**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**

**CENTRO DE CIÊNCIAS**

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

**DOUTORADO EM MATEMÁTICA**

**DIEGO DA SILVA PINHEIRO**

# COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DO FLUXO PELO INVERSO DA CURVATURA MÉDIA EM AMBIENTES SUBESTÁTICOS

**FORTALEZA**

**2021**

DIEGO DA SILVA PINHEIRO

# COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DO FLUXO PELO INVERSO DA CURVATURA MÉDIA EM AMBIENTES SUBESTÁTICOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Matemática. Área de Concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Frederico Vale Girão

FORTALEZA

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

P718c Pinheiro, Diego da Silva.
Comportamento assintótico do fluxo pelo inverso da curvatura média em ambientes subestáticos / Diego da Silva Pinheiro. – 2021.
49 f.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Bioquímica , Fortaleza, 2021.
Orientação: Prof. Dr. Frederico Vale Girão.

1. Fluxo pelo inverso da curvatura média. 2. Espaço AdS-Reissner-Nordström. 3. Não convergência para uma forma espacial. 4. Desigualdade tipo Alexandrov-Fenchel com peso. I. Título.

CDD 572

---

DIEGO DA SILVA PINHEIRO

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DO FLUXO PELO INVERSO DA CURVATURA MÉDIA EM AMBIENTES SUBESTÁTICOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Matemática. Área de Concentração: Geometria Diferencial.

Aprovada em: 09/11/2021.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Frederico Vale Girão (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Levi Lopes de Lima
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Lucas Coelho Ambrozio
Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)

Prof. Dr. Luciano Mari
Università degli Studi di Torino (UNITO)

Dedico este trabalho ao meu querido e amado Avô Dilneci (*in memoriam*).

**AGRADECIMENTOS**

À minha mãe Angelúcia, meu pai Eulivando, minha sogra Rosa e minha madrasta Graça, pelo apoio dado no decorrer de toda essa etapa da minha vida.

À minha noiva Ticianne que não poupou esforços para me ajudar durante todos os momentos que precisei.

À minha avó Firmina, meus tios Carlucio e Marizete e meus primos Tiago, Samila, Walisson e Davi.

Ao meu orientador Frederico Vale Girão pela ajuda em todas as etapas deste trabalho e do curso de forma geral.

Aos membros da banca: Abdênago Alves de Barros, Levi Lopes de Lima, Lucas Coelho Ambrozio, Luciano Mari, Antonio Caminha Muniz Neto e Rafael Montezuma Pinheiro Cabral, pela disponibilidade.

A todos os professores do departamento de Matemática da UFC, em especial Fernanda, Rodrigo, Cibotaru, Ederson, Diego Moreira e Luquésio.

A todos os meus colegas de trabalho da FECLESC, em especial Jobson, Ulisses, Grangeiro, Luzeilton, Danielle e Ian.

Aos meus afilhados Yuri e Luna.

Aos amigos Magdiel, Katiane Lima, Jairton, Max, Washington, Diego Marques, Alexandre, Rafael, Guilherme, Thiago, Katiane, Leandro, Alan, Gledson, Alana, Glenda, John Maycon, Firmino, Suzana, Tony, Patrícia pelos inúmeros momentos compartilhados.

A todos os meus colegas de curso, em especial José Edilson, Davi Ribeiro, Tiago Gadelha, Danuso Rocha, Rafael Farias, Antonio Aguiar, Valricelio, Weslay, Emanoel Ferreira, Erivamberto, Diego Sousa, Roger, Pedro e Rosa Tayane pelos vários momentos que compartilhamos.

À Andrea, secretária da PGMAT, pela presteza e competência.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

“Se eu conversasse com Deus iria lhe perguntar: por que é que sofremos tanto quando viemos pra cá? Que dívida é essa que a gente tem que morrer pra pagar?

Perguntaria também como é que ele é feito que não dorme, que não come e assim vive satisfeito. Por que foi que ele não fez a gente do mesmo jeito?

Por que existem uns felizes e outros que sofrem tanto? Nascemos do mesmo jeito, moramos no mesmo canto. Quem foi temperar o choro e acabou salgando o pranto?"

(BARROS, 1900)

## RESUMO

Nesta tese, estudamos o comportamento do fluxo pelo inverso da curvatura média (FICM) no espaço AdS-Reissner-Nordström e em seus casos particulares (espaço hiperbólico e espaço AdS-Schwarzschild). Mostramos que, nestes espaços, o comportamento do FICM é bem diferente do seu comportamento quando o ambiente é o espaço euclidiano. Mais precisamente, usando um método similar ao usado por Hung e Wang, mostramos a existência de uma hipersuperfície no espaço AdS-Schwarzschild cuja métrica induzida de sua evolução pelo FICM, normalizada pela potência adequada da área, não converge para uma forma espacial. Além disso, obtemos uma desigualdade entre quantidades geométricas e alguns resultados sobre o comportamento assintótico do FICM. Por fim, obtemos duas desigualdade tipo Alexandrov-Fenchel com peso, similares a uma desigualdade provada por Ge, Wang e Wu; a primeira é uma desigualdade para hipersuperfícies no espaço hiperbólico e envolve as curvaturas médias de ordem par, enquanto que a segunda é uma desigualdade para hipersuperfícies no espaço euclidiano envolvendo as curvaturas médias de ordem ímpar.



**Palavras-chave:** fluxo pelo inverso da curvatura média; espaço AdS-Reissner-Nordström; não convergência para uma forma espacial; desigualdade tipo Alexandrov-Fenchel com peso.

## ABSTRACT

In this thesis, we study the behaviour of the inverse mean curvature flow (IMCF) in the AdS-Reissner-Nordström space and in its particular cases (hyperbolic space and AdS-Schwarzschild space). We show that, in these spaces, the behaviour of the IMCF is quite different from its behaviour when the ambient is the Euclidean space. More precisely, using a method similar to the one used by Hung and Wang, we show the existence of a hypersurface in the Ads-Schwarzschild space whose induced metric of its evolution by the IMCF, normalized by the appropriate power of the area, does not converge to a space form. Moreover, we obtain an inequality involving geometric quantities and some results about the asymptotic behaviour of the IMCF. Finally, we obtain two weighted Alexandrov-Fenchel-type inequalities similar to an inequality proved by Ge, Wang and Wu; the first one is an inequality for hypersurfaces in hyperbolic space and involves the even order mean curvatures, while the second one is an inequality for hypersurfaces in Euclidean space involving the odd order mean curvatures.

**Keywords:** inverse mean curvature flow; adS-Reissner-Nordström space; non-convergence to a space form; weighted Alexandrov-Fenchel inequality.

SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

Sejam $\Sigma^{n-1}$ uma variedade diferenciável orientável fechada (compacta, sem bordo) e $\psi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (a menos que se diga o contrário, a métrica em $\mathbb{R}^n$ sempre será a métrica euclidiana canônica $\delta$) uma hipersuperfície convexa, $n \geq 3$. (Quando não houver risco de confusão, escreveremos apenas $\Sigma$ para denotar a imersão $\psi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^n$). As desigualdades de Alexandrov–Fenchel (veja (ALEXANDROV, 1937) e (ALEXANDROV, 1938)) afirmam que

$$\left(\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{\Sigma} H_k \, d\Sigma\right)^{n-k} \geq \left(\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{\Sigma} H_{k-1} \, d\Sigma\right)^{n-k-1}, \tag{1.1}$$

para $k = 1, \ldots, n-1$, onde $\omega_{n-1}$ é a área da esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ e $H_j$ representa a $j$-ésima curvatura média normalizada de $\Sigma$, isto é,

$$H_j = \frac{1}{C_{n-1}^{j}} \sigma_j,$$

com $j = 0, 1, \ldots, n-1$, sendo $\sigma_j$ a $j$-ésima função simétrica elementar do vetor curvatura principal de $\Sigma$, ou seja, o vetor cujas entradas são os autovalores do operador de forma de $\Sigma$ (assumimos, como de costume, $\sigma_0 = 1$). Além disso, vale a igualdade em (1.1) se, e somente se, $\Sigma$ é uma esfera redonda.

Desigualdades do tipo (1.1) são exemplos de uma classe de desigualdades conhecidas como *desigualdades geométricas*. Uma estratégia que vem sendo bem sucedida na prova de desigualdades desta classe é o uso dos chamados *fluxos geométricos extrínsecos*, que discutiremos a seguir.

Sejam $\Sigma^{n-1}$ uma variedade diferenciável orientável fechada, $(M^n, \bar{g})$ uma variedade riemanniana e $x_0 : \Sigma \longrightarrow M$ uma hipersuperfície mergulhada. Um fluxo geométrico extrínseco começando em $\Sigma_0 = x_0(\Sigma)$ é uma família a um parâmetro de mergulhos

$$x : [0, T^*) \times \Sigma \to M$$

satisfazendo uma equação da forma

$$\frac{\partial x}{\partial t} = F\xi \tag{1.2}$$

com condição inicial $x(0, \cdot) = x_0$, onde $\xi(t, \cdot)$ é o vetor unitário normal globalmente definido em $\Sigma_t = x(t, \Sigma)$, escolhido apontando para fora sempre que isso fizer sentido (esse é o caso de todas as hipersuperfícies consideradas neste trabalho), e $F : [0, T^*) \times \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função (usualmente, $F(t, \cdot) : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ depende apenas do operador de forma de $\Sigma_t$). Além disso, $T^*$ (que pode ser igual a $\infty$) é tal que $[0,T^*)$ é o maior intervalo de tempo no qual o fluxo existe. Ao longo do texto, $g_t$ e $|\Sigma_t|$ denotam a métrica induzida em $\Sigma_t$ por $\bar{g}$ e a área de $\Sigma_t$, respectivamente. Uma escolha possível para $F$ é $\sigma_{k-1}/\sigma_k$, $k \in \{1,\dots,n-1\}$. Com essa escolha, o fluxo (1.2) se torna

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k}\xi. \tag{1.3}$$

O caso que mais nos interessa é o caso $k=1$. Nesse caso, o fluxo (1.3) se reduz a

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{1}{H}\xi,$$

onde $H=\sigma_1$ é a curvatura média de $\Sigma$. Este é o famoso *fluxo pelo inverso da curvatura média* (FICM). Ele é uma ferramenta de muito êxito na resolução de problemas envolvendo desigualdades geométricas. Um exemplo memorável é a demonstração dada por Huisken e Ilmanem da (versão riemanniana da) desigualdade de Penrose para variedades assintoticamente euclidianas, onde a monotonicidade da chamada *massa de Hawking* ao longo do FICM é um ingrediente crucial (veja (HUISKEN; ILMANEM, 2001)).

A aplicação de um fluxo do tipo (1.2) para provar uma desigualdade geométrica geralmente é feita da seguinte forma: define-se uma quantidade geométrica $\mathcal{Q}(\Sigma)$ de modo que a desigualdade a ser provada seja equivalente à $\mathcal{Q}(\Sigma_0) \geq c$, para alguma constante $c$, e com a função $t \longmapsto \mathcal{Q}(\Sigma_t)$ não crescente e satisfazendo

$$\lim_{t\to T^*} \mathcal{Q}(\Sigma_t) \geq c. \tag{1.4}$$

Como $t \mapsto \mathcal{Q}(\Sigma_t)$ é não crescente, temos

$$\mathcal{Q}(\Sigma_0) \geq \mathcal{Q}(\Sigma_t)$$

para todo $t \in [0,T^*)$. Passando o limite $t \to T^*$, vemos que

$$\mathcal{Q}(\Sigma_0) \geq \lim_{t\to T^*} \mathcal{Q}(\Sigma_t). \tag{1.5}$$

Desse modo, de (1.4) e (1.5), obtemos

$$\mathcal{Q}(\Sigma_0) \geq c,$$

provando, portanto, a desigualdade desejada.

Antes de continuarmos, precisaremos de algumas definições.

Uma hipersuperfície $\Sigma$ em $\mathbb{R}^n$ é dita *estrelada com respeito a* $p$, para $p \in \mathbb{R}^n$, se $\Sigma$ pode ser escrita como o gráfico de uma função positiva definida na esfera unitária centrada em $p$, e dizemos que $\Sigma$ é *estrelada* se existe um $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $\Sigma$ é estrelada com respeito a $p$.

Seja $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Dizemos que $\Sigma$ é *k-convexa* se $\sigma_i \geq 0$ para todo $i = 1, \dots, k$. Note que $\Sigma$ é $(n-1)$-convexa se, e somente se, $\Sigma$ é convexa no sentido usual. Se $\Sigma$ é tal que $\sigma_i > 0$ para $i = 1, \dots, k$, então dizemos que $\Sigma$ é *estritamente k-convexa*. Usaremos os termos *média convexa* e *estritamente média convexa* para nos referirmos às hipersuperfícies 1-convexas e estritamente 1-convexas, respectivamente.

Quando $(M, \bar{g}) = (\mathbb{R}^n, \delta)$, o fluxo (1.3) é um caso especial do fluxo estudado independentemente por Gerhardt em (GERHARDT, 1990) e por Urbas em (URBAS, 1990). Eles mostraram que se a hipersuperfície inicial $\Sigma_0$ é estrelada com respeito à origem e estritamente $k$-convexa, então existe uma única solução suave para (1.3), definida para todo tempo $t \geq 0$. Além disso, as hipersuperfícies reescalonadas

$$\tilde{x}(t, \cdot) = e^{-\frac{1}{n-1}t} x(t, \cdot)$$

convergem exponencialmente rápido para uma esfera redonda unicamente determinada, quando $t \to \infty$. O resultado deles implica, em particular, que a métrica normalizada

$$|\Sigma_t|^{-\left(\frac{2}{n-1}\right)} g_t$$

converge para a métrica redonda de $\mathbb{S}^{n-1}$.

Usando uma certa normalização do fluxo (1.3), Guan e Li (veja (GUAN; LI, 2009)) mostraram que a desigualdade (1.1) ainda ocorre para qualquer hipersuperfície $\Sigma$ estrelada e $k$-convexa. O caso $k = 1$ desse resultado é de interesse particular para nós. Nesse caso, a desigualdade (1.1) se torna

$$\int_\Sigma H \, d\Sigma \geq (n-1)\omega_{n-1} \left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}}. \tag{1.6}$$

A desigualdade (1.6) é um passo chave na prova da desigualdade de Penrose para gráficos euclidianos dada em (LAM, 2011) (veja também (DE LIMA; GIRÃO, 2015) e (MIRANDOLA; VITÓRIO, 2015)). Mais geralmente, os casos de (1.1) para $k$ ímpar são usados de forma crucial para estabelecer, para gráficos euclidianos, versões da desigualdade de Penrose no contexto da chamada massa de Gauss-Bonnet-Chern dada em (GE *et al.*, 2014) (veja também (LI *et al.*, 2014) e (DE SOUSA; GIRÃO, 2019)).

