



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

**ANTONIO SOUSA RIBEIRO**

**SOLUÇÕES ANALÍTICAS PARA CAMPOS BOSÔNICOS EM MUNDOS BRANA  
MULTIPLAMENTE DEFORMADOS**

**FORTALEZA**

**2022**

ANTONIO SOUSA RIBEIRO

SOLUÇÕES ANALÍTICAS PARA CAMPOS BOSÔNICOS EM MUNDOS BRANA  
MULTIPLAMENTE DEFORMADOS

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Geová Maciel Alencar Filho.

Coorientador: Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho.

FORTALEZA  
2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- R367s Ribeiro, Antonio.  
Soluções Analíticas para Campos Bosônicos em Mundos Brana Multiplamente Deformados / Antonio Ribeiro. – 2021.  
74 f. : il. color.
- Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Bioquímica, Fortaleza, 2021.  
Orientação: Prof. Dr. Geová Maciel Alencar Filho.  
Coorientação: Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho.
1. Modelo Randall-Sundrum. Multiplamente Deformado. Cosmologia. Espectro de Massa. I. Título.  
CDD 572
-

ANTONIO SOUSA RIBEIRO

SOLUÇÕES ANALÍTICAS PARA CAMPOS BOSÔNICOS EM MUNDOS BRANA  
MULTIPLAMENTE DEFORMADOS

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Doutor em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 23/07/2021.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Geová Maciel Alencar Filho  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Ricardo Renan Landim de Carvalho  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Job Saraiva Furtado Neto  
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

---

Prof. Dr. Wendel Macedo Mendes  
Instituto Federal do Ceará (IFCE)

---

Prof. Dr. Ivan Carneiro Jardim  
Universidade Regional do Cariri (URCA)

A minha querida mãe e aos meus irmãos

## **AGRADECIMENTOS**

A minha família, em especial minha amada mãe Maria do Carmo, os meus queridos irmãos Fernando, Klebert, Francisco (em memória) e minha tia Deuza. Sem vocês eu nada seria.

Aos professores Ricardo Renan Landim e Geová Alencar pela disponibilidade, paciência por todo o conhecimento repassado durante o período de estudos.

Aos meus colegas de laboratório: Wendell Macedo, Francisco Emannel, Ivan carneiro Jardim, Rodrigo Almeida, Márcio Viana, Francisco Wendell, Stanley Frota, Francisco Ancelmo, Otávio e Augusto.

A coordenação do Programa de Pós-Graduação em Física por está sempre presente proporcionando toda a estrutura e apoio a todos os estudantes do programa.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPQ) pelo apoio financeiro da pesquisa de doutorado via bolsas de estudos.

A todos os professores e funcionários do departamento de Física que contribuíram direta ou indiretamente na minha formação.

## RESUMO

Nesta tese estudamos modelos de mundo branas multiplamente deformados em seis dimensões. Esse cenário foi proposto inicialmente por Choudhury e Sengupta no ano de 2007 como uma extensão natural do modelo de Randall-Sundrum tipo-I. Devido aos fatores de dobras nas duas dimensões extras, surgem escalas de energias intermediárias porque possuem previsibilidade de detecção em aceleradores de partículas modernos. Os fatores de dobras que emergem da geometria duplamente deformada, em uma dimensão extra é do tipo Randall-Sundrum e na outra dimensão é hiperbólico. Encontramos as soluções analíticas para as equações de movimento dos campos bosônicos analisando seus respectivos espectros de massa. Logo após generalizamos esse cenário com um termo dependente do tempo, ou seja, um cenário com cosmologia observando quais mudanças ocorrem na geometria duplamente deformada. Em seguida, estudamos o comportamento dos campos escalar e de calibre. Obtemos as equações de movimento de forma analítica e chegamos nas soluções de modos massivos na teoria efetiva em quatro dimensões. Daí, constatamos a dependência do espectro de massa desses campos com o parâmetro de Hubble.

**Palavras-chave:** Modelo Randall-Sundrum; Multiplamente Deformado; Cosmologia; Campos Bosônicos; Espectro de Massa.

## ABSTRACT

In this thesis we study multiply warped six-dimensional brane world models. This scenario was initially proposed by Choudhury and Sengupta in 2007 as a natural extension of the Randall-Sundrum type-I model. Due to the warped factors in the two extra dimensions, intermediate energy scales arise which are predictably detectable in modern particle accelerators. The warped factors that emerge from the double warped geometry, in one extra dimension it is of the Randall-Sundrum type and in the other dimension it is hyperbolic. We find the analytical solutions for the equations of motion of bosonic fields by analyzing their respective mass spectra. Afterwards, we generalize this scenario with a time-dependent term, that is, a scenario with cosmology observing what changes occur in the double warped geometry. Next, we study the behavior of the scalar and gauge fields. We obtain the equations of motion analytically and arrive at the solutions of massive modes in the effective theory in four dimensions. Hence, we find the dependence of the mass spectrum of these fields on the Hubble parameter.

**Keywords:** Randall-Sundrum Model; Multiply Warped; Cosmology; Bosonic Field; Mass Spectrum.



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Espectro de Massa Campo Escalar background Estático em $TeV$ . $c = 11.52$ , $k = 0.25$ . . . . .	46
Tabela 2 – Espectro de Massa Bóson de Calibre em $TeV$ . $c = 11.52$ , $k = 0.25$ . . . . .	49
Tabela 3 – Relação espectro de massa com a constante de Hubble. A razão $M_{mn}/H_0$ do campo escalar é mostrada na tabela. $D = 11.52$ , $k = 0.25$ , $d_0 = 34$ . . . . .	61
Tabela 4 – Relação espectro de massa com a constante de Hubble. A razão $M_{qr}/H_0$ do campo de calibre é mostrada na tabela. $D = 11.52$ , $k = 0.25$ , $d_0 = 34$ . . . . .	64
Tabela 5 – Relação espectro de massa com a constante de Hubble. A razão $M_{ab}/H_0$ do campo de Kalb-Ramond é mostrada na tabela. $D = 11.52$ , $k = 0.25$ , $d_0 = 34$ . . . . .	68

## Lista de Figuras

Figura 1 – O mundo cilíndrico de KK. . . . .	20
Figura 2 – A figura mostra os possíveis valores do raio de compactificação $R$ para diferentes valores da massa de Planck $\hat{M}_{Pl}$ no <i>bulk</i> . . . . .	23
Figura 3 – Modelo RS-I: Brana Planck (em $y=0$ ) e brana TeV (em $y = \pi R$ ). . . . .	25
Figura 4 – Geometria tipo "throat" devido a compactificação deformada. . . . .	27
Figura 5 – O perfil do campo $\varphi(z)$ (a,b) na 4-brana em $y = \pi$ assim como o potencial correspondente $\rho(z)$ (c,d). . . . .	41
Figura 6 – O potencial $\mathcal{V}(\varphi)$ na 4-brana em $y = \pi$ como função de $\varphi$ para $\xi = 0$ . . . . .	42

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\eta_{\mu\nu}$	Métrica do espaço de Minkowsky
$(-, +, +, +)$	Assinatura da métrica espaço-tempo quadridimensional
$g_{\mu\nu}$	Métrica do espaço curvo
$\hbar$	Constante de Planck
$\nabla$	Operador Nabla
$\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$	Operador d'Alambertiano
$\Phi$	Campo Escalar
$\bar{g}_{AB}$	Métrica de Kaluza-Klein em 5 dimensões
$A, B, \dots$	Índice do espaço-tempo 5 Kaluza-Klein
$g_{MN}$	Métrica do espaço curvo $D$ dimensional
$X^5$	Coordenada da dimensão extra $y$
$X^6$	Coordenada da dimensão extra $z$
$\mu, \nu, \dots$	Índices de Lorentz
$M, N, L, \dots$	Índices do <i>bulk</i> em $D$ dimensões
$g$	Determinante da métrica
$\sqrt{-g} d^D x$	Elemento de volume, invariante por transformações gerais de coordenadas
$\mathcal{L}^m$	Lagrangeana de matéria
$T_{MN}$	Tensor de energia momento
$\Gamma_{BC}^A$	Simbolo de Cristoffel em $D$ dimensões
$R_{MN}$	Tensor de Ricci
$R$	Escalar de Ricci
$G_{MN}$	Tensor de Einstein
$\varphi$	Potencial
$A_M$	Campo de gauge em $D$ dimensões
$B_{MN}$	Campo de Kalb-Ramond em $D$ dimensões
$\frac{\partial P}{\partial y}$	$P'$ Derivada em relação a $y$
$\frac{\partial Q}{\partial z}$	$\bar{Q}$ Derivada em relação a $z$
$\frac{\partial V}{\partial t}$	$\dot{V}$ Derivada em relação a $t$
$F_{MN}$	Field Strength do campo de gauge
$T_{MNP}$	Field Strength do campo de Kalb Ramond
$F_{M_1, \dots, M_{q+1}}$	Field Strength da $q$ -forma
$r_c$	Raio de compactificação

$Z_2$	Grupo discreto $\{-1,1\}$
$x^\mu$	Conjunto de coordenadas em 4 dimensões
$g_{\mu\nu}^{vis/ocu}$	Métrica induzida na brana
$\Lambda$	Constante cosmológica
$M_{PL}$	Massa de Planck
$M_{EW}$	Massa eletrofraca
$\psi(z)$	Função de onda da dimensão extra
$H_0$	Constante de Hubble no <i>bulk</i>
$[H_0] = [M]$	Dimensão canônica da Constante de Hubble
$\mathcal{L}^b$	Lagrangeana que forma a brana

## LISTA DE SIGLAS

CNPQ	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
KK	Kaluza-Klein
TSC	Teoria de Super Cordas
TGU	Teorias de Grande Unificação
ADD	Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali
RS	Randall-Sundrum
MeV	Megaelétron-volts
TeV	Teraelétron-volts
GeV	Gigaelétron-volts
MPPE	Modelo Padrão de Partículas Elementares
TRG	Teoria da Relatividade Geral
KR	Kalb-Ramond
2F	2 Forma

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>MODELOS COM UMA DIMENSÃO EXTRA</b>	<b>17</b>
<b>2.1</b>	<b>O Modelo De Kaluza-Klein</b>	<b>19</b>
<b>2.2</b>	<b>O Modelo Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali (ADD)</b>	<b>22</b>
<b>2.3</b>	<b>O Modelo de Randall-Sundrum (RS)</b>	<b>24</b>
<b>2.4</b>	<b>Campo Escalar no Bulk</b>	<b>29</b>
<b>2.5</b>	<b>Bósons de Calibre no Bulk</b>	<b>32</b>
<b>3</b>	<b>MODELOS DE MUNDO BRANA ESTÁTICO EM SEIS DIMENSÕES</b>	<b>34</b>
<b>3.1</b>	<b>Background Duplamente Deformado Caso Estático</b>	<b>35</b>
<b>3.2</b>	<b>Solução Analítica Campo Escalar Background Estático</b>	<b>43</b>
<b>3.3</b>	<b>Solução Analítica para o Bóson de Calibre Background Estático</b>	<b>46</b>
<b>4</b>	<b>ESPAÇO-TEMPO DUPLAMENTE DEFORMADO COM COSMOLOGIA</b>	<b>50</b>
<b>4.1</b>	<b>Tensões nas 3-Branas e Parâmetro de Hubble</b>	<b>55</b>
<b>5</b>	<b>CAMPOS BOSÔNICOS BACKGROUND COSMOLÓGICO</b>	<b>58</b>
<b>5.1</b>	<b>Solução Analítica para o Campo Escalar</b>	<b>58</b>
<b>5.2</b>	<b>Solução Analítica Bóson de Calibre</b>	<b>61</b>
<b>5.3</b>	<b>SOLUÇÃO ANALÍTICA CAMPO DE KALB-RAMOND</b>	<b>64</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>69</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>70</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Dois objetos macroscópicos separados por uma distância  $r$ , a intensidade da força gravitacional  $F_G$  entre eles obedece à lei do inverso do quadrado  $F_G \sim r^{-2}$  [1]. Se o mundo possuísse  $N \geq 1$  dimensões extras espaciais semelhantes às três usuais, então isto não seria assim. Neste caso, teríamos  $F \sim r^{-(2+N)}$ . É verificado experimentalmente por meio de investigações de colisões entre partículas carregadas, que as interações eletromagnéticas obedecem à lei do inverso do quadrado da distância, portanto, isto vale também para o mundo microscópico das partículas elementares [1].

Devido a limitação da capacidade de nossos experimentos, a possibilidade de se confirmar a validade das leis da natureza torna-se mais restritas. Não foi possível estabelecer, até agora, como a gravidade se comporta em comprimentos menores do que  $10^{-3}$  cm, ou em comprimentos maiores do que  $10^{28}$  cm. A interação gravitacional não relativística é descrita de forma satisfatória com a lei do inverso do quadrado. É consenso que a interação eletromagnética, na ordem de comprimentos de  $10^{-16}$  cm, obedece à lei do inverso do quadrado, no entanto, abaixo dessa escala ela poderá sofrer alguma mudança [1].

Como as leis da natureza poderiam ser modificadas, isso não está evidente. Admitindo que possa existir dimensões espaciais extras, é muito provável que elas possam sofrer alterações em suas formulações usuais. Assim, é legítimo indagar-se por que o universo poderia ter dimensões extras?

A idéia de dimensões extras foi inicialmente proposta por Theodor Kaluza (1885-1954) e Oscar Klein (1894-1977) em meados de 1920: o modelo de Kaluza-Klein (KK) [2, 3]. Eles observaram que as interações eletromagnética e gravitacional por serem bastante parecidas, poderiam ser provenientes de uma mesma origem. Uma teoria que unifica as interações gravitacional, e eletromagnética só seria possível com a adição de uma dimensão extra ao espaço ordinário, o que vem a ser um fato surpreendente. Portanto, a motivação pela qual estudamos as dimensões extras é: A unificação entre as interações de calibre do Modelo Padrão de Partículas Elementares (MPPE) e a gravidade.

Até este momento discutimos a gravitação clássica. Porém, uma teoria quântica da gravidade é bastante complexa. A Teoria de Super Cordas (TSC) é uma candidata a quantização da interação gravitacional que pode ser realizada de forma consistente em espaços com seis ou onze dimensões extras [4–6]. O segundo motivo para estudar dimensões extras é: Tentativa de quantizar a interação gravitacional.

As dimensões extras consideradas até aqui são todas da ordem do comprimento de Planck, ou seja, muito pequenas para serem detectadas. Com o trabalho de Arkani-Hamed,

Dimopoulos e Dvali modelo (ADD) houve um novo interesse na teoria de dimensões extras. Eles perceberam que usando essa abordagem o problema da hierarquia de massa do bóson de Higgs poderiam ser solucionado [7]. É observado que o valor fundamental da massa do Higgs no Lagrangiano é muito diferente de seu valor efetivo, que é o valor medido em um experimento.

No modelo ADD as dimensões extras são extensas, este fato pode possibilitar a detecção de seus efeitos em experimentos nos aceleradores de partículas e experimentos astrofísicos no futuro. Observa-se que a hierarquia entre as massas aparenta desaparecer. Contudo, ao se realizar uma análise mais cuidadosa percebe-se que o problema foi apenas substituído. Agora, existe uma hierarquia entre o comprimento da dimensão extra e as massas. Tais modelos são inseridos na estrutura da TSC [8, 9].

