UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ANTÔNIO AGUIAR FREITAS

FLUXOS GEOMÉTRICOS POR HIPERSUPERFÍCIES PARALELAS

FORTALEZA
2021

ANTÔNIO AGUIAR FREITAS

FLUXOS GEOMÉTRICOS POR HIPERSUPERFÍCIES PARALELAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Matemática. Área de Concentração: Geometria.

Orientador: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros.

FORTALEZA

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Freitas, Antônio Aguiar.
Fluxos geométricos por hipersuperfícies paralelas / Antônio Aguiar Freitas. – 2021.
54 f.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática , Fortaleza, 2021.
Orientação: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros.

1. Fluxo por hipersuperfícies paralelas. 2. Produtos riemannianos. 3. Hipersuperfície isoparamétrica. 4. Hipersuperfície Umbílica. I. Título.

CDD 510

ANTÔNIO AGUIAR FREITAS

FLUXOS GEOMÉTRICOS POR HIPERSUPERFÍCIES PARALELAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Matemática. Área de Concentração: Geometria.

Aprovada em: 21/12/2021.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Emanuel Mendonça Viana
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marco Magliaro
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Paulo Alexandre Araújo Sousa
Universidade Federal do Piauí (UFPI)

Aos meus pais Antíldenis e Sónea.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço aos meus pais, Antíldenis e Sónea por todo o amor e apoio que foi dado por eles a mim, em especial à minha mãe que foi a responsável por me acompanhar durante toda a minha vida acadêmica desde o início dos estudos até o dia de hoje o qual concluo a minha tese, minhas irmãs Ianna e Ildenise pelo companheirismo de toda uma vida. Também agradeço aos meus familiares, em especial minha prima Isabel que me ajudou muito nos meus primeiros anos de estadia em Teresina.

Agradeço à minha esposa Maria Vieira de Brito, pela paciência pelas palavras de apoio nos momentos mais difíceis desta longa trajetória. Obrigado pelo amor, carinho e dedicação.

Agradeço a todo departamento de matemática da UFC, por ter me acolhido, possibilitando uma rápida adaptação à vida em Fortaleza, em especial agradeço ao meu orientador Abdênago Alves de Barros pela dedicação e paciência, e aos professores Alexandre, Caminha, Cleon, Diego, Ernani, Fábio, Fernanda, Luquésio, Marcos e Marcelo por contribuírem de forma direta na minha formação acadêmica.

Gostaria de agradecer a todos as amizades construídas ao longo da minha vida, desde os amigos de infância, aos que pude conhecer na UFPI e na UFC que me acolheram e me trataram como membro de suas famílias. Não citarei nomes para que eu não seja traído pela minha memória, mas gostaria de salientar que suas amizades foram vitais para que eu sempre seguisse em frente.

Agradeço aos professores Emanuel Viana, Ernani Ribeiro, Marco Magliario e Paulo Alexandre por comporem a banca e principalmente pelas valorosas sugestões dadas para melhoria do trabalho.

Agradecimentos também a Andrea Dantas e Jessyca Soares, secretárias da PGMAT, por toda competência e agilidade.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Por fim agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

“O importante não é voltar com a vitória mas sim lutar por aquilo que se tem amor.” (SEIXAS,1972)

RESUMO

Esta tese tem como objetivo estudar o fluxo por hipersuperfícies paralelas em produtos riemannianos e na esfera. Inicialmente, mostraremos que as hipersuperfícies isoparamétricas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{S}^1$ são aquelas que possuem as curvaturas principais constantes, mostraremos também que uma hipersuperfície de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$, $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}^1$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{S}^1$ é condição inicial para a solução do fluxo de curvatura média por hipersuperfícies paralelas se, e somente se, tal hipersuperfície for isoparamétrica. Além disso, mostraremos que uma hipersuperfície estritamente convexa mergulhada na esfera é condição inicial para a solução do fluxo do inverso da curvatura média por hipersuperfícies paralelas se, e somente se, tal hipersuperfície for umbílica.

Palavras-chave: fluxo por hipersuperfícies paralelas; produtos riemannianos; hipersuperfície isoparamétrica; esfera; hipersuperfície umbílica.

ABSTRACT

This thesis aims to study the flow through parallel hypersurfaces in Riemannian products and in the sphere. Initially, we will show that the isoparametric hypersurfaces of $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{S}^1$ that have the constant angle are those that have constant principal curvatures, we will also show that a hypersurface of $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$, $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}^1$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{S}^1$ is an initial condition for a solution of the mean curvature flow by parallel hypersurfaces if, and only if, the hypersurface is isoparametric. In addition, we will show that a strictly convex hypersurface embedded in the sphere is an initial condition for a solution of the inverse mean parallel flow if, and only if, the hypersurface is umbilical.

Keywords: flow by parallel hypersurfaces; riemannian products; isoparametric hypersurface; sphere; umbilical hypersurface.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Inicialmente, forneceremos um breve desenvolvimento histórico dos problemas estudados, bem como os resultados obtidos nos últimos anos. Além disso, descreveremos nossa contribuição nos problemas aqui apresentados.

Além das formas espaciais $\mathbb{Q}^{n+1}$, os produtos Riemannianos $\mathbb{Q}^n \times \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}^n \times \mathbb{S}^1$ são, em certo sentido, as variedades mais simples para o estudo de subvariedades imersas. Em particular, um caso especial deve ser considerado: a geometria das hipersuperfícies nestes espaços. Recentemente, Rosenberg, Meeks e Abresch (ABRESCH; ROSENBERG, 2004), (MEEKS; ROSENBERG, 2004) e (ROSENBERG, 2002) estenderam muitos resultados clássicos da teoria das superfícies no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ para esses espaços, especialmente os problemas que envolvem superfícies mínimas e superfícies de curvatura média constante. Inspirado nestes artigos, muitos geômetras começaram a desenvolver uma vasta literatura sobre esses ambientes. Dentre eles, destacamos os trabalhos de I. Onnis e S. Montaldo em (MONTALDO; ONNIS, 2007), (MONTALDO; ONNIS, 2004), (ONNIS, 2008) e B. Nelli em (NELLI, 2010), destacamos também o trabalho devido a Daniel em (DANIEL, 2009) onde ele provou versões do teorema de Bonnet em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$.

Para unificar a notação, denotaremos por $\mathbb{Q}_c^n$ a esfera $\mathbb{S}^n$, se $c = 1$ enquanto o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$, se $c = -1$.

Dada uma imersão $f : M^n \to \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R}$ de uma variedade Riemanniana n-dimensional M^n, podemos decompor o campo vetorial unitário $\partial/\partial t$ tangente ao segundo fator no seguinte sentido:

$$\partial/\partial t = df(T) + \nu\eta, \tag{1.1}$$

onde η é o campo vetorial unitário normal à M^n enquanto T é a componente do campo vetorial tangente a M^n e ν é a componente normal. A função ν é chamada de função ângulo, visto que $\nu = \langle \partial/\partial t, \eta \rangle = \cos(\theta)$, onde θ é o ângulo entre $\partial/\partial t$ e η. Em particular, identificando $df(T)$ com T deduzimos da relação (1.1) a seguinte identidade

$$\|T\|^2 + \nu^2 = 1. \tag{1.2}$$

Para uma hipersuperfície $f : M^n \to \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R}$ possuindo T como uma direção principal para a segunda forma fundamental, uma classificação local foi apresentada por Tojeiro em (TOJEIRO, 2010). Nesse mesmo trabalho o autor também descreveu o caso em que a hipersuperfície forma um ângulo constante com o campo vetorial $\partial/\partial t$, ou seja, quando θ é constante. Como podemos observar em (TOJEIRO, 2010, Proposition 4), hipersuperfícies em $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R}$ com fibrado normal plano em $\mathbb{E}^{n+2}$ é uma imersão isométrica, se e somente, se T é uma direção principal de f. Para hipersuperfícies em $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R}, n \geq 3$, com curvatura seccional constante, Tojeiro e Manfio classificaram localmente tais hipersuperfícies em (MANFIO; TOJEIRO, 2011).

De acordo com a definição original, a qual podemos encontrar em (CECIL; RYAN, 2015) uma família a 1-parâmetro M_t de hipersuperfícies em uma variedade N^{m+1} é chamada de *família isoparamétricas* se cada M_t for igual ao conjunto de nível $V^{-1}(t)$ para alguma função real não constante V definida em um subconjunto conexo aberto de N tal que o gradiente e o laplaciano de V satisfazem:

$$\|grad\, V\|^2 = \phi \circ V \quad , \quad \Delta V = \psi \circ V.$$

Para algumas funções suaves ϕ e ψ. A função V é chamada de *função isoparamétrica*. A partir dessa definição surgiu a definição de hipersuperfícies isoparamétricas. Nesse sentido, chamo atenção aos trabalhos de Cartan (CARTAN, 1939a), (CARTAN, 1938) e (CARTAN, 1939b), os quais foram um marco para o estudo das hipersuperfícies isoparamétricas, destaco neles os resultados de caracterização além dos excelentes resultados obtidos no caso especial de hipersuperfícies isoparamétricas imersas em formas espaciais. Um desses resultados se referem a uma hipersuperfície isoparamétrica $f: M^n \to \mathbb{Q}_c^{n+1}$ com g curvaturas principais distintas $\lambda_1, \ldots, \lambda_g$ com multiplicidades $m_1, \ldots, m_g$, respectivamente. Se $g > 1$, então Cartan deduziu que, para cada i, $1 \leq i \leq g$, ocorre a seguinte identidade:

$$\sum_{j \neq i} m_j \frac{c + \lambda_i \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} = 0. \tag{1.3}$$

Tal expressão é usada até hoje na busca de caracterizar por completo as hipersuperfícies isoparamétricas das formas especiais com g curvaturas principais constantes. Deve-se notar também que tais resultados permitiram Cartan concluir que as hipersuperfícies isoparamétricas das formas espaciais são as hipersuperfícies que possuem as curvaturas principais constantes. No entanto, isso não acontece em outros espaços ambientes, em geral. Por exemplo em (WANG, 1982) podem-se encontrar exemplos de hipersuperfícies isoparamétricas em espaços projetivos complexos que não possuem curvaturas principais constantes. Dirigimos o leitor aos excelentes trabalhos devido a Thorbergsson (THORBERGSSON, 2000) e Cecil (CECIL; RYAN, 2015) para um extensivo estudo de hipersuperfícies isoparamétricas.

Como mencionado no início da introdução, acreditamos que $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R}$ assim como $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{S}^1$ são os espaços mais simples para estudar extensões da teoria das hipersuperfícies nas formas espaciais. Nesse sentido, Chaves e Santos em (CHAVES; SANTOS, 2015) provaram que para hipersuperfícies em $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R}$ é verdadeira a equivalência entre as hipersuperfícies isoparamétricas e as que possuem as curvaturas principais constantes, no caso particular em que a hipersuperfície possui o campo suave T como uma direção principal. Para isso, as autoras consideraram a hipersuperfície $f : M^n \to \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R}$ com a hipótese que T é uma direção principal, construíram a família de hipersuperfícies paralelas f_t e conseguiram obter uma relação entre as curvaturas principais de f e f_t, e então procederam como Cartan em (CARTAN, 1939a).

Motivado por esses resultados, obteremos a mesma equivalência para o caso de hipersuperfícies de $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{S}^1$, onde o campo diferenciável T e a função ângulo ν são definidas novamente pela equação

$$\xi = df(T) + \nu\eta,$$

onde ξ denota o campo vetorial unitário tangente ao segundo fator $\mathbb{S}^1$. Observe que $\nu = \langle \xi, \eta \rangle = \cos(\alpha)$, onde α é o ângulo entre ξ e η.

Por outro lado, os fluxos geométricos têm sido considerados em várias situações e vêm produzindo uma extensa literatura com resultados mais destacados. Um dos fluxos distintos é o Fluxo de Curvatura Média $\mathscr{MCF}$ que é um fluxo tipo gradiente para o funcional volume.

Sob o $\mathscr{MCF}$, uma hipersuperfície fechada em $\mathbb{R}^{n+1}$ evolui localmente na direção em que o elemento de área diminui mais rapidamente e eventualmente se extingue. Ao longo do fluxo, singularidades podem ocorrer e seu estudo é bastante interessante. Há uma extensa literatura sobre o assunto, começando com os primeiros trabalhos em ciência dos materiais datados da década de 1920. Remetemos o leitor à excelente pesquisa de Colding, Minicozzi e Pedersen (COLDING *et al.*, 2015), bem como às referências nela contidas.

Em um trabalho mais recente, Tenenblat e Reis em (TENENBLAT; SANTOS, 2018) provaram que toda hipersuperfície imersa M^n de uma forma espacial, evolui pelo $\mathscr{MCF}$ por hipersuperfícies paralelas, se e somente se, M for uma hipersuperfície isoparamétrica. O $\mathscr{MCF}$ de tal hipersuperfície é obtido resolvendo uma equação diferencial ordinária.

Nesse sentido, iremos estender o trabalho de de Tenenblat e Reis em (TENENBLAT; SANTOS, 2018) para o caso de um hipersuperfície M^n imersas em $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{S}^1$ que possuem T como uma direção principal associada à segunda forma fundamental. Mais exatamente, iremos provar que uma hipersuperfície evolui pelo $\mathscr{MCF}$ por hipersuperfícies paralelas se, e somente se, M^n é uma hipersuperfície isoparamétrica.

Outro fluxo especial no estudo da geometria diferencial e análise geométrica é o fluxo pelo inverso da curvatura média ($\mathscr{IMCF}$) um fluxo geométrico envolvendo subvariedades de uma variedade Riemanniana ou pseudo-Riemanniana. Tal fluxo foi usado para obter versões das desigualdade de Penrose e desigualdades de Alexandrov-Fenchel, ferramentas muito úteis, e de interesse na relatividade geral, para mais detalhes, veja (ALEXANDROV, 1937), (GERHARDT, 2015), (MAKOWSKI; SCHEUER, 2016) e (WANG, 2011).

Usando esse fluxo especial, provaremos que cada hipersuperfície estritamente convexa M^n mergulhada em uma esfera $\mathbb{S}^{n+1}$, evolui pelo $\mathscr{IMCF}$ por hipersuperfícies paralelas, se, e somente se, M é uma hipersuperfície umbílica. O $\mathscr{IMCF}$ de tal hipersuperfície é obtido resolvendo uma equação diferencial ordinária. Resolvendo tal EDO obteremos o fluxo de todas as hipersuperfícies umbílicas da esfera. Em particular, apresentaremos soluções explícitas para o $\mathscr{IMCF}$ de hipersuperfícies umbílicas da esfera.

2 PRELIMINARES

O objetivo deste capítulo é apresentar o material básico necessário para a boa compreensão dos capítulos seguintes. Na seção 2.1 apresentaremos alguns fatos básicos de imersões e de variedades produtos que serão úteis para a compreensão dos resultados contidos nas seções 2.2, 2.3 e 3.1 os quais utilizaremos para obter os resultados principais do capítulo 3. Nas seções 2.2, 2.3 e 2.4 faremos a construção das hipersuperfícies paralelas em $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{S}^1$, e $\mathbb{S}^{n+1}$, relacionando os entes geométricos da família paralela com os da hipersuperfície inicial, tais relações serão essenciais na demonstração dos nossos resultados de caracterização via fluxo geométricos, objetos do capítulo 3.

2.1 Conceitos básicos de imersões e produtos riemannianos

Definição 2.1.1. *Uma hipersuperfície na variedade Riemanniana $\tilde{M}^{n+1}$ é uma imersão $f : M^n \to \tilde{M}^{n+1}$, com a métrica induzida*

$$g_x(v,w) = \langle df_x(V), df_x(V)\rangle_{f(x)},$$

para todo $x \in M$ e $v,w \in T_xM$. A forma quadrática definida por g é denominada primeira forma fundamental da hipersuperfície $f(M)$, em $x \in M^n$

Simplificando a notação, podemos identificar M com $f(M)$, e cada vetor $v \in T_xM, x \in M$ com $df_x(v) \in T_{f(M)}$

Uma hipersuperfície $f : M^n \to \tilde{M}^{n+1}$ é orientável, se existe um campo normal unitário $N : M^n \to (TM)^{\perp}$, onde $(TM)^{\perp}$ denota o espaço normal a $f(M)$ em $T\tilde{M}^{n+1}$. Neste caso, dizemos que $N(x)$ é a aplicação normal de Gauss de $f(M)$ em x.

Definição 2.1.2. *Seja $f : M^n \to \tilde{M}^{n+1}$, uma hipersuperfície orientada. A forma quadrática α_x sobre T_xM definida por*

$$\alpha_x(v,w) = -\langle dN_x(V), df_x(V)\rangle_{f(x)},$$

é denominada segunda forma fundamental da hipersuperfície $f(M)$, em $x \in M$.

Dado $x \in M$, uma vez que a segunda forma α_x é simétrica, existe uma base ortonormal de autovetores $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de T_xM com autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, isto é

$$g_x(e_i, e_j) = \delta_{ij} \qquad e \qquad \alpha_x(e_i, e_j) = \lambda_i \delta_{ij},$$

para todo $1 \leq i, j \leq n$. Neste caso, denominamos os vetores e_i direções principais e os $\lambda_i(x)$ curvaturas principais de $f(M)$ em x.