Consideremos agora o espaço hiperbólico $n$-dimensional $\mathbb{H}^n$ como espaço ambiente. Iremos trabalhar com o modelo de $\mathbb{H}^n$ dado como um produto torcido, que consiste de $(0,\infty)\times\mathbb{S}^{n-1}$ munido com a métrica

$$dr^2+(\operatorname{senh}^2 r)\sigma,$$

onde $\sigma$ é a métrica redonda na esfera $\mathbb{S}^{n-1}\subset\mathbb{R}^n$.

Consideremos a função $\rho:\mathbb{H}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ que, no modelo do produto torcido, é dada por

$$\rho=\cosh r, \tag{1.7}$$

e a *função suporte* $p:\Sigma\longrightarrow\mathbb{R}$, definida por

$$p=\langle D\rho,\xi\rangle,$$

onde $\langle\,,\rangle$ denota a métrica hiperbólica e $D$ denota sua conexão de Levi-Civita.

Assim como no caso de hipersuperfícies no espaço euclidiano, uma hipersuperfície $\Sigma$ em $\mathbb{H}^n$ é dita estrelada com respeito a $p$, para $p\in\mathbb{H}^n$, se ela pode ser escrita como o gráfico de uma função positiva definida em uma esfera geodésica unitária centrada em $p$, e dizemos que $\Sigma$ é estrelada se é estrelada com respeito a $p$, para algum $p\in\mathbb{H}^n$. Dizemos que $\Sigma$ é estritamente média convexa se sua curvatura média $H$ é positiva em todo ponto.

Em (DE LIMA; GIRÃO, 2016), os autores provaram a seguinte desigualdade tipo Alexandrov–Fenchel: se $\Sigma$ é uma hipersuperfície em $\mathbb{H}^n$, $n\geq 3$, estrelada com respeito à origem e estritamente média convexa, então

$$\int_\Sigma \rho H\,d\Sigma \geq (n-1)\left[\omega_{n-1}\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}+\omega_{n-1}\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right]. \tag{1.8}$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $\Sigma$ é uma esfera geodésica centrada na origem. A desigualdade (1.8) foi conjecturada por Dahl, Gicquaud e Sakovich em (DAHL *et al.*, 2013), onde eles encontraram uma fórmula explícita para a massa de um gráfico assintoticamente hiperbólico; a desigualdade (1.8) era então a única coisa que restava para provar a desigualdade de Penrose nesse contexto.

Vale a pena descrever brevemente a prova de (1.8), a qual tem como um dos seus principais ingredientes uma desigualdade similar, provada em (BRENDLE *et al.*, 2016), que afirma que se $\Sigma$ é uma hipersuperfície estrelada em relação à origem e estritamente média convexa em $\mathbb{H}^n$, então

$$\int_\Sigma \rho H\,d\Sigma \geq (n-1)\left[\omega_{n-1}\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}+\int_\Sigma p\,d\Sigma\right], \tag{1.9}$$

com igualdade se, e somente se, $\Sigma$ é uma esfera geodésica centrada na origem. Observemos que (1.9) é apenas um caso especial da desigualdade provada em (BRENDLE *et al.*, 2016). Mais precisamente, eles provaram uma desigualdade para hipersuperfícies estreladas em relação ao horizonte e estritamente média convexas no espaço AdS-Schwarzschild (discutiremos este espaço ambiente mais à frente). A desigualdade (1.9) é, portanto, uma desigualdade limite, obtida quando fazemos o parâmetro de massa $m$ tender a 0.

Sejam

$$\mathscr{I}(\Sigma) = \int_\Sigma \rho H \, d\Sigma,$$
$$\mathscr{J}(\Sigma) = \int_\Sigma p \, d\Sigma \tag{1.10}$$

e

$$\mathscr{K}(\Sigma) = \omega_{n-1}\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n}{n-1}}. \tag{1.11}$$

Para provar (1.9), Brendle, Hung and Wang procederam da seguinte maneira: primeiramente, eles mostraram que o FICM está definido para todo tempo quando $\Sigma$ é estrelada em relação ao horizonte e estritamente média convexa (no caso em que o ambiente é o espaço hiperbólico, isso já havia sido mostrado em (GERHARDT, 2011) e (DING, 2011)). Em seguida, eles mostraram, com a ajuda de uma desigualdade tipo Heintze-Karcher provada em (BRENDLE, 2013), que a quantidade

$$\mathscr{M}(\Sigma) = \left[\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}\right]^{-1}\left(\mathscr{I}(\Sigma) - (n-1)\mathscr{J}(\Sigma)\right)$$

é não crescente ao longo do FICM. Finalmente, após algumas análises assintóticas, eles mostraram, com a ajuda de uma desigualdade provada em (BECKNER, 1993), que

$$\lim_{t\to\infty}\mathscr{M}(\Sigma_t) \geq (n-1)\omega_{n-1}.$$

Se $\mathscr{J}(\Sigma) \geq \mathscr{K}(\Sigma)$, então (1.8) segue de (1.9). Portanto, podemos assumir $\mathscr{J}(\Sigma) < \mathscr{K}(\Sigma)$. A desigualdade (1.8) é equivalente a $\mathscr{L}(\Sigma) \geq (n-1)\omega_{n-1}$, onde

$$\mathscr{L}(\Sigma) = \left[\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}\right]^{-1}\left(\mathscr{I}(\Sigma) - (n-1)\mathscr{K}(\Sigma)\right).$$

A variação de $\mathscr{L}(\Sigma)$ ao longo do FICM satisfaz

$$\frac{d}{dt}\left(\mathscr{L}(\Sigma_t)\right) \leq 2\left[\left(\frac{|\Sigma_t|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}\right]^{-1}\left(\mathscr{J}(\Sigma_t) - \mathscr{K}(\Sigma_t)\right). \tag{1.12}$$

Dessa forma, enquanto $\mathscr{J}(\Sigma_t) \leq \mathscr{K}(\Sigma_t)$ ocorrer, a função $t \mapsto \mathscr{L}(\Sigma_t)$ é não crescente ao longo do FICM. Se $\mathscr{J}(\Sigma_t) \geq \mathscr{K}(\Sigma_t)$ para algum $t$, então consideremos o menor tempo $t_0$ de modo que $\mathscr{J}(\Sigma_{t_0}) = \mathscr{K}(\Sigma_{t_0})$. Portanto, temos

$$\mathscr{L}(\Sigma_0) \geq \mathscr{L}(\Sigma_{t_0}) = \mathscr{M}(\Sigma_{t_0}) \geq (n-1)\omega_{n-1}.$$

Se $\mathscr{J}(\Sigma_t) < \mathscr{K}(\Sigma_t)$ para todo $t$, então, por (1.12), a função $t \mapsto \mathscr{L}(\Sigma)$ é decrescente. Assim, algumas análises assintóticas juntamente com a desigualdade de Beckner nos dão

$$\mathscr{L}(\Sigma_0) \geq \lim_{t\to\infty} \mathscr{L}(\Sigma_t) \geq (n-1)\omega_{n-1}.$$

**Observação 1.1** *Uma versão de (DE LIMA; GIRÃO, 2016), a qual está disponível no repositório arXiv (no link https://arxiv.org/pdf/1209.0438v3.pdf) e é anterior à versão publicada, utiliza o Teorema 1.2 de (GERHARDT, 2011) para obter a desigualdade*

$$\lim_{t\to\infty} \mathscr{L}(\Sigma_t) \geq (n-1)\omega_{n-1}.$$

*Assim, não era necessário recorrer às desigualdades de Brendle-Hung-Wang e de Beckner para mostrar (1.8). Infelizmente, o enunciado do Teorema 1.2 de (GERHARDT, 2011) está incorreto (para mais detalhes, veja a Observação 1.5).*

Como mostrado em (DE LIMA; GIRÃO, 2016), a quantidade

$$\mathscr{J}(\Sigma) - \mathscr{K}(\Sigma)$$

que aparece no lado direito da desigualdade (1.12) satisfaz, ao longo do FICM, a desigualdade diferencial

$$\frac{d}{dt}\left(\mathscr{J}(\Sigma_t) - \mathscr{K}(\Sigma_t)\right) \geq \frac{n}{n-1}\left(\mathscr{J}(\Sigma_t) - \mathscr{K}(\Sigma_t)\right),$$

ou seja, a quantidade

$$\mathscr{F}(\Sigma) = |\Sigma|^{-\frac{n}{n-1}}\left(\mathscr{K}(\Sigma) - \mathscr{J}(\Sigma)\right) \tag{1.13}$$

é não crescente ao longo do FICM. Essa quantidade (e suas generalizações para outras variedades ambientes) desempenhará um importante papel neste trabalho. Pelo teorema da divergência,

$$\mathscr{J}(\Sigma) = n\int_\Omega \rho\, d\Omega, \tag{1.14}$$

onde $\Omega$ é a região englobada por $\Sigma$. Usando (1.14), podemos checar que se $\Sigma$ é uma esfera geodésica, então $\mathscr{F}(\Sigma) \leq 0$, com igualdade ocorrendo se, e somente se, $\Sigma$ está centrada na origem. Portanto, em geral, não existe a possibilidade da desigualdade

$$\mathscr{J}(\Sigma) \leq \mathscr{K}(\Sigma) \tag{1.15}$$

ser verdadeira. Entretanto, sabendo que $t \mapsto \mathscr{F}(\Sigma_t)$ é não crescente ao longo do FICM, e que $\mathscr{F}(\Sigma) = 0$ para uma esfera geodésica centrada na origem, ainda podemos ter esperança de que a desigualdade (1.15) ocorra para qualquer hipersuperfície que, além de ser estrelada em relação à origem e estritamente média convexa, seja também simétrica com respeito à origem. Mas, como veremos mais adiante, existem exemplos de hipersuperfícies estreladas, estritamente média convexas e simétricas em relação à origem nas quais a desigualdade (1.15) não ocorre.

Em (NEVES, 2010), foi mostrado que uma abordagem via FICM para uma versão hiperbólica da desigualdade de Penrose, sugerida por Wang em (WANG, 2001) e baseada na prova da versão euclidiana da desigualdade de Penrose obtida em (HUISKEN; ILMANEM, 2001), não funciona. Mais precisamente, foi mostrada a existência de uma variedade riemanniana $(M^3, \bar{g})$, assintoticamente hiperbólica, de massa positiva, com curvatura escalar igual a $-6$, cujo bordo $\Sigma_0$ é uma esfera êxtero-minimizante de curvatura média igual a 2, tal que o FICM $\{\Sigma_t\}$ começando em $\Sigma_0$ é suave e existe para todo tempo, e tal que a métrica normalizada $|\Sigma|^{-1} g_t$ converge para uma métrica em $\mathbb{S}^2$ que não é de curvatura constante. Um importante ingrediente na prova desse resultado é a monotonicidade da (versão hiperbólica da) massa de Hawking ao longo do FICM. O resultado de Neves sugere que, quando o ambiente é o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$, o comportamento do FICM é mais complexo e sutil do que no caso em que o ambiente é o espaço euclidiano.

A construção de Neves depende da positividade do limite da massa de Hawking. Entretanto, quando o ambiente é $\mathbb{H}^n$, a massa de Hawking sempre tende a zero ao longo do FICM. Em (HUNG; WANG, 2015), foi introduzida uma nova quantidade geométrica, chamada de *massa de Hawking modificada*, para lidar com esse fenômeno degenerado. Assim como a (versão hiperbólica da) massa de Hawking original, a massa de Hawking modificada é monótona ao longo do FICM. Usando esta nova quantidade monótona, eles mostraram a existência de uma hipersuperfície $\Sigma_0$ em $\mathbb{H}^n$, estrelada em relação à origem e estritamente média convexa, tal que as métricas normalizadas

$$|\Sigma_t|^{-\left(\frac{2}{n-1}\right)} g_t$$

convergem para uma métrica em $\mathbb{S}^{n-1}$ que não é de curvatura constante.

O principal objetivo desta tese é mostrar que o resultado de Hung e Wang ainda vale se tomarmos como ambiente o espaço AdS-Schwarzschild de massa $m$ (este espaço será definido mais adiante; vide equação (1.18)). No lugar da massa de Hawking modificada, usaremos a quantidade $\mathscr{F}$ definida pela equação (1.23), a qual também é monótona ao longo do FICM. Assim, obteremos também uma nova demonstração para o resultado obtido em (HUNG; WANG, 2015).

Seja $(N_\varepsilon^{n-1}, \hat{g})$ uma forma espacial fechada de curvatura seccional $\varepsilon \in \{-1,0,1\}$. Sejam $m, q, \kappa$ com $0 < q < m, \kappa$ de modo que a equação

$$\varepsilon + \kappa^2 s^2 - 2ms^{2-n} + q^2 s^{4-2n} = 0$$

possua raízes positivas e denotemos por $s_0$ a maior raiz dessa equação. A variedade AdS-Reissner-Nordström (ou "AdS-RN", por abreviação) é a variedade riemanniana $(P, \bar{g})$ definida da seguinte forma: $P = (s_0, \infty) \times N_\varepsilon$ e

$$\bar{g} = \frac{1}{\varepsilon + \kappa^2 s^2 - 2ms^{2-n} + q^2 s^{4-2n}} ds^2 + s^2 \hat{g}. \tag{1.16}$$

O bordo $\partial P = \{s_0\} \times N_\varepsilon$ é chamado de horizonte de $(P, \bar{g})$. As hipersuperfícies em $P$ do tipo $\{s\} \times N_\varepsilon$, para $s > s_0$, são ditas fatias de $P$.

Uma hipersuperfície $\Sigma$ em $P$ é dita *estrelada com respeito ao horizonte* se $\Sigma$ é o gráfico de alguma função positiva definida no horizonte.

Sabe-se que, após uma mudança de variável, a métrica $\bar{g}$ pode ser escrita como

$$dr^2 + \lambda^2(r)\hat{g},$$

onde $\lambda : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ satisfaz a EDO

$$\lambda'(r) = \sqrt{\varepsilon + \kappa^2 \lambda^2 - 2m\lambda^{2-n} + q^2 \lambda^{4-2n}} \tag{1.17}$$

(veja o Lema 9 de [(WANG, 2015)]).

Seja $m > 0$. A variedade AdS-Schwarzschild de massa $m$ é a variedade $G = (s_0, \infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$ equipada com a métrica

$$\frac{1}{1 + s^2 - 2ms^{2-n}} ds^2 + s^2 \sigma, \tag{1.18}$$

onde $\sigma$ é a métrica redonda em $\mathbb{S}^{n-1}$ e $s_0$ é a maior raiz positiva de

$$1 + s^2 - 2ms^{2-n} = 0.$$

Portanto, tomando $\varepsilon = \kappa = 1$, $N_1 = \mathbb{S}^{n-1}$ e fazendo $q \to 0$ em (1.16), vemos que a variedade AdS-Schwarzschild de massa $m$ pode ser vista como o espaço limite de uma subfamília da família AdS-RN.