No final da segunda metade do século XX, foi proposto um modelo utilizando dimensões extras na conjuntura da quebra espontânea da simetria de calibre não abeliana pelo o campo escalar de Higgs [10]. A razão disso foi o aparecimento da descrição do universo com quatro dimensões via defeitos topológicos, mais precisamente *parede de domínio*, que esconde a dimensão extra para as interações forte, fraca e eletromagnética. Posteriormente um modelo com uma dimensão extra deformada foi proposto por Randall e Sundrum (RS) o qual forneceu um aspecto agradável na abordagem do problema da hierarquia de massa do Higgs e as suas consequências [11, 12]. O terceiro motivo de se estudar dimensões extras é: O problema da hierarquia de massa do bóson de Higgs.

Um outro problema em aberto na Física de altas energias é o problema da constante cosmológica. Ele consiste na grande discrepância do pequeno valor da constante cosmológica em relação ao grande valor da energia de vácuo previsto pela teoria quântica de campos. Ele é tratado como um outro problema de hierarquia. A sua abordagem é bem mais complexa, a não ser que abandonemos algumas noções previamente estabelecidas, como espaço-tempo com quatro dimensões, causalidade, unitariedade e localidade. Como potenciais candidatas para solucionar o problema da constante cosmológica, temos teorias de dimensões extras com volume infinito, em baixas energias possuem um número de dimensões maior que quatro [13, 14]. Portanto, a quarta razão é: O problema da constante cosmológica.

Uma forma natural de estender o modelo RS é propor um cenário com duas dimensões extras ou codimensão dois, nesse sentido vários cenários foram propostos [15–20]. O problema da hierarquia de massa dos neutrinos foi resolvido utilizando os modelos com duas dimensões compactas [21]. Ele está relacionado ao fato de que os dados experimentais atuais sobre as oscilações dos neutrinos permitem duas classes de soluções possíveis [22]. Na primeira classe, chamada de Hierarquia Normal ou Ordenação Normal, os dois auto-estados de massa mais leves têm uma pequena diferença de massa, da ordem de  $10 \text{ MeV}$ , enquanto o terceiro auto-estado tem uma massa cerca de  $50 \text{ MeV}$  maior. Explica-se essa hierarquia, pelo



confinamento das famílias de modos zeros dos férmions por meio de um dispositivo chamado de *Masses and Mixings* (massas e misturas) [23].

Nessa perspectiva, foi proposto por Debajyoti Choudhury et al um cenário duplamente deformado [24]. Em razão dos dois orbifolds, temos a intersecção de quatro pontos, com uma descrição que lembra uma caixa. Os lados dessa caixa são  $(4 + 1)$ -branas, ao mesmo tempo que nos pontos onde se cruzam há  $(3 + 1)$ -branas. A dinâmica cosmológica no modelo RS foi considerada, por exemplo, em [25–27].

O nosso  $(3 + 1)$ -universo é identificado como um desses pontos de intersecção e outro ponto é a brana Planck. Um resultado fenomenológico importante obtido pelos autores para o modelo de branas planas, foi o espectro de massa do campo de Dirac isso dá uma explicação satisfatória para o problema da hierarquia de massa fermiônica no MPPE [24].

Os modos massivos dos campos escalar e de calibre foram calculados em [28, 29]. Nas Refs. [28, 29] tomando uma aproximação na equação de movimento, eles encontraram o espectro de massa desses campos. Soluções analíticas para o cálculo do espectro dos modos massivos dos campos de calibre e escalar foram propostas nas Refs. [30, 31]. Uma forma de tornar mais amplo o modelo multiplamente deformado, é incluir soluções com cosmologia na brana, isso foi alcançado há pouco tempo na Ref. [32]. Porém, nesse *background* os campos bosônicos não foram ainda estudados de forma detalhada.

A tese está organizada da seguinte forma: No segundo capítulo é feita uma revisão sobre dimensões extras. Nós analisamos o espectro de massa dos campos bosônicos. No capítulo três tratamos de modelos em seis dimensões estático onde encontramos a solução analítica para as equações de movimento dos campos escalar e vetorial com seus respectivos espectros de massa. Compara-se os resultados obtidos com os resultados já encontrados na literatura. No capítulo quatro tratamos um modelo em seis dimensões com cosmologia, encontramos a métrica do background e estudamos tensões nas 3-branas e o p̄metro de Hubble nessa geometria . No capítulo cinco obtemos a solução analítica para as equações de campo e analisamos o espectro de massa sem aproximação para os campos escalar, vetorial e de de Kalb-Ramond (KR). Os resultados obtidos foram publicados na Ref. [33]. No capítulo seis apresentamos as nossas conclusões e perspectivas.

## 2 MODELOS COM UMA DIMENSÃO EXTRA

Neste capítulo iniciamos uma argumentação a respeito de modelos com dimensões extras. Abordaremos o modelo de Kaluza-Klein (KK), Arkani-Hamed Dimopoulos Dvali (ADD) problema da escala de energia da quantização entre as interações eletrofraca e a gravitacional, o modelo de Randall-Sundrum (RS) que propõe a solução deste problema.

Para melhor compreensão do tema, analisaremos um modelo introdutório com uma pequena dimensão extra, revisamos um problema padrão de mecânica quântica [34]. Vamos considerar a equação de Schrodinger independente do tempo

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x) + V\psi(x) = E\psi(x), \quad (2.1)$$

para estudar o caso do poço de potencial infinito em uma dimensão:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (0, a) \\ \infty & \text{se } x \notin (0, a). \end{cases}$$

Para  $x \notin (0, a)$ , isto implica que a função de onda fora do poço se anula, em particular, nas extremidades  $\psi(0) = \psi(a) = 0$ . Quando  $x \in (0, a)$ , a Eq. (2.1) torna-se:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi(x). \quad (2.2)$$

As soluções para a Eq. (2.2), com as devidas condições de contorno, é

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad n = 1, 2, \dots, \infty. \quad (2.3)$$

O valor de  $n = 0$  não é permitido já que a função de onda se anula. Aplicando as condições de contorno na função de onda e em sua derivada, é fácil ver que a energia é

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2. \quad (2.4)$$

Adicionaremos agora uma dimensão extra ao problema do poço quadrado infinito, além de  $x$  incluímos uma dimensão  $y$  que é um pequeno círculo de raio  $R$ . Será feita a seguinte identificação

$$(x, y) \sim (x, y + 2\pi R). \quad (2.5)$$

Uma vez que a direção  $y$  tem o comprimento de  $2\pi R$ , o espaço onde a partícula se move é um cilindro. O cilindro tem comprimento  $a$  e circunferência  $2\pi R$ . O potencial  $V(x, y)$  não será

modificado, portanto, a dimensão  $x$  não pode ser alterada.

A equação de Schrodinger em duas dimensões é

$$-\frac{\hbar}{2m} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = E \psi. \quad (2.6)$$

Para resolver esta equação, usaremos o método de separação de variáveis. Definindo  $\psi(x, y) = \psi(x) \phi(y)$ , que é reescrita na forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi(x)} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\phi(y)} \frac{d^2 \phi(y)}{dy^2} = E. \quad (2.7)$$

As partes dependentes de  $x$  e  $y$  da Eq. (2.7) separadamente são iguais a uma constante, com soluções dadas por

$$\psi_n(x) = a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad (2.8)$$

$$\phi_p(y) = b_p \sin\left(\frac{py}{R}\right) + c_p \cos\left(\frac{py}{R}\right). \quad (2.9)$$

Ao longo da dimensão  $x$  a física não é alterada, uma vez que a função de onda se anula nas extremidades do segmento. As condições de contorno para  $\phi_p(y)$  emergem da identificação  $y \sim y + 2\pi R$ . A função de onda tem o mesmo valor já que  $y \sim y + 2\pi R$  é o mesmo ponto, assim

$$\phi_p(y) = \phi_p(y + 2\pi R). \quad (2.10)$$

A função de onda da Eq. (2.9) não precisa se anular para qualquer  $y$ . A solução geral é periódica. O termo cosseno faz com que a função de onda para  $m = 0$  não se anule, portanto, nós obtemos  $\phi_0(y) = c_0$  que é uma constante.

Os autovalores para a energia são

$$E_{n,p} = \frac{\hbar^2}{2m} \left[ \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{p}{R}\right)^2 \right]. \quad (2.11)$$

Observa-se que a energia corresponde a um estado com dupla degenerescência quando  $p \neq 0$  isso se deve ao fato que a Eq. (2.9) contem duas soluções linearmente independentes. A inclusão de uma dimensão extra altera dramaticamente o espectro de energia da partícula. Será visto que se  $R \ll a$  então o espectro não será modificado.

Como  $p = 0$  é permitido, os níveis de energia  $E_{n,0}$  coincide com os antigos níveis  $E_n$ , no entanto, inclui também os níveis de energias adicionais. O nível de energia mínimo ocorre quando  $n = 1$ , já que  $n = 0$  e  $p = 1$  não é permitido, para  $p = 0$  recuperamos os níveis

antigos. O menor nível de energia é agora

$$E_{1,1} = \frac{\hbar^2}{2m} \left[ \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{1}{R} \right)^2 \right]. \quad (2.12)$$

Quando  $R \ll a$ , o segundo termo é muito maior do que o primeiro, e

$$E_{1,1} \sim \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{1}{R} \right)^2. \quad (2.13)$$

Essa energia é comparável a essa do nível do auto estado  $n$  do problema original Eq. (2.4) quando

$$\frac{n\pi}{a} \sim \frac{1}{R} \rightarrow n \sim \frac{1}{\pi} \frac{a}{R}. \quad (2.14)$$

Uma vez que  $R$  é muito maior do que  $a$ ,  $n$  é um número muito grande. Assim o primeiro nível de energia aparece com uma energia muito acima dos estados originais inferiores.

Assim, concluímos que uma dimensão extra pode permanecer oculta de experimentos em um determinado nível de energia, desde que a dimensão seja pequena o suficiente. Uma vez que as energias de sondagem tornam-se suficientemente altas, os efeitos de uma dimensão extra podem ser observados [34].

## 2.1 O Modelo De Kaluza-Klein

Na Teoria da Relatividade Geral (TRG) o campo gravitacional está associado com a geometria do espaço-tempo e o conceito de força gravitacional já não se faz mais necessário. É naturalmente interessante observar se outras interações podem ser incorporadas em uma estrutura geométrica.

A teoria de KK tenta representar geometricamente os efeitos de um campo gravitacional e um campo eletromagnético considerando um espaço com cinco dimensões com uma métrica feita da métrica espaço-tempo  $4D$  e o quadripotencial eletromagnético. A teoria de KK faz uso de um espaço com cinco dimensões em contraste com a TRG, obtido adicionando uma coordenada compacta representada por um círculo de raio  $R$  as quatro dimensões do espaço-tempo ordinário, mas essa quinta dimensão surge como uma conveniência matemática, sem base experimental.

A teoria de KK foi derivada como uma extensão do espaço-tempo de Minkowski  $\mathbb{M}_4$  para um espaço-tempo  $(1+4)$ ,  $\mathbb{M}_4 \times S^1$ , com a dimensão extra compacta. Portanto, sua topologia é de um círculo  $S^1$  de Raio  $R$ , definindo um universo cilíndrico. A Fig. (1) mostra o mundo cilíndrico de KK.

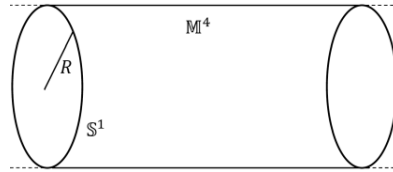


Figura 1 – O mundo cilíndrico de KK.

O elemento de linha em  $5D$  é dado por

$$d\tilde{s}^2 = \tilde{g}_{AB} dx^A dx^B, \quad (2.15)$$

assim, derivaremos a métrica do espaço-tempo [35–38]. Aqui, será utilizada a notação, letras latinas  $A, B, \dots = 0, 1, 2, 3, 5$  índices do espaço-tempo  $\mathbb{M}_4 \times S^1$ , letras gregas  $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$  índices de  $\mathbb{M}_4$ ,  $x^5$  é a coordenada da dimensão extra e o tilde denota as grandezas no espaço  $5D$ . A métrica  $\tilde{g}_{AB}$  é independente da dimensão  $x^5$ . Já que a dimensão extra possui a topologia de um círculo, de raio  $R$ , espera-se que todos os pontos ao longo da mesma possam ser identificados por  $x^5 + 2\pi R$ , isto implica que a dimensão extra é compacta.

A fim de derivar a métrica de KK, partiremos do princípio que as quantidades físicas mudam apenas no espaço-tempo ordinário  $M_4$ , portanto, exige-se que a métrica satisfaça

$$\partial_5 \tilde{g}_{AB} = 0, \quad (2.16)$$

a derivada da métrica em relação a dimensão extra se anula. Além disso, a coordenada  $x^\mu$  que caracteriza o espaço-tempo  $4D$  deve obedecer a seguinte lei de transformação

$$x^\mu = f^\mu(x'^\nu). \quad (2.17)$$

Nessa abordagem, as coordenadas do espaço-tempo podem se transformar da seguinte maneira

$$\begin{aligned} x^\mu &= \phi^\mu(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3), \\ x^5 &= x'^5 + \phi^0(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3), \end{aligned} \quad (2.18)$$

isto implica que a componente  $\tilde{g}_{55}$  transforma-se trivialmente, assim, a definiremos como uma constante. O elemento de linha na teoria efetiva  $4D$  é,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.19)$$

que pode ser dividido da seguinte maneira

$$ds^2 = g_{00} d\lambda^2 + dl^2, \quad (2.20)$$

em que

$$d\lambda = dx^0 + \frac{g_{i0}}{g_{00}} dx^i, \quad (2.21)$$

$$dt^2 = \left( g_{ij} - \frac{g_{i0}g_{j0}}{g_{00}} \right) dx^i dx^j. \quad (2.22)$$

são as diferenciais temporal e espacial. Valendo-se da condição cilíndrica, podemos decompor de maneira similar o espaço-tempo  $5D$  [35, 39],

$$d\tilde{s}^2 = \tilde{g}_{55} d\theta^2 + ds^2, \quad (2.23)$$

em que as diferenciais

$$d\theta = dx^5 + \left( \frac{\tilde{g}_{\mu 5}}{\tilde{g}_{55}} \right) dx^\mu \quad (2.24)$$

$$ds^2 = \left( \tilde{g}_{\mu\nu} - \frac{\tilde{g}_{5\mu}\tilde{g}_{5\nu}}{\tilde{g}_{55}} \right) dx^\mu dx^\nu, \quad (2.25)$$

assim como  $d\tilde{s}^2$  são invariantes. Para a métrica  $5D$ , a parte  $\mu\nu$  de  $\tilde{g}_{AB}$  é identificada com a métrica  $g_{\mu\nu}$ , o potencial eletromagnético  $A_\nu$  é a parte  $\nu 5$  e  $\tilde{g}_{55}$  é identificado como o campo escalar  $\phi$ . A forma matricial da métrica de KK é :

$$\tilde{g}_{AB} = \begin{bmatrix} g_{\mu\nu} + \phi^2 A_\mu A_\nu & \phi^2 A_\mu \\ \phi^2 A_\nu & \phi^2 \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

A ação e as equações de campo são uma versão em cinco dimensões da ação de Einstein-Hilbert usuais em  $4D$

$$S = \int d^5x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{R}, \quad (2.27)$$

onde  $\tilde{g} = \det[\tilde{g}_{AB}]$  e  $\tilde{R}$  é o escalar de Ricci obtido a partir da métrica (2.26). A equação de Einstein em  $5D$  é dada por

$$\tilde{R}_{AB} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{AB} \tilde{R} = \tilde{G}_{AB}, \quad (2.28)$$

será assumida somente as soluções das equações no vácuo

$$\tilde{R}_{AB} = 0, \quad (2.29)$$

em que

$$\tilde{R}_{AB} = \partial_C \tilde{\Gamma}_{AB}^C - \partial_B \tilde{\Gamma}_{CA}^C + \tilde{\Gamma}_{CD}^C \tilde{\Gamma}_{AB}^D - \tilde{\Gamma}_{BD}^C \tilde{\Gamma}_{AC}^D, \quad (2.30)$$

é o tensor de Ricci, e

$$\tilde{\Gamma}_{BC}^A = \frac{1}{2} \tilde{g}^{AD} (\partial_B \tilde{g}_{CD} + \partial_C \tilde{g}_{DB} - \partial_D \tilde{g}_{BC}), \quad (2.31)$$

é o símbolo de Christoffel. Da ação (2.27) e da restrição (2.15), encontramos às seguintes equações de campo em 4D

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{1}{2} \phi^2 T_{\mu\nu}^{em} + \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi), \quad (2.32)$$

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{3}{\phi} \partial_\mu \phi F^{\mu\nu}, \quad (2.33)$$

$$\square \phi = \frac{\phi^3}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (2.34)$$

em que  $R_{\mu\nu}$  e  $R$  são o Tensor e o escalar de Ricci na teoria efetiva 4D,  $\square = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$  e  $\nabla_\mu$  é a derivada covariante. O tensor energia momento do campo eletromagnético, na Eq. (2.32) é dado por

$$T_{\mu\nu}^{em} = g^{\alpha\beta} F_{\alpha\mu} F_{\beta\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad (2.35)$$

onde  $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$  é o tensor de intensidade do campo  $A_\mu$ .