Definição 2.1.3. *Sejam $f : M^n \to \tilde{M}^{n+1}$, uma hipersuperfície orientada e $\lambda_1(x), ..., \lambda_n(x)$ as curvaturas principais de $f(M)$ em $x \in M$. A curvatura média de $f(M)$ é definida por*

$$H(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x).$$

Sejam (M_1^m, g_1), (M_2^n, g_2) variedades riemannianas. Considerando a variedade $M_1^m \times M_2^n$ munida com a métrica $g = g_1 + g_2$, tal variedade é denominada produto riemanniano. Com respeito ao produto riemanniano, temos os seguintes fatos:

i- Denotando por ∇^1, ∇^2 e ∇ as conexões riemannianas de M_1^m , M_2^n e $M_1^m \times M_2^n$ respectivamente, então para todo $X_1, Y_1 \in \mathscr{X}(M_1)$ e $X_2, Y_2 \in \mathscr{X}(M_2)$, tem-se que

$$\nabla_{X_1 + X_2}(Y_1 + Y_2) = \nabla^1_{X_1} Y_1 + \nabla^2_{X_2} Y_2.$$

ii- A curva diferenciável $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \colon [a,b] \to M_1 \times M_2$ é uma geodésica em $M_1^m \times M_2^n$, se e somente se, γ_1 e γ_2 for geodésicas em M_1^m e M_2^n, respectivamente.

iii- Para cada $i = 1, 2$ sejam $p_i \in M_i$ e seja $A_i(p_i) = \{v_i \in T_{p_i}M_i; 1 \in I_{(p_i, v_i)}\}$, donde $I_{(p_i, v_i)}$ é o intervalo maximal da geodésica $\gamma_i(., p_i, v_i)$ em M_i com condições iniciais $\gamma_i(0, p_i, v_i) = p_i$ e $\gamma_i'(0, p_i, v_i) = v_i$. Note que a aplicação exponencial $exp^i_{p_i}$ de (M_i, g_i) está definida em $A_i(p_i)$. Denotamos por $exp_{(p_1, p_2)}$ a exponencial em $M_1 \times M_2$ definida em $A(p_i, p_2) = \{(v_1, v_2) \in T_{p_1}M_1 \times T_{p_2}M_2; 1 \in I_{((p_1, p_2),(v_1, v_2))}\}$, onde $I_{((p_1, p_2),(v_1, v_2))}$ é o intervalo maximal de definição da geodésica

$$\gamma(., (p_1, p_2), (v_1, v_2)) = (\gamma_1(., p_1, v_1), \gamma_2(., p_2, v_2)).$$

Dessa forma, temos que $A_1(p_1) \times A_2(p_2) \subseteq A(p_i, p_2)$ e que

$$exp_{(p_1, p_2)} = (exp^1_{p_1}, exp^2_{p_2}) \qquad em \qquad A_1(p_1) \times A_2(p_2).$$

Denote por $\mathbb{Q}_c^n$ as formas espaciais $\mathbb{S}^n$ ou o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$, de acordo com $c = 1$ ou $c = -1$, respectivamente. Podemos considerar

$$\mathbb{Q}_c^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{E}^{n+1} : cx_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = c\},$$

com $x_1 > 0$ se $c = -1$,

$$\mathbb{E}^{n+1} = \{(x_1, \ldots, x_{n+2}, x_{n+3}) \in \mathbb{E}^{n+3} : x_{n+2} = x_{n+3} = 0\},$$

e

$$\mathbb{E}^{n+2} = \{(x_1, \ldots, x_{n+3}) \in \mathbb{E}^{n+3} : x_{n+3} = 0\},$$

denotamos por $\mathbb{E}^{n+3}$ o espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+3}$ ou o espaço lorentziano $\mathbb{L}^{n+3}$ de dimensão $(n+3)$, de acordo com $c = 1$ ou $c = -1$, respectivamente. Se $(x_1, ..., x_{n+3})$ são as coordenadas canônicas em $\mathbb{E}^{n+3}$, então a métrica plana $\langle , \rangle$ pode ser escrita nessas coordenadas como: $ds^2 = c\,dx_1^2 + \ldots + dx_{n+3}^2$.

Dada uma hipersuperfície $f \colon M^n \to \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R}$, sejam η o campo vetorial unitário normal a f e $\partial/\partial t$ o campo vetorial unitário tangente ao segundo fator $\mathbb{R}$. Podemos definir o campo vetorial suave $T \in TM^n$ e a função suave ν em M^n por:

$$\partial/\partial t = df(T) + \nu\eta. \tag{2.1}$$

Lembrando que $\nu = \cos(\theta)$, onde θ é o ângulo entre $\partial/\partial t$ e η. Desde que $\partial/\partial t$ é um campo vetorial unitário, temos

$$\nu^2 + \|T\|^2 = 1. \tag{2.2}$$

Sejam $\tilde{\nabla}$ a conexão riemanniana de $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R}$, ∇ a conexão riemanniana de M, e $\mathscr{A}$ o operador de forma de f com respeito a η. Uma vez que $\partial/\partial t$ é campo paralelo em $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R}$, temos a seguinte proposição:

Proposição 2.1.1. *Seja $f \colon M^n \to \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R}$ uma hipersuperfície. Então para todo campo vetorial X tangente a M, vale que:*

$$\nabla_X T = \nu \mathscr{A} X, \quad e \tag{2.3}$$

$$X(\nu) = -\langle \mathscr{A} X, T\rangle. \tag{2.4}$$

Demonstração. Como $\partial/\partial t$ é paralelo em $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R}$, temos que $\tilde{\nabla}_X \partial/\partial t = 0$. Assim, derivando a equação (2.1) em $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R}$ na direção de X, obtemos:

$$\tilde{\nabla}_X(df(T) + \nu\eta) = 0.$$

Usando as propriedades da conexão riemanniana, temos que:

$$\tilde{\nabla}_X df(T) + X(\nu)\eta + \nu\tilde{\nabla}_X \eta = 0. \tag{2.5}$$

A fórmula de Weingarten para imersões, encontrada em (DAJCZER; TOJEIRO, 2019), nos fornece que $\tilde{\nabla}_X \eta = -df(\mathscr{A}X) + \nabla^{\perp}_X \eta = -df(\mathscr{A}X)$, visto que e M é hipersuperfície há apenas uma direção normal. Segue da equação de Gauss que:

$$df(\nabla_X T) + \alpha(X,T) + X(\nu)\eta - \nu df(\mathscr{A}X) = 0$$

e assim obtemos (2.3) e (2.4). □

Similarmente, considere a hipersuperfície $f\colon M^n \to \mathbb{Q}^n_c \times \mathbb{S}^1$, denotemos por η o campo vetorial unitário normal a f e ξ o campo vetorial unitário tangente ao segundo fator $\mathbb{S}^1$. Definamos o campo vetorial suave $T \in TM^n$ e a função suave ν em M^n por

$$\xi = df(T) + \nu\eta. \tag{2.6}$$

Lembrando que $\nu = \cos(\alpha)$, onde α é o ângulo entre ξ e η. Desde que ξ é um campo vetorial unitário, temos que

$$\nu^2 + \|T\|^2 = 1. \tag{2.7}$$

Sejam $\tilde{\nabla}$ a conexão riemanniana de $\mathbb{Q}^n_c \times \mathbb{S}^1$, ∇ a conexão riemanniana de M, e $\mathscr{A}$ o operador de forma de f com respeito a η. Assim como $\partial/\partial t$ é paralelo em $\mathbb{Q}^n_c \times \mathbb{R}$, temos a seguinte proposição:

Proposição 2.1.2. *O campo ξ definido em (2.6) é paralelo.*

Demonstração. Uma vez que, $\langle \xi, \xi \rangle = 1$, temos para todo $X \in T\left(\mathbb{Q}^n_c \times \mathbb{S}^1\right)$ que $\langle \tilde{\nabla}_X \xi, \xi \rangle = 0$. Por outro lado, seja $Y \in T\left(\mathbb{Q}^n_c \times \mathbb{S}^1\right)$ tal que $\langle Y, \xi \rangle = 0$, podemos identificar o campo Y como $Y = Y_c + Y_1$, onde Y_c e Y_1 são as componentes tangentes de Y em $\mathbb{Q}^n_c$ e $\mathbb{S}^1$, respectivamente. Assim como $\langle Y, \xi \rangle = 0$, temos que $Y = Y_c$. Logo, para todo $X \in T\left(\mathbb{Q}^n_c \times \mathbb{S}^1\right)$ temos que $0 = \langle \nabla^c_{X_c} Y_c, \xi \rangle = \langle \tilde{\nabla}_X Y, \xi \rangle = -\langle Y, \tilde{\nabla}_X \xi \rangle$. Segue que o campo ξ é paralelo. □

Do fato que ξ é paralelo em $\mathbb{Q}^n_c \times \mathbb{S}^1$ temos a seguinte proposição

Proposição 2.1.3. *Seja $f\colon M^n \to \mathbb{Q}^n_c \times \mathbb{S}^1$ uma hipersuperfície. Então para todo campo vetorial X tangente a M, vale que:*

$$\nabla_X T = \nu \mathscr{A} X \quad e \tag{2.8}$$

$$X(\nu) = -\langle \mathscr{A}X, T \rangle. \tag{2.9}$$

Demonstração. Como ξ é paralelo em $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{S}^1$, temos que $\tilde{\nabla}_X \xi = 0$. Assim, derivando a equação (2.6) em $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{S}^1$ na direção de X, obtemos:

$$\tilde{\nabla}_X (df(T) + \nu\eta) = 0.$$

Usando as propriedades da conexão riemanniana, temos que:

$$\tilde{\nabla}_X df(T) + X(\nu)\eta + \nu\tilde{\nabla}_X \eta = 0. \tag{2.10}$$

Mais uma vez utilizando a fórmula de Weingarten para imersões, que pode ser encontrada em (DAJCZER; TOJEIRO, 2019), obtemos que $\tilde{\nabla}_X \eta = -df(\mathscr{A}X) + \nabla_X^\perp \eta = -df(\mathscr{A}X)$, visto que uma vez que M é hipersuperfície há apenas uma direção normal. Segue da equação de Gauss que

$$df(\nabla_X T) + \alpha(X,T) + X(\nu)\eta - \nu df(\mathscr{A}X) = 0.$$

Ou seja, temos (2.8) e (2.9). □

Observação 2.1.1. *Por (2.4) e (2.9), se a hipersuperfície é de ângulo constante, ou seja, se ν é constante e $T \neq 0$, então T é uma direção principal e a curvatura principal associada é igual a* 0*.*

2.2 Hipersuperfícies paralelas em $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R}$

Os resultados contidos nesta seção podem ser encontrados em (CHAVES; SANTOS, 2015), os quais por completeza serão tratados com precisão nesta seção. Considere uma imersão $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R}$ com campo normal unitário η e seja $\partial/\partial t$ o campo definido em (2.1)

Considere $F : M^n \to \mathbb{E}^{n+2}$ dada por $F := i \circ f$ onde $i : \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{E}^{n+2}$ é a aplicação inclusão cujo o campo vetorial unitário normal ξ satisfaz $\langle \xi, \xi \rangle = c$. Se $\mathscr{A}_\xi$ é o operador de forma da imersão F com respeito a direção normal ξ, ((MENDONCA; TOJEIRO, 2014)) observou que $\mathscr{A}_\xi(T) = -\nu^2 T$ e $\mathscr{A}_\xi(X) = -X$, para todo $X \in [T]^\perp$, onde $[T]^\perp = \{X \in TM^n / \langle X, T \rangle = 0\}$. Se $\widehat{\nabla}$ denota a conexão riemanniana de $\mathbb{E}^{n+2}$. Nesse sentido, temos a seguinte proposição:

Proposição 2.2.1. *As seguintes equações são verificadas para todo $X \in TM^n$.*

1. $\widehat{\nabla}_X \xi = df(X) - \langle X, T \rangle \partial/\partial t$.
2. $\nabla_X^\perp \xi = -\nu \langle X, T \rangle \eta$.
3. $\nabla_X^\perp \eta = c\nu \langle X, T \rangle \xi$.

Demonstração. Note que $\xi = (\pi_1, 0)$, onde $\pi_1 \colon \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{Q}_c^n$ é a projeção canônica. Assim para todo $X \in TM^n$, têm-se que $\widehat{\nabla}_X \xi = d\pi_1(df(X)) = df(X) - \langle X, T \rangle \partial/\partial t$, ou seja obtemos (1). Além disso,

$$\nabla_X^\perp \xi = \langle \widehat{\nabla}_X \xi, \eta \rangle \eta + c \langle \widehat{\nabla}_X \xi, \xi \rangle \xi.$$

Como ξ é unitário, segue da equação (1) que $\nabla_X^\perp \xi = -\nu \langle X, T \rangle \eta$, por outro lado

$$\nabla_X^\perp \eta = \langle \widehat{\nabla}_X \eta, \eta \rangle \eta + c \langle \widehat{\nabla}_X \eta, \xi \rangle \xi.$$

Como ξ é unitário e uma vez que $\langle \xi, \eta \rangle = 0$, segue que

$$\nabla_X^\perp \eta = -c \langle \widehat{\nabla}_X \xi, \eta \rangle \xi.$$

Ou seja, temos (3). □

Na próxima proposição, obteremos algumas equações que serão úteis nessa seção.

Proposição 2.2.2. *Sejam $f \colon M^n \to \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R}$ uma hipersuperfície que possui curvaturas principais com multiplicidade constante, $\{X_1, \ldots, X_n\} \in T_xM$ uma base ortonormal de direções principais e λ_i as curvaturas principais associadas a X_i. Se T é uma direção principal, $X_n = \|T\|^{-1} T$ e $\eta_{\mathbb{Q}} = \eta - \nu \partial/\partial t$, então*

1. $\widehat{\nabla}_{X_i} \eta_{\mathbb{Q}} = -\lambda_i df(X_i) + c\nu \langle X_i, T \rangle \xi - X_i(\nu) \partial/\partial t.$
2. $X_i(\|T\|) = 0$, *para todo* $i \neq n$, *e* $X_n(\|T\|) = \nu \lambda_n$.
3. $X_i(\nu) = 0$, *para todo* $i \neq n$, *e* $X_n(\nu) = -\lambda_n \|T\|$.
4. $X_i(\pi_2 \circ f) = 0$, *para todo* $i \neq n$ *e* $X_n(\pi_2 \circ f) = \|T\|$,

onde, $\pi_1 \colon \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{Q}_c^n$ e $\pi_2 \colon \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são as projeções canônicas.

Demonstração. Note que

$$\widehat{\nabla}_{X_i} \eta_{\mathbb{Q}} = \widehat{\nabla}_{X_i} (\eta - \nu \partial/\partial t) = \widehat{\nabla}_{X_i} \eta - X_i(\nu) \partial/\partial t = -df(\mathscr{A}_\eta X_i) + \nabla_{X_i}^\perp \eta - X_i(\nu) \partial/\partial t.$$

Pela equação (3) da Proposição 2.2.1, temos que $\widehat{\nabla}_{X_i} \eta_{\mathbb{Q}} = -\lambda_i df(X_i) + c\nu \langle X_i, T \rangle \xi - X_i(\nu) \partial/\partial t$. Usando as equações (2.3) e (2.4), temos para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$2\|T\| X_i(\|T\|) = X_i(\|T\|^2) = X_i \langle T, T \rangle = 2 \langle \nabla_{X_i} T, T \rangle = 2\nu \lambda_i \langle X_i, T \rangle$$

e

$$X_i(\nu) = -\langle \mathscr{A}_\eta X_i, T \rangle = -\langle X_i, \mathscr{A}_\eta T \rangle = -\lambda_n \langle X_i, T \rangle.$$

Além disso,

$$X_i(\pi_2 \circ f) = d\pi_2(df(X_i)) = \pi_2 df(X_i) = \langle df(X_i), \partial/\partial t\rangle = \langle X_i, T\rangle.$$

$\square$

Consideremos agora as hipersuperfícies $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R}$ e $i\colon \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{E}^{n+2}$ com campos vetoriais normais η e ξ, respectivamente, tais que η é unitário e $\langle \xi, \xi\rangle = c$. Sejam $F := i \circ f$, $\pi_1\colon \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{Q}_c^n$ e $\pi_2\colon \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ as projeções canônicas. Dados $t \in \mathbb{R}$, $p \in M^n$ e $v \in T_{f(p)}(\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R})$ tal que $d_{f(p)}\pi_1(v) = v_1$ e $d_{f(p)}\pi_2(v) = v_2$, a aplicação exponencial em $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R}$ é definida por

$$exp_{f(p)}(tv) = \left(C_c(\|v_1\|t)\pi_1(f(p)) + S_c(\|v_1\|t)\frac{v_1}{\|v_1\|},\ \pi_2(f(p)) + tv_2\right), \quad \text{se} \quad v_1 \neq 0 \quad \text{e}$$

$$rmexp_{f(p)}(tv) = (\pi_1(f(p)),\ \pi_2(f(p)) + tv_2), \quad \text{se} \quad v_1 = 0,$$

onde

$$C_c(s) = \begin{cases} \cos(s), & \text{se} \quad c = 1 \\ \cosh(s), & \text{se} \quad c = -1 \end{cases}, \quad S_c(s) = \begin{cases} \sin(s), & \text{se} \quad c = 1 \\ \sinh(s), & \text{se} \quad c = -1. \end{cases} \tag{2.11}$$

Dados $p \in M^n$, $v \in T_{f(p)}(\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R})$ e a curva $\alpha\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R}$ dada por $\alpha(t) = \exp_{f(p)}(tv)$. Observe que α é uma geodésica em $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R}$ que passa pelo ponto $\alpha(0) = (\pi_1(f(p)), \pi_2(f(p))) = f(p)$ e $\alpha'(0) = (v_1, v_2) = v$.