Relembremos que $(0,\infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$ munida com a métrica

$$\frac{1}{1+s^2} ds^2 + s^2 \sigma \tag{1.19}$$

nos dá um modelo do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$. Portanto, comparando (1.18) com (1.19), vemos que $\mathbb{H}^n$ pode ser visto como o limite, quando $m \to 0$, da família AdS-Schwarzschild.

Seja $\rho = \lambda'(r)$. Note que, tomando $\varepsilon = \kappa = 1$, $N_1 = \mathbb{S}^{n-1}$ e fazendo $q, m \to 0$, obtemos a função definida por (1.7). Assim, nossa notação está consistente. A função $\rho$ satisfaz

$$(\overline{\Delta}\rho)\overline{g} - \overline{\nabla}^2 \rho + \rho \overline{\mathrm{Ric}} = (n-1)(n-2) q^2 \lambda^{4-2n} \rho \hat{g},$$

onde $\overline{\Delta}$, $\overline{\nabla}^2$ e $\overline{\mathrm{Ric}}$ representam, respectivamente, o Laplaciano, o Hessiano, e o tensor de Ricci da variedade AdS-RN $(P, \overline{g})$. A curvatura escalar de $P$ na métrica $\bar{g}$ é dada por $R = -n(n-1)\kappa^2 + (n-1)(n-2)q^2 s^{2-2n}$.

Uma variedade riemanniana $(E, \gamma)$ é dita *subestática* se

$$\left(\Delta_\gamma u\right) \gamma - \nabla_\gamma^2 u + u \mathrm{Ric}_\gamma \geq 0 \tag{1.20}$$

para alguma função positiva $u$ definida em $E$. Se a igualdade ocorre em (1.20), dizemos que $(E, \gamma)$ é *estática*. Portanto, a variedade AdS-RN é um exemplo de variedade riemanniana subestática, enquanto que a variedade AdS-Schwazschild e o espaço hiperbólico são exemplos de variedades riemannianas estáticas.

Seja $\Sigma$ uma hipersuperfície mergulhada em $P$ que é estrelada com respeito ao horizonte. Denotamos por $\Omega$ a região de $P$ limitada por $\Sigma$ e pelo horizonte $\partial P$. Consideremos as quantidades

$$\mathscr{J}(\Sigma) = n\kappa^2 \int_\Omega \rho \, d\Omega \tag{1.21}$$

e

$$\mathscr{K}(\Sigma) = \kappa^2 \vartheta_{n-1} \left( \left( \frac{|\Sigma|}{\vartheta_{n-1}} \right)^{\frac{n}{n-1}} - \left( \frac{|\partial P|}{\vartheta_{n-1}} \right)^{\frac{n}{n-1}} \right), \tag{1.22}$$

onde $\vartheta_{n-1}$ é a área de $N_\varepsilon$. Consideremos também a quantidade

$$\mathscr{F}(\Sigma) = |\Sigma|^{-\frac{n}{n-1}} \left( \mathscr{K}(\Sigma) - \mathscr{J}(\Sigma) \right). \tag{1.23}$$

Tomando $\varepsilon = \kappa = 1$, $N_1 = \mathbb{S}^{n-1}$ e fazendo $q, m \to 0$, temos que, no limite, as quantidade definidas pelas equações (1.21), (1.22) e (1.23) coincidem com a definidas pelas equações (1.10), (1.11) e (1.13), respectivamente. Este é o motivo pelo qual usamos as mesmas letras para denotá-las.

Consideremos agora uma família a um parâmetro de hipersuperfícies estreladas $\Sigma_s$ na variedade AdS-RN que, em coordenadas $(r, \theta)$, são dadas por

$$\Sigma_s = \{(r(\theta, s), \theta);\ \theta \in N_\varepsilon\},$$

onde $r$ é uma função suave em $N_\varepsilon \times \mathbb{R}^+$. Assumiremos que $r(\theta, s)$ possui o seguinte comportamento assintótico quando $s \to \infty$:

$$r(\theta, s) = cs + f(\theta) + o_s(1), \tag{1.24}$$

onde $c$ é uma constante positiva, $f$ uma função suave em $N_\varepsilon$ e $o_s(1)$ satisfaz

$$\lim_{s \to \infty} o_s(1) = 0.$$

Em (CHEN *et al.*, 2019), foi mostrado que se $\Sigma_0$ é uma hipersuperfície no espaço AdS-RN $P$ que é estritamente média convexa e estrelada em relação ao horizonte, então a solução do fluxo pelo inverso da curvatura média $\Sigma_t$ existe para todo tempo $t \in [0, \infty)$ e continua sendo estritamente média convexa e estrelada em relação ao horizonte (veja também (GERHARDT, 2011), (DING, 2011), (BRENDLE *et al.*, 2016) e (WANG, 2015)). Usaremos o funcional (1.23) para construir uma hipersuperfície no espaço AdS-Schwarzschild $G$ cuja evolução pelo FICM não converge para uma fatia (no sentido definido em (1.28)). Inicialmente, vejamos o limite, quando $s \to \infty$, da quantidade $\mathscr{F}$ quando consideramos uma família de hipersuperfícies estreladas em relação ao horizonte satisfazendo (1.24).

**Teorema 1.2** *Seja $\Sigma_s$ uma família de hipersuperfícies em $(P, \bar{g})$ que são gráficos radiais da função $r(\theta, s) = cs + f(\theta) + o_s(1)$. Então,*

$$\lim_{s \to \infty} \mathscr{F}(\Sigma_s) = \mathscr{A}(f),$$

*onde*

$$\mathscr{A}(f) = \kappa^2 \left[ \left( \frac{1}{\vartheta_{n-1}} \right)^{\frac{1}{n-1}} - \left( \int_{N_\varepsilon} e^{n\kappa f} d\mu_{\hat{g}} \right) \left( \int_{N_\varepsilon} e^{(n-1)\kappa f} d\mu_{\hat{g}} \right)^{-\frac{n}{n-1}} \right]. \tag{1.25}$$

*Além disso, $\mathscr{A}(f) \leq 0$ com igualdade se, e somente se, $f$ é constante.*

A fim de usar o FICM em alguma hipersuperfície $\Sigma_s$ da família (1.24), mostraremos que, a partir de um determinado $s$, toda hipersuperfície da família é estritamente média convexa. Mais precisamente, provaremos, sob certa condição de regularidade, que o limite, quando $s$ tende ao infinito, da curvatura média $H_s$ de $\Sigma_s$ é $\kappa(n-1)$.

**Teorema 1.3** *Seja $\Sigma_s$ uma família de hipersuperfícies em $(P,\bar{g})$ que são gráficos radiais da função $r(\theta,s) = cs + f(\theta) + o_s(1)$ e tal que*

$$\lim_{s\to\infty} ||o_s(1)||_{C^2(N_\varepsilon)} = 0.$$

*Então, vale*

$$\lim_{s\to\infty} H_s = \kappa(n-1).$$

De (CHEN; MAO, 2016) e (LU, 2019) temos que, partindo de uma hipersuperfície $\Sigma$ do espaço AdS-Schwarzschild $G$ que é média convexa e estrelada em relação ao horizonte, a solução do fluxo pelo inverso da curvatura média $\Sigma_t$ é dada pelo gráfico de uma função $r$ da forma

$$r(\theta,t) = \frac{t}{n-1} + f(\theta) + o_t(1), \tag{1.26}$$

onde $f$ é uma função suave em $\mathbb{S}^{n-1}$ (quando o ambiente é o espaço hiperbólico, (1.26) foi mostrada em (GERHARDT, 2014)). Dessa forma, a função $r$ possui comportamento assintótico satisfazendo (1.24). Nesse caso, podemos definir a quantidade $\mathscr{A}(\Sigma) := \mathscr{A}(f)$, onde $\mathscr{A}(f)$ é o funcional definido em (1.25) aplicado à função $f$ obtida em (1.26). Mais precisamente, temos que

$$\mathscr{A}(\Sigma) = \left[\left(\frac{1}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}} - \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{nf} d\mu_\sigma\right)\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{(n-1)f} d\mu_\sigma\right)^{-\frac{n}{n-1}}\right],$$

onde $d\mu_\sigma$ representa o elemento de área de $\mathbb{S}^{n-1}$. Usando o Teorema 1.2 e a monotonicidade de $\mathscr{F}$ ao longo do FICM, obtemos a seguinte desigualdade:

**Teorema 1.4** *Seja $\Sigma$ uma hipersuperfície estritamente média convexa e estrelada do espaço AdS-Schwarzschild $G$. Então*

$$\mathscr{K}(\Sigma) \geq \mathscr{J}(\Sigma) + |\Sigma|^{\frac{n}{n-1}} \mathscr{A}(\Sigma). \tag{1.27}$$

*Além disso, vale a igualdade se, e somente se, $\Sigma$ é totalmente umbílica.*

**Observação 1.5** *O Teorema 1.2 de (GERHARDT, 2011) afirma erroneamente que função $f$ da equação (1.26) é constante. Isso está em desacordo com o resultado obtido em (HUNG; WANG, 2015). De fato, se $f$ é constante, então pode-se mostrar que as métricas normalizadas*

$$|\Sigma_t|^{-\left(\frac{2}{n-1}\right)} g_t$$

*convergem para uma métrica de curvatura constate em $\mathbb{S}^{n-1}$. Assim, se o enunciado do Teorema 1.2 de (GERHARDT, 2011) estivesse correto, o exemplo obtido em (HUNG; WANG, 2015) não poderia existir. Felizmente, o próprio Gerhardt corrigiu em (GERHARDT, 2014) o enunciado e a demonstração do Teorema 1.2 de (GERHARDT, 2011).*

**Observação 1.6** *Uma vez que sabemos que (1.26) ocorre, é natural perguntarmos o seguite: "Para quais funções $f : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ existe uma hipersuperfície $\Sigma$ do espaço AdS-Schwarzschild $G$, com $\Sigma$ média convexa e estrelada em relação ao horizonte, tal que a equação*

$$r(\theta,t) = \frac{t}{n-1} + f(\theta) + o_t(1)$$

*é satisfeita pela função $r(\theta,t)$ cujo gráfico é $\Sigma_t$?"*

Seja $\Sigma_s = (r(\theta,s),s)$ uma família de hipersuperfícies estreladas no espaço AdS-Reissner-Nordström $P$. Dizemos que a família $\Sigma_s$ converge para uma fatia, quando $s$ tende ao infinito, se vale

$$r(\theta,s) - \frac{1}{\vartheta_{n-1}} \int_{N_\varepsilon} r(\theta,s) d\mu_{\hat{g}} = o_s(1). \tag{1.28}$$

Uma hipersuperfície $\Sigma = \{(h(\theta),\theta) : \theta \in \mathbb{S}^{n-1}\}$ no espaço AdS-Schwarzschild, com $\Sigma$ estrelada em relação ao horizonte, é dita *simétrica em relação ao horizonte* se a função $h$ for simétrica em relação a $\mathbb{S}^{n-1}$ , ou seja, se vale $h(x) = h(-x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Para hipersuperfícies no espaço AdS-Schwarzschild $G$ do tipo $\Sigma = \{s\} \times \mathbb{S}^{n-1}$, ou seja, para fatias de $G$, vale $\mathscr{F}(\Sigma) = 0$. Motivados por este fato e usando os teoremas 1.2 e 1.3, podemos obter o seguinte resultado, que é o principal do nosso trabalho.

**Teorema 1.7** *Existe uma hipersuperfície $\Sigma$ no espaço AdS-Schwarzschild $G$, estritamente média convexa e estrelada em relação ao horizonte, tal que a evolução de $\Sigma$ pelo FICM não converge para uma fatia. Ademais, $\Sigma$ pode ser tomada simétrica em relação ao horizonte.*

Como corolário do Teorema 1.7, obtemos o seguinte resultado sobre a não convergência da métrica induzida (normalizada por determinada potência da área) para uma métrica de curvatura constante em $\mathbb{S}^{n-1}$. Mais precisamente, temos

**Corolário 1.8** *Existe uma hipersuperfície* $\Sigma$ *no espaço AdS-Schwarzschild* $(G,\overline{g})$ *que é estritamente média convexa, estrelada em relação ao horizonte e possui a seguinte propriedade:* $|\Sigma_t|^{-\left(\frac{2}{n-1}\right)}g_t$ *converge para uma métrica em* $\mathbb{S}^{n-1}$ *que não possui curvatura seccional constante, onde* $\Sigma_t$*,* $|\Sigma_t|$ *e* $g_t$ *são, respectivamente, o fluxo pelo inverso da curvatura média de* $\Sigma$*, a área de* $\Sigma_t$ *e a métrica induzida em* $\Sigma_t$*.*

Já vimos que, fazendo $m \to 0$, o espaço AdS-Schwarzschild se reduz ao espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$. Assim, o Corolário 1.8 é uma generalização do resultado obtido em (HUNG; WANG, 2015). Além disso, ao fazermos $m \to 0$, temos que o horizonte se reduz apenas à origem $O$ e o papel das fatias é desempenhado pelas esferas geodésicas centradas na origem. Assim, no caso do espaço hiperbólico, a convergência para fatia definida por (1.28) é chamada de *convergência para uma esfera geodésica centrada na origem.* Com isso em mente, temos a seguinte versão do Teorema 1.7:

**Teorema 1.9** *Existe uma hipersuperfície* $\Sigma$ *no espaço hiperbólico* $\mathbb{H}^n$*, estritamente média convexa, estrelada em relação à origem e simétrica em relação à origem, tal que a evolução de* $\Sigma$ *pelo FICM não converge para uma esfera geodésica centrada na origem.*

Temos também a versão a seguir do Corolário 1.8, que é exatamente o resultado obtido em (HUNG; WANG, 2015). Note, contudo, que obteremos uma nova demonstração para esse resultado.

**Corolário 1.10** *Existe uma hipersuperfície* $\Sigma$ *de* $\mathbb{H}^n$ *que é estritamente média convexa, estrelada em relação à origem e que possui a seguinte propriedade:* $|\Sigma_t|^{-\left(\frac{2}{n-1}\right)}g_t$ *converge para uma métrica em* $\mathbb{S}^{n-1}$ *que não possui curvatura seccional constante, onde* $\Sigma_t$*,* $|\Sigma_t|$ *e* $g_t$ *são, respectivamente, o fluxo pelo inverso da curvatura média de* $\Sigma$*, a área de* $\Sigma_t$ *e a métrica induzida em* $\Sigma_t$*.*

Antes de passarmos para o próximo capítulo, gostaríamos de mencionar que o comportamento assintótico do FICM no espaço hiperbólico complexo e no espaço hiperbólico quaterniônico foi estudado por Pipoli em (PIPOLI, 2019) e (PIPOLI, 2018), respectivamente.