Para  $\phi = 1$ , obtemos as seguintes equações

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{em} \quad (2.36)$$

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (2.37)$$

no entanto, isto é consistente com a Eq. (2.35) apenas se

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 0, \quad (2.38)$$

que é o resultado original obtido na formulação de KK.

Nesse modelo, o eletromagnetismo se manifesta como um efeito gravitacional, que possui aspecto diferente da gravidade de Einstein devido à natureza compacta da dimensão extra. Dessa forma, a radiação eletromagnética, que é considerada matéria na TRG, se revela simplesmente como uma manifestação da curvatura envolvendo a quinta dimensão.

## 2.2 O Modelo Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali (ADD)

Um uso engenhoso de dimensões extras, foi proposto, em 1998 por ADD. Esse modelo baseia-se na observação que a intensidade da constante de acoplamento gravitacional

no *bulk*  $5D$  é muito mais forte do que seu valor medido em  $4D$ . Portanto, temos o resultado

$$\hat{l}_{Pl}^3 = \hat{G}_N = 2\pi R G_N = L l_{Pl}^2, \quad (2.39)$$

por sendo  $l_{Pl}$  é o comprimento de Planck,  $G_N$  é a constante de Newton e  $L = 2\pi R$  é tamanho da dimensão compacta, a qual, para  $D$  dimensões extras, compactificadas em um  $D$  toro, é

$$(\hat{l}_{Pl})^{2+D} = L^D l_{Pl}^2. \quad (2.40)$$

A variação no raio de compactificação, Fig. (2), que leva a diferentes valores da massa de Planck no *bulk*,  $\hat{M}_{Pl} = \hat{l}_{Pl}^{-1}$ , com  $\hat{l}_{Pl}$  obtido da Eq. (2.40). As diferentes linhas re-

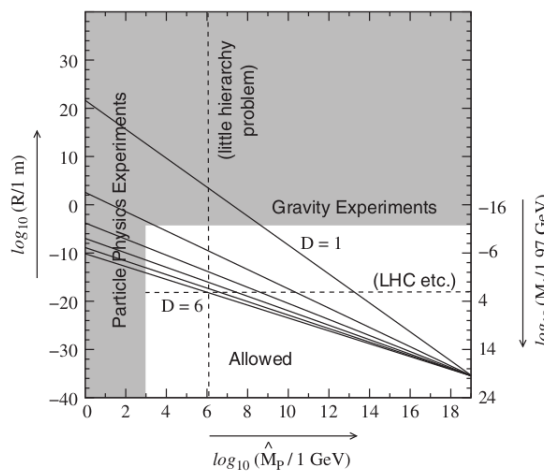


Figura 2 – A figura mostra os possíveis valores do raio de compactificação  $R$  para diferentes valores da massa de Planck  $\hat{M}_{Pl}$  no *bulk*

tas correspondem, de cima para baixo, a o modelo ADD com  $D = 1, 2, 3, 4, 5$  e  $6$  dimensões compactas. As regiões sombreadas correspondem às restrições experimentais  $R > 60 \mu m$  dos experimentos gravitacionais, e dos experimentos de física de partículas  $\hat{M}_{Pl} > 1 TeV$ . Se definimos  $\hat{M}_{Pl} = M_{Pl} \approx 1.2 \times 10^{19} GeV$ , então o raio de compactificação se reduz ao comprimento de Planck  $l_{Pl} \approx 1.6 \times 10^{-35} m$ , independente do número de dimensões compactas  $D$ . Também é possível ter raios de compactificação tão grandes quanto  $60 \mu m$ , por exemplo, se tomamos  $D = 2$  e  $\hat{M}_{Pl} \sim 10 TeV$ . Para  $D=1$ , a massa de Planck não pode ser reduzida a menos de cerca de  $10^5 TeV$ . Por outro lado, para valores mais altos de  $D$ , o canto superior esquerdo da parte não sombreada da caixa marcada como "permitido" mostra que é permitido  $\hat{M}_{Pl}$  com raios de compactificação que não estão em conflito com experimentos gravitacionais.

Qual o benefício de se diminuir a escala de Planck em dimensão superior? Agora, examinaremos o significado de escala de Planck. Vamos analisar a equação de Einstein  $4D$  na presença de matéria, que tem a forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G_N T_{\mu\nu}, \quad (2.41)$$



onde  $T_{\mu\nu}$  é o tensor energia-momento. Agora, lembrando que  $G_N = l_{Pl}^2$  e o tensor energia-momento é proporcional à energia relativística da matéria que representa. Podemos escrever uma equação dimensional

$$\frac{1}{8\pi l_{Pl}} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) = l_{Pl} T_{\mu\nu}. \quad (2.42)$$

O lado direito desta equação é muito pequeno, é uma boa aproximação desprezÁ-lo e trabalhar em um espaço plano. No entanto, à medida que os elementos de  $l_{Pl} T_{\mu\nu}$  se aproximam da unidade, devemos esperar fortes efeitos de curvatura no espaço-tempo, ou seja, a aproximação do espaço plano falha e teremos que realizar todos os cálculos levando essa curvatura não trivial em consideração. A escala de energia  $E$  para isso é definida por

$$l_{Pl} E \sim 1, \quad (2.43)$$

ou seja,  $E \sim l_{Pl}^{-1} \equiv M_{Pl}$ . Assim, a massa de Planck é a escala de energia onde os efeitos da curvatura do espaço-tempo não podem ser negligenciados, em outras palavras, fortes efeitos da gravidade serão aparentes.

Essa hipótese, funciona igualmente bem em uma teoria  $(4 + D)$  dimensional, a equação de Einstein no *bulk* pode ser escrita

$$\frac{1}{8\pi \hat{l}_{Pl}^{1+D}} \left( \hat{R}_{MN} - \frac{1}{2} \hat{g}_{MN} \hat{R} \right) = \hat{l}_{Pl} \hat{T}_{MN}. \quad (2.44)$$

A escala de energia em que a aproximação de espaço-tempo plano é quebrada é  $E \sim \hat{l}_{Pl}^{-1} \equiv \hat{M}_{Pl}$ . Se temos uma teoria quântica de campos baseada no espaço plano, essa escala agirá como uma escala de corte para a teoria.

Nesse ponto, torna-se aparente a ingênuidade do modelo ADD. Se temos  $D \geq 2$  dimensões compactas de tamanho comparável ao canto superior esquerdo "permitido" Fig. (2), então qualquer teoria quântica definida nesse espaço-tempo terá uma energia de corte natural na escala de  $\hat{M}_{Pl} \sim 10 - 1000 \text{ TeV}$ . Esse corte, portanto, é relativamente baixo e inclui o MPPE resolvendo imediatamente o problema da hierarquia.

### 2.3 O Modelo de Randall-Sundrum (RS)

O espaço-tempo padrão tem quatro dimensões,  $(3 + 1)$ - $D$ , com uma dimensão temporal e três espaciais. Ao se considerar a conjectura que as dimensões do espaço-tempo são maiores que quatro, surgem consequências teóricas interessantes. Nessa descrição, o espaço de dimensão maior é chamado de *bulk* e a hipersuperfície quadridimensional ( $4D$ ) embebida nele é chamada de *brana* [40].

Os modelos em cinco dimensões com métrica deformada, não fatorizáveis podem explicar adequadamente várias questões mencionadas no capítulo (1), portanto, a nossa atenção se voltará para eles. A hipótese de que o universo seria uma hipersuperfície, brana  $4D$ , imersa em um *bulk* com cinco dimensões  $5D$ , a princípio foi idealizada por RS [11],[12]. Compactifica-se a quinta dimensão  $y$  sobre um *orbifold*  $S^1/Z^2$ , o qual é caracterizado pelo raio  $R$ . O correspondente *orbifold* é dado pelas seguintes relação em  $y$ :

$$y \rightarrow y + 2\pi R, \quad y \rightarrow -y. \quad (2.45)$$

Pela primeira relação obtemos um círculo, na segunda está implícita uma reflexão  $Z^2$ . Essas relações não alteram os pontos  $y = 0$  e  $y = \pi$  por que eles são fixos. De tais identificações, obtemos o espaço resultante da forma  $S^1/Z^2$  que equivale ao segmento  $[0, \pi R]$ , *orbifold* [41]. Nos dois pontos fixos do *orbifold* localizam-se as branas de maneira que elas são separadas por um segmento que é uma porção do *bulk* em cinco dimensões Fig. (3).

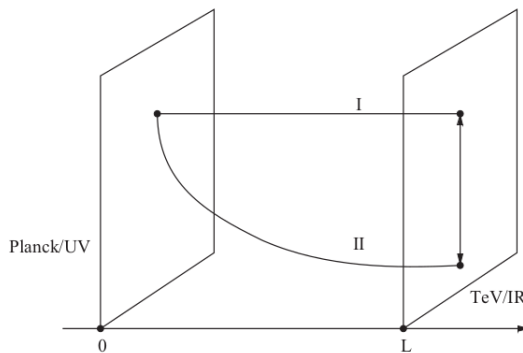


Figura 3 – Modelo RS-I: Brana Planck (em  $y=0$ ) e brana TeV (em  $y = \pi R$ ).

Nós iniciamos definindo a ação de Einstein-Hilbert em  $5D$ . Iremos incluir uma constante cosmológica de fundo que não precisa necessariamente ser de intensidade desprezível como é em quatro dimensões. Portanto, teremos que adicionar esse termo na ação usual. Os campos em cinco dimensões também contribuirão para a ação com termos localizados nas branas. Essas são denominadas tensões na brana. Em cinco dimensões a ação gravitacional inclusa a constante cosmológica  $\Lambda$  no *bulk* é dada por [42]

$$S = \int d^5x \sqrt{-g} (M^3 R - \Lambda) + \int d^5x \sqrt{-g} T_0 \delta(y) + \int d^5x \sqrt{-g} T_\pi \delta(y - L), \quad (2.46)$$

onde as tensões nas duas branas são  $T_0$  e  $T_\pi$  em  $y = 0$  e  $y = L$ , respectivamente, e  $L = \pi R$ .

As equações de Einstein serão configuradas neste cenário, posteriormente derivaremos as situações às quais obteremos branas planas  $4D$ . Devemos encontrar na brana uma métrica induzida plana, mesmo que a constante cosmológica não seja desprezível no *bulk*. O

*ansatz* da métrica 5D do modelo RS é

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{MN} dx^M dx^N, \\ ds^2 &= e^{-2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \end{aligned} \quad (2.47)$$

com  $A(y)$  sendo uma função que depende da dimensão extra.

Os índices  $M, N, \dots$  estão relacionados ao *bulk* 5D, a métrica do espaço-tempo de Minkowski é dada por  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, +, +)$ . As coordenadas do espaço-tempo 4D são  $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ . Denomina-se fator de dobra o termo exponencial que multiplica a métrica de Minkowski. Devido a essa composição do elemento de linha, não é possível escrever a métrica geral como um produto da métrica plana em quatro dimensões e uma variedade com uma dimensão extra compacta, portanto, essa configuração é dita ser não fatorizável.

As equações de Einstein generalizadas para o espaço-tempo em cinco dimensões tem a forma:

$$G_{MN} = R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R = \kappa^2 T_{MN}, \quad (2.48)$$

com tensor de Ricci em 5D sendo  $R_{MN}$ , o escalar de Ricci  $R$  e

$$\kappa^2 = \frac{1}{2M^3}. \quad (2.49)$$

onde  $M$  é um parâmetro de massa da quinta dimensão. A métrica (2.47) será usada conforme a maneira padrão para obtenção das componentes do tensor de Einstein, então obtemos

$$G_{\mu\nu} = (6A'^2 + 3A'') g_{\mu\nu}, \quad (2.50)$$

$$G_{55} = 6A'^2, \quad (2.51)$$

onde

$$g_{\mu\nu} = e^{-2A} \eta_{\mu\nu}. \quad (2.52)$$

A partir da ação dada na Eq. (2.46), podemos calcular as componentes do tensor energia momento, inicialmente negligenciaremos os termos de tensões nas branas. A componente 55 da equação de Einstein é dada por

$$6A'^2 = -\frac{\Lambda}{2M^3}. \quad (2.53)$$

A equação acima pode ser reescrita como

$$A'^2 = k^2, \quad (2.54)$$

com  $k^2 \equiv -\frac{\Lambda}{12M^3}$ , apenas se  $k^2$  for positivo  $A(y)$  terá soluções reais, ou seja, o *bulk* é  $AdS_5$  isto implica uma constante cosmológica  $\Lambda$  negativa. Levando em conta a simetria orbifold  $y \rightarrow -y$  e integrando a equação acima, duas soluções são obtidas:

$$A(y) = \pm ky. \quad (2.55)$$

A métrica na Eq. (2.47) é obtida escolhendo a solução positiva:

$$ds^2 = e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (2.56)$$

com  $k$  é uma constante. A métrica acima, corresponde a compactificação a duas porções de um espaço de anti-de Sitter em  $5D$  nos pontos fixos do *orbifold*. Conforme o observador se move ao longo da dimensão extra  $y$ , surge uma geometria tipo "throat" devido a compactificação deformada Fig. (4), ficando exponencialmente menor a sua largura.

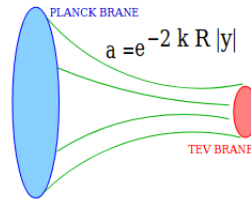


Figura 4 – Geometria tipo "throat" devido a compactificação deformada.

