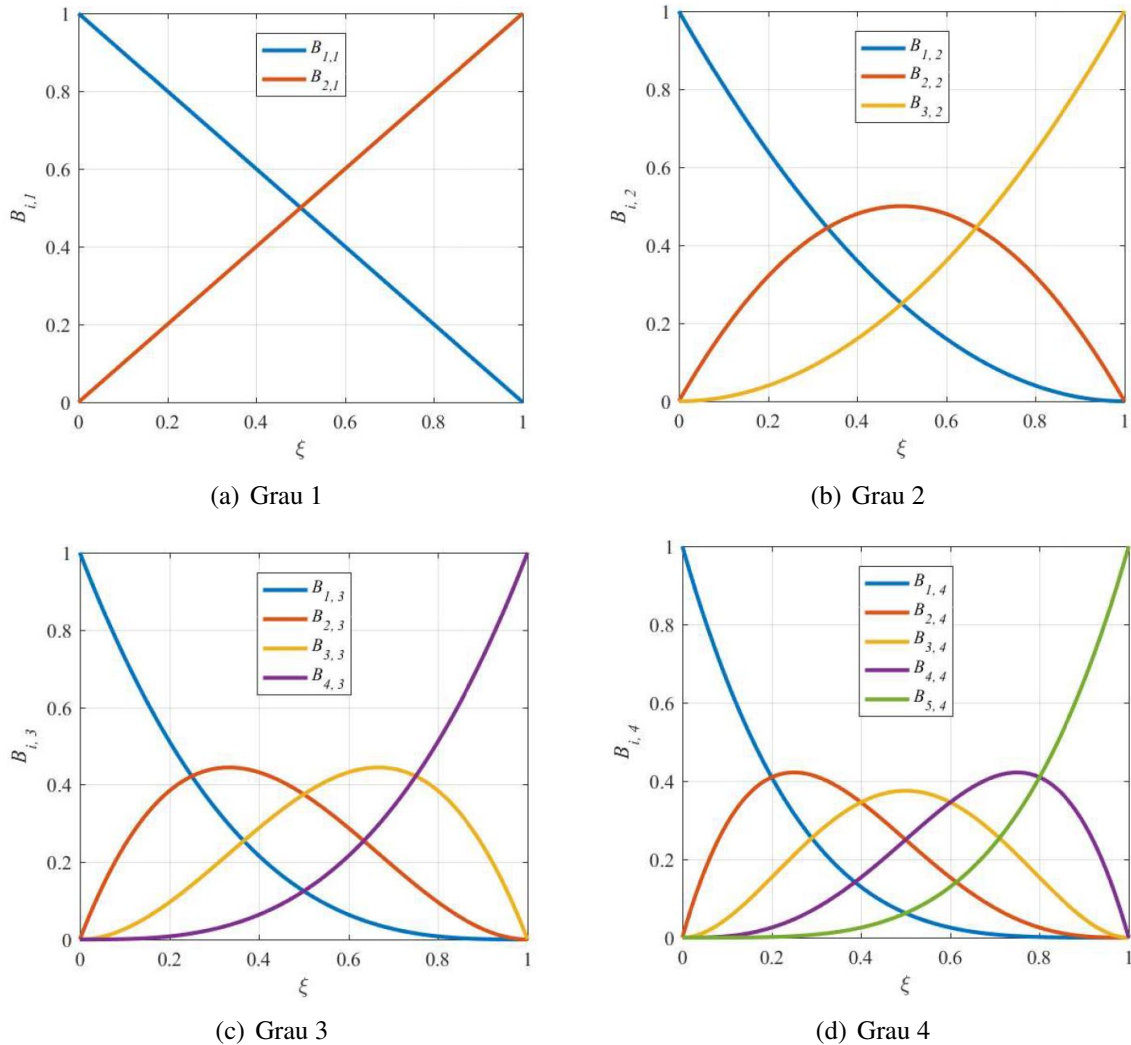
onde $B_{i,p}(\xi) = 0$ para $\xi < 0$ e $\xi > 1$, $B_{0,0}(\xi) = 1$.

A primeira derivada pode ser calculada por:

$$\frac{d}{d\xi} B_{i,p}(\xi) = p(B_{i-1,p-1}(\xi) - B_{i,p-1}(\xi)) \quad (3.12)$$

A curva de Bézier apresenta a desvantagem de não ser capaz de representar de forma exata curvas cônicas, como circunferências e elipses, pois estas curvas não conseguem ser descritas por funções polinomiais. Uma saída para esse problema é a utilização de funções

Figura 6 – Polinômios de Bernstein para vários graus.



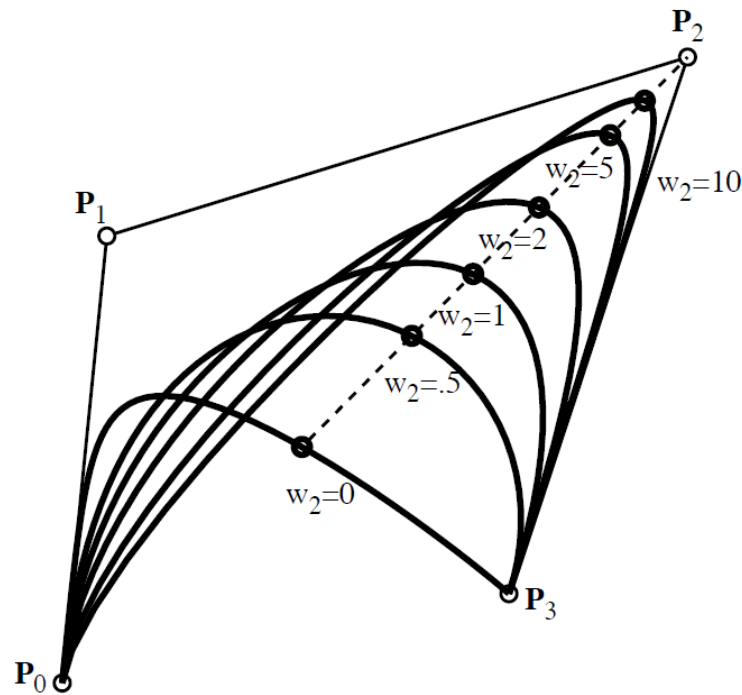
Fonte: elaborado pelo autor.

racionais. Para isso, são acrescentados pesos aos pontos de controle da curva. Assim as curvas de Bézier racional passam a ser calculadas pela expressão:

$$C(\xi) = \frac{\sum_{i=1}^{p+1} w_i B_{i,p}(\xi) \mathbf{p}_i}{\sum_{i'=1}^{p+1} w_{i'} B_{i',p}(\xi)} \quad (3.13)$$

onde w_i é o peso associado aos pontos de controle \mathbf{p}_i . Percebe-se que caso todos os pesos sejam iguais a 1 na Equação (3.13) da Bézier racional, ela se torna igual a Equação (3.8) da Bézier tradicional. A Figura 7 apresenta o efeito da variação do peso na curva, onde o peso do ponto \mathbf{p}_2 é variado entre 0 e 5.

Figura 7 – Efeito da variação do peso.



Fonte: Sederberg (2014).

3.1.2 Curvas B-Splines e NURBS

Piegl e Tiller (1997) definem uma curva *B-Spline* como uma combinação linear de pontos de controle \mathbf{p}_i e funções de base $N_{i,p}$:

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \mathbf{p}_i \quad (3.14)$$

onde n é o número de funções de base, p é o grau destas funções e ξ é a coordenada paramétrica.

As curvas *B-Splines* conseguem descrever vários segmentos distintos ao longo de uma mesma representação paramétrica. Essa característica ocorre devido à limitação da atuação das funções de base em regiões do espaço paramétrico. Essas regiões são conhecidas na literatura como *knot spans*, que são definidas por um vetor de *knots* (*knot vector*). Esse vetor é dado por um conjunto de valores paramétricos não-negativos e não decrescentes definidos ao longo do intervalo paramétrico $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{n+p+1}]$. Esses vetores podem ser classificados como uniformes quando seus valores paramétricos aumentam a uma mesma razão, como por exemplo $\Xi = [0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 4]$, já o vetor $\Xi = [0, 0, 0, 1, 2, 6, 7, 7, 7]$ é não-uniforme.

Dado um vetor de *knot* $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{n+p+1}]$, as funções de base *B-Splines*

podem ser definidas pela fórmula recursiva de Cox-de Boor (PIEGL; TILLER, 1997):

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.15)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (3.16)$$

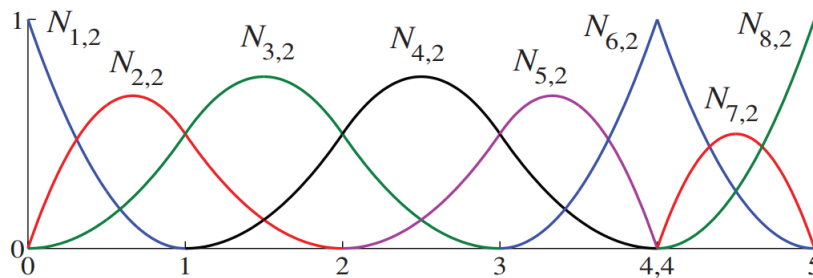
Desse modo, cada base $N_{i,p}(\xi)$ contribui apenas ao longo do intervalo paramétrico $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$, sendo o número de bases não nulas em cada *knot span* igual a $p + 1$, como pode-se observar na Figura 8.

O número total de bases (n) pode ser calculado através da expressão:

$$n = ks - p - 1 \quad (3.17)$$

onde ks é o tamanho do vetor de *knots* e p é o grau da curva.

Figura 8 – Funções de base *B-Splines* $p = 2$ e vetor de *knots* $\Xi = [0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5]$.



Fonte: Cottrell *et al.* (2009).

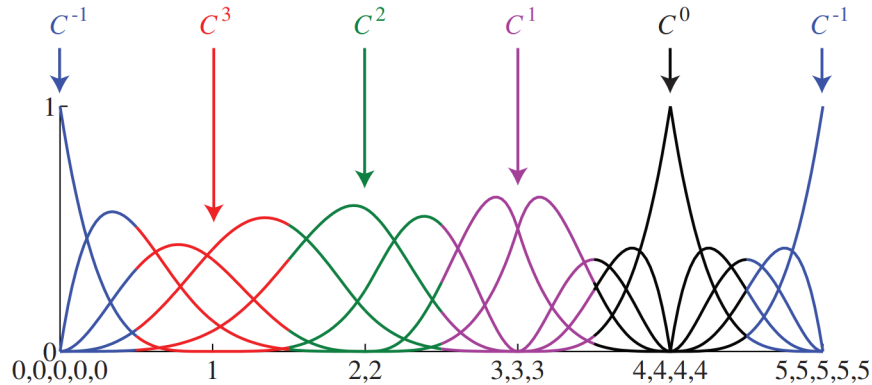
A derivada da Equação (3.16) é importante na Análise Isogeométrica, pois é utilizada na avaliação da matriz de rigidez \mathbf{K} , e pode ser calculada como:

$$\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (3.18)$$

No interior do vetor de *knots*, os valores paramétricos podem aparecer mais de uma vez, sendo o número de repetições chamada de multiplicidade do *knot*. Esse conceito é importante na definição da continuidade dentro do *knot span*. As *B-Splines* possuem continuidade C^{p-1} em seu interior, entretanto caso haja uma multiplicidade m em um *knot*, a continuidade da curva é C^{p-m} neste *knot*, como mostrado na Figura 9.

Cabe destacar que caso um *knot* interno ξ_i tenha multiplicidade igual ao grau da função de base ($m = p$), então a curva irá interpolar um ponto de controle em ξ_i . A Figura 10

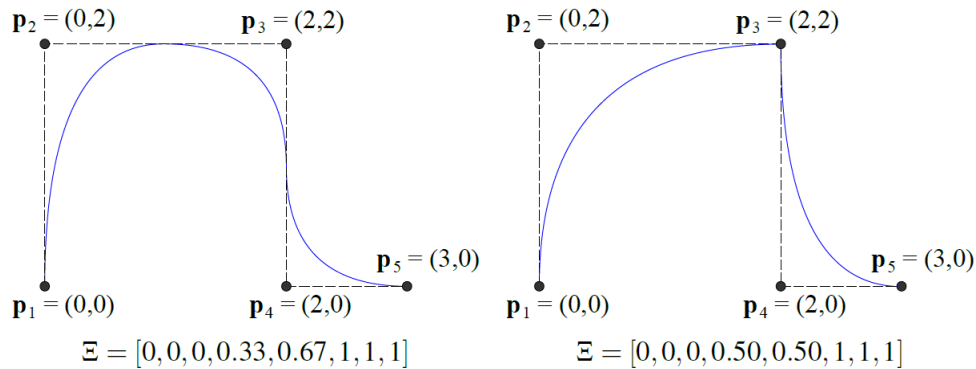
Figura 9 – Funções de base B-Splines e suas continuidades no interior dos spans de um vetor de knots $\Xi = [0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5]$.



Fonte: Cottrell *et al.* (2009).

ilustra o efeito da multiplicidade $m = p$ em um *knot* interno, comparando duas curvas *B-Splines* de grau $p = 2$ com os mesmos pontos de controle, mas *knots* diferentes. Caso os *knots* extremos tiverem multiplicidade $p + 1$, então os pontos de controle externo serão interpolados. Os vetores que possuem essa característica são conhecidos na literatura como *open knot vector*, ou vetor de *knots* aberto.

Figura 10 – Efeito da multiplicidade em uma *B-Spline* quadrático.



Fonte: Barroso (2015).

É importante notar que as curvas *B-Splines* podem representar curvas de Bézier caso seja considerado um único *knot span* e as multiplicidades dos *knots* deste sejam $p + 1$:

$$\Xi = \underbrace{[0, \dots, 0]}_{p+1}, \underbrace{[1, \dots, 1]}_{p+1}.$$

Piegl e Tiller (1997) apresentam características importantes das funções *B-Splines*:

- Não-Negatividade: $N_{i,p}(\xi) \geq 0$;
- Partição da unidade: $\sum_{i=1}^{p+1} N_{i,p}(\xi) = 1$;
- $N_{0,p}(0) = N_{p,p}(1) = 1$;
- Suporte compacto $N_{i,p}(\xi) = 0$ se ξ estiver fora do intervalo $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$;

- Dado um *knot span* $[\xi_j, \xi_{j+1}]$, exatamente $p + 1$ funções de base são não nulas;
- Todas as derivadas de $N_{i,p}(\xi)$ existem no interior dos *knot spans*.

3.1.2.1 Refinamentos

Nas *B-Splines* são possíveis três tipos de refinamento: inserção de *knot*, elevação do grau e refinamento k . Todos os procedimentos anteriores alteram a descrição da curva sem modificar sua forma.

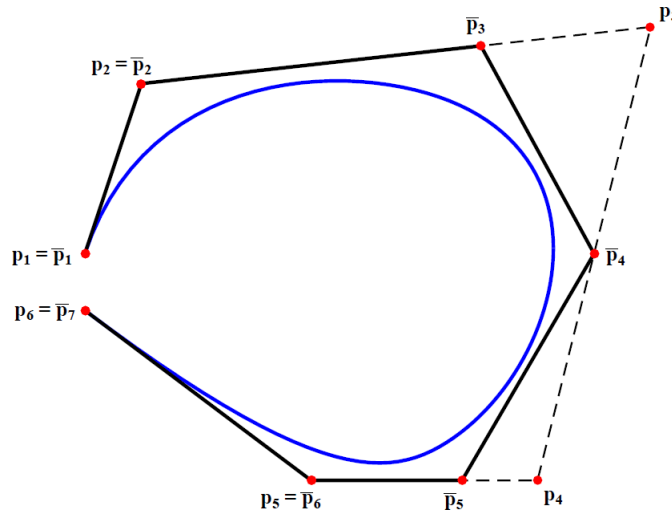
A inserção de *knot* adiciona um novo valor ξ_i no vetor de *knot* Ξ , isso também ocasiona a adição de uma nova base $N_{i,p}$ e um novo ponto de controle. Para que a curva permaneça com a mesma geometria, alguns dos pontos de controle mudam de posição. Considerando um vetor de *knots* $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{n+p+1}]$, onde será adicionado um novo *knot* $\bar{\xi} \in [\xi_k, \xi_{k+1}]$, como mostrado na Figura 11, os novos pontos de controle $\bar{\mathbf{p}}$ podem ser obtidos a partir das seguintes expressões em função dos pontos de controle antigos \mathbf{p} (PIEGL; TILLER, 1997):

$$\bar{\mathbf{p}}_i = \begin{cases} \mathbf{p}_i, & i = 1 \\ \alpha_i \mathbf{p}_i + (1 - \alpha_i) \mathbf{p}_{i-1}, & 1 < i < h \\ \mathbf{p}_{h-1}, & i = h \end{cases} \quad (3.19)$$

sendo h o tamanho do novo vetor de pontos de controle $\bar{\mathbf{p}}$ e o parâmetro α é dado por:

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ \frac{\bar{\xi} - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i}, & k - p \leq i \leq k \\ 0, & i \geq k + 1 \end{cases} \quad (3.20)$$

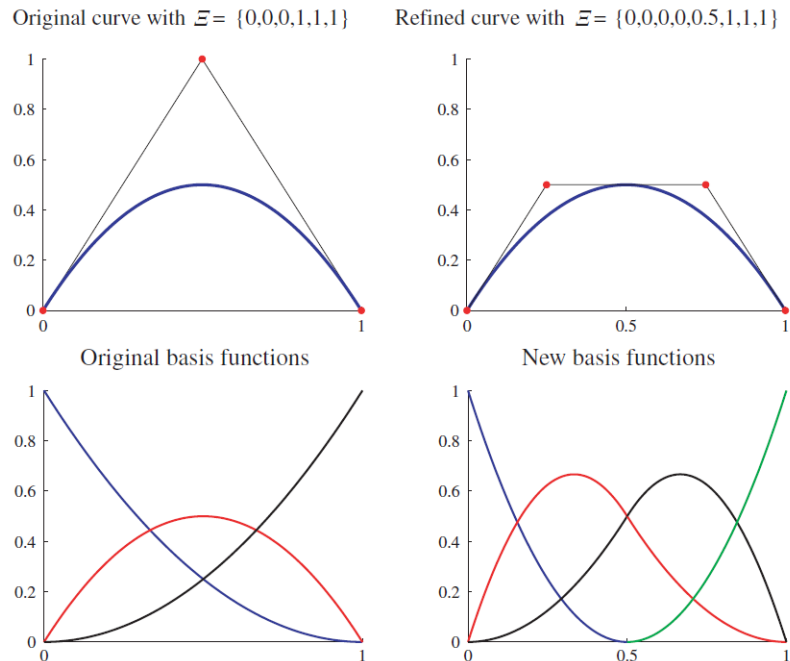
Figura 11 – Inserção de *knot* em uma curva *B-Spline* quadrático.



Fonte: Barroso (2015).

Em relação à análise estrutural, esse refinamento ocasiona a redução do tamanho do elemento e aumento do número de elementos da malha, elevando assim o número de graus de liberdade, sendo semelhante ao refinamento h realizado no Métodos do Elementos Finitos (MEF). A Figura 12 ilustra a ideia da inserção de *knots*.

Figura 12 – Inserção de *knot*.

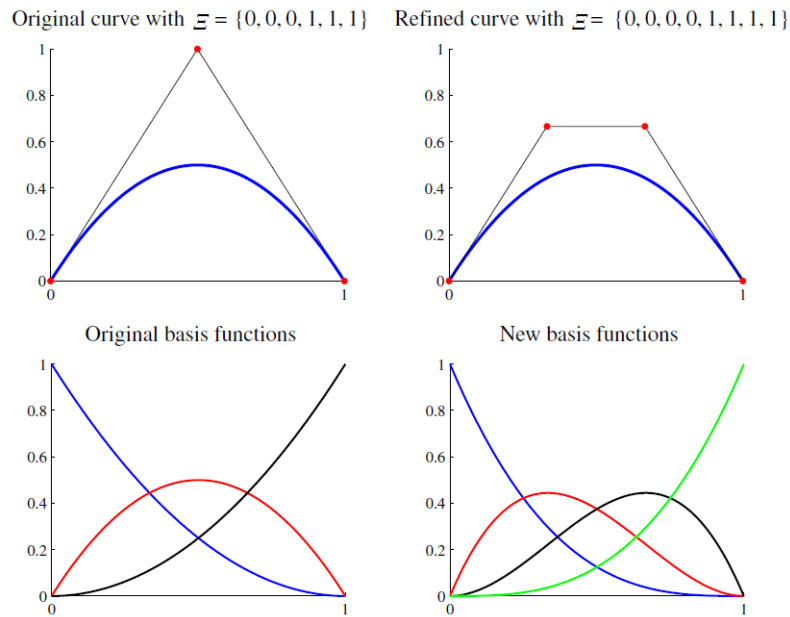


Fonte: Hughes *et al.* (2005).

O refinamento por elevação de grau, cujo conceito é ilustrado na Figura 13, atua nas *B-Splines* elevando o grau da curva em cada intervalo paramétrico, mantendo sua continuidade, ou seja a multiplicidade em cada *knot* aumenta em 1. Aqui também ocorre o acréscimo de pontos

de controle. Esse refinamento é semelhante ao refinamento p do MEF.

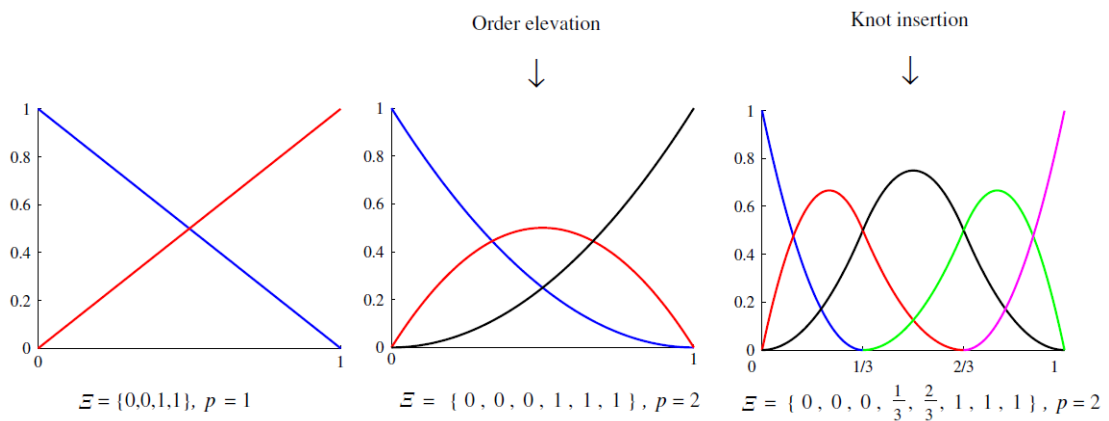
Figura 13 – Elevação de grau.



Fonte: Hughes *et al.* (2005).

O refinamento k , ilustrado na Figura 14, é uma combinação entre os refinamentos p e h . Primeiro ocorre a elevação do grau e depois a inserção de *knots*, ocasionando assim que haja aumento tanto do grau da base como da continuidade entre os *spans*. Não existe refinamento similar a esse no MEF.

Figura 14 – Refinamento k .



Fonte: Hughes *et al.* (2005).

3.1.2.2 NURBS

Assim como acontece com as curvas de Bézier, as *B-Splines* não conseguem representar geometrias cônicas, como círculos e elipses, pois as mesmas não têm geometria definida por polinômios. Uma alternativa a esse problema é a utilização de *B-Splines* não uniformes de base racional conhecidas por NURBS (*Non-Uniform Rational B-Splines*).

Piegl e Tiller (1997) definem uma curva NURBS como uma combinação linear de pontos de controle (\mathbf{p}_i) e funções de base racional ($R_{i,p}$):

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n R_{i,p}(\xi) \mathbf{p}_i \quad (3.21)$$

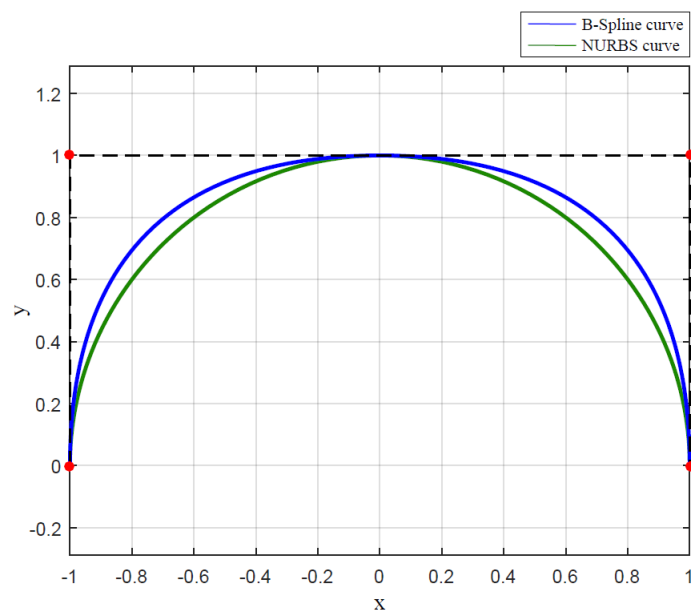
onde n é o número de funções de base, p é o grau destas funções e ξ é a coordenada paramétrica.

As funções de base NURBS ($R_{i,p}$) podem ser escritas em relação às funções de base das *B-splines* ($N_{i,p}$) e dos pesos (w_i) como:

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{\sum_{i'=1}^n N_{i',p}(\xi)w_{i'}} = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{W(\xi)} = \frac{A(\xi)}{W(\xi)} \quad (3.22)$$

onde $W(\xi)$ é a função peso. Cada ponto \mathbf{p}_i de controle tem um peso w_i associado a ele. A Figura 15 compara uma semicircunferência modelada com NURBS e um arco de 180° modelado com *B-Spline* não racional ($w = 1$).

Figura 15 – Semicircunferência modelada com NURBS e arco de 180° modelado com *B-Spline* não racional.



Fonte: Barroso (2015).

A derivada das funções de base da NURBS, ou seja da Equação 3.22, é encontrada aplicando a regra da cadeia:

$$R'_{i,p}(\xi) = \frac{W(\xi)A'(\xi) - W'(\xi)A(\xi)}{W(\xi)^2} = \frac{A'(\xi) - W'(\xi)R_{i,p}}{W(\xi)} \quad (3.23)$$

Cabe destacar que as funções de base NURBS herdam todas as propriedades das funções *B-Splines*, possibilitando assim as operações de refinamento p , h e k .

3.2 Representação de Superfícies

Similar à representação de uma curva, uma superfície também pode ser descrita implicitamente por $S(x, y, z) = 0$. Como exemplo, uma esfera de raio unitário com centro na origem pode ser descrita por:

$$S(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \quad (3.24)$$

A equação anterior pode ser descrita na forma paramétrica como:

$$S(t, u) = (x(t, u), y(t, u), z(t, u)) = (\text{sen}(t)\cos(u), \text{sen}(t)\text{sen}(u), \cos(t)) \quad (3.25)$$

com $0 \leq t \leq 1$ e $0 \leq u \leq 1$.

Assim como na seção anterior, a seguir serão apresentadas as formulações para as superfícies de Bezier, *B-spline* e NURBS, que são as mais utilizadas nos sistemas CAD.

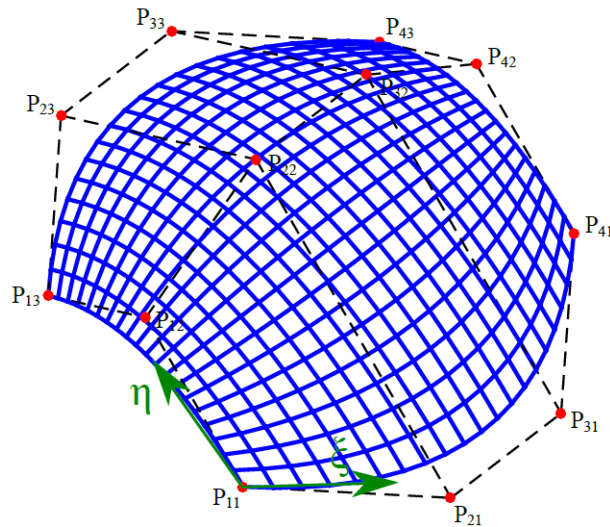
3.2.1 Superfícies de Bézier

Uma superfície de Bézier pode ser obtida a partir do produto tensorial de dois polinômios de Bernstein univariantes. Assim, uma superfície de Bézier racional, com grau p na direção ξ e q na direção η , pode ser expressa como:

$$S(\xi, \eta) = \frac{\sum_{i=1}^{p+1} \sum_{j=1}^{q+1} w_{ij} B_{i,p}(\xi) B_{j,q}(\eta) \mathbf{P}_{ij}}{\sum_{i'=1}^{p+1} \sum_{j'=1}^{q+1} w_{i'j'} B_{i',p}(\xi) B_{j',q}(\eta)} \quad (3.26)$$

onde $B_{i,p}(\xi)$ e $B_{j,q}(\eta)$ são os polinômios de Bernstein univariantes, \mathbf{P} é a matriz de pontos de controle e w_{ij} é o peso associado a cada ponto de controle. A Figura 16 ilustra uma superfície de Bézier com grau 3×2 .

Figura 16 – Superfície de Bézier com grau 3x2.

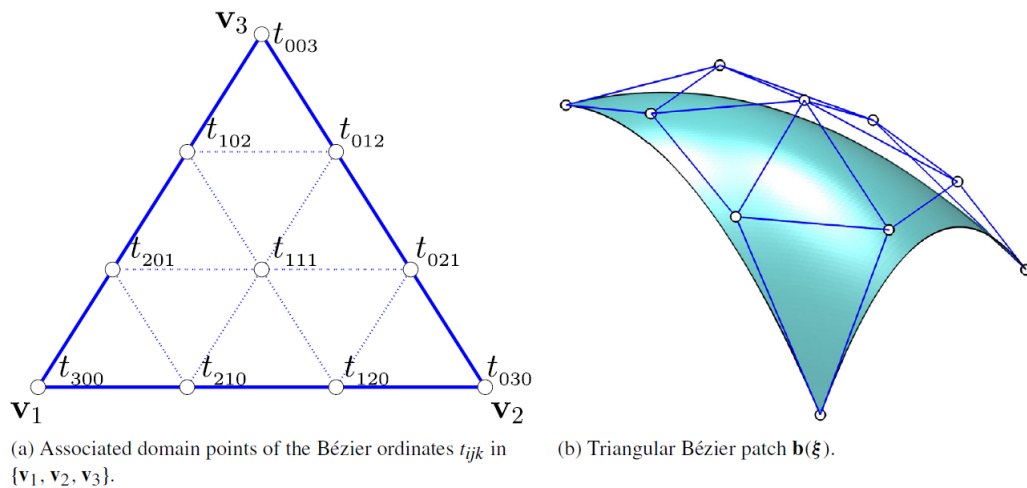


Fonte: Barroso (2015).

3.2.2 Triângulos de Bézier

Os triângulos de Bézier são superfícies bivariadas que diferem das superfícies de Bézier construídas por produto tensorial definidas na Seção 3.2.1. Nesses elementos, a malha de controle é definida por uma estrutura triangular, como ilustrado a Figura 17.

Figura 17 – Malha de controle de um patch triangular de Bézier.

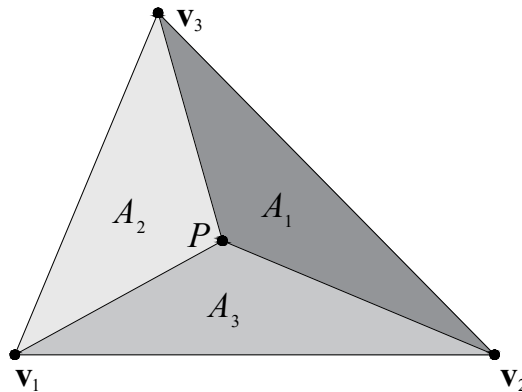


Fonte: Xia e Qian (2017).

Conforme Barnhill (1985), uma ferramenta importante para construção de elementos triangulares é o conceito de coordenadas baricêntricas, pois os pontos da superfície são avaliados em função das mesmas. As coordenadas baricêntricas de um ponto $P \in \mathbb{R}^2$ em um triângulo $\tau = [v_1, v_2, v_3]$ são dadas por $\lambda_i = A_i/A$, onde A e A_i são a área total do triângulo e a área do triângulo oposto ao vértice v_i , $i = 1, 2, 3$, respectivamente. A Figura 18 ilustra essa geometria

para as coordenadas baricêntricas.

Figura 18 – Geometria para as coordenadas baricêntricas do ponto P.



Fonte: elaborado pelo autor.

As funções de base utilizadas nos triângulos de Bézier são os polinômios bivariados de Bernstein definidos por:

$$B_{ijk}^p(\lambda) = \frac{p!}{i!j!k!} \lambda_1^i \lambda_2^j \lambda_3^k \quad (3.27)$$

onde p é o grau do polinômio, (i, j, k) são os índices ordenados cuja soma é p , e $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ são as coordenadas baricêntricas de um ponto no triângulo.

A forma racional dos polinômios definidas na Equação (3.27) pode ser escrita como:

$$R_{ijk}(\lambda) = \frac{B_{ijk}(\lambda) w_{ijk}}{\sum_{r+s+t=p} B_{rst}(\lambda) w_{rst}} \quad (3.28)$$

onde w_{ijk} correspondem aos pesos associados às funções de base B_{ijk} .

Desta forma, um triângulo racional de Bézier pode ser definido como:

$$T(\lambda) = \sum_{i+j+k=p} R_{ijk}(\lambda) \mathbf{p}_{ijk} \quad (3.29)$$

Conforme Xia e Qian (2017), sob o conceito isoparamétrico, as mesmas bases bivariadas R_{ijk} , definidas na Equação (3.28), utilizadas para definir um triângulo $\tau = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$, também podem ser utilizadas para definir uma função f de grau p sobre τ como:

$$f(\lambda) = \sum_{i+j+k=p} R_{ijk} t_{ijk}(\lambda) \quad (3.30)$$

onde t_{ijk} é chamado de ordenadas de Bézier de f . O conjunto de pontos do domínio podem ser definidos como:

$$D_{p,\tau} = \left\{ \mathbf{q}_{ijk} = \frac{i\mathbf{v}_1 + j\mathbf{v}_2 + k\mathbf{v}_3}{p}, i + j + k = p \right\} \quad (3.31)$$

Desse modo, o polígono de controle da função f é dado pelos pontos $(\mathbf{q}_{ijk}, t_{ijk})$. A Figura 17.a mostra um exemplo da malha de controle das ordenadas de Bézier e a Figura 17.b mostra um *patch* triangular de Bézier.

3.2.3 Superfícies NURBS

Uma superfície NURBS definida por um produto tensorial tem construção semelhante as superfícies de Bézier, a partir do produto de duas bases univariantes. Determinada superfície S pode ser definida por uma matriz de pontos de controle $\mathbf{P}(n \times m)$, entre uma NURBS de grau p na direção ξ com vetor de *knot* $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{n+p+1}]$ e outra de grau q na direção η com vetor de *knot* $\mathbf{H} = [\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_{m+q+1}]$. Assim a superfície pode ser expressa por:

$$S(\xi) = \sum_{i=1}^{p+1} \sum_{j=1}^{q+1} R_{i,p}(\xi, \eta)_{ij} \mathbf{P}_{ij} \quad (3.32)$$

onde $R_{i,p}(\xi, \eta)$ é a função de base racional bivariada definida por:

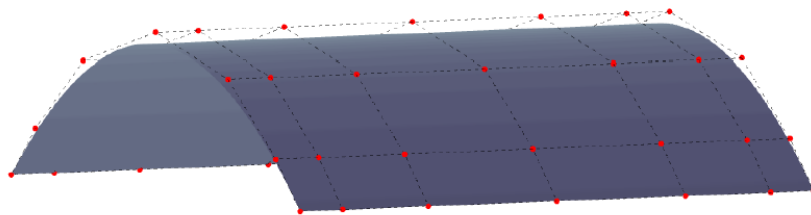
$$R_{i,p}(\xi) = \frac{w_{ij} N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta)}{W(\xi, \eta)} \quad (3.33)$$

em que $W(\xi, \eta)$ é a função peso bivariada dada por:

$$W(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{p+1} \sum_{j=1}^{q+1} w_{ij} N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) \quad (3.34)$$

A Figura 19 mostra uma superfície NURBS e seus pontos de controle.