# 2 ANÁLISE DE QUANTIDADES GEOMÉTRICAS NO ESPAÇO ANTI-DESITTER-REISSNER-NORDSTRÖM

## 2.1 Comportamento assintótico do espaço AdS-Reissner-Nordström

Inicialmente, mostremos, usando uma mudança de variável, que a métrica (1.16) pode ser reescrita como

$$\bar{g} = dr^2 + \lambda(r)^2 \hat{g}, \tag{2.1}$$

onde $\lambda(r)$ satisfaz a equação diferencial ordinária

$$\lambda'(r) = \sqrt{\varepsilon + \kappa^2\lambda^2 - 2m\lambda^{2-n} + q^2\lambda^{4-2n}}.$$

Definindo

$$r(s) = \int_{s_0}^{s} \frac{dt}{\sqrt{\kappa^2 t^2 + \varepsilon}} - \int_{s}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{\varepsilon + \kappa^2 t^2 - 2mt^{2-n} + q^2 t^{4-2n}}} - \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 t^2 + \varepsilon}} \right) dt,$$

temos que

$$dr = \frac{ds}{\sqrt{\varepsilon + \kappa^2 s^2 - 2ms^{2-n} + q^2 s^{4-2n}}} \quad \text{e} \quad \lambda(r(s)) = s.$$

Substituindo as informações acima em (1.16), obtemos (2.1). Para $\varepsilon = 1$, foi provado em (WANG, 2015) que

$$r(s) = \kappa^{-1}\text{senh}(\kappa r) - \frac{m}{n}\kappa^{-3}s^{-n} + \kappa^{-4}O(s^{-n-2}).$$

Fazendo a expansão de Taylor, vemos que

$$\begin{aligned} \text{senh}(\kappa r(s)) &= \kappa s - \frac{m}{n}\kappa^{-1}s^{1-n} + \kappa^{-3}O(s^{-n-1}) \\ &= \kappa s - \frac{m}{n}\kappa^{-1}(\kappa^{-1}\text{senh}(\kappa r))^{1-n} + O((\kappa^{-1}\text{senh}(\kappa r))^{-n-1}). \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\lambda(r) = \kappa^{-1}\text{senh}(\kappa r) + \frac{m}{n}\kappa^{n-3}\text{senh}^{1-n}(\kappa r) + O(\text{senh}^{-n-1}(\kappa r)) = O(e^{\kappa r}) \tag{2.2}$$

para $\varepsilon = 1$. Usando argumentos similares ao acima, obtemos

$$\lambda(r) = \kappa^{-1}\cosh(\kappa r) + \frac{m}{n}\kappa^{n-3}\cosh^{1-n}(\kappa r) + O(\cosh^{-n-1}(\kappa r)) = O(e^{\kappa r}) \tag{2.3}$$

para $\varepsilon = -1$, e

$$\lambda(r) = e^{\kappa r} + \frac{m}{n}\kappa^{-2}e^{-(n-1)\kappa r} + O(e^{-(n+1)\kappa r}) = O(e^{\kappa r}) \tag{2.4}$$

para $\varepsilon = 0$. Portanto, em todos os casos, a função $\lambda(r)$ possui a seguinte expansão assintótica:

$$\lambda(r) = O(e^{\kappa r}).$$

## 2.2 Hipersuperfícies estreladas no espaço AdS-Reissner-Nordström

Seja $\Sigma$ uma hipersuperfície fechada e suave no espaço AdS-Reissner-Nordström $(P,\bar{g})$. Seja $\theta = \{\theta^i\}_{i=1,\dots,n-1}$ um sistema de coordenadas locais em $N_\varepsilon$ e seja $\partial_r$ o campo vetorial radial. Suponha que $\Sigma$ é estrelada em relação ao horizonte, ou seja, suponha que existe uma função suave $r : N_\varepsilon \to \mathbb{R}$ tal que

$$\Sigma = \{(r(\theta),\theta) : \theta \in N_\varepsilon\}.$$

Isto implica que a função suporte é positiva, ou seja,

$$\langle \lambda\partial_r, \xi\rangle > 0,$$

onde $\xi$ representa o campo normal unitário que aponta para fora de $\Sigma$.

Agora, seja $\varphi$ a função em $N_\varepsilon$ definida por $\varphi(\theta) = \Phi(r(\theta))$, onde $\Phi(r)$ é uma função positiva satisfazendo

$$\Phi'(r) = \frac{1}{\lambda(r)}.$$

Uma base para o fibrado tangente de $\Sigma$ é dada por $\{X_i\}_{i=1,\dots,n-1}$, onde

$$X_i = \partial_i + r_i\partial_r = \partial_i + \lambda\varphi_i\partial_r. \tag{2.5}$$

Sejam $\varphi_i = \hat{\nabla}_i\varphi$ e $\varphi_{ij} = \hat{\nabla}_i\hat{\nabla}_j\varphi$ as derivadas covariantes de $\varphi$ com respeito à métrica $\hat{g}$ e definamos $W$ da seguinte forma:

$$W = \sqrt{1 + |\hat{\nabla}\varphi|^2_{\hat{g}}}.$$

Na proposição abaixo, calculamos a métrica e a segunda forma fundamental de $\Sigma$ em termos das derivadas covariantes de $\varphi$.

**Proposição 2.1** *Sejam $g_{ij}$ a métrica induzida em $\Sigma$ e $h_{ij}$ a segunda forma fundamental em termos de coordenadas. Então,*

$$g_{ij} = \lambda^2(\hat{g}_{ij} + \varphi_i\varphi_j)$$

*e*

$$h_{ij} = \frac{\lambda}{W}(\lambda'(\hat{g}_{ij} + \varphi_i\varphi_j) - \varphi_{ij}).$$

**Demonstração:** Em (2.5), vimos que $\{X_i\}_{1\leq i\leq n-1}$ formam uma base para o espaço tangente de $\Sigma$. Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \langle X_i, X_j\rangle \\ &= \langle \partial_i + r_i\partial_r, \partial_j + r_j\partial_r\rangle \\ &= \lambda^2\hat{g}_{ij} + r_ir_j \\ &= \lambda^2(\hat{g}_{ij} + \varphi_i\varphi_j). \end{aligned}$$

Seja $\nu$ o campo definido por

$$\nu = \partial_r - \frac{r^l}{\lambda^2}\partial_l,$$

onde $r^l = r_k\hat{g}^{kl}$ (aqui, usamos a notação de Einstein para somatório). Dado um campo tangente $X_i$, temos que

$$\begin{aligned} \langle X_i, \nu\rangle &= \left\langle \partial_i + r_i\partial_r, \partial_r - \frac{r_k\hat{g}^{kl}}{\lambda^2}\partial_l \right\rangle \\ &= r_i - \frac{r_k\hat{g}^{kl}}{\lambda^2}g_{il} \\ &= r_i - r_k\hat{g}^{kl}\hat{g}_{il} \\ &= r_i - r_k\delta_{ik} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, o campo $\nu$ é normal a $\Sigma$. Fazendo o cálculo da norma de $\nu$, vemos que

$$\begin{aligned} |\nu|^2 = \langle \nu, \nu\rangle &= \left\langle \partial_r - \frac{r_k\hat{g}^{kl}}{\lambda^2}\partial_l, \partial_r - \frac{r_n\hat{g}^{nm}}{\lambda^2}\partial_m \right\rangle \\ &= 1 + \frac{r_kr_n\hat{g}^{kl}\hat{g}^{nm}g_{lm}}{\lambda^4} \\ &= 1 + \varphi_k\varphi_n\hat{g}^{kl}\hat{g}^{nm}\hat{g}_{lm} \\ &= 1 + |\hat{\nabla}\varphi|^2_{\hat{g}} \\ &= W^2. \end{aligned}$$

Assim, como $\langle \lambda\partial_r, \nu\rangle = \lambda > 0$, temos que o campo normal unitário que aponta para fora de $\Sigma$ é dado por

$$\xi = \frac{1}{W}\left(\partial_r - \frac{r^l}{\lambda^2}\partial_l\right).$$

Dessa forma, denotando por $\overline{\nabla}$ a conexão riemanniana em $P$, temos que a segunda forma fundamental é dada por

$$\begin{aligned} h_{ij} = -\langle \overline{\nabla}_{X_i} X_j, \xi \rangle &= -\left\langle \overline{\nabla}_{\partial_i + r_i \partial_r} (\partial_j + r_j \partial_r), \frac{1}{W}\left(\partial_r - \frac{r^l}{\lambda^2}\partial_l\right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{W}\left\langle (r_{ij} - \lambda\lambda')\partial_r + \frac{\lambda'}{\lambda} r_j \partial_i + \frac{\lambda'}{\lambda} r_i \partial_j, \partial_r - \frac{r^l}{\lambda^2}\partial_l \right\rangle \\ &= \frac{1}{W}\left(\lambda\lambda'\hat{g}_{ij} + \frac{2\lambda'}{\lambda} r_i r_j - r_{ij}\right) \\ &= \frac{\lambda}{W}(\lambda'(\hat{g}_{ij} + \varphi_i\varphi_j) - \varphi_{ij}). \end{aligned}$$

□

Agora, seja $c^{jk} = \lambda^{-2}\hat{\sigma}^{jk}$, onde $\hat{\sigma}^{jk} := \hat{g}^{jk} - \frac{\varphi^j\varphi^k}{W^2}$. Fazendo o produto $g_{ij}c^{jk}$ e somando em $j$, obtemos

$$\begin{aligned} g_{ij}c^{jk} &= [\lambda^2(\hat{g}_{ij} + \varphi_i\varphi_j)]\left[\lambda^{-2}\left(\hat{g}^{jk} - \frac{\varphi^j\varphi^k}{W^2}\right)\right] \\ &= (\hat{g}_{ij} + \varphi_i\varphi_j)\left(\hat{g}^{jk} - \frac{\varphi^j\varphi^k}{W^2}\right) \\ &= \hat{g}_{ij}\hat{g}^{jk} + \varphi_i\varphi_j\hat{g}^{jk} - \frac{\hat{g}_{ij}\varphi^j\varphi^k}{W^2} - \frac{\varphi_i\varphi_j\varphi^j\varphi^k}{W^2} \\ &= \delta_{ik} + \varphi_i\varphi^k - \frac{(1 + |\hat{\nabla}\varphi|^2_{\hat{g}})\varphi_i\varphi^k}{1 + |\hat{\nabla}\varphi|^2_{\hat{g}}} \\ &= \delta_{ik}. \end{aligned}$$

Portanto, $c^{ij}$ representa a inversa da métrica $g_{ij}$ e, assim, escrevemos $c^{ij} = g^{ij}$. Usando a primeira parte da Proposição 2.1 e o resultado obtido acima, concluímos que a curvatura média $H$ é dada por

$$H = \frac{1}{W\lambda}((n-1)\lambda' - \hat{\sigma}^{ij}\varphi_{ij}). \tag{2.6}$$

Lembre-se que uma hipersuperfície é média convexa se vale $H \geq 0$ e estritamente média convexa caso ocorra $H > 0$.

## 2.3 O fluxo pelo inverso da curvatura média no espaço AdS-Reissner-Nordström

Seja $\Sigma_0 = \{(r_0(\theta), \theta) : \theta \in N_\varepsilon\}$ uma hipersuperfície estrelada em relação ao horizonte no espaço AdS-Reissner-Nordström $(P, \bar{g})$. De (WANG, 2015) e (CHEN *et al.*, 2019), temos que se $\Sigma_0$ é estritamente média convexa e estrelada em relação ao horizonte, então a solução $\Sigma_t$ do FICM existe para todo tempo $t \in [0,\infty)$ e continua sendo estritamente média convexa e estrelada em relação ao horizonte.

É bem sabido (veja, por exemplo, (HUISKEN, 1998)) que ao longo do FICM valem as seguintes equações de evolução:

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = \frac{2}{H} h_{ij} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial t} d\Sigma = d\Sigma,$$

onde $d\Sigma$ denota o elemento de área de $\Sigma$. Em particular, se $|\Sigma|$ representa a área de $\Sigma$, então

$$\frac{d}{dt}|\Sigma| = |\Sigma|. \tag{2.7}$$

Mostraremos agora que a quantidade

$$\mathscr{F}(\Sigma) = \frac{\mathscr{K}(\Sigma) - \mathscr{J}(\Sigma)}{|\Sigma|^{\frac{n}{n-1}}},$$

definida em (1.23), é não crescente ao longo do fluxo pelo inverso da curvatura média.

**Proposição 2.2** *Seja $\Sigma$ uma hipersuperfície estritamente média convexa e estrelada em relação ao horizonte no espaço AdS-Reissner-Nordström $P$. Ao longo do fluxo pelo inverso da curvatura média, temos que*

$$\frac{d}{dt}\frac{\mathscr{K}(\Sigma_t) - \mathscr{J}(\Sigma_t)}{|\Sigma_t|^{\frac{n}{n-1}}} \leq 0. \tag{2.8}$$

*Além disso, se ocorrer a igualdade para algum $t$, então $\Sigma_t$ é totalmente umbílica.*

**Demonstração:** Usando a regra da cadeia e a igualdade (2.7), obtemos

$$\frac{d}{dt}\mathscr{K}(\Sigma_t) = \kappa^2 \vartheta_{n-1} \frac{n}{n-1}\left(\frac{|\Sigma_t|}{\vartheta_{n-1}}\right)^{\frac{n}{n-1}-1} \frac{d}{dt}\left(\frac{|\Sigma_t|}{\vartheta_{n-1}}\right) = \frac{n}{n-1}\kappa^2 \vartheta_{n-1}\left(\frac{|\Sigma_t|}{\vartheta_{n-1}}\right)^{\frac{n}{n-1}}. \tag{2.9}$$

Por outro lado, da desigualdade de Heintze-Karcher, provada em (BRENDLE, 2013), temos que

$$(n-1)\int_\Sigma \frac{\rho}{H} d\Sigma \geq n \int_\Omega \rho \, d\Omega + s_0^n \vartheta_{n-1}. \tag{2.10}$$

Além disso, se ocorre a igualdade em (2.10), então $\Sigma$ é totalmente umbílica. Agora, usando que $|\partial P| = s_0^{n-1}\vartheta_{n-1}$ e a fórmula da coárea, concluímos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathscr{J}(\Sigma_t) &= n\kappa^2 \frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho \, d\Omega_t \\
&= n\kappa^2 \int_{\Sigma_t} \frac{\rho}{H} d\Sigma_t \\
&\geq \frac{n}{n-1}\left(n\kappa^2 \int_{\Omega_t} \rho \, d\Omega_t + \kappa^2 s_0^n \vartheta_{n-1}\right) \\
&= \frac{n}{n-1}\left(\mathscr{J}(\Sigma_t) + \kappa^2 \vartheta_{n-1}\left(\frac{|\partial P|}{\vartheta_{n-1}}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Portanto, de (2.9) e (2.11), vemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\mathscr{K}(\Sigma_t) - \mathscr{J}(\Sigma_t)) &\leq \frac{n}{n-1}\left[\kappa^2\vartheta_{n-1}\left(\frac{|\Sigma_t|}{\vartheta_{n-1}}\right)^{\frac{n}{n-1}} - \left(\mathscr{J}(\Sigma_t) + \kappa^2\vartheta_{n-1}\left(\frac{|\partial P|}{\vartheta_{n-1}}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right)\right] \\
&= \frac{n}{n-1}(\mathscr{K}(\Sigma_t) - \mathscr{J}(\Sigma_t)).
\end{aligned}$$

Por fim, usando a desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\mathscr{K}(\Sigma_t) - \mathscr{J}(\Sigma_t)}{|\Sigma_t|^{\frac{n}{n-1}}} &= \frac{|\Sigma_t|^{\frac{n}{n-1}}\frac{d}{dt}(\mathscr{K}(\Sigma_t) - \mathscr{J}(\Sigma_t)) - |\Sigma_t|^{\frac{n}{n-1}}\frac{n}{n-1}(\mathscr{K}(\Sigma_t) - \mathscr{J}(\Sigma_t))}{|\Sigma_t|^{\frac{2n}{n-1}}} \\
&= |\Sigma_t|^{-\frac{n}{n-1}}\left(\frac{d}{dt}(\mathscr{K}(\Sigma_t) - \mathscr{J}(\Sigma_t)) - \frac{n}{n-1}(\mathscr{K}(\Sigma_t) - \mathscr{J}(\Sigma_t))\right) \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Além disso, se ocorrer a igualdade, então vale a igualdade na desigualdade de Heintze-Karcher e, dessa forma, teremos que $\Sigma_t$ é totalmente umbílica.