Nós descobrimos da Eq. (2.55) que a primeira derivada de  $A(y)$

$$A' = \text{sgn}(y)k, \quad (2.57)$$

o termo  $\text{sgn}(y)$  é a função de Heaviside. A segunda derivada é uma função delta, que surge da descontinuidade em  $y = 0$  e  $y = L$

$$A'' = k(\delta(y) - \delta(y-L)). \quad (2.58)$$

A partir desses resultados, obtemos

$$G_{\mu\nu} = 6k^2 g_{\mu\nu} - 6k(\delta(y) - \delta(y-L)) g_{\mu\nu}. \quad (2.59)$$

em que  $G_{\mu\nu}$  é o tensor de Einstein  $4D$ . Da definição de  $k^2$ , percebe-se que existe contribuição derivada do termo cosmológico do *bulk* para o tensor de energia momento. A fim de satisfazer às equações de Einstein, os termos restantes devem ser combinados com os termos de tensão na brana no tensor de Einstein juntando-se a ação (2.46). Isso acontece se

$$T_0 = -T_\pi = 12M^3 k. \quad (2.60)$$

Repare que a brana localizada em  $y = L$  possui tensão negativa. Na equação acima, escrevemos  $k$  em termos de  $\Lambda$  para obter

$$\Lambda = -\frac{T_0^2}{2M^3}. \quad (2.61)$$

A constante cosmológica do *bulk* equilibra as tensões das branas produzindo uma constante cosmológica efetiva  $4D$  que tende a desaparecer.

A métrica deformada pode ser reescrita como uma métrica de espaço-tempo plano, ou seja, conformalmente plana [43]. É fácil ver que a transformação de coordenadas que fará isso é

$$dy = e^{-k|y|} dz, \quad (2.62)$$

a métrica conforme é escrita em função de uma nova variável,  $z$ . Integrando a equação acima, teremos como resultado

$$k|z| = e^{k|y|} - 1, \quad (2.63)$$

em que a escolha da constante de integração é definida fixando  $y = 0$  para dar  $z = 0$ , por conseguinte, a brana em  $y = 0$  está em  $z = 0$ . A outra brana em  $y = L$  está em  $z = L_z$ . Finalmente podemos escrever a métrica como segue

$$ds^2 = e^{-2A(z)} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2), \quad (2.64)$$

ou

$$ds^2 = e^{-2A(z)} \eta_{MN} dx^M dx^N, \quad (2.65)$$

é a métrica plana em  $5D$ . A função  $A(z)$  é dada por

$$e^{-2A(z)} = \frac{1}{(k|z| + 1)^2}, \quad (2.66)$$

o que equivale a

$$A(z) = \ln(k|z| + 1). \quad (2.67)$$

É proveitoso escrever as expressões para a primeira e segunda derivadas de  $A(z)$ :

$$A'(z) = \frac{2\text{sgn}(z)k}{(k|z| + 1)}, \quad (2.68)$$

e

$$A''(z) = \frac{4k(\delta(z) - \delta(z - L_z))}{(k|z| + 1)^2} - \frac{2k^2}{(k|z| + 1)}, \quad (2.69)$$

portanto, as duas branas localizam-se em funções deltas com  $z = 0$  e  $z = L_z$ . Nas seções adiante, analisaremos a localização dos campos do MPPE no *bulk*. Precisamos entender, especificamente, a propagação no *bulk* dos campos escalar e de calibre .

## 2.4 Campo Escalar no Bulk

Será discutido inicialmente o campo escalar no *bulk* [44]. A ação para um campo escalar complexo  $\phi$  é dada por

$$S = \int d^5x \sqrt{-g} \left( \partial_M \phi \partial^M \phi^* - m_\phi^2 |\phi|^2 \right), \quad (2.70)$$

especificamos também uma ação com termo de fronteira:

$$S = - \int d^5x \sqrt{-g} 2m_b [\delta(y) - \delta(y - \pi R)] |\phi|^2. \quad (2.71)$$

Ao variar a ação surgem termos de superfícies, para se livrar deles é necessário introduzir na ação escalar a parte de fronteira. Há dois termos de massa diferentes que surgem nas equações acima:  $m_b$ , o termo de massa de fronteira e  $m_\phi$ , o parâmetro de massa do *bulk* [45].

É costumeiro escrevê-los em termos do parâmetro de massa característico do modelo RS, denominado, a curvatura  $k$  do *bulk*, com  $m_\phi^2 = ak^2$  e  $m_b = bk$ , onde  $a$  e  $b$  são constantes adimensionais. Pode-se redefinir o parâmetro de massa do *bulk* para que se absorva o termo de fronteira

$$m_\phi^2 = ak^2 + 2kb [\delta(y) - \delta(y - \pi R)]. \quad (2.72)$$

As equações de movimento são obtidas, como de costume, variando a ação e, uma escolha adequada das condições contorno pode ser feita para que os termos de fronteira desapareçam a fim de se obterem as equações de movimento consistentes. Em cinco dimensões, a equação de movimento é escrita da seguinte forma

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_M [\sqrt{-g} g^{MN} \partial_N \phi] - m_\phi^2 \phi = 0, \quad (2.73)$$

explicitando os índices da brana e o da dimensão extra, ela torna-se:

$$\square \phi + e^{2ky} \partial_y \left( e^{-4ky} \partial_y \phi \right) - m_\phi^2 e^{-2ky} = 0, \quad (2.74)$$

e

$$\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \quad (2.75)$$

é o operador d'Alambertiano.

O nosso interesse é estudar o perfil do espectro de massa no *bulk*, ou seja, a parte da solução que depende de  $y$ . O procedimento padrão a fazer, é utilizar o método de separação de variáveis na decomposição de KK:

$$\phi(x^\mu, y) = \sum_n \varphi^n(x^\mu) f^n(y), \quad (2.76)$$

com cada modo massivo  $4D$   $\varphi^n$  atendendo à equação de Klein-Gordon para uma massa  $m_n$ , a função de onda no *bulk* é denotado por  $f^n(y)$ . Usando a Eq. (2.76) na (2.74), obtemos

$$\partial_y \left( e^{-4ky} \partial_y f^{(n)} \right) - m_\phi^2 e^{-4ky} f^{(n)} = -m_n^2 e^{-2ky} f^{(n)}. \quad (2.77)$$

É trivial obter a solução para o modo zero (modo com menor massa)  $m_0$  que é, efetivamente, um modo com massa nula. O modo zero tem como solução geral:

$$f^0(y) = c_1^0 e^{(2-\sqrt{4+a})ky} + c_2^0 e^{(2+\sqrt{4+a})ky}, \quad (2.78)$$

onde empregando as condições de contorno determinamos as constantes  $c_{1,2}^0$ . Verificamos que impondo as condições de contorno de Neumann ou Dirichlet, para  $a$  diferente de zero, obtemos o resultado trivial  $c_1^0 = c_2^0 = 0$ , ou seja, sem solução para o modo zero. O termo de massa de fronteira deve ser incluído com o propósito de tornar  $b$  finito, levando a condições de contorno modificadas de Neumann:

$$(\partial_5 - bk) f^{(0)}|_{0, \pi R} = 0. \quad (2.79)$$

Definindo

$$\alpha = \sqrt{4+a}, \quad (2.80)$$

com a imposição das condições de contorno modificadas nas fronteiras  $0, \pi R$ , encontramos as equações de vínculo:

$$\begin{aligned} (2 - \alpha - b) c_1^0 + (2 + \alpha - b) c_2^0 &= 0 \\ (2 - \alpha - b) c_1^0 e^{(2-\alpha)\pi kr} + (2 + \alpha - b) c_2^0 e^{(2+\alpha)\pi kr} &= 0. \end{aligned} \quad (2.81)$$

É visto que as equações acima têm dependência nos parâmetros  $a$  e  $b$ , na ausência de vínculo relacionando esses dois parâmetros os tratando como independentes, concluímos a partir das

equações que:  $c_1^0 = c_2^0 = 0$ . No entanto, isso não é verdadeiro para valores especiais de  $b$ . Para  $b = (2 - \alpha)$  apenas  $c_2^0 = 0$  para  $b = (2 + \alpha)$  apenas  $c_1^0 = 0$ . Portanto, apenas um desses dois valores são diferentes de zero. Pela escolha de  $b$ , iremos obter uma solução de modo zero não nula, cuja dependência em  $y$  é dada por

$$f^0(y) = Ce^{bky}, \quad (2.82)$$

em que  $C$  é alguma constante.

Agora, nos concentraremos nas soluções para o caso massivo,  $m_n \neq 0$ , para o qual retornamos à (2.77). Realizando a substituição,  $e^{ky} = z$  nessa equação, obtemos

$$3k^2 z^{-3} \partial_z f^{(n)} - k^2 z^{-2} \partial_z^2 f^{(n)} + m^2 z^{-4} f^{(n)} - m_n^2 z^{-2} = 0. \quad (2.83)$$

Escrevendo  $m_\phi^2 = ak^2$  e fazendo algumas manipulações algébricas, encontramos

$$z^2 \partial_z^2 f^{(n)} - 3z \partial_z f^{(n)} + \left( \frac{m_n^2}{k^2} z^2 - a \right) f^{(n)} = 0. \quad (2.84)$$

Redefinindo  $f$

$$f \rightarrow z^{\frac{(1-\beta_1)}{2}} f, \quad (2.85)$$

a Eq. (2.83) torna-se

$$z^2 \partial_z^2 f + \beta_1 z \partial_z f + (\beta_2^2 z^2 - a) f = 0, \quad (2.86)$$

com  $\beta_1 = -1$ ,  $\beta_2 = m_p/k$  e  $a = 0$ . Observa-se que a equação acima se reduz a uma equação de Bessel, com argumentos dados por  $\beta_2 z$  e a ordem por  $\alpha = \sqrt{a + (\beta_1 - 1)^2/4}$ , e a solução dada por

$$f(z) = z^{\frac{(1-\beta_1)}{2}} [C_1 J_\alpha(\beta_2 z) + C_2 Y_\alpha(\beta_2 z)]. \quad (2.87)$$

A solução geral da Eq. (2.84) pode ser escrita como:

$$f^{(n)}(y) = N^n e^{2ky} \left[ J_\alpha \left( \frac{m_n}{k} e^{ky} \right) + b^{(n)} Y_\alpha \left( \frac{m_n}{k} e^{ky} \right) \right], \quad (2.88)$$

com  $\alpha = \sqrt{4+a}$ . As constantes  $b^{(n)}$  podem ser determinadas usando condições de contorno, assim temos:

$$b^{(n)} = -\frac{J_{\alpha-1}(m_n/k)}{Y_{\alpha-1}(m_n/k)} = -\frac{J_{\alpha-1}(m_n/ke^{-kL})}{Y_{\alpha-1}(m_n/ke^{-kL})}. \quad (2.89)$$

Nós podemos ver que os modos massivos estão localizados próximo a brana TeV para diferentes valores de  $n$ , esse fato é muito diferente para o modo zero o qual ajustando um parâmetro



poderia ser localizado em qualquer ponto do *bulk*. Verifica-se que devido ao fator de dobra, a escala do espectro de massa é da ordem do infravermelho. Isso é visto explicitamente impondo as condições de contorno resolvendo para as massas  $m_n$  através dos zeros das funções de Bessel. Portanto, para um limite grande do fator de dobra, ou seja,  $\pi kR \gg 1$  encontramos uma expressão simples para o espectro de massa:

$$m_n \approx \left( n + \alpha - \frac{3}{4} \right) \pi k e^{\pi k R}. \quad (2.90)$$

## 2.5 Bósons de Calibre no Bulk

Nós iremos analisar agora o comportamento de um campo de calibre na geometria do *bulk* AdS [46–48]. Para esse fim, utilizaremos o campo de calibre da simetria  $U(1)$ . A discussão é essencialmente a mesma para o caso não abeliano.

A ação para um campo de calibre  $U(1)$  é dado por

$$S = \int d^5x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{4} F_{MN} F^{MN} \right], \quad (2.91)$$

onde  $F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M$ . A fim de preservar a simetria de calibre, nenhum termo de massa é adicionado ao *bulk*. Nós fixamos o gauge  $A_5 = 0$  e fazemos o uso do vínculo  $\partial_\mu A^\mu = 0$ , para obter a equação de movimento

$$\eta^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} \partial_\beta F_{\alpha\nu} + \eta^{\mu\gamma} \partial_y \left( e^{-2ky} \partial_5 A_\gamma \right) = 0, \quad (2.92)$$

aplicando as condições de contorno

$$(\delta A^\mu \partial_5 A^\mu)|_{0, \pi R} = 0. \quad (2.93)$$

Novamente, é empregado o método de separação de variáveis:

$$A_\mu(x^\nu, y) = \sum_p A_\mu^{(p)}(x^\nu) g^{(p)}(y). \quad (2.94)$$

O espectro de massa  $A_\mu$  na teoria  $4D$  satisfaz a equação de Proca

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu F_{\nu\sigma} = -m_p^2 A_\sigma, \quad (2.95)$$

com a massa  $m_p$ . Usando a Eq. (2.94) na equação de movimento, obtemos

$$\partial_y \left( e^{-2ky} \partial_y g^{(p)} \right) = m_p^2 g^{(p)}. \quad (2.96)$$

Esta equação é facilmente resolvida para o modo zero (caso sem massa), produzindo

$$g^{(0)}(y) = d_1 + d_2 e^{2ky}. \quad (2.97)$$

Se as condições de contorno de Dirichlet ( $A^\mu|_{0,\pi R} = 0$ ) ou de Neumann ( $\partial_y A^\mu|_{0,\pi R} = 0$ ) são impostas, então a condição de contorno na (2.93) pode ser satisfeita. Porém, para as condições de contorno de Dirichlet serem satisfeitas, necessitamos que  $d_1 = d_2 = 0$ , assim não haverá solução sem massa. Portanto, é necessário impor condições de contorno de Neumann, ou seja, exigimos nas fronteiras que  $\partial_5 g^{(p)} = 0$ . O que nos dá:

$$g^{(0)}(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}}. \quad (2.98)$$

desta forma, não existe dependência com a quinta dimensão  $y$ , conseqüentemente o aspecto para o modo zero do campo de calibre do *bulk* é plano, ao contrário do caso para campo escalar.

Como previamente mencionado, para calcular o espectro de massa, substituiremos  $z = e^{ky}$  na Eq. (2.95) a fim de convertê-la em uma função tipo Bessel:

$$z^2 \partial_z^2 g^{(p)} - z \partial_z g^{(p)} + \frac{m_p^2}{k^2} g^{(p)} = 0. \quad (2.99)$$

Esta equação assume a forma dada em Eq. (2.86). Usando a Eq. (2.88), podemos escrever

$$g^{(p)}(y) = N^p e^{ky} \left[ J_1 \left( \frac{m_p}{k} e^{ky} \right) + L^{(p)} Y_1 \left( \frac{m_p}{k} e^{ky} \right) \right], \quad (2.100)$$

em que  $N^p$  e  $L^p$  são constantes arbitrárias. As massas dos estados de KK são obtidas como anteriormente, através da imposição de condições de contorno e considerando o limite  $k\pi R \gg 1$

$$m_p \approx \left( p \mp \frac{1}{a} \right) \pi k R e^{-\pi k R}. \quad (2.101)$$

Observamos que o espectro de massa localiza-se próximo a brana TeV, embora o modo zero não seja localizado.

### 3 MODELOS DE MUNDO BRANA ESTÁTICO EM SEIS DIMENSÕES

Será apresentada uma alternativa de trabalho em cenários com duas dimensões extras  $6D$  ou codimensão dois [49–55]. Os modelos deformados com codimensão-2 são divididos em duas categorias: os axiais e os em coordenadas compactas. No caso dos axiais observa-se simetria cilíndrica (o espaço transversal é um círculo do qual o raio é a dimensão não compacta e a dimensão compacta é angular, o espaço em quatro dimensões é o seu eixo). Nos modelos compactos tem-se simetria esférica (o raio é nosso espaço  $4D$  e dois ângulos descrevem o espaço transversal).