Figura 19 – Superfície NURBS.



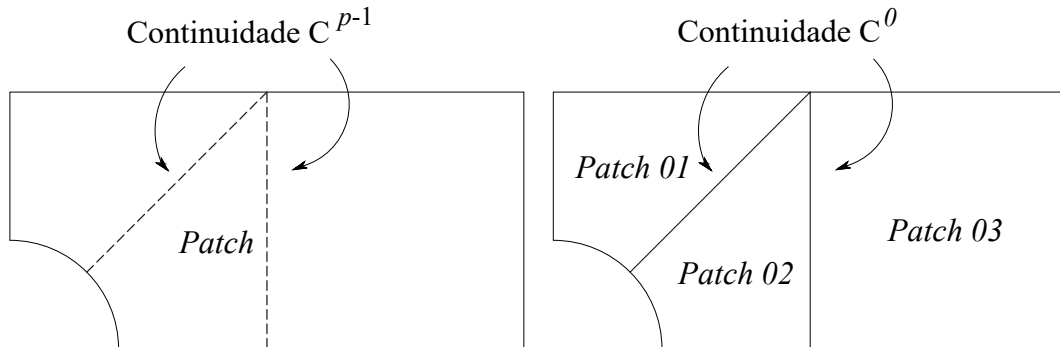
Fonte: Praciano (2018).

3.2.3.1 Múltiplos Patches

Muitas vezes apenas um entidade NURBS (curva ou superfície), conhecida como *patch*, é suficiente para modelar geometrias complexas. Entretanto, há casos que é necessária a utilização de múltiplas entidades para representar determinados modelos. Como exemplo,

citam-se modelos que apresentam diferentes atributos, como materiais, carregamentos, condições de contorno em que é preciso a utilização de diferentes *patches* para representar as regiões. A Figura 20 ilustra uma superfície plana, que pode ser modelada por um único ou múltiplos *patches*, onde observa-se que a utilização de vários *patches* leva à redução na continuidade nas fronteiras da entidade NURBS.

Figura 20 – Exemplo de modelo considerando múltiplos *patches*.



Fonte: elaborado pelo autor.

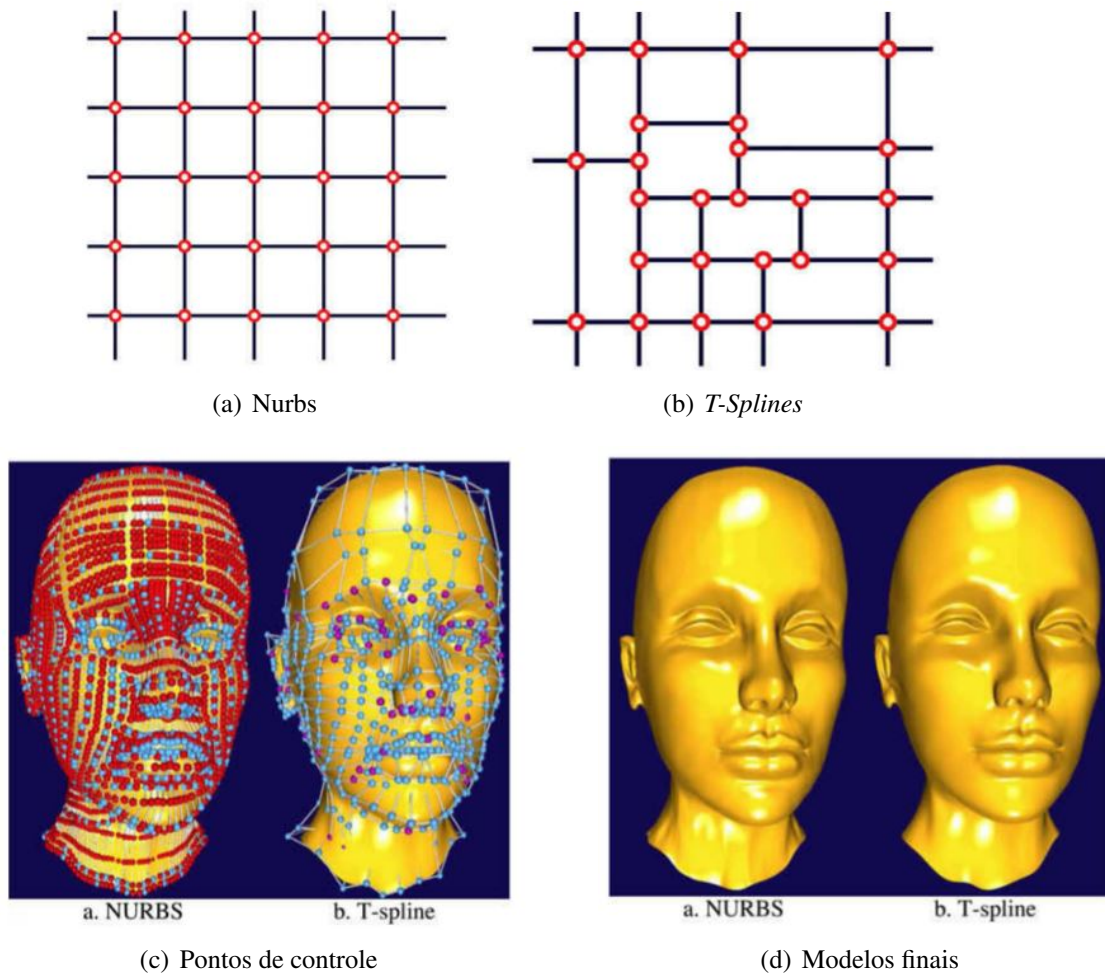
3.2.4 T-Splines e Outras Representações

As NURBS são as bases mais utilizadas nos sistemas CAD devido às suas vantagens como representação de geometrias quadráticas e formas livres e possuir algoritmos eficientes e numericamente estáveis para a geração de superfícies e objetos. Entretanto, as NURBS apresentam problemas como as lacunas e sobreposições nas interseções de múltiplos *patches*, além de não permitirem refinamento local e possuírem inúmeros pontos de controle supérfluos que não contêm informações geométricas significativas (BAZILEVS *et al.*, 2010).

Para superar as deficiências apresentadas pelas bases NURBS, Sederberg *et al.* (2003) desenvolveram uma generalização das NURBS, chamada de *T-Splines*. A principal diferença entre uma malha de controle *T-Spline* e uma NURBS é que a *T-Spline* permite que uma linha de pontos de controle termine em uma outra, sem a necessidade de cortar toda a malha como ocorre nas NURBS. O ponto de controle final da linha é chamado de *T-junction*.

A Figura 21 ilustra a diferença entre as topologias de uma grade de uma superfície NURBS (Figura 21(a)) e de uma superfície *T-Spline* (Figura 21(b)). A Figura 21(c) mostra um modelo de uma cabeça utilizando NURBS com 4712 pontos de controle, sendo os pontos vermelhos pontos supérfluos, e *T-Splines* com 1109 pontos de controle, onde os pontos roxos são os *T-junctions*. Na Figura 21(d) mostram-se os modelos finais gerados pelas NURBS e *T-Splines*.

Figura 21 – Modelo com NURBS e *T-Splines*.



Fonte: Bazilevs *et al.* (2010).

Além das vantagens na modelagem geométrica, as *T-Splines* são também atraentes para sua utilização como bases da IGA, pois possibilitam a realização de um refinamento local (ZHANG; LI, 2016). Vários trabalhos foram realizados explorando essa ideia (BAZILEVS *et al.*, 2010; DÖRFEL *et al.*, 2010). Entretanto, Buffa *et al.* (2010) diz que o uso das *T-Splines* na IGA pode ser inadequado para a análise, devido à possível dependência linear dessas bases. Assim, outros estudos foram realizados no intuito de apresentar *T-Splines* que gerem modelos adequados para a análise numérica usando IGA (NGUYEN-THANH *et al.*, 2011a; NGUYEN-THANH *et al.*, 2011b; SCHILLINGER *et al.*, 2012; SCOTT *et al.*, 2012; SCOTT *et al.*, 2013; LI; SCOTT, 2014; LI, 2015).

Além das *T-Splines*, muitas outras técnicas de modelagem surgiram com intuito de solucionar os problemas apresentados pelas NURBS, como as: *hierarchical B-Splines (HB-Splines)*, que apresentam um controle efetivo para o refinamento local, porém não possuem a

propriedade da partição da unidade (FORSEY; BARTELS, 1988; VUONG *et al.*, 2011). Uma modificação das *HB-Splines* é a *Truncated hierarchical B-splines (THB-splines)* que apresenta a partição da unidade (GIANNELLI *et al.*, 2012; GIANNELLI *et al.*, 2013; GIANNELLI *et al.*, 2016). As *Locally refined B-Splines - (LR B-Splines)* são constituídas por funções de base polinomiais suaves e facilitam o refinamento local (DOKKEN *et al.*, 2013; JOHANNESSEN *et al.*, 2014). Já as *Polynomial splines over hierarchical T-meshes - (PHT-Splines)* são um tipo de *Splines*-polinomiais capaz de simplificar e reduzir os pontos de controle supérfluos das superfícies NURBS (DENG *et al.*, 2008; NGUYEN-THANH *et al.*, 2011a; NGUYEN-THANH *et al.*, 2011b).

3.3 Representação por fronteira (B-Rep)

A representação por fronteira, em inglês *boundary representations* (B-Rep), é um paradigma de modelagem geométrica geralmente adotado na representação de sólidos complexos. Consiste em representar modelos por suas entidades de contorno, que correspondem a um conjunto de superfícies delimitadoras em modelos 3D e curvas delimitadoras em modelos planos. Existem muitos algoritmos disponíveis para a manipulação e modificação de modelos B-Rep, o que torna esta abordagem extremamente interessante no campo da modelagem geométrica. Além disso, a definição explícita dos limites do modelo permite uma fácil aplicação de técnicas de renderização por meio de APIs de gráficos modernos, como OpenGL e DirectX.

Apesar dessas vantagens, o B-Rep não fornece diretamente um modelo de análise exigido pelo MEF e pela AIG. Existe um problema de parametrização superfície-volume a ser resolvido para obter um modelo numérico válido. No caso do MEF, este problema foi resolvido através da aplicação de técnicas de geração de malha (FREY; GEORGE, 2008).

No contexto da AIG, esse problema permanece um campo ativo de pesquisa. Existem muitas abordagens na literatura com o objetivo de resolver o problema de parametrização de superfície para volume, usando vários *patches* NURBS, T-Splines e outras representações, mas essas soluções carecem de robustez. Por outro lado, o uso de elementos racionais Bézier permite a geração automática de malhas adequadas à análise (ENGVALL; EVANS, 2016).

No caso de modelos planos descritos por curvas NURBS, o algoritmo de geração de malha não estruturada de triângulos racionais de Bézier é descrito a seguir (BARROSO *et al.*, 2019):

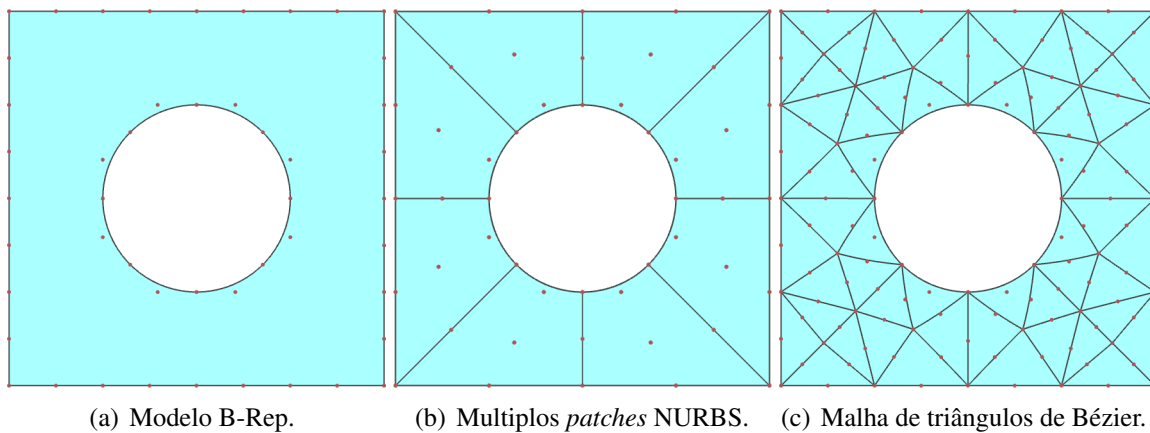
- Inicialmente, segmentos racionais Bézier são extraídos das curvas NURBS, através do

procedimento de extração Bézier;

- Um gerador de malha linear é processado, usando os pontos de controle do segmento de Bézier como bordas de entrada;
- O algoritmo de elevação de grau é aplicado a elementos de malha linear, e as curvas de contorno de entrada são restauradas, preservando a exatidão da geometria;
- Por último, a suavização pós-processamento pode ser aplicada para melhorar a qualidade da malha.

Por exemplo, consideramos uma placa simples com modelo de furo ilustrado na Figura 22. Como o NURBS não pode representar buracos devido à sua natureza de produto tensorial, o modelo deve ser dividido manualmente em vários *patches*. Assim que os oito *patches* NURBS forem encontrados, o procedimento de refinamento pode ser aplicado. Por outro lado, uma malha composta de triângulos Bézier racionais pode ser obtida diretamente usando o procedimento descrito anteriormente

Figura 22 – Modelo 2D e suas parametrizações usando *patches* NURBS e triângulos racionais de Bézier.



Fonte: elaborado pelo autor.

4 ANÁLISE ISOGEOMÉTRICA

A Análise Isogeométrica (AIG), foi proposta por Hughes *et al.* (2005), é um método de análise estrutural que apresenta características semelhantes ao Método dos Elementos Finitos (MEF). A AIG busca integrar os conceitos de CAD (*Computer Aided Design*) e CAE (*Computer Aided Engineering*) utilizando as bases do sistema CAD (e.g. superfícies de Bézier e NURBS) como funções de aproximação do campo de deslocamento.

A AIG utiliza a mesma ideia da formulação isoparamétrica do MEF, entretanto a sequência de aproximações é invertida. Ou seja, na AIG os deslocamentos no interior do sólido são aproximados pelas mesmas funções utilizadas para definir a geometria do sólido, enquanto no MEF, a geometria é aproximada pelas mesmas funções adotadas no campo de deslocamento. Na AIG, a geometria dos modelos é representada de forma exata para qualquer nível de discretização. A Análise Isogeométrica também possibilita a fácil aplicação de algoritmos de refinamento, permitindo aumentar a discretização ou grau do modelo preservando a geometria inicial.

A AIG tem sido utilizada na solução de diversos problemas de engenharia, como mecânica não linear dos sólidos (ELGUEDJ *et al.*, 2008), problemas de escoamento (BAZILEVS *et al.*, 2007), otimização estrutural (WANG *et al.*, 2018), eletromagnetismo (VAZQUEZ; BUFFA, 2010), análise de placas e cascas (KAPOOR; KAPANIA, 2012; KIENDL *et al.*, 2009; KIENDL *et al.*, 2010; BENSON *et al.*, 2010; HOSSEINI *et al.*, 2014; BARROSO, 2015; BARROS, 2016; SHI *et al.*, 2018; PRACIANO, 2018; PRACIANO *et al.*, 2019; AUAD, 2019; AUAD *et al.*, 2019; DIWAN; MOHAMED, 2020; NGUYEN *et al.*, 2020) entre outros.

A AIG vem sendo utilizada por diversos pesquisadores com sucesso para a análise de estruturas de MGF (VALIZADEH *et al.*, 2013; NGUYEN-XUAN *et al.*, 2014; DO *et al.*, 2019b; AUAD *et al.*, 2019; RIBEIRO *et al.*, 2020; MAIA *et al.*, 2021). Nguyen-Xuan *et al.* (2014) apresentam uma abordagem simples e eficaz que incorpora a AIG, baseada em NURBS, com a Teoria de Placa Refinada (TPR) - *Refined Plated Theory* (RPT), para análise estática, de vibração livre e de flambagem de placas de MGF. Do *et al.* (2019b) estudam o comportamento de placas de MGF sujeitas a diferentes carregamentos térmicos, com base na AIG com NURBS e uma Teoria de Alta Ordem para a consideração dos efeitos cisalhantes. Valizadeh *et al.* (2013) utilizam a AIG baseada em NURBS e a Teoria de Reissner-Mindlin para a análise estática e dinâmica de placas de MGF. Auad *et al.* (2019) estudam a flambagem de estruturas de MGF utilizando a AIG baseada em NURBS e na Teoria de Reissner-Mindlin. Ribeiro *et al.* (2020) e Maia *et al.* (2021) realizam a otimização de estruturas de MGF com a IGA baseada em NURBS e

na Teoria de Reissner-Mindlin.

Observa-se que grande parte dos trabalhos envolvem a AIG baseada em NURBS. Apesar de apresentar vantagens significativas, a AIG baseada em NURBS tem algumas limitações, como falta de parametrização automática, refinamento de malha local ineficiente e dificuldades na representação de topologias complexas (ZAREH; QIAN, 2019).

Como discutido no Capítulo 3, a utilização dos elementos de Bézier surge como uma boa alternativa para solucionar esses problemas. Assim, muitos trabalhos vem sendo realizados utilizando os elementos de Bézier na IGA (ENGVALL; EVANS, 2016; ENGVALL; EVANS, 2017; XIA; QIAN, 2017; BARROSO *et al.*, 2016; BARROSO *et al.*, 2017; BARROSO *et al.*, 2019; SILVA *et al.*, 2020).

As seções seguintes apresentam o desenvolvimento da formulação isogeométrica de cascas abatidas, as expressões para o cálculo dos esforços internos e externos, além das técnicas de resolução dos sistemas não lineares e do traçado do caminho de equilíbrio.

4.1 Deslocamentos e Deformações

Na AIG, a geometria de uma casca abatida é representado por uma combinação linear de np funções de base R_i e pontos de controle $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i, z_i)$, como:

$$x = \sum_{i=1}^{np} R_i x_i; \quad y = \sum_{i=1}^{np} R_i y_i; \quad z_0 = \sum_{i=1}^{np} R_i z_{0i}; \quad (4.1)$$

onde as funções de base R_i podem ser expressas, por exemplo, pelas Equações (3.28) e (3.33), para triângulos de Bézier e superfícies NURBS, respectivamente.

Utilizando o conceito isoparamétrico, as mesmas funções de base utilizadas para descrever a geometria são utilizadas para aproximar o campo dos deslocamentos:

$$u = \sum_{i=1}^{np} R_i u_i; \quad v = \sum_{i=1}^{np} R_i v_i; \quad w = \sum_{i=1}^{np} R_i w_i; \quad \theta_x = \sum_{i=1}^{np} R_i \theta_{xi}; \quad \theta_y = \sum_{i=1}^{np} R_i \theta_{yi} \quad (4.2)$$

onde u , v e w são os deslocamentos de membrana e transversal, respectivamente, θ_x e θ_y são as rotações relacionadas à flexão.

Reescrevendo a Equação (4.2) em notação matricial, temos:

$$\mathbf{u} = \mathbf{R} \mathbf{d} \quad (4.3)$$

onde \mathbf{u} e \mathbf{d} são os vetores dos deslocamentos na superfície média da estrutura e nos pontos de controle, respectivamente, \mathbf{R} representa a matriz das funções de forma, dada por:

$$\mathbf{R} = [\mathbf{R}_1 \quad \mathbf{R}_2 \quad \dots \quad \mathbf{R}_{np}] \quad (4.4)$$

e a contribuição de cada ponto de controle é:

$$\mathbf{R}_i = R_i \mathbf{I}_{5 \times 5} \quad (4.5)$$

sendo \mathbf{I} a matriz identidade.

A relação entre o vetor das deformações generalizadas ($\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$) e o vetor dos deslocamentos (\mathbf{d}) nodais é determinada por meio de uma matriz \mathbf{B} . A partir das Equações (2.5), (2.6), (2.9), (4.2), (4.3), as deformações podem ser escritas como:

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^m \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_0^m \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_L^m \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{d} \quad (4.6)$$

Para se obter os termos que compõem a matriz \mathbf{B} , cada termo de deformação da Equação (4.6) será analisado separadamente. Utilizando as Equações (4.4) e (4.6), as deformações podem ser escritas como:

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_0^m \\ \mathbf{B}_0^b \\ \mathbf{B}_0^s \end{Bmatrix} \mathbf{d} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_L^m \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \mathbf{d} = (\mathbf{B}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{B}_L) \mathbf{d} = \mathbf{B} \mathbf{d} \quad (4.7)$$

onde as sub-matrizes de \mathbf{B} para cada ponto de controle são dadas por:

$$\mathbf{B}_0^m = \begin{bmatrix} R_{i,x} & 0 & Z_x R_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & R_{i,y} & Z_y R_{i,y} & 0 & 0 \\ R_{i,y} & R_{i,x} & Z_x R_{i,y} + Z_y R_{i,x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{B}_0^b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & R_{i,x} \\ 0 & 0 & 0 & -R_{i,y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_{i,x} & R_{i,y} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{B}_L^m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_{i,x} W_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{i,y} W_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{i,x} W_y + R_{i,y} W_x & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$\mathbf{B}_0^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_{i,x} & 0 & R_i \\ 0 & 0 & R_{i,y} & R_i & 0 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

onde

$$\begin{aligned} Z_x &= \sum_{i=1}^{np} R_{i,x} z_{0i} & Z_y &= \sum_{i=1}^{np} R_{i,y} z_{0i} \\ W_x &= \sum_{i=1}^{np} R_{i,x} w_i & W_y &= \sum_{i=1}^{np} R_{i,y} w_i \end{aligned} \quad (4.12)$$

4.2 Equações de Equilíbrio

Na AIG, as equações de equilíbrio para análise estática podem ser obtidas a partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), que diz que a variação do trabalho interno δU é igual a variação do trabalho externo δW_{ext} :

$$\delta U = \delta W_{ext} \Rightarrow \int_{V_0} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV_0 = \int_{V_0} \delta \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{b} dV_0 + \int_{A_0} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q} dA_0 + \sum_{i=1}^n \delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{p}_i \quad (4.13)$$

onde $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ é a deformação virtual, $\delta \bar{\mathbf{u}}$ e $\delta \mathbf{u}$ são os deslocamentos virtuais infinitesimais em qualquer ponto da casca e na superfície média, respectivamente, \mathbf{b} são as forças de corpo, \mathbf{q} é o vetor das forças prescritas em A_0 , $\boldsymbol{\sigma}$ é o vetor das tensões e $\delta \mathbf{u}_i$ é o deslocamento virtual no ponto de aplicação de \mathbf{p}_i , que definem as cargas concentradas que atuam em n pontos sobre a estrutura. Cabe destacar que as integrações são realizadas na área (A_0) e volume (V_0) iniciais, pois está sendo aplicada uma formulação Lagrangiana Total.

O PTV pode ser estendido para problemas dinâmicos, ou seja, aqueles que ocorrem movimentos e acelerações. Para isso, pode-se utilizar o princípio de D'Alembert (CALKIN, 1996). Esse princípio é o próprio PTV adicionado das forças inerciais que realizam trabalho, como mostrado a seguir:

$$\int_{V_0} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV_0 = \int_{V_0} \delta \bar{\mathbf{u}}^T (\mathbf{b} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) dV_0 + \int_{A_0} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q} dA_0 + \sum_{i=1}^n \delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{p}_i \quad (4.14)$$

em que ρ é a densidade do material, $\ddot{\mathbf{u}}$ é a aceleração no interior da placa, definida por $\ddot{\mathbf{u}} = \delta^2 \bar{\mathbf{u}} / \delta t^2$.

Utilizando as Equações (2.2) e (2.16) na Equação (4.14) e realizando a integração ao longo da espessura, o PTV pode ser escrito como:

$$\int_{A_0} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{u}} dA_0 + \int_{A_0} \delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dA_0 = \int_{V_0} \delta \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{b} dV_0 + \int_{A_0} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q} dA_0 + \sum_{i=1}^n \delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{p}_i \quad (4.15)$$

onde

$$\int_{A_0} \delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dA_0 = \int_{A_0} (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^m)^T \mathbf{N} dA_0 + \int_{A_0} (\delta \boldsymbol{\kappa}^m)^T \mathbf{M} dA_0 + \int_{A_0} (\delta \boldsymbol{\gamma}^n)^T \mathbf{V} dA_0 \quad (4.16)$$

$$\bar{\mathbf{M}} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} dz = \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 & 0 & I_1 \\ 0 & I_0 & 0 & -I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_1 & 0 & I_2 & 0 \\ I_1 & 0 & 0 & 0 & -I_2 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$[I_0, I_1, I_2] = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) [1, z, z^2] dz \quad (4.18)$$

A relação entre os incrementos de deformação ($\delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$) e os incrementos de deslocamentos nodais ($\delta \mathbf{d}$) pode ser realizada através da matriz $\bar{\mathbf{B}}$:

$$\delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{Bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^m \\ \delta \kappa \\ \delta \gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_0^m \\ \delta \kappa \\ \delta \gamma \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_L^m \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{B}} \delta \mathbf{d} \quad (4.19)$$

onde as parcelas de incremento de deformação são definidas por:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_0^m = \delta \bar{\mathbf{B}}_0^m \delta \mathbf{d} = \mathbf{B}_0^m \delta \mathbf{d} \quad (4.20)$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_L^m = \delta \bar{\mathbf{B}}_L^m \delta \mathbf{d} = \mathbf{B}_L^m \delta \mathbf{d} \quad (4.21)$$

$$\delta \kappa = \delta \bar{\mathbf{B}}_0^b \delta \mathbf{d} = \mathbf{B}_0^b \delta \mathbf{d} \quad (4.22)$$

$$\delta \gamma = \delta \bar{\mathbf{B}}_0^s \delta \mathbf{d} = \mathbf{B}_0^s \delta \mathbf{d} \quad (4.23)$$

Assim, a Equação (4.19) pode ser reescrita como:

$$\delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_0^m \\ \bar{\mathbf{B}}_0^b \\ \bar{\mathbf{B}}_0^s \end{Bmatrix} \delta \mathbf{d} + \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_L^m \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \delta \mathbf{d} = (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L) \delta \mathbf{d} = \bar{\mathbf{B}} \delta \mathbf{d} \quad (4.24)$$

Utilizando os termos obtidos na Equação (4.24) na Equação (4.16), temos:

$$\begin{aligned} \int_{A_0} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dA_0 &= \delta \mathbf{d}^T \left[\int_{A_0} (\bar{\mathbf{B}}^m)^T \mathbf{N} dA_0 + \int_{A_0} (\bar{\mathbf{B}}^b)^T \mathbf{M} dA_0 + \int_{A_0} (\bar{\mathbf{B}}^s)^T \mathbf{V} dA_0 \right] \\ &= \delta \mathbf{d}^T \int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dA_0 \\ &= \delta \mathbf{d}^T \mathbf{g} \end{aligned} \quad (4.25)$$

em que \mathbf{g} é o vetor das forças internas dado por:

$$\mathbf{g} = \int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} dA_0 \quad (4.26)$$

Substituindo as Equações (2.2) e (4.3) nos termos de δW_{ext} da Equação (4.13), o potencial das cargas virtuais externas pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \delta W_{ext} &= \delta \mathbf{d}^T \int_{V_0} \mathbf{R}^T \mathbf{Z}^T \mathbf{b} dV_0 + \delta \mathbf{d}^T \int_{A_0} \mathbf{R}^T \mathbf{q} dA_0 + \delta \mathbf{d}^T \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i^T \mathbf{p}_i \\ &= \delta \mathbf{d}^T \left(\int_{V_0} \mathbf{R}^T \mathbf{Z}^T \mathbf{b} dV_0 + \int_{A_0} \mathbf{R}^T \mathbf{q} dA_0 + \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i^T \mathbf{p}_i \right) \\ &= \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f} \end{aligned} \quad (4.27)$$

em que \mathbf{f} é o vetor das cargas externas dado por:

$$\mathbf{f} = \int_{V_0} \mathbf{R}^T \mathbf{Z}^T \mathbf{b} dV_0 + \int_{A_0} \mathbf{R}^T \mathbf{q} dA_0 + \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i^T \mathbf{p}_i \quad (4.28)$$

Utilizando as Equações (4.3), (4.25), (4.27) na Equação (4.15), e eliminando o vetor dos deslocamentos virtuais ($\delta \mathbf{d}$), pode-se formular o sistema de equações de equilíbrio dinâmico no tempo t :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{g} = \mathbf{f} \quad (4.29)$$

onde $\ddot{\mathbf{u}}$ é a aceleração e \mathbf{M} é a matriz de massa definida por:

$$\mathbf{M} = \int_{A_0} \mathbf{R}^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{R} dA_0 \quad (4.30)$$

O sistema de equações de equilíbrio para uma análise estática, pode ser obtido negligenciando os esforços inerciais da Equação (4.29), obtendo assim:

$$\mathbf{g} = \mathbf{f} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{g} - \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (4.31)$$

4.2.1 Matriz de Rigidez

Na solução das equações não lineares de equilíbrio definidas na Seção 4.2 será utilizado o método incremental-iterativo de Newton-Raphson, que será apresentado posteriormente. Nesse método será importante a definição da chamada matriz de rigidez tangente (\mathbf{K}_t), definida como:

$$\mathbf{K}_t = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{d}} = \underbrace{\int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \mathbf{d}} dA_0}_{\mathbf{K}_L} + \underbrace{\int_{A_0} \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}^T}{\partial \mathbf{d}} \hat{\sigma} dA_0}_{\mathbf{K}_\sigma} \quad (4.32)$$

onde \mathbf{K}_L é a parcela da matriz de rigidez que abrange os termos geométricos lineares e não lineares do modelo, além de considerar o comportamento do material através da matriz constitutiva tangente \mathbf{C}_t , como mostrado a seguir:

$$\mathbf{K}_L = \int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \mathbf{d}} dA_0 = \int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{d}} dA_0 = \int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{B}} dA_0 \quad (4.33)$$

Já \mathbf{K}_σ é a chamada matriz de rigidez geométrica, que apresenta a derivada parcial da matriz $\bar{\mathbf{B}}$ em relação aos deslocamentos, definida por:

$$\mathbf{K}_\sigma = \int_{A_0} \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}^T}{\partial \mathbf{d}} \hat{\sigma} dA_0 = \int_{A_0} \frac{\partial (\bar{\mathbf{B}}_L^m)^T}{\partial \mathbf{d}} \mathbf{N} dA_0 = \int_{A_0} \mathbf{G}^T \mathbf{S} \mathbf{G} dA_0 \quad (4.34)$$

em que:

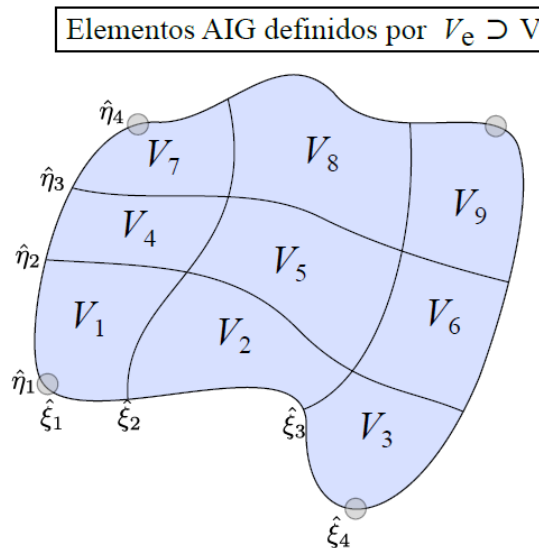
$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{i,y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Cabe destacar que as matrizes \mathbf{K}_L e \mathbf{K}_σ são simétricas e obtidas do mesmo modo que é realizado no MEF. No presente trabalho as matrizes foram integradas numericamente utilizando a quadratura triangular de Gauss (DUNAVANT, 1985).

4.3 Elemento Isogeométrico

Nas formulações isogeométricas tradicionais descritas por NURBS, o elemento isogeométrico é definido como cada um dos *spans* do *patch* como mostrado na Figura 23, onde V_i é o volume definido por cada *knot span* do *patch*. Assim, esses elementos podem ser utilizados para integração das matrizes de rigidez e vetores de forças.

Figura 23 – Elementos isogeométricos do *patch*.

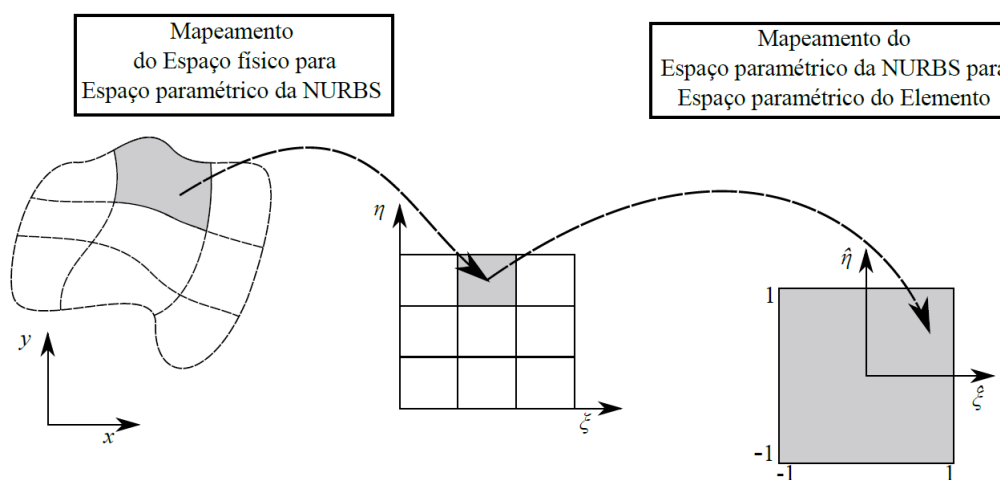


Fonte: Barroso (2015).

Cabe destacar que como as funções NURBS apresentam suporte compacto, apenas $p + 1$ funções de base são não nulas em cada *knot span*. Após a consideração de cada *span*, é feito o somatório da contribuição de cada um para formulação dos elementos globais, semelhante ao que é feito nos elementos no MEF. Uma diferença entre a AIG e o MEF é que na primeira, alguns graus de liberdade do interior do elemento podem ser compartilhados com outro elemento, fato que não ocorre no segundo.

Utilizando uma representação paramétrica, um modelo físico, que é a estrutura real, é mapeado do espaço físico (x, y, z) para o espaço paramétrico (ξ, η, ζ) , conforme os *knot vectors* utilizados. Desta forma, o modelo físico será representado parametricamente. Quando utilizada a quadratura de Gauss para o cálculo da matriz de rigidez e dos esforços em cada *knot span*, é necessária a utilização de um mapeamento adicional, do espaço paramétrico da NURBS para o espaço paramétrico do elemento $(\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta})$, definido no intervalo de $[-1, 1]$, como ilustrado na Figura 24.

Figura 24 – Mapeamentos realizados na AIG para integração numérica.



Fonte: Barroso (2015).