□

# 3 PROVA DOS TEOREMAS

Consideremos agora uma família de hipersuperfícies estreladas $\Sigma_s$ do espaço $(P,\bar{g})$ que são descritas nas coordenadas $(r,\theta)$ por

$$\Sigma_s = \{(r(\theta,s),\theta) : \theta \in N_\varepsilon\},$$

onde $r$ é uma função suave em $N_\varepsilon \times \mathbb{R}^+$. Assumiremos que $r(\theta,s)$ possui o seguinte comportamento assintótico quando $s \to \infty$:

$$r(\theta,s) = cs + f(\theta) + o_s(1),$$

onde $c$ é uma constante positiva e $f$ é uma função suave em $N_\varepsilon$. Da primeira parte da Proposição 2.1, temos que

$$\sqrt{\det g} = \lambda(r)^{n-1}\sqrt{1+|\hat{\nabla}\varphi|^2_{\hat{g}}}\sqrt{\det\hat{g}} = \lambda(r)^{n-1}W\sqrt{\det\hat{g}}. \tag{3.1}$$

Agora, de (2.3), (2.2) e (2.4), temos que o comportamento assintótico de $\lambda(r)$ quando $r \to \infty$ é

$$\lambda(r) = \delta e^{\kappa r} + o_r(1), \tag{3.2}$$

onde $\delta = 1/2\kappa$ nos casos $\varepsilon = \pm 1$ e $\delta = 1$ quando $\varepsilon = 0$.

Abaixo, calculamos o limite, para $s$ tendendo ao infinito, da quantidade $\mathscr{F}(\Sigma_s)$ definida em (1.23).

**Demonstração do Teorema 1.2:** Inicialmente, observemos que, para $W$, vale

$$W^2 = 1 + |\hat{\nabla}\varphi|^2_{\hat{g}} = 1 + \lambda(r)^{-2}|\hat{\nabla} r|^2_{\hat{g}} = 1 + O(e^{-2\kappa cs}).$$

Agora, usando (1.24), (3.1) e (3.2), calculemos as quantidades envolvidas na definição de $\mathscr{L}$ em função dos termos usados no comportamento assintótico de $r$. Para $|\Sigma_s|$, temos

$$\begin{aligned}
|\Sigma_s| &= \int_{\Sigma_s} d\Sigma_s \\
&= \int_{N_\varepsilon} \lambda(r)^{n-1} W d\mu_{\hat{g}} \\
&= \int_{N_\varepsilon} W\left(\delta e^{\kappa r} + o_r(1)\right)^{n-1} d\mu_{\hat{g}} \\
&= (\delta e^{\kappa cs})^{n-1}\int_{N_\varepsilon} W\left(e^{\kappa(f+o_s(1))} + (\delta e^{\kappa cs})^{-1} o_r(1)\right)^{n-1} d\mu_{\hat{g}}.
\end{aligned}$$

Para $\mathscr{J}(\Sigma_s)$, denotando por $\Omega_s$ a região delimitada por $\Sigma_s$ e pelo horizonte, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathscr{J}(\Sigma_s) &= n\kappa^2\int_{\Omega_s}\rho d\Omega_s \\
&= \kappa^2\int_{N_\varepsilon}\int_{r_0}^{r} n\lambda'\lambda^{n-1}drd\mu_{\hat{g}} \\
&= \kappa^2\int_{N_\varepsilon}\int_{\lambda(r_0)}^{\lambda(r)} nu^{n-1}dud\mu_{\hat{g}} \\
&= \kappa^2\int_{N_\varepsilon}(\lambda(r)^n - s_0^n)d\mu_{\hat{g}} \\
&= \kappa^2\int_{N_\varepsilon}\lambda(r)^n d\mu_{\hat{g}} - \kappa^2\vartheta_{n-1}\left(\frac{|\partial P|}{\vartheta_{n-1}}\right)^{\frac{n}{n-1}}.
\end{aligned}$$

Usando a expansão (3.1), temos

$$\begin{aligned}
\mathscr{J}(\Sigma_s) &= \kappa^2\int_{N_\varepsilon}\lambda(r)^n d\mu_{\hat{g}} - \kappa^2\vartheta_{n-1}\left(\frac{|\partial P|}{\vartheta_{n-1}}\right)^{\frac{n}{n-1}} \\
&= \kappa^2\int_{N_\varepsilon}(\delta e^{\kappa r}+o_r(1))^n d\mu_{\hat{g}} - \kappa^2\vartheta_{n-1}\left(\frac{|\partial P|}{\vartheta_{n-1}}\right)^{\frac{n}{n-1}} \\
&= \kappa^2(\delta e^{\kappa cs})^n\int_{N_\varepsilon}\left(e^{\kappa(f+o_s(1))}+(\delta e^{\kappa cs})^{-1}o_r(1)\right)^n d\mu_{\hat{g}} - \kappa^2\vartheta_{n-1}\left(\frac{|\partial P|}{\vartheta_{n-1}}\right)^{\frac{n}{n-1}}
\end{aligned}$$

Portanto, usando as informações acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(\Sigma_s) &= \frac{\mathscr{K}(\Sigma_s)-\mathscr{J}(\Sigma_s)}{|\Sigma_s|^{\frac{n}{n-1}}} \\
&= \frac{\kappa^2\vartheta_{n-1}\left(\left(\frac{|\Sigma_s|}{\vartheta_{n-1}}\right)^{\frac{n}{n-1}} - \left(\frac{|\partial P|}{\vartheta_{n-1}}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right) - \left(\kappa^2\int_{N_\varepsilon}\lambda(r)^n d\mu_{\hat{g}} - \kappa^2\vartheta_{n-1}\left(\frac{|\partial P|}{\vartheta_{n-1}}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right)}{|\Sigma_s|^{\frac{n}{n-1}}} \\
&= \kappa^2\left[\left(\frac{1}{\vartheta_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}} - |\Sigma_s|^{-\frac{n}{n-1}}\int_{N_\varepsilon}\lambda(r)^n d\mu_{\hat{g}}\right] \\
&= \kappa^2\left[\left(\frac{1}{\vartheta_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}} - \frac{(\delta e^{\kappa cs})^n\int_{N_\varepsilon}\left(e^{\kappa(f+o_s(1))}+(\delta e^{\kappa cs})^{-1}o_r(1)\right)^n d\mu_{\hat{g}}}{(\delta e^{\kappa cs})^n\left[\int_{N_\varepsilon}W\left(e^{\kappa(f+o_s(1))}+(\delta e^{\kappa cs})^{-1}o_r(1)\right)^{n-1}d\mu_{\hat{g}}\right]^{\frac{n}{n-1}}}\right].
\end{aligned}$$

Como $r = cs + f + o_s(1)$, temos que $s\to\infty$ implica $r\to\infty$. Assim, temos que

$$\lim_{s\to\infty} o_s(1) = \lim_{s\to\infty} o_r(1) = 0.$$

Usando o resultado acima e a fórmula obtida para $\mathscr{F}(\Sigma_s)$, concluímos que

$$\lim_{s\to\infty}\mathscr{F}(\Sigma_s) = \kappa^2\left[\left(\frac{1}{\vartheta_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}} - \left(\int_{N_\varepsilon}e^{n\kappa f}d\mu_{\hat{g}}\right)\left(\int_{N_\varepsilon}e^{(n-1)\kappa f}d\mu_{\hat{g}}\right)^{-\frac{n}{n-1}}\right] = \mathscr{A}(f).$$

Dados $p \in (1,\infty)$ e $u$ uma função suave e positiva definida em $N_\varepsilon$, seja $||u||_{L^p(N_\varepsilon)}$ a norma $L_p$ de $u$, ou seja,

$$||u||_{L^p(N_\varepsilon)} = \left(\int_{N_\varepsilon} u^p d\mu_{\hat{g}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Se $p,q \in (1,\infty)$ satisfazem $p^{-1}+q^{-1}=1$, então, dadas as funções $u$ e $v$ definidas em $N_\varepsilon$, com $u$ e $v$ positivas e suaves, temos, da desigualdade de Hölder, que

$$||uv||_{L^1(N_\varepsilon)} \leq ||u||_{L^p(N_\varepsilon)}||v||_{L^q(N_\varepsilon)},$$

com igualdade se, e somente se, existe $\alpha$ constante tal que $u^p = \alpha v^q$. Fazendo $p=n$, $q = n(n-1)^{-1}$, $u=1$ e $v=e^{(n-1)\kappa f}$, temos $p^{-1}+q^{-1}=1$ e, assim, vale

$$\begin{aligned}
\int_{N_\varepsilon} e^{(n-1)\kappa f} d\mu_{\hat{g}} &= ||1\cdot e^{(n-1)\kappa f}||_{L^1(N_\varepsilon)}\\
&\leq ||1||_{L^n(N_\varepsilon)}||e^{(n-1)\kappa f}||_{L^{\frac{n}{n-1}}(N_\varepsilon)}\\
&= (\vartheta_{n-1})^{\frac{1}{n}}\left(\int_{N_\varepsilon} e^{n\kappa f} d\mu_{\hat{g}}\right)^{\frac{n-1}{n}}.
\end{aligned}$$

Elevando ambos os lados da desigualdade acima ao expoente $n(n-1)^{-1}$, obtemos

$$\left(\frac{1}{\vartheta_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}} - \left(\int_{N_\varepsilon} e^{n\kappa f} d\mu_{\hat{g}}\right)\left(\int_{N_\varepsilon} e^{(n-1)\kappa f} d\mu_{\hat{g}}\right)^{-\frac{n}{n-1}} \leq 0.$$

Portanto, $\mathscr{A}(f) \leq 0$. Além disso, vale a igualdade se, e somente se, $e^{n\kappa f}$ é múltiplo de 1, ou seja, quando $f$ é constante.

$\square$

Do resultado acima, vemos que, para $f$ não constante, o valor $\mathscr{A}(f)$ é estritamente negativo. Este fato será bastante útil na demonstração do resultado principal. Antes disso, mostraremos que, sob certa condição de regularidade de $o_s(1)$, a curvatura média $H_s$ da hipersuperfície $\Sigma_s$ se aproxima de $\kappa(n-1)$, para $s$ suficientemente grande.

**Demonstração do Teorema 1.3:** Inicialmente, temos, de (2.6), que

$$H_s = \frac{1}{W\lambda(r)}((n-1)\lambda'(r) - \hat{\sigma}^{ij}\varphi_{ij}),$$

onde

$$\hat{\sigma}^{ij} = \hat{g}^{ij} - \frac{\varphi^i\varphi^j}{W^2}, \text{ com } \varphi^k = \hat{g}^{kl}\varphi_l.$$

Da equação (1.17), temos que $\lim_{s\to\infty} \lambda'(r)/\lambda(r) = \kappa$. Assim, como $W = 1 + O(e^{-\kappa r})$, obtemos

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\lambda'(r)}{W\lambda(r)}(n-1) = \kappa(n-1). \tag{3.3}$$

Portanto, nos resta mostrar que

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{W\lambda(r)}(\hat{\sigma}^{ij}\varphi_{ij}) = 0. \tag{3.4}$$

Para $\hat{\sigma}^{ij}$, usando $r_i = \lambda(r)\varphi_i$, vemos que

$$\hat{\sigma}^{ij} = \hat{g}^{ij} - \frac{\varphi^i\varphi^j}{W^2} = \hat{g}^{ij} - \frac{\lambda(r)^{-2}r^ir^j}{1+|\hat{\nabla}\varphi|^2_{\hat{g}}} = \hat{g}^{ij} - \frac{r^ir^j}{\lambda(r)^2+|\hat{\nabla}r|^2_{\hat{g}}} = \hat{g}^{ij} + O(e^{-2\kappa cs}).$$

Para $\varphi_{ij}$, temos

$$\varphi_{ij} = (\varphi_i)_j = (\lambda^{-1}(r)r_i)_j = -\lambda(r)^{-2}\lambda'(r)r_ir_j + \lambda(r)^{-1}r_{ij} = \lambda(r)^{-1}\left(r_{ij} - \frac{\lambda'(r)}{\lambda(r)}r_ir_j\right).$$

Agora, como $\lim_{s\to\infty} ||o_s(1)||_{C^2(N_\varepsilon)} = 0$, temos que

$$r_{ij} - \frac{\lambda'(r)}{\lambda(r)}r_ir_j = f_{ij} - \frac{\lambda'(r)}{\lambda(r)}f_if_j + o(1),$$

com $\lim_{s\to\infty} o(1) = 0$. Assim,

$$\lim_{s\to\infty}(\hat{g}^{ij} + O(e^{-2\kappa cs}))\left(f_{ij} - \frac{\lambda'(r)}{\lambda(r)}f_if_j + o(1)\right) = \mathrm{Tr}_{\hat{g}}(Z),$$

onde $Z_{ij} = f_{ij} - \kappa f_if_j$. Dessa forma, obtemos (3.4). Portanto, de (3.3), concluímos que

$$\lim_{s\to\infty} H_s = \kappa(n-1).$$

□

Para uma hipersuperfície $\Sigma$ do espaço AdS-Schwarzschild $G$, vimos que a solução do fluxo pelo inverso da curvatura média $\Sigma_t$ é dada como gráfico de

$$r(\theta,t) = \frac{t}{n-1} + f(\theta) + o_t(1),$$

sendo, portanto, um caso particular de (1.24). Dessa forma, usando o Teorema 1.2, temos que

$$\lim_{t\to\infty} \mathscr{F}(\Sigma_t) = \mathscr{A}(\Sigma),$$

onde

$$\mathscr{A}(\Sigma) = \left[\left(\frac{1}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}} - \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{nf}d\mu_\sigma\right)\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{(n-1)f}d\mu_\sigma\right)^{-\frac{n}{n-1}}\right].$$

Usando as informações descritas acima e a Proposição 2.2, obtemos o resultado abaixo.