Como uma ampliação natural ao modelo RS com uma dimensão espacial extra, inúmeras extensões com mais dimensões extras foram sugeridas [18]. Considera-se na maioria desses cenários a existência de vários *orbifolds* independentes  $S_1/Z_2$  através da variedade  $M^{(1,3)}$ . Pode-se implementar um cenário com maior grau de complexidade com a introdução de sucessivos fatores de dobras levando a um espaço-tempo multiplamente deformado, com inúmeras  $p$ -branas localizadas em diferentes pontos fixos do *orbifold* satisfazendo as condições de contorno adequadas. Numerosas branas com dimensões menores, junto com a 3-brana do MPPE, ocorrem nas extremidades de intersecção das branas de dimensões maiores [24]. Assim, espaço-tempo  $D$ -dimensional tem a geometria resultante dada por

$$M^{(1,D-1)} \rightarrow [M^{(1,3)} \times S_1/Z_2] \times S_1/Z_2 \dots \quad (3.1)$$

com  $(D-4)$  direções deformadas.

Aqui, nós examinaremos um modelo cujo espaço-tempo é  $6D$  em um *bulk AdS*, em que ambas as dimensões extras são compactadas em sucessivos círculos com  $Z_2$  *orbifoldings*. Apesar da deformação da métrica através de uma das coordenadas compactas, assemelha-se ao caso encontrado no cenário RS, ou seja, deformação exponencial, na outra encontramos uma deformação tipo hiperbólica [28]. A solução duplamente deformada com condições de contorno, resulta numa aparência em forma de caixa em que as arestas da caixa são branas  $(4+1)-D$ .

Condições rigorosas sobre as tensões nas branas são impostas pelos *orbifolds*  $Z_2$  ao longo das duas dimensões compactas. As quatro branas  $(3+1)-D$  são formadas nos quatro pontos de intersecção (bordas) das 4-branas. Um dos extremos pode ser identificado como o MPPE  $(3+1)-D$ , impondo a escala  $TeV$  desejada, no outro extremo reside a brana da escala de Planck.

Podemos então identificar o nosso modelo padrão  $(3+1)-D$  com uma das bordas,

exigindo a escala TeV desejada, enquanto a brana de escala Planck reside em outra borda. Assim, habitamos em uma borda do espaço-tempo duplamente deformado. As outras duas extremidades relacionam-se a mais duas branas 4D com escalas de energia intermediárias.

### 3.1 Background Duplamente Deformado Caso Estático

Nós utilizaremos a seguinte notação: As coordenadas não-compactas:  $x^\mu$  em que  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . Índices do espaço-tempo  $M, N, L \dots$  com valores  $M, N, L \dots = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ , com  $x^4 = y$  e  $x^5 = z$ , com pontos fixos dos *orbifolds* os quais as 4-branas estão fixadas  $x^4 = 0$  e  $x^5 = \pi$ . Nessa descrição duas 4-brana se interceptam formando nessa região uma 3-brana nos pontos  $(x^4, x^5) \rightarrow (0, 0), (0, \pi), (\pi, 0), (\pi, \pi)$ .

Agora, iremos construir a métrica do espaço-tempo duplamente deformado 6D a fim de resolver as equações de campo. Na TRG em quatro dimensões a métrica, geralmente, é uma função das coordenadas do espaço-tempo. Acrescentando-se duas dimensões extras, o tensor métrica em 6D passa a ter dependência das dimensões adicionais, portanto,  $g_{MN} = g_{MN}(x^p, y, z)$ . O elemento de linha em seis dimensões é dado por

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{MN} dx^M dx^N \\ &= \tilde{g}_{\mu\nu}(x^p, y, z) dx^\mu dx^\nu + 2g_{\mu y}(x^p, y, z) dx^\mu dy + 2g_{\nu z}(x^p, y, z) dx^\nu dz \\ &\quad + g_{yy}(x^p, y, z) dy^2 + g_{zz}(x^p, y, z) dz^2, \end{aligned} \quad (3.2)$$

em que  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  é a métrica em quatro dimensões que pode possuir dependência funcional com as dimensões extras.

Analisando todas as simetrias do modelo, observa-se que a 3-brana possui simetria de paridade

$$x^\mu \longrightarrow -x^\mu, \quad (3.3)$$

isto implica que os termos cruzados (que misturam índices do espaço-tempo 4D com índices de dimensões extras) da (3.3) não atendem a essa exigência, logo podemos impor a condição

$$g_{\mu y}(x^p, y, z) = g_{\nu z}(x^p, y, z) = 0, \quad (3.4)$$

então, o elemento de linha torna-se

$$ds^2 = \tilde{g}_{\mu\nu}(x^p, y, z) dx^\mu dx^\nu + g_{yy}(x^p, y, z) dy^2 + g_{zz}(x^p, y, z) dz^2. \quad (3.5)$$

Assim, a variedade que descreve a geometria do modelo Eq. (3), pode ser escrita em 6D da

seguinte forma

$$M^{(1,5)} \rightarrow [M^{(1,3)} \times S_1/Z_2] \times S_1/Z_2, \quad (3.6)$$

que é um produto direto da variedade de Minkowski 4D com dois *orbifold*. Se a métrica for dessa forma então diz-se que o espaço possui uma geometria fatorizável, caso o contrário é não-fatorizável. Ao considerar que a simetria de Poincaré se conservará na 3-brana, o primeiro termo da Eq. (3.5) adquire a seguinte forma

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(x^p, y, z) = B^2(z)A^2(y)\eta_{\mu\nu}. \quad (3.7)$$

Por inspeção direta da métrica do cenário RS 5-dimensional, vemos que

$$g_{yy}(x^p, y, z) = R^2B^2(z). \quad (3.8)$$

é função apenas da coordenada  $z$ , ou seja, não podemos ter uma função dependente de uma dimensão extra multiplicando a própria dimensão, e

$$g_{zz}(x^p, y, z) = r^2. \quad (3.9)$$

será uma constante.

Assim, o ansatz mais pode ser obtido para uma métrica estática respeitando todas as simetrias antes mencionadas, é dado por

$$ds^2 = B^2(z)[A^2(y)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + R^2dy^2] + r^2dz^2, \quad (3.10)$$

onde  $A(y)$ ,  $B(z)$  são os fatores de dobra,  $R$  and  $r$  são os *moduli* ao longo das coordenadas compactas  $y$  and  $z$  respectivamente com  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, +, +)$ .

Com o objetivo de obter as equações de campo para a métrica, definimos a ação total do *background* (3.10)

$$\begin{aligned} S &= S_6 + S_5 + S_4, \\ S_6 &= \int d^6x \sqrt{-g_6} \left( \frac{M_6^4}{2} R_6 - \Lambda_6 \right), \\ S_5 &= \int dx dy dz \sqrt{-g_5} [V_1(z)\delta(y) + V_2(z)\delta(y - \pi)] \\ &+ \int dx dy dz \sqrt{-\tilde{g}_5} [V_3(y)\delta(z) + V_4(y)\delta(z - \pi)], \end{aligned} \quad (3.11)$$

em que  $M_6$  é o parâmetro de massa em seis dimensões,  $\Lambda_6$  é a constante cosmológica do *bulk*. Como o modelo possui uma forma de caixa, a ação  $S_5$  possui métricas induzidas sobre as 4-branas apropriadas. Além disso, existem 3-branas adicionais às quais localizam-se na

intersecção das arestas da caixa, onde residem os campos do MPPE:

$$S_4 = \sum_{y_i, z_i=0, \pi} \int dx dy dz \sqrt{-g_4} \mathcal{L}_i \delta(y - y_i) \delta(z - z_i). \quad (3.12)$$

No entanto, essas contribuições não têm relevância para o entendimento da nossa discussão posterior.

Aplicando o princípio variacional a ação  $S$ , encontramos a equação de Einstein em seis dimensões:

$$\begin{aligned} & - M_6^4 \sqrt{-g_6} \left( R_{MN} - \frac{R_6}{2} g_{MN} \right) \\ & = \Lambda_6 \sqrt{-g_6} g_{MN} \\ & - [V_1(z) \delta(y) - V_2(z) \delta(y - \pi)] \sqrt{-g_5} g_{\alpha\beta} \delta_M^\alpha \delta_N^\beta \\ & - [V_3(y) \delta(z) - V_4(y) \delta(z - \pi)] \sqrt{-\tilde{g}_5} \tilde{g}_{\alpha\beta} \delta_M^\alpha \delta_N^\beta. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Substituindo a métrica (3.10) na equação de Einstein, as componentes  $yy$  e  $zz$  da equação de Einstein reduz-se a um conjunto de duas equações mais simples,

$$2M_6^4 \left[ 3r^2 A'^2 + 3R^2 A^2 \bar{B}^2 + 2R^2 A^2 B \bar{B} \right] = -A^2 B^2 R^2 r [r \Lambda_6 + V_3 \delta(z) + V_4 \delta(z - \pi)] \quad (3.14)$$

$$2M_6^4 \left[ 3r^2 A'^2 + 5R^2 A^2 \bar{B}^2 + 2r^2 A A'' \right] = -A^2 B R r^2 [R B \Lambda_6 + V_1 \delta(y) + V_3 \delta(y - \pi)] \quad (3.15)$$

onde a linha denota diferenciação com respeito a  $y$ , enquanto a barra é a diferenciação com respeito a  $z$ . Executando manipulações algébricas nas Eqs. (3.14) e (3.15), obtemos para o *bulk*:

$$\frac{A'^2}{A^2} = c^2 = R^2 \left[ \frac{\bar{B}^2}{r^2} + \frac{2B\bar{B}}{3r^2} + \frac{B^2 \Lambda_6}{6M_6^4} \right], \quad (3.16)$$

em que  $c$  é uma constante arbitrária. A equação acima tem como solução:

$$A(y) = e^{-cy}, \quad (3.17)$$

$$B(z) = \frac{\cosh(kz)}{\cosh(k\pi)}, \quad (3.18)$$

com as constantes dadas por

$$c = \frac{Rk}{r \cosh(k\pi)}, \quad (3.19)$$

$$k = r \sqrt{-\frac{\Lambda_6}{10M_6^4}}. \quad (3.20)$$

A partir da forma da solução, torna-se claro que a presença de um termo de dobra exponencial (como no cenário RS) na coordenada  $y$ , exige uma constante cosmológica negativa, apontando assim para um *bulk* AdS. Com  $c^2 < 0$  a métrica do espaço-tempo não teria

a deformação desejada, isso levaria  $A(y)$  e  $B(z)$  a soluções oscilantes, portanto, não deve ser considerado. Observe que o *orbifolding*  $Z_2$  na direção  $y$ , impõe que  $A(y) = \exp(-c|y|)$ , obviamente, enquanto  $B(z)$  é simétrico. A forma completa da métrica é dada por

$$ds^2 = \left[ \frac{\cosh(kz)}{\cosh(k\pi)} \right]^2 [e^{-2c|y|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + R^2 dy^2] + r^2 dz^2. \quad (3.21)$$

Substituindo  $c$  e  $A(y)$  na Eq. (3.15), realizando a integração no intervalo infinitesimal ao longo dos dois limites  $y = 0, y = \pi$ , obtemos

$$V_1(z) = -V_2(z) = 8M^2 \sqrt{-\frac{\Lambda_6}{10}} \operatorname{sech}(kz). \quad (3.22)$$

As tensões dependem da coordenada  $z$  para as duas 4-branas localizadas em  $y(0, \pi)$ . Elas possuem sinais opostos lembrando a forma original do RS, esse fato é resultado do fator de dobra exponencial e as branas se situarem nos pontos fixos do *orbifold*.

De forma análoga, usando a solução para  $B(z)$ , a substituindo na primeira equação de (3.14), e integrando relativo ao intervalo ao longo de  $z = 0$ , obtemos

$$V_3(y) = 0. \quad (3.23)$$

Já que  $B(z)$  com  $z \rightarrow 0$  possui comportamento suave, isso já era esperado. Não existe a necessidade de qualquer densidade de energia no ponto  $z = 0$  porque a tensão na Eq. (3.23) é zero. Em contrapartida, integrando num intervalo através de  $z = \pi$ , temos

$$V_4(y) = -\frac{8M_6^4 k}{r} \tanh(k\pi), \quad (3.24)$$

é uma constante, em contraste com  $V_{1,2}(z)$  que é similar ao caso do modelo de RS com uma dimensão extra. Novamente, isso não era de se esperar porque  $V_{3,4}(y)$  foram inseridas para estabilizar *orbifolding* na direção  $z$  e com  $g_{zz}$  sendo uma constante, a densidade de energia que as correspondentes hipersuperfícies devem possuir é constante. A imposição de  $g_{yy}$  ser uma função com dependência em  $y$ , foi exigida porque ao longo da direção  $y$  as duas hipersuperfícies possuam uma densidade de energia dependente da coordenada  $z$ .

Nós notamos que duas das tensões nas branas  $(4+1)-D$ , ou seja,  $V_{1,2}$ , são funções da coordenada  $z$ . A princípio, embora tal dependência em relação a coordenada possa parecer um contra-senso, é necessário observar que é estipulado pelas condições de junção de Israel [56], que exista uma densidade de energia concentrada nas hipersuperfícies ( $y = 0, \pi$ ) e que essas distribuições são dependentes de  $z$ . Uma abordagem interessante e simples para organizar essa densidade de energia, origina-se a partir do confinamento do campo escalar nas respectivas branas.

As tensões para todas as 4-branas da teoria foram determinadas. Em conformidade com o que foi encontrado anteriormente, uma 3-brana é identificada como a intersecção de duas 4-branas, a tensão na 3-brana é dada pela soma algébrica das densidades de energia de cada uma das 4-branas. Assim, as quatro 3-branas da teoria localizam-se em

$$(y, z) = (0, 0), (0, \pi), (\pi, 0), (\pi, \pi). \quad (3.25)$$

A 3-brana que é identificada como a brana de Planck está localizada em  $(y = 0, z = \pi)$  e não sofre deformações da métrica. Para a 3-brana do MPPE, ou brana  $TeV$ , não há uma identificação única. As outras 3-branas restantes podem oferecer uma escolha válida, no entanto, isso dependerá dos valores dos parâmetros  $(k, c)$ . Eles são calculados em termos de  $\Lambda_6$ ,  $r$  e  $R$ , sendo  $M_6$  a massa de Planck da escala fundamental em seis dimensões, assim, a massa de Planck efetiva 4D é dada por

$$M_{Pl}^2 \sim \frac{M_6^4 r R}{2ck} [1 - e^{-2c\pi}] \left[ \frac{\tanh(k\pi)}{\cosh^3(k\pi)} + \frac{\tanh^3(k\pi)}{3} \right]. \quad (3.26)$$

Portanto, as consequências fenomenológicas dependeram unicamente da escolha das duas 3-branas.