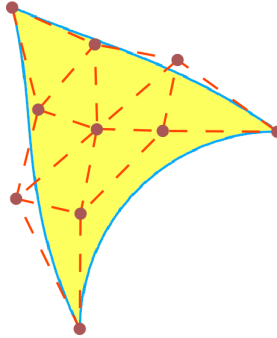
Uma forma de evitar o mapeamento do espaço paramétrico da NURBS para o espaço paramétrico do elemento é utilizando o procedimento de Extração de Bézier descrito em Borden *et al.* (2011). Esse procedimento busca representar as NURBS por uma sequência de representações de Bézier de dimensão equivalente, fazendo com que os elementos isogeométricos apresentem as mesmas funções de base, independentemente da discretização utilizada dos *knot vectors*, sendo necessário apenas uma informação adicional para cada elemento, que é a matriz de extração (\mathbf{C}_e) . Esse fato aproxima as estruturas dos algoritmos do MEF e da AIG, facilitando a reutilização dos códigos do MEF para AIG.

O elemento isogeométrico utilizado neste trabalho foi o elemento triangular de Bézier racional, implementado por Barroso *et al.* (2016), que usa uma representação de triângulo de Bézier racional, definida na Seção 3.2.2, para definir o elemento isogeométrico.

Os elementos triangulares de Bézier possuem apenas um *knot span*, desta forma cada *patch* de Bézier define apenas um elemento isogeométrico com continuidade C^0 nas fronteiras. Com isso, todos os elementos isogeométricos são definidos pelas mesmas funções de base. Fato

que não ocorre nos elementos com NURBS, que cada elemento apresenta diferentes funções de base de acordo com seu *knot span*. A Figura 25 ilustra um *patch* de um triângulo de Bézier cúbico.

Figura 25 – *Patch* de um triângulo de Bézier cúbico.



Fonte: elaborado pelo autor.

Devido as suas características, os elementos isogeométricos de Bézier apresentam maiores semelhanças com os elementos finitos tradicionais. Cabe destacar que, com as adaptações necessárias, o uso desses elementos na AIG possibilita também a utilização de algoritmos de geração de malha tradicionais desenvolvidos para o MEF (ENGVALL; EVANS, 2016; BARROSO *et al.*, 2019).

Apesar de não garantir continuidade elevada nas fronteiras, a descrição exata da geometria é mantida, além de possibilitar a utilização dos refinamentos p e h , que também podem ser realizados através de algoritmos de subdivisão e elevação de grau (BARROSO *et al.*, 2016).

4.3.1 Travamento

O travamento (*locking*) é um problema que está relacionado ao aumento excessivo da rigidez do modelo numérico, devido a deficiência da sua formulação, não estando relacionado ao problema físico. O travamento causa redução na velocidade de convergência do modelo numérico, especialmente em problemas em que a espessura das placa ou cascas é pequena em relação ao vão. Elementos finitos de baixa ordem de interpolação, baseados na teoria de Reissner-Mindlin, sofrem de severo travamento de membrana e de cisalhamento transversal (COOK *et al.*, 2002).

Destaca-se que esse problema é bastante conhecido no contexto do Método dos Elementos Finitos, mas ocorre também na Análise Isogeométrica (ECHTER; BISCHOFF, 2010; ADAM *et al.*, 2015; PRACIANO *et al.*, 2019). Um aspecto particular da AIG é que a

continuidade do campo de deslocamentos também tem efeito direto sobre este problema, pois os travamentos de cisalhamento transversal e de membrana em elementos B-Spline/NURBS aumentam com a elevação do grau de continuidade das funções base (ADAM *et al.*, 2015).

Praciano *et al.* (2019) utilizam técnicas de integração reduzida ou seletiva para reduzir ou eliminar o problema de travamento para a AIG com elementos B-Spline/NURBS. É importante notar que a formulação isogeométrica implementada por Barroso *et al.* (2016) era dirigida para problemas de Estado Plano de Tensão. Portanto, o problema do travamento não foi estudado para os triângulos de Bézier. Assim, o desempenho destes elementos na análise de placas e cascas abatidas, incluindo o problema do travamento, será estudado neste trabalho através de exemplos numéricos. A integração completa será utilizada no cálculo das matrizes dos elementos de forma a evitar modos espúrios.

4.4 Análise Estática

A partir da Equação (4.31), o sistema de equações não lineares de equilíbrio para um modelo com cargas estáticas, que independem dos deslocamentos, pode ser escrito como (CRISFIELD, 1991):

$$\mathbf{r}(\mathbf{d}, \lambda) = \mathbf{g}(\mathbf{d}, \lambda) - (\lambda \mathbf{q} + \mathbf{f}_c) = \mathbf{0} \quad (4.36)$$

onde \mathbf{r} é o vetor dos resíduos (forças desbalanceadas), \mathbf{g} é o vetor de forças internas, \mathbf{d} são os deslocamentos nodais, \mathbf{q} é o vetor de cargas de referência, \mathbf{f}_c é o vetor de cargas constantes e λ é um fator de proporcionalidade (fator de carga) que controla o nível de carregamento aplicado à estrutura.

Crisfield (1991) diz que a inclusão de \mathbf{f}_c na Equação (4.36) é importante em aplicações onde se deseja aplicar "cargas fixas", como por exemplo o peso próprio, antes da aplicação das cargas que aumentam proporcionalmente ao fator de carga, que no caso é \mathbf{q} .

Baseado em Parente Jr. *et al.* (2005), a temperatura neste trabalho será dependente do fator de carga (λ):

$$T(\lambda) = T_0 + \lambda (T_1 - T_0) \quad (4.37)$$

em que T_0 é a temperatura de referência e T_1 é a temperatura relativa a $\lambda = 1$. Desta forma, a mudança de temperatura em cada incremento é dada por:

$$\Delta T = T - T_0 = \lambda (T_1 - T_0) = \lambda \Delta \bar{T} \quad (4.38)$$

Cabe destacar, que devido a Equação (4.38), para estruturas com carregamento térmico, o vetor dos esforços internos (\mathbf{g}), definido na Equação (4.26), não depende apenas dos deslocamentos, mas também do fator de carga. Isso ocorre devido à mudança de temperatura influenciar na determinação das tensões internas que por sua vez, são utilizadas para determinar o vetor de forças internas.

Qualquer estado de equilíbrio da estrutura pode ser descrito por um par (\mathbf{d}, λ) que satisfaça a Equação (4.36). Assim as curvas cargas-deslocamentos correspondem aos gráficos do fator de carga x deslocamento, formados por pontos (\mathbf{d}, λ) . Essa curva carga-deslocamento, também conhecida como caminho de equilíbrio, é uma ferramenta importante para estudar um sistema estrutural com comportamento não linear, pois a mesma permite analisar a estabilidade do sistema, avaliar sua capacidade de carga e quantificar sua sensibilidade às imperfeições iniciais.

A solução da Equação (4.36) necessita da utilização de um método de solução não linear, como o Método de Newton-Raphson (CRISFIELD, 1991). Esse método é baseado na linearização da Equação (4.36), como se segue:

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{d}} \delta \mathbf{d} + \frac{\delta \mathbf{r}}{\delta \lambda} \delta \lambda \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{d}} = \mathbf{K}_t \quad (4.39)$$

onde o subscrito i corresponde ao índice da iteração, $\delta \mathbf{d}$ é correção iterativa do vetor de deslocamento nodal e \mathbf{K}_t é a matriz de rigidez tangente, que considerando que as cargas independem dos deslocamentos, pode ser definida de acordo com a Seção 4.2.1.

O sistema formado na Equação (4.36) e conseqüentemente na sua forma linearizada (Equação (4.39)) não pode ser resolvido, pois apresenta $n + 1$ incógnitas e apenas n equações, onde n é o número de graus de liberdade. Uma alternativa simples para solucionar esse problema é a utilização do Método do Controle de Carga, que reduz o número de incógnitas, eliminando a variável λ , determinando que a carga seja incrementada de maneira constante em cada passo ($\delta \lambda = 0$). Assim a Equação (4.39) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{d}} \delta \mathbf{d} = \mathbf{r}_i + \mathbf{K}_t \delta \mathbf{d} \quad (4.40)$$

A correção iterativa $\delta \mathbf{d}$ pode ser calculada estabelecendo $r_{i+1} = \mathbf{0}$, assim a Equação (4.40) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{K}_t \delta \mathbf{d} = -\mathbf{r}_i \quad (4.41)$$

Determinado $\delta \mathbf{d}$, os deslocamentos nodais são atualizados usando:

$$\mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{d}_i + \delta \mathbf{d} \quad (4.42)$$

De maneira geral, pode-se considerar que o processo convergiu quando:

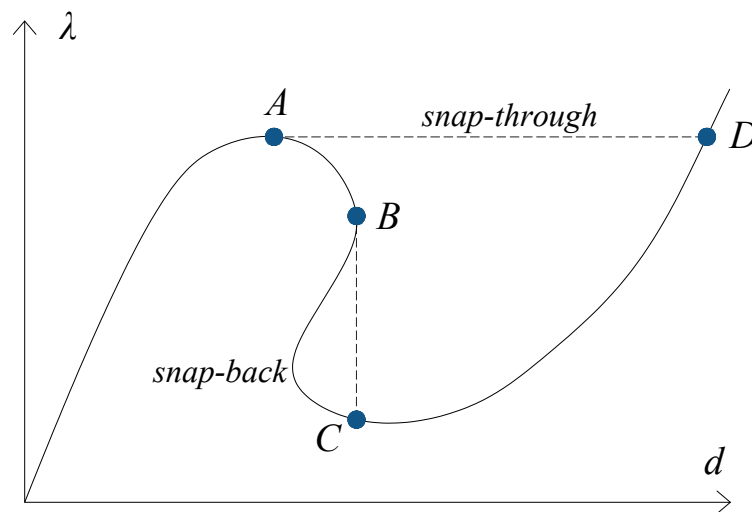
$$\frac{\|\mathbf{r}\|}{\max(1, \|\mathbf{f}\|)} \leq tol \quad (4.43)$$

em que tol é uma tolerância adotada.

Apesar de sua larga utilização na solução de equações de equilíbrio não lineares, o Método do Controle de carga não é capaz de percorrer todo o caminho de equilíbrio em análise, pois não consegue identificar pontos singulares ou críticos que possam existir. Esse fato é ilustrado na Figura 26, em que esse método falharia ao convergir após o ponto A ou saltaria diretamente ao ponto D , ocasionando o fenômeno de salto dinâmico sob controle de carga (*snap-through*).

Desta forma é necessário a utilização de métodos mais complexos que possam superar essa limitação, com destaque para os chamados métodos de Newton-Raphson com restrição, como o método do Controle de Deslocamento e o método do Comprimento de Arco, que serão discutidos na próxima seção.

Figura 26 – Caminho de equilíbrio com *Snap-Through* e *Snap-Back*.



Fonte: elaborado pelo autor.

4.4.1 Métodos de Newton-Raphson com Restrição

O Método de Newton-Raphson com restrição soluciona o problema do sistema de equações formado pela Equação (4.39), que possui $n + 1$ incógnitas e apenas n equações, adicionando uma nova equação ao sistema chamada de restrição. Esse método pode ser escrito

como (CRISFIELD, 1991):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}(\mathbf{d}, \lambda) \\ f(\mathbf{d}, \lambda) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.44)$$

em que $f(\mathbf{d}, \lambda)$ é a equação de restrição e que varia nos diferentes métodos. Para obter as expressões necessárias para calcular as correções iterativas, pode-se linearizar a Equação (4.44) (SCHWEIZERHOF; WRIGGERS, 1986), obtendo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_t & \mathbf{r},\lambda \\ f,\mathbf{d}^T & f,\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{d} \\ \delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ f \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

A matriz dos coeficientes da Equação (4.45) é não simétrica e com elementos distantes da diagonal, ocasionando um aumento significativo na memória computacional em seu armazenamento. Além do aumento da memória, surge também a necessidade de solução de sistemas de equações envolvendo matrizes não simétricas, implicando em um maior custo computacional. Assim, para resolver este sistema de forma mais eficiente utiliza-se uma técnica de particionamento (BATOZ; DHATT, 1979). Assim, a primeira expressão da Equação (4.45) pode ser escrita como

$$\mathbf{K}_t \delta \mathbf{d} = \delta \lambda \bar{\mathbf{f}} - \mathbf{r} \quad (4.46)$$

em que $\bar{\mathbf{f}}$ é o vetor obtido a partir da Equação (4.36) e que será discutido posteriormente, dado por:

$$\bar{\mathbf{f}} = -\mathbf{r},\lambda = \mathbf{f} - \mathbf{g},\lambda \quad (4.47)$$

Já $\delta \mathbf{d}$ são os deslocamentos iterativos, obtidos por:

$$\delta \mathbf{d} = \delta \lambda \delta \bar{\mathbf{d}} + \delta \hat{\mathbf{d}} \quad (4.48)$$

onde os vetores $\delta \bar{\mathbf{d}}$ e $\delta \hat{\mathbf{d}}$ são calculados a partir de:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_t \delta \bar{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{f}} \\ \mathbf{K}_t \delta \hat{\mathbf{d}} = -\mathbf{r} \end{cases} \quad (4.49)$$

Substituindo a Equação (4.48) na segunda expressão da Equação (4.45), chega-se a expressão que permite a determinação do incremento do fator de carga ($\delta \lambda$):

$$\delta \lambda = - \frac{f,\mathbf{d}^T \delta \hat{\mathbf{d}} + f}{f,\mathbf{d}^T \delta \bar{\mathbf{d}} + f,\lambda} \quad (4.50)$$

Conhecido os valores de $\delta\lambda$ e $\delta\mathbf{d}$, os valores do deslocamento total e do fator de carga correspondente são atualizados por:

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_{i+1} &= \mathbf{d}_i + \delta\mathbf{d} \\ \lambda_{i+1} &= \lambda_i + \delta\lambda\end{aligned}\tag{4.51}$$

Alguns métodos podem aplicar as restrições nas mudanças incrementais $\Delta\mathbf{d}$ e $\Delta\lambda$, que podem ser calculadas por:

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{d}_{i+1} &= \Delta\mathbf{d}_i + \delta\mathbf{d} \\ \Delta\lambda_{i+1} &= \Delta\lambda_i + \delta\lambda\end{aligned}\tag{4.52}$$

em que $\Delta\mathbf{d}_0 = \mathbf{0}$ e $\Delta\lambda_0 = 0$.

4.4.1.1 Método do Controle de Deslocamento

O Método do Controle de Deslocamento foi proposto por Batoz e Dhatt (1979) com o objetivo de traçar curvas que apresentam pontos limite. Nesse método a equação de restrição é dada por:

$$f = d_k - d_p = \mathbf{e}_k^t \mathbf{d} - d_p\tag{4.53}$$

em que k é a componente do deslocamento controlado, \mathbf{e}_k é o vetor unitário na direção k e d_p é os deslocamento prescrito.

Utilizando a Equação (4.50) e observando que $f_{,\mathbf{d}} = \mathbf{e}_k$ e $f_{,\lambda} = 0$ a partir da Equação (4.53), o incremento do fator de carga ($\delta\lambda$) é dado por:

$$\delta\lambda = -\frac{\mathbf{e}_k^t \delta\hat{\mathbf{d}} + \mathbf{e}_k^t \mathbf{d} - d_p}{\mathbf{e}_k^t \delta\bar{\mathbf{d}}} = -\frac{\delta\hat{d}_k + d_k - d_p}{\delta\bar{d}_k}\tag{4.54}$$

Pode-se notar que na primeira interação (preditor) de um novo incremento que $\delta\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{0}$, enquanto as demais interações $d_k = d_p$. Desta maneira:

$$\delta\lambda = \begin{cases} \frac{\Delta d_p}{\delta\bar{\mathbf{d}}_k}, & i = 1 \\ \frac{\delta\hat{d}_p}{\delta\bar{\mathbf{d}}_k}, & i > 1 \end{cases}\tag{4.55}$$

onde $\delta d_p = u_p - u_k$ é o incremento do deslocamento prescrito.

O Método do Controle de Deslocamento é capaz de superar os fenômenos de salto dinâmico sob controle de carga (*snap-through*), entretanto falha no fenômeno salto dinâmico sob

controle de deslocamento (snap-back), ilustrado na Figura 26, em que esse método falharia ao convergir após o ponto *B*, saltando diretamente ao ponto *C*.

Neste trabalho adota-se o Método Comprimento de Arco (*Arc-Length*), pois ele é capaz de evitar os fenômenos do *snap-through* e *snap-back*. Esse método será discutido a seguir.

4.4.1.2 Método do Comprimento de Arco

O método do comprimento de Arco foi proposto por Wempner (1971) e Riks (1979). Nesse método os incrementos de carga e deslocamento são variáveis ao longo das iterações, entretanto, a distância entre um ponto de equilíbrio e seu anterior é constante e correspondente ao comprimento de arco.

A equação de restrição desse método pode ser escrita como:

$$f = \Delta \mathbf{d}^T \Delta \mathbf{d} - \psi^2 \Delta \lambda^2 - \Delta l^2 = 0 \quad (4.56)$$

onde Δl é o incremento do comprimento de arco e ψ é um fator de escala. A Equação (4.56), que pode ser entendida como uma hipersfera de raio Δl , é a responsável para que todos os pontos obtidos no processo incremental-iterativo estejam a uma distância Δl do último ponto convergido, esse processo é ilustrado na Figura 27. Considerando $\Delta \mathbf{d} = \mathbf{d} - \bar{\mathbf{d}}$ e $\Delta \lambda = \lambda - \bar{\lambda}$, a equação de restrição pode ser reescrita como:

$$f = (\mathbf{d} - \bar{\mathbf{d}})^T (\mathbf{d} - \bar{\mathbf{d}}) - \psi^2 (\lambda - \bar{\lambda})^2 - \Delta l^2 = 0 \quad (4.57)$$

A partir da Equação (4.56), pode-se definir que:

$$f_{,\mathbf{d}} = 2 \Delta \mathbf{d} \quad (4.58)$$

$$f_{,\lambda} = 2 \psi^2 \Delta \lambda$$

Substituindo esses termos na Equação (4.50), o fator de carga iterativo pode ser calculado como:

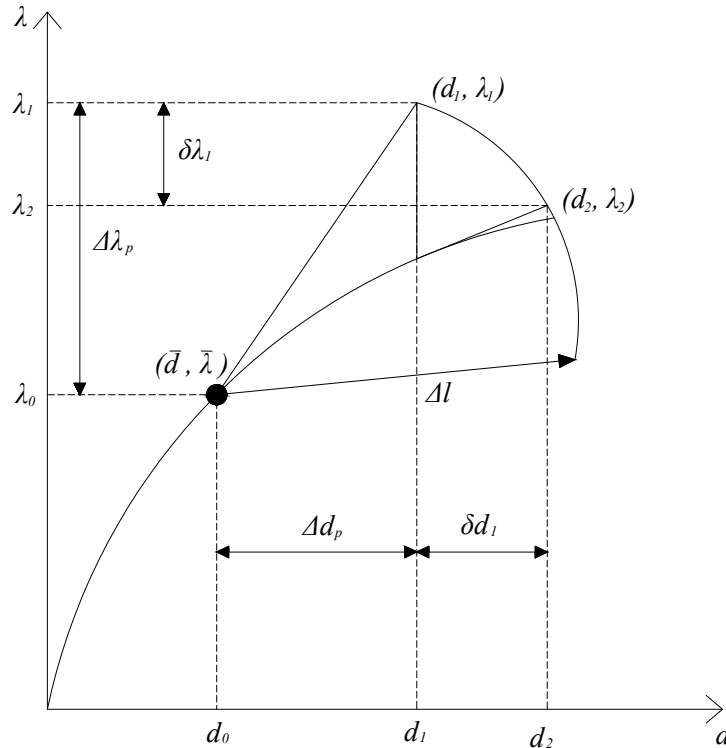
$$\delta \lambda = - \frac{\Delta \mathbf{d}^T \delta \hat{\mathbf{d}} + 0.5 f}{\Delta \mathbf{d}^T \delta \bar{\mathbf{d}} + \psi^2 \Delta \lambda} \quad (4.59)$$

Desconsiderando o valor da equação de restrição (f), que geralmente é pequeno, $\delta \lambda$ pode ser calculado como:

$$\delta \lambda = - \frac{\Delta \mathbf{d}^T \delta \hat{\mathbf{d}}}{\Delta \mathbf{d}^T \delta \bar{\mathbf{d}} + \psi^2 \Delta \lambda} \quad (4.60)$$

que é a forma linearizada proposta por Ramm (1981).

Figura 27 – Método do Comprimento de arco.



Fonte: elaborado pelo autor.

Uma outra abordagem proposta por Crisfield (1991), impõe a equação de restrição quadrática de forma exata em cada iteração. Desta forma, a partir dos termos das Equações (4.52) e (4.48) na Equação (4.57), chega-se a seguinte equação quadrática:

$$a_1 \delta \lambda^2 + a_2 \delta \lambda + a_3 = 0 \quad (4.61)$$

onde:

$$a_1 = \delta \bar{\mathbf{d}}^T \delta \bar{\mathbf{d}} + \psi^2$$

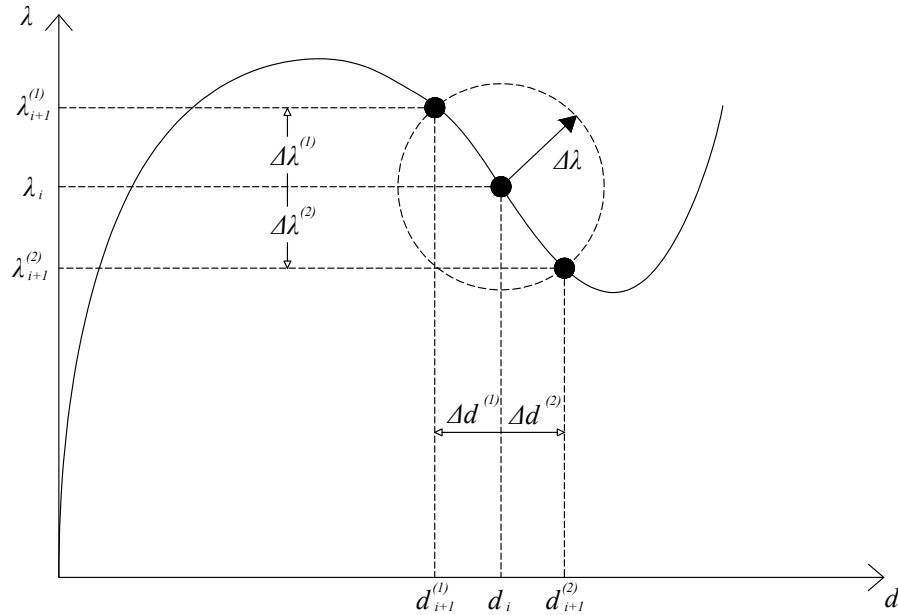
$$a_2 = 2\delta \bar{\mathbf{d}}^T (\Delta \mathbf{d} + \delta \hat{\mathbf{d}}) + 2\psi^2 \Delta \lambda \quad (4.62)$$

$$a_3 = (\Delta \mathbf{d} + \delta \hat{\mathbf{d}})^T (\Delta \mathbf{d} + \delta \hat{\mathbf{d}}) + \psi^2 \Delta \lambda - \Delta l^2$$

Esta abordagem é mais complexa que a linearizada proposta por Ramm (1981). Entretanto, o algoritmo de Crisfield é mais robusto e conseqüentemente mais utilizado em aplicações práticas.

A Equação (4.61) apresenta duas soluções ($\delta \lambda_1, \delta \lambda_2$). Dentre essas raízes, uma é a desejada e a outra corresponde a voltar pelo caminho percorrido (*back-tracking*). Essa situação é mostrada na Figura 28.

Conforme CRISFIELD (1981), a escolha da raiz apropriada pode ser realizada calculando o vetor dos novos deslocamentos incrementais ($\Delta \mathbf{d}_{i+1}$), para ambas as soluções e escolhendo aquela que fizer o menor ângulo com o incremento anterior ($\Delta \mathbf{d}_i$). Sabe-se que o

Figura 28 – Possíveis soluções para $\delta\lambda$.

Fonte: elaborado pelo autor.

menor ângulo corresponde ao maior cosseno, assim deve-se escolher a solução que maximiza o produto escalar:

$$\Delta \mathbf{d}_i^T \Delta \mathbf{d}_{i+1} = \Delta \mathbf{d}_i^T (\Delta \mathbf{d}_i + \delta \lambda_k \Delta \bar{\mathbf{d}} + \delta \hat{\mathbf{d}}), \quad k = 1, 2 \quad (4.63)$$

O intuito desta escolha é evitar mudanças bruscas nos deslocamentos incrementais entre as iterações, melhorando assim, a convergência e evitando percorrer o sentido inverso do caminho.

Na primeira iteração de cada passo é necessário a estimativa dos incrementos iniciais, que é denominada solução preditora ou predictor, pois neste caso o deslocamento incremental acumulado é nulo. Em cada um dos passos do processo iterativo, o predictor se inicia no ponto de equilíbrio encontrado anteriormente. Assim, partindo desse ponto o resíduo é nulo ($\mathbf{r} = \mathbf{0}$) e consequentemente, $\delta \hat{\mathbf{d}} = \mathbf{0}$. Desta forma, os incrementos no predictor podem ser dados por:

$$\Delta \mathbf{d}_p = \delta \lambda_p \delta \bar{\mathbf{d}}, \quad (4.64)$$

$$\Delta \lambda_p = \delta \lambda_p$$

Substituindo esses termos na Equação (4.57), chegamos à seguinte expressão para o incremento de carga do predictor:

$$\delta \lambda_p = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{\delta \bar{\mathbf{d}}^T \delta \bar{\mathbf{d}} + \psi^2}} \quad (4.65)$$

Determinar o sentido de avanço do predictor é de vital importância para o sucesso do traçado do caminho de equilíbrio pelo método do comprimento de arco (NETO; FENG, 1999).

Para adotar o sinal adequado de $\delta\lambda_p$ no passo i , pode-se utilizar a seguinte expressão (FENG *et al.*, 1995; FENG *et al.*, 1996):

$$\text{sign}(\delta\lambda_p) = \text{sign}(\Delta\mathbf{d}_{i-1}^T \delta\bar{\mathbf{d}} + \psi^2 \Delta\lambda_{i-1}) \quad (4.66)$$

onde $\Delta\mathbf{d}_{i-1}$ é o incremento total dos deslocamentos no ciclo anterior e a função $\text{sign}(x)$ é definida como:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (4.67)$$

Cabe destacar que a utilização da Eq. (4.66) evita o *back-tracking*, ou seja, o retorno pelo caminho de equilíbrio já traçado.

No Método do Comprimento de arco é necessário definir um valor para o comprimento de arco (Δl) a ser utilizado. Uma alternativa para isso é determinar o comprimento de arco inicial (Δl_0) a partir de um fator de carga inicial prescrito ($\Delta\lambda_0$) usando a Equação (4.65) (PARENTE Jr. *et al.*, 2005):

$$\Delta l_0 = \Delta\lambda_0 \sqrt{\delta\bar{\mathbf{d}}^T \delta\bar{\mathbf{d}} + \psi^2} \quad (4.68)$$

Com o intuito de obter um método estável e eficiente, pode ser necessário a atualização do comprimento de arco no início de cada etapa de acordo com a não linearidade do caminho de equilíbrio (PARENTE Jr. *et al.*, 2005). Para isso, pode-se utilizar a seguinte expressão:

$$\Delta l_i = \Delta l_n \left(\frac{I_d}{I_{i-1}} \right)^{0,5} \quad (4.69)$$

onde I_d é o número de iterações desejadas, I_{i-1} é o número de iterações para a convergência no passo anterior.

4.4.1.3 Cálculo do vetor $\bar{\mathbf{f}}$

O vetor $\bar{\mathbf{f}}$ pode ser obtido pela Equação (4.47). Nessa expressão o termo $\mathbf{g}_{,\lambda}$, pode ser calculado a partir da diferenciação da Equação (4.26) em relação a λ :

$$\mathbf{g}_{,\lambda} = \int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T \hat{\sigma}_{,\lambda} dA_0 \quad (4.70)$$

Pode-se notar que a Equação (4.70) depende da derivada do vetor de tensões, definido na Equação (2.16), em relação ao fator de carga (λ), que é dada por:

$$\hat{\sigma}_{,\lambda} = \frac{\partial (\mathbf{C}\hat{\varepsilon} - \hat{\sigma}^{th})}{\partial \lambda} = \frac{\partial (-\hat{\sigma}^{th})}{\partial \lambda} = -\frac{\partial \hat{\sigma}^{th}}{\partial \lambda} \quad (4.71)$$

Desta forma:

$$\hat{\sigma}_{,\lambda} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}^{th}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \mathbf{M}^{th}}{\partial \lambda} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.72)$$

Como a temperatura depende de λ , ver Equações (4.37) e (4.38), os termos que compõem a Equação (4.72) são dados por:

$$\frac{\partial \mathbf{N}^{th}}{\partial \lambda} = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial T} \alpha \Delta T + \mathbf{Q} \frac{\partial \alpha}{\partial T} \Delta T + \mathbf{Q} \alpha \right) \Delta \bar{T} dz \quad (4.73)$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}^{th}}{\partial \lambda} = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial T} \alpha \Delta T + \mathbf{Q} \frac{\partial \alpha}{\partial T} \Delta T + \mathbf{Q} \alpha \right) \Delta \bar{T} z dz \quad (4.74)$$

Considerando o caso em que as propriedades dos materiais não variam com a temperatura, as Equações (4.73) e (4.74) são simplificadas para:

$$\frac{\partial \mathbf{N}^{th}}{\partial \lambda} = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{Q} \alpha \Delta \bar{T} dz \quad (4.75)$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}^{th}}{\partial \lambda} = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{Q} \alpha \Delta \bar{T} z dz \quad (4.76)$$

De acordo com Parente Jr. *et al.* (2005), uma abordagem mais simples e genérica, baseada na diferenciação numérica, pode ser utilizada para determinar $\mathbf{g}_{,\lambda}$:

$$\mathbf{g}_{,\lambda} = \frac{\mathbf{g}(\mathbf{d}, \lambda + \Delta \lambda) - \mathbf{g}(\mathbf{d}, \lambda)}{\Delta \lambda} \quad (4.77)$$

onde $\Delta \lambda$ é o tamanho da perturbação com valor tipicamente entre 10^{-3} e 10^{-7} . Essa abordagem leva a resultados exatos quando as propriedades dos materiais não variam com a temperatura.

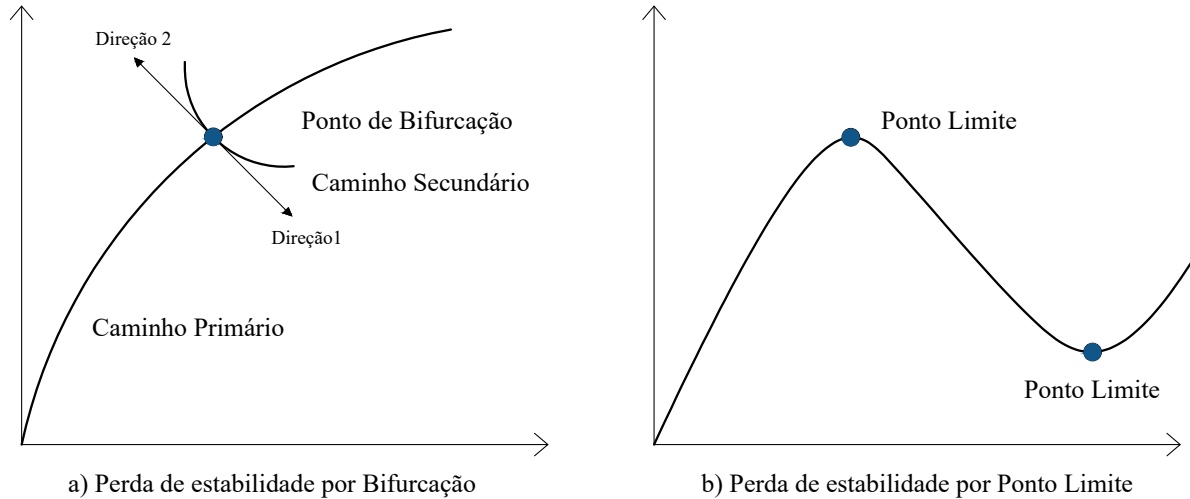
4.5 Estabilidade

Uma estrutura pode perder estabilidade de duas maneiras:

- Bifurcação: ocorre quando dois ou mais caminhos de equilíbrio se cruzam, onde o caminho inicial é chamado de primário e os outros de caminhos secundários ou pós-críticos, como ilustrado na Figura 29.a. Os pontos onde os caminhos se encontram são chamados de ponto de bifurcação.

- Ponto Limite: ocorre quando o caminho de equilíbrio atinge um valor extremo (máximo ou mínimo), como mostrado na Figura 29.b.

Figura 29 – Tipos de perda de estabilidade.



Fonte: elaborado pelo autor.

Como já mencionado, o método adotado neste trabalho para o traçado do caminho de equilíbrio é o Método de Comprimento de Arco. Entretanto, esse método captura somente o caminho fundamental de estruturas com flambagem por bifurcação, sendo necessário procedimentos numéricos que sejam capazes de avaliar os pontos de bifurcação e determinar os caminhos secundários (PARENTE Jr. *et al.*, 2005).

Cabe destacar que a matriz de rigidez tangente é singular nos pontos críticos (bifurcação e limite), assim:

$$\det \mathbf{K}_t(\mathbf{d}, \lambda) = 0 \quad (4.78)$$

De forma alternativa, um determinado ponto crítico pode ser encontrado utilizando a condição de autovalor nulo, como:

$$\mathbf{K}_t(\mathbf{d}, \lambda) \phi = 0, \quad \text{com} \quad \|\phi\| = 1 \quad (4.79)$$

onde o modo de flambagem é representado pelo autovetor ϕ .

De acordo com Wriggers e Simo (1990), pode-se determinar pontos críticos de estruturas não lineares através da combinação das Equações (4.36) e (4.79), montando um sistema não linear estendido, definido por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}(\mathbf{d}, \lambda) \\ \mathbf{K}_t(\mathbf{d}, \lambda) \phi \\ \|\phi\| - 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.80)$$

sendo a solução do sistema $(\mathbf{u}_{cr}, \lambda_{cr})$ um ponto crítico.

A linearização da Equação (4.80) produz o sistema (WRIGGERS *et al.*, 1988; PARENTE Jr. *et al.*, 2005):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_t & \mathbf{0} & \mathbf{r}, \lambda \\ (\mathbf{K}_t \phi),_{\mathbf{d}} & \mathbf{K}_t & (\mathbf{K}_t \phi),_{\lambda} \\ \mathbf{0}^T & \frac{\phi^T}{\|\phi\|} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{d} \\ \delta \phi \\ \delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{K}_t \phi \\ \|\phi\| - 1 \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

onde

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_t \phi),_{\mathbf{d}} \delta \mathbf{d} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{K}_t(\mathbf{d} + \varepsilon \delta \mathbf{d}, \lambda) \phi - \mathbf{K}_t(\mathbf{d}, \lambda) \phi}{\varepsilon} \\ (\mathbf{K}_t \phi),_{\lambda} \delta \lambda &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{K}_t(\mathbf{d}, \lambda + \varepsilon \delta \lambda) \phi - \mathbf{K}_t(\mathbf{d}, \lambda) \phi}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (4.82)$$

são as derivadas direcionais em relação aos deslocamentos e ao fator de carga, respectivamente, e ε é uma perturbação.

O sistema apresentado na Equação (4.81) pode ser resolvido de uma forma simples e eficiente utilizando o algoritmo apresentado na Tabela 1:

Tabela 1 – Solução do sistema estendido.