**Demonstração do Teorema 1.4:** De (2.8), sabemos que

$$\frac{d}{dt}\frac{\mathscr{K}(\Sigma_t)-\mathscr{J}(\Sigma_t)}{|\Sigma_t|^{\frac{n}{n-1}}}\leq 0,$$

onde $\Sigma_t$ é a solução, para o tempo $t$, do fluxo pelo inverso da curvatura média partindo da condição inicial $\Sigma_0=\Sigma$. Além disso, vale a igualdade acima se, e somente se, $\Sigma$ é totalmente umbílica. Como visto acima, temos também que

$$\lim_{t\to\infty}\mathscr{F}(\Sigma_t)=\mathscr{A}(\Sigma). \tag{3.5}$$

Usando o fato da quantidade $\mathscr{F}$ ser monótona não crescente, temos que $\mathscr{F}(\Sigma)\geq\mathscr{F}(\Sigma_t)$ para todo $t$. Portanto, passando o limite, concluímos que

$$\frac{\mathscr{K}(\Sigma)-\mathscr{J}(\Sigma)}{|\Sigma|^{\frac{n}{n-1}}}\geq\mathscr{A}(\Sigma),$$

obtendo a desigualdade (1.27). Se vale a igualdade em (1.27), então

$$\mathscr{F}(\Sigma)=\mathscr{A}(\Sigma)=\lim_{t\to\infty}\mathscr{F}(\Sigma_t).$$

Dessa forma, como $\mathscr{F}$ é monótona ao longo do fluxo, temos que vale a igualdade em (2.8) e, portanto, $\Sigma$ é totalmente umbílica. Reciprocamente, se $\Sigma$ é totalmente umbílica, então vale a igualdade em (2.8). Assim, temos que $\mathscr{F}(\Sigma_t)$ é constante ao longo do fluxo e, portanto, de (3.5), temos a igualdade em (1.27).

□

Seja $\Sigma_s=\{(r(\theta,s),\theta):\theta\in N_\varepsilon\}$ uma família de hipersuperfícies estreladas em relação ao horizonte, onde $r(\theta,s)$ possui o comportamento assintótico descrito em (1.24). Abaixo, veremos uma condição necessária para que a família $\Sigma_s$ convirja para uma fatia.

**Proposição 3.1** *Seja $\Sigma_s$ uma família de hipersuperfícies em $(P,\bar{g})$ que são gráficos radiais da função $r(\theta,s)=cs+f(\theta)+o_s(1)$. Se $\Sigma_s$ converge para uma fatia, então vale*

$$\lim_{s\to\infty}\mathscr{F}(\Sigma_s)=0.$$

**Demonstração:** Como $\Sigma_s$ converge para uma fatia, temos, de (1.28), que

$$r(\theta,s)-\frac{1}{\vartheta_{n-1}}\int_{N_\varepsilon}r(\theta,s)d\mu_{\hat{g}}=\bar{o}_s(1),$$

onde $\lim_{s\to\infty}\bar{o}_s(1)=0$. Usando a definição de $r$, temos

$$\begin{aligned}\bar{o}_s(1) &= cs+f(\theta)+o_s(1)-\frac{1}{\vartheta_{n-1}}\int_{N_\varepsilon}(cs+f(\theta)+o_s(1))d\mu_{\hat{g}}\\ &= f(\theta)-\frac{1}{\vartheta_{n-1}}\int_{N_\varepsilon}f(\theta)d\mu_{\hat{g}}+o_s(1)-\frac{1}{\vartheta_{n-1}}\int_{N_\varepsilon}o_s(1)d\mu_{\hat{g}}.\end{aligned}$$

Fazendo $s\to\infty$, obtemos

$$f(\theta)=\frac{1}{\vartheta_{n-1}}\int_{N_\varepsilon}f(\theta)d\mu_{\hat{g}}.$$

Portanto, $f$ é constante. Dessa forma, usando o Teorema 1.2, concluímos que

$$\lim_{s\to\infty}\mathscr{F}(\Sigma_s)=0.$$

$\square$

No primeiro resultado provado nesta seção, mostramos a existência do limite, para $s$ tendendo ao infinito, da quantidade $\mathscr{F}(\Sigma_s)$, definida em (1.23), com $\Sigma_s=\{(r(\theta,s),\theta):\theta\in N_\varepsilon\}$, onde $r(\theta,s)$ possui o comportamento assintótico dado em (1.24). No segundo, supondo certa condição de regularidade, provamos que, para $s$ suficientemente grande, a hipersuperfície $\Sigma_s$ é estritamente média convexa. Os fatos descritos acima são suficientes para provarmos o resultado principal.

**Demonstração do Teorema 1.7:** Seja $\widetilde{\Sigma}=(\tilde{f}(\theta),\theta)$ uma hipersuperfície estrelada em relação ao horizonte do espaço AdS-Schwarzschild $G$ tal que $\tilde{f}$ é não constante. Denotemos por $\widetilde{\Sigma}_s$ a família de hipersuperfícies definida por

$$\widetilde{\Sigma}_s=\{(s+\tilde{f}(\theta),\theta):\theta\in\mathbb{S}^{n-1}\}.$$

Como $\tilde{f}$ é não constante, temos, do Teorema 1.2,

$$\lim_{s\to\infty}\mathscr{F}(\widetilde{\Sigma}_s)=\left[\left(\frac{1}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}}-\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}}e^{n\tilde{f}}d\mu_\sigma\right)\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}}e^{(n-1)\tilde{f}}d\mu_\sigma\right)^{-\frac{n}{n-1}}\right]=\mathscr{A}(\tilde{f})<0.$$

Seja $c$ um número positivo escolhido de modo que $\mathscr{A}(\tilde{f})<-c<0$ e tomemos um real $s_1$ tal que $\mathscr{F}(\widetilde{\Sigma}_s)<-c$ sempre que $s\geq s_1$. Agora, denotando por $H_s$ a curvatura média de $\widetilde{\Sigma}_s$ e usando o Teorema 1.3, temos a existência de um $s_2$ real tal que $H_s>0$ para todo $s\geq s_2$. Fazendo $s_0=\max\{s_1,s_2\}$, vemos que

$$\mathscr{F}(\widetilde{\Sigma}_{s_0})<-c \quad \text{e} \quad H_{s_0}>0.$$

Seja então $\Sigma = \widetilde{\Sigma}_{s_0}$. Sendo $\Sigma$ estrelada e estritamente média convexa, podemos evoluí-la usando o fluxo pelo inverso da curvatura média. Como $\mathscr{F}(\Sigma) < 0$ e $\mathscr{F}$ é monótona não crescente ao longo do fluxo, temos que

$$\lim_{t\to\infty} \mathscr{F}(\Sigma_t) \leq \mathscr{F}(\Sigma) < 0.$$

Como $\lim_{t\to\infty} \mathscr{F}(\Sigma_t) \neq 0$, temos, da Proposição 3.1, que o fluxo pelo inverso da curvatura média tendo $\Sigma$ como hipersuperfície inicial não evolue para uma fatia.

□

Agora, podemos mostrar um resultado análogo ao feito acima sobre a métrica induzida e normalizada.

**Demonstração do Corolário 1.8:** Seja $\Sigma_s$ uma família de hipersuperfícies em $(G,g)$ que são gráficos de

$$\tilde{r}(\theta,s) = cs + \tilde{f}(\theta) + o_s(1),$$

com $c > 0$ e $\tilde{f}$ simétrica em $\mathbb{S}^{n-1}$. De (3.2), temos $\lambda(\tilde{r}) = \frac{1}{2}e^{\tilde{r}} + o_{\tilde{r}}(1)$. Portanto, fazendo $s \to \infty$ na métrica reescalonada $e^{-2cs}g_{ij}$, temos que

$$\lim_{s\to\infty} e^{-2cs}g_{ij} = \lim_{s\to\infty} e^{-2cs}\lambda(\tilde{r})^2\sigma_{ij} = \lim_{s\to\infty} e^{-2cs}\left(\frac{1}{2}e^{cs+\tilde{f}+o_s(1)} + o_{\tilde{r}}(1)\right)^2\sigma_{ij} = e^{2\tilde{f}}\sigma_{ij}.$$

Mostremos agora que o limite da métrica reescalonada $e^{-2cs}g_{ij}$, quando $s \to \infty$, é uma métrica de curvatura constante em $\mathbb{S}^{n-1}$ se, e somente se, vale $\lim_{s\to\infty} \mathscr{F}(\Sigma_s) = 0$. De fato, se $\lim_{s\to\infty} \mathscr{F}(\Sigma_s) = 0$, então, usando o Teorema 1.2, temos $\tilde{f}$ constante e, portanto, a métrica $e^{2\tilde{f}}\sigma_{ij}$ é de curvatura constante. Reciprocamente, se $e^{2\tilde{f}}\sigma_{ij}$ é de curvatura constante, então $e^{-\tilde{f}}$ é uma combinição linear de constantes e das primeiras autofunções de $\mathbb{S}^{n-1}$ (veja o Lema 4 de (HUNG; WANG, 2015)). Sabendo que as primeiras autofunções de $\mathbb{S}^{n-1}$ são as restrições das funções coordenadas de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{S}^{n-1}$, temos que existem constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ de modo que

$$e^{-\tilde{f}} = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n.$$

Como $\tilde{f}$ é simétrica em relação à $\mathbb{S}^{n-1}$, temos que o mesmo vale para $e^{-\tilde{f}}$ e, dessa forma, temos $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. Portanto, $\tilde{f}$ é constante e, assim, usando novamente o Teorema 1.2, concluímos que $\lim_{s\to\infty} \mathscr{F}(\Sigma_s) = 0$. Usando um argumento análogo ao feito no Teorema 1.7, obtemos uma hipersuperfície $\Sigma \subset G$ estritamente média convexa e simétrica em relação ao horizonte de modo que

$$\lim_{t\to\infty} \mathscr{F}(\Sigma_t) < 0, \tag{3.6}$$

onde $\Sigma_t$ é o fluxo pelo inverso da curvatura média de $\Sigma$ no tempo $t$. Como o fluxo preserva simetria, temos que a função $f$, obtida de modo que

$$r(\theta,t) = \frac{1}{n-1}t + f(\theta) + o_t(1)$$

é simétrica em relação ao horizonte. Portanto, de (3.6), temos que

$$\lim_{t\to\infty} |\Sigma_t|^{-\frac{2}{n-1}} g_t = |\Sigma| \lim_{t\to\infty} e^{-\frac{2}{n-1}t} g_t = |\Sigma| e^{2f}\sigma$$

não possui curvatura seccional constante em $\mathbb{S}^{n-1}$.

$\square$

Seja $\widetilde{\Sigma} = (\tilde{f}(\theta), \theta)$, com $\tilde{f}$ não constante, uma hipersuperfície simétrica em relação a origem $O$ em $\mathbb{H}^n$, e seja $\widetilde{\Sigma}_s$ a família de hipersuperfícies definida por

$$\widetilde{\Sigma}_s = \{(s + \tilde{f}(\theta), \theta) : \theta \in \mathbb{S}^{n-1}\}.$$

Argumentando de forma inteiramente análoga às demonstrações do Teorema 1.7 e do Corolário 1.8, obtemos uma hipersuperfície $\Sigma$ em $\mathbb{H}^n$ a qual é estrelada em relação à origem, simétrica em relação à origem, estritamente média convexa e tal que o FICM $\{\Sigma_t\}$ não converge para uma esfera geodésica centrada na origem. Para esta $\Sigma$ temos que $|\Sigma_t|^{-\frac{2}{n-1}} g_t$ converge para uma métrica em $\mathbb{S}^{n-1}$ que não possui curvatura seccional constante. Portanto, concluímos a demonstração do Teorema 1.9 e do Corolário 1.10.