A seguir, definiremos hipersuperfície paralela na variedade produto $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R}$.

Definição 2.2.1. *Seja $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R}$ uma hipersuperfície orientada no produto riemanniano $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R}$ com campo vetorial normal unitário η. A hipersuperfície paralela à $f(M)$ a uma distância, com sinal $t \in \mathbb{R}$, é a aplicação $f_t : M^n \to \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R}$, tal que para cada ponto $x \in M$, o ponto $f_t(x)$ é obtido por transladar a uma distância com sinal $t \in \mathbb{R}$ ao longo da geodésica em $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R}$ com ponto inicial $f(x)$ e vetor tangente inicial $\eta(x)$.*

Agora estudaremos as hipersuperfícies paralelas de $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R}$ que possuem T como uma direção principal. Para o que segue, seja $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R}$ uma hipersuperfície tal que T é uma direção principal e com curvaturas principais de multiplicidade constante. Seja $\{X_1, \ldots, X_n\} \in T_xM$ uma base ortonormal de direções principais com $X_n = \|T\|^{-1}T$. Observe que $\xi \circ f =$

$(\pi_1 \circ f, 0)$ e $\eta_{\mathbb{Q}} = \eta - \nu \partial/\partial t$ o que implica que $\|\eta_{\mathbb{Q}}\| = \|T\| \neq 0$. Então as hipersuperfícies paralelas à f em $\mathbb{Q}^n_c \times \mathbb{R}$ são dadas por:

$$f_t = C_c(t\|T\|)\xi \circ f + S_c(t\|T\|)\|T\|^{-1}\eta_{\mathbb{Q}} + (\pi_2 \circ f + t\nu)\partial/\partial t. \tag{2.12}$$

Agora, introduziremos um novo parâmetro, $s = s(t) = t\|T\|$, a fim de simplificar as notações. Assim, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, temos

$$\begin{aligned} df_t(X_i) &= -ctS_c(s)X_i(\|T\|)\xi + C_c(s)\widehat{\nabla}_{X_i}\xi + tC_c(s)X_i(\|T\|)\|T\|^{-1}\eta_{\mathbb{Q}} \\ &\quad + S_c(s)\widehat{\nabla}_{X_i}\|T\|^{-1}\eta_{\mathbb{Q}} + X_i(\pi_2 \circ f + t\nu)\partial/\partial t. \end{aligned}$$

Do item (1) da Proposição 2.2.1, e dos itens (1), (2) e (4) da Proposição 2.2.2 obtemos que

$$df_t(X_i) = \left(C_c(s) - \lambda_i\|T\|^{-1}S_c(\|T\|t)\right) df(X_i), \quad \text{para} \quad i \neq n \tag{2.13}$$

e

$$\begin{aligned} df_t(X_n) &= c\nu S_c(\|T\|t)(1 - t\lambda_n)\xi + (1 - t\lambda_n)\left(\nu^2 C_c(s) + \|T\|^2\right) df(X_n) \\ &\quad + (1 - t\lambda_n)(1 - C_c(s))\,\nu\|T\|\eta. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Daí, f_t é uma imersão se $C_c(s) - \lambda_i\|T\|^{-1}S_c(\|T\|t) \neq 0$, pata todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$ e $1 - t\lambda_n \neq 0$.

A seguir, vamos obter o campo normal unitário da imersão paralela $f_t(M)$ em termos de $f(M)$.

Lema 2.2.1. *Seja $f\colon M^n \to \mathbb{Q}^n_c \times \mathbb{R}$ uma hipersuperfície orientada no produto riemanniano $\mathbb{Q}^n_c \times \mathbb{R}$, com campo vetorial normal unitário N e $f_t : M^n \to \mathbb{Q}^n_c \times \mathbb{R}$ uma hipersuperfície paralela. Então a menos de sinal, o campo normal unitário de $f_t(M)$ é dado por*

$$\eta_t = -c\|T\|S_c(s)\xi \circ f + C_c(s)\eta_{\mathbb{Q}} + \nu\partial/\partial t. \tag{2.15}$$

Demonstração. Veremos inicialmente que η_t é unitário, de fato,

$$\begin{aligned} \|\eta_t\|^2 &= \|-c\|T\|S_c(s)\xi \circ f + C_c(s)\eta_{\mathbb{Q}} + \nu\partial/\partial t\|^2 \\ &= c\|T\|^2 S_c(s)^2 + C_c(s)^2\|T\|^2 + \nu^2 \\ &= \|T\|^2 + \nu^2 = 1. \end{aligned}$$

Devemos agora verificar que η_t é de fato um campo normal, ou seja, que η_t é tangente a $\mathbb{Q}^n_c \times \mathbb{R}$ e ortogonal ao fibrado tangente TM identificado com $df(TM)$ para verificarmos que η_t é campo tangente a $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R}$ é suficiente verificarmos que η_t é ortogonal a $\xi \circ f_t$, tal fato é obvio uma vez que

$$\xi \circ f_t = C_c(s)\xi \circ f + S_c(s)\|T\|^{-1}\eta_{\mathbb{Q}}.$$

e $\langle \eta_t, C_c(s)\xi \circ f + S_c(s)\|T\|^{-1}\eta_{\mathbb{Q}}\rangle = 0$. Agora veremos que η_t é ortogonal a $df(TM)$. De fato, seja $\{X_1, \ldots, X_n\} \in T_xM$ uma base ortonormal de direções principais com $X_n = \|T\|^{-1}T$. Por (2.13), temos para $i \neq n$ que $\langle \eta_t, df_t(X_i)\rangle = 0$, uma vez que $\langle \xi \circ f, df(X_i)\rangle = 0$, $\langle \eta_{\mathbb{Q}}, df(X_i)\rangle = 0$, e $\langle \partial/\partial t, df(X_i)\rangle = 0$. Para o caso $i = n$, observe que $\partial/\partial t = df(T) + \nu\eta = \|T\|df(X_n) + \nu\eta$ e

$$\eta_{\mathbb{Q}} = \eta - \nu\partial/\partial t = \eta - \nu\|T\|df(X_n) - \nu^2\eta = \|T\|^2\eta - \nu\|T\|df(X_n).$$

Portanto, podemos reescrever η_t, da seguinte forma

$$\eta_t = -c\|T\|S_c(s)\xi \circ f + (\|T\|^2 C_c(s) + \nu^2)\eta + (1 - C_c(s))\nu\|T\|df(X_n).$$

Fazendo um rápido cálculo, obtemos que $\langle \eta_t, df_t(x_n)\rangle = 0$. Segue então que η_t é o campo vetorial normal de $f_t(M)$. $\square$

Estamos interessados em obter uma relação entre as curvaturas principais de $f(M)$ e $f_t(M)$. Para isso obteremos uma relação entre as direções principais de $f(M)$ e $f_t(M)$, em linhas gerais temos a seguinte proposição.

Proposição 2.2.3. *Se $\{X_1, \ldots, X_n\}$ é um referencial de direções principais ortogonais em f, então ele é também um referencial de direções principais ortogonais de f_t.*

Demonstração. Observando as expressóes (2.13) e (2.14) que $\langle df_t(X_i), df_t(X_j)\rangle = 0$ para $i \neq j$, com $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Iremos calcular $\widehat{\nabla}_{X_i}\eta^t$ e mostrar que $\langle \widehat{\nabla}_{X_i}\eta^t, df_t(X_j)\rangle = 0$, para todo $i \neq j$. Temos, pela equação (2.15), que

$$\begin{aligned}\widehat{\nabla}_{X_i}\eta_t \;=\; & -cX_i(\|T\|S_c(s))\xi \circ f - c\|T\|S_c(s)\widehat{\nabla}_{X_i}\xi \circ f + X_i(\|T\|C_c(s))\eta_{\mathbb{Q}} + \\ & C_c(s)\widehat{\nabla}_{X_i}\eta_{\mathbb{Q}} + X_i(\nu)\partial/\partial t,\end{aligned}$$

onde

$$X_i(\|T\|S_c(s)) = (S_c(s) + t\|T\|C_c(s))X_i(\|T\|)$$

$$\text{e} \quad X_i(C_c(s)) = -ctS_c(s)X_i(\|T\|).$$

Segue, pelo item (1) da Proposição 2.2.1, e pelos itens (1), (2) e (3) da Proposição 2.2.2 que:

$$\widehat{\nabla}_{X_i}\eta_t = -(c\|T\|S_c(s)) + \lambda_i C_c(s))df(X_i), \quad \text{para } i \neq n \tag{2.16}$$

e

$$\begin{aligned}\widehat{\nabla}_{X_n}\eta_t &= \{(1-t\lambda_n)\|T\|C_c(s)) - \lambda_n S_c(s)\}c\nu\xi \circ f \\ &+\{-\lambda_n(\|T\|^2+\nu^2 C_c(s)) - c\nu^2\|T\|S_c(s)(1-t\lambda_n)\}df(X_n) \\ &+\{c\nu\|T\|^2 S_c(s)(1-t\lambda_n) - \nu\|T\|\lambda_n(1-C_c(s))\}\eta.\end{aligned} \tag{2.17}$$

Logo, por (2.16) e (2.17) temos que $\langle \widehat{\nabla}_{X_i}\eta_t, df_t(X_j)\rangle = 0$, para todo $i \neq j$ com $i, j \in \{1,\ldots,n\}$ e consequentemente $\{X_1,\ldots,X_n\}$ é um referencial de direções principais ortogonais em f_t. $\square$

O próximo resultado nos fornece a relação entre as curvaturas principais da imersão em $\mathbb{Q}^n_c \times \mathbb{R}$ que possuem T como uma direção principal e as curvaturas principais das hipersuperfícies paralelas.

Proposição 2.2.4. *Seja $f \colon M^n \to \mathbb{Q}^n_c \times \mathbb{R}$ uma hipersuperfície que possui direção principal T e λ_i, $i \in \{1,\ldots,n\}$, são as curvaturas principais. Se f_t é uma família de hipersuperfícies paralelas a f com curvaturas principais λ_i^t, $i \in \{1,\ldots,n\}$ então*

1. $\lambda_i^t = \dfrac{c\|T\|S_c(s) + \lambda_i C_c(s)}{C_c(s) - \lambda_i\|T\|^{-1}S_c(s)}, \quad i \neq n,$
2. $\lambda_n^t = \dfrac{\lambda_n}{1-t\lambda_n}.$

Demonstração. Se $\{X_1,\ldots,X_n\} \in T_xM$ é uma base ortonormal de direções principais f. Então, pelas equações (2.16) e (2.17), temos que

$$\widehat{\nabla}_{X_i}\eta_t = -\left(c\|T\|S_c(s) + \lambda_i C_c(s)\right)df(X_i), \quad \text{for } i \neq n \quad \text{e} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\nabla}_{X_n}\eta_t &= \{(1-t\lambda_n)\|T\|C_c(s) - \lambda_n S_c(s)\}c\nu\xi \circ f \\ &+\left\{-\lambda_n(\|T\|^2+\nu^2 C_c(s)) - c\nu^2\|T\|S_c(s)(1-t\lambda_n)\right\}df(X_n) \\ &+\left\{c\nu\|T\|^2 S_c(s)(1-t\lambda_n) - \nu\|T\|\lambda_n(1-C_c(s))\right\}\eta.\end{aligned} \tag{2.19}$$

Note que se $\{X_1,\ldots,X_n\}$ é uma base ortogonal de direções principais de f, então é também uma base ortogonal de direções ortogonais de f_t, de fato, das equações (2.13) e (2.14) temos que $\langle df_t(X_j), df_t(X_i)\rangle = 0$, para $i \neq j$. Por outro lado, das expressões (2.13) e (2.14) temos que

$$\langle df_t(X_i), df_t(X_i)\rangle = \left(C_c(s) - \lambda_i\|T\|^{-1}S_c(s)\right)^2, \quad \text{para } i \neq n \tag{2.20}$$

e

$$\langle df_t(X_n), df_t(X_n)\rangle = (1-t\lambda_n)^2. \tag{2.21}$$

Além disso, usando as identidades (2.13) e (2.18) temos para $i \neq n$,

$$-\langle \widehat{\nabla}_{X_i}\eta_t, df_t(X_i)\rangle \;=\; (c\|T\|S_c(s)+\lambda_i C_c(s))\left(C_c(s)-\lambda_i\|T\|^{-1}S_c(s)\right). \tag{2.22}$$

De (2.14) e (2.19) concluímos também que

$$\langle \widehat{\nabla}_{X_n}\eta_t, df_t(X_n)\rangle = -\lambda_n(1-t\lambda_n). \tag{2.23}$$

Agora, por (2.20) e (2.22) podemos calcular

$$\lambda_i^t = \frac{\langle \widehat{\nabla}_{X_i}\eta_t, df_t(X_i)}{\langle df_t(X_i), df_t(X_i)\rangle}\rangle = \frac{(c\|T\|S_c(s)+\lambda_i C_c(s))(C_c(s)-\lambda_i\|T\|^{-1}S_c(s))}{(C_c(s)-\lambda_i\|T\|^{-1}S_c(s))^2},$$

para $i \neq n$, ou seja,

$$\lambda_i^t = \frac{c\|T\|S_c(s)+\lambda_i C_c(s)}{C_c(s)-\lambda_i\|T\|^{-1}S_c(s)}.$$

Para $i = n$, temos, por (2.21) e (2.23) que

$$\lambda_i^t = \frac{\langle \widehat{\nabla}_{X\,i}\eta_t, df_t(X_i)}{\langle df_t(X_n), df_t(X_n)\rangle}\rangle = \frac{\lambda_n(1-t\lambda_n)}{(1-t\lambda_n)^2}.$$

Ou seja,

$$\lambda_i^t = \frac{\lambda_n}{1-t\lambda_n}.$$

□

O próximo resultado mostra que se uma hipersuperfície possui o campo T como direção principal então sua família de hipersuperfícies paralelas também o possui.

Corolário 2.2.1. *Sejam $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R}$ uma hipersuperfície e f_t sua família de hipersuperfícies paralelas. Se T é uma direção principal de f com curvatura principal associada λ_n então T^t é uma direção principal de f_t e além disso, $T^t = \frac{T}{1-t\lambda_n}$ com $\partial/\partial t = df(T^t)+\nu\eta_t$*

Demonstração. Por (2.15), temos

$$\partial/\partial t - \nu\eta_t = c\nu\|T\|S_c(s)\xi\circ f - \nu C_c(s)\eta_{\mathbb{Q}} + (1-\nu^2)\partial/\partial t. \tag{2.24}$$

Substituindo $\eta_{\mathbb{Q}} = \eta - \nu\partial/\partial t$ e $\partial/\partial t = \|T\| df(X_n) + \nu\eta$ em (2.24), obtemos

$$\begin{aligned}\partial/\partial t - \nu\eta_t &= c\nu\|T\|S_c(s)\xi \circ f + (\nu^2 C_c(s) + \|T\|^2)\|T\|df(X_n) + \\ &\quad (1 - C_c(s))\nu\|T\|^2\eta.\end{aligned}$$

Logo, pela equação (2.14) deduzimos que

$$\partial/\partial t - \nu\eta_t = \frac{\|T\|}{1 - t\lambda n} df_t(X_n) = df_t\left(\frac{T}{1 - t\lambda n}\right) = df_t(T^t).$$

Como queríamos demonstrar. □

2.3 Hipersuperfícies paralelas em $\mathbb{Q}^n_c \times \mathbb{S}^1$

Adaptando a seção anterior, nessa seção obteremos resultados parecidos para o caso das hipersuperfícies $f : M^n \to \mathbb{Q}^n_c \times \mathbb{S}^1$, cujo o campo vetorial normal unitário é η e ξ é o campo definido em (2.6).

Considere a imersão $F : M^n \to \mathbb{E}^{n+3}$ definida por $F := i \circ f$, onde $i : \mathbb{Q}^n_c \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{E}^{n+3}$ é a imersão natural dada pela inclusão cujos vetores normais são definidos por $\xi_1 = (\pi_1, 0)$ e $\xi_2 = (0, \pi_2)$, onde, $\pi_1 : \mathbb{Q}^n_c \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{Q}^n_c$ e $\pi_2 : \mathbb{Q}^n_c \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ são as projeções canônicas. Sejam $\mathscr{A}_{(\xi_1 \circ f)}$ e $\mathscr{A}_{(\xi_2 \circ f)}$ os operadores de forma da imersão F com respeito às direções normais $\xi_1 \circ f$ e $\xi_2 \circ f$. Se $\widehat{\nabla}$ é a conexão riemanniana de $\mathbb{E}^{n+3}$, então, temos que:

Proposição 2.3.1. *Valem as seguintes identidades para $X \in TM^n$,*

1. $\widehat{\nabla}_X(\xi_1 \circ f) = df(X) - \langle X, T\rangle\xi$.
2. $\widehat{\nabla}_X(\xi_2 \circ f) = \langle X, T\rangle\xi$.
3. $\nabla^\perp_X(\xi_1 \circ f) = -\nu\langle X, T\rangle\eta$.
4. $\nabla^\perp_X(\xi_2 \circ f) = \nu\langle X, T\rangle\eta$.
5. $\nabla^\perp_X\eta = c\nu\langle X, T\rangle(\xi_1 \circ f) - \nu\langle X, T\rangle(\xi_2 \circ f)$.
6. $\widehat{\nabla}_X\xi = -\langle X, T\rangle(\xi_2 \circ f)$.