-
1. Resolver os sistemas:

$$\mathbf{K}_t \delta \mathbf{d}_1 = \bar{\mathbf{f}}$$

$$\mathbf{K}_t \delta \mathbf{d}_2 = \mathbf{r}$$
 2. Calcular as derivadas direcionais:

$$\mathbf{h}_1 = (\mathbf{K}_t \phi),_{\mathbf{d}} \delta \mathbf{d}_1 + (\mathbf{K}_t \phi),_{\lambda}$$

$$\mathbf{h}_2 = (\mathbf{K}_t \phi),_{\mathbf{d}} \delta \mathbf{d}_2$$
 3. Resolver os sistemas:

$$\mathbf{K}_t \delta \phi_1 = \mathbf{h}_1$$

$$\mathbf{K}_t \delta \phi_2 = \mathbf{h}_2$$
 4. Calcular os incrementos:

$$\delta \lambda = \frac{\phi^T \delta \phi_2 - \|\phi\|}{\phi^T \delta \phi_1}$$

$$\delta \mathbf{d} = \delta \lambda \delta \mathbf{d}_1 - \delta \mathbf{d}_2$$

$$\delta \phi = \delta \phi_2 - \delta \lambda \delta \phi_1 - \phi$$
-

Fonte: Wriggers *et al.* (1988), Parente Jr. *et al.* (2005).

Para calcular as derivadas contidas nos vetores \mathbf{h}_1 e \mathbf{h}_2 pode-se utilizar o Método das Diferenças Finitas, similar ao que foi feito na Equação (4.77):

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_1 &= [\mathbf{K}_t(\mathbf{d} + \varepsilon \phi, \lambda) \delta \mathbf{d}_1 - \mathbf{K}_t(\mathbf{d}, \lambda) \delta \mathbf{d}_1] / \varepsilon + \mathbf{h}_\lambda \\ \mathbf{h}_2 &= [\mathbf{K}_t(\mathbf{d} + \varepsilon \phi, \lambda) \delta \mathbf{d}_2 - \mathbf{K}_t(\mathbf{d}, \lambda) \delta \mathbf{d}_2] / \varepsilon \\ \mathbf{h}_\lambda &= [\mathbf{K}_t(\mathbf{d}, \lambda + \Delta \lambda) \phi - \mathbf{K}_t(\mathbf{d}, \lambda) \phi] / \Delta \lambda \end{aligned} \quad (4.83)$$

onde $\Delta\lambda$ é a mesma perturbação usada na Equação (4.77). Utilizando as definições do Passo (1) da Tabela (1):

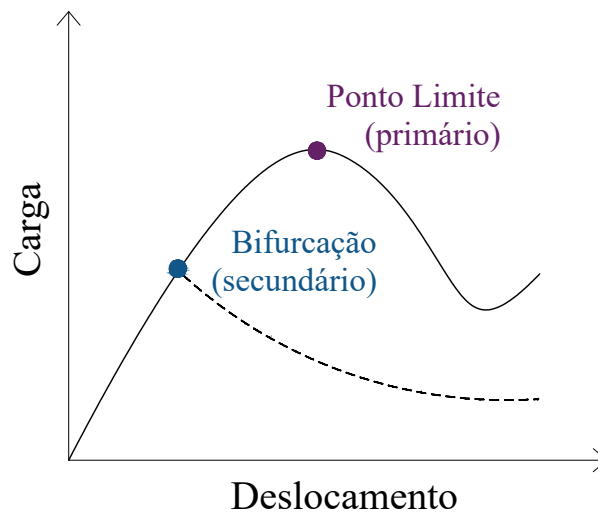
$$\begin{aligned} \mathbf{h}_1 &= [\mathbf{K}_r(\mathbf{d} + \varepsilon \phi, \lambda) \delta \mathbf{d}_1 - \bar{\mathbf{f}}] / \varepsilon + \mathbf{h}_\lambda \\ \mathbf{h}_2 &= [\mathbf{K}_r(\mathbf{d} + \varepsilon \phi, \lambda) \delta \mathbf{d}_2 - \mathbf{r}] / \varepsilon \end{aligned} \quad (4.84)$$

Definido o ponto crítico, sua classificação pode ser realizada em relação ao modo de flambagem associado (PARENTE Jr. *et al.*, 2005):

$$\begin{cases} \phi^T \bar{\mathbf{f}} \neq 0 \Rightarrow \text{ponto limite} \\ \phi^T \bar{\mathbf{f}} = 0 \Rightarrow \text{bifurcação} \end{cases} \quad (4.85)$$

Métodos numéricos para fazer a determinação do ponto crítico e a mudança de caminho de estruturas, como mostrado na Figura 30, com carregamento termo-mecânico são apresentados em Parente Jr. *et al.* (2005).

Figura 30 – Pontos críticos e caminhos de equilíbrio.



Fonte: elaborado pelo autor.

Em diversas estruturas perfeitas, como placas e cascas, os deslocamentos pré-críticos são muito pequenos e podem ser desprezados, simplificando a solução do problema. Com isso, a matriz de rigidez \mathbf{K}_L , dada pela Equação (4.33), pode ser obtida através de uma análise linear. Com isso, os termos não lineares que compõem a matriz $\bar{\mathbf{B}}$, definida na Equação (4.24), são desprezados e a matriz de rigidez geométrica é proporcional ao carregamento aplicado. Substituindo a Equação (4.32) na Equação (4.79), temos que:

$$(\mathbf{K}_0 + \lambda \mathbf{K}_\sigma) \phi = \mathbf{0} \quad (4.86)$$

onde K_0 é a matriz de rigidez linear, λ é a carga crítica e ϕ é o modo de flambagem. Cabe destacar que a Equação (4.86) corresponde à forma clássica da flambagem linearizada (COOK *et al.*, 2002).

4.6 Frequências naturais e modos de vibrações

Considerando pequenos deslocamentos, a Equação (4.29) pode ser escrita como:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (4.87)$$

em quem \mathbf{K} é a matriz de rigidez para a estrutura descarregada ($\mathbf{d} = \mathbf{0}$).

Desconsiderando os efeitos das cargas externas na Equação (4.87), temos o seguinte sistema de equações para as vibrações livres:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (4.88)$$

Esse sistema pode ser resolvido através do seguinte problema de autovalor generalizado

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \quad \text{ou} \quad \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi} = \omega^2 \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi} \quad (4.89)$$

onde ω são as frequências naturais e $\boldsymbol{\varphi}$ são os modos de vibração.

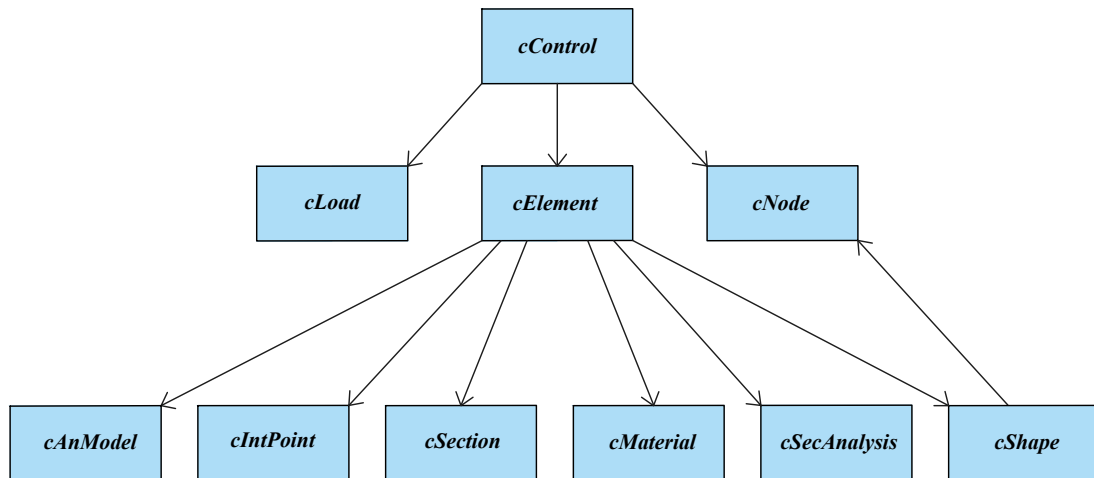
4.7 Implementações Computacionais

A implementação das formulações para considerar os efeitos térmicos foi desenvolvida no *software* de código aberto FAST (*Finite Element Analysis Tool*), escrito em linguagem C++ e que utiliza o conceito de Programação Orientada a Objetos (POO). O FAST está em desenvolvimento contínuo no Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV) da Universidade Federal do Ceará.

A estrutura do FAST é composta por classes de objetos, onde cada uma possui função determinada no programa. A estrutura global do *software* é mostrada na Figura 31. As linhas que unem as classes mostram a interação entre as principais classes do programa.

A classe *cControl* é a classe-base do programa responsável por gerenciar os métodos de solução do problema de análise estrutural. É nela que estão implementados os algoritmos globais dos diferentes tipos de análise (linear, não linear, estático, dinâmico). Os diversos métodos de solução são implementados em subclasses da *cControl*.

Figura 31 – Estrutura global do FAST.



Fonte: elaborado pelo autor.

A classe *cElement* contém as informações relacionadas aos diferentes tipos de elementos finitos implementados (barras, elementos bidimensionais e sólidos) de forma genérica. Essa classe realiza os cálculos solicitados pela classe *cControl*, como o das forças internas do elemento, da matriz de rigidez e das tensões. Para isso, a classe *cElement* armazena e dá acesso a objetos necessários para esses cálculos, como material (*cMaterial*) e seção (*cSection*).

Cabe destacar que a classe *cElement* é responsável pelo gerenciamento das tarefas relacionadas a cada elemento da malha, com um objeto da classe *cShape*, que define as funções de forma e suas derivadas, um modelo de análise (*cAnModel*), responsável pelo modelo matemático a ser resolvido (campo de deslocamentos, deformações, graus de liberdade), além de um modelo de análise de seção (*cSecAnalysis*), que realiza tarefas inerentes às seções transversais do elemento.

A classe *cSection* lida com os diferentes tipos de seção de elemento, para elementos paramétricos e de barra. Cada seção lê e armazena dados específicos (geometria e materiais) usados pelos métodos de classe *cSecAnalysis*, permitindo a análise de estruturas homogêneas e compostas (e.g. compósitos laminados e MGFs).

A classe *cSecAnalysis* cria os modelos constitutivos para cada ponto de integração e realiza a integração das tensões de seção e da matriz rigidez tangente. Destacando que a classe *cSecAnalysis* é a responsável pelo cálculo da matriz constitutiva **C** dos MGFs, definida na Equação (2.16).

A criação dos pontos de integração utilizados são realizadas pela classe *cIntPoint*, que também gerencia o tipo de integração utilizada, como quadratura de Gauss ou Lobato.

A classe *cLoad* realiza a montagem do vetor de forças externas dos problemas e a classe *cNode* armazena as coordenadas nodais do modelo. O FAST possui diversas outras classes e subclasses que se relacionam com as classes já citadas. Informações mais detalhadas a respeito dessas estruturas de classes podem ser encontradas em Barroso (2015) e Dantas Júnior (2014).

Anteriormente, o FAST não apresentava nenhuma consideração dos efeitos térmicos nas análises realizadas e este trabalho buscou desenvolver e implementar as formulações para a consideração dos efeitos térmicos na análise isogeométrica de placas constituídas de materiais com gradação funcional. Para isso, foram necessárias modificações em diferentes classes e subclasses do programa.

Inicialmente foi necessário a criação das cargas térmicas para serem aplicadas nos elementos considerando a variação uniforme e linear de temperatura ao longo da espessura do elemento. Como essa carga térmica é aplicada em cada um dos elementos, a mesma foi implementada na classe *cElement*.

A temperatura foi considerada dependente do fator de carga (λ), de acordo com a Eq. (4.37). Com isso, a mudança de temperatura em cada incremento, dada pela Equação (4.38), influencia no cálculo das tensões internas ($\hat{\sigma}$) e conseqüentemente no vetor de forças internas (\mathbf{g}). Desta forma, foi necessário adicionar a consideração da parcela da deformação térmica no cálculo dos esforços internos, que são determinados pela integração das tensões ao longo da espessura da placa.

É importante ressaltar a diferença de abordagem no tratamento da temperatura nos casos de análise linear e não linear. Na primeira, a consideração dos efeitos térmicos é realizada de forma separada dos efeitos mecânicos, assim os esforços internos generalizados ($\hat{\sigma}$) são calculados como está descrito na Equação (2.16), uma parcela dos efeitos mecânicos ($\mathbf{C}\hat{\epsilon}$) e outra dos efeitos térmicos ($\hat{\sigma}^{th}$). Com isso, o vetor de forças internas definido na Eq. (4.26) é calculado como:

$$\mathbf{g} = \int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T (\mathbf{C}\hat{\epsilon}) dA_0 - \int_{A_0} \bar{\mathbf{B}}^T \hat{\sigma}^{th} dA_0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{g} = \mathbf{K}_0 \mathbf{d} - \mathbf{f}^{th} \quad (4.90)$$

onde \mathbf{K}_0 é matriz de rigidez linear e \mathbf{f}^{th} é o vetor de carga devido as deformações causadas pelos esforços térmicos. Substituindo a Eq. (4.90) na Eq. (4.31), o sistema de equações de equilíbrio para uma análise estática linear é definido como:

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{d} = \mathbf{f} + \mathbf{f}^{th} \quad (4.91)$$

Já na análise não linear, os efeitos térmicos não são separados e são calculados dentro da integração dos esforços ao longo da espessura da estrutura, como descrito nas Equações (2.13), (2.14) e (2.15).

Outra implementação importante foi o cálculo do termo $\mathbf{g}_{,\lambda}$, parte do vetor $\bar{\mathbf{f}}$, que foi calculado baseado na diferenciação numérica, conforme a Eq. (4.77). O termo $\mathbf{g}_{,\lambda}$ surge devido aos esforços internos também serem dependentes da temperatura, que por sua vez é dependente do fator de carga. Esse cálculo é necessário para a solução das equações não lineares utilizando o Método de Newton-Raphson.

Também foi implementado o termo \mathbf{h}_{λ} , definido na Equação (4.83), no algoritmo da solução do sistema de equações, Equação (4.81), para a determinação de pontos críticos de estruturas não lineares.

5 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Este capítulo apresenta os resultados obtidos com a utilização da formulação isogeométrica utilizando os elementos triangulares de Bézier. Inicialmente, o desempenho dos elementos triangulares de Bézier é avaliado em diferentes aplicações. Depois, as formulações e implementações desenvolvidas neste trabalho foram verificadas através de estudos de estabilidade de estruturas com gradação funcional, determinando suas cargas críticas e caminhos pós-crítico. Também é apresentado um estudo do comportamento das estruturas de MGF sob diferentes carregamentos térmicos, variação uniforme e linear de temperatura, distribuição de fração de volume e métodos de homogeneização. Os resultados obtidos foram comparados com os apresentados na literatura.

A geração das malhas foi realizada por meio do *software* acadêmico *Plane Mesh Generator* (PMGen), que apresenta uma interface gráfica de usuário para geração de malhas para elementos finitos e análise isogeométrica, desenvolvido por Barroso *et al.* (2019).

Conforme discutido na Seção 4.3.1, foi utilizado o esquema de integração completa nos exemplos, que corresponde a quadratura triangular de Gauss e integra exatamente a matriz de rigidez do elemento.

5.1 Exemplos de Verificação

No intuito de testar o desempenho dos elementos triangulares de Bézier, esta seção apresenta um *patch test*, além de vários exemplos numéricos de análise estática, vibração livre e flambagem de placas isotrópicas. Desta forma, verifica-se a possível presença de modos espúrios de energia nula, travamento e erros, como a violação das propriedades de corpo rígido. Os resultados obtidos foram comparados com outras soluções numéricas e analíticas disponíveis na literatura.

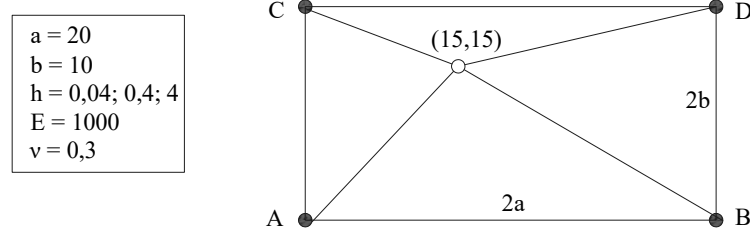
5.1.1 Patch Test

Para todo modelo de elementos finitos é preciso que seus elementos satisfaçam condições que assegurem, que com o refinamento da malha, os resultados convirjam para a solução analítica. Entretanto, nem todos os problemas apresentam solução analítica definida, sendo assim difícil determinar se com o refinamento da malha o resultado está convergindo para a solução correta. Para solucionar esse problema utiliza-se o chamado *patch test*, que serve para

verificar se as condições de convergência são satisfeitas pela formulação e implementação do elemento.

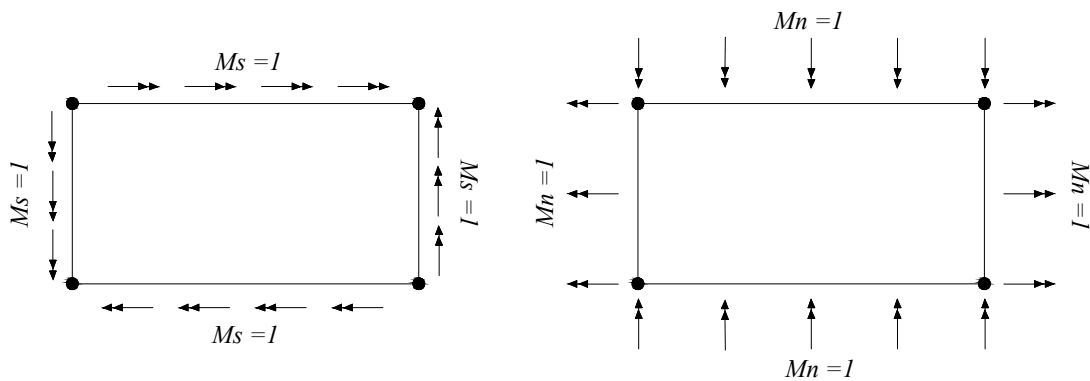
Este exemplo trata de um *patch test* de uma placa retangular, submetida a diferentes solicitações para produzir um estado de momentos constantes, verificando se os elementos são capazes de representar de forma exata esses estados de tensões. A geometria e as propriedades adotadas são mostradas na Figura 32, já as cargas aplicadas são ilustradas na Figura 33. As condições de contorno adotadas são os pontos A, B e C simplesmente apoiados ($u = v = w = 0$).

Figura 32 – Geometria do *Patch Test*.



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 33 – Esforços aplicados no *Patch test*.



Fonte: elaborado pelo autor.

Os resultados obtidos para diferentes graus dos elementos (2, 3 e 4) são apresentados na Tabela 1 e demonstram que os triângulos de Bézier conseguem representar os estados de tensões constantes e conseqüentemente passam nesse *patch test*.

5.1.2 Placa quadrada submetida a uma carga transversal uniformemente distribuída

Este exemplo trata da análise linear de uma placa quadrada isotrópica submetida a uma carga transversal uniformemente distribuída, onde é estudada a convergência da deflexão e do momento no centro da placa. O efeito do travamento de cisalhamento (*shear locking*) também

Tabela 1 – Resultados do *Patch test*.

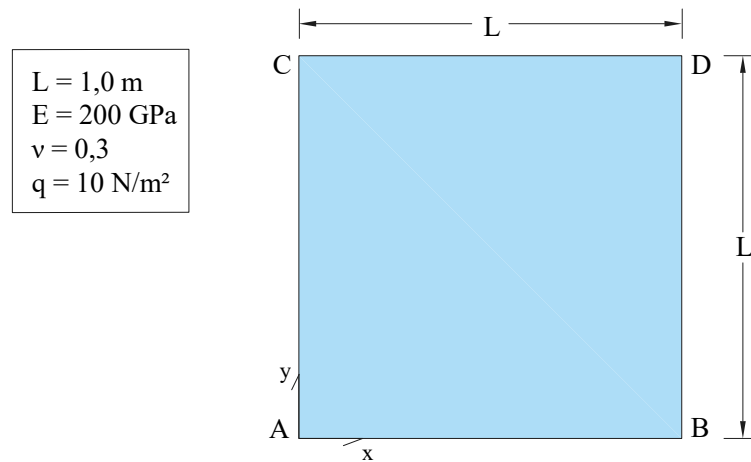
Elementos	Carga Aplicada	Momento na placa	$2a/h$		
			10	100	1000
P2	$Mn = 1$	$Mx = My$	1	1	1
	$Mns = 1$	Mxy	1	1	1
P3	$Mn = 1$	$Mx = My$	1	1	1
	$Mns = 1$	Mxy	1	1	1
P4	$Mn = 1$	$Mx = My$	1	1	1
	$Mns = 1$	Mxy	1	1	1

Fonte: elaborado pelo autor.

é avaliado. A geometria do problema e as propriedades do material são mostrados na Figura 34.

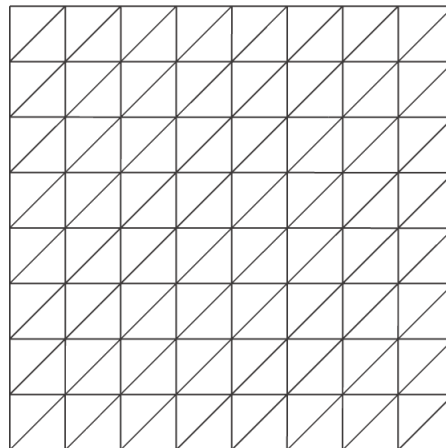
A Figura 35 apresenta a malha utilizada.

Figura 34 – Geometria da placa quadrada.



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 35 – Malha utilizada para a placa quadrada.



Fonte: elaborado pelo autor.

As condições de contorno consideradas são definidas a seguir:

- Simplesmente Apoiado (SS1): $\begin{cases} w = 0 \text{ para } x = 0, L; \\ w = 0 \text{ para } y = 0, L; \end{cases}$
- Simplesmente Apoiado (SS2): $\begin{cases} w = \theta_x = 0 \text{ para } x = 0, L; \\ w = \theta_y = 0 \text{ para } y = 0, L; \end{cases}$
- Engastado: $\begin{cases} w = \theta_x = \theta_y = 0 \text{ para } x = 0, L; \\ w = \theta_x = \theta_y = 0 \text{ para } y = 0, L. \end{cases}$

Os resultados obtidos para o deslocamento no centro da placa quadrada variando-se a relação comprimento-espessura (a/h) são comparados com a solução apresentada em Zienkiewicz *et al.* (1993), que utiliza a formulação de placa de deformação por cisalhamento de primeira ordem (FSDT ou Reissner-Mindlin). Para tanto, foi utilizado o parâmetro dado por:

$$w = w_c \left(\frac{qL^4}{100D} \right) \quad (5.1)$$

onde w_c é o deslocamento do nó central e D é a rigidez à flexão das placas calculada como

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (5.2)$$

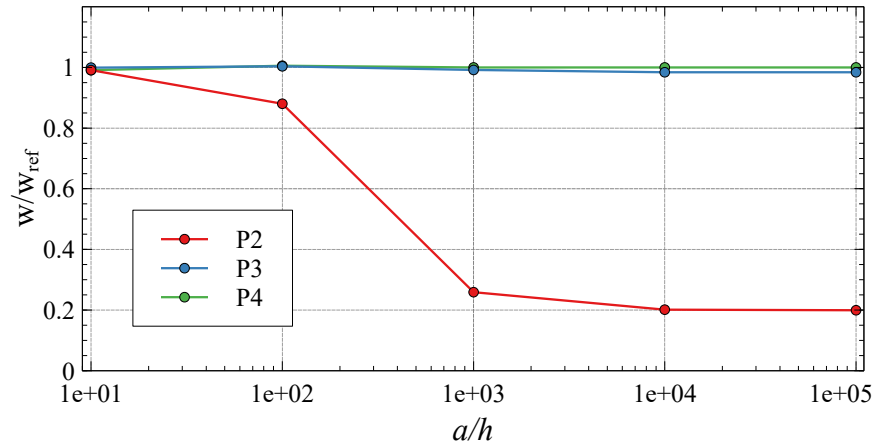
Os resultados são apresentados na Tabela 2. As relações entre os valores obtidos com os triângulos de Bézier e a solução de referência são apresentadas nas Figuras 36, 37 e 38.

Tabela 2 – Deslocamentos no centro de uma placa quadrada.

C. C.	Fonte	L/h				
		10	10^2	10^3	10^4	10^5
SS1	Zienkiewicz <i>et al.</i> (1993)	0,4619	0,4107	0,4086	0,4062	0,4062
	Triângulos de Bézier (P2)	0,4576	0,3576	0,1053	0,0817	0,0809
	Triângulos de Bézier (P3)	0,4614	0,4077	0,4028	0,3998	0,3997
	Triângulos de Bézier (P4)	0,4617	0,4084	0,4063	0,4062	0,4062
SS2	Zienkiewicz <i>et al.</i> (1993)	0,4273	0,4064	0,4062	0,4062	0,4062
	Triângulos de Bézier (P2)	0,4258	0,3548	0,1040	0,0817	0,0809
	Triângulos de Bézier (P3)	0,4273	0,4063	0,4027	0,3998	0,3997
	Triângulos de Bézier (P4)	0,4273	0,4064	0,4062	0,4062	0,4062
ENG	Zienkiewicz <i>et al.</i> (1993)	0,1499	0,1268	0,1265	0,1265	0,1265
	Triângulos de Bézier (P2)	0,1492	0,0943	0,0065	0,0001	0,0000
	Triângulos de Bézier (P3)	0,1504	0,1264	0,1197	0,1175	0,1174
	Triângulos de Bézier (P4)	0,1505	0,1268	0,1265	0,1265	0,1265

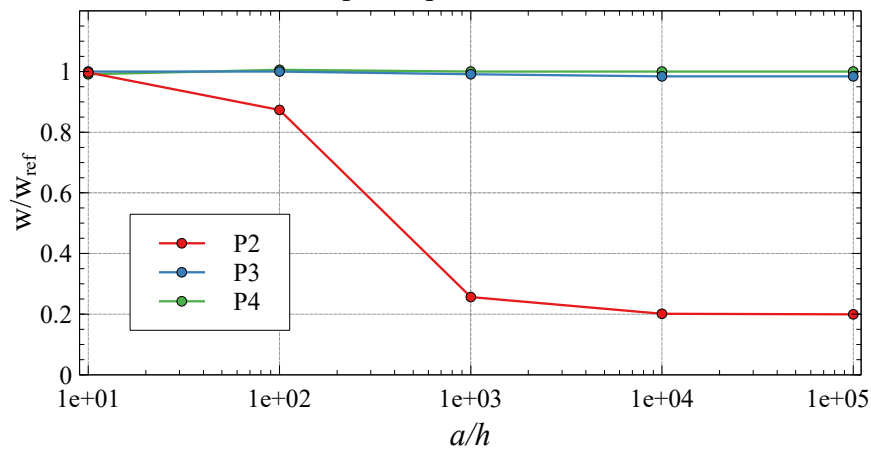
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 36 – SS1 - Deslocamentos na placa quadrada.



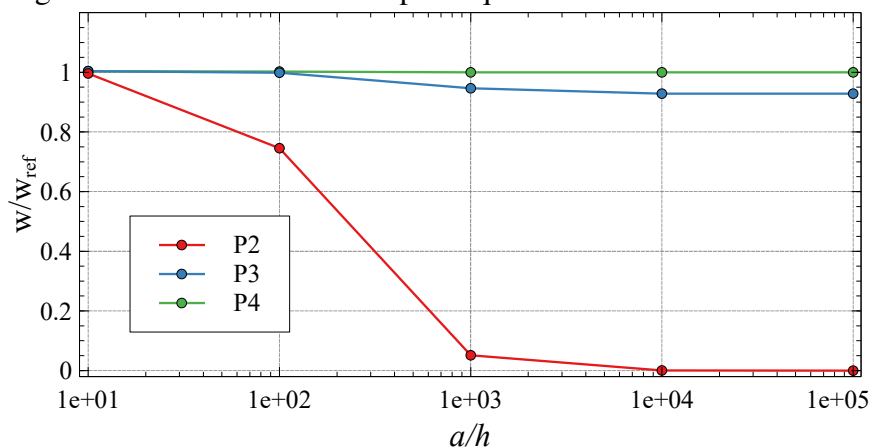
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 37 – SS2 - Deslocamentos na placa quadrada.



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 38 – Engastado - Deslocamentos na placa quadrada.



Fonte: elaborado pelo autor.

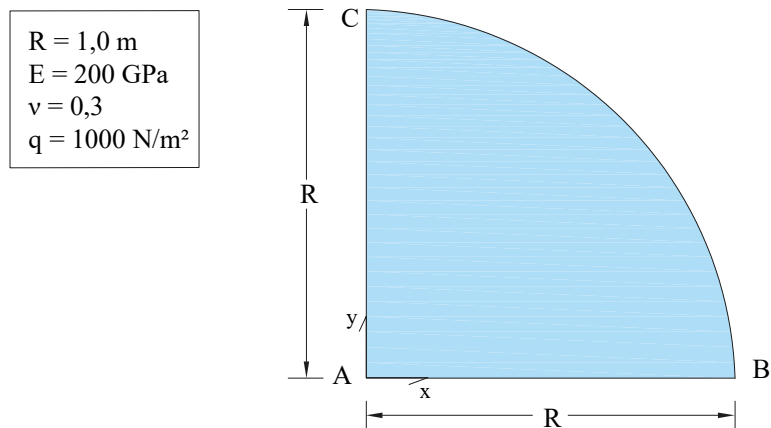
É notável a influência do travamento para os elementos de segunda ordem ($p = 2$) à medida que a relação a/h aumenta, e esse efeito é mais rigoroso para a placa engastada. Como esperado, o travamento de cisalhamento diminui para elementos de alta ordem. Percebe-se

que os elementos de quarta ordem ($p = 4$) não apresentaram travamento neste exemplo e os elementos de terceira ordem ($p = 3$) apresentaram bons resultados para todas as condições de contorno adotadas e todas as faixas de a/h consideradas aqui, que incluem placas muito finas com espessuras muito inferiores às utilizadas na prática. Cabe destacar que os resultados para as condições SS1 e SS2 foram praticamente os mesmos.

5.1.3 Placa circular submetida a uma carga transversal uniformemente distribuída

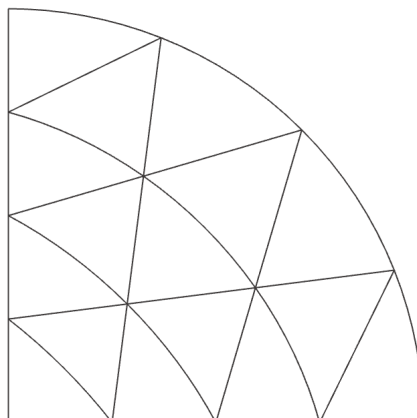
Este exemplo trata da análise linear de uma placa circular isotrópica submetida a uma carga transversal uniformemente distribuída, onde é verificada a convergência da deflexão e do momento no centro da placa. O efeito do travamento de cisalhamento também é avaliado. Devido à simetria do problema, apenas um quarto da placa foi modelada, como ilustrado na Figura 39. A Figura 40 ilustra a malha utilizada.

Figura 39 – Um Quarto da Placa Circular.



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 40 – Malha utilizada para o quarto da placa circular.



Fonte: elaborado pelo autor.

As condições de contorno adotadas, considerando-se a simetria, são dadas por:

$$\begin{aligned}
 &\bullet \text{ Simplesmente Apoiado (SS1): } \left\{ \begin{array}{l} \theta_y = 0 \text{ para } x = 0; \\ \theta_x = 0 \text{ para } y = 0; \\ w = 0 \text{ para } R^2 = x^2 + y^2; \end{array} \right. \\
 &\bullet \text{ Engastado: } \left\{ \begin{array}{l} \theta_y = 0 \text{ para } x = 0; \\ \theta_x = 0 \text{ para } y = 0; \\ w = \theta_x = \theta_y = 0 \text{ para } R^2 = x^2 + y^2. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Os resultados obtidos para o deslocamento no centro da placa circular (Ponto **A**) variando-se a relação diâmetro-espessura (d/h) são comparados com a solução analítica para este problema considerando a teoria de placas de Reissner-Mindlin, que pode ser encontrada em Huang *et al.* (2017). Para a placa simplesmente apoiada (SS1) o deslocamento central da placa pode ser calculada por

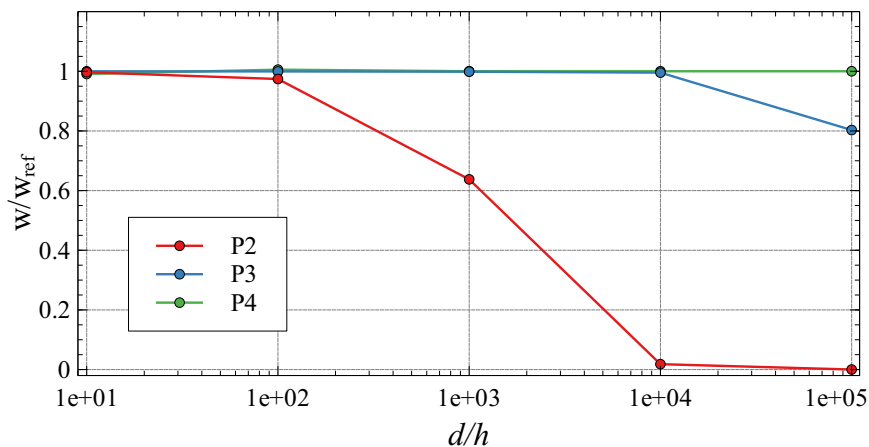
$$\begin{aligned}
 w_{ref} &= \frac{qR^4}{64D} \left(\frac{5+\nu}{1+\nu} + \phi \right) \\
 \phi &= \frac{8}{3k_s(1-\nu)} \left(\frac{h}{R} \right)^2, \quad k_s = \frac{5}{6}
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

onde D é a rigidez à flexão das placas. Já para a placa engastada o deslocamento pode ser calculado por

$$w_{ref} = \frac{qR^4}{64D} (1 + \phi) \tag{5.4}$$

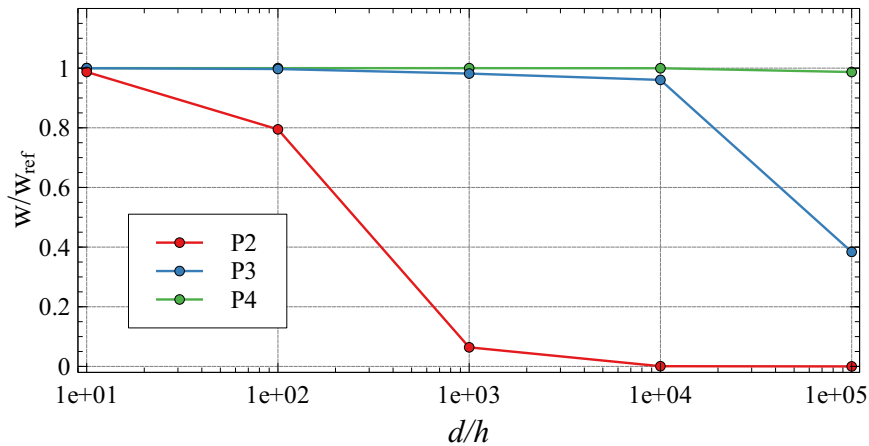
Os resultados são apresentados nas Figuras 41 e 42.

Figura 41 – SS1 - Deslocamentos na placa circular.



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 42 – Engastado - Deslocamentos na placa circular.



Fonte: elaborado pelo autor.

Nesse exemplo pode ser verificado que os efeitos do travamento foram mais severos que no exemplo da placa quadrada para os elementos de segunda e terceira ordem à medida que a relação geométrica d/h foi aumentando. Percebe-se que os elementos de quarta ordem ($p = 4$) não apresentaram travamento, independente da relação d/h ou da condição de contorno. Já os elementos de terceira ordem ($p = 3$) apresentaram bons resultados para todas as condições de contorno adotadas e todas as faixas de d/h até 10^4 . A partir daí, esses elementos apresentaram um travamento por cisalhamento considerável, sendo maior para placas engastadas. Contudo, este fato não impossibilita seu uso, tendo em vista que relações d/h superiores a 10^4 não são utilizadas na prática. Além disso, mesmo neste caso os resultados podem ser melhorados com o refinamento da malha.