Para uma hipersuperficie $\Sigma = (r(\theta), \theta)$ estrelada em relação ao horizonte e estritamente média convexa no espaço Reissner-Nordström-AdS $P$, acreditamos que a hipersuperfície $\Sigma_t$, obtida quando se aplica o fluxo pelo inverso da curvatura média com condição inicial $\Sigma_0 = \Sigma$, é dada por $\Sigma_t = (r(\theta,t), \theta)$, onde $r$ possui o seguinte comportamento assintótico:

$$r(\theta,t) = \frac{t}{(n-1)\kappa} + f(\theta) + o_t(1), \tag{3.7}$$

sendo $f$ uma função suave em $N_\varepsilon$. Portanto, supondo a veracidade de (3.7) e motivados pelos teoremas 1.4 e 1.7, temos as seguintes conjecturas:

**Conjectura 3.2** *Seja* $\Sigma$ *uma hipersuperfície estritamente média convexa e estrelada em relação ao horizonte do espaço AdS-Reissner-Nordström P. Então*

$$\mathscr{K}(\Sigma) \geq \mathscr{J}(\Sigma) + |\Sigma|^{\frac{n}{n-1}} \mathscr{A}(\Sigma).$$

*Além disso, se vale a igualdade, então* $\Sigma$ *é totalmente umbílica.*

**Conjectura 3.3** *Existe uma hipersuperfície* $\Sigma$ *no espaço AdS-Reissner-Nordström P, estritamente média convexa e estrelada em relação ao horizonte, tal que a evolução de* $\Sigma$ *pelo FICM não converge para uma fatia.*

**Observação 3.4** *Assumindo a validade de (3.7), temos que valem as conjecturas 3.2 e 3.3 (pelo menos no caso em que a base* $N_\varepsilon$ *é a esfera* $\mathbb{S}^{n-1}$*). De fato, as mesmas demonstrações dadas no caso em que o ambiente é o AdS-Schwarzschild funcionam para o AdS-Reissner-Nordström.*

**Observação 3.5** *Tanto em (CHEN; MAO, 2016) quanto em (LU, 2019), o principal passo na prova de (3.7) para o espaço AdS-Schwarzschild consite em mostrar a validade da seguinte estimativa:*

$$|h^i_j - \delta^i_j| \leq O(e^{-\frac{2t}{n-1}}).$$

*A estimativa análoga no espaço AdS-Reissner-Nordström é a seguinte:*

$$|h^i_j - \kappa\delta^i_j| \leq O(e^{-\frac{2t}{n-1}}). \tag{3.8}$$

*O Teorema 2.5 de (CHEN et al., 2019) afirma a validade de (3.8), indicando que ela decorre de argumentos padrões da teoria parabólica de Krylov e Schauder. Contudo, até onde sabemos, uma demonstração explícita não foi dada em lugar nenhum.*

# 4 OUTROS RESULTADOS

Nesta seção, mostraremos duas desigualdades análogas às obtidas em (GE *et al.*, 2015). Inicialmente, relembremos que foi mostrado em (DE LIMA; GIRÃO, 2016) que para uma hipersuperfície $\Sigma$ estrelada em relação à origem e estritamente média convexa do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$, com $n \geq 3$, vale a seguinte desigualdade tipo Alexandrov-Fenchel com peso:

$$\int_\Sigma \rho H_1 \, d\Sigma \geq \omega_{n-1} \left( \left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}} + \left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n}{n-1}} \right). \tag{4.1}$$

Além disso, ocorre a igualdade se, e somente se, $\Sigma$ é uma esfera geodésica centrada na origem. Em (GE *et al.*, 2015), Ge, Wang e Wu provaram uma generalização de (4.1), pelo menos para hipersuperfícies horoesféricas convexas (também chamadas de h-convexas), ou seja, hipersuperfícies cujas curvaturas principais são maiores do que ou iguais a 1. Mais precisamente, eles mostraram que se $\Sigma$ é uma hipersuperfície horoesférica convexa no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$, então vale

$$\int_\Sigma \rho H_{2k+1} \, d\Sigma \geq \omega_{n-1} \left( \left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n}{(k+1)(n-1)}} + \left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2k-2}{(k+1)(n-1)}} \right)^{k+1}, \tag{4.2}$$

para todo $k$ tal que $1 \leq 2k+1 \leq n-1$. Além disso, ocorre a igualdade se, e somente se, $\Sigma$ é uma esfera geodésica centrada na origem. A fórmula acima foi obtida usando um argumento de indução (de $j$ para $j+2$), tomando como caso base a desigualdade (4.1). No mesmo trabalho, Ge, Wang e Wu conjecturaram que a desigualdade (4.2) ocorre para toda $m$-ésima curvatura média, isto é, se $\Sigma$ é uma hipersuperfície horoesférica convexa de $\mathbb{H}^n$, então, para todo $m$ tal que $0 \leq m \leq n-1$, vale

$$\int_\Sigma \rho H_m \, d\Sigma \geq \omega_{n-1} \left( \left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{2n}{(m+1)(n-1)}} + \left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{2(n-m-1)}{(m+1)(n-1)}} \right)^{\frac{m+1}{2}}, \tag{4.3}$$

com igualdade se, e somente se, $\Sigma$ é uma esfera geodésica centrada na origem. De (4.2), obtemos que a desigualdade (4.3) é válida pra $m$ ímpar. Para $m$ par, o argumento de indução utilizado por Ge, Wang e Wu ainda funciona. Portanto, para provar (4.3), seria suficiente mostrar que a fórmula é verdadeira para $m = 0$, ou seja, provar que

$$\int_\Sigma \rho \, d\Sigma \geq \omega_{n-1} \left( \left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{2n}{n-1}} + \left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{2} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.4}$$

Em (GIRÃO *et al.*, 2021) foi construída uma hipersuperfície horoesférica convexa $\Gamma$ em $\mathbb{H}^3$ tal que

$$\int_\Gamma \rho\, d\Gamma < \omega_2 \left[ \left( \frac{|\Gamma|}{\omega_{n-1}} \right)^3 + \left( \frac{|\Gamma|}{\omega_{n-1}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

A desigualdade acima é, para $n = 3$ e $m = 0$, um contraexemplo para (4.3). Nesse mesmo trabalho, foi estabelecida uma desigualdade bem similar a (4.4). Mais precisamente, foi provado que se $\Sigma$ é uma hipersuperfície em $\mathbb{H}^n$, estrelada em relação à origem e satisfazendo $H_1 \geq 1$, então vale

$$\int_\Gamma \rho\, d\Gamma > \omega_{n-1} \left[ \left( \frac{n-1}{n} \right)^2 \left( \frac{|\Gamma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{2n}{n-1}} + \left( \frac{|\Gamma|}{\omega_{n-1}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.5}$$

A desigualdade (4.5), em conjunto com o argumento de indução usado por Ge, Wang e Wu em (2015) para provar (4.2), motivaram o seguinte teorema:

**Teorema 4.1 (Girão, Pinheiro, Pinheiro e Rodrigues, 2021)** *Seja $\Sigma$ uma hipersuperfície horoesférica convexa em $\mathbb{H}^n$. Se $k$ é um número par pertencente ao conjunto $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, então*

$$\int_\Sigma \rho H_k\, d\Sigma > \omega_{n-1} \left[ \left( \frac{n-1}{n} \right)^2 \left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{2n}{(k+1)(n-1)}} + \left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{2(n-k-1)}{(k+1)(n-1)}} \right]^{\frac{k+1}{2}}.$$

**Demonstração:** Faremos uma indução de $k$ para $k+2$. Para $k = 0$, a desigualdade em questão se reduz a

$$\int_\Sigma \rho\, d\Gamma > \omega_{n-1} \left[ \left( \frac{n-1}{n} \right)^2 \left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{2n}{n-1}} + \left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.6}$$

A desigualdade (4.6) foi provada em (GIRÃO *et al.*, 2021). Seja $j$ um número inteiro de modo que $2j \in \{0, 1, \ldots, n-3\}$ e suponhamos que a desigualdade ocorre para $k = 2j$, ou seja, que vale a seguinte desigualdade:

$$\int_\Sigma \rho H_{2j} d\Sigma > \omega_{n-1} \left[ \left( \frac{n-1}{n} \right)^2 \left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{2n}{(2j+1)(n-1)}} + \left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{2(n-2j-1)}{(2j+1)(n-1)}} \right]^{\frac{2j+1}{2}}.$$

Em (WANG; XIA, 2014), a seguinte desigualdade para hipersuperfícies h-convexas do espaço hiperbólico foi obtida:

$$\int_\Sigma H_{2j+2} d\Sigma \geq |\Sigma| \left[ 1 + \left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{-\frac{2}{n-1}} \right]^{j+1}. \tag{4.7}$$

Usando a desigualdade de Hölder e (4.7), vemos que

$$\begin{aligned}\left(\int_\Sigma \rho H_{2j+2} d\Sigma\right)\left(\frac{H_{2j+2}}{\rho} d\Sigma\right) &\geq \left(\int_\Sigma H_{2k+2} d\Sigma\right)^2\\ &\geq |\Sigma|^2\left[1+\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{-\frac{2}{n-1}}\right]^{2(j+1)}\\ &> |\Sigma|^2\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{-\frac{2}{n-1}}\right]^{2(j+1)}.\end{aligned}$$

Portanto, fazendo

$$\alpha = |\Sigma|^2\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{-\frac{2}{n-1}}\right]^{2(j+1)},$$

obtemos que

$$\int_\Sigma \rho H_{2j+2} d\Sigma - \int_\Sigma \frac{H_{2j+2}}{\rho} d\Sigma < \int_\Sigma \rho H_{2j+2} d\Sigma - \frac{\alpha}{\int_\Sigma \rho H_{2j+2} d\Sigma}. \tag{4.8}$$

Agora, usando o Teorema 8.2 de (GE *et al.*, 2015), temos que

$$\int_\Sigma \rho H_{2j+2} d\Sigma - \int_\Sigma \frac{H_{2j+2}}{\rho} d\Sigma \geq \int_\Sigma \rho H_{2j} d\Sigma. \tag{4.9}$$

Então, da hipótese de indução e (4.9), encontramos

$$\begin{aligned}&\int_\Sigma \rho H_{2j+2} d\Sigma - \int_\Sigma \frac{H_{2j+2}}{\rho} d\Sigma\\ &> \omega_{n-1}\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n}{n-1}}\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{-\frac{2}{n-1}}\right]^{\frac{2j+1}{2}}.\end{aligned} \tag{4.10}$$

Se considerarmos a função $f(t) = t - \alpha t^{-1}$, teremos, de (4.8) e (4.10), que

$$f\left(\int_\Sigma \rho H_{2j+2} d\Sigma\right) > \omega_{n-1}\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n}{n-1}}\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{-\frac{2}{n-1}}\right]^{\frac{2j+1}{2}}. \tag{4.11}$$

Temos também que

$$\begin{aligned}&f\left(\omega_{n-1}\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n}{n-1}}\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{-\frac{2}{n-1}}\right]^{\frac{2j+3}{2}}\right)\\ &= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\omega_{n-1}\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n}{n-1}}\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{-\frac{2}{n-1}}\right]^{\frac{2j+1}{2}}\\ &< f\left(\int_\Sigma \rho H_{2j+2} d\Sigma\right),\end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue de (4.11). Como a função $f$ é crescente no intervalo $[0,\infty)$, obtemos

$$\int_\Sigma \rho H_{2j+2} d\Sigma > \omega_{n-1}\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n}{n-1}}\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{-\frac{2}{n-1}}\right]^{\frac{2j+3}{2}},$$

o que completa a indução.

□

**Observação 4.2** *Depois que o trabalho no qual o teorema acima foi provado foi submetido para publicação, um artigo de Hu, Li e Wei, que prova (4.3), incluindo a condição de rigidez, para $1 \leq m \leq n$, foi postado no repositório arXiv (veja o Corolário 1.5 de (HU et al., 2020a), cuja versão publicada é (HU et al., 2020b)).*

Vejamos agora uma desigualdade similar a (4.2) para hipersuperfícies do $\mathbb{R}^n$. Fazendo $j=0$ e $k=1$ em (1.1), temos

$$\int_\Sigma H_1\, d\Sigma \geq \omega_{n-1}\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}. \tag{4.12}$$

Em (GIRÃO; RODRIGUES, 2020) foi provado que para uma hipersuperfície estrelada e estritamente média convexa $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ vale

$$\int_\Sigma r^2 H_1\, d\Sigma \geq \omega_{n-1}\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n}{n-1}}, \tag{4.13}$$

onde $r$ é a distância geodésica para uma origem fixada $O$. Além disso, ocorre a igualdade se, e somente se, $\Sigma$ é uma esfera centrada na origem. Combinando as desigualdades (4.12) e (4.13), obtemos

$$\int_\Sigma (1+r^2) H_1\, d\Sigma \geq \omega_{n-1}\left(\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}+\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right), \tag{4.14}$$

com igualdade se, e somente se, $\Sigma$ é uma esfera centrada na origem. Agora, notemos que o lado direito da desigualdade (4.14) é exatamente igual ao lado direito da desigualdade (4.1). As desigualdade (4.14) e (4.2) motivaram o seguinte resultado:

**Teorema 4.3** *Seja $\Sigma$ uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^n$. Se $k$ é um número inteiro tal que $2k+1 \in \{1,\ldots,n-1\}$ e $\Sigma$ é estrelada em relação à origem e estritamente $(2k+1)$-convexa, então*

$$\int_\Sigma (1+r^2)^{k+1} H_{2k+1} d\Sigma \geq \omega_{n-1}\left(\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n}{(k+1)(n-1)}}+\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2k-2}{(k+1)(n-1)}}\right)^{k+1}.$$

*Além disso, ocorre a igualdade se, e somente se, $\Sigma$ é uma esfera centrada na origem.*

**Demonstração:** Segue da versão em (GUAN; LI, 2009) para a desigualdade de Alexandrov-Fenchel (1.1) que

$$\int_\Sigma H_l d\Sigma \geq \omega_{n-1}||\Sigma||^{\frac{n-l-1}{n-1}}, \quad \text{onde} \;\; ||\Sigma|| = \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right), \tag{4.15}$$

para todo inteiro $l \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Além disso, ocorre a igualdade se, e somente se, $\Sigma$ é uma esfera. Combinando a desigualdade (4.13) com a coleção de desigualdades obtida em (KWONG, 2016), temos que

$$\int_\Sigma r^{l+1} H_l d\Sigma \geq \omega_{n-1}||\Sigma||^{\frac{n}{n-1}}, \quad \text{para} \;\; 1 \leq l \leq 2k+1. \tag{4.16}$$

Além disso, vale a igualdade se, e somente se, $\Sigma$ é uma esfera centrada na origem. Em (KWONG; MIAO, 2015), foi estabelecido o seguinte resultado para hipersuperfícies satisfazendo $H_q > 0$:

$$\int_\Sigma r^s H_p d\Sigma \leq \int_\Sigma r^{s+q-p} H_q d\Sigma. \tag{4.17}$$

Acima, $q$ e $p$ são inteiros tais que $1 \leq q \leq n-1$ e $0 \leq p < q$ e $s \geq 0$ é um real arbitrário. Além disso, vale a igualdade se, e somente se, $\Sigma$ é uma esfera centrada na origem. Fazendo $s = 0$ em (4.17), temos que

$$\int_\Sigma H_p d\Sigma \leq \int_\Sigma r^{q-p} H_q d\Sigma. \tag{4.18}$$

Agora, mostremos que a desigualdade

$$\int_\Sigma r^{2j} H_{2k+1} d\Sigma \geq \omega_{n-1}\left(||\Sigma||^{\frac{n-2k-2}{(k+1)(n-1)}}\right)^{k+1-j}\left(||\Sigma||^{\frac{n}{(k+1)(n-1)}}\right)^{j} \tag{4.19}$$

ocorre para qualquer inteiro $j \in \{0, 1, \ldots, k+1\}$. Quando $j = 0$, a desigualdade (4.19) se reduz a

$$\int_\Sigma H_{2k+1} d\Sigma \geq \omega_{n-1}||\Sigma||^{\frac{n-2k-2}{n-1}},$$

sendo verdadeira por (4.15). Quando $j = k+1$, a desigualdade (4.19) se reduz a

$$\int_\Sigma r^{2k+2} H_{2k+1} d\Sigma \geq \omega_{n-1}||\Sigma||^{\frac{n}{n-1}},$$

sendo verdadeira por (4.16). Vamos agora aos casos $j \in \{1, \ldots, k\}$. Inicialmente, observemos que

$$\omega_{n-1}\left(||\Sigma||^{\frac{n-2k-2}{(k+1)(n-1)}}\right)^{k+1-j}\left(||\Sigma||^{\frac{n}{(k+1)(n-1)}}\right)^{j} = \omega_{n-1}||\Sigma||^{\frac{n-2k+2j-2}{n-1}}. \tag{4.20}$$

Fazendo $q = 2k+1$ e $p = 2k-2j+1$, temos $0 \le p < q$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma r^{2j} H_{2k+1} d\Sigma &= \int_\Sigma r^{[(2k+1)-(2k-2j+1)]} H_{2k+1} d\Sigma \\
&\ge \int_\Sigma H_{2k-2j+1} d\Sigma \\
&\ge \omega_{n-1} ||\Sigma||^{\frac{n-(2k-2j+1)-1}{n-1}} \\
&= \omega_{n-1} ||\Sigma||^{\frac{n-2k+2j-2}{n-1}}. \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

Acima, a primeira desigualdade segue de (4.18) e a segunda segue de (4.15). Assim, por (4.20) e (4.21), temos que (4.19) é verdadeira para qualquer $j$. Portanto, usando a fórmula do binômio de Newton, concluímos que

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma (1+r^2)^{k+1} H_{2k+1} d\Sigma &= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} \int_\Sigma r^{2j} H_{2k+1} d\Sigma \\
&\ge \omega_{n-1} \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} ||\Sigma||^{\frac{n-2k+2j-2}{n-1}} \\
&= \omega_{n-1} \left( ||\Sigma||^{\frac{n}{(k+1)(n-1)}} + ||\Sigma||^{\frac{n-2k-2}{(k+1)(n-1)}} \right)^{k+1}.
\end{aligned}$$

O argumento acima completa a demonstração.