Agora, vamos analisar a dependência das tensões nas branas com a coordenada  $z$ . Para isso, consideramos um campo escalar  $\varphi$  confinado numa 4-brana, por exemplo, na brana  $y = y_0$ , com um potencial do tipo  $\mathcal{V}(\varphi)$ . A métrica nessa brana é dada por

$$ds^2 = b_0^2 \cosh^2(kz) \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r^2 dz^2, \quad (3.27)$$

com

$$b_0^2 = e^{-2c|y_0|} \cosh^{-2}(k\pi). \quad (3.28)$$

O campo escalar tem a ação dada por

$$S_\varphi = \int d^4x dz \sqrt{-g_5} \left[ g^{AB} \partial_A \varphi \partial_B \varphi + \mathcal{V}(\varphi) \right], \quad (3.29)$$

e  $g_5^{AB}$  é da forma (3.27). Isto leva a seguinte equação de movimento

$$r^2 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \varphi} = 8k \tanh(kz) \bar{\varphi} + 2\bar{\varphi}. \quad (3.30)$$

em que a barra denota diferenciação em relação a  $z$ . Fazendo

$$\mathcal{V}(\varphi(z)) \equiv \rho(z) \quad \implies \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \varphi} = \frac{\bar{\rho}}{\bar{\varphi}}, \quad (3.31)$$



a equação (3.30) torna-se

$$r^2 \bar{\rho} \cosh^8(kz) = \frac{d}{dz} \left[ \cosh^8(kz) (\bar{\varphi})^2 \right]. \quad (3.32)$$

A fim de que a densidade de energia forneça a tensão necessária na brana, precisamos ter

$$\rho(z) + \left( \frac{\bar{\varphi}}{r} \right)^2 = V_{1,2}. \quad (3.33)$$

Agora, iremos buscar soluções que sejam simultâneas às Eqs. (3.32) e (3.33). Nós encontramos na 4-brana  $y = \pi$ :

$$\rho(z) = v_0 \left[ -\frac{7}{6} \operatorname{sech}(kz) + \xi \operatorname{sech}^4(kz) \right], \quad (3.34)$$

com

$$v_0 \equiv 8M^2 \sqrt{-\frac{\Lambda_6}{10}}, \quad (3.35)$$

em que  $\xi$  é uma constante que tem origem na integração, e

$$\frac{\bar{\varphi}^2}{r^2} = v_0 \left[ \frac{1}{6} \operatorname{sech}(kz) + \xi \operatorname{sech}^4(kz) \right]. \quad (3.36)$$

Para o lado direito da equação acima ser positivo definido, exige-se que

$$\xi \leq \frac{1}{6}, \quad (3.37)$$

para qualquer valor de  $kz$ . A seguir é exibido o aspecto de  $\varphi(z)$ . Já que o valor de  $\varphi(z)$  não tem importância física, podemos atribuir a constante de integração um valor de modo que  $\varphi(0) = 0$ .

Apesar do potencial para o campo escalar  $\mathcal{V}$  e o campo escalar  $\varphi$  serem dependentes da dimensão extra  $z$ , a partir das Eqs. (3.32), (3.44) e (3.45), observa-se que é uma tarefa áspera obter uma relação inversa para o obter o potencial escalar  $\mathcal{V}$  em função de  $\varphi(z)$  por meio de uma equação. No entanto, em certos limites isso pode ser alcançado. Aplicando, por exemplo, o limite  $\xi \rightarrow -\infty$ , obtemos

$$\gamma(\varphi - \varphi_0) = \tanh(kz), \quad (3.38)$$

onde

$$\gamma^2 = -\frac{v_0^2 \xi r^2}{k^2}, \quad (3.39)$$

e  $\varphi_0$  é uma constante de integração. O potencial escalar correspondente é

$$\mathcal{V}(\varphi) = -\xi v_0 [1 - \gamma^2 (\varphi - \varphi_0)^2]^2. \quad (3.40)$$

Para  $|\xi|$  observa-se que não é o único panorama em comparação com a solução que venha ser esperada de forma fechada, entretanto, possivelmente seja a mais simplória. No limite

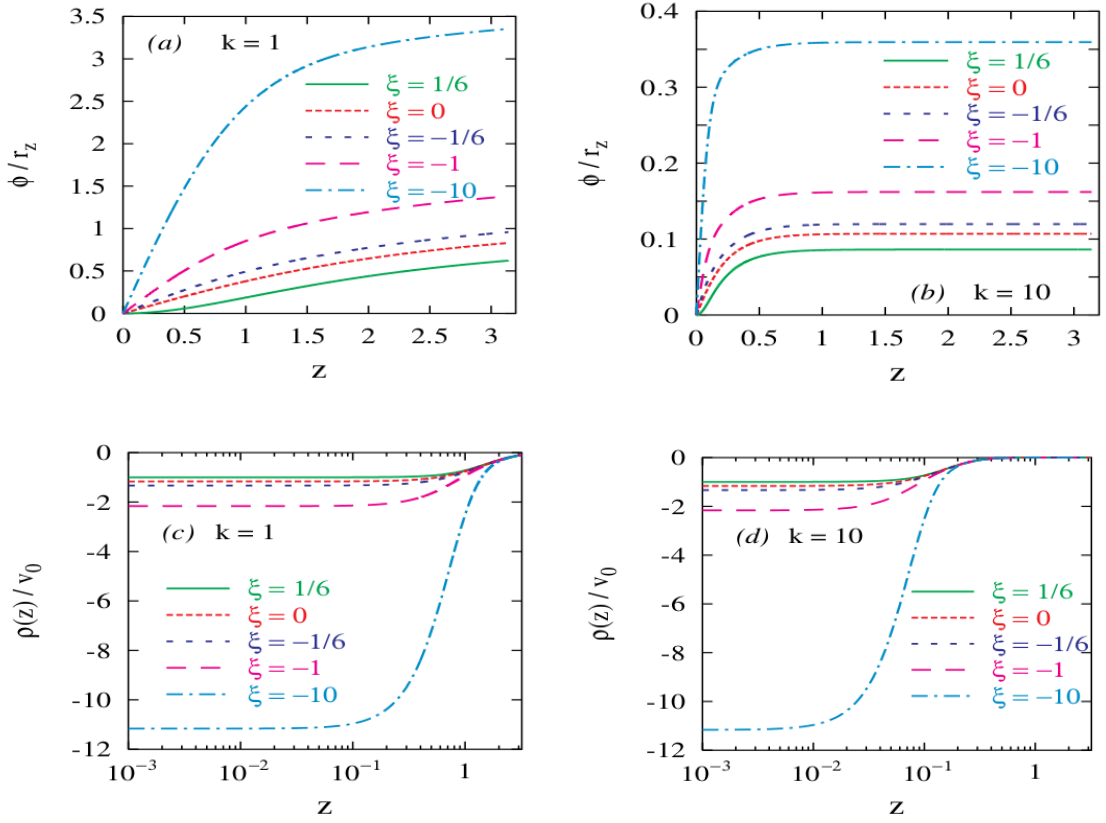


Figura 5: O perfil do campo  $\phi(z)$  (a,b) na 4-brana em  $y = \pi$  assim como o potencial correspondente  $\rho(z)$  (c,d).

contrário  $\xi \rightarrow 0$ , a Eq. (3.45) produz

$$\bar{\phi} = A \sqrt{\text{sech}(kz)}, \quad A \equiv \sqrt{\frac{v_0 r^2}{6}}. \quad (3.41)$$

Após integrar e fazendo  $|kz|$  grande, encontramos

$$\bar{\phi} \approx A \left[ 1 + \frac{k^2 z^2}{4} \right]^{-1/2}, \quad (3.42)$$

assim, obtemos às seguintes expressões:

$$\phi(z) \approx \frac{2A}{k} \tan^{-1} \left( \frac{kz}{2} \right), \quad \mathcal{V}(\phi) \approx -\frac{7v_0}{6} \text{sech} \left( 2 \tan \frac{k\phi}{2A} \right). \quad (3.43)$$

Portanto, um potencial periódico é obtido. Na Fig. (5) são apresentadas as soluções exatas, em comparação com as soluções numéricas dadas na Fig. (6) para o caso  $\xi = 0$ .

A dependência da densidade de energia com a coordenada  $z$  da 4-brana em  $y = \pi$ , é facilmente explicada com o uso do campo escalar  $\phi(z)$ , uma análise semelhante na brana fixada

em  $y = 0$ , conduz a uma conclusão diferente. Para tanto, tomemos a brana em ( $y = 0$ ), então

$$\rho(z) = v_0 \left[ \frac{7}{6} \operatorname{sech}(kz) + \tilde{\xi} \operatorname{sech}^4(kz) \right], \quad (3.44)$$

e

$$\frac{\bar{\varphi}^2}{r^2} = v_0 \left[ -\frac{1}{6} \operatorname{sech}(kz) + \tilde{\xi} \operatorname{sech}^4(kz) \right]. \quad (3.45)$$

A positividade de  $\bar{\varphi}^2$ , mais uma vez, exige que

$$\tilde{\xi} \geq \frac{1}{6} \cosh^3(k\pi), \quad (3.46)$$

como visto previamente, o potencial produzido para o campo escalar  $\mathcal{V}(\varphi)$  no limite  $\tilde{\xi}$  é:

$$\mathcal{V}(\varphi) = -\tilde{\xi} v_0 [1 - \gamma^2 (\varphi - \varphi_0)^2]^2. \quad (3.47)$$

Pode-se encontrar a forma do potencial escalar para pequenos  $\tilde{\xi}$ , agindo de maneira análoga.

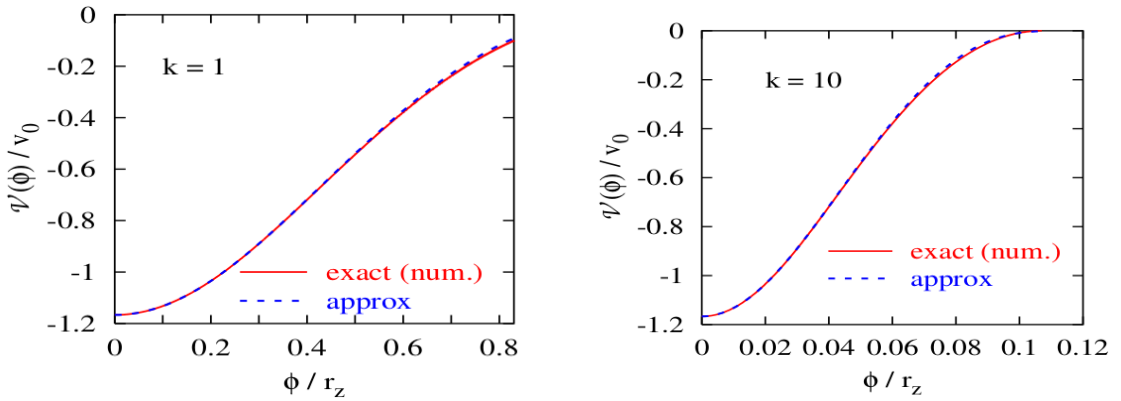


Figura 6: O potencial  $\mathcal{V}(\varphi)$  na 4-brana em  $y = \pi$  como função de  $\varphi$  para  $\xi = 0$ .

Observamos a grande hierarquia entre as escalas Planck e a TeV for explicada fundamentalmente pela deformação na direção  $z$ , então  $\cosh(k\pi)$  é grande e a equação (3.46) implica  $\tilde{\xi}$  muito grande. Portanto, gera uma outra hierarquia que é consequência da parametrização particular de  $\varphi(z)$  na brana, ou seja, a enorme diferença entre  $\xi$  e  $\tilde{\xi}$ .

Uma forma (extrema) de evitar o problema acima mencionado, seria trocar o campo  $\varphi(z)$  (nesta brana especificamente) por um campo escalar fantasma (aquele cujo termo cinético tem o sinal oposto). Isso, necessitaria  $\tilde{\xi} \leq 1/6$  ao contrário da Eq. (3.46). O campo escalar fantasma não é aceitável em uma teoria fundamental. Portanto, postular esse caminho demandaria aceitar a teoria atual como uma descrição efetiva de uma teoria de campo diferente.

Acima foram listadas algumas possíveis soluções para a densidade de energia concentrada na brana  $y = 0$  a qual depende da coordenada  $z$ . É importante perceber que a escolha de uma dessas soluções, implicará em consequências fenomenológicas distintas. Nas próximas seções iremos analisar a dinâmica dos campos bosônicos nesse *background*, resolvendo ana-

liticamente suas equações de movimento e conseqüentemente determinando seus espectros de massa.

### 3.2 Solução Analítica Campo Escalar Background Estático

Nessa seção, iremos estudar o comportamento do campo escalar no *background* (3.10). Buscamos encontrar soluções analíticas para a equação de campo e conseqüentemente determinar o seu espectro de massa na teoria efetiva.

$$S = \int d^6x \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{2} g^{MN} \partial_M \Phi \partial_N \Phi \right). \quad (3.48)$$

Aplicando o princípio variaocinal, tem-se a equação de movimento

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_M [\sqrt{-g} g^{MN} \partial_N \Phi] = 0. \quad (3.49)$$

Decompondo o campo de spin zero em soma de modos de (KK):

$$\Phi(x^\mu, y, z) = \sum_{ij} \phi_{ij}(x^\mu) \xi_{ij}(y) \chi_j(z), \quad (3.50)$$

em seguida substituindo na Eq. (3.50), nós encontramos as seguintes equações

$$\square \phi_{ij} - M_{ij}^2 \phi_{ij} = 0, \quad (3.51)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dz} \left( B^5 \frac{d\chi_j}{dz} \right) = -M_j^2 B^3 \chi_j, \quad (3.52)$$

e

$$\frac{1}{R^2} \frac{d}{dy} \left( A^4 \frac{d\xi_{ij}}{dy} \right) - M_j^2 A^4 \xi_{ij} = -M_{ij}^2 A^2 \xi_{ij}, \quad (3.53)$$

com  $\phi_{ij}$  o campo escalar na teoria efetiva,  $M_j^2$  é o modo massivo devido a dimensão extra  $z$  e  $M_{ij}^2$  é o espectro de massa na 3-brana.