Demonstração. Note que $\xi_1 \circ f, \xi_2 \circ f, i_*(\eta)$ são os campos vetoriais unitários normais a F, de sorte que para todo $X \in TM$, temos

$$\widehat{\nabla}_X(\xi_1 \circ f) = d\pi_1(df(X)) = df(X) - \langle X, T\rangle\xi.$$

e $\widehat{\nabla}_X(\xi_2 \circ f) = \langle X, T\rangle\xi$, o que implica as duas primeiras identidades. Da identidade (2.6) temos que

$$\widehat{\nabla}_X(\xi_1 \circ f) = df(X) - \langle X, T\rangle(df(T) + \nu\eta).$$

e

$$\widehat{\nabla}_X(\xi_2\circ f)=\langle X,T\rangle(df(T)+\nu\eta).$$

Segue que $\mathscr{A}_{(\xi_1\circ f)}X=-X+\langle X,T\rangle T$, $\mathscr{A}_{(\xi_2\circ f)}X=-\langle X,T\rangle T$, $\nabla^{\perp}_X(\xi_1\circ f)=-\nu\langle X,T\rangle\eta$ e $\nabla^{\perp}_X(\xi_2\circ f)=\nu\langle X,T\rangle\eta$. Por outro lado, uma vez que η tem norma unitária, $\nabla^{\perp}\eta$ será uma combinação linear de $(\xi_1\circ f)$ e $(\xi_2\circ f)$. Como $\langle(\xi_1\circ f),\eta\rangle=0$, uma vez que $\nabla^{\perp}_X(\xi_1\circ f)=-\nu\langle X,T\rangle\eta$, temos que $\langle\nabla^{\perp}_X\eta,(\xi_1\circ f)\rangle=-\langle\eta,\nabla^{\perp}_X(\xi_1\circ f)\rangle=\nu\langle X,T\rangle$ e do mesmo modo, como $\langle(\xi_2\circ f),\eta\rangle=0$, da identidade $\nabla^{\perp}_X(\xi_2\circ f)=\nu\langle X,T\rangle\eta$, temos que $\langle\nabla^{\perp}_X\eta,(\xi_2\circ f)\rangle=-\langle\eta,\nabla^{\perp}_X(\xi_2\circ f)\rangle=-\nu\langle X,T\rangle$. Desde que $\langle(\xi_1\circ f),(\xi_1\circ f\rangle=c$, e $\langle(\xi_2\circ f),(\xi_2\circ f\rangle=1$, segue-se

$$\nabla^{\perp}_X\eta=c\nu\langle X,T\rangle(\xi_1\circ f)-\nu\langle X,T\rangle(\xi_2\circ f),$$

o que conclui o quinto item. Finalmente, desde que ξ é um campo paralelo em $T(\mathbb{Q}^n_c\times\mathbb{S}^1)$, temos que $\widehat{\nabla}_X\xi=\lambda(\xi_1\circ f)+\alpha(\xi_2\circ f)$, por um cálculo direto, temos que $\lambda=0$ e $\alpha=-\langle X,T\rangle$, assim $\widehat{\nabla}_X\xi=-\langle X,T\rangle(\xi_2\circ f)$, completando a demonstração da proposição. □

Na próxima proposição, apresentaremos mais algumas equações.

Proposição 2.3.2. *Sejam $f\colon M^n\to\mathbb{Q}^n_c\times\mathbb{S}^1$ é uma hipersuperfície que possui as curvaturas principais com multiplicidades constantes, $\{X_1,\ldots,X_n\}\in T_xM$ uma base ortonormal de direções principais e λ_i as curvaturas principais associadas a X_i. Se T é uma direção principal, $X_n=\|T\|^{-1}T$ e $\eta_{\mathbb{Q}}=\eta-\nu\xi$, então*

1. $\widehat{\nabla}_{X_i}\eta_{\mathbb{Q}}=-\lambda_i df(X_i)+c\nu\langle X_i,T\rangle(\xi_1\circ f)-X_i(\nu)\xi$,
2. $X_i(\|T\|)=0,$ *para todo* $i\neq n$, *e* $X_n(\|T\|)=\nu\lambda_n$,
3. $X_i(\nu)=0,$ *para todo* $i\neq n$, *e* $X_n(\nu)=-\lambda_n\|T\|$.

Demonstração. Observando que $\eta_{\mathbb{Q}}=\eta-\nu\xi$, temos pela fórmula de Weingarten que

$$\widehat{\nabla}_{X_i}\eta_{\mathbb{Q}}=\widehat{\nabla}_{X_i}(\eta-\nu\xi)=\widehat{\nabla}_{X_i}\eta-X_i(\nu)\xi-\nu\widehat{\nabla}_{X_i}\xi=-df(A_\eta X_i)+\nabla^{\perp}_{X_i}\eta-X_i(\nu)\xi-\nu\widehat{\nabla}_{X_i}\xi.$$

Pela proposição anterior, uma vez que $\nabla^{\perp}_{X_i}\eta-\nu\widehat{\nabla}_{X_i}\xi=c\nu\langle X_i,T\rangle(\xi_1\circ f)$, obtemos que $\widehat{\nabla}_{X_i}\eta_{\mathbb{Q}}=-\lambda_i df(X_i)+c\nu\langle X_i,T\rangle(\xi_1\circ f)-X_i(\nu)\xi$, o que conclui o primeiro item.

Usando as equações (2.8) e (2.9), obtemos para $i\in\{1,\ldots,n\}$,

$$2\|T\|X_i(\|T\|)=X_i(\|T\|^2)=X_i\langle T,T\rangle=2\langle\nabla_{X_i}T,T\rangle=2\nu\lambda_i\langle X_i,T\rangle$$

e $X_i(\nu) = -\langle A_\eta X_i, T\rangle = -\langle X_i, A_\eta T\rangle = -\lambda_n \langle X_i, T\rangle$. Fazendo i variar em $\{1,\dots,n\}$, obtemos (2) e (3), concluindo a demonstração da proposição.

$\square$

Consideremos agora as hipersuperfícies $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{S}^1$ e $i\colon \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{E}^{n+3}$ com direções normais η , ξ_1 e ξ_2, tais que η é campo unitário normal à f, e ξ_1 e ξ_2 são os campos normais da imersão $i\colon \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{E}^{n+3}$ que satisfazem $\langle \xi_1, \xi_1\rangle = c$ e $\langle \xi_2, \xi_2\rangle = 1$. Sejam $F := i \circ f$, $\pi_1\colon \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{Q}_c^n$ e $\pi_2\colon \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ as projeções canônicas. Dados $t \in \mathbb{R}$, $p \in M^n$ e $v \in T_{f(p)}(\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{S}^1)$ tal que $d_{f(p)}\pi_1(v) = v_1 \neq 0$ e $d_{f(p)}\pi_2(v) = v_2 \neq 0$, a aplicação exponencial em $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{S}^1$ é definida por

$$exp_{f(p)}(tv) = \left(C_c(\|v_1\|t)\pi_1(f(p)) + S_c(\|v_1\|t)\frac{v_1}{\|v_1\|},\ \cos(\|v_2\|t)\pi_2(f(p)) + \sin(\|v_2\|t)\frac{v_2}{\|v_2\|} \right),$$

onde

$$C_c(s) = \begin{cases} \cos(s), & \text{se} \quad c = 1 \\ \cosh(s), & \text{se} \quad c = -1 \end{cases}, \quad S_c(s) = \begin{cases} \sin(s), & \text{se} \quad c = 1 \\ \sinh(s), & \text{se} \quad c = -1. \end{cases} \tag{2.25}$$

Tome $p \in M^n$, $v \in T_{f(p)}(\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{S}^1)$ e a curva $\alpha\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{S}^1$ definida por $\alpha(t) = exp_{f(p)}(tv)$. Observe que α é uma geodésica em $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{S}^1$ que passa pelo ponto $\alpha(0) = (\pi_1(f(p)), \pi_2(f(p))) = f(p)$ e tem velocidade $\alpha'(0) = (v_1, v_2) = v$.

A seguir, definiremos uma hipersuperfície paralela em uma variedade produto $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{S}^1$.

Definição 2.3.1. *Seja $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{S}^1$ uma hipersuperfície orientada no produto riemanniano $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{S}^1$ com campo vetorial normal unitário η. A hipersuperfície paralela à $f(M)$ a uma distância com sinal $t \in \mathbb{R}$ é a aplicação $f_t : M^n \to \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{S}^1$, tal que para cada ponto $x \in M$, o ponto $f_t(x)$ é obtido por transladar a uma distância com sinal $t \in \mathbb{R}$ ao longo da geodésica em $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{S}^1$ com ponto inicial $f(x)$ e vetor tangente inicial $\eta(x)$.*

Agora estudaremos as hipersuperfícies paralelas de $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{S}^1$ que possuem T como direção principal. Para o que segue, seja $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{S}^1$ uma hipersuperfície a qual T é uma direção principal e com curvaturas principais de multiplicidades constantes. Seja $\{X_1, \dots, X_n\} \in T_xM$ uma base ortonormal de direções principais com $X_n = \|T\|^{-1}T$. Observe que $\xi_1 \circ f = (\pi_1 \circ f, 0)$, $\xi_2 \circ f = (0, \pi_2 \circ f)$ e $\eta_{\mathbb{Q}} = \eta - \nu\xi$ o que implica que $\|\eta_{\mathbb{Q}}\| = \|T\| \neq 0$. Então, as hipersuperfícies paralelas a f são dadas por

$$f_t = C_c(t\|T\|)\xi_1 \circ f + S_c(t\|T\|)\|T\|^{-1}\eta_{\mathbb{Q}} + \cos(t\nu)\xi_2 \circ f + \sin(t\nu)\xi. \tag{2.26}$$

Agora, introduziremos um novo parâmetro, $s = s(t) = t\|T\|$, a fim de simplificar as notações. Denotaremos $\mathscr{X}_1 = C_c(s)\xi_1 \circ f$, $\mathscr{X}_2 = S_c(s)\|T\|^{-1}\eta_{\mathbb{Q}}$, $\mathscr{X}_3 = \cos(t\nu)\xi_2 \circ f$ e $\mathscr{X}_4 = \sin(t\nu)\xi$. Assim, podemos reescrever (2.26) da seguinte forma

$$f_t = \mathscr{X}_1 + \mathscr{X}_2 + \mathscr{X}_3 + \mathscr{X}_4. \tag{2.27}$$

Afim de calcularmos $df_t(X_i)$ analisaremos em separado cada termo de (2.27) com ajuda das Proposições 2.3.1 e 2.3.2. Iniciaremos com $\widehat{\nabla}_{X_i}\mathscr{X}_1 = \widehat{\nabla}_{X_i}C_c(s)\xi_1 \circ f$. Primeiro usaremos a Proposição 2.3.1 para inferir

$$\begin{aligned}
\widehat{\nabla}_{X_i}\mathscr{X}_1 &= -ctS_c(s)X_i(\|T\|)\xi_1 \circ f + C_c(s)\widehat{\nabla}_{X_i}\xi_1 \circ f \\
&= -ctS_c(s)X_i(\|T\|)\xi_1 \circ f + C_c(s)\big(df(X_i) - \langle X_i, T\rangle \xi\big).
\end{aligned}$$

Assim, usando a Proposição 2.3.2 obtemos pela última relação para $i \neq n$

$$\widehat{\nabla}_{X_i}\mathscr{X}_1 = -C_c(s)df(X_i), \tag{2.28}$$

enquanto para $i = n$ inferimos

$$\begin{aligned}
\widehat{\nabla}_{X_n}\mathscr{X}_1 &= -ctS_c(s)\nu\lambda_n\xi_1 \circ f + C_c(s)\big(df(X_n) - \|T\|\xi\big) \\
&= -ctS_c(s)\nu\lambda_n\xi_1 \circ f + C_c(s)\big(df(X_n) - \|T\|(\|T\|df(X_n + \nu\eta)\big) \\
&= -ctS_c(s)\nu\lambda_n\xi_1 \circ f + C_c(s)\big(\nu^2 df(X_n) - \|T\|\nu\eta\big).
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Seguindo, calcularemos $\widehat{\nabla}_{X_i}\mathscr{X}_2 = \widehat{\nabla}_{X_i}S_c(s)\|T\|^{-1}\eta_{\mathbb{Q}}$. De onde teremos

$$\begin{aligned}
\widehat{\nabla}_{X_i}\mathscr{X}_2 &= tC_c(s)X_i(\|T\|)\|T\|^{-1}\eta_{\mathbb{Q}} \\
&+ S_c\|T\|t)\big(\|T\|^{-1}\widehat{\nabla}_{X_i}\eta_{\mathbb{Q}} - \frac{X_i(\|T\|)}{\|T\|^2}\eta_{\mathbb{Q}}\big).
\end{aligned}$$

Mais uma vez, usando a Proposição 2.3.2 obtemos da última relação para $i \neq n$ o seguinte

$$\begin{aligned}\widehat{\nabla}_{X_i}\mathscr{X}_2 &= S_c(s)\|T\|^{-1}\widehat{\nabla}_{X_i}\eta_{\mathbb{Q}}, \\ &= S_c(s)\|T\|^{-1}\lambda_i df(X_i),\end{aligned} \tag{2.30}$$

por outro lado para $i = n$ deduzimos

$$\begin{aligned}\widehat{\nabla}_{X_n}\mathscr{X}_2 &= tC_c(s)\nu\lambda_n\|T\|^{-1}\eta_{\mathbb{Q}} \\ &+ S_c(s)\big(\|T\|^{-1}\widehat{\nabla}_{X_n}\eta_{\mathbb{Q}} - \frac{\nu\lambda_n}{\|T\|^2}\eta_{\mathbb{Q}}\big).\end{aligned}$$

Desde que $\eta_{\mathbb{Q}} = \eta - \nu\xi = \eta - \nu(\|T\|df(X_n) + \nu\eta) = \|T\|^2\eta - \nu\|T\|df(X_n)$, usando a Proposição 2.3.2 obtemos que

$$\begin{aligned}\widehat{\nabla}_{X_n}\mathscr{X}_2 &= tC_c(s)\nu\lambda_n\|T\|^{-1}\big(\|T\|^2\eta - \nu\|T\|df(X_n)\big) \\ &+ S_c(s)\|T\|^{-1}\big(-\lambda_n df(X_n) + c\nu\|T\|\xi_1\circ f + \lambda_n\|T\|\xi\big) \\ &- S_c(s)\frac{\nu\lambda_n}{\|T\|^2}\big(\|T\|^2\eta - \nu\|T\|df(X_n)\big)\big) \\ &= tC_c(s)\nu\lambda_n\big(\|T\|\eta - \nu df(X_n)\big) \\ &+ S_c(s)\big(-\lambda_n\|T\|^{-1}df(X_n) + c\nu\xi_1\circ f + \lambda_n\xi\big) \\ &- S_c(s)\nu\lambda_n\big(\eta - \nu\|T\|^{-1}df(X_n)\big)\big) \\ &= tC_c(s)\nu\lambda_n\big(\|T\|\eta - \nu df(X_n)\big) \\ &+ S_c(s)\big(-\lambda_n\|T\|^{-1}(1-\nu^2)df(X_n) + c\nu\xi_1\circ f + \lambda_n\xi - \lambda_n\nu\eta\big) \\ &= tC_c(s)\nu\lambda_n\big(\|T\|\eta - \nu df(X_n)\big) \\ &+ S_c(s)\big(-\lambda_n\|T\|df(X_n) + c\nu\xi_1\circ f + \lambda_n\xi - \lambda_n\nu\eta\big) \\ &= tC_c(s)\nu\lambda_n\big(\|T\|\eta - \nu df(X_n)\big) + cS_c(s)\nu\xi_1\circ f.\end{aligned} \tag{2.31}$$

Procederemos agora a calcular $\widehat{\nabla}_{X_i}\mathscr{X}_3 = \widehat{\nabla}_{X_i}\cos(t\nu)\xi_2\circ f$. Então, temos pela Proposição 2.3.1

$$\begin{aligned}\widehat{\nabla}_{X_i}\mathscr{X}_3 &= -tX_i(\nu)\sin(t\nu)\xi_2\circ f + \cos(t\nu)\widehat{\nabla}_{X_i}\xi_2\circ f \\ &= -tX_i(\nu)\sin(t\nu)\xi_2\circ f + \cos(t\nu)\langle X, T\rangle\xi.\end{aligned}$$

Novamente, invocamos a Proposição 2.3.2 para escrever para $i \neq n$

$$\widehat{\nabla}_{X_i}\mathscr{X}_3 = 0, \tag{2.32}$$

enquanto, para $i = n$ inferimos

$$\begin{aligned}\widehat{\nabla}_{X_n}\mathscr{X}_3 &= t\lambda_n\|T\|\sin(t\nu)\xi_2\circ f + \cos(t\nu)\|T\|\xi \\ &= t\lambda_n\|T\|\sin(t\nu)\xi_2\circ f + \cos(t\nu)\|T\|\big(\|T\|df(X_n)+\nu\eta\big).\end{aligned} \tag{2.33}$$

Finalmente, calculemos $\widehat{\nabla}_{X_i}\mathscr{X}_4 = \widehat{\nabla}_{X_i}\sin(t\nu)\xi$. Então derivamos da Proposição 2.3.1

$$\begin{aligned}\widehat{\nabla}_{X_i}\mathscr{X}_4 &= tX_i(\nu)\cos(t\nu)\xi + \sin(t\nu)\widehat{\nabla}_{X_i}\xi \\ &= tX_i(\nu)\cos(t\nu)\xi - \sin(t\nu)\langle X,T\rangle(\xi_2\circ f).\end{aligned}$$

Novamente, invocamos a Proposição 2.3.2 a fim de deduzirmos para $i \neq n$ que

$$\widehat{\nabla}_{X_i}\mathscr{X}_4 = 0, \tag{2.34}$$

assim como

$$\begin{aligned}\widehat{\nabla}_{X_n}\mathscr{X}_4 &= -t\lambda_n\|T\|\cos(t\nu)\xi - \sin(t\nu)\|T\|(\xi_2\circ f) \\ &= -t\lambda_n\|T\|\cos(t\nu)\big(\|T\|df(X_n)+\nu\eta\big) - \sin(t\nu)\|T\|(\xi_2\circ f).\end{aligned} \tag{2.35}$$

Assim, usando as relações (2.28), (2.30), (2.32) e (2.34) escrevemos para cada $i \neq n$

$$df_t(X_i) = \big(C_c(\|T\|t) - \lambda_i\|T\|^{-1}S_c(\|T\|t)\big)\,df(X_i). \tag{2.36}$$

Por outro lado, usando as relações (2.29), (2.31), (2.33), e (2.35) obtemos que

$$\begin{aligned}df_t(X_n) &= (1-t\lambda_n)\Big(c\nu S_c(s)\xi_1\circ f + \big(\nu^2C_c(s)+\|T\|^2\cos(t\nu)\big)\,df(X_n)\Big) \\ &+ (1-t\lambda_n)\|T\|\Big(\,(\cos(t\nu)-C_c(s))\,\nu\eta - \sin(t\nu)\xi_2\circ f\Big).\end{aligned} \tag{2.37}$$

Segue das relações (2.36) e (2.37) o seguinte lema.