A partir dos resultados desse exemplo e do Exemplo 5.1.2, verificou-se que os elementos de quarta ordem ($p = 4$) não apresentaram travamento, mas devido a seu custo computacional mais elevado, definiu-se pela utilização dos elementos triangulares cúbicos ($p = 3$). Destacando que o travamento nesses elementos cúbicos se manifestou apenas em estruturas extremamente esbeltas, fato que não impossibilita seu uso nas estruturas usuais, como as analisadas neste trabalho.

5.1.4 Vibração de uma placa quadrada

Este exemplo consiste na análise de vibração de uma placa quadrada isotrópica sujeita a diferentes condições de contorno: simplesmente apoiada ($w = 0$ em todos os lados) e engastada ($w = \theta_x = \theta_y = 0$ em todos os lados). Os parâmetros do problema são: comprimento $L = 10$ m, espessura $h = 0,05$ m, módulo de elasticidade $E = 200$ GPa, coeficiente de Poisson

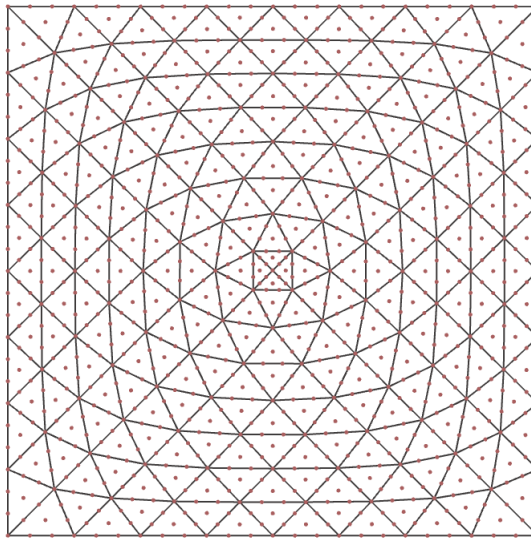
$\nu = 0,3$ e densidade $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$. Para isso, foi utilizada uma malha composta por 256 elementos triangulares de Bézier cúbicos ($p = 3$) e 1201 nós, como mostrado na Figura 43.

Foram calculadas as frequências naturais (ω) correspondentes aos dos quatro primeiros modos de vibração. Para tanto, utilizou o parâmetro adimensional dado por:

$$\varpi = \left(\frac{\omega^2 \rho L^4 h}{D} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (5.5)$$

onde D é a rigidez à flexão da placa.

Figura 43 – Malha utilizada para a placa quadrada.



Fonte: elaborado pelo autor.

Os resultados obtidos foram comparados com a solução analítica baseada na teoria de Reissner-Mindlin, encontrada em Abbassian *et al.* (1987). Os valores numéricos correspondentes são apresentados na Tabela 3. Observa-se que os resultados apresentaram boa concordância. Cabe destacar que, como esperado para a relação $L/h = 200$ adotada nesse exemplo, não houve influência considerável do efeito do travamento de cisalhamento para os elementos de Bézier cúbicos. Os modos de vibração para as diferentes condições de contorno são mostradas na Figura 44.

5.1.5 Vibração de uma placa circular

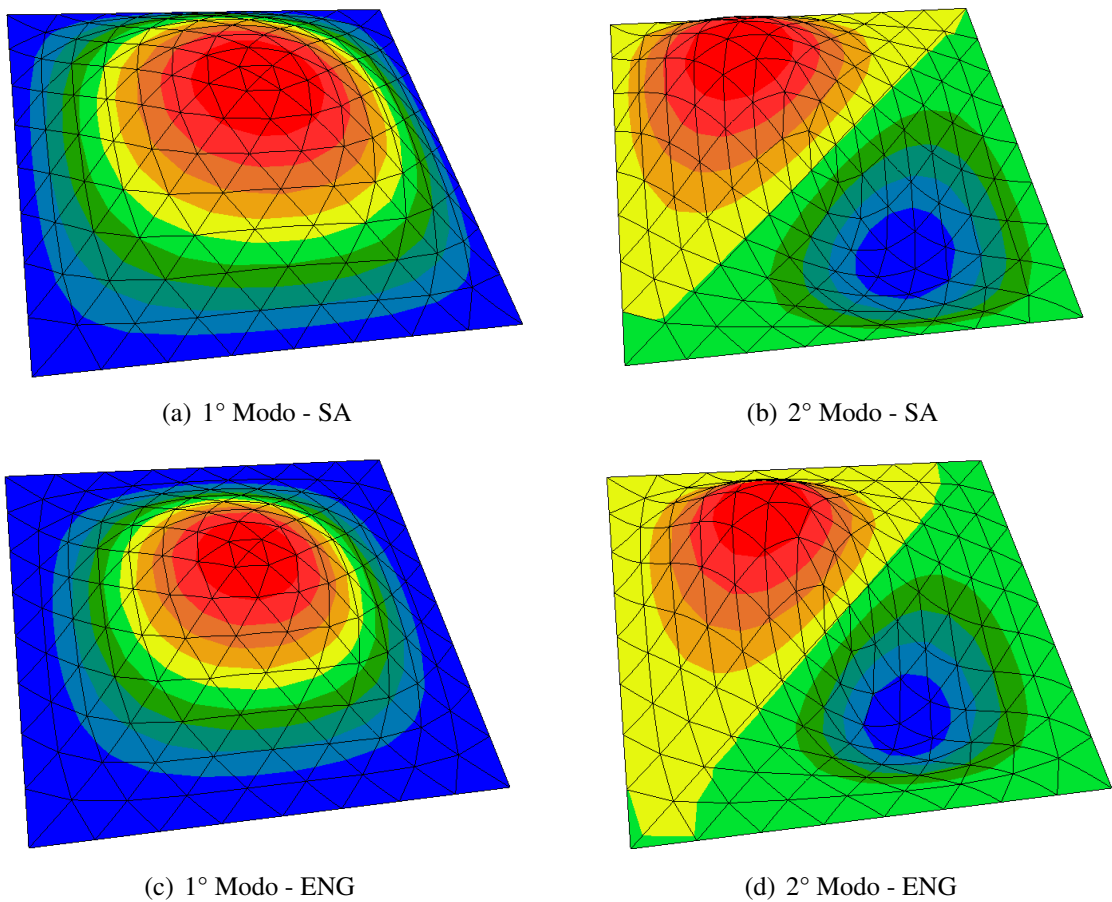
Este exemplo consiste na análise de vibração de uma placa circular isotrópica sujeita a diferentes condições de contorno aplicadas nas bordas: simplesmente apoiada ($w = 0$) e engastada ($w = \theta_x = \theta_y = 0$). Os parâmetros do problema são: raio $R = 1 \text{ m}$, espessura $h = 0,01 \text{ m}$, módulo de elasticidade $E = 200 \text{ GPa}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ e densidade $\rho = 8000$

Tabela 3 – Frequências naturais (ϖ) da placa quadrada.

C. C.	Fonte	Modo			
		1	2	3	4
SA	Presente	4,441	7,023	7,023	8,882
	Abbassian <i>et al.</i> (1987)	4,443	7,025	7,025	8,886
ENG	Presente	5,999	8,567	8,567	10,406
	Abbassian <i>et al.</i> (1987)	5,999	8,568	8,568	10,407

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 44 – Modos de vibração da placa quadrada.



Fonte: elaborado pelo autor.

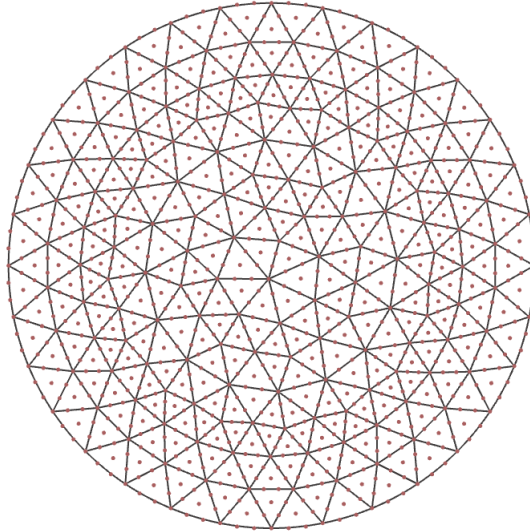
kg/m^3 . A malha utilizada é formada por 306 elementos triangulares de Bézier cúbicos e 1426 nós, como mostrado na Figura 45.

Foram calculadas as frequências naturais (ω) correspondentes aos dos quatro primeiros modos de vibração. Para tanto, utilizou o parâmetro adimensional dado por:

$$\varpi = \omega R^2 \left(\frac{\rho h}{D} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.6)$$

Soluções de referência deste *benchmark* são sugeridas por Leissa (1969), que utiliza

Figura 45 – Malha utilizada para a placa circular.



Fonte: elaborado pelo autor.

a Teoria Clássica de Placas. Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 4. Observa-se que os resultados foram muito próximos entre si, apresentando uma ótima concordância. Como esperado, o efeito do travamento de cisalhamento para os elementos de Bézier cúbicos foi insignificante para a relação $R/h = 100$ adotada nesse exemplo. A forma do primeiro e segundo modo de vibração correspondentes às diferentes condições de contorno são apresentadas na Figura 46.

Tabela 4 – Freqüências naturais (ω) da placa circular.

C. C.	Fonte	Modo			
		1	2	3	4
SA	Presente	4,935	13,895	13,895	25,601
	Leissa (1969)	4,977	13,940	13,940	25,650
ENG	Presente	10,226	21,276	21,276	34,894
	Leissa (1969)	10,216	21,260	21,260	34,880

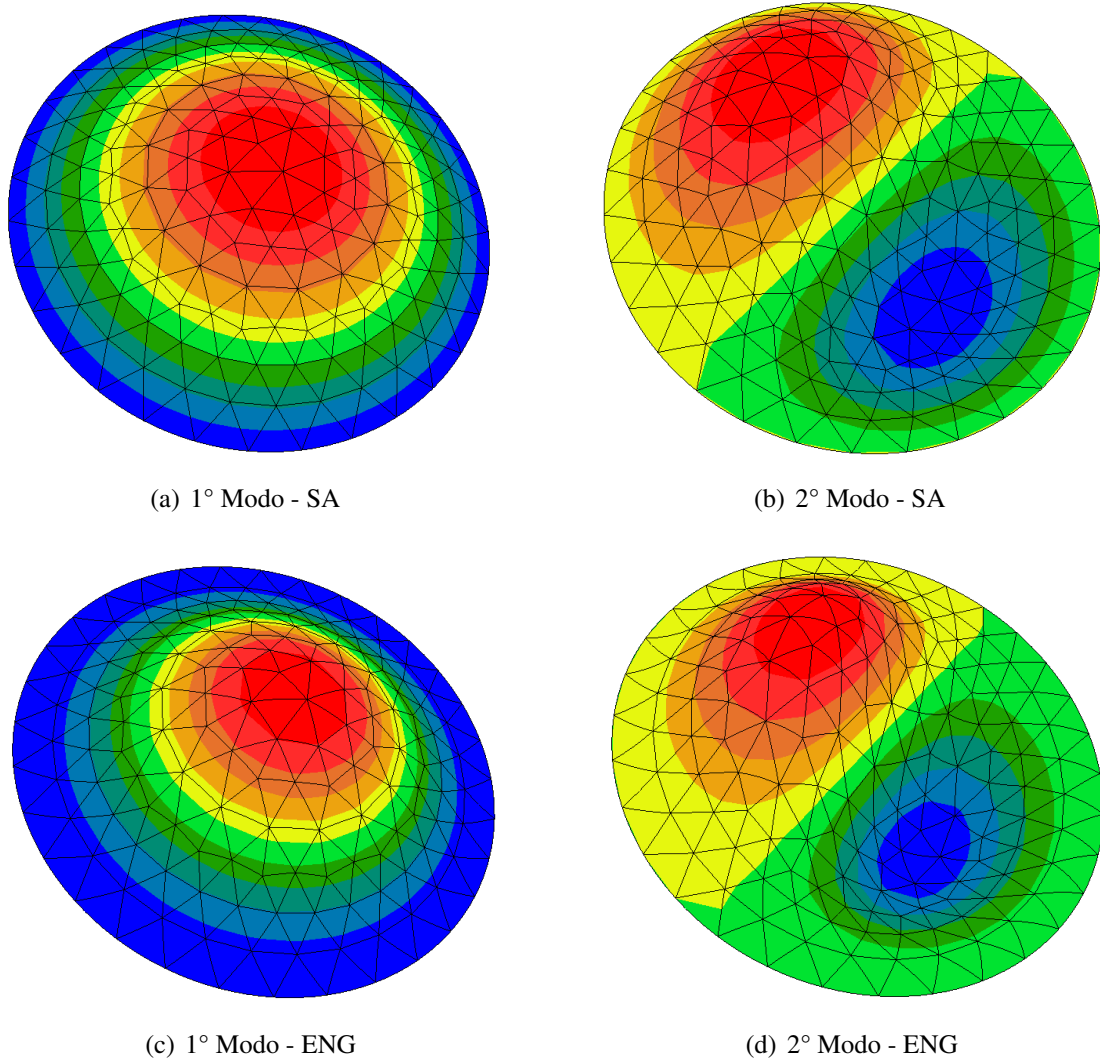
Fonte: elaborado pelo autor.

5.1.6 Flambagem térmica de uma barra

Este exemplo trata da determinação da temperatura crítica de flambagem e o traçado do caminho de equilíbrio de uma barra simplesmente apoiada sujeita a um aumento uniforme da temperatura. Essa barra é semelhante à coluna de Euler, mas o deslocamento horizontal é restringido em ambos os apoios com o intuito de gerar forças compressivas.

A Figura 47 mostra a geometria e as condições de contorno adotadas, assim como

Figura 46 – Modos de vibração da placa circular.



Fonte: elaborado pelo autor.

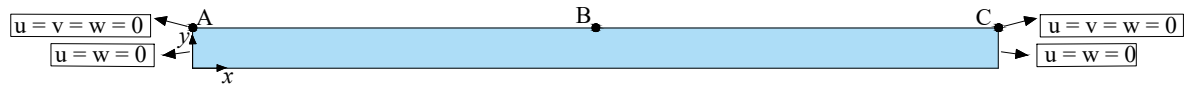
o modo de flambagem calculado utilizando os elementos de Bézier. A barra foi discretizada em 20 elementos triangulares de Bézier cúbicos e 124 nós e é apresentada na Figura 47(c). As propriedades adotadas foram: $E = 1,0 \text{ GPa}$ e $\alpha = 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}$, $L = 5,0 \text{ m}$, $b = 0,25 \text{ m}$, $h = 0,1 \text{ m}$, que resulta em $A = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$ e $I = 20,83 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$, onde L é o comprimento da barra, b é a largura, h é a espessura, A é a área da seção transversal e I é o momento de inércia.

A temperatura de flambagem dessa barra pode ser determinada igualando a força compressiva gerada pelo aumento uniforme da temperatura ($EA\alpha\Delta T_{cr}$) com a carga de flambagem ($\pi EI/L^2$). Assim

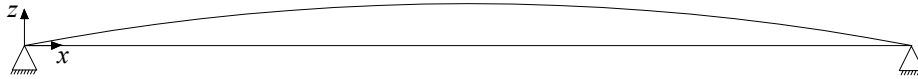
$$\Delta T_{cr} = \frac{\pi^2}{\alpha(L/r)^2}, \quad (5.7)$$

em que $r = \sqrt{I/A}$ é o raio de giração da seção transversal. Para os dados utilizados a temperatura

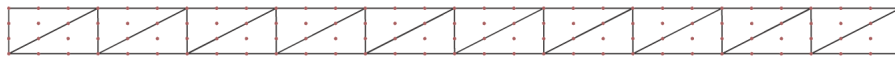
Figura 47 – Barra simplesmente apoiada.



(a) Condições de contorno.



(b) Modo de Flambagem.



(c) Malha utilizada na discretização da barra.

Fonte: elaborado pelo autor.

crítica de flambagem foi $\Delta T_{cr} = 32,899 \text{ }^\circ\text{C}$.

A temperatura crítica de flambagem calculada pela AIG foi de $\Delta T_{cr} = 32,873 \text{ }^\circ\text{C}$, em boa concordância com a temperatura analítica. Cabe destacar que uma possível causa do resultado encontrado ser menor que o analítico é o efeito do cisalhamento da Teoria de Reissner-Mindlin, adotada neste trabalho.

As curvas de temperatura x deslocamento transversal do ponto B são apresentados na Figura 48. Essas curvas mostram claramente uma bifurcação simétrica estável, além de uma ótima concordância com o caminho pós crítico definido pela expressão dada por Boley e Weiner (1997):

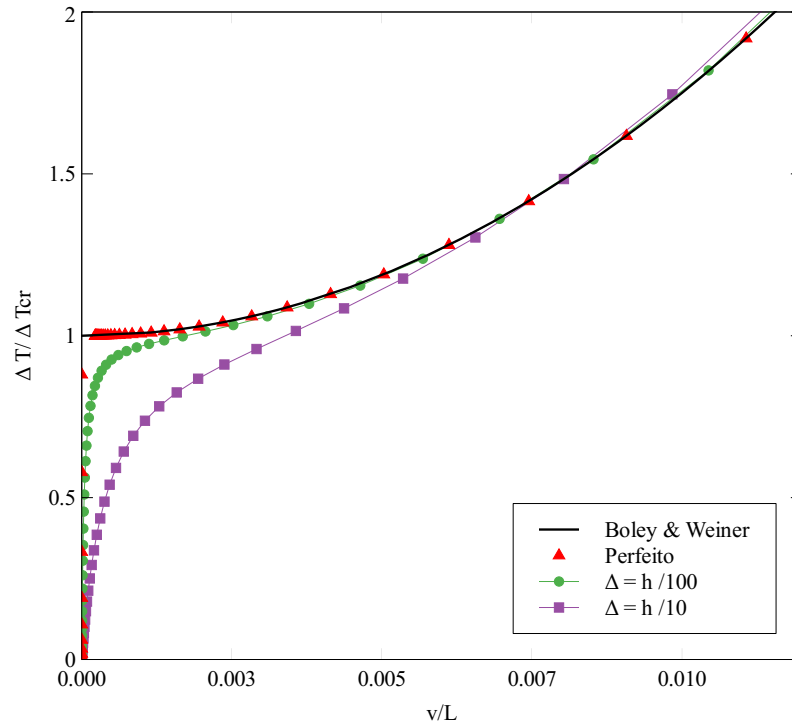
$$\frac{v}{L} = 2 \left(\frac{r}{L} \right) \sqrt{\frac{\Delta T}{\Delta T_{cr}} - 1}. \quad (5.8)$$

Cabe destacar que a resistência pós-flambagem da barra submetida a um carregamento térmico não é desprezível, pois para as propriedades adotadas tem-se $T/\Delta T_{cr} = 1,80$ para $v/L = 1/100$. Este comportamento é diferente do clássico caso do carregamento mecânico, no qual, conforme Chajes (1974), a solução elástica para $P/P_{cr} = 1,015$ gera $v/L = 11/100$, onde P é a carga compressiva.

Em seguida foi analisada a sensibilidade da estrutura à imperfeição. A geometria da estrutura imperfeita foi modelada como uma combinação linear de seus modos de flambagem (φ_i):

$$\mathbf{x}_{imp} = \mathbf{x}_{perf} + \sum_{i=1}^n \Delta_i \varphi_i \quad (5.9)$$

Figura 48 – Caminhos de equilíbrio.



Fonte: elaborado pelo autor.

onde \mathbf{x}_{imp} e \mathbf{x}_{perf} são as coordenadas dos pontos que definem a geometria na configuração imperfeita e perfeita, respectivamente, Δ_i é a amplitude da imperfeição relacionada ao modo de flambagem φ_i , com valores normalizados em relação ao maior valor do modo. Destacando que apenas o primeiro modo de flambagem foi utilizado para descrever a estrutura imperfeita.

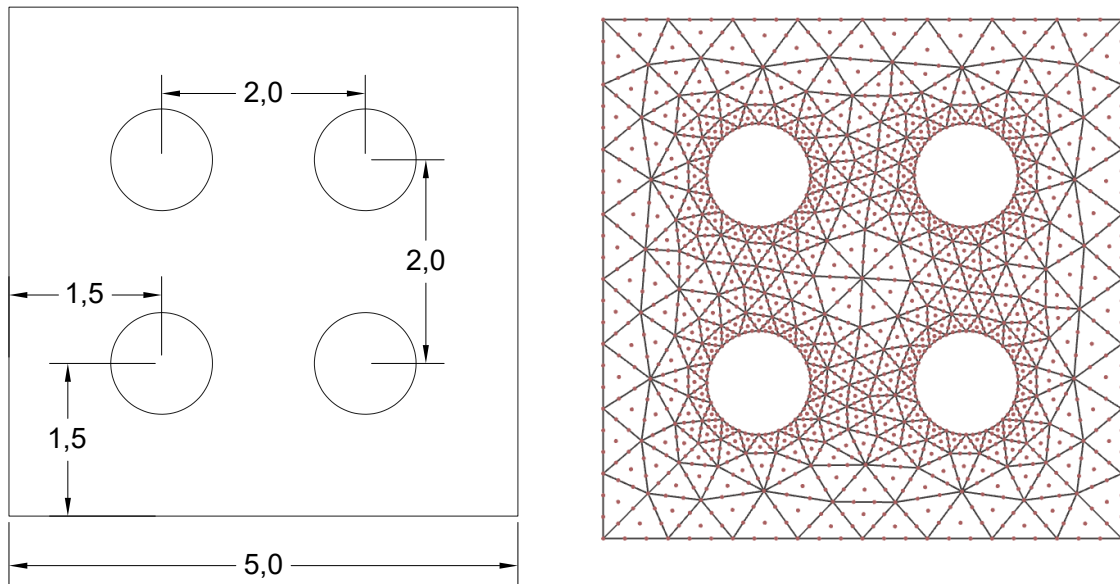
Foram consideradas imperfeições iguais a $\Delta = h/100$ e $\Delta = h/10$. Percebe-se que a introdução das imperfeições elimina a bifurcação. Além disso, as curvas das estruturas imperfeitas são semelhantes à perfeita, com a diferença entre elas diminuindo à medida que as imperfeições diminuem.

5.2 Aplicações

5.2.1 Vibração de uma placa retangular com quatro furos

Este exemplo consiste na análise de vibração de uma placa quadrada com quatro furos circulares como representado na Figura 49(a). As propriedades dos materiais são: módulo de elasticidade $E = 200$ GPa, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ e densidade $\rho = 8000$ kg/m³. A espessura da placa é $h = 0,05$ m e o raio dos furos é $R = 0,5$ m. A malha utilizada é composta por 456 elementos triangulares de Bézier cúbicos e 2193 nós, como mostrado na Figura 49.(b).

Figura 49 – Placa com quatro furos.



(a) Geometria da placa com quatro furos

(b) Malha utilizada na placa com quatro furos

Fonte: elaborado pelo autor.

Os resultados para as condições de contorno simplesmente apoiada ($w = 0$) e engastada ($w = \theta_x = \theta_y = 0$) são calculados e comparados com as soluções encontradas em Yin *et al.* (2015), que utilizou a Teoria Clássica das Placas na análise isogeométrica e discretizou o modelo em 21×21 pontos de controle e 19×19 elementos NURBS, com os furos descritos por conjuntos de níveis.

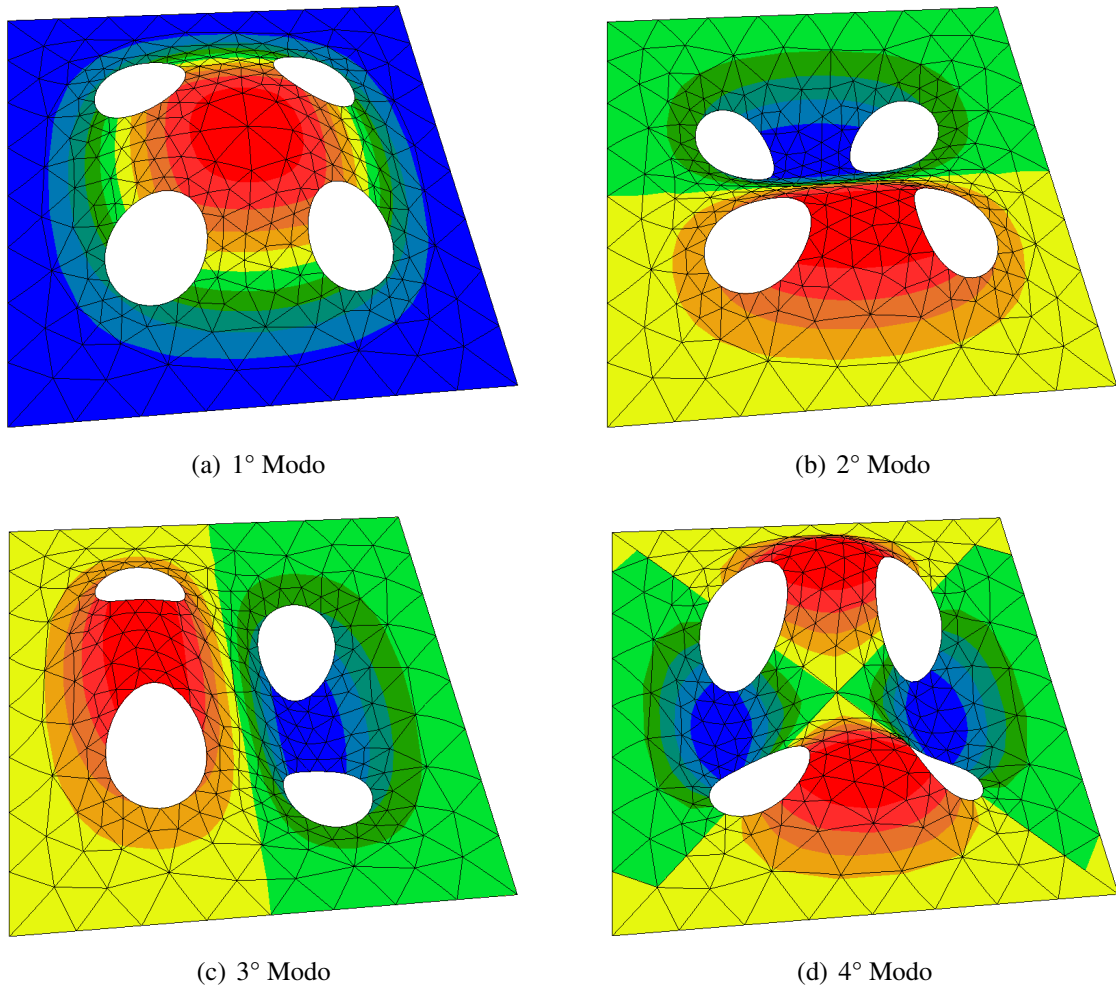
A Tabela 5 apresenta os resultados obtidos e a Figura 50 mostra os modos de vibração para a placa engastada. Uma boa concordância com as soluções de referência pode ser observada, destacando que os resultados foram ligeiramente menores que a valores da referência devido ao efeito do cisalhamento da Teoria de Reissner-Mindlin, adotada neste trabalho.

Tabela 5 – Frequências naturais ω [Hz] da placa com quatro furos.

C. C.	Fonte	Modo			
		1	2	3	4
SA	Presente	8,959	22,571	22,571	38,238
	Yin <i>et al.</i> (2015)	8,997	22,652	22,653	38,468
ENG	Presente	17,414	35,858	35,858	57,488
	Yin <i>et al.</i> (2015)	17,492	35,987	35,988	57,938

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 50 – Modos de vibração para a placa com placa com quatro furos (ENG).



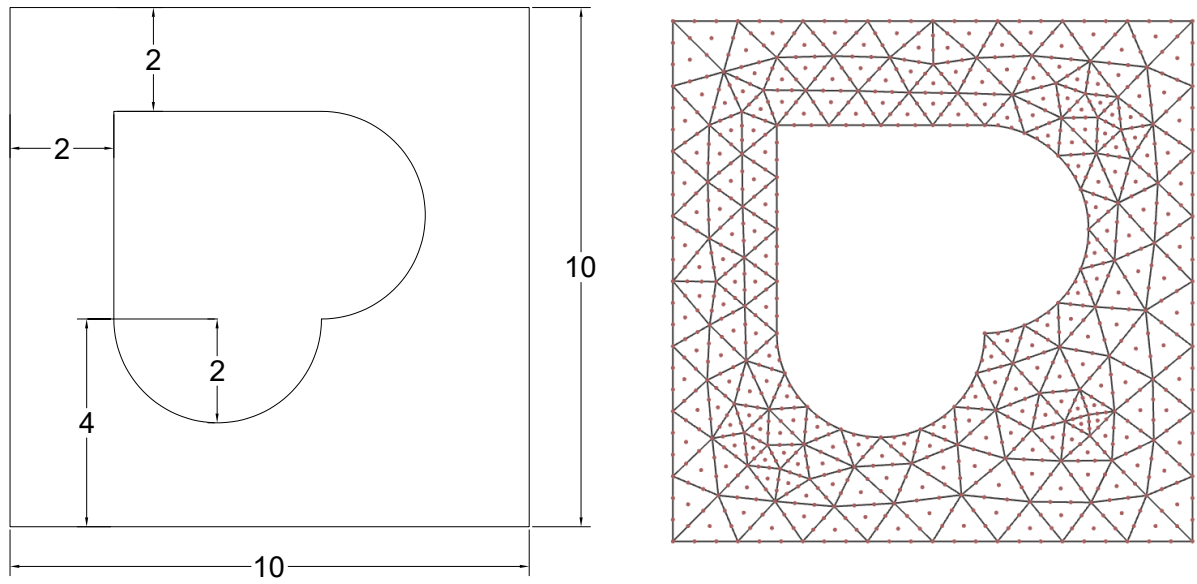
Fonte: elaborado pelo autor.

5.2.2 Vibração de uma placa com furo em forma de coração

Este exemplo consiste na análise de vibração de uma placa quadrada com furo complicado em forma de coração, que foi estudado por vários autores (SHOJAEE *et al.*, 2012; TRAN; KIM, 2018; YIN *et al.*, 2014; LIU; JEFFERS, 2018; YANG *et al.*, 2019). As propriedades dos materiais são: módulo de elasticidade $E = 200$ GPa, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ e densidade $\rho = 8000$ kg/m³. A geometria da placa e suas dimensões são mostradas na Figura 51(a). A espessura da placa é $h = 0,05$ m. As frequências naturais adimensionais foram definidas utilizando a Equação 5.5. A malha utilizada foi composta por 212 elementos triangulares de Bézier cúbicos e 1038 nós, como mostrado na Figura 51.(b).

Os resultados para as condições de contorno, simplesmente apoiada ($w = 0$) e engastada ($w = \theta_x = \theta_y = 0$), são calculados e comparados com as soluções encontradas em Yin *et*

Figura 51 – Placa com furo em forma de coração.



(a) Geometria da placa com furo em forma de coração

(b) Malha utilizada na placa com furo em forma de coração

Fonte: elaborado pelo autor.

al. (2014), que utiliza a formulação de placa de deformação por cisalhamento de primeira ordem (FSDT) com NURBS na análise isogeométrica e discretizou o modelo em 8 *patches* NURBS; e em Yang *et al.* (2019), que utiliza a formulação de placa de deformação de cisalhamento de alta ordem (HSDT) com uma combinação da XIGA-PHT (*extended isogeometric analysis based on PHT-splines* - análise isogeométrica estendida com base em PHT-splines) e FCM (*finite cell method* - método de célula finita) e discretizou o modelo em 8 *patches* NURBS.

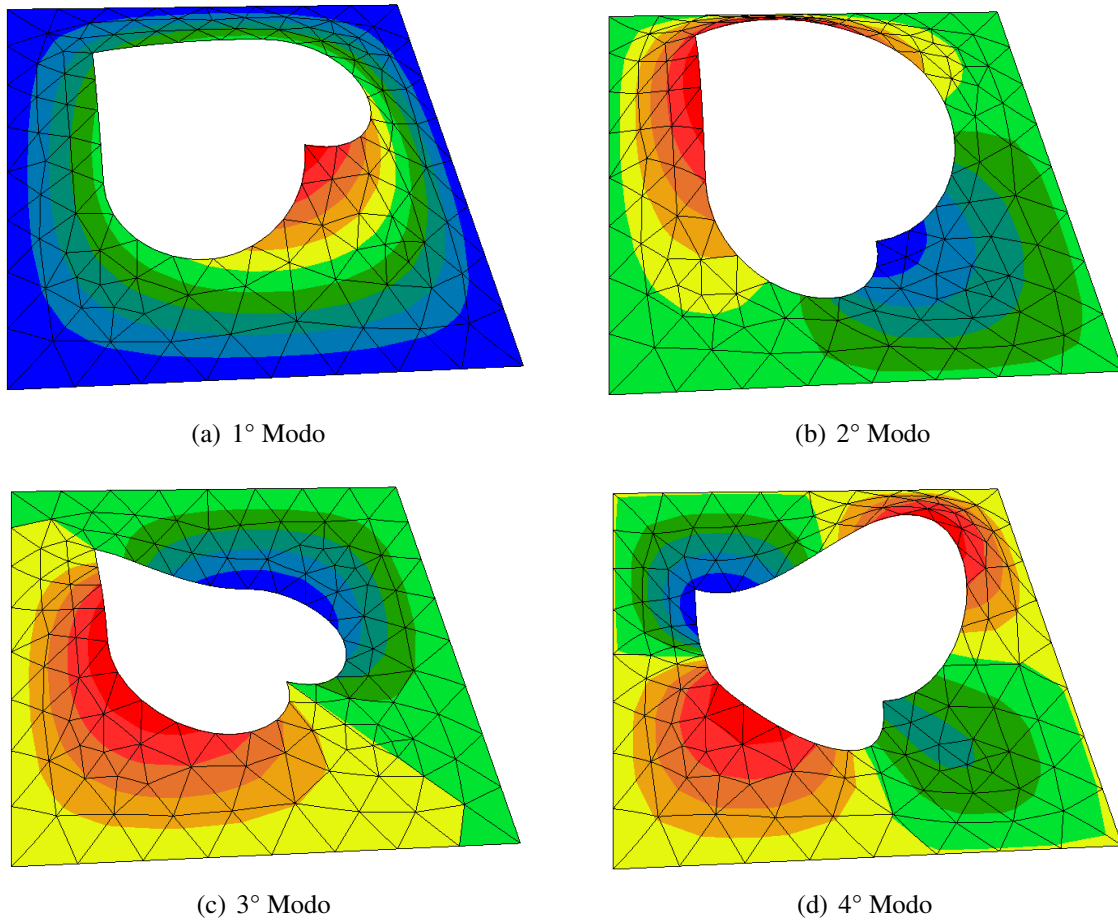
A Tabela 6 apresenta os resultados obtidos e a Figura 52 mostra a forma dos quatro primeiros modos de vibração para a placa simplesmente apoiada. Uma boa concordância com as soluções de referência pode ser observada, com erros menores que 0,5%.

Tabela 6 – Frequências naturais (ω) da placa com furo em forma de coração.

C. C.	Fonte	Modo			
		1	2	3	4
SA	Presente	4,910	6,386	6,752	8,557
	Yin <i>et al.</i> (2014)	4,914	6,390	6,762	8,568
	Yang <i>et al.</i> (2019)	4,917	6,385	6,759	8,557
ENG	Presente	7,438	9,820	9,840	10,952
	Yin <i>et al.</i> (2014)	7,453	9,825	9,825	10,964
	Yang <i>et al.</i> (2019)	7,450	9,818	9,831	10,935

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 52 – Modos de vibração de uma placa com furo em forma de coração (SA).



Fonte: elaborado pelo autor.

5.2.3 Flambagem térmica de placas quadradas

Os exemplos desta seção consideram a determinação da carga crítica e o traçado do caminho de equilíbrio de placas quadradas submetidas a uma variação de temperatura uniforme e linear. As placas analisadas nessa seção têm lado a e espessura h .