Nós iremos resolver inicialmente a Eq. (3.52). Para este fim, vamos usar o fator  $B(z)$ , assim obtemos

$$\frac{d^2 \chi_j}{dz^2} + 5k \tanh(kz) \frac{d\chi_j}{dz} + (\text{sech}^2(kz) r^2 M_j^2 \cosh(k\pi)) \chi_j = 0. \quad (3.54)$$

A equação acima torna-se mais simples, fazendo as seguintes redefinições:

$$\chi_j(z) = \text{sech}^{5/2}(kz) \chi_j^*(\omega), \quad \omega = \tanh(kz), \quad (3.55)$$

substituindo na Eq. (3.54), chegamos em

$$(1 - \omega^2) \frac{d^2 \chi_j^*}{d\omega^2} - 2\omega \frac{d\chi_j^*}{d\omega} + \left[ \alpha_j(\alpha_j + 1) - \frac{25}{4(1 - \omega^2)} \right] \chi_j^* = 0, \quad (3.56)$$

em que

$$\alpha_j = -\frac{1}{2} + \sqrt{4 + \frac{r^2 M_j^2 \cosh^2(k\pi)}{k^2}}. \quad (3.57)$$

A Eq. (3.56) é denominada equação associada de Legendre, e tem como solução

$$\chi_j(z) = A_1 P_j(z) + A_2 Q_j(z), \quad (3.58)$$

onde

$$P_j(z) = P_{\alpha_j}^{5/2}(\tanh(kz)) \operatorname{sech}^{5/2}(kz) \quad (3.59)$$

$$Q_j(z) = Q_{\alpha_j}^{5/2}(\tanh(kz)) \operatorname{sech}^{5/2}(kz), \quad (3.60)$$

em que  $P_\lambda^\mu$  e  $Q_\lambda^\mu$  são funções associadas de Legendre do segundo tipo. Fazendo uso da continuidade e das condições de contorno da função e de sua derivada nos pontos  $z = 0$  e  $z = \pi$ , encontramos os modos massivos  $M_j$  devido a dimensão extra  $z$ . De tais condições é obtida a expressão

$$\begin{aligned} A_1 \bar{P}_j(0) + A_2 \bar{Q}_j(0) &= 0, \\ A_1 \bar{P}_j(\pi) + A_2 \bar{Q}_j(\pi) &= 0. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Soluções não triviais para a equação acima só serão possíveis se

$$\begin{aligned} &P_{(1+\alpha_j)}^{5/2}(0) Q_{(1+\alpha_j)}^{5/2}(\tanh(k\pi)) - P_{(1+\alpha_j)}^{5/2}(\tanh(k\pi)) Q_{(1+\alpha_j)}^{5/2}(0) + \\ &\tanh(k\pi) \left[ P_{\alpha_j}^{5/2}(0) Q_{(1+\alpha_j)}^{5/2}(\tanh(k\pi)) - P_{(1+\alpha_j)}^{5/2}(\tanh(k\pi)) Q_{\alpha_j}^{5/2}(0) \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Agora, vamos regressar a Eq. (3.53). Substituindo o fator de dobra  $A(y)$ , temos

$$\frac{d^2 \xi_{ij}}{dy^2} - 4c \frac{d\xi_{ij}}{dy} + [e^{-2cy} M_{ij}^2 - M_j^2] R^2 \xi_{ij} = 0. \quad (3.63)$$

Para obter a solução da equação acima, realizaremos às seguintes transformações:

$$\tau = e^{cy}, \quad \xi_{ij} = \tau^2 \xi_{ij}^*, \quad (3.64)$$

logo após substituir na Eq. (3.63), encontramos

$$\tau^2 \frac{d^2 \xi_{ij}^*}{d\tau^2} + \tau \frac{d\xi_{ij}^*}{d\tau} + (\tau^2 - v_{ij}^2) \xi_{ij}^* = 0. \quad (3.65)$$

onde

$$v_{ij} = \sqrt{4 + \frac{M_j^2 R^2}{c^2}} = \frac{1}{2} + \alpha_j. \quad (3.66)$$

A expressão (3.65) é a equação de Bessel e tem por solução

$$\xi_{ij}(y) = e^{2cy} \left[ B_1 J_{v_{ij}} \left( \frac{M_j R}{c} e^{cy} \right) + B_2 Y_{v_{ij}} \left( \frac{M_j R}{c} e^{cy} \right) \right]. \quad (3.67)$$

Tomando uso, novamente, das condições de contorno e continuidade nos pontos fixos  $y = 0$  e  $y = \pi$ ,

$$\begin{aligned} B_1 J'_{v_{ij}}(0) + B_2 Y'_{v_{ij}}(0) &= 0, \\ B_1 J'_{v_{ij}}(\pi) + B_2 Y'_{v_{ij}}(\pi) &= 0, \end{aligned} \quad (3.68)$$

chegamos a equação:

$$\begin{aligned} & [M_{ij} e^{c\pi} J_{v_{ij}+1}(M_{ij} e^{c\pi}) - M_{ij} e^{c\pi} J_{v_{ij}-1}(M_{ij} e^{c\pi}) - 4J_{v_{ij}-1}(M_{ij} e^{c\pi})] \\ & \times [M_{ij} Y_{v_{ij}-1}(M_{ij}) - M_{ij} Y_{v_{ij}+1}(M_{ij}) + 4Y_{v_{ij}}(M_{ij})] \\ & + [M_{ij} J_{v_{ij}-1}(M_{ij}) - M_{ij} J_{v_{ij}+1}(M_{ij}) - 4J_{v_{ij}}(M_{ij})] \\ & \times [M_{ij} e^{c\pi} Y_{v_{ij}-1}(M_{ij} e^{c\pi}) - M_{ij} e^{c\pi} Y_{v_{ij}+1}(M_{ij} e^{c\pi}) + 4Y_{v_{ij}+1}(M_{ij} e^{c\pi})] = 0. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Observe que não é necessário tomar uma ordem fixa da função de Bessel porque encontramos uma solução geral. Para  $j$ s distintos, a ordem  $\alpha_j$  assume valores diferente, ou seja,  $M_j$  depende de  $\alpha_j$ . assim encontramos precisamente o espectro de massa  $M_{ij}$  de nossa solução analítica que é determinado a partir da solução da equação transcendental (3.69).

Para calcular o espectro de massa do campo escalar, devemos inicialmente analisar os parâmetros da teoria, isto é,  $R$ ,  $r$  e  $M_6$ ,  $k$ . A relação entre eles é dada pelas Eqs. (3.19) e (3.20). A massa de Planck  $M_{Pl}$  (escala  $TeV$ ) em quatro dimensões em termos do parâmetro de massa  $M_6$  do *bulk* é dada pela Eq.(3.26), portanto, fazendo uma aproximação obtemos

$$M_{Pl}^2 \sim \frac{M_6^4 r R}{2ck}, \quad (3.70)$$

assim, estaremos habilitados a resolver numericamente a Eq. (3.69) porque será possível determinar todos. Para obter os valores dos modos massivos de forma numérica, recorre-se a relação entre  $c$  e  $k$  dada pela Eq. (3.19).

No modelo com seis dimensões duplamente deformadas, a solução para a coor-

Tabela 1: Espectro de Massa Campo Escalar background Estático em  $TeV$ .  $c = 11.52$ ,  $k = 0.25$ .

$M_{ij}$					
$M_{1j}$	$M_{2j}$	$M_{3j}$	$M_{4j}$	$M_{5j}$	$M_{6j}$
1.97	9.63	13.18	18.33	25.00	33.91
10.33	13.96	16.77	21.64	28.76	39.33
20.36	22.40	14.29	27.61	33.15	47.08
30.45	31.86	24.19	63.28	40.06	54.17
37.16	39.37	33.12	35.17	46.81	70.41
41.68	42.71	44.65	47.11	51.37	86.25

denada  $z$  é uma função associada de Legendre possuindo inúmeras ordens  $\alpha_j$  com o índice  $j$  assumindo diferentes valores, como resultado o espectro de massa possui um grande alcance de valores. Para cada divisão surgindo da dimensão  $z$ , novos modos massivos na dimensão extra  $y$   $M_{ij}$  são obtidos. Na solução numérica, os modos massivos reais foram obtidos para valores de  $c = 11.2$  e  $k = 0.25$  os quais estão em acordo com a referência [57]. Tais valores implicam que existe uma hierarquia entre os raios de compactificação das dimensões extras, isto é, uma deformação grande em uma direção e uma pequena na outra. Neste cenário há uma diluição do espectro, o mesmo se manifesta na teoria efetiva com massas mais leves como mostrado na tabela (3).

### 3.3 Solução Analítica para o Bóson de Calibre Background Estático

Agora, nós iremos considerar devido sua simplicidade, uma teoria de calibre  $U(1)$ . No entanto, as teorias de gauge não Abelianas são derivadas de maneira análoga. A ação invariante do campo de calibre é dada por

$$S_g = \int d^6x \sqrt{-g_6} \left( -\frac{1}{4} F_{MN} F^{MN} \right), \quad (3.71)$$

onde,  $F_{MN} = \partial_M X_N - \partial_N X_M$  é o tensor de intensidade do bóson de calibre,  $\sqrt{-g_6}$  é o determinante da métrica Eq. (3.10). Após variar a ação, encontramos a equação de movimento para o campo:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_M [\sqrt{-g} g^{MN} g^{LK} F_{NL}] = 0, \quad (3.72)$$

a fim de eliminar graus de liberdade espúrios da teoria, faremos a escolha partícular  $X_4 = X_5 = 0$ . A equação que determina o espectro de massa é encontrada aplicando a redução dimensional na equação acima. O campo vetorial em  $6D$  será decomposto em uma soma de modos explicitando

a sua parte efetiva como segue:

$$X_v(x^\mu, y, z) = \sum_{(kl)} X_v^{(kl)}(x^\mu) \Xi_{kl}(y) \zeta_l(z), \quad (3.73)$$

substituindo na equação (3.72), nós obtemos duas equações diferenciais para cada coordenada das dimensões extras:

$$\square X_v^{(kl)} - M_{kl}^2 = 0, \quad (3.74)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dz} \left( B^3 \frac{d\zeta_l}{dz} \right) = -M_l^2 B \zeta_l, \quad (3.75)$$

e

$$\frac{1}{R^2} \frac{d}{dy} \left( A^2 \frac{d\Xi_{kl}}{dy} \right) - M_l^2 A^2 \Xi_{kl} = -M_{kl}^2 \Xi_{kl}. \quad (3.76)$$

Determinamos o parâmetro de massa  $M_l$  resolvendo a equação para a função  $\zeta(z)$ . Encontrando-o é possível determinar a massa efetiva  $M_{kl}$  através da equação de  $\Xi(y)$ .

O nosso objetivo é obter soluções análticas para o campo vetorial, sem aproximações, nesse sentido iremos poceder algumas manipulações algébricas nas equações de campo. Substituindo o fator de dobra  $B(z)$  na equação (3.75), obtemos:

$$\frac{d^2 \zeta_l}{dz^2} + 3k \tanh(kz) \frac{d\zeta_l}{dz} + [\operatorname{sech}^2(kz) r^2 M_l^2 \cosh(k\pi)] \zeta_l = 0. \quad (3.77)$$

Nós faremos as seguintes mudança de coordenadas, para resolver a equação diferencial 3.77,

$$\zeta_l^*(\tilde{\omega}) = (1 - \tilde{\omega}^2)^{3/2} F(\tilde{\omega}) \quad \tilde{\omega} = \tanh(kz). \quad (3.78)$$

A equação (5.36), nas novas coordenadas é reescrita como

$$(1 - \tilde{\omega}^2) \frac{d^2 \zeta_l^*}{d\tilde{\omega}^2} + \tilde{\omega} \frac{d\zeta_l^*}{d\tilde{\omega}} + \frac{r^2 M_l^2 \cosh^2(k\pi)^2}{k^2} \zeta_l^* = 0, \quad (3.79)$$

obtemos uma equação diferencial cuja soluções são dadas por funções associadas de Legendre:

$$\zeta_l^*(\tilde{\omega}) = (1 - \tilde{\omega}^2)^{3/2} \left[ C_1 P_{\lambda_l}^{\mu_l}(\tilde{\omega}) + C_2 Q_{\lambda_l}^{\mu_l}(\tilde{\omega}) \right], \quad (3.80)$$

a solução nas coordenadas antigas toma a forma:

$$\zeta_l(z) = \left[ C_1 P_{\lambda_l}^{3/2}(\tanh(kz)) + C_2 Q_{\lambda_l}^{3/2}(\tanh(kz)) \right] \times \operatorname{sech}^{3/2}(kz) \quad (3.81)$$

com

$$\lambda_l = -\frac{1}{2} + \sqrt{1 + \frac{r^2 M_l^2 \cosh^2(k\pi)}{k^2}}. \quad (3.82)$$



Ao impor que a função  $\zeta_l(z)$  seja contínua nos pontos fixos  $z = 0, \pi$ , obtemos

$$\begin{aligned} C_1 \bar{P}_l(0) + C_2 \bar{Q}_l(0) &= 0, \\ C_1 \bar{P}_l(\pi) + C_2 \bar{Q}_l(\pi) &= 0, \end{aligned} \quad (3.83)$$

assim, a solução exata que define o espectro para  $M_l$  é

$$\begin{aligned} (2\lambda_l - 4) [P_{(1+\lambda_l)}^{3/2}(\tanh(k\pi)) Q_{(1+\lambda_l)}^{3/2}(0) - P_{(1+\lambda_l)}^{3/2}(0) Q_{(1+\lambda_l)}^{3/2}(\tanh(k\pi))] + \\ (1 - 2\lambda_l) \tanh(k\pi) [P_{\lambda_l}^{3/2}(\tanh(k\pi)) Q_{(1+\lambda_l)}^{3/2}(0) - P_{(1+\lambda_l)}^{3/2}(0) Q_{\lambda_l}^{3/2}(\tanh(k\pi))] = 0. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Para encontrar a massa efetiva da teoria,  $M_{kl}$ , devemos resolver a Eq. 3.76. Re-definindo as funções

$$\tilde{\tau} = \varepsilon e^{cy} \quad (3.85)$$

e

$$\Xi_{kl} = e^{cy} \tilde{\Xi}_{kl}, \quad (3.86)$$

obtemos

$$\tilde{\tau}^2 \frac{d^2 \tilde{\Xi}_{kl}}{d\tilde{\tau}^2} + \tilde{\tau} \frac{d\tilde{\Xi}_{kl}}{d\tilde{\tau}} + (\tau^2 - v_{kl}^2) \tilde{\Xi}_{kl} = 0, \quad (3.87)$$

com

$$v_{kl} = \sqrt{1 + \frac{M_{kl}^2 R^2}{c^2}}. \quad (3.88)$$

A solução na coordenada  $y$ , pode ser escrita em termos das funções de Bessel de ordem  $v_{kl}$  multiplicada por um fator exponencial:

$$\Xi_{kl}(y) = e^{c|y|} \left[ c_{kl} J_{v_{kl}} \left( \frac{M_{kl} R}{c} e^{c|y|} \right) + d_{kl} Y_{v_{kl}} \left( \frac{M_{kl} R}{c} e^{c|y|} \right) \right], \quad (3.89)$$

com  $c_{kl}$  e  $d_{kl}$  constantes.

Levando em conta a continuidade de  $\Xi_{kl}(y)$  nos pontos fixos do *orbifold*  $y = (0, \pi)$ ,

$$\begin{aligned} c_{kl} J'_{v_{kl}}(0) + d_{kl} Y'_{v_{kl}}(0) &= 0, \\ c_{kl} J'_{v_{kl}}(\pi) + d_{kl} Y'_{v_{kl}}(\pi) &= 0. \end{aligned} \quad (3.90)$$

o espectro de massa  $M_{kl}$  é determinado pela equação:

$$\begin{aligned} & \left[ M_{kl} e^{c\pi} J_{v_{kl}+1}(M_{kl} e^{c\pi}) - \frac{1}{2} M_{kl} e^{2c\pi} J_{v_{kl}-1}(M_{kl} e^{c\pi}) - \frac{1}{2} J_{v_{kl}-1}(M_{kl} e^{c\pi}) \right] \\ \times & \left[ M_{kl} Y_{v_{kl}-1}(M_{kl}) - \frac{1}{2} M_{kl} Y_{v_{kl}+1}(M_{kl}) + \frac{1}{2} Y_{v_{pl}}(M_{kl}) \right] \\ + & \left[ M_{kl} J_{v_{kl}-1}(M_{kl}) - \frac{1}{2} M_{kl} J_{v_{kl}+1}(M_{kl}) - \frac{1}{2} J_{v_{kl}}(M_{kl}) \right] \end{aligned}$$

$$\times \left[ M_{kl} e^{c\pi} Y_{\nu_{kl}-1}(M_{kl} e^{c\pi}) - \frac{1}{2} M_{kl} e^{2c\pi} Y_{\nu_{kl}+1}(M_{kl} e^{c\pi}) + \frac{1}{2} Y_{\nu_{kl}+1}(M_{kl} e^{c\pi}) \right] = 0, \quad (3.91)$$

que é uma equação transcendental. Os parâmetros  $c$  e  $k$  são calculados utilizando a Eq. (3.70).