Lema 2.3.1. *Sejam $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{S}^1$ uma hipersuperfícies que possui T como uma direção principal e $\{X_1,\dots,X_n\} \in T_xM$ uma base ortonormal de direções principais com $X_n = \|T\|^{-1}T$. Então $\{X_1,\dots,X_n\}$ é também uma base ortogonal de f_t, e*

1. $\langle df_t(X_i), df_t(X_i)\rangle = \big(C_c(s) - \lambda_i\|T\|^{-1}S_c(s)\big)^2$,
2. $\langle df_t(X_n), df_t(X_n)\rangle = (1-t\lambda_n)^2$.
3. $\langle df_t(X_n), df_t(X_i)\rangle = 0$.

Além disso, f_t é uma imersão desde que $C_c(s) \neq \lambda_i\|T\|^{-1}S_c(s)$, para cada $i \in \{1,\dots,n-1\}$, e $1-t\lambda_n \neq 0$.

Demonstração. Das equações (2.36) e (2.37) temos que $\{X_1,\dots,X_n\}$ é de fato uma base ortogonal de f_t. Agora, pela equação (2.36) obtemos para $i \neq n$ que

$$\langle df_t(X_i), df_t(X_i)\rangle = \big(C_c(s) - \lambda_i\|T\|^{-1}S_c(s)\big)^2,$$

enquanto, para $i = n$, usando a expressão (2.37) e um cálculo direto, obtemos:

$$\begin{aligned}
\langle df_t(X_n), df_t(X_n)\rangle &= (1-t\lambda_n)^2\nu^2S_c(s)^2 + (1-t\lambda_n)^2\big(\nu^2C_c(s) + \|T\|^2\cos(t\nu)\big)^2\\
&+ (1-t\lambda_n)^2\big(\cos(t\nu) - C_c(s)\big)^2\nu^2\|T\|^2 + (1-t\lambda_n)^2\|T\|^2\sin(t\nu)^2\\
&= (1-t\lambda_n)^2\nu^2S_c(s)^2 + (1-t\lambda_n)^2\big(\nu^2C_c(s) + \|T\|^2\cos(t\nu)\big)^2\\
&+ (1-t\lambda_n)^2\big(\nu\|T\|\cos(t\nu) - \nu\|T\|C_c(s)\big)^2 + (1-t\lambda_n)^2\|T\|^2\sin(t\nu)^2\\
&= (1-t\lambda_n)^2\big[\nu^2S_c(s)^2 + \big(\|T\|^4 + \|T\|^2\nu^2\big)\cos(t\nu)^2 +\\
&+ \big(\nu^4 + \|T\|^2\nu^2\big)C_c(s)^2 + \|T\|^2\sin(t\nu)^2\big]\\
&= (1-t\lambda_n)^2\big[\nu^2S_c(s)^2 + \|T\|^2\cos(t\nu)^2 + \nu^2C_c(s)^2 + \|T\|^2\sin(t\nu)^2\big]\\
&= (1-t\lambda_n)^2(\|T\|^2 + \nu^2).
\end{aligned}$$

concluindo a demonstração. □

A seguir, vamos obter o campo normal unitário da imersão paralela $f_t(M)$ em termos da hipersuperfície $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{S}^1$.

Lema 2.3.2. *Sejam $f\colon M^n \to \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{S}^1$ uma hipersuperfície orientada no produto riemanniano $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{S}^1$, com campo vetorial normal unitário η e $f_t : M^n \to \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{S}^1$ uma hipersuperfície paralela. Então a menos de sinal, o campo normal unitário de $f_t(M)$ é dado por*

$$\eta_t = -c\|T\|S_c(s)\xi_1 \circ f + C_c(s)\eta_{\mathbb{Q}} - \nu\sin(t\nu)\xi_2 \circ f + \nu\cos(t\nu)\xi. \tag{2.38}$$

Demonstração. Primeiro verificaremos que o campo vetorial η_t é unitário. De fato:

$$\|\eta_t\|^2 = \|T\|^2 S_c^2(s) + C_c^2(s)\|T\|^2 + \nu^2\sin(t\nu)^2 + \nu^2\cos(t\nu)^2, \tag{2.39}$$

assim, $\|\eta_t\|^2 = \|T\|^2 + \nu^2 = 1$, ou seja, η_t é unitário.

Desde que $\eta_{\mathbb{Q}} = \eta - \nu\xi = \eta - \nu(\|T\|df(X_n) + \nu\eta) = \|T\|^2\eta - \nu\|T\|df(X_n)$, e $\xi = \|T\|df(X_n) + \nu\eta$ podemos reescrever o campo vetorial η_t como segue:

$$\begin{aligned}
\eta_t &= -c\|T\|S_c(s)\xi_1\circ f + C_c(s)(\|T\|^2\eta - \nu\|T\|df(X_n)) - \nu\sin(t\nu)\xi_2\circ f \\
&\quad +\nu\cos(t\nu)(\|T\|df(X_n) + \nu\eta) \\
&= -c\|T\|S_c(s)\xi_1\circ f + \big(\|T\|^2 C_c(s) + \nu^2\cos(t\nu)\big)\eta - -\nu\sin(t\nu)\xi_2\circ f \\
&\quad +\nu\|T\|\big(\cos(t\nu) - C_c(s)\big)df(X_n).
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Um cálculo direto a partir das equações (2.13), (2.37) e (2.40) nos fornece que $\langle df_t(X_i), \eta_t\rangle = 0$, ou seja, η_t é o campo vetorial normal da hipersuperfície paralela η_t □

Como foi feito para o cálculo de $df_t(X)$ iremos separar η_t da seguinte maneira:

$$\eta_t = \mathscr{Y}_1 + \mathscr{Y}_2 + \mathscr{Y}_3 + \mathscr{Y}_4, \tag{2.41}$$

onde $\mathscr{Y}_1 = -c\|T\|S_c(s)\xi_1\circ f$, $\mathscr{Y}_2 = C_c(s)\eta_{\mathbb{Q}}$, $\mathscr{Y}_3 = -\nu\sin(t\nu)\xi_2\circ f$ e $\mathscr{Y}_4 = \nu\cos(t\nu)\xi$. Mais uma vez, usaremos a Proposição 2.3.1 e para escrever

$$\begin{aligned}
\widehat{\nabla}_{X_i}\mathscr{Y}_1 &= -cX_i(\|T\|S_c(s))\xi_1\circ f - c\|T\|S_c(s)\widehat{\nabla}_{X_i}\xi_1\circ f \\
&= -c\big(X_i(\|T\|)S_c(s) + t\|T\|X_i(\|T\|)C_c(s))\big)\xi_1\circ f - c\|T\|S_c(s)\widehat{\nabla}_{X_i}\xi_1\circ f \\
&= -c\big(X_i(\|T\|)S_c(s) + t\|T\|X_i(\|T\|)C_c(s))\big)\xi_1\circ f \\
&\quad -c\|T\|S_c(s)\big(df(X_i) - \langle X_i, T\rangle\xi\big).
\end{aligned}$$

Novamente, usando a Proposição 2.3.2 obtemos da última relação para $i \neq n$

$$\widehat{\nabla}_{X_i}\mathscr{Y}_1 = -c\|T\|S_c(s)df(X_i), \tag{2.42}$$

enquanto para $i = n$ inferimos

$$\begin{aligned}
\widehat{\nabla}_{X_n}\mathscr{Y}_1 &= -c\big(\nu\lambda_n S_c(s) + t\nu\lambda_n\|T\|C_c(s))\big)\xi_1\circ f \\
&\quad -c\|T\|S_c(s)\big(df(X_n) - \|T\|(\|T\|df(X_n) + \nu\eta)\big). \\
&= -c\big(\nu\lambda_n S_c(s) + t\nu\lambda_n\|T\|C_c(s))\big)\xi_1\circ f \\
&\quad -c\|T\|S_c(s)\big(\nu^2 df(X_n) - \|T\|\nu\eta)\big).
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Agora, calcularemos

$$\begin{aligned}\widehat{\nabla}_{X_i}\mathscr{Y}_2 &= -ctS_c(s)X_i(\|T\|)\eta_{\mathbb{Q}} + C_c(s)\widehat{\nabla}_{X_i}\eta_{\mathbb{Q}}\\ &= -ctS_c(s)X_i(\|T\|)\eta_{\mathbb{Q}}\\ &+ C_c(s)\big(-\lambda_i df(X_i) + c\nu\langle X_i, T\rangle(\xi_1\circ f) - X_i(\nu)\xi\big).\end{aligned}$$

Novamente pela Proposição 2.3.2 obtemos pela última relação para $i \neq n$

$$\widehat{\nabla}_{X_i}\mathscr{Y}_2 = -\lambda_i C_c(s) df(X_i), \tag{2.44}$$

e quando $i = n$ inferimos

$$\widehat{\nabla}_{X_n}\mathscr{Y}_2 = -ctS_c(s)\nu\lambda_n\eta_{\mathbb{Q}} + C_c(s)\big(-\lambda_n(df(X_n) - \|T\|\xi) + c\nu\|T\|(\xi_1\circ f)\big).$$

Uma vez que $\eta_{\mathbb{Q}} = \|T\|^2\eta - \nu\|T\|df(X_n)$, obtemos

$$\begin{aligned}\widehat{\nabla}_{X_n}\mathscr{Y}_2 &= -ctS_c(s)\nu\lambda_n\big(\|T\|^2\eta - \nu\|T\|df(X_n)\big)\\ &+ C_c(s)\big(-\lambda_n(df(X_n) - \|T\|\xi) + c\nu\|T\|(\xi_1\circ f)\big)\\ &= -ctS_c(s)\nu\lambda_n\big(\|T\|^2\eta - \nu\|T\|df(X_n)\big)\\ &+ C_c(s)\big(-\lambda_n(df(X_n) - \|T\|(\|T\|df(X_n) + \nu\eta)) + c\nu\|T\|(\xi_1\circ f)\big)\\ &= -ctS_c(s)\nu\lambda_n\big(\|T\|^2\eta - \nu\|T\|df(X_n)\big)\\ &+ C_c(s)\big(-\lambda_n\nu^2 df(X_n) + \lambda_n\|T\|\nu\eta)) + c\nu\|T\|(\xi_1\circ f)\big)\\ &= (ct\lambda_n\|T\|\nu^2 S_c(s) - \lambda_n\nu^2 C_c(s))df(X_n) + c\nu\|T\|C_c(s)(\xi_1\circ f)\\ &+ \big(-ct\lambda_n\nu\|T\|^2 S_c(s) + \lambda_n\|T\|_c(s)\big)\eta.\end{aligned} \tag{2.45}$$

Vejamos agora $\widehat{\nabla}_{X_i}\mathscr{Y}_3 = -\widehat{\nabla}_{X_i}\nu\sin(t\nu)\xi_2\circ f$. Então, temos que

$$\begin{aligned}-\widehat{\nabla}_{X_i}\mathscr{Y}_3 &= \big(\sin(t\nu) + t\nu\cos(t\nu)\big)X_i(\nu)\xi_2\circ f + \nu\sin(t\nu)\widehat{\nabla}_{X_i}\xi_2\circ f\\ &= -\lambda_n\|T\|\big(\sin(t\nu) + t\nu\cos(t\nu)\big)\xi_2\circ f + \nu\sin(t\nu)\langle X_i, T\rangle\xi.\end{aligned}$$

Novamente, devido a Proposição 2.3.2 obtemos da última relação para $i \neq n$

$$\widehat{\nabla}_{X_i}\mathscr{Y}_3 = 0, \tag{2.46}$$

enquanto para $i = n$ deduzimos

$$\begin{aligned}
\widehat{\nabla}_{X_n}\mathscr{Y}_3 &= \big(\sin(t\nu) + t\nu\cos(t\nu)\big)\lambda_n\|T\|\xi_2 \circ f - \nu\sin(t\nu)\|T\|\xi. \\
&= \big(\sin(t\nu) + t\nu\cos(t\nu)\big)\lambda_n\|T\|\xi_2 \circ f - \nu\sin(t\nu)\|T\|(\|T\|df_{X_n}) + \nu\eta). \qquad (2.47) \\
&= \big(\sin(t\nu) + t\nu\cos(t\nu)\big)\lambda_n\|T\|\xi_2 \circ f - \nu\sin(t\nu)\|T\|^2 df_{X_n}) - \nu^2\sin(t\nu)\|T\|\eta.
\end{aligned}$$

Agora, calculando $\widehat{\nabla}_{X_i}\mathscr{Y}_4 = \widehat{\nabla}_{X_i}\nu\cos(t\nu)\xi$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\widehat{\nabla}_{X_i}\mathscr{Y}_4 &= \big(\cos(t\nu) - t\nu\sin(t\nu)\big)X_i(\nu)\xi + \nu\cos(t\nu)\widehat{\nabla}_{X_i}\xi \\
&= \big(\cos(t\nu) - t\nu\sin(t\nu)\big)X_i(\nu)\xi - \nu\cos(t\nu)\langle X_i, T\rangle\xi_2 \circ f.
\end{aligned}$$

Novamente, usando a Proposição 2.3.2 concluímos da última relação para $i \neq n$

$$\widehat{\nabla}_{X_i}\mathscr{Y}_4 = 0, \tag{2.48}$$

quando $i = n$ obtemos

$$\begin{aligned}
\widehat{\nabla}_{X_n}\mathscr{Y}_4 &= -\big(\cos(t\nu) - t\nu\sin(t\nu)\big)\lambda_n\|T\|\xi - \nu\cos(t\nu)\|T\|\xi_2 \circ f. \\
&= -\big(\cos(t\nu) - t\nu\sin(t\nu)\big)\lambda_n\|T\|(\|T\|df(X_n) + \nu\eta) - \nu\cos(t\nu)\|T\|\xi_2 \circ f. \\
&= -\big(\cos(t\nu) - t\nu\sin(t\nu)\big)\lambda_n\|T\|^2 df(X_n) - \big(\cos(t\nu) - t\nu\sin(t\nu)\big)\lambda_n\|T\|\nu\eta \\
&\quad -\nu\cos(t\nu)\|T\|\xi_2 \circ f. \qquad (2.49)
\end{aligned}$$

A fim de computar $\widehat{\nabla}_{X_i}\eta_t$ para $i \neq n$, é suficiente usarmos as expressões (2.42), (2.44), (2.46), e (2.48). A partir, dessas relações, obtemso

$$\widehat{\nabla}_{X_i}\eta_t = -\left(c\|T\|S_c(s) + \lambda_i C_c(s)\right)df(X_i). \tag{2.50}$$

Para concluir, invocaremos as relações (2.43), (2.45), (2.47) e (2.49), a fim de obter para $i=n$, a seguinte identidade

$$\begin{aligned}
\widehat{\nabla}_{X_n}\eta_t &= \big(c(1-t\lambda_n)\nu\|T\|C_c(s)-c\lambda_{nc}(s)\big)\xi_1\circ f\\
&- \Big(\lambda_n(\|T\|^2\cos(t\nu)+\nu^2C_c(s))+c(1-t\lambda_n)\nu^2\|T\|S_c(s)\Big)df(X_n)\\
&- \big\{(1-t\lambda_n)\nu\|T\|^2\sin(t\nu)\big\}df(X_n)\\
&+ \nu\|T\|\Big((1-t\lambda_n)\big(c\|T\|S_c(s)-_c(s)in(t\nu)\big)-\lambda_n\big(\cos(t\nu)-C_c(s)\big)\Big)\eta\\
&- \big((1-t\lambda_n)\nu\|T\|\cos(t\nu)-\lambda_n\|T\|\sin(t\nu)\big)\xi_2\circ f.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Estamos interessados em obter uma relação entre as curvaturas principais de $f(M)$ e $f_t(M)$, para isso obteremos uma relação entre as direções principais de $f(M)$ e $f_t(M)$. Em linhas gerais temos a seguinte proposição.