Para definição da malha utilizada, foi realizado um estudo, em que foi comparada a temperatura crítica de flambagem para uma placa isotrópica simplesmente apoiada SS1 ($w = 0$), formada por triângulos de Bézier cúbicos, submetida a um aumento uniforme de temperatura. As propriedades da placa são mostradas na Tabela 7.

Os resultados são mostrados na Tabela 8, onde a diferença de uma malha para outra toma como referência o valor da temperatura crítica de $\Delta T_{cr} = 131,53$ K, encontrada em Ovesy *et al.* (2015), que se baseia na Teoria Clássica e no conceito do Princípio da Energia Potencial Mínima. Desta forma, decidiu-se utilizar a malha 8x8 composta por 256 elementos triangulares

Tabela 7 – Propriedades da placa isotrópica.

E	a/h	α	ν
1.0	100	$1,0 \times 10^{-6}$	0,25

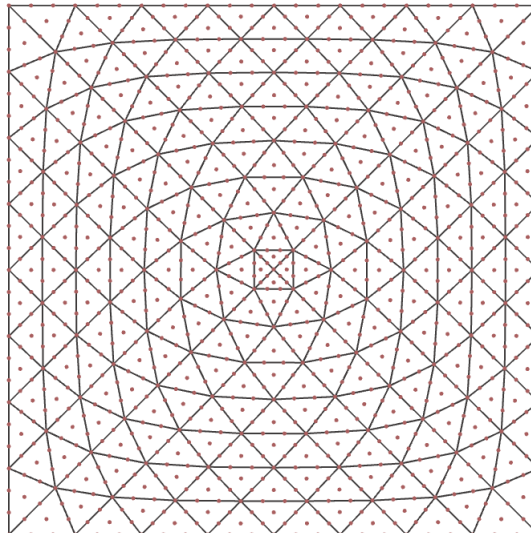
Fonte: elaborado pelo autor.

de Bézier cúbicos, a qual é apresentada na Figura 53.

Tabela 8 – Estudo de malha para temperatura crítica.

Malha	Nº de elementos	ΔT_{cr} (K)	Diferença
2×2	16	132,57	0,79%
4×4	64	131,60	0,05%
8×8	256	131,53	0,00%

Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 53 – Malha (8×8) utilizada.

Fonte: elaborado pelo autor.

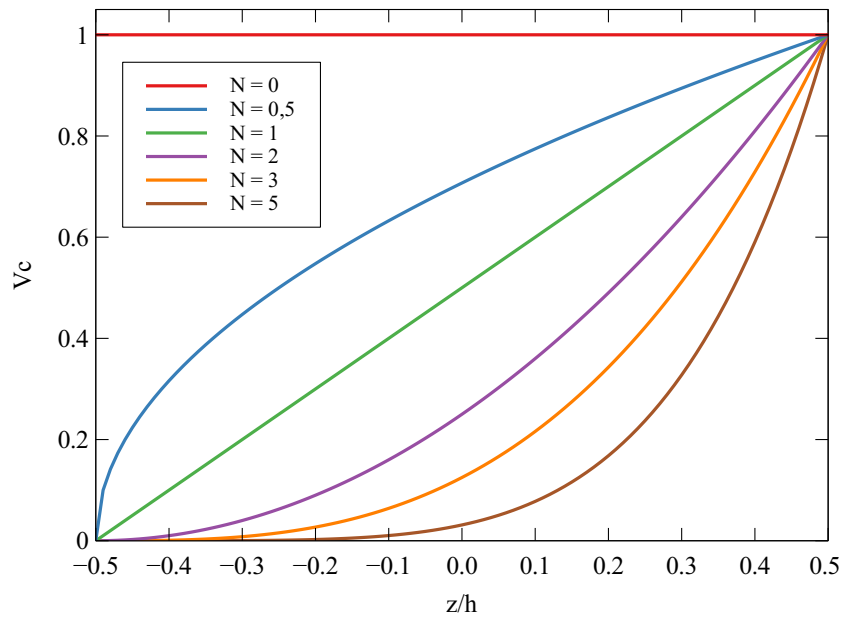
Para os materiais com gradação funcional, a variação da fração de volume foi dada pela Lei das Potências (Figura 54):

$$V_c(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^N \quad \text{e} \quad V_m = 1 - V_c \quad (5.10)$$

Já o método de homogeneização utilizado foi a Lei das Misturas.

Inicialmente para os MGFs, foi calculada a temperatura crítica de flambagem de uma placa quadrada composta de Alumínio (Al) e Alumina (Al_2O_3) para diferentes índices N da Lei das Potências, sujeita a uma variação uniforme de temperatura. Todas as bordas são consideradas engastadas ($w = \theta_x = \theta_y = 0$). As propriedades dos materiais, mostradas na Tabela 9, são as mesmas encontradas em Bateni *et al.* (2013).

Figura 54 – Fração de volume ao longo da espessura.



Fonte: elaborado pelo autor.

Tabela 9 – Propriedades do *Al* e do *Al₂O₃*.

Propriedades	<i>Al</i>	<i>Al₂O₃</i>
Modulo de Elasticidade (GPa)	70,0	380,0
Coefficiente de Poisson	0,3	0,3
Coefficiente de expansão térmica ($K \times 10^{-6}$)	23,0	7,4

Fonte: elaborado pelo autor.

A temperatura na placa considerando o aumento de temperatura uniforme é avaliada conforme

$$T = T_{ref} + \Delta T. \quad (5.11)$$

Os resultados deste estudo, apresentados na Tabela 10, são comparados com os encontrados em Bateni *et al.* (2013), baseado no método de Galerkin multi-termo e considera a variação parabólica das deformações de cisalhamento, Kiani *et al.* (2011), baseado na série de potências de Galerkin e na Teoria clássica de placas, Nguyen-Xuan *et al.* (2011), baseado no método dos elementos finitos suavizados e na teoria de Reissner-Mindlin, Zhao *et al.* (2009), baseado no método *kp-Ritz* e na teoria de Reissner-Mindlin. O método de homogeneização utilizado nesses trabalhos foi a Lei das Misturas.

Observa-se que os resultados foram discrepantes em relação à literatura a *N* aumenta. Esse fato pode ser explicado devido às diferenças significativas entre as propriedades do Alumínio (*Al*) e da Alumina (*Al₂O₃*). Esse fato impacta na determinação das propriedades efetivas obtidas pela Lei das Misturas, influenciando assim nos resultados obtidos.

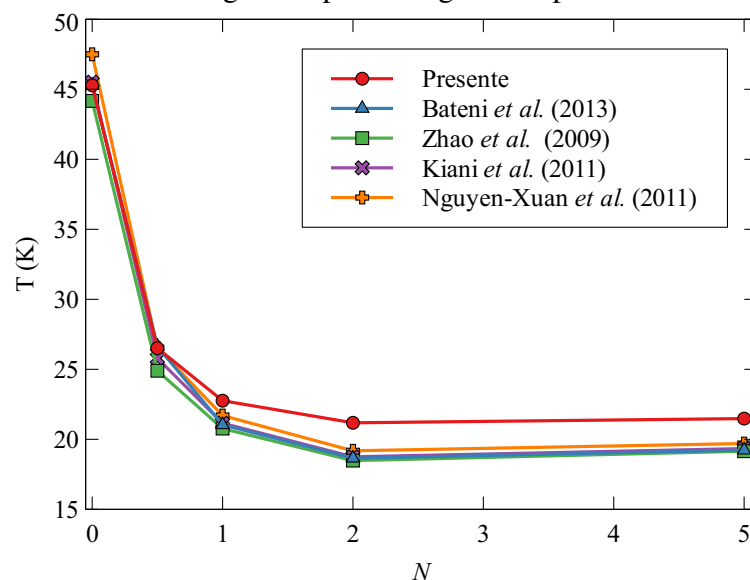
Tabela 10 – Temperatura crítica (K) de uma placa quadrada engastada de FGM (Al/Al_2O_3) sujeita a uma variação uniforme de temperatura.

a/h	Fonte	$N = 0$	$N = 0,5$	$N = 1$	$N = 2$	$N = 5$
100	Presente	45,28	26,51	22,76	21,18	21,48
	Batani <i>et al.</i> (2013)	45,28	25,65	21,04	18,65	19,23
	Zhao <i>et al.</i> (2009)	44,17	24,90	20,77	18,48	19,15
	Kiani <i>et al.</i> (2011)	45,51	25,79	21,15	18,75	19,34
	Nguyen-Xuan <i>et al.</i> (2011)	47,50	26,54	21,70	19,18	19,70
	Presente	180,13	105,48	90,56	84,23	85,34
50	Batani <i>et al.</i> (2013)	180,30	102,23	83,84	74,30	76,50
	Zhao <i>et al.</i> (2009)	175,82	99,16	82,35	71,01	74,59
	Kiani <i>et al.</i> (2011)	182,06	103,15	84,58	74,99	77,36
	Nguyen-Xuan <i>et al.</i> (2011)	188,28	105,27	86,07	76,07	78,06

Fonte: elaborado pelo autor.

A Figura 55 descreve a variação de temperatura crítica de acordo com o índice N para a relação $a/h = 100$. Percebe-se que a temperatura crítica de flambagem cai a uma taxa maior, quando o valor do índice N aumenta no intervalo de 0 a 1. Cabe destacar também que a medida que o N aumenta, a temperatura crítica de flambagem tende a ser superior que os resultados da literatura, uma das causas desse fato ocorre devido a grande discrepância entre as propriedades dos materiais utilizados.

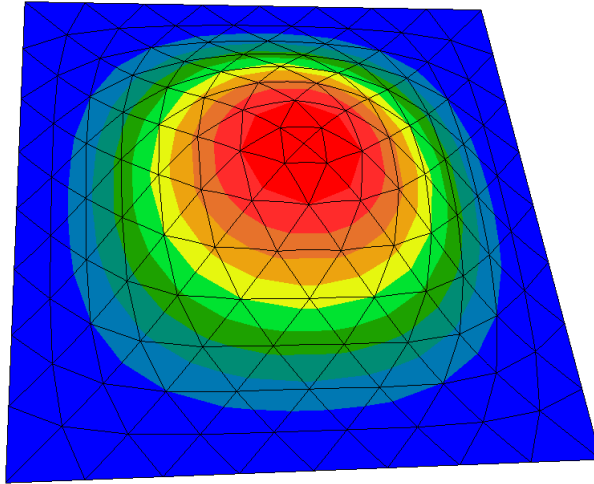
Figura 55 – Temperatura de flambagem de placas engastadas para diferentes N com $a/h = 100$.



Fonte: elaborado pelo autor.

A Figura 56 mostra o primeiro modo de flambagem da placa ($Al - Al_2O_3$) com $N = 1$ considerando um aumento uniforme de temperatura.

Figura 56 – 1º Modo de flambagem ($Al - Al_2O_3$) com $N = 1$.



Fonte: elaborado pelo autor.

Bateni *et al.* (2013) também compara a estabilidade térmica de uma placa MGF sob carga de aumento de temperatura uniforme, em que as propriedades dos materiais constituintes são dependentes da temperatura de referência. Essas propriedades são determinadas pela Eq. (2.23). A Tabela 11 apresenta os coeficientes dos materiais utilizados nesse caso, aço inoxidável ($SUS304$) e nitreto de silício (Si_3N_4). Cabe destacar que as propriedades foram calculadas para a temperatura de referência $T_{ref} = 300K$ e são apresentadas na Tabela 12.

Tabela 11 – Coeficientes termodependentes.

Material	Propriedades	P_{-1}	P_0	P_1	P_2	P_3
$SUS304$	$\alpha [K^{-1}]$	0	$12,33e-6$	$8,086e-4$	0	0
	$E [Pa]$	0	$201,04e+9$	$3,079e-4$	$-6,534e-7$	0
	ν	0	0,28	0	0	0
Si_3N_4	$\alpha [K^{-1}]$	0	$5,8723e-6$	$9,095e-4$	0	0
	$E [Pa]$	0	$348,43e+9$	$-3,07e-4$	$2,16e-7$	$-8,946e-11$
	ν	0	0,28	0	0	0

Fonte: elaborado pelo autor.

Tabela 12 – Propriedades para $T_{ref} = 300K$.

Material	$E [Pa]$	$\alpha [K^{-1}]$	ν
$SUS304$	$207,79e+9$	$15,321e-6$	0,28
Si_3N_4	$322,27e+9$	$7,4746e-6$	0,28

Fonte: elaborado pelo autor.

A Tabela 13 apresenta os valores da temperatura crítica de flambagem para diferentes

índices N da Lei das Potências e diferentes relações a/h . Os resultados são comparados com os encontrados em Bateni *et al.* (2013), mostrando uma boa concordância. Destacando que para as estruturas de $SUS304 - Si_3N_4$, os resultados ficaram bem mais próximos da literatura que para as estruturas de $Al - Al_2O_3$, isso ocorre devido às propriedades dos primeiros não serem muito discrepantes entre si, como pode ser observado na Tabela 12.

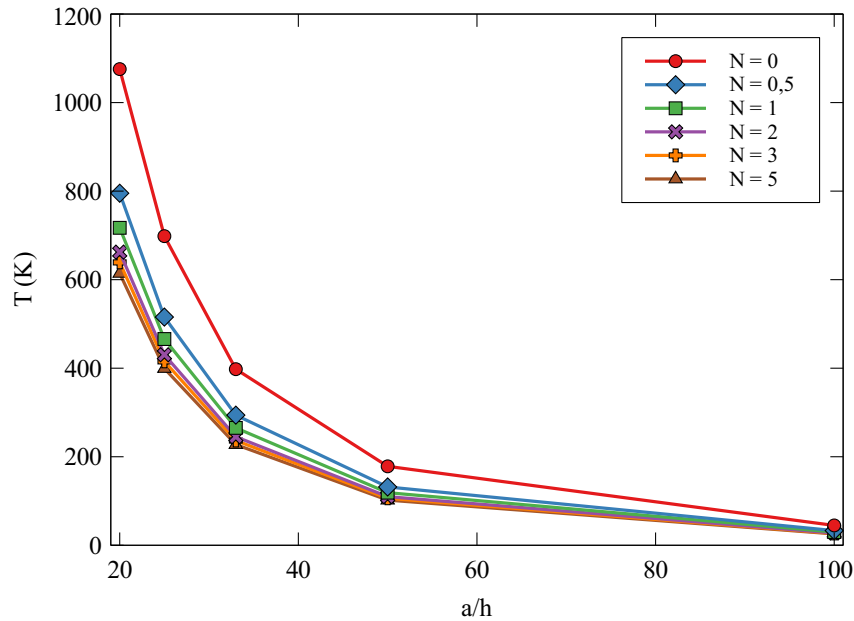
Tabela 13 – Temperatura crítica (K) de uma placa quadrada engastada de MGF ($SUS304 - Si_3N_4$) sujeita a uma variação uniforme de temperatura.

a/h	Fonte	$N = 0$	$N = 0,5$	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 5$
100	Presente	45,527	33,638	30,352	28,063	27,101	26,060
	Bateni <i>et al.</i> (2013)	45,528	33,501	30,104	27,842	26,916	25,940
50	Presente	181,158	133,856	120,776	111,650	107,812	103,667
	Bateni <i>et al.</i> (2013)	181,324	133,443	120,047	110,870	107,171	103,274
33	Presente	404,189	298,698	269,472	249,048	240,452	231,184
	Bateni <i>et al.</i> (2013)	405,053	298,157	268,198	247,618	239,304	230,567
25	Presente	710,279	524,999	473,556	437,512	422,328	405,993
	Bateni <i>et al.</i> (2013)	712,935	524,942	472,128	435,708	420,956	405,498
20	Presente	1093,699	808,585	729,21	673,421	649,887	624,642
	Bateni <i>et al.</i> (2013)	1099,904	788,574	728,532	671,962	648,972	624,970

Fonte: elaborado pelo autor.

A Figura 57 apresenta a variação da temperatura crítica de flambagem para diferentes índices N à medida que a relação a/h aumenta. Como esperado, observa-se que a temperatura crítica de flambagem diminui à medida que a relação a/h aumenta. Além disso, a medida que a proporção do metal (Si_3N_4) aumenta as temperaturas de flambagem vão diminuindo.

Figura 57 – Temperatura de flambagem de placas engastadas (*SUS304 - Si₃N₄*) para diferentes *N*.



Fonte: elaborado pelo autor.

Os resultados dos traçados do caminho de equilíbrio de placas engastadas sob carregamento térmico foram comparados com os resultados obtidos nos trabalhos de Trabelsi *et al.* (2018) e Silva (2020). Os materiais utilizados nesse estudo foram o Níquel (*Ni*) e a Alumina (*Al₂O₃*), cujas propriedades são as mesmas encontradas em Trabelsi *et al.* (2018) e mostradas na Tabela 14. Ressalta-se que as propriedades desses materiais são consideradas como independentes em relação a temperatura.

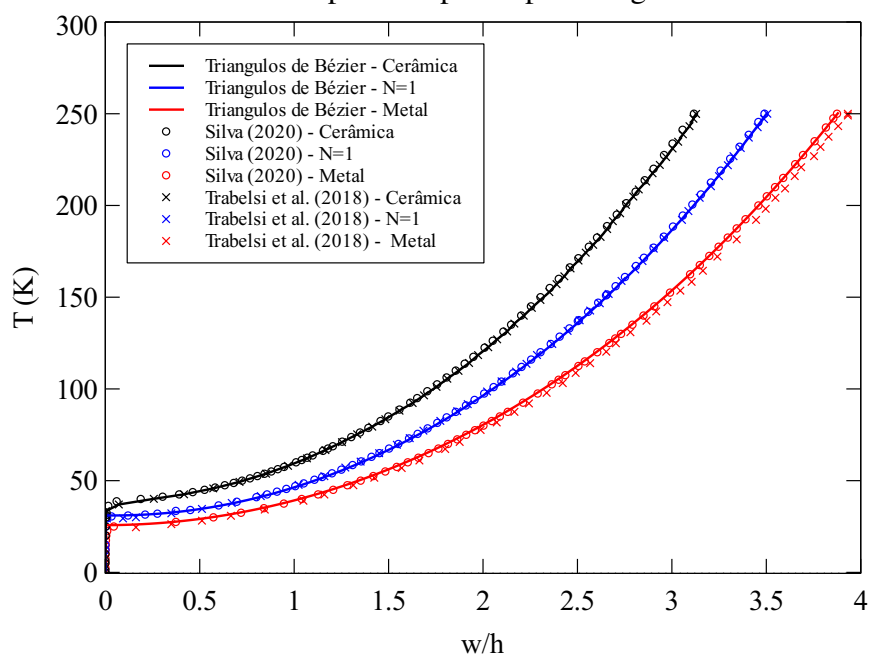
Tabela 14 – Propriedades do *Ni* e do *Al₂O₃*.

Propriedades	<i>Ni</i>	<i>Al₂O₃</i>
Modulo de Elasticidade (GPa)	199,5	393
Coefficiente de Poisson	0,30	0,25
Coefficiente de expansão térmica ($K \times 10^{-6}$)	13,3	8,8

Fonte: elaborado pelo autor.

A Figura 58 apresenta os resultados do caminho de equilíbrio para aumento uniforme de temperatura para a placa engastada, considerando a relação a/h igual a 100. Pode-se perceber que a mudança na configuração de equilíbrio ocorre por bifurcação. Nota-se que a placa de MGF apresenta maiores deslocamentos do que a placa composta totalmente por cerâmica, entretanto apresenta deslocamentos menores do que a placa puramente metálica. A carga crítica decresce à medida que o material diminui a porcentagem de cerâmica em sua constituição.

Figura 58 – Aumento uniforme de temperatura para a placa engastada.

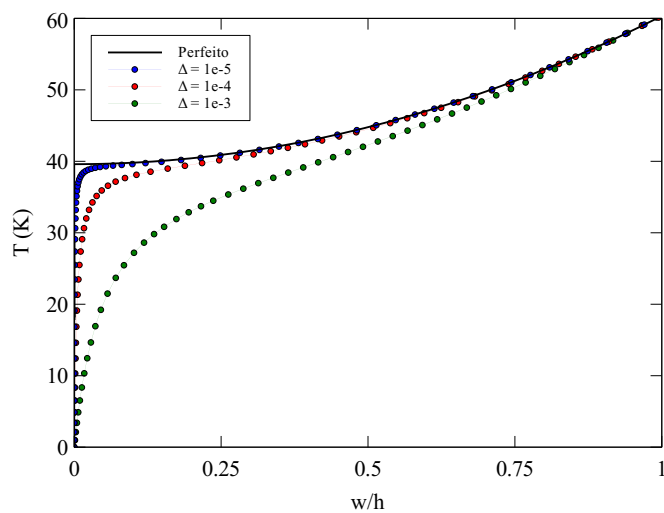


Fonte: elaborado pelo autor.

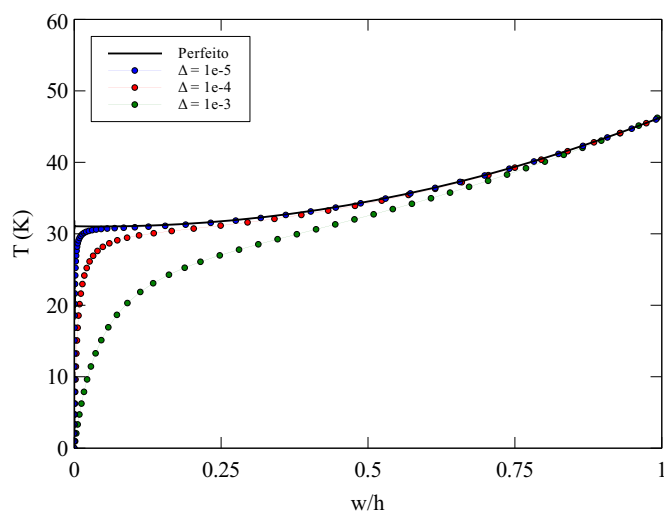
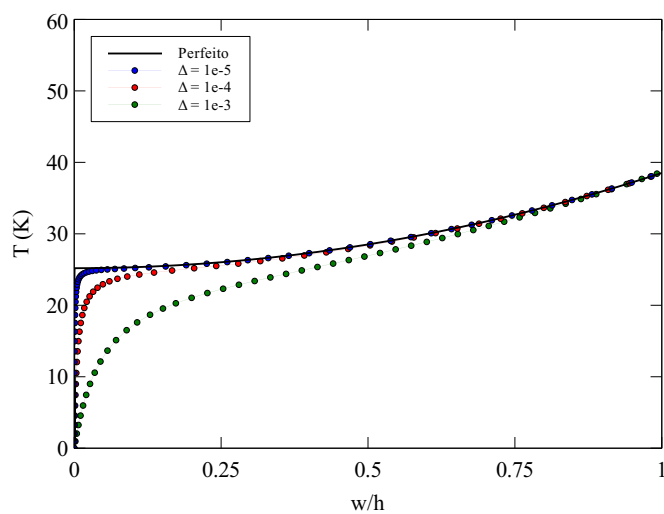
Foi analisada a sensibilidade à imperfeição da placa engastada. A geometria da estrutura imperfeita foi modelada conforme a Equação (5.9), utilizando apenas o primeiro modo de flambagem. Foram consideradas amplitudes iguais a 0, 1%, 1% e 10% da espessura h .

A Figura 59 mostra o efeito de diferentes amplitudes de imperfeição na placa engastada de MGF ($Ni - Al_2O_3$). As curvas mostram um comportamento estável sem a presença de bifurcação nas estruturas imperfeitas. Verifica-se ainda que o aumento da imperfeição geométrica acarreta no aumento dos deslocamentos transversais da placa para o mesmo nível de temperatura.

Figura 59 – Caminhos de equilíbrio de placas imperfeitas.



(a) Cerâmica

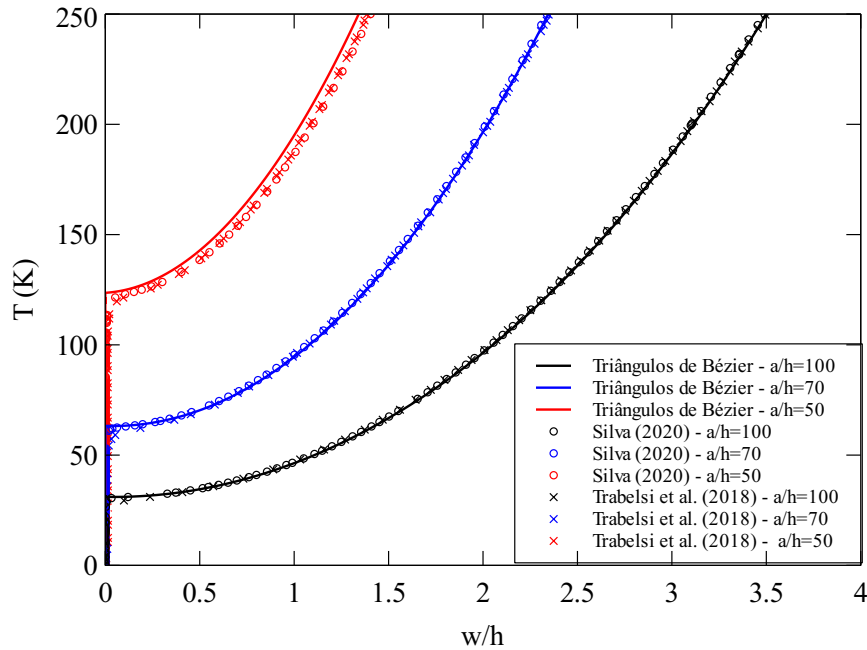
(b) MGF ($N = 1$)

(c) Metal

Fonte: elaborado pelo autor.

A Figura 60 apresenta os caminhos pós-crítico para diferentes relações de a/h , com $N = 1$. Nota-se uma boa concordância com os resultados encontrados na literatura. Conclui-se dessa figura que quando a relação a/h aumenta, ocorre uma diminuição da temperatura crítica, mas o comportamento não é alterado, permanecendo estável.

Figura 60 – Aumento uniforme de temperatura para diferentes relações a/h .



Fonte: elaborado pelo autor.

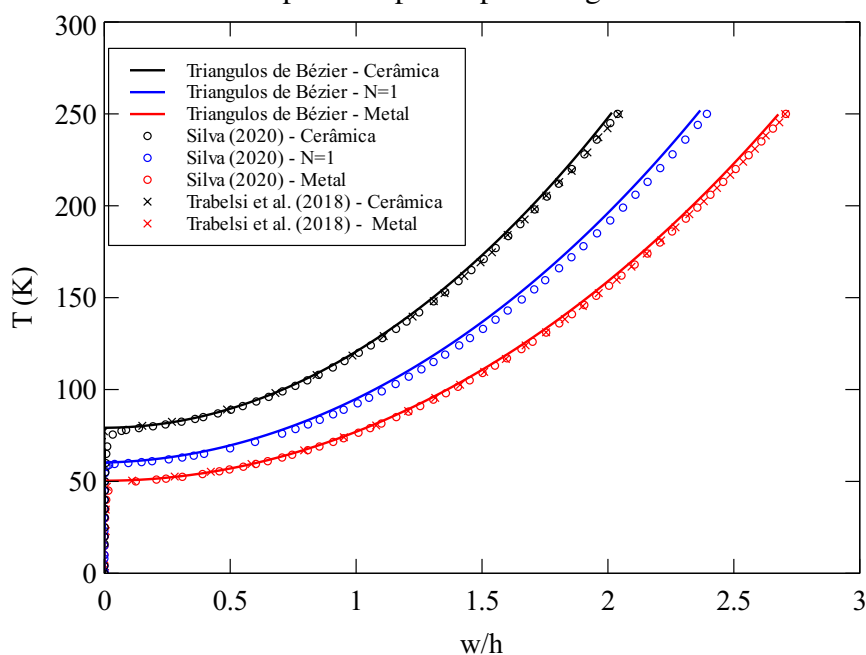
Também foi traçado o caminho de equilíbrio considerando o aumento linear de temperatura, similar ao realizado em Trabelsi *et al.* (2018) e Silva (2020). O campo de temperatura ao longo da espessura é dado por:

$$T = T_{ref} + \Delta T = T_{ref} + T_{\lambda} \left(\frac{z}{h} \right) \quad (5.12)$$

onde T_{λ} corresponde a um coeficiente de aumento da temperatura.

A Figura 61 apresenta os resultados para o aumento linear de temperatura. Percebe-se que os resultados apresentam boa concordância com a literatura. Observou-se também que as temperaturas críticas, considerando diferentes frações de volume, são maiores no aumento linear que as do aumento uniforme de temperatura.

Figura 61 – Aumento linear de temperatura para a placa engastada.

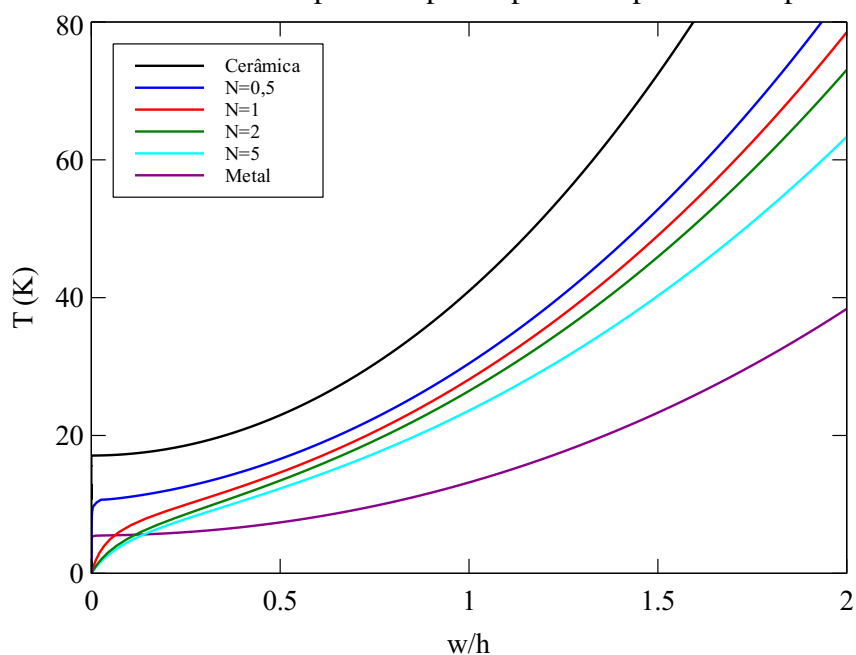


Fonte: elaborado pelo autor.

Também foi estudado o caminho pós-crítico da placa simplesmente apoiada SS2 ($w = \theta_x = 0$ para $x = 0, a$; e $w = \theta_y = 0$ para $y = 0, a$). Os materiais utilizados foram a alumina e o alumínio, cujas propriedades são mostradas na Tabela 9. Ressalta-se que neste caso considerou-se que as propriedades não variam com a temperatura. A placa apresenta índice de esbeltez (a/h) igual a 100.

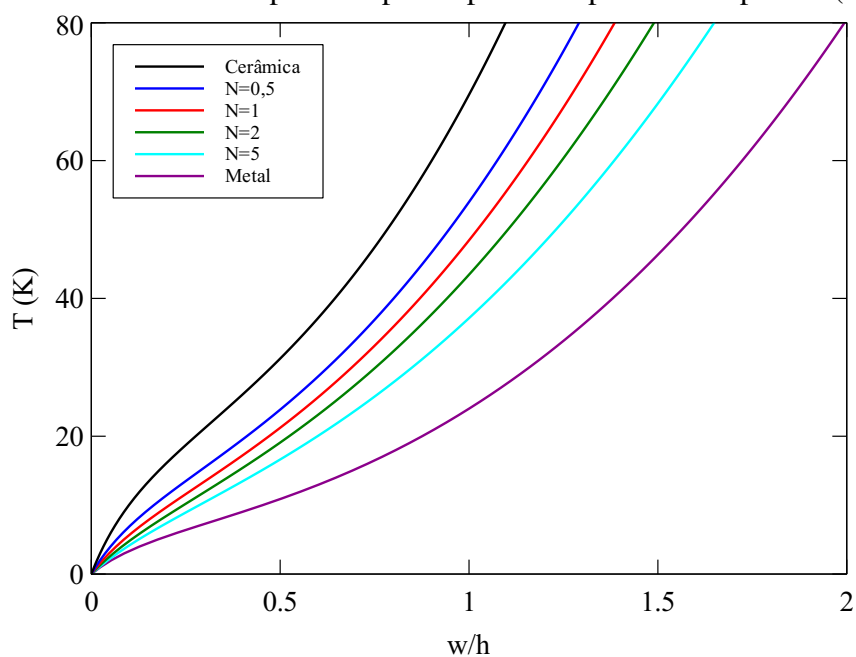
As Figuras 62 e 63 apresentam os caminhos de equilíbrio para o nó central da placa sujeita a uma variação uniforme e linear de temperatura. Na Figura 62, nota-se que as placas homogêneas (cerâmica e metal) apresentam caminhos de equilíbrio com bifurcação, enquanto nos MGF esse fenômeno não é observado. Já na Figura 63, com o aumento linear da temperatura, também não há a bifurcação. Além disso, como esperado, nas duas situações de variação de temperatura, a curva dos materiais com gradação funcional estão entre as curvas do material cerâmico e metálico.

Figura 62 – Aumento uniforme de temperatura para a placa simplesmente apoiada (SS2).



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 63 – Aumento linear de temperatura para a placa simplesmente apoiada (SS2).



Fonte: elaborado pelo autor.

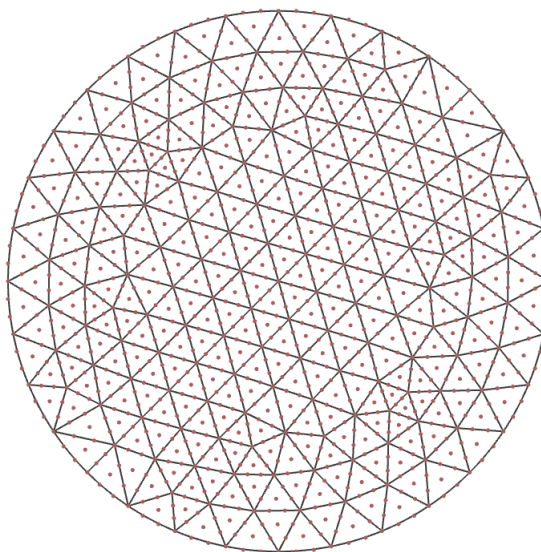
5.2.4 Flambagem térmica de placas circulares

Este exemplo trata da determinação da temperatura crítica de flambagem e o traçado do caminho de equilíbrio de uma placa circular engastada ($w = \theta_x = \theta_y = 0$) sujeita a uma

variação uniforme de temperatura. As placas analisadas nessa seção têm raio R e espessura h . Neste estudo foram considerados dois compósitos diferentes, $Al - Al_2O_3$ e $SUS304 - Si_3N_4$ cujas propriedades são as mesmas definidas nas Tabelas 9 e 11, respectivamente.

A malha utilizada é formada por 308 elementos triangulares de Bézier cúbicos e 1435 nós, como mostrado na Figura 64. A variação da fração de volume considerada é a mesma definida pela Equação (5.10). Os métodos de homogeneização utilizados foram a Lei das Misturas e o Mori-Tanaka.