$\square$

Note que o lado direito da desigualdade obtida no teorema acima é exatamente igual ao lado direito da desigualdade (4.2). Agora, é natural perguntar se uma desigualdade de Alexandrov-Fenchel com peso ocorre de forma geral, isto é, se

$$\int_\Sigma (1+r^2)^{\frac{m+1}{2}} H_m \, d\Sigma \ge \omega_{n-1} \left( \left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{2n}{(m+1)(n-1)}} + \left( \frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{2(n-m-1)}{(m+1)(n-1)}} \right)^{\frac{m+1}{2}} \qquad (4.22)$$

é verdadeira para qualquer hipersuperfície estrelada e estritamente convexa $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ e qualquer $m \in \{0, 1, \ldots n-1\}$. Do Teorema 4.3, temos que as desigualdades (4.22) são válidas para $m$ ímpar. De fato, a desigualdade geral não ocorre para todo $m$. Seja $\Gamma$ a superfície de $\mathbb{R}^3$ apresentada em (GIRÃO *et al.*, 2021) e descrita por

$$\begin{cases}
x = [(\cos(3t)+9)\operatorname{sen}t - 3\operatorname{sen}(3t)\cos t]\cos s \\
y = [(\cos(3t)+9)\operatorname{sen}t - 3\operatorname{sen}(3t)\cos t]\operatorname{sen}s \\
z = (\cos(3t)+9)\cos t + 3\operatorname{sen}(3t)\operatorname{sen}t.
\end{cases}, \quad 0 \le t \le \pi \text{ and } 0 \le s \le 2\pi.$$

A superfície $\Gamma$ é estrelada e estritamente convexa, pois é a rotação da curva

$$\begin{cases} x &= (\cos(3t)+9)\mathrm{sen}t - 3\mathrm{sen}(3t)\cos t \\ y &= (\cos(3t)+9)\cos t + 3\mathrm{sen}(3t)\mathrm{sen}t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

ao redor do eixo $y$ e suas curvaturas principais $\kappa_1$ e $\kappa_2$ satisfazem

$$\frac{1}{17} \le \kappa_1, \kappa_2 \le 1.$$

Fazendo $m = 0$ e $n = 3$ em (4.22), obtemos

$$\int_\Sigma \sqrt{1+r^2}\, d\Sigma \ge \omega_2 \sqrt{\left(\frac{|\Sigma|}{\omega_2}\right)^3 + \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_2}\right)^2}.$$

Mas, para a hipersuperfície $\Gamma$, temos que

$$\frac{\int_\Gamma \sqrt{1+r^2}\, d\Gamma}{\sqrt{\left(\frac{|\Gamma|}{\omega_2}\right)^3 + \left(\frac{|\Gamma|}{\omega_2}\right)^2}} \approx 12,4963 < 12,5663 < 4\pi = \omega_2. \tag{4.23}$$

A desigualdade acima é, para $m = 0$ e $n = 3$, um contraexemplo para (4.22).

Em (4.23), vimos que a desigualdade geral (4.22) não é valida para todo $m$. Mais precisamente, temos, para $m = 0$ e $n = 3$, o contraexemplo descrito em (GIRÃO *et al.*, 2021). Para $m$ par não nulo, acreditamos, motivados por (HU *et al.*, 2020a), que a desigualdade seja verdadeira. Portanto, concluímos este capítulo com a seguinte conjectura:

**Conjectura 4.4** *Seja $\Sigma$ uma hipersuperfície estrelada e estritamente convexa em $\mathbb{R}^n$. Se $m$ é um inteiro par pertencente ao conjunto $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, então*

$$\int_\Sigma (1+r^2)^{\frac{m+1}{2}} H_m\, d\Sigma \ge \omega_{n-1} \left( \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{2n}{(m+1)(n-1)}} + \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{2(n-m-1)}{(m+1)(n-1)}} \right)^{\frac{m+1}{2}}.$$

*Além disso, ocorre a igualdade se, e somente se, $\Sigma$ é uma esfera geodésica centrada na origem.*

# 5 CONCLUSÃO

Nesta tese, mostramos que o fluxo pelo inverso da curvatura média (FICM) no espaço AdS-Schwarzschild se comporta de maneira bem diferente de quando consideramos o espaço euclidiano como ambiente. Usando a monotonicidade do funcional $\mathscr{F}$ definido por (1.23) e análises assintóticas de $\mathscr{F}$ e da curvatura média, obtivemos o principal resultado deste trabalho (Teorema 1.7). Mais precisamente, mostramos a existência de uma variedade estritamente média convexa, estrelada em relação ao horizonte e simétrica em relação ao horizonte no espaço AdS-Schwarzschild cuja evolução pelo FICM não converge para uma fatia. Como corolário, obtivemos a existência de uma hipersuperfície $\Sigma$ no espaço AdS-Schwarzschild que é estritamente média convexa, estrelada em relação ao horizonte, simétrica em relação ao horizonte e cuja métrica induzida $g_t$ da solução $\Sigma_t$ do FICM partindo de $\Sigma$ é tal que $|\Sigma_t|^{-\frac{2}{n-1}}g_t$ converge para uma métrica em $\mathbb{S}^{n-1}$ que não possui curvatura seccional constante. Isso generaliza, para o ambiente AdS-Schwarzschild, o resultado de Hung e Wang para o espaço hiperbólico (HUNG; WANG, 2015), além de fornecer uma nova demonstração para esse resultado.

Vale salientar que, para que as demonstrações dos resultados obtidos para o espaço AdS-Schwarzschild também funcionem quando o ambiente é o espaço AdS-Reissner-Nordström (pelo menos no caso em que a base $N_\varepsilon$ é a esfera $\mathbb{S}^{n-1}$), basta que a validade de (3.7) seja estabelecida para o AdS-Reissner-Nordström (veja as observações 3.4 e 3.5).

Por fim, mostramos duas desigualdades similares à provada por Ge, Wang e Wu em (GE *et al.*, 2015). A primeira delas é uma desigualdade tipo Alexandrov-Fenchel com peso no espaço hiperbólico envolvendo as curvaturas médias de ordem par. A segunda é uma desigualdade tipo Alexandrov-Fenchel com peso no espaço euclidiano envolvendo as curvaturas médias de ordem ímpar.

## REFERÊNCIAS

ALEXANDROV, A. D. Zur Theorie der gemischten Volumina von konvexen Körpern. II. Neue Ungleichungen zwischen den gemischten Volumina und ihre Anwendungen. **Rec. Math. Moscou**, n. 2, p. 1205–1238, 1937.

ALEXANDROV, A. D. Zur Theorie der gemischten Volumina von konvexen Körpern III. Die Erweiterung zweier Lehrsätze Minkowskis über die konvexen Polyeder auf die beliebigen konvexen Körper. **Rec. Math. Moscou**, n. 3, p. 27–46, 1938.

BECKNER, W. Sharp Sobolev inequalities on the sphere and the Moser-Trudinger inequality. **Ann. of Math. (2)**, v. 138, n. 1, p. 213–242, 1993.

BRENDLE, S. Constant mean curvature surfaces in warped product manifolds. **Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.**, v. 117, p. 247–269, 2013.

BRENDLE, S.; HUNG, P.-K.; WANG, M.-T. A Minkowski inequality for hypersurfaces in the anti–de Sitter–Schwarzschild manifold. **Comm. Pure Appl. Math.**, v. 69, n. 1, p. 124–144, 2016.

CHEN, D.; LI, H.; ZHOU, T. A Penrose type inequality for graphs over Reissner-Nordström-anti-de Sitter manifold. **Journal of Mathematical Physics**, v. 60, n. 4, p. 043503, 2019.

CHEN, L.; MAO, J. Non-parametric Inverse Curvature Flows in the AdS-Schwarzschild Manifold. **The Journal of Geometric Analysis**, v. 28, p. 921–949, 2016.

DAHL, M.; GICQUAUD, R.; SAKOVICH, A. Penrose type inequalities for asymptotically hyperbolic graphs. **Ann. Henri Poincaré**, v. 14, n. 5, p. 1135–1168, 2013.

DE LIMA, L. L.; GIRÃO, F. The ADM mass of asymptotically flat hypersurfaces. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 367, n. 9, p. 6247–6266, 2015.

DE LIMA, L. L.; GIRÃO, F. An Alexandrov-Fenchel-type inequality in hyperbolic space with an application to a Penrose inequality. **Ann. Henri Poincaré**, v. 17, n. 4, p. 979–1002, 2016.

DE SOUSA, A.; GIRÃO, F. The Gauss–Bonnet–Chern mass of higher-codimension graphs. **Pacific J. Math.**, v. 298, n. 1, p. 201–216, 2019.

DING, Q. The inverse mean curvature flow in rotationally symmetric spaces. **Chin. Ann. Math. Ser. B**, v. 32, v. 1, p. 27–44, 2011.

GE, Y.; WANG, G.; WU, J. A new mass for asymptotically flat manifolds. **Adv. Math.**, v. 266, p. 84–119, 2014.

GE, Y.; WANG, G.; WU, J. The GBC mass for asymptotically hyperbolic manifolds. **Math. Z.**, v. 281, n. 1-2, p. 257–297, 2015.

GERHARDT, C. Flow of nonconvex hypersurfaces into spheres. **J. Differential Geom.**, v. 32, n. 1, p. 299–314, 1990.

GERHARDT, C. Inverse curvature flows in hyperbolic space. **J. Differential Geom.**, v. 89, n. 3, p. 487–527, 2011.

GERHARDT, C. Inverse curvature flows in hyperbolic space. **arXiv:1101.2578v5**, 2014.

GIRÃO, F.; PINHEIRO, D.; PINHEIRO, N. M.; RODRIGUES, D. Weighted Alexandrov-Fenchel inequalities in hyperbolic space and a conjecture of Ge, Wang and Wu. **Proc. Amer. Math. Soc.**, v. 149, p. 369–382, 2021.

GIRÃO, F.; RODRIGUES, D. Weighted geometric inequalities for hypersurfaces in sub-static manifolds. **Bull. London Math. Soc.**, v. 52, n. 1, p. 121–136, 2020.

GUAN, P.; LI, J. The quermassintegral inequalities for $k$-convex starshaped domains. **Adv. Math.**, v. 221, n. 5, p. 1725–1732, 2009.

HU, Y.; LI, H.; WEI, Y. Locally constrained curvature flows and geometric inequalities in hyperbolic space. **arXiv:2002.10643**, 2020.

HU, Y.; LI, H.; WEI, Y. Locally constrained curvature flows and geometric inequalities in hyperbolic space. **Math. Ann.**, 2020.

HUISKEN, G. Evolution of hypersurfaces by their curvature in Riemannian manifolds. **Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Doc. Math.**, v. 2, p. 349–360, 1998.

HUISKEN, G.; ILMANEM, T. The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality. **J. Differential Geom.**, v. 59, v. 3, p. 353–437, 2001.

HUNG, P.-K.; WANG, M.-T. Inverse mean curvature flows in the hyperbolic 3-space revisited. **Calc. Var. Partial Differential Equations**, v. 54, n. 1, p. 119–126, 2015.

KWONG, K.-K. An extension of Hsiung-Minkowski formulas and some applications. **J. Geom. Anal.**, v. 26, n. 1, p. 1–23, 2016.

KWONG, K.-K.; MIAO, P. Monotone quantities involving a weighted $\sigma_k$ integral along inverse curvature flows. **Commun. Contemp. Math.**, v. 17, n. 5, p. 1550014, 10, 2015.

LAM, M.-K. G. The graph cases of the Riemannian positive mass and penrose inequalities in all dimensions. **ProQuest LLC, Ann Arbor, MI. Thesis (Ph.D.)–Duke University.**, 2011.

LI, H.; WEI, Y.; XIONG, C. The Gauss-Bonnet-Chern mass for graphic manifolds. **Ann. Global Anal. Geom.**, v. 45, v. 4, p. 251–266, 2014.

LU, S. Inverse curvature flow in anti-de Sitter-Schwarzschild manifold. **Communications in Analysis and Geometry**, v. 2, p. 465–489, 2019.

MIRANDOLA, H.; VITÓRIO, F. The positive mass theorem and Penrose inequality for graphical manifolds. **Comm. Anal. Geom.**, v. 23, v. 2, p. 273–292, 2015.

NEVES, A. Insufficient convergence of inverse mean curvature flow on asymptotically hyperbolic manifolds. **J. Differential Geom.**, v. 84, n. 1, p. 191–229, 2010.

PIPOLI, G. Inverse mean curvature flow in quaternionic hyperbolic space. **Rend. Lincei Mat. Appl.**, v. 29, p. 153–171, 2018.

PIPOLI, G. Inverse mean curvature flow in complex hyperbolic space. **Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.**, v. 52, n. 2, p. 1107–1135, 2019.

URBAS, J. I. E. On the expansion of starshaped hypersurfaces by symmetric functions of their principal curvatures. **Math. Z.**, v. 205, n. 3, p. 355–372, 1990.

WANG, G.; XIA, C. Isoperimetric type problems and Alexandrov-Fenchel type inequalities in the hyperbolic space. **Adv. Math.**, v. 259, p. 532–556, 2014.

WANG, X. The mass of asymptotically hyperbolic manifolds. **J. Differential Geom.**, v. 57, n. 2, p. 273–299, 2001.

WANG, Z. H. A Minkowski-type inequality for hypersurfaces in the Reissner-Nordström-anti-deSitter manifold. **Dissertations, Columbia University**, 2015.