Proposição 2.3.3. *Se $\{X_1,\ldots,X_n\}$ é um referencial de direções principais ortogonais de f, então ele é também um referencial de direções principais ortogonais de f_t.*

Demonstração. Observe das equações (2.36) e (2.37) que $\langle df_t(X_i),df_t(X_j)\rangle=0$ para $i\neq j$, com $i,j\in\{1,\ldots,n\}$. Logo, usando as expressões (2.50) e (2.51) concluímos que $\langle\widehat{\nabla}_{X_i}\eta_t,df_t(X_j)\rangle=0$, para todo $i\neq j$ com $i,j\in\{1,\ldots,n\}$ e, consequentemente $\{X_1,\ldots,X_n\}$ é um referencial de direções principais ortogonais em f_t. □

O próximo resultado nos fornece uma relação entre as curvaturas principais de uma hipersuperfície em $\mathbb{Q}_c^n\times\mathbb{S}^1$ que possuem uma direção principal igual a T e as curvaturas principais das hipersuperfícies paralelas a ela.

Proposição 2.3.4. *Sejam $f\colon M^n\to\mathbb{Q}_c^n\times\mathbb{S}^1$ uma hipersuperfície possuindo uma direção principal T e λ_i, $i\in\{1,\ldots,n\}$ suas curvaturas principais. Se f_t é uma família de hipersuperfícies paralelas à f com curvaturas principais λ_i^t, $i\in\{1,\ldots,n\}$, então, temos que*

1. $\lambda_i^t=\dfrac{c\|T\|S_c(s)+\lambda_iC_c(s)}{C_c(s)-\lambda_i\|T\|^{-1}S_c(s)},\quad i\neq n,$
2. $\lambda_n^t=\dfrac{\lambda_n}{1-t\lambda_n}.$

Demonstração. Observe que se $\{X_1,\ldots,X_n\}$ é um referencial ortogonal de direções principais de f, então é também um referencial ortogonal de direções principais de f_t.

Além disso, das relações (2.36) e (2.50) temos para todo $i\neq n$,

$$-\langle\widehat{\nabla}_{X_i}\eta_t,df_t(X_i)\rangle = (c\|T\|S_c(s)+\lambda_iC_c(s))\big(C_c(s)-\lambda_i\|T\|^{-1}S_c(s)\big). \tag{2.52}$$

Para $i = n$, para simplificar os cálculos, usaremos as seguintes notações

$$
\begin{aligned}
\mathscr{A}_1 &= (1 - t\lambda_n)c_c(s)\\
\mathscr{A}_2 &= (1 - t\lambda_n)\big(\nu^2 C_c(s) + \|T\|^2\cos(t\nu)\big)\\
\mathscr{A}_3 &= (1 - t\lambda_n)\|T\|\nu\,(\cos(t\nu) - C_c(s))\\
\mathscr{A}_4 &= -(1 - t\lambda_n)\|T\|\sin(t\nu).
\end{aligned}
$$

Usando essas relações podemos reescrever (2.37) da seguinte maneira

$$
df_t(X_n) = \mathscr{A}_1\xi_1\circ f + \mathscr{A}_2 df(X_n) + \mathscr{A}_3\eta + \mathscr{A}_4\xi_2\circ f. \tag{2.53}
$$

De maneira análoga, denotaremos

$$
\begin{aligned}
\mathscr{B}_1 &= c\nu\big((1 - t\lambda_n)\|T\|C_c(s) - \lambda_n S_c(s)\big)\\
\mathscr{B}_2 &= -\Big(\lambda_n(\|T\|^2\cos(t\nu) + (1 - t\lambda_n)\nu\big({}_{c}(s)\big) - c\nu\|T\|S_c(s) + \|T\|^2\sin(t\nu)\big)\Big)\\
\mathscr{B}_3 &= \nu\|T\|\Big((1 - t\lambda_n)\big(c\|T\|S_c(s) - \nu\sin(t\nu)\big) - \lambda_n(\cos(t\nu) - C_c(s))\Big)\\
\mathscr{B}_4 &= \|T\|\big(-(1 - t\lambda_n)\nu\cos(t\nu) + \lambda_n\sin(t\nu)\big).
\end{aligned}
$$

Dessa forma, utilizando tais notações, reescrevemos a equação (2.51) como segue

$$
\widehat{\nabla}_{X_n}\eta_t = \mathscr{B}_1\xi_1\circ f + \mathscr{B}_2 df(X_n) + \mathscr{B}_3\eta + \mathscr{B}_4\xi_2\circ f. \tag{2.54}
$$

Sob as simplificações acima, obtemos de (2.53) e (2.54)

$$
\langle\widehat{\nabla}_{X_n}\eta_t, df_t(X_n)\rangle = c\mathscr{A}_1\mathscr{B}_1 + \mathscr{A}_2\mathscr{B}_2 + \mathscr{A}_3\mathscr{B}_3 + \mathscr{A}_4\mathscr{B}_4. \tag{2.55}
$$

Assim, para calcularmos $\langle\widehat{\nabla}_{X_n}\eta_t, df_t(X_n)\rangle$ é suficiente calcularmos $\mathscr{A}_i\mathscr{B}_i$, for $i = 1,2,3,4$. Vamos agora fazer tais cálculos.

$$
\mathscr{A}_1\mathscr{B}_1 = (1 - t\lambda_n)^2\nu^2\|T\|S_c(s)C_c(s) - \lambda_n(1 - t\lambda_n)\nu^2 S_c(s)^2. \tag{2.56}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathscr{A}_2\mathscr{B}_2 \;&=\; (1 - t\lambda_n)(\|T\|^2\cos(t\nu) + \nu^2 C_c(s))\big(-\lambda_n(\|T\|^2\cos(t\nu) + \nu^2 C_c(s))\\
&-\; c\nu^2\|T\|S_c(s)(1 - t\lambda_n)(1 - t\lambda_n)\nu\|T\|^2\sin(t\nu)\big)\\
&=\; -\lambda_n(1 - t\lambda_n)(\|T\|^4\cos(t\nu)^2 + 2\|T\|^2\nu^2\cos(t\nu)C_c(s)) + \nu^2 C_c(s)^2)\\
&-\; c(1 - t\lambda_n)^2\nu^4\|T\|C_c(s)S_c(s) - c(1 - t\lambda_n)^2\nu^2\|T\|^3 S_c(s)\cos(t\nu)\\
&-\; (1 - t\lambda_n)^2\nu^2\|T\|^2 C_c(s)\sin(t\nu) - (1 - t\lambda_n)^2\nu\|T\|^4\cos(t\nu)\sin(t\nu).
\end{aligned} \tag{2.57}
$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_3\mathscr{B}_3 &= (1-t\lambda_n)\|T\|\nu\big(\cos(t\nu)-C_c(s)\big)\big(-\nu\|T\|\lambda_n(\cos(t\nu)-C_c(s))\\
&+ c\nu\|T\|^2S_c(s)(1-t\lambda_n)-(1-t\lambda_n)\nu^2\|T\|\sin(t\nu)\big)\\
&= -\lambda_n(1-t\lambda_n)\|T\|^2\nu^2\big(cos(t\nu)^2-2\cos(t\nu)C_c(s))+C_c(s)^2\big)\\
&+ c(1-t\lambda_n)^2\nu^2\|T\|^3\cos(t\nu)S_c(s)-(1-t\lambda_n)^2\nu^3\|T\|^2\sin(t\nu)\cos(t\nu)\\
&- c(1-t\lambda_n)^2\nu^2\|T\|^3C_c(s)S_c(s)\\
&- (1-t\lambda_n)^2\nu^3\|T\|^2C_c(s)\sin(t\nu). \qquad (2.58)
\end{aligned}$$

$$\mathscr{A}_4\mathscr{B}_4 = (1-t\lambda_n)^2\nu\|T\|^2\sin(t\nu)\cos(t\nu)-\lambda_n(1-t\lambda_n)\|T\|^2\sin(t\nu)^2. \qquad (2.59)$$

Substituindo as equações (2.56), (2.57), (2.58) e (2.59) em (2.55), obtemos

$$\langle\widehat{\nabla}_{X_n}\eta_t, df_t(X_n)\rangle = -\lambda_n(1-t\lambda_n). \qquad (2.60)$$

Para concluir a demonstração é suficiente usarmos a primeira equação do Lema 2.3.1 e a identidade (2.52) para obter a primeira assertiva da proposição. Já a segunda segue da última expressão do Lema 2.3.1 e da equação (2.60). Isso completa a prova da proposição. □

2.4 Hipersuperfícies paralelas na esfera

Como feito anteriormente nas variedades produto, trataremos agora de estudar as hipersuperfícies paralelas a uma hipersuperfície da esfera $\mathbb{S}^{n+1}$, relacionando as suas propriedades geométricas com as propriedades geométricas da hipersuperfície original.

Definição 2.4.1. *Seja $f : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientada na esfera $\mathbb{S}^{n+1}$, com campo vetorial normal unitário η. A hipersuperfície paralela à $f(M)$ a uma distância, com sinal, $t \in \mathbb{R}$ é a aplicação $f_t : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$, tal que para cada ponto $x \in M$, o ponto $f_t(x)$ é obtido por transladar a uma distância com sinal $t \in \mathbb{R}$ ao longo da geodésica em $\mathbb{S}^{n+1}$ com ponto inicial $f(x)$ e vetor tangente inicial $\eta(x)$.*

Assim, dada uma hipersuperfície da esfera $f : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$, a família de hipersuperfícies paralelas à ela, é definida pela seguinte expressão:

$$f_t(X) = \cos(t)f(x)+\sin(t)\eta(x). \qquad (2.61)$$

Vamos agora obter uma expressão para o campo vetorial normal à $f_t(M)$ em termos da hipersuperfície $f(M)$

Lema 2.4.1. *Sejam* $f : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ *uma hipersuperfície orientada com campo vetorial unitário normal* η *e* $f_t : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ *uma família de hipersuperfícies paralelas. Então, o campo vetorial unitário* η_t *normal a* f_t *é dado por*

$$\eta_t(x) = -\sin(t)f(x) + \cos(t)\eta(x), \tag{2.62}$$

Demonstração. Inicialmente, verificaremos que o campo $-\sin(t)f(x)+\cos(t)\eta(x)$ é normal a $f_t(M)$, dado $X \in T_xM$, temos que

$$df_t(X) = \cos(t)df(X) + \sin(t)D_X\eta, \tag{2.63}$$

onde, D denota a conexão Riemanniana de $\mathbb{S}^{n+1}$.

Como η é unitário, temos que $g(\eta, D_X\eta) = 0$, uma vez que η é o campo vetorial normal a hipersuperfície $f(M)$, temos que $g(df(X),\eta) = 0$. Desde que $f(x)$ é ortogonal a $T_{f(x)}S^{n+1}$, temos que $g(f(x), df(x)) = 0$ e $g(f(x), D_X\eta) = 0$, e por conseguinte

$$g(df(X), -\sin(t)f(x) + \cos(t)\eta(x)) = 0,$$

ou seja, $-\sin(t)f(x)+\cos(t)\eta(x)$ é normal a $f_t(M)$. Por outro lado, como $g(f(x),\eta(x)) = 0$, temos que

$$\| -\sin(t)f(x) + \cos(t)\eta(x)\| = \sin^2(t)\|f(x)\|^2 + \cos^2(t)\|\eta\|^2$$

E pelo fato que $\|f(x)\| = 1$ e $\|\eta\| = 1$, segue que o campo é unitário, ou seja $-\sin(t)f(x)+\cos(t)\eta(x)$ é um campo vetorial unitário, normal à imersão $f_t(M)$ conforme o enunciado. $\square$

Usando a expressão para o campo vetorial normal unitário que acabamos de obter, iremos estabelecer uma relação entre as curvaturas principais de uma hipersuperfície $f(M)$ e as da sua família de hipersuperfícies paralelas. Mais explicitamente, temos o seguinte lema.

Lema 2.4.2. *Sejam* $f : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ *uma hipersuperfície orientada com campo vetorial unitário normal* η *e* $f_t : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ *uma família de hipersuperfícies paralelas com campo vetorial unitário normal* η *dado por (2.62). Então, as curvaturas principais de* $f_t(M)$*, com relação ao campo* η_t *são:*

$$\lambda_i^t(x) = \frac{\sin(t) + \lambda_i(x)\cos(t)}{\cos(t) - \lambda_i(x)\sin(t)}, \tag{2.64}$$

onde $\lambda_\imath(x)$ são as $\imath$-ésima curvaturas principais de $f(M)$ em $x \in M$, para todo $\imath = 1, \ldots, n$. Além disso, se $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset T_xM$ é uma base ortonormal de direções principais de $f(M)$, então

$$g_t(e_i, e_j) = \left[\cos(t) - \lambda_i(x)\sin(t)\right]^2 \delta_{ij}. \tag{2.65}$$

Demonstração. Para cada ponto $x \in M$, escolha uma base ortonormal de direções principais da segunda forma fundamental α. Dessa forma ela deve satisfazer $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ e $\alpha(e_i, e_j) = \lambda_i \delta_{ij}$. Da equação (2.63), temos que

$$\begin{aligned} g_t(e_i, e_j) &= \left\langle df_t(e_i), df_t(e_j)\right\rangle_x \\ &= \cos(t)^2\left\langle df(e_i), df(e_j)\right\rangle + 2\sin(t)\cos(t)\left\langle df(e_i)), D_{e_j}\eta\right\rangle \\ &+ \sin(t)^2\left\langle D_{e_i}\eta, D_{e_j}\eta\right\rangle \\ &= \cos(t)^2 g(e_i, e_j) - 2\sin(t)\cos(t)\lambda_i g(e_i, e_j) \\ &+ \sin(t)^2\lambda_i^2 g(e_i, e_j) \\ &= \cos(t)^2\delta_{ij} - 2\sin(t)\cos(t)\lambda_i\delta_{ij} + \sin(t)^2\lambda_i^2\delta_{ij} \\ &= \left(\cos(t) - \lambda_i\sin(t)\right)^2\delta_{ij}. \end{aligned} \tag{2.66}$$

Diferenciando a equação (2.62), na direção de um campo $X \in T_xM$, obtemos que

$$D_X\eta_t = -\sin(t)df(X) + \cos(t)D_X\eta,$$

e assim

$$\begin{aligned} -\alpha_t(e_i, e_j) &= \left\langle df_t(e_i), D_{e_j}\eta_t\right\rangle_x \\ &= -\sin(t)\cos(t)\left\langle df(e_i), df(e_j)\right\rangle - \sin(t)^2\left\langle df(e_i)), D_{e_j}\eta\right\rangle \\ &- \cos(t)^2\left\langle df(e_j)), D_{e_i}\eta\right\rangle + \sin(t)\cos(t)\left\langle D_{e_i}\eta, D_{e_j}\eta\right\rangle \\ &= -\sin(t)\cos(t)g(e_i, e_j) + \sin(t)^2\lambda_i g(e_i, e_j) \\ &- \cos(t)^2\lambda_i g(e_i, e_j) + \sin(t)\cos(t)\lambda_i^2 g(e_i, e_j) \\ &= -\left(\cos(t) - \lambda_i\sin(t)\right)\left(\sin(t) + \lambda_i\cos(t)\right)\delta_{ij}. \end{aligned} \tag{2.67}$$

Assim, das identidades (2.66) e (2.67) concluímos que

$$\lambda_\imath^t(x) = \frac{\sin(t) + \lambda_\imath(x)\cos(t)}{\cos(t) - \lambda_\imath(x)\sin(t)}.$$

$\square$

3 CARACTERIZAÇÃO DE HIPERSUPERFÍCIES VIA FLUXO POR HIPERSUPERFÍCIES PARALELAS

Neste capítulo apresentaremos os principais resultados do trabalho. Usando o fluxo geométrico, obteremos uma nova caracterização para as hipersuperfícies isoparamétricas de $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R}$ e de $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{S}^1$ e além disso apresentaremos uma nova caracterização para hipersuperfícies umbílicas que são mergulhadas na esfera $\mathbb{S}^{n+1}$. Inicialmente, faremos uma contextualização de tais hipersuperfícies, apresentando uma definição conveniente e alguns resultados que nos permitirão obter os resultados principais.

3.1 Definições e resultados essenciais

Hipersuperfícies isoparamétricas vem sendo objeto de estudo bastante frutífero desde a sua descoberta, nesse período foi obtido uma série de caracterizações. Dessa forma, foram surgindo novas definições para tais hipersuperfícies, dentre elas destacamos uma devido a Cartan (CARTAN, 1939a) a qual utilizaremos nessa seção. Convém ressaltarmos que tal caracterização possibilitou Cartan demonstrar que as hipersuperfícies isoparamétricas das formas espaciais são as hipersuperfícies que possuem curvaturas principais constantes.