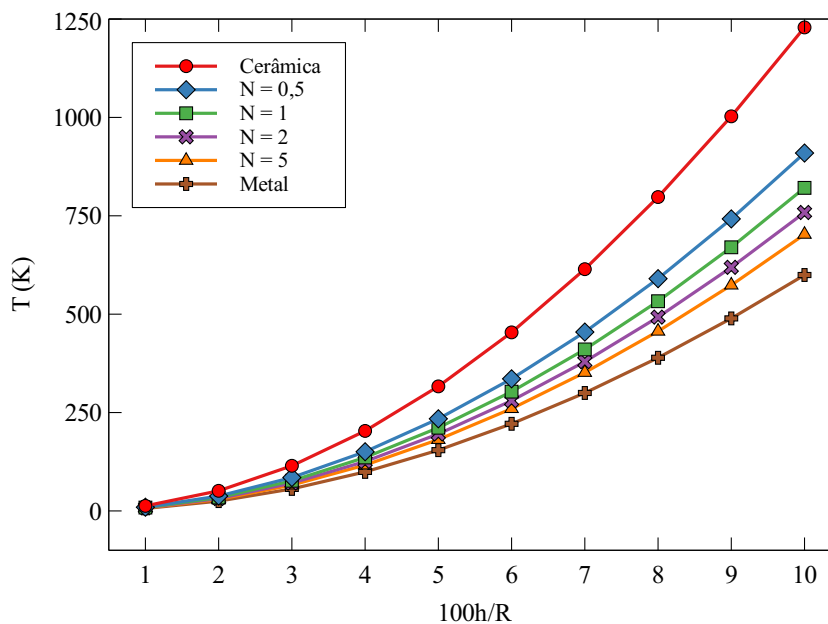
Figura 64 – Malha utilizada para a placa circular sujeita a uma variação uniforme de temperatura.



Fonte: elaborado pelo autor.

A Figura 65 descreve a variação de temperatura crítica de acordo com as diferentes relações de $100h/R$ e índice N da Lei da Potência. Como esperado, observa-se que a temperatura crítica de flambagem aumenta à medida que a espessura da placa aumenta. Cabe destacar também que à medida que o N aumenta, ou seja, aumenta-se a quantidade do metal na composição do material, as temperaturas de flambagem diminuem para as mesmas relações de $100h/R$.

Figura 65 – Temperatura de flambagem de placa circular engastada ($SUS304/Si_3N_4$) para diferentes N .

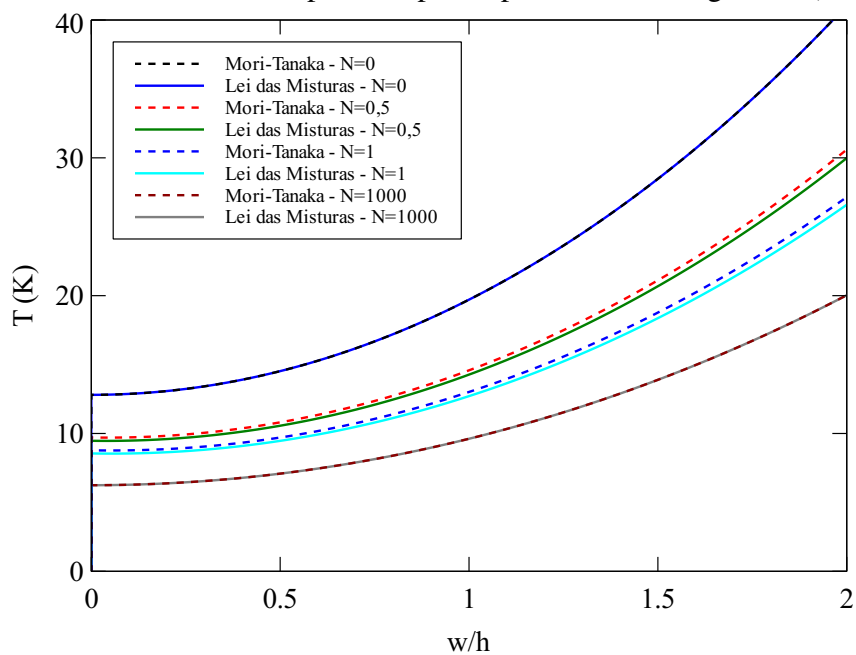


Fonte: elaborado pelo autor.

As Figuras 66 e 67 apresentam os caminhos pós-críticos para o nó central da placa circular, com $100h/R = 1$, sujeita a uma variação uniforme para os MGFs $SUS304 - Si_3N_4$ e $Al - Al_2O_3$, respectivamente. Nota-se que para todos os índices N , os caminhos de equilíbrio apresentam bifurcação. Similar ao que aconteceu na placa quadrada, a carga crítica decresce à medida que o material diminui a porcentagem de cerâmica em sua constituição.

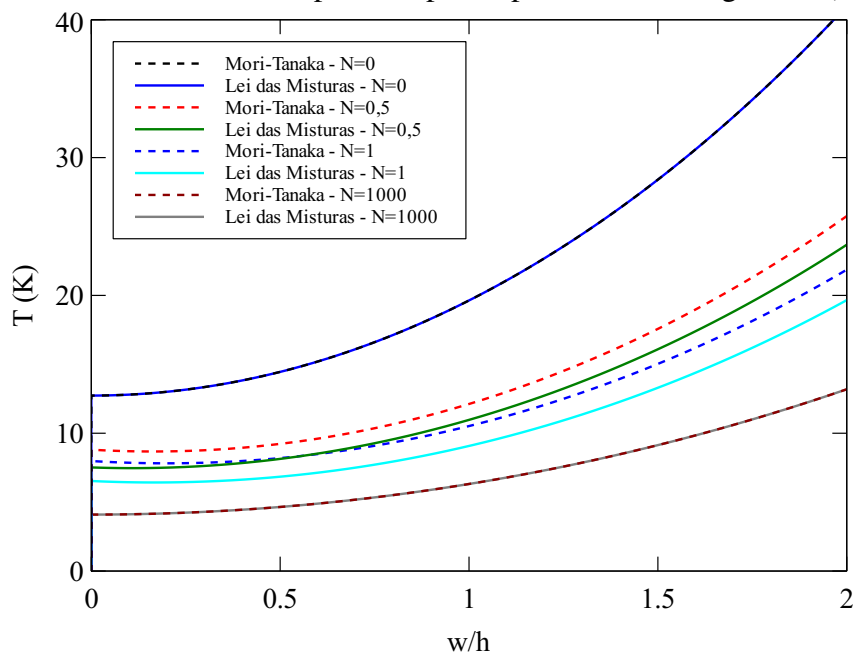
A Figura 68 mostra o primeiro modo de flambagem da placa circular ($SUS304 - Si_3N_4$) com $N = 1$ considerando um aumento uniforme de temperatura.

Figura 66 – Aumento uniforme de temperatura para a placa circular engastada ($SUS304/Si_3N_4$).



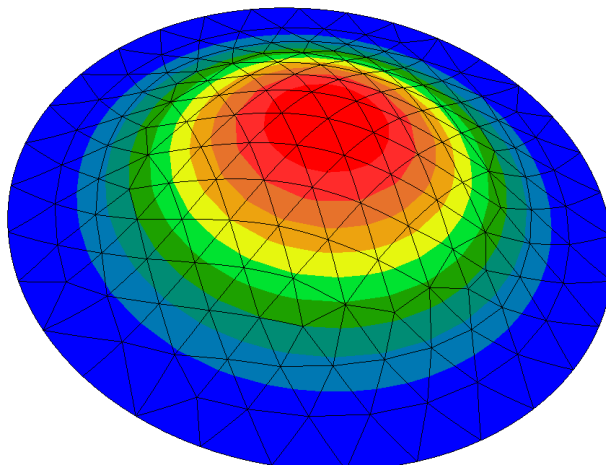
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 67 – Aumento uniforme de temperatura para a placa circular engastada (Al/Al_2O_3).



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 68 – 1º Modo de flambagem da placa circular ($N = 1$).

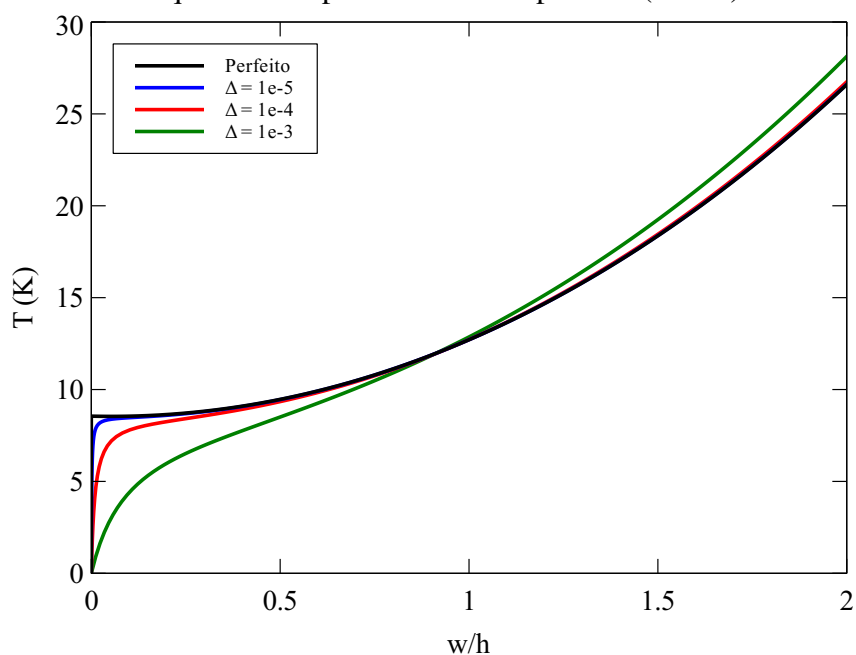


Fonte: elaborado pelo autor.

A partir das Figuras 66 e 67, pode-se verificar a diferença numérica quando se utiliza diferentes métodos de homogeneização. É notável que a diferença entre os métodos de homogeneização adotados é maior para o compósito $Al-Al_2O_3$ do que para o $SUS304-Si_3N_4$. Esse fato pode ser explicado por causa das diferenças entre as propriedades dos materiais de origem, onde se observa uma diferença relevante entre os modos de elasticidade no $Al-Al_2O_3$ maior que no $SUS304-Si_3N_4$. Desta forma, quanto maior as diferenças numéricas nas propriedades dos materiais que compõem o MGF, maior será a diferença nas propriedades efetivas obtidas pelos métodos da Lei das Misturas e de Mori-Tanaka.

Também foi analisada a sensibilidade às imperfeições geométricas da placa circular engastada de MGF ($SUS304-Si_3N_4$) com $N = 1$. A geometria da estrutura imperfeita foi modelada conforme a Equação (5.9), utilizando apenas o primeiro modo de flambagem. Foram consideradas amplitudes iguais a 0, 1%, 1% e 10% da espessura h . A Figura 69 mostra o efeito de diferentes amplitudes de imperfeição.

Figura 69 – Caminhos de equilíbrio de placa circular imperfeita ($N = 1$).

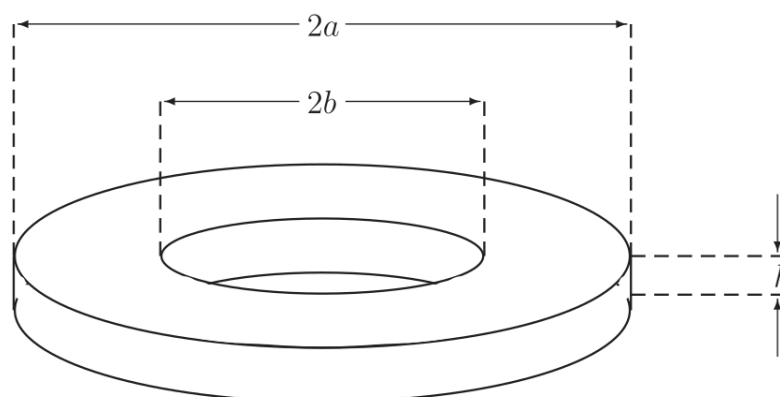


Fonte: elaborado pelo autor.

5.2.5 Flambagem térmica de placas anelares

Este exemplo trata da determinação da temperatura crítica de flambagem de uma placa anelar de MGF, engastada ($w = \theta_x = \theta_y = 0$) no raio externo a e raio interno b e com espessura h , sujeita a uma variação uniforme de temperatura, conforme ilustrada na Figura 70. Os materiais que compõem o MGF foram o $Al - Al_2O_3$ cujas propriedades são as mesmas definidas na Tabela 9. A relação entre os raios adotada nesse exemplo foi de $b/a = 0,5$.

Figura 70 – Geometria da placa anelar.

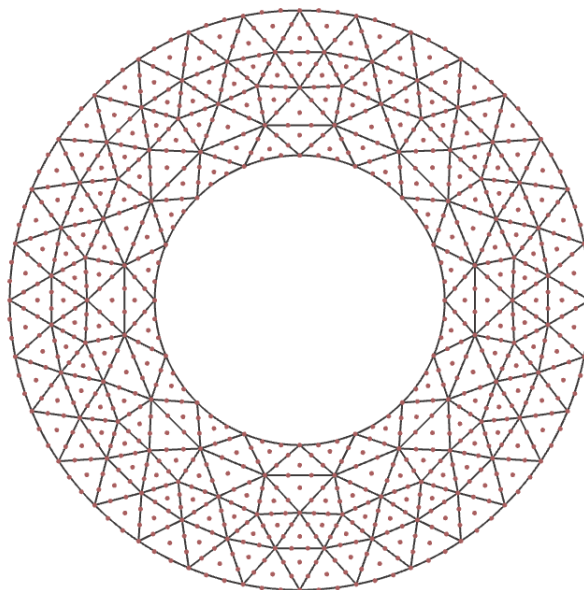


Fonte: elaborado pelo autor.

A malha utilizada foi composta por 208 elementos triangulares de Bézier cúbicos e 1008 nós, como mostrado na Figura 71. A variação da fração de volume considerada é a mesma

definida pela Equação (5.10). O método de homogeneização utilizado foi o da Lei das Misturas.

Figura 71 – Malha utilizada na placa anelar.



Fonte: elaborado pelo autor.

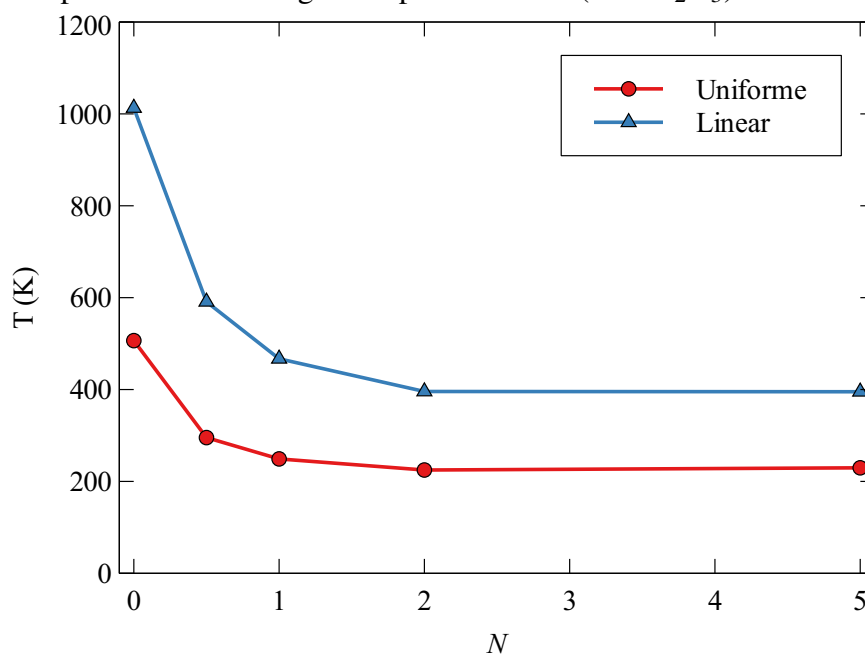
Inicialmente foi verificado a precisão do método para o exemplo, comparando os resultados encontrados da temperatura crítica de flambagem da placa anelar isotrópica ($N = 0$) para diferentes relações a/h com os encontrados em Kiani e Eslami (2013). A Tabela 15 apresenta os resultados encontrados e nela pode-se observar que os resultados apresentam boa concordância com erros inferiores a 2,0%.

Tabela 15 – Temperatura crítica (K) da placa anelar isotrópica ($N = 0$).

h/a	0,010	0,015	0,020
Presente	129,777	288,314	506,457
Kiani e Eslami (2013)	127,990	287,978	511,960

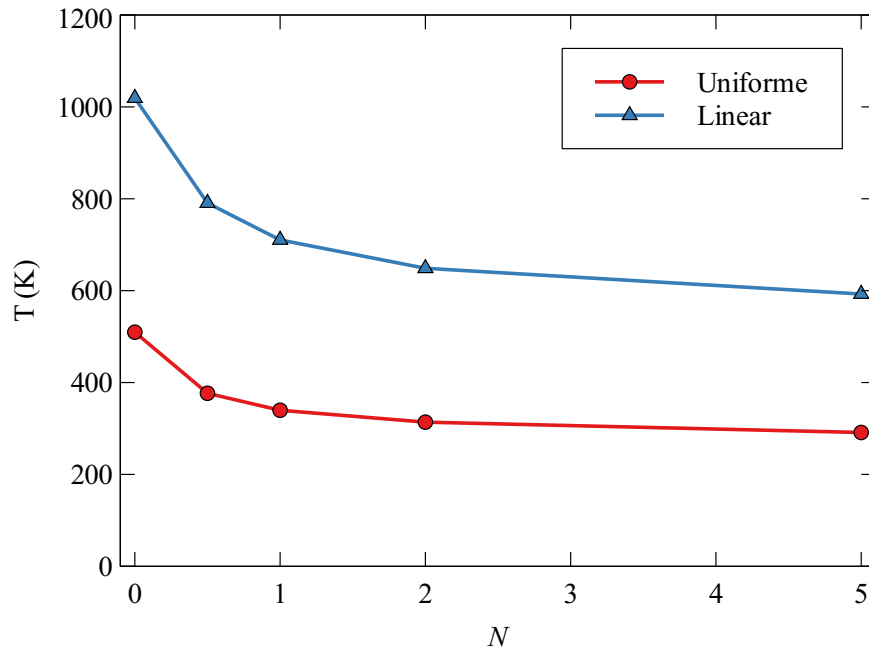
Fonte: elaborado pelo autor.

A Figura 72 mostra a influência do índice N da Lei das Potências nas temperaturas críticas de flambagem da placa anelar ($h/a = 0,02$) sujeita a um aumento uniforme e linear de temperatura. Pode-se observar que a temperatura crítica de flambagem decresce abruptamente para as pequenas frações de volume e tende a um determinado valor à medida que o N aumenta. As temperaturas críticas de flambagem são maiores para a variação linear de temperatura.

Figura 72 – Temperatura de flambagem da placa anelar - ($Al - Al_2O_3$).

Fonte: elaborado pelo autor.

Similar ao realizado anteriormente, também foi estudada a influência do índice N da Lei das Potências para a estrutura composta de $SUS304 - Si_3N_4$, cujas propriedades são definidas na Tabela 12. Os resultados são apresentados na Figura 73, e mostram que a temperatura crítica de flambagem para a estrutura de $SUS304 - Si_3N_4$ não decresce tão abruptamente quanto para a de $Al - Al_2O_3$ com a variação do N . Fato esperado, já que as propriedades do metal e da cerâmica são menos discrepantes no $SUS304 - Si_3N_4$.

Figura 73 – Temperatura de flambagem da placa anelar - (*SUS304* - Si_3N_4).

Fonte: elaborado pelo autor.

5.2.6 Painéis de MGF sujeitos à carga concentrada transversal

O presente exemplo trata de um painel cilíndrico perfeito de MGF submetido a uma carga concentrada transversal. Esse exemplo foi obtido dos trabalhos de Mars *et al.* (2017) e Auad (2019). Mars *et al.* (2017) analisou o comportamento não linear de cascas de MGF utilizando o MEF no software ABAQUS e sub-rotinas desenvolvidas pelos autores. Já Auad (2019) realizou análise similar a partir de uma formulação isogeométrica.

A geometria e as condições de contorno são apresentadas na Figura 74. A malha utilizada foi composta por 200 elementos triangulares de Bézier cúbicos e 961 nós, como mostrado na Figura 75. As propriedades constituintes são mostradas na Tabela 16 e a distribuição da fração de volume é dada por:

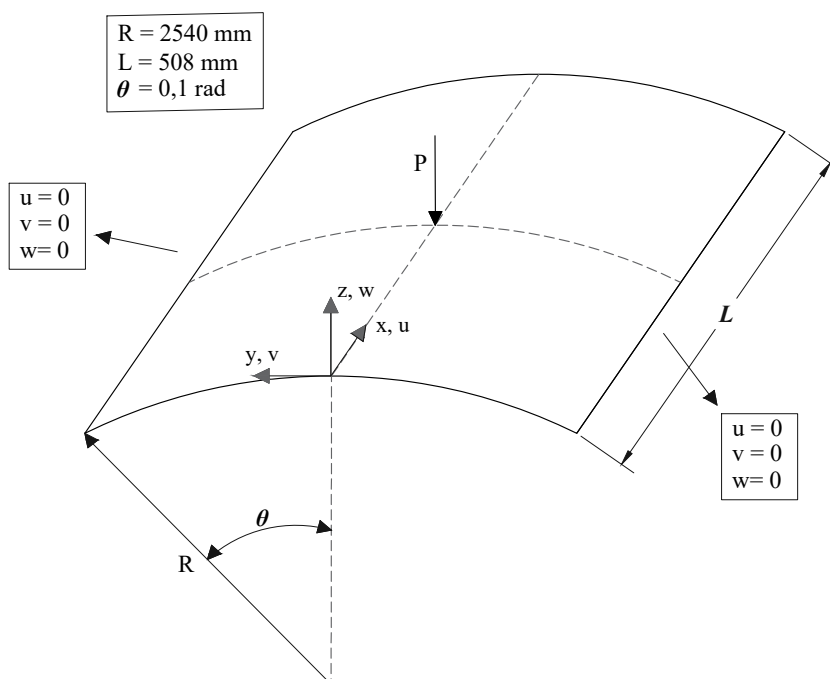
$$V_c(z) = \left[1 - a \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right) + b \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^2 \right]^N \quad (5.13)$$

Tabela 16 – Propriedades dos materiais.

E_m (GPa)	ν_m	E_c (GPa)	ν_c	a	b	c
70	0,3	168	0,3	1,0	0,5	2,0

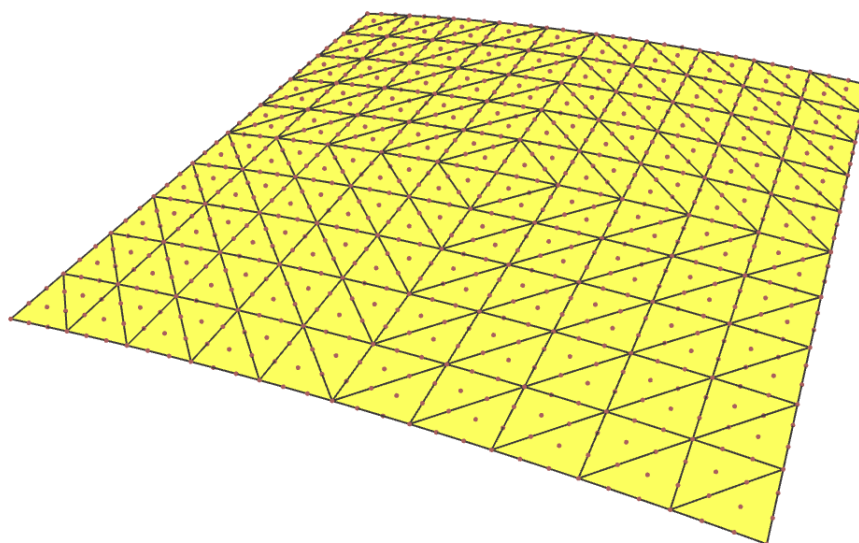
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 74 – Geometria e condições de contorno do painel cilíndrico.



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 75 – Malha utilizada no painel cilíndrico.



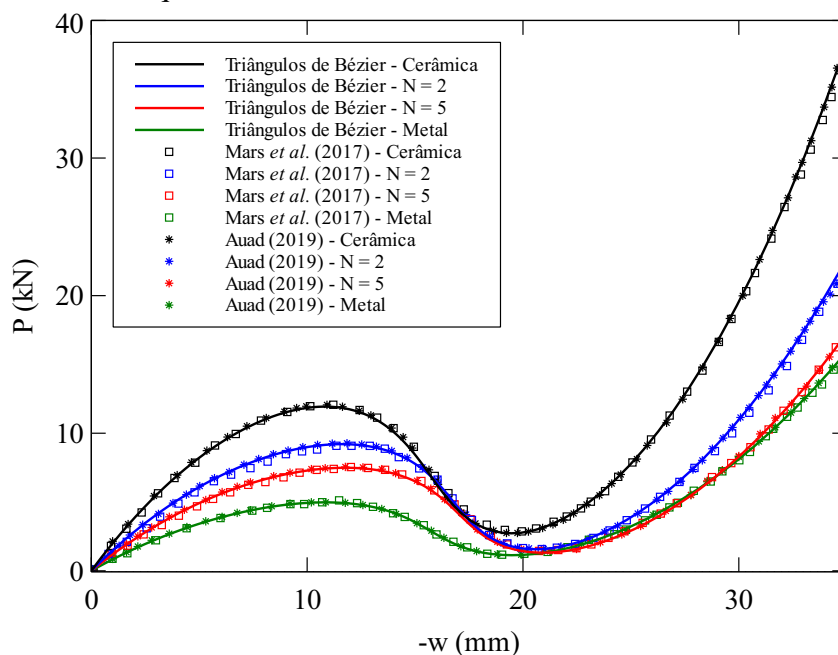
Fonte: elaborado pelo autor.

Foram consideradas duas espessuras distintas, sendo elas $h = 6,35 \text{ mm}$ e $h = 12,7 \text{ mm}$. Mars *et al.* (2017) realizou a modelagem da casca com 12,7 mm de espessura e Auad (2019) modelou a casca com 6,35 mm de espessura.

As Figuras 76 e 77 apresentam os resultados obtidos. Destacando que o método utilizado para o traçado dos caminhos de equilíbrio foi o Método do Comprimento de Arco Cilíndrico devido à presença de *snap-back* e *snap-through*. Observa-se que os valores obtidos

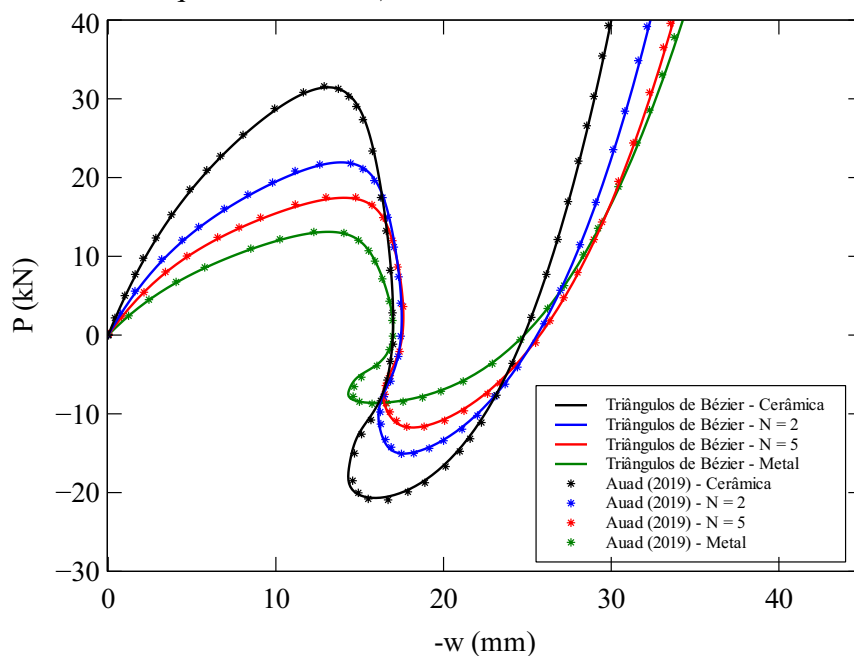
mostram uma ótima concordância com os obtidos em Mars *et al.* (2017) e Auad (2019).

Figura 76 – Caminho de equilíbrio - $h = 12.7$ mm.



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 77 – Caminho de equilíbrio - $h = 6,35$ mm.



Fonte: elaborado pelo autor.

Como esperado, a Figura 76 mostra que as curvas carga-deslocamento, espessura $h = 12.7$ mm, dos MGFs estão entre as curvas dos materiais constituídos apenas de cerâmica ou

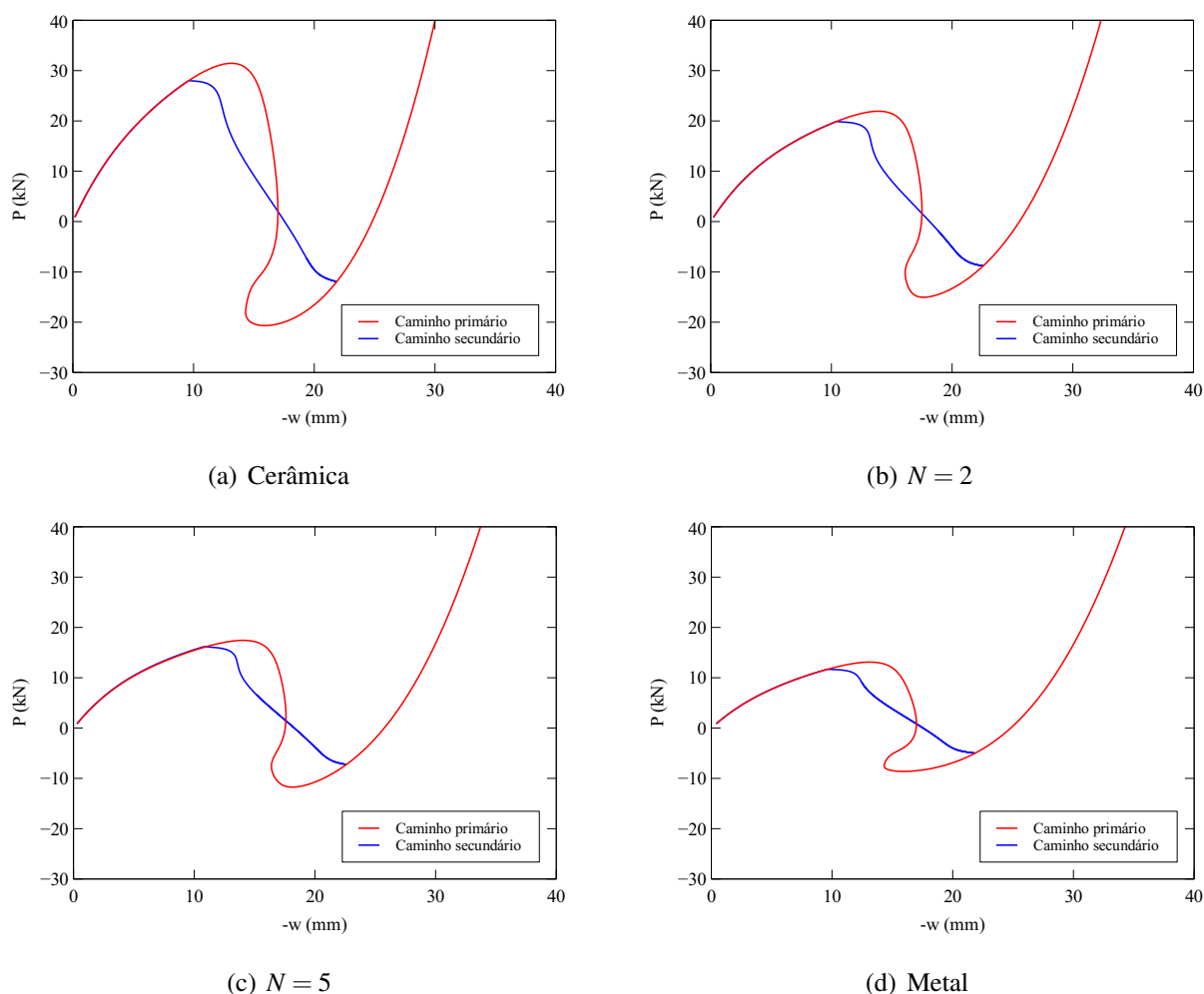
metal. Destacando também a presença de um *snap-through* em todas as curvas.

Já os resultados para a espessura $h = 6.35$ mm são mostrados na Figura 77. Percebe-se um traçado mais complexo que as cascas de $h = 12.7$ mm, com a presença de *snap-back*, além de *snap-through*.

Cabe destacar que encontrou-se uma bifurcação no caminho primário, que leva a um caminho secundário, na estrutura com a espessura $h = 6.35$ mm, para os diferentes índices N , similar ao encontrado em Auad (2019), como observado na Figura 78.

A diferença entre os valores da carga no ponto limite (caminho primário) e no ponto de bifurcação (caminho secundário) estão apresentados na Tabela 17, onde, em todos os casos, a carga de bifurcação inferior à carga de ponto limite. Nota-se que é contra a segurança analisar a estrutura apenas pelo seu caminho primário, pois a perda de capacidade de carga ocorre de maneira mais abrupta no caminho secundário.

Figura 78 – Caminhos primários e secundários das cascas MGF ($h = 6,35$ mm).



Fonte: elaborado pelo autor.

Tabela 17 – Diferenças entre as cargas dos pontos limites e as cargas de bifurcação.

	Cerâmica	$N = 2$	$N = 5$	Metal
Ponto Limite (kN)	31,459	21,929	17,431	13,108
Ponto de Bifurcação (kN)	28,013	19,881	16,173	11,672
Dif (%)	10,95	9,34	7,22	10,95

Fonte: elaborado pelo autor.

6 CONCLUSÃO

Este trabalho tratou do desenvolvimento e implementação de formulações para a consideração dos efeitos térmicos na análise não linear de placas e cascas abatidas de material com gradação funcional baseadas na Análise Isogeométrica com o uso de elementos triangulares de Bézier. Foram adotadas as teorias de Reissner-Mindlin e Marguerre, considerando a não linearidade geométrica.

Primeiramente, foi analisado o desempenho dos elementos triangulares de Bézier com integração completa (*full integration*) na análise de placas homogêneas de um *patch test* e vários exemplos numéricos de análise estática, vibração livre e flambagem. O *patch test* demonstrou que os triângulos de Bézier conseguem representar os estados de tensões constantes para diferentes graus ($p = 2, 3, 4$). Outro ponto analisado foi a questão do travamento (*shear locking*) para diferentes graus dos elementos em placas submetidas a carregamentos mecânicos, demonstrando que os elementos quadráticos sofrem um severo travamento à medida que a relação entre suas dimensões geométrica e a espessura aumenta, tornando inviável o seu uso prático. O travamento também se manifesta nos elementos cúbicos para estruturas extremamente esbeltas, fato que não impossibilita seu uso nas estruturas usuais, como as analisadas neste trabalho. Os elementos de quarta ordem ($p = 4$) não apresentaram travamento, mas devido a seu custo computacional mais elevado, preferiu-se utilizar os elementos cúbicos. Os resultados de vibração e flambagem demonstraram uma excelente concordância com os resultados encontrados na literatura.

A seguir, foram analisadas placas de diversas geometrias submetidas a carregamento térmico. Inicialmente foram determinadas as temperaturas críticas de flambagem de uma placa quadrada engastada, submetida a uma variação uniforme de temperatura, para diferentes expoentes N , índice da variação da fração de volume, apresentando uma boa concordância com a literatura. Destacando que quanto mais discrepantes forem as propriedades constituintes do MGF, entre si, maior a diferença nas temperaturas de flambagem à medida que o N aumenta. Isso se deve ao uso da teoria de Reissner-Mindlin, não tendo relação com o tipo de elemento utilizado. Como esperado, observou-se que a temperatura crítica de flambagem diminuiu à medida que a relação a/h aumentou. Também foram traçados o caminho pós-crítico da estrutura para diferentes relações a/h e expoente N . Todos os exemplos, com variação uniforme e linear de temperatura apresentaram flambagem por bifurcação no traçado do caminho de equilíbrio. Além disso, foi observada uma boa concordância com os resultados encontrados na literatura.