Usando tal definição de hipersuperfícies isoparamétricas, Chaves e Santos (CHAVES; SANTOS, 2015) demonstraram que as hipersuperfícies de $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R}$, com ângluo constante, são isoparamétricas, se e somente se, tais hipersuperfícies possuem as curvaturas principais constantes. Adaptando a demonstração de tal fato, nesta seção obteremos o resultado para hipersuperfícies imersas em $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{S}^1$.

Definição 3.1.1. *Uma hipersuperfície $f : M^n \to \tilde{M}^{n+1}$ é uma hipersuperfície isoparamétrica, se ela e a família de hipersuperfícies paralelas a ela f_t possuem curvatura média constante.*

Fixando notação, denote $\mathbb{Q}_k^1$ para representar o espaço euclidiano $\mathbb{R}$, se $k = 0$ e $\mathbb{S}^1$ caso $k = 1$. Temos então a seguinte proposição:

Proposição 3.1.1. *Seja $f : M^n \to \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{Q}_k^1$ uma hipersuperfície isoparamétrica que possui T como uma direção principal. Então f possui curvaturas principais constantes se,e somente se, a função ângulo é constante*

Demonstração. Para o caso $k=0$, ou seja, para um hipersuperfície isoparamétrica de $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R}$, como mencionamos anteriormente, podemos encontrar em (CHAVES; SANTOS, 2015). Procedendo de maneira análoga ao que foi feito, faremos o caso $f : M^n \to \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{S}^1$.

Por definição uma hipersuperfície é isoparamétrica se ela e sua família de hipersuperfícies paralelas possuem curvatura média constante. Dessa forma, podemos definir a função que assume valores reais

$$\alpha(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^t,$$

onde λ_i^t são determinados em (2.3.4) e definidos por:

1. $\lambda_i^t = \dfrac{c\|T\|S_c(s) + \lambda_i C_c(s)}{C_c(s) - \lambda_i \|T\|^{-1} S_c(s)}, \quad i \neq n,$
2. $\lambda_n^t = \dfrac{\lambda_n}{1 - t\lambda_n},$

onde $s = s(t) = t\|T\|$

Suponha que f possua as curvaturas principais constantes, então $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k, 1 \leq k \leq n$, é constante. Derivando, obtemos $\alpha'(s) = \sum_{i=1}^{n-1}(c\|T\|^2 + (\lambda_i^s)^2) + (\lambda_n^s)^2$, e, portanto

$$\alpha'(0) = (n-1)c\|T\|^2 + \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i)^2.$$

Logo $\|T\|$ é constante, e consequentemente ν também é constante. Reciprocamente, suponha que ν é constante, e assim, por (2.1.1), temos que $\lambda_n = 0$, por conseguinte $\lambda_n^t = 0$. Dessa forma, $\alpha(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^t$. E consequentemente a k-ésima derivada de α satisfaz $\alpha^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^k \lambda_i^t}{\partial t^k}$, observe agora que:

$$\frac{\partial \lambda_i^t}{\partial t} = c\|T\|^2 + (\lambda_i^t)^2, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial^2 \lambda_i^t}{\partial t^2} = 2c\|T\|^2 \lambda_i^t + (\lambda_i^t)^3. \tag{3.2}$$

Provaremos por indução, que para $2 \leq k \leq n$ ímpar, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k \lambda_i^t}{\partial t^k} &= a_{k,0} c^{\frac{k+1}{2}} \|T\|^{k+1} + a_{k,2} c^{\frac{k-1}{2}} \|T\|^{k-1} (\lambda_i^t)^2 + a_{k,4} c^{\frac{k-3}{2}} \|T\|^{k-3} (\lambda_i^t)^4 \\ &+ \cdots + a_{k,k+1} (\lambda_i^t)^{k+1}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde $a_{k,l}$ denota o j-ésimo coeficiente da k-ésima derivada de λ_i^t.

Para $2 \leq k \leq n$ par, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^k \lambda_i^t}{\partial t^k} &= a_{k,1}c^{\frac{k}{2}}\|T\|^k\lambda_i^t + a_{k,3}c^{\frac{k-2}{2}}\|T\|^{k-2}(\lambda_i^t)^3 + a_{k,5}c^{\frac{k-4}{2}}\|T\|^{k-4}(\lambda_i^t)^5 \\
&+ \cdots + a_{k,k+1}(\lambda_i^t)^{k+1},
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

onde $a_{k,0} = a_{k-1,1}$, $a_{k,1} = 2a_{k-1,2}$, $a_{k,2} = 3a_{k-1,3} + a_{k-1,1}$, $\ldots$,$a_{k,j} = (j+1)a_{k-1,j+1} + (j-1)a_{k-1,j-1}$,$\ldots$, $a_{k,k+1} = ka_{k-1,k}$. Note que quando k é ímpar, o j do $a_{k,j}$ é um número par e quando k é par o j é um número ímpar.

Por (3.1), temos que $a_{1,2} = 1$, para $k = 2$, por (3.2) temos que

$$
\frac{\partial^2 \lambda_i^t}{\partial t^2} = 2c\|T\|^2\lambda_i^t + (\lambda_i^t)^3 = 2a_{1,2}c^{\frac{2}{2}}\|T\|^2\lambda_i^t + 2a_{1,2}(\lambda_i^t)^{1+2} = a_{2,1}c^{\frac{2}{2}}\|T\|^2\lambda_i^t + a_{2,3}(\lambda_i^t)^{2+1},
$$

que verifica (3.4).

Por hipótese de indução, suponha que (3.3) e (3.4) se verifiquem para $k-1$. Mostraremos que vale para k.

Se k é par então $k = 1$ é ímpar e portanto vale (3.3), ou seja:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^{k-1} \lambda_i^t}{\partial t^{k-1}} &= a_{k-1,0}c^{\frac{k}{2}}\|T\|^k + a_{k-1,2}c^{\frac{k-2}{2}}\|T\|^{k-2}(\lambda_i^t)^2 + a_{k-1,4}c^{\frac{k-4}{2}}\|T\|^{k-4}(\lambda_i^t)^4 \\
&+ \cdots + a_{k-1,k}(\lambda_i^t)^k.
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

Derivando a expressão (3.5,) em relação a t, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^k \lambda_i^t}{\partial t^k} &= 2a_{k-1,2}c^{\frac{k-2}{2}}\|T\|^{k-2}\lambda_i^t(\frac{\partial \lambda_i^t}{\partial t}) + 4a_{k-1,4}c^{\frac{k-4}{2}}\|T\|^{k-4}(\lambda_i^t)^3(\frac{\partial \lambda_i^t}{\partial t}) \\
&+ \cdots + ka_{k-1,k}(\lambda_i^t)^{k-1}(\frac{\partial \lambda_i^t}{\partial t}) \\
&= 2a_{k-1,2}c^{\frac{k-2}{2}}\|T\|^{k-2}\lambda_i^t(c\|T\|^2 + (\lambda_i^t)^2) + 4a_{k-1,4}c^{\frac{k-4}{2}}\|T\|^{k-4}(\lambda_i^t)^3(c\|T\|^2 + (\lambda_i^t)^2) \\
&+ \cdots + ka_{k-1,k}(\lambda_i^t)^{k-1}(c\|T\|^2 + (\lambda_i^t)^2) \\
&= 2a_{k-1,2}c^{\frac{k}{2}}\|T\|^k\lambda_i^t + (2a_{k-1,2} + 4a_{k-1,4})c^{\frac{k-2}{2}}\|T\|^{k-2}(\lambda_i^t)^3 + \cdots + ka_{k-1,k}(\lambda_i^t)^{k+1} \\
&= a_{k,1}c^{\frac{k}{2}}\|T\|^k\lambda_i^t + a_{k,3}c^{\frac{k-2}{2}}\|T\|^{k-2}(\lambda_i^t)^3 + \cdots + a_{k,k+1}(\lambda_i^t)^{k+1}.
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

Logo vale (3.4), analogamente, mostra-se (3.3).

Assim, como $\lambda_n = 0$, temos que $\alpha(0) = \sum_{i=1}^{n=1}\lambda_i = C_1$, C_1 constante e

$$
\alpha'(0) = \sum_{i=1}^{n-1}(c\|T\|^2 + \lambda_i^2).
$$

O que implica que $\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i^2 = C_2$, onde C_2 é uma constante. Segue que

$$\alpha''(0) = (n-1)2c\|T\|^2\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i + 2\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i^3 = (n-1)2c\|T\|^2 C_1 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i^3,$$

e daí $\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i^3 = C_3$, com C_3 constante. Se k é par, temos

$$\begin{aligned}
\alpha^k(0) &= a_{k,1}c^{\frac{k}{2}}\|T\|^k\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i + a_{k,3}c^{\frac{k-2}{2}}\|T\|^{k-2}\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i^3 + a_{k,5}c^{\frac{k-4}{2}}\|T\|^{k-4}\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i^5 \\
&+ \cdots + a_{k,k+1}\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i^{k+1} \\
&= a_{k,1}c^{\frac{k}{2}}\|T\|^k C_1 + a_{k,3}c^{\frac{k-2}{2}}\|T\|^{k-2}C_3 + a_{k,5}c^{\frac{k-4}{2}}\|T\|^{k-4}C_5 + \cdots + a_{k,k+1}\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i^{k+1}.
\end{aligned}$$

Logo $\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i^{k+1}$ é constante. Analogamente, obtemos o mesmo para k ímpar.
Portanto, concluímos que $\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i^k$ com $1 \leq k \leq n$, é constante. Segue-se que as funções λ_i são constantes. □

Corolário 3.1.1. *Seja $f : M^n \to \mathbb{Q}_c^{n+1} \times \mathbb{Q}_k^1$ uma hipersuperfície de ângulo constante e $T \neq 0$. Então, f é isoparamétrica, se e somente se, as curvaturas principais são constantes.*

Demonstração. Por hipótese, f possui a função ν constante e com $\nu^2 + \|T\|^2 = 1$, segue que $\|T\|$ é constante. Além disso, uma vez que $T \neq 0$ temos pela Proposição (2.3.2), que $\lambda_n = 0$, então segue-se da Proposição (2.3.4) que $\lambda_n^t = 0$.

Supondo que as curvaturas principais de f sejam constantes , então, uma vez que $\|T\|$ é constante segue que as curvaturas principais da família paralela também o são, dessa forma, tanto a curvatura média de f e de f_t são constantes, ou seja, f é uma hipersuperfície isoparamétrica. A recíproca segue do lema anterior. □

3.2 Fluxo pela curvatura média - $\mathscr{MCF}$

A seguir, apresentaremos uma nova caracterização para hipersuperfícies isoparamétricas dos produtos Riemannianos $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$ e $\mathbb{H}^n \times \mathbb{S}^1$.

Seja $f : M^n \to \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{Q}_k^1$ uma hipersuperfície orientada com campo vetorial unitário normal η. Uma família de hipersuperfícies a um parâmetro $\widehat{F} : M^n \times I \to \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{Q}_k^1$, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, é a solução do *Fluxo pela curvatura média* ($\mathscr{MCF}$) com condição inicial f, se

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\widehat{F}(x,t) = \widehat{H}(x,t)\widehat{\eta}(x,t), \\ \widehat{f}(x,0) = f(x), \end{cases} \tag{3.7}$$

onde, $\widehat{H}^t(.) = \widehat{H}(.,t) = \sum_{i=1}^n \widehat{k}_i^t$ é a curvatura média e $\widehat{\eta}^t(.) = \widehat{\eta}(.,t)$ é o campo vetorial unitário normal a $\widehat{F}^t(M)$. Quando f é uma hipersuperfície mínima i.e. $H = 0$, então a família $\widehat{F}(t,x) = f(x)$ nos fornece uma solução trivial para o $\mathscr{MCF}$.

Definição 3.2.1. *Seja $f : M^n \to \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{Q}_k^1$ uma solução do fluxo pela curvatura média em $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{Q}_k^1$ com condição inicial $f : M^n \to \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{Q}_k^1$. Dizemos que $\widehat{f}$ é uma solução para o fluxo pela curvatura média ($\mathscr{MCF}$) por hipersuperfícies paralelas se existe uma função $h : I \to \mathbb{R}$, tal que $h(0) = 0$ e*

$$\widehat{f}_t(x) = f_{h(t)}(x), \tag{3.8}$$

para todo $t \in I$, onde f_t é a família de hipersuperfícies paralelas a f.

Primeiro, trataremos o caso em que $k = 0$, i.e, $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{Q}_k^1 = \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$.

Teorema 3.2.1. *Seja $f : M^n \to \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R}$ uma hipersuperfície com ângulo constante. Então, $f(M)$ é condição inicial para o $\mathscr{MCF}$ por hipersuperfícies paralelas se, e somente se, $f(M)$ é uma hipersuperfície isoparamétrica.*

Demonstração. Sabemos que a dada uma imersão $f : M^n \to \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R}$ a família paralela $\widehat{f}_t$ é definida por

$$\widehat{f}_t = C_c(h(t)\|T\|)\xi \circ f + S_c(h(t)\|T\|)\|T\|^{-1}\eta_{\mathbb{Q}} + (\pi_2 \circ f + h(t)\nu)\partial/\partial t.$$

Dessa forma, derivando em relação a t, obtemos que

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{f}_t(x) = h'(t)\big(-c\|T\|S_c(h(t)\|T\|)\xi \circ f + C_c(h(t)\|T\|)\eta_{\mathbb{Q}} + \nu\frac{\partial}{\partial t}\big). \tag{3.9}$$

Se $\widehat{f}_t$ é a solução do $\mathscr{MCF}$, então:

$$h'(t)\big(-c\|T\|S_c(h(t)\|T\|)\xi \circ f + C_c(h(t)\|T\|)\eta_{\mathbb{Q}} + \nu\frac{\partial}{\partial t}\big) = \widehat{H}_t(x)\eta_t(x),$$

e da relação (2.15) concluímos que

$$h'(t) = \widehat{H}_t(x). \tag{3.10}$$

Segue então, que para cada t fixado, a curvatura média $\widehat{H}_t$ é constante, ou seja $f(M)$ é isoparamétrica. Reciprocamente, se $f(M)$ é isoparamétrica, temos então pelo Teorema 3.2.1 que $f(M)$ possui as curvaturas principais constantes. Seja $h(t)$ a única solução da equação diferencial

$$h'(t) = \sum_{\iota=1}^{n} \widehat{\lambda}_\iota^t = \sum_{\iota=1}^{n-1} \frac{c\|T\|S_c(h(t)\|T\|) + \lambda_i C_c(h(t)\|T\|)}{C_c(h(t)\|T\|) - \lambda_i \|T\|^{-1} S_c(h(t)\|T\|)}, \tag{3.11}$$

tal que $h(0) = 0$, onde λ_j é a j-ésima curvatura principal de $f(M)$.

Considerando $\widehat{f}_t(x)$ definida por

$$\widehat{f}_t(x) = C_c h(t)\|T\|)\xi \circ f + S_c(h(t)\|T\|)\|T\|^{-1}\eta_{\mathbb{Q}} + (\pi_2 \circ f + t\nu)\partial/\partial t.$$

derivando com respeito a t, obtemos que:

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{f}(x,t) = h'(t)\big(-c\|T\|S_c(h(t)\|T\|)\xi \circ f + C_c(h(t)\|T\|)\eta_{\mathbb{Q}} + \nu\frac{\partial}{\partial t}\big), \tag{3.12}$$

Além disso, pela equação (2.15), temos

$$\eta_t = -c\|T\|S_c(h(t)\|T\|)\xi \circ f + C_c(h(t)\|T\|))\eta_{\mathbb{Q}} + \nu\frac{\partial}{\partial t}$$

e

$$\widehat{H}_t(x) = h'(t).$$

Dessa forma, segue que

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{f}_t(x) \quad = \quad \widehat{H}_t(x)\eta_t(x).$$

Além disso, como $h(0) = 0$, temos que $\widehat{f}_0(x) = f(x)$, ou seja, $\widehat{f}_t$ é a solução do $\mathscr{MCF}$. $\square$

A seguir, consideraremos o caso em que $k = 1$, i.e, $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{Q}_k^1 = \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1$.

Teorema 3.2.2. *Seja $f : M^n \to \mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{S}^1$ uma hipersuperfície com ângulo constante. Então, $f(M)$ é condição inicial da solução do $\mathscr{MCF}$ por hipersuperfícies paralelas se, e somente se, $f(M)$ é uma hipersuperfície isoparamétrica.*

Demonstração. Sabemos que a dada uma imersão $f : M^n \to \mathbb{Q}^n \times \mathbb{S}^1$ a família paralela $\widehat{f}_t$ é definida por:

$$\widehat{f}_t = C_c(h(t)\|T\|)\xi_1 \circ f + S_c(h(t)\|T\|)\|T\|^{-1}\eta_{\mathbb{Q}} + \cos(h(t)\nu)\xi_2 \circ f + \sin(h(t)\nu)\xi.$$

Então, derivando com respeito a t e denotando $u(t) = h(t)\|T\|$, obtemos que:

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{f}(x,t) = h'(t)\big(-c\|T\|S_c(u(t))\xi_1 \circ f + C_c(u(t))\eta_{\mathbb{Q}} - \nu\sin(h(t)\nu)\xi_2 \circ f + \nu\cos(h(t)\nu)\xi\big).$$

Se $\widehat{f}_t$ é a solução do $\mathscr{MCF}$, então:

$$h'(t)\big(-c\|T\|S_c(u(t))\xi_1 \circ f + C_c(u(t))\eta_{\mathbb{Q}} - \nu\sin(h(t)\nu)\xi_2 \circ f + \nu\cos(h(t)\nu)\xi\big) = \widehat{H}_t(x)\eta_t(x).$$

Assim da equação (2.38) concluímos que

$$h'(t) = \widehat{H}_t(x). \tag{3.13}$$

Dessa forma, para cada t fixado, a curvatura média $\widehat{H}_t$ é constante. Segue então que a hipersuperfície $f(M)$ é isoparamétrica.

Reciprocamente, se $f(M)$ é uma hipersuperfície isoparamétrica, temos então pelo Teorema 3.2.1 que $f(M)$ possui as curvaturas principais constantes, seja $h(t)$ a única solução da equação diferencial ordinária

$$h'(t) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^t = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{c\|T\|S_c(u(t)) + \lambda_i C_c(u(t))}{C_c(u(t)) - \lambda_i\|T\|^{-1}S_c(u(t))}, \tag{3.14}$$

tal que $h(0) = 0$, onde λ_j é a j-ésima curvatura principal de $f(M)$.

Considerando $\widehat{f}_t(x)$ definida por (2.26) e derivando tal expressão com respeito a t, obtemos que :

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{f}(x,t) = h'(t)\big(-c\|T\|S_c(u(t))\xi_1 \circ f + C_c(u(t))\eta_{\mathbb{Q}} - \nu\sin(h(t)\nu)\xi_2 \circ f + \nu\cos(h(t)\nu)\xi\big),$$

Por outro lado, pelas equações (2.38) e (3.14) , temos que

$$\eta_t = -c\|T\|S_c(u(t))\xi_1 \circ f + C_c(u(t))\eta_{\mathbb{Q}} - \nu\sin(h(t)\nu)\xi_2 \circ f + \nu\cos(h(t)\nu)\xi$$

e $\widehat{H}_t(x) = h'(t)$.

Segue então que,

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{f}_t(x) \quad = \quad \widehat{H}_t(x)\eta_t(x).$$

Além disso, desde que $h(0) = 0$, temos $\widehat{f}_0(x) = f(x)$, ou seja, $\widehat{f}_t$ é a solução do $\mathscr{MCF}$.

□

3.3 Fluxo por hipersuperfícies paralelas em $\mathbb{S}^{n+1}$

Nesta seção obteremos uma nova caracterização para hipersuperfícies umbílicas, não totalmente geodésicas, mergulhadas em $\mathbb{S}^{n+1}$.

Seja $f : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientada com um campo vetorial unitário normal N. Uma família a um parâmetro de hipersuperfícies $\widehat{F} : M^n \times I \to \mathbb{S}^{n+1}$, $I \subset \mathbb{R}$ intervalo, é uma solução do *fluxo pelo inverso da curvatura média* ($\mathscr{IMCF}$) com condição inicial $f(M)$, se

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\widehat{F}(x,t) = -\dfrac{1}{\widehat{H}(x,t)}\widehat{N}(x,t), \\ \widehat{F}(x,0) = f(x), \end{cases} \tag{3.15}$$

onde $\widehat{H}^t(.) = \widehat{H}(.,t) = \sum_{i=1}^{n} \widehat{k}_i^t$ é a curvatura média e $\widehat{N}^t(.) = \widehat{N}(.,t)$ é o campo vetorial normal de $\widehat{f}_t(M)$.

Definição 3.3.1. *Seja $\widehat{f} : M^n \times I \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma solução do fluxo pelo inverso da curvatura média em $\mathbb{S}^{n+1}$ com condição inicial $f : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$. Dizemos que $\widehat{f}$ é uma solução para o fluxo pelo inverso da curvatura média ($\mathscr{IMCF}$) por hipersuperfícies paralelas se existe uma função $h : I \to \mathbb{R}$, tal que $h(0) = 0$ e*

$$\widehat{f}_t(x) = \cos\big(h(t)\big)f(x) + \sin\big(h(t)\big)\eta(x), \tag{3.16}$$

para todo $t \in I$, onde η é o campo vetorial unitário normal a $f(M)$.

Vamos agora apresentar o principal resultado desta seção e seus corolários.

Teorema 3.3.1. *Seja $f : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície mergulhada estritamente convexa. Então $f(M)$ é condição inicial da solução do $\mathscr{IMCF}$ por hipersuperfícies paralelas se, e somente se, $f(M)$ é uma hipersuperfície umbílica.*

Demonstração. Suponha que $\widehat{f}_t$ é dado por (3.16). Então,

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{f}_t(x) = h'(t)\big(-\sin(h(t))f(x) + \cos(h(t))\eta(x)\big). \tag{3.17}$$

Se $\widehat{f}_t$ é solução do $\mathscr{IMCF}$, então (3.15) se reduz :

$$h'(t)\big(-\sin(h(t))f(x) + \cos(h(t))\eta(x)\big) = -\frac{1}{\widehat{H}_t(x)}\eta_t(x).$$

Logo da relação (2.62) concluímos que

$$h'(t) = -\frac{1}{\widehat{H}_t(x)}. \tag{3.18}$$

Dessa forma, para cada t fixado, a curvatura média $\widehat{H}_t$ é constante, segue então que $f(M)$ é uma hipersuperfícies isoparamétrica.

É provado em (MAKOWSKI; SCHEUER, 2016) que o $\mathscr{IMCF}$ é suave em um intervalo $[0,t^*)$, com $\widehat{f}_t(M)$ convergindo a um equador, como $t \to t^*$, segue que $t^* \in \mathbb{R}$ é finito, e tal que

$$\lim_{t \to t^*} \lambda_i^{h(t)}(x) = 0.$$

Dessa forma, levando em consideração que $\lambda_i^{h(t)}(x) = \frac{\sin\big(h(t)\big)+\lambda_\imath(x)\cos\big(h(t)\big)}{\cos\big(h(t)\big)-\lambda_\imath(x)\sin\big(h(t)\big)}$, temos que

$$\lim_{t \to t^*}\Big(\sin\big(h(t)\big) + \lambda_\imath(x)\cos\big(h(t)\big)\Big) = 0,$$

obtendo assim que $\sin\big(h(t^*)\big) + \lambda_\imath(x)\cos\big(h(t^*)\big) = 0$. Usando o fato que $f(M)$ é estritamente convexo, deduzimos que $\cos\big(h(t^*)\big) \neq 0$ e $\sin\big(h(t^*)\big) \neq 0$. Segue que $\lambda_\imath(x) = -\frac{\sin\big(h(t^*)\big)}{\cos\big(h(t^*)\big)}$ para todo $i = 1,\ldots,n$, ou seja, $f(M)$ é uma hipersuperfície umbílica.

Reciprocamente, se $f(M)$ é uma hipersuperfície umbílica, ou seja, se a segunda forma da imersão é tal que $\alpha_x(,) = \lambda g_x(,)$, para todo $x \in M$, defina $h(t)$ com a única solução da equação diferencial ordinária

$$h'(t) = -\frac{1}{n}\frac{\cos\big(h(t)\big) - \lambda\sin\big(h(t)\big)}{\sin\big(h(t)\big) + \lambda\cos\big(h(t)\big)} \tag{3.19}$$

tal que $h(0) = 0$.

Considerando $\widehat{f}_t(x)$ dada pela relação (3.16), então, obtemos a identidade (3.17) . Além disso, segue do Lema (2.4.1), que

$$\eta_t(x) = -\sin(t)f(x) + \cos(t)\eta(x)$$

e

$$\widehat{H}_t(x) = \sum_{\imath=1}^{n}\widehat{\lambda}_\imath^t = \sum_{\imath=1}^{n}\frac{\sin(h(t)) + \lambda\cos(h(t))}{\cos(h(t)) - \lambda\sin(h(t))} = -\frac{1}{h'(t)}.$$

Dessa forma,

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{f}^t(x) \quad = \quad -\frac{1}{\widehat{H}^t(x)}\eta_t(x).$$

Além disso, uma vez que $h(0) = 0$, temos $\widehat{f}_0(x) = f(x)$, ou seja, $\widehat{f}_t$ é a solução do $\mathscr{IMCF}$, como desejado. $\square$

Agora, provaremos o seguinte resultado.

Corolário 3.3.1. *Seja $f : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície mergulhada umbílica estritamente convexa, com campo vetorial unitário normal η e curvaturas principais λ_ι. Então a solução do $\mathscr{IMCF}$ com condição inicial f é dada pela relação (3.16), onde $h(t)$ é a solução de*

$$h'(t) = -\frac{1}{n}\frac{\cos(h(t)) - \lambda \sin(h(t))}{\sin(h(t)) + \lambda\cos(h(t))}, \qquad h(0) = 0.$$

Demonstração. A prova do corolário é uma consequência imediata da demonstração anterior.

□

Corolário 3.3.2. *Seja $f : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície mergulhada umbílica estritamente convexa, com campo vetorial unitário normal η e curvaturas principais λ_ι. Então a solução do $\mathscr{IMCF}$ com condição inicial f é dado por*

$$\widehat{f}(t,x) = \frac{e^{t/n} + \lambda\sqrt{1+\lambda^2 - e^{2t/n}}}{1+\lambda^2} f(x) + \frac{-\lambda e^{t/n} + \sqrt{1+\lambda^2 - e^{2t/n}}}{1+\lambda^2}\eta(x)$$

$\widehat{f}$ é definido para todo $t \in \left(-\infty, t^*\right)$, onde $t^* = \frac{n}{2}\log(1+\lambda^2)$ e colapsa em um equador.

Demonstração. Pelo corolário anterior, temos que

$$h'(t)\big(\sin(h(t)) + \lambda\cos(h(t))\big) = -\frac{1}{n}\big(\cos(h(t)) - \lambda\sin(h(t))\big).$$

Considere $f(t) = -\cos(h(t)) + \lambda\sin(h(t))$. Note que $f(0) = 1$ e $f'(t) = \frac{1}{n}f(t)$. Dessa forma deduzimos que $f(t) = -e^{t/n}$, i.e.

$$-\cos(h(t)) + \lambda\sin(h(t)) = -e^{t/n}.$$

Segue que $\cos(h(t)) - e^{t/n} = \lambda\sin(h(t))$. Daí obtemos que:

$$\lambda^2\big(1 - \cos^2(h(t))\big) = \cos^2(h(t)) - 2e^{t/n}\cos(h(t)) + e^{2t/n}.$$

Consequentemente, obtemos que

$$\cos(h(t)) = \frac{e^{t/n} + \lambda\sqrt{1+\lambda^2 - e^{2t/n}}}{1+\lambda^2} \ \ e \ \ \sin(h(t)) = \frac{-\lambda e^{t/n} + \sqrt{1+\lambda^2 - e^{2t/n}}}{1+\lambda^2}$$

Dessa forma a solução do $\mathscr{IMCF}$ é dada por

$$\widehat{f}(t,x) = \frac{e^{t/n} + \lambda\sqrt{1+\lambda^2 - e^{2t/n}}}{1+\lambda^2} f(x) + \frac{-\lambda e^{t/n} + \sqrt{1+\lambda^2 - e^{2t/n}}}{1+\lambda^2}\eta(x),$$

e colapsa em $t^* = \frac{n}{2}\log(1+\lambda^2)$. Note que $\widetilde{\lambda}^{h(t^*)}(x) = 0$ enquanto que a métrica é dada por $\widetilde{g}_x^{h(t^*)}(e_i, e_j) = \left[\cos(h(t^*)) - \lambda \sin(h(t^*))\right]^2 \delta_{ij} = \sqrt{1+\lambda^2}\delta_{ij}$. Portanto $\widehat{f}$ colapsa em uma n-subvariedade totalmente geodésica da esfera, ou seja, colapsa em um equador em $t^* = \frac{n}{2}\log(1+\lambda^2)$

$\square$

4 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Inspirado em (CHAVES; SANTOS, 2015), construímos o fluxo por hipersuperfícies paralelas em $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{S}^1$ e a partir dessa construção pudemos obter várias informações com respeito às hipersuperfícies de $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{S}^1$ que possuem ângulo constante. De posse dessas informações conseguimos provar que hipersuperfícies com ângulo constante de $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{S}^1$ são isoparamétricas se, e somente se, possuem as curvaturas principais constantes. A partir dessa construção e da que foi feita por (CHAVES; SANTOS, 2015), obtivemos que uma hipersuperfície de $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{S}^1$ e $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{R}$, é isoparamétrica se, e somente se, é condição inicial para a solução do fluxo pela curvatura média por hipersuperfícies paralelas. Por fim, obtivemos uma caracterização a partir do $\mathscr{IMCF}$ para as subvariedades mergulhadas umbílicas estritamente convexas da esfera.

Convém ressaltarmos que as expressões obtidas a partir do fluxo por hipersuperfícies paralelas em $\mathbb{Q}_c^n \times \mathbb{S}^1$ poderão ser um ponto inicial para estudos futuros nessa direção. Bem como poderemos melhorar o Teorema 3.3.1 trocando a hipótese estritamente convexa para estrelada.

REFERÊNCIAS

ABRESCH, U.; ROSENBERG, H. A hopf differential for constant mean curvature surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. **Acta Math.**, v. 193, n. 2, p. 141–174, 2004.

ALEXANDROV, A. Zur theorie der gemischten volumina von konvexen körpern. ii. neue ungleichungen zwischen den gemischten volumina und ihre anwendungen. **Rec. Math. (Moscou) [Mat. Sbornik] (N.S.)**, n. 2, p. 4867–4878, 1937.

CARTAN, E. Familles de surfaces isoparamtriques dans les espaces courbure constante. **Ann. Mat. Pura Appl.**, v. 17, n. 1, p. 177–191, 1938.

CARTAN, E. Sur des familles remarquables d'hypersurfaces isoparamétriques dans les espaces sphériques. **Mathematische Zeitschrift**, v. 45, p. 335–367, December 1939.

CARTAN, E. Sur quelques familles remarquables d'hypersurfaces. **C. R. Congrès Math. Liège.**, p. 30–41, 1939.

CECIL, T.; RYAN, P. **Geometry of hypersurfaces**. [*S. l.*]: Springer Monographs in Mathematics, 2015.

CHAVES, R.; SANTOS, E. Hypersurfaces with constant principal curvatures in $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. **Illinois Journal of Mathematics**, v. 63, March 2015.

COLDING, T. H.; II, W. P. M.; PEDERSEN, E. K. Mean curvature flow. **Bull. Amer. Math. Soc.**, v. 52, n. 2, p. 297–333, 2015.

DAJCZER, M.; TOJEIRO, R. **Submanifold theory**: beyond an introduction. [*S. l.*]: Springer, 2019.

DANIEL, B. Isometric immersions into $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ and applications to minimal surfaces. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 361, n. 12, p. 6255–6282, 2009.

GERHARDT, C. Curvature flows in the sphere. **J. Differ. Geom**, v. 100, n. 2, p. 301–347, 2015.

MAKOWSKI, M.; SCHEUER, J. Rigidity results, inverse curvature flows and alexandrov-fenchel type inequalities in the sphere. **Asian Journal of Mathematics**, v. 20, n. 5, p. 869–892, 2016.

MANFIO, F.; TOJEIRO, T. Hypersurfaces with constant sectional curvature of $S^n \times R$ and $H^n \times R$. **Ill. J. Math.**, v. 55, n. 1, p. 397–415, 2011.

MEEKS, W.; ROSENBERG, H. Stable minimal surfaces in $\mathbb{M}^n \times \mathbb{R}$. **J. Differ. Geom.**, v. 68, n. 3, p. 515–534, 2004.

MENDONCA, B.; TOJEIRO, R. Umbilical submanifolds of $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. **Canadian Journal of Mathematics**, v. 66, n. 2, p. 400–428, 2014.

MONTALDO, S.; ONNIS, I. Invariant cmc surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. **Glasg. Math. J.**, v. 46, n. 2, p. 311–321, 2004.

MONTALDO, S.; ONNIS, I. Enneper representation and the gauss map of minimal surfaces in the product $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. **Mat. Contemp.**, v. 33, p. 197–211, 2007.

NELLI, B. On properties of constant mean curvature surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. **In Geometry seminars. 2005-2009.**, p. 97–104, 2010.

ONNIS, I. Invariant surfaces with constant mean curvature in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. **Ann. Mat. Pura Appl.**, v. 187, n. 4, p. 667–682, 2008.

ROSENBERG, H. Minimal surfaces in $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$. **Ill. J. Math.**, v. 46, n. 4, p. 1177–1195, 2002.

TENENBLAT, K.; SANTOS, F. The mean curvature flow by parallel hypersurfaces. **Proc. Amer. Math. Soc.**, v. 146, p. 4867–4878, 2018.

THORBERGSSON, G. A survey on isoparametric hypersurfaces and their generalizations. **Handbook of Differential Geometry**, North - Holland, Amsterdam, v. 1, p. 963–995, 2000.

TOJEIRO, R. On a class of hypersurfaces in $\mathbb{S}^n \times R$ and $\mathbb{H}^n \times R$. **Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)**, v. 41, n. 22, p. 199–209, 2010.

WANG, Q. Isoparametric hypersurfaces in complex projective spaces. **Differential geometry and differential equations, Proc.**, v. 3, p. 1509–1523, 1982.

WANG, X. Convex solutions to the mean curvature flow. **Ann. Math.**, v. 2, n. 173, p. 1185–1239, 2011.