Também foi estudado o caminho de equilíbrio de placas simplesmente apoiadas (SS2). Foi observado uma flambagem por bifurcação apenas nos materiais homogêneos, com a placa constituída apenas por cerâmica ou metal, para o aumento uniforme de temperatura. Já para os exemplos com FGM composto por cerâmica e metal, não houve bifurcação. Para a variação linear de temperatura, as estruturas não apresentaram bifurcação, apresentando um comportamento não linear estável com deslocamentos crescendo com o aumento da temperatura.

Diferentes métodos de homogeneização foram avaliados. Observou-se que os resultados obtidos utilizando os métodos da Lei das Misturas e o de Mori-Tanaka podem ser bem diferentes. Essa diferença também depende da discrepância entre as propriedades dos materiais que constituem o FGM, pois quanto mais distintas foram as propriedades, mais distantes ficaram os resultados.

Por fim, foram realizadas análises em cascas de material com gradação funcional, cujos resultados mostraram ótima concordância com as referências da literatura. Além da determinação de bifurcações que levam a um caminho secundário, nas cascas mais finas ($h = 6.35$ mm), através da utilização de técnicas de traçado de caminho secundário (*branch-switching*) junto com o Método do Comprimento de Arco.

De maneira geral, observou-se que o uso dos triângulos racionais de Bézier na análise Isogeométrica permite a análise de modelos complexos por meio da geração automática da malha geometricamente exata sem a necessidade da interação do usuário, evitando subdividir o modelo em vários *patches*, como nos exemplos das placas com furos de diferentes geometrias, fato necessário nos elementos isogeométricos NURBS.

Os resultados obtidos nos exemplos de aplicação de cargas térmicas em placas de FGM mostraram que as implementações realizadas foram consistentes e que os triângulos racionais de Bézier são uma boa alternativa como elementos na Análise Isogeométrica para esses problemas de placas com geometria complexa, além de conseguir ótimos resultados sem a necessidade de malhas excessivamente refinadas.

6.1 Sugestões para trabalhos futuros

As seguintes sugestões podem ser exploradas em trabalhos futuros:

- a) Implementação no FAST do carregamento térmico obtido pela solução da equação da condução de calor;
- b) Consideração das propriedades dos materiais variáveis com a temperatura;

- c) Análises termomecânicas considerando o acoplamento entre os efeitos térmicos e mecânicos;
- d) Estudo de outros modelos micromecânicos capazes de representar as propriedades efetivas dos MGFs;
- e) Estudo do efeito do uso de diferentes fatores de correção (k_s) para os MGFs;
- f) Implementação de um melhor algoritmo de *branch-switching* de forma a traçar os caminhos secundários de forma mais efetiva e eficiente, possibilitando um melhor estudo do caminho pós-crítico e das condições de contorno sob o comportamento da estrutura.

REFERÊNCIAS

- ABBASSIAN, F.; DAWSWELL, D.; KNOWLES, N.; ABASSIAN, F. **Free vibration benchmarks**. [S.l.]: NAFEMS, 1987.
- ADAM, C.; HUGHES, T.; BOUABDALLAH, S.; ZARROUG, M.; MAITOURNAM, H. Selective and reduced numerical integrations for nurbs-based isogeometric analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 284, p. 732–761, 2015. ISSN 0045-7825. Isogeometric Analysis Special Issue. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782514004228>>.
- AIGNER, M.; HEINRICH, C.; JÜTTLER, B.; PILGERSTORFER, E.; SIMEON, B.; VUONG, A. V. Swept volume parameterization for Isogeometric Analysis. In: **Mathematics of Surfaces XIII**. Springer Berlin Heidelberg, 2009. p. 19–44. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-03596-8_2>.
- AKBARZADEH, A.; ABEDINI, A.; CHEN, Z. Effect of micromechanical models on structural responses of functionally graded plates. **Composite Structures**, Elsevier BV, v. 119, p. 598–609, jan. 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.09.031>>.
- AKHRAS, H. A.; ELGUEDJ, T.; GRAVOUIL, A.; ROCHETTE, M. Isogeometric analysis-suitable trivariate NURBS models from standard B-Rep models. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 307, p. 256–274, ago. 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2016.04.028>>.
- AUAD, S.; PRACIANO, J.; BARROSO, E.; JR., J. S.; JUNIOR, E. P. Isogeometric Analysis of FGM plates. **Materials Today: Proceedings**, Elsevier BV, v. 8, p. 738–746, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.matpr.2019.02.015>>.
- AUAD, S. P. **Análise isométrica de cascas cilíndricas de material com gradação funcional**. 2019. 92 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2019.
- BARNHILL, R. Surfaces in computer aided geometric design: a survey with new results. **Computer Aided Geometric Design**, Elsevier BV, v. 2, n. 1-3, p. 1–17, set. 1985. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0167-8396\(85\)90002-0](https://doi.org/10.1016/0167-8396(85)90002-0)>.
- BARROS, P. S. B. **Abordagem isométrica para o estudo da estabilidade de compósitos laminados considerando falha progressiva**. 2016. 141 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2016.
- BARROSO, E.; EVANS, J.; CAVALCANTE-NETO, J.; VIDAL, C.; PARENTE Jr, E. An algorithm for automatic discretization of isogeometric plane models. In: . [S.l.: s.n.], 2019.
- BARROSO, E. S. **Análise e otimização de estruturas laminadas utilizando a formulação isométrica**. 2015. 161 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015.

BARROSO, E. S.; NETO, J. B. C.; VIDAL, C. A.; PARENTE Jr, E. Análise isogeométrica utilizando triângulos de Bézier. In: **Proceedings of the XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**. [S.l.: s.n.], 2016.

BARROSO, E. S.; NETO, J. B. C.; VIDAL, C. A.; PARENTE Jr, E. Geração de malhas isogeométricas utilizando mapeamento transfinito. In: **Proceedings of the XXXVIII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**. ABMEC Brazilian Association of Computational Methods in Engineering, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.20906/cps/cilamce2017-0342>>.

BATANI, M.; KIANI, Y.; ESLAMI, M. A comprehensive study on stability of FGM plates. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 75, p. 134–144, 2013. ISSN 0020-7403. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020740313001690>>.

BATOZ, J.-L.; DHATT, G. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley, v. 14, n. 8, p. 1262–1267, 1979. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/nme.1620140811>>.

BAZILEVS, Y.; CALO, V.; COTTRELL, J.; HUGHES, T.; REALI, A.; SCOVAZZI, G. Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 197, n. 1-4, p. 173–201, dez. 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2007.07.016>>.

BAZILEVS, Y.; CALO, V.; COTTRELL, J.; EVANS, J.; HUGHES, T.; LIPTON, S.; SCOTT, M.; SEDERBERG, T. Isogeometric analysis using t-splines. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 199, n. 5-8, p. 229–263, jan. 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2009.02.036>>.

BENSON, D.; BAZILEVS, Y.; HSU, M.; HUGHES, T. Isogeometric shell analysis: The Reissner–Mindlin shell. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 199, n. 5-8, p. 276–289, jan. 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2009.05.011>>.

BENVENISTE, Y. Revisiting the generalized self-consistent scheme in composites: Clarification of some aspects and a new formulation. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, Elsevier BV, v. 56, n. 10, p. 2984–3002, out. 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jmps.2008.06.006>>.

BISCHOFF, M.; BLETZINGER, K.-U.; WALL, W.; RAMM, E. Models and Finite Elements for thin-walled structures. In: _____. [S.l.: s.n.], 2004. v. 2. ISBN 9780470091357.

BOGGARAPU, V.; GUJJALA, R.; OJHA, S.; ACHARYA, S.; Venkateswara Babu, P.; CHOWDARY, S.; Kumar Gara, D. State of the art in functionally graded materials. **Composite Structures**, v. 262, p. 113596, 2021. ISSN 0263-8223. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S026382232100057X>>.

Boley, B. A.; Weiner, J. H. **Theory of thermal stresses**. [S.l.]: Dover Publications, 1997.

BORDEN, M. J.; SCOTT, M. A.; EVANS, J. A.; HUGHES, T. J. R. Isogeometric finite element data structures based on Bézier extraction of NURBS. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley, v. 87, n. 1-5, p. 15–47, ago. 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/nme.2968>>.

BUFFA, A.; CHO, D.; SANGALLI, G. Linear independence of the T-spline blending functions associated with some particular t-meshes. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 199, n. 23-24, p. 1437–1445, abr. 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2009.12.004>>.

CALKIN, M. G. **Lagrangian and Hamiltonian Mechanics**. WORLD SCIENTIFIC, 1996. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/3111>>.

CASTELJAU, P. de. **Outils méthodes calcul**. [S.l.]: Technical report, A. Citroen, 1959.

CHAJES, A. **Principles of Structural Stability Theory**. [S.l.]: Prentice-Hall, 1974. (Prentice-Hall International Series in Management). ISBN 9780137099641.

CHAREONSUK, J.; VESSAKOSOL, P. Numerical solutions for functionally graded solids under thermal and mechanical loads using a high-order control volume finite element method. **Applied Thermal Engineering**, v. 31, n. 2, p. 213–227, 2011. ISSN 1359-4311. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359431110003789>>.

CHRISTENSEN, R.; LO, K. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, Elsevier BV, v. 27, n. 4, p. 315–330, ago. 1979. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0022-5096\(79\)90032-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(79)90032-2)>.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E.; WITT, R. J. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2002. v. 4nd ed.

COOX, L.; MAURIN, F.; GRECO, F.; DECKERS, E.; VANDEPITTE, D.; DESMET, W. A flexible approach for coupling NURBS patches in rotationless isogeometric analysis of Kirchhoff–Love shells. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 325, p. 505–531, out. 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.07.022>>.

COTTRELL, J. A.; HUGHES, T. J.; BAZILEVS, Y. **Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA**. [S.l.]: Wiley, 2009. ISBN 0470748737.

CRISFIELD, M. A FAST INCREMENTAL/ITERATIVE SOLUTION PROCEDURE THAT HANDLES “SNAP-THROUGH”. In: **Computational Methods in Nonlinear Structural and Solid Mechanics**. Elsevier, 1981. p. 55–62. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/b978-0-08-027299-3.50009-1>>.

CRISFIELD, M. A. **Non-linear finite element analysis of solids and structures**. [S.l.]: vol. 1. England: John Wiley and Sons, 1991.

Dantas Júnior, E. M. **Análise não linear de compósitos laminados utilizando o método dos elementos finitos**. 2014. 116 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014.

DENG, J.; CHEN, F.; LI, X.; HU, C.; TONG, W.; YANG, Z.; FENG, Y. Polynomial splines over hierarchical T-meshes. **Graphical Models**, Elsevier BV, v. 70, n. 4, p. 76–86, jul. 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.gmod.2008.03.001>>.

DIWAN, G. C.; MOHAMED, M. S. Iterative solution of helmholtz problem with high-order isogeometric analysis and finite element method at mid-range frequencies. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 363, p. 112855, maio 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.112855>>.

DO, D.; LEE, D.; LEE, J. Material optimization of functionally graded plates using deep neural network and modified symbiotic organisms search for eigenvalue problems. **Composites Part B: Engineering**, Elsevier BV, v. 159, p. 300–326, feb 2019a. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016%2Fj.compositesb.2018.09.087>>.

DO, V. N. V.; ONG, T. H.; LEE, C.-H. Isogeometric analysis for nonlinear buckling of fgm plates under various types of thermal gradients. **Thin-Walled Structures**, v. 137, p. 448–462, 2019b. ISSN 0263-8231. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263823118310851>>.

DOKKEN, T.; LYCHE, T.; PETTERSEN, K. F. Polynomial splines over locally refined box-partitions. **Computer Aided Geometric Design**, Elsevier BV, v. 30, n. 3, p. 331–356, mar. 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cagd.2012.12.005>>.

DÖRFEL, M. R.; JÜTTLER, B.; SIMEON, B. Adaptive Isogeometric Analysis by local h-refinement with T-splines. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 199, n. 5-8, p. 264–275, jan. 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2008.07.012>>.

DUNAVANT, D. A. High degree efficient symmetrical gaussian quadrature rules for the triangle. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 21, n. 6, p. 1129–1148, 1985. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.1620210612>>.

DYM, C. L.; SHAMES, I. H. **Solid Mechanics**. Springer New York, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6034-3>>.

ECHTER, R.; BISCHOFF, M. Numerical efficiency, locking and unlocking of nurbs finite elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 199, n. 5, p. 374–382, 2010. ISSN 0045-7825. Computational Geometry and Analysis. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782509001108>>.

ELGUEDJ, T.; BAZILEVS, Y.; CALO, V.; HUGHES, T. B^- and F^- projection methods for nearly incompressible linear and non-linear elasticity and plasticity using higher-order NURBS elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 197, n. 33-40, p. 2732–2762, jun. 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2008.01.012>>.

ENGVALL, L.; EVANS, J. A. Isogeometric triangular bernstein–bézier discretizations: Automatic mesh generation and geometrically exact finite element analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 304, p. 378–407, jun. 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2016.02.012>>.

ENGVALL, L.; EVANS, J. A. Isogeometric unstructured tetrahedral and mixed-element Bernstein–Bézier discretizations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 319, p. 83–123, jun. 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.02.017>>.

ESCOBAR, J.; CASCÓN, J.; RODRÍGUEZ, E.; MONTENEGRO, R. A new approach to solid modeling with trivariate T-splines based on mesh optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 200, n. 45-46, p. 3210–3222, out. 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2011.07.004>>.

FENG, Y.; PERIĆ, D.; OWEN, D. Determination of travel directions in path-following methods. **Mathematical and Computer Modelling**, Elsevier BV, v. 21, n. 7, p. 43–59, abr. 1995. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0895-7177\(95\)00030-6](https://doi.org/10.1016/0895-7177(95)00030-6)>.

FENG, Y.; PERIĆ, D.; OWEN, D. A new criterion for determination of initial loading parameter in arc-length methods. **Computers & Structures**, Elsevier BV, v. 58, n. 3, p. 479–485, fev. 1996. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0045-7949\(95\)00168-g](https://doi.org/10.1016/0045-7949(95)00168-g)>.

FORSEY, D. R.; BARTELS, R. H. Hierarchical B-spline refinement. **ACM SIGGRAPH Computer Graphics**, Association for Computing Machinery (ACM), v. 22, n. 4, p. 205–212, ago. 1988. Disponível em: <<https://doi.org/10.1145/378456.378512>>.

FREY, P.; GEORGE, P. **Mesh Generation: Application to Finite Elements: Second Edition**. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 2008.

GIANNELLI, C.; JÜTTLER, B.; KLEISS, S. K.; MANTZAFLARIS, A.; SIMEON, B.; ŠPEH, J. THB-splines: An effective mathematical technology for adaptive refinement in geometric design and Isogeometric Analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 299, p. 337–365, fev. 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2015.11.002>>.

GIANNELLI, C.; JÜTTLER, B.; SPELEERS, H. THB-splines: The truncated basis for hierarchical splines. **Computer Aided Geometric Design**, Elsevier BV, v. 29, n. 7, p. 485–498, out. 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cagd.2012.03.025>>.

GIANNELLI, C.; JÜTTLER, B.; SPELEERS, H. Strongly stable bases for adaptively refined multilevel spline spaces. **Advances in Computational Mathematics**, Springer Science and Business Media LLC, v. 40, n. 2, p. 459–490, set. 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10444-013-9315-2>>.

GRECO, L.; CUOMO, M.; CONTRAFATTO, L. A reconstructed local \bar{B} formulation for isogeometric Kirchhoff-Love shells. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 332, p. 462–487, abr. 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.01.005>>.

HASHIN, Z.; SHTRIKMAN, S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, Elsevier BV, v. 11, n. 2, p. 127–140, mar. 1963. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0022-5096\(63\)90060-7](https://doi.org/10.1016/0022-5096(63)90060-7)>.

HILL, R. A self-consistent mechanics of composite materials. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, Elsevier BV, v. 13, n. 4, p. 213–222, ago. 1965. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0022-5096\(65\)90010-4](https://doi.org/10.1016/0022-5096(65)90010-4)>.

HOSSEINI, S.; REMMERS, J. J.; VERHOOSSEL, C. V.; BORST, R. de. An isogeometric continuum shell element for non-linear analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 271, p. 1–22, abr. 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2013.11.023>>.

HUANG, J.-B.; CEN, S.; SHANG, Y.; LI, C.-F. A New Triangular Hybrid Displacement Function Element for Static and Free Vibration Analyses of Mindlin-Reissner Plate. **Latin American Journal of Solids and Structures**, scielo, v. 14, p. 765 – 804, 06 2017. ISSN 1679-7825. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1679-78252017000500765&nrm=iso>.

HUGHES, T.; COTTRELL, J.; BAZILEVS, Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 194, n. 39-41, p. 4135–4195, out. 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.10.008>>.

JAXON, N.; QIAN, X. Isogeometric analysis on triangulations. **Computer-Aided Design**, Elsevier BV, v. 46, p. 45–57, jan. 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cad.2013.08.017>>.

JHA, D.; KANT, T.; SINGH, R. A critical review of recent research on functionally graded plates. **Composite Structures**, v. 96, p. 833–849, 2013. ISSN 0263-8223. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822312004278>>.

JOHANNESSEN, K. A.; KVAMSDAL, T.; DOKKEN, T. Isogeometric analysis using LR B-splines. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 269, p. 471–514, fev. 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2013.09.014>>.

KAPOOR, H.; KAPANIA, R. Geometrically nonlinear NURBS isogeometric finite element analysis of laminated composite plates. **Composite Structures**, Elsevier BV, v. 94, n. 12, p. 3434–3447, dez. 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.04.028>>.

KIANI, Y.; BAGHERIZADEH, E.; ESLAMI, M. Thermal buckling of clamped thin rectangular fgm plates resting on pasternak elastic foundation (three approximate analytical solutions). **ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik**, v. 91, n. 7, p. 581–593, 2011. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/zamm.201000184>>.

KIANI, Y.; ESLAMI, M. An exact solution for thermal buckling of annular FGM plates on an elastic medium. **Composites Part B: Engineering**, v. 45, n. 1, p. 101–110, 2013. ISSN 1359-8368. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359836812005823>>.

KIENDL, J.; BAZILEVS, Y.; HSU, M.-C.; WÜCHNER, R.; BLETZINGER, K.-U. The bending strip method for isogeometric analysis of Kirchhoff–Love shell structures comprised of multiple patches. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 199, n. 37-40, p. 2403–2416, ago. 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.03.029>>.

KIENDL, J.; BLETZINGER, K.-U.; LINHARD, J.; WÜCHNER, R. Isogeometric shell analysis with Kirchhoff–Love elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 198, n. 49-52, p. 3902–3914, nov. 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2009.08.013>>.

KOIZUMI, M. Fgm activities in japan. **Composites Part B: Engineering**, v. 28, n. 1, p. 1–4, 1997. ISSN 1359-8368. Use of Composites Multi-Phased and Functionally Graded Materials. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359836896000169>>.

Leissa, A. **Vibration of Plates**. [S.l.]: NASA Report No. SP-160, 1969.

LI, X. Some properties for Analysis-Suitable T-splines. **Journal of Computational Mathematics**, Global Science Press, v. 33, n. 4, p. 428–442, jul. 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.4208/jcm.1508-m4493>>.

LI, X.; SCOTT, M. A. Analysis-suitable T-splines: Characterization, refineability, and approximation. **Mathematical Models and Methods in Applied Sciences**, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 24, n. 06, p. 1141–1164, mar. 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/s0218202513500796>>.

LIEU, Q. X.; LEE, D.; KANG, J.; LEE, J. Nurbs-based modeling and analysis for free vibration and buckling problems of in-plane bi-directional functionally graded plates. **Mechanics of Advanced Materials and Structures**, v. 26, p. 1–17, 02 2018.

LIEU, Q. X.; LEE, J. Modeling and optimization of functionally graded plates under thermo-mechanical load using isogeometric analysis and adaptive hybrid evolutionary firefly algorithm. **Composite Structures**, Elsevier BV, v. 179, p. 89–106, nov 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016%2Fj.compstruct.2017.07.016>>.

LIU, L.; ZHANG, Y.; HUGHES, T. J. R.; SCOTT, M. A.; SEDERBERG, T. W. Volumetric T-spline construction using boolean operations. **Engineering with Computers**, Springer Science and Business Media LLC, v. 30, n. 4, p. 425–439, nov. 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00366-013-0346-6>>.

LIU, N.; JEFFERS, A. E. A geometrically exact isogeometric kirchhoff plate: Feature-preserving automatic meshing and C1 rational triangular Bézier spline discretizations. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 115, n. 3, p. 395–409, 2018. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.5809>>.

LIU, N.; JEFFERS, A. E. Feature-preserving rational Bézier triangles for isogeometric analysis of higher-order gradient damage models. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 357, p. 112585, dez. 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.112585>>.

LORENTZ, G. G. **Bernstein polynomials**. [S.l.]: Chelsea Publishing Company, New York, N.Y, 1986.

MAIA, M. A. **Sequential approximate optimization of composite structures**. 2020. 122 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2020.

MAIA, M. A.; PARENTE, E.; MELO, A. M. C. de. Kriging-based optimization of functionally graded structures. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, jun. 2021. ISSN 1615-1488. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00158-021-02949-5>>.

MARS, J.; KOUBAA, S.; WALI, M.; DAMMAK, F. Numerical analysis of geometrically non-linear behavior of functionally graded shells. **Latin American Journal of Solids and Structures**, FapUNIFESP (SciELO), v. 14, n. 11, p. 1952–1978, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/1679-78253914>>.

MARTIN, T.; COHEN, E.; KIRBY, M. Volumetric parameterization and trivariate b-spline fitting using harmonic functions. In: **Proceedings of the 2008 ACM symposium on Solid and physical modeling - SPM '08**. ACM Press, 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1145/1364901.1364938>>.

MEDEIROS Jr., M. S.; PARENTE Jr., E.; MELO, A. M. C. de. Influence of the micromechanics models and volume fraction distribution on the overall behavior of SiC/al functionally graded pressurized cylinders. **Latin American Journal of Solids and Structures**, FapUNIFESP (SciELO), v. 16, n. 4, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/1679-78255433>>.

MEDEIROS, M. S.; PARENTE, E. Microfea 1.0 — a software package for Finite Element Analysis of functionally graded materials. **SoftwareX**, v. 11, p. 100481, 2020. ISSN 2352-7110. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2352711019302481>>.

MIYAMOTO, Y.; KAYSSER, W. A.; RABIN, B. H.; KAWASAKI, A.; FORD, R. G. **Functionally Graded Materials: Design, Processing and Applications**. [S.l.]: New York: Springer Science+Business Media, 1999.

MOITA, J. S.; ARAÚJO, A. L.; CORREIA, V. F.; Mota Soares, C. M.; HERSKOVITS, J. Buckling and nonlinear response of functionally graded plates under thermo-mechanical loading. **Composite Structures**, v. 202, p. 719–730, 2018. ISSN 0263-8223. Special issue dedicated to Ian Marshall. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822318300400>>.

NA, K.-S.; KIM, J.-H. Thermal postbuckling investigations of functionally graded plates using 3-d finite element method. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 42, n. 8, p. 749–756, 2006. ISSN 0168-874X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168874X05001587>>.

NETO, E. de S.; FENG, Y. On the determination of the path direction for arc-length methods in the presence of bifurcations and 'snap-backs'. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 179, n. 1-2, p. 81–89, ago. 1999. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/s0045-7825\(99\)00042-0](https://doi.org/10.1016/s0045-7825(99)00042-0)>.

NGUYEN, Q. H.; NGUYEN, L. B.; NGUYEN, H. B.; NGUYEN-XUAN, H. A three-variable high order shear deformation theory for isogeometric free vibration, buckling and instability analysis of FG porous plates reinforced by graphene platelets. **Composite Structures**, Elsevier BV, p. 112321, abr. 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112321>>.

NGUYEN-THANH, N.; KIENDL, J.; NGUYEN-XUAN, H.; WÜCHNER, R.; BLETZINGER, K.; BAZILEVS, Y.; RABCZUK, T. Rotation free isogeometric thin shell analysis using PHT-splines. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 200, n. 47-48, p. 3410–3424, nov. 2011b. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2011.08.014>>.

NGUYEN-THANH, N.; NGUYEN-XUAN, H.; BORDAS, S.; RABCZUK, T. Isogeometric analysis using polynomial splines over hierarchical t-meshes for two-dimensional elastic solids. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 200, n. 21-22, p. 1892–1908, maio 2011a. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2011.01.018>>.

NGUYEN-XUAN, H.; THAI, C. H.; NGUYEN-THOI, T. Isogeometric finite element analysis of composite sandwich plates using a higher order shear deformation theory. **Composites Part B: Engineering**, Elsevier BV, v. 55, p. 558–574, dez. 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.06.044>>.

NGUYEN-XUAN, H.; TRAN, L. V.; NGUYEN-THOI, T.; VU-DO, H. Analysis of functionally graded plates using an edge-based smoothed finite element method. **Composite Structures**, v. 93, n. 11, p. 3019–3039, 2011. ISSN 0263-8223. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822311001528>>.

NGUYEN-XUAN, H.; TRAN, L. V.; THAI, C. H.; KULASEGARAM, S.; BORDAS, S. Isogeometric analysis of functionally graded plates using a refined plate theory. **Composites Part B: Engineering**, v. 64, p. 222–234, 2014. ISSN 1359-8368. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359836814001449>>.

OVESY, H.; GHANNADPOUR, S.; NASSIRNIA, M. Post-buckling analysis of rectangular plates comprising functionally graded strips in thermal environments. **Computers & Structures**, v. 147, p. 209–215, 2015. ISSN 0045-7949. CIVIL-COMP. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045794914002119>>.

PARENTE Jr., E.; JUNIOR, A. S. de; SILVA, S. M. B. A. da. Tracing nonlinear equilibrium paths of structures subjected to thermal loading. **Computational Mechanics**, Springer Science and Business Media LLC, v. 38, n. 6, p. 505–520, nov. 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00466-005-0004-y>>.

PIEGL, L. A.; TILLER, W. **The Nurbs Book (Monographs in Visual Communication)**. [S.l.]: Springer, 1997. ISBN 3540615458.

PRACIANO, J. S. C. **Análise da estabilidade de estruturas laminadas e de materiais com gradação funcional utilizando uma formulação isométrica**. 2018. 101 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2018.

PRACIANO, J. S. C.; BARROS, P. S. B.; BARROSO, E. S.; PARENTE Jr, E. E.; HOLANDA, Á. S. de; SOUSA, J. B. M. An isogeometric formulation for stability analysis of laminated plates and shallow shells. **Thin-Walled Structures**, Elsevier BV, v. 143, p. 106224, out. 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.tws.2019.106224>>.

RAMM, E. Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. In: **Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics**. Springer Berlin Heidelberg, 1981. p. 63–89. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-81589-8_5>.

REDDY, J. N. **Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis**. 2nd. ed. [S.l.]: CRC Press, 2004.

REDDY, J. N.; CHIN, C. D. THERMOMECHANICAL ANALYSIS OF FUNCTIONALLY GRADED CYLINDERS AND PLATES. **Journal of Thermal Stresses**, Informa UK Limited, v. 21, n. 6, p. 593–626, set. 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/01495739808956165>>.

RIBEIRO, L. G.; MAIA, M. A.; Parente Jr., E.; MELO, A. M. C. de. Surrogate based optimization of functionally graded plates using radial basis functions. **Composite Structures**, v. 252, p. 112677, 2020. ISSN 0263-8223. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822320326039>>.

RIKS, E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier BV, v. 15, n. 7, p. 529–551, 1979. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(79\)90081-7](https://doi.org/10.1016/0020-7683(79)90081-7)>.

SCHILLINGER, D.; DEDÈ, L.; SCOTT, M. A.; EVANS, J. A.; BORDEN, M. J.; RANK, E.; HUGHES, T. J. An isogeometric design-through-analysis methodology based on adaptive

hierarchical refinement of NURBS, immersed boundary methods, and T-spline CAD surfaces. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 249-252, p. 116–150, dez. 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2012.03.017>>.

SCHULTE, J.; DITTMANN, M.; EUGSTER, S.; HESCH, S.; REINICKE, T.; DELL'ISOLA, F.; HESCH, C. Isogeometric analysis of fiber reinforced composites using Kirchhoff–Love shell elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 362, p. 112845, abr. 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.112845>>.

SCHWEIZERHOF, K.; WRIGGERS, P. Consistent linearization for path following methods in nonlinear fe analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 59, n. 3, p. 261–279, dez. 1986. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0045-7825\(86\)90001-0](https://doi.org/10.1016/0045-7825(86)90001-0)>.

SCOTT, M.; LI, X.; SEDERBERG, T.; HUGHES, T. Local refinement of analysis-suitable T-splines. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 213-216, p. 206–222, mar. 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2011.11.022>>.

SCOTT, M.; SIMPSON, R.; EVANS, J.; LIPTON, S.; BORDAS, S.; HUGHES, T.; SEDERBERG, T. Isogeometric boundary element analysis using unstructured t-splines. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 254, p. 197–221, fev. 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2012.11.001>>.

SEDERBERG, T. W. **Computer aided geometric design course notes**. [S.l.]: October, 2014.

SEDERBERG, T. W.; ZHENG, J.; BAKENOV, A.; NASRI, A. T-splines and t-NURCCs. **ACM Transactions on Graphics**, Association for Computing Machinery (ACM), v. 22, n. 3, p. 477, jul. 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1145/882262.882295>>.

SHEN, H.-S. Thermal postbuckling behavior of shear deformable FGM plates with temperature-dependent properties. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 49, n. 4, p. 466–478, 2007. ISSN 0020-7403. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020740306002086>>.

SHEN, H. S. **Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells**. [S.l.]: CRC Press, 2016.

SHI, P.; DONG, C.; SUN, F.; LIU, W.; HU, Q. A new higher order shear deformation theory for static, vibration and buckling responses of laminated plates with the isogeometric analysis. **Composite Structures**, Elsevier BV, v. 204, p. 342–358, nov. 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.07.080>>.

SHOJAEE, S.; VALIZADEH, N.; IZADPANA, E.; BUI, T.; VU, T.-V. Free vibration and buckling analysis of laminated composite plates using the NURBS-based isogeometric finite element method. **Composite Structures**, v. 94, n. 5, p. 1677–1693, 2012. ISSN 0263-8223. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S026382231200027X>>.

SILVA, D. R. R. e. **Análise termomecânica de materiais com gradação funcional**. 2020. 107 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2020.

SILVA, F. D. P.; BARROSO, E. S.; PARENTE Jr, E. Isogeometric analysis using bézier elements. In: **Proceedings of the XLI Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**. [S.l.: s.n.], 2020.

THAI, C. H.; FERREIRA, A.; BORDAS, S.; RABCZUK, T.; NGUYEN-XUAN, H. Isogeometric analysis of laminated composite and sandwich plates using a new inverse trigonometric shear deformation theory. **European Journal of Mechanics - A/Solids**, Elsevier BV, v. 43, p. 89–108, jan. 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2013.09.001>>.

TRABELSI, S.; FRIKHA, A.; ZGHAL, S.; DAMMAK, F. Thermal post-buckling analysis of functionally graded material structures using a modified FSDT. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 144, p. 74–89, 2018. ISSN 0020-7403. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020740318307720>>.

TRAN, L. V.; KIM, S.-E. Static and free vibration analyses of multilayered plates by a higher-order shear and normal deformation theory and isogeometric analysis. **Thin-Walled Structures**, v. 130, p. 622–640, 2018. ISSN 0263-8231. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263823117314532>>.

TRAN, L. V.; PHUNG-VAN, P.; LEE, J.; WAHAB, M. A.; NGUYEN-XUAN, H. Isogeometric analysis for nonlinear thermomechanical stability of functionally graded plates. **Composite Structures**, v. 140, p. 655–667, 2016. ISSN 0263-8223. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822316000131>>.

UDUPA, G.; RAO, S. S.; GANGADHARAN, K. Functionally graded composite materials: An overview. **Procedia Materials Science**, Elsevier BV, v. 5, p. 1291–1299, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.mspro.2014.07.442>>.

VALIZADEH, N.; NATARAJAN, S.; GONZALEZ-ESTRADA, O. A.; RABCZUK, T.; BUI, T. Q.; BORDAS, S. P. Nurbs-based finite element analysis of functionally graded plates: Static bending, vibration, buckling and flutter. **Composite Structures**, v. 99, p. 309–326, 2013. ISSN 0263-8223. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822312005600>>.

VAZQUEZ, R.; BUFFA, A. Isogeometric Analysis for electromagnetic problems. **IEEE Transactions on Magnetics**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 46, n. 8, p. 3305–3308, ago. 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/tmag.2010.2044563>>.

VUONG, A.-V.; GIANNELLI, C.; JÜTTLER, B.; SIMEON, B. A hierarchical approach to adaptive local refinement in isogeometric analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 200, n. 49-52, p. 3554–3567, dez. 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2011.09.004>>.

WANG, Y.; WANG, Z.; XIA, Z.; POH, L. H. Structural design optimization using isogeometric analysis: A comprehensive review. **Computer Modeling in Engineering & Sciences**, Computers, Materials and Continua (Tech Science Press), v. 117, n. 3, p. 455–507, dez. 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.31614/cmescs.2018.04603>>.

WEMPNER, G. A. Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier BV, v. 7, n. 11, p. 1581–1599, nov. 1971. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(71\)90038-2](https://doi.org/10.1016/0020-7683(71)90038-2)>.

WRIGGERS, P.; SIMO, J. C. A general procedure for the direct computation of turning and bifurcation points. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley, v. 30, n. 1, p. 155–176, jul. 1990. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/nme.1620300110>>.

WRIGGERS, P.; WAGNER, W.; MIEHE, C. A quadratically convergent procedure for the calculation of stability points in finite element analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 70, n. 3, p. 329–347, 1988. ISSN 0045-7825. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045782588900242>>.

XIA, S.; QIAN, X. Isogeometric analysis with Bézier tetrahedra. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 316, p. 782–816, abr. 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2016.09.045>>.

XIA, S.; WANG, X.; QIAN, X. Continuity and convergence in rational triangular Bézier spline based isogeometric analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 297, p. 292–324, dez. 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2015.09.001>>.

XU, G.; MOURRAIN, B.; DUVIGNEAU, R.; GALLIGO, A. Analysis-suitable volume parameterization of multi-block computational domain in isogeometric applications. **Computer-Aided Design**, Elsevier BV, v. 45, n. 2, p. 395–404, fev. 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cad.2012.10.022>>.

YANG, H.; DONG, C.; QIN, X.; WU, Y. Vibration and buckling analyses of FGM plates with multiple internal defects using XIGA-PHT and fcm under thermal and mechanical loads. **Applied Mathematical Modelling**, v. 78, 10 2019.

YIN, S.; HALE, J. S.; YU, T.; BUI, T. Q.; BORDAS, S. P. Isogeometric locking-free plate element: A simple first order shear deformation theory for functionally graded plates. **Composite Structures**, v. 118, p. 121–138, 2014. ISSN 0263-8223. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822314003511>>.

YIN, S.; YU, T.; BUI, T. Q.; XIA, S.; HIROSE, S. A cutout isogeometric analysis for thin laminated composite plates using level sets. **Composite Structures**, v. 127, p. 152–164, 2015. ISSN 0263-8223. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822315001889>>.

ZAREH, M.; QIAN, X. Kirchhoff–Love shell formulation based on triangular Isogeometric Analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier BV, v. 347, p. 853–873, abr. 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.12.034>>.

ZHANG, J.; LI, X. On degree elevation of t-splines. **Computer Aided Geometric Design**, Elsevier BV, v. 46, p. 16–29, ago. 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cagd.2016.05.010>>.

ZHAO, X.; LEE, Y.; LIEW, K. Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates. **Composite Structures**, v. 90, n. 2, p. 161–171, 2009. ISSN 0263-8223. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822309000725>>.

ZIENKIEWICZ, O. C.; XU, Z.; ZENG, L. F.; SAMUELSSON, A.; WIBERG, N.-E. Linked interpolation for reissner-mindlin plate elements: Part I — A simple quadrilateral. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 36, n. 18, p. 3043–3056, 1993. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.1620361802>>.