Tabela 2: Espectro de Massa Bóson de Calibre em  $TeV$ .  $c = 11.52$ ,  $k = 0.25$ .

$M_{kl}$					
$M_{1l}$	$M_{2l}$	$M_{3l}$	$M_{4l}$	$M_{5l}$	$M_{6l}$
1.518	4.296	7.805	16.196	19.420	22.599
10.231	10.992	12.820	19.751	23.004	17.17
20.307	20.698	21.709	26.210	28.593	29.60
30.451	30.680	31.369	34.619	36.441	63.70
42.476	43.781	45.017	48.566	45.916	77.58
59.135	61.355	62.181	64.076	56.119	84.53

As soluções analíticas para os modos massivos do campo de calibre são dadas pelas Eqs. (3.89) que é uma função associada de Legendre e (3.81) uma função de Bessel. O espectro de massa é obtido resolvendo inicialmente a Eq. (3.84) para  $M_l$ , logo após, solucionando a Eq. (3.91). Os valores das massas para as diferentes ordens são dadas na tabela (4).

#### 4 ESPAÇO-TEMPO DUPLAMENTE DEFORMADO COM COSMOLOGIA

Neste capítulo iremos explorar as consequências cosmológicas de um espaço-tempo com codimensão-2 em que ambas dimensões extras são compactificadas em círculos com orbifolding  $Z_2/S_2$ . Nós consideramos nosso Universo, isto é, uma das 3-branas sendo homogêneo, isotrópico e plano no 3-espaço (três coordenadas espaciais). Nós usaremos a mesma notação do capítulo (3).

Nós assumiremos as hipóteses mencionadas acima a fim de simplificar o modelo. Para obter elemento de linha consistente com as simetrias do cenário, devemos seguir os mesmos passos da seção (3.1), portanto, a métrica deve ser similar a (3.21). No entanto, ao assumir que o espaço-tempo evolui temporalmente, devemos considerar a geometria de um espaço isotrópico, homogêneo em três dimensões, logo o elemento de linha dev possuir a seguinte forma

$$\begin{aligned} ds^2 &= B^2(z) [A^2(y) g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + R^2 dy^2] + r^2 dz^2 \\ &= B^2(z) [A^2(y) (-dt^2 + g_{ij}(\mathbf{x}) dx^i dx^j) + R^2 dy^2] + r^2 dz^2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Todo o aspecto dinâmico da geometria está representado na métrica  $g_{ij}(\mathbf{x})$ , ou de forma equivalente, no elemento de linha

$$dl^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad (4.2)$$

com os índices  $i, j$  assumindo as coordenadas cartesianas do espaço 3-dimensional. O espaço plano é obviamente um espaço 3D homogêneo e isotrópico com elemento de linha dado por [58, 59]

$$dl^2 = d\mathbf{x}^2. \quad (4.3)$$

Ele é invariante por rotações e translações. Também é possível incorporar uma superfície esférica de raio  $V$  no espaço euclidiano, assim, o elemento de linha será

$$dl^2 = d\mathbf{x}^2 + dw^2, \quad (4.4)$$

$$w^2 + \mathbf{x}^2 = V^2, \quad (4.5)$$

deste modo, as rotações em quatro dimensões o deixa invariante.

Uma hipersuperfície esférica em espaço pseudo-euclidiano 4D é uma outra possi-

bilidade, com elemento de linha

$$dl^2 = d\mathbf{x}^2 - dw^2, \quad (4.6)$$

$$w^2 - \mathbf{x}^2 = V^2, \quad (4.7)$$

em que  $V^2$  é uma constante positiva. Portanto, o elemento de linha é invariante por transformações do tipo Lorentz, com  $w$  ao invés do tempo.

$$\mathbf{x}' = V\mathbf{x}, \quad w' = Vw. \quad (4.8)$$

Os elementos de linha nos casos esférico e hiperbólico são

$$dl^2 = V^2 [d\mathbf{x}^2 \pm dw^2], \quad (4.9)$$

$$w^2 \pm \mathbf{x}^2 = 1. \quad (4.10)$$

A diferencial da Eq. (4.10) é dada por

$$\mp w dw = \mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}, \quad (4.11)$$

então

$$dl^2 = V^2 \left[ d\mathbf{x} \pm \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{1 \mp \mathbf{x}^2} \right]. \quad (4.12)$$

Podemos ampliar isso ao caso do espaço euclidiano, daí ele terá a seguinte forma

$$dl^2 = V^2 \left[ d\mathbf{x} \pm K \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{1 \mp K\mathbf{x}^2} \right], \quad (4.13)$$

com

$$K = \begin{cases} +1 & \text{esférico} \\ 0 & \text{euclidiano} \\ -1 & \text{hiperbólico.} \end{cases}$$

Agora, devemos observar que o  $dl^2$  será positivo em  $\mathbf{x} = 0$  quando  $V^2 > 0$ . Substituindo a Eq.(4.13) em (4.1), com  $V$  sendo uma função do tempo e  $K = 0$ , o elemento de linha que descreve o *background* duplamente deformado com cosmologia é dado por

$$ds^2 = B^2(z) [A^2(y) (-dt^2 + V^2(t) g_{ij} dx^i dx^j) + R^2 dy^2] + r^2 dz^2. \quad (4.14)$$

O *background* cosmológico possui a ação total

$$\begin{aligned}
S &= S_6 + S_5 + S_4, \\
S_6 &= \int d^6x \sqrt{-g_6} \left( \frac{M_6^4}{2} R_6 - \Lambda_6 \right), \\
S_5 &= \int dx dy dz \sqrt{-g_5} [V_1(z) \delta(y) + V_2(z) \delta(y - \pi)] \\
&\quad + \int dx dy dz \sqrt{-\tilde{g}_5} [V_3(y) \delta(z) + V_4(y) \delta(z - \pi)], \tag{4.15}
\end{aligned}$$

onde  $S_4$  é dada pela Eq. (3.12). Utilizamos a aproximação do fluido perfeito a fim de descrever o conteúdo de matéria, em que  $p$  é a pressão do fluido e  $\rho$  a densidade de energia.

Após variar a ação, obtemos as equações de Einstein:

$$\begin{aligned}
&- M^4 \sqrt{-g_6} \left( R_{MN} - \frac{R_6}{2} g_{MN} \right) \\
&= \Lambda_6 \sqrt{-g_6} g_{MN} - \left[ \left( T_{\beta}^{\gamma} g_{\alpha\gamma} \right)_1 + \left( T_{\beta}^{\gamma} g_{\alpha\gamma} \right)_2 \right] \sqrt{-g_4} \delta_M^{\alpha} \delta_N^{\beta} + \\
&- \left[ \left( \tilde{T}_{\beta}^{\gamma} \tilde{g}_{\alpha\gamma} \right)_3 + \left( \tilde{T}_{\beta}^{\gamma} \tilde{g}_{\alpha\gamma} \right)_4 \right] \sqrt{-\tilde{g}_5} \delta_M^{\alpha} \delta_N^{\beta}, \tag{4.16}
\end{aligned}$$

onde  $T$  and  $\tilde{T}$  são os tensores de momento energia das 4-branas. As componentes do tensor momento energia são dadas por:

$$\begin{aligned}
\left( T_{\beta}^{\gamma} \right)_1 &= \text{diag} [-\rho_1(z) - \lambda_1(z), p_1(z) - \lambda_1(z), p_1(z) - \lambda_1(z), \\
&\quad p_1(z) - \lambda_1(z), 0, p_1(z) - \lambda_1(z)] \delta(y), \tag{4.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left( T_{\beta}^{\gamma} \right)_2 &= \text{diag} [-\rho_2(z) - \lambda_2(z), p_2(z) - \lambda_2(z), p_2(z) - \lambda_2(z), \\
&\quad p_2(z) - \lambda_2(z), 0, p_1(z) - \lambda_2(z)] \delta(y - \pi), \tag{4.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left( T_{\beta}^{\gamma} \right)_3 &= \text{diag} [-\rho_3(y) - \lambda_3(y), p_3(y) - \lambda_3(y), p_1(y) - \lambda_3(y), \\
&\quad p_3(y) - \lambda_3(y), 0, p_3(x_4) - \lambda_3(y)] \delta(z), \tag{4.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left( T_{\beta}^{\gamma} \right)_4 &= \text{diag} [-\rho_4(y) - \lambda_4(y), p_4(y) - \lambda_4(y), p_4(y) - \lambda_4(y), \\
&\quad p_4(y) - \lambda_4(y), 0, p_4(y) - \lambda_4(y)] \delta(z - \pi). \tag{4.20}
\end{aligned}$$

Substituindo a Eq. (4.14) na Eq. (4.16), encontramos as seguintes equações:

$$\begin{aligned}
&- M^4 \left[ -\frac{3AA''}{R^2} - \frac{4A^2 B \bar{B}}{r^2} - \frac{3A'^2}{R^2} - \frac{6A^2 \bar{B}^2}{r^2} + \frac{3\dot{V}^2}{V^2} \right] (Rr) \\
&= -\Lambda_B (B^2 A^2 r R) - [(\rho_1 + \lambda_1) \delta(y)] (BA^2 r) - [(\rho_2 + \lambda_2) \delta(y - \pi)] (BA^2 r)
\end{aligned}$$

$$- [(\rho_3 + \lambda_3) \delta(z)] (B^2 A^2 R) - [(\rho_4 + \lambda_4) \delta(z - \pi)] (B^2 A^2 R), \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} & - M^4 \left[ -\dot{V}^2 + \frac{3A'^2 V^2}{R^2} + \frac{3AA''V^2}{R^2} - \frac{6A^2 \bar{B}^2 V^2}{r^2} + \frac{4A^2 V^2 B \bar{B}}{r^2} - 2V\dot{V} \right] (Rr) \\ & = -\Lambda_6 (B^2 A^2 V^2 r R) - [(\lambda_1 - p_1) \delta(y)] (B A^2 V^2 r) \\ & - [(\lambda_2 - p_2) \delta(y - \pi)] (B A^2 V^2 r) - [(\lambda_3 - p_3) \delta(z)] (B^2 A^2 V^2 r) \\ & - [(\lambda_4 - p_4) \delta(z - \pi)] (B^2 A^2 V^2 r), \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} & - M^4 \left[ \frac{6R^2 \bar{B}^2}{r^2} + \frac{4R^2 B \bar{B}}{r^2} + \frac{6A'^2}{A^2} - \frac{3R^2 \dot{V}^2}{A^2 V^2} - \frac{3R^2 \ddot{V}}{A^2 V} \right] r \\ & = \Lambda_6 (B^2 R^2 r) + [(\lambda_3 - p_3) \delta(z)] (B^2 R^2) - [(\lambda_4 - p_4) \delta(z - \pi)] (B^2 R^2) \end{aligned} \quad (4.23)$$

e

$$\begin{aligned} & - M^4 \left[ -\frac{3r^2 \dot{V}^2}{A^2 B^2 V^2} + \frac{10\bar{B}^2}{B^2} + \frac{6r^2 A'^2}{A^2 B^2 R^2} + \frac{4r^2 A''}{A B^2 R^2} - \frac{3r^2 \ddot{V}}{A^2 B^2 V} \right] (BR) \\ & = \Lambda_B (B R r^2) + [(\lambda_1 - p_1) \delta(y)] (r^2) - [(\lambda_2 - p_2) \delta(z - \pi)] (r^2), \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde a linha corresponde diferenciação em relação a  $y$ , a barra diferenciação em relação a  $z$  e o ponto denota a diferenciação com respeito a coordenada  $t$ .

Das Eqs. (4.21) e (4.22) obtemos:

$$2(-M^4) r R (\dot{V}^2 - V\ddot{V}) = 0, \quad (4.25)$$

que ao resolver, encontramos

$$V(t) = e^{H_0 t} \quad (4.26)$$

em que  $H_0$  é uma constante de integração. Observamos que a forma da solução da Eq. (4.26) é independente da quantidade de dimensões extras.

Para determinar os fatores de dobra, substituímos a Eq. (4.26) em (yy) que se reduz

a,

$$\begin{aligned} (-M^4) r \left[ \frac{6R^2 \bar{B}^2}{r^2} + \frac{4R^2 B \bar{B}}{r^2} + \frac{6A'^2}{A^2} - \frac{3R^2 H_0^2}{A^2} - \frac{3R^2 H_0^2}{A^2} \right] & = (B^2 R^2) \\ & \times [\Lambda_B r + (\lambda_3 - p_3) \delta(z) + (\lambda_4 - p_4) \delta(z - \pi)]. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Iremos iniciar com o *bulk* da Eq. (4.27), em seguida reorganizando os termos:

$$\left(\frac{A'^2}{A^2} - \frac{R^2 H_0^2}{A^2}\right) = D^2 = -R^2 \left[ \frac{\bar{B}^2}{r^2} + \frac{2B\bar{B}}{3r^2} + \frac{B^2 \Lambda_B}{6M^4} \right], \quad (4.28)$$

em que  $D$  é uma constante arbitrária. Assim, podemos separar as equações:

$$\left(\frac{A'^2}{A^2} - \frac{R^2 H_0^2}{A^2}\right) = D^2, \quad (4.29)$$

$$-R^2 \left[ \frac{\bar{B}^2}{r^2} + \frac{2B\bar{B}}{3r^2} + \frac{B^2 \Lambda_B}{6M^4} \right] = -D^2. \quad (4.30)$$

O fator de dobra ao longo da coordenada  $y$  é consistente com a simetria  $Z_2$  o qual é obtido resolvendo a Eq. (4.31), com a solução dada por:

$$A(y) = \frac{RH_0}{D} \sinh(-D|y| + d_0), \quad (4.31)$$

em que  $d_0$  é a constante de integração.

Resolvendo a equação (4.32) encontramos o fator de dobra ao longo da coordenada  $z$ :

$$B(z) = \frac{\cosh(kz)}{\cosh(k\pi)}, \quad (4.32)$$

com

$$D = \frac{Rk}{r \cosh(k\pi)}, \quad k = r \sqrt{-\frac{\Lambda_B}{10M^4}}. \quad (4.33)$$

As soluções,  $A(y)$  e  $B(z)$  dão a geometria do *bulk*. A métrica (4.14) pode ser reescrita explicitamente como:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{\cosh^2(kz)}{\cosh^2(k\pi)} \frac{(RH_0)^2}{D^2} \sinh^2(-D|y| + d_0) [-dt^2 + e^{2H_0 t} \delta_{ij} dx^i dx^j] \\ &+ \frac{\cosh^2(kz)}{\cosh^2(k\pi)} R^2 dy^2 + r^2 dz^2. \end{aligned} \quad (4.34)$$

O elemento de linha (4.34) descreve um cenário inflacionário para 3-espaço plano em um espaço-tempo 6- $D$  duplamente deformado. A inflação deve-se ao fator (4.26) multiplicando as coordenadas homogêneas. Observamos que a forma funcional de  $B(z)$  não depende do tempo, ou seja, é idêntica da solução sem cosmologia.

Nós mostraremos agora como recuperar o limite estático [24]. Como é sabido, isto não pode ser obtido fazendo apenas  $H_0 \rightarrow 0$ . Inicialmente, note que a métrica dada pela Eq. (4.14) possui um fator de escala que é dependente do tempo multiplicando as coordenadas do 3-espaço plano com os fatores de dobra dados, respectivamente, pelas Eqs. (3.17) e (3.18).

Observe que

$$A(y) = \frac{RH_0}{2D} \left[ e^{(-D|y|+d_0)} - e^{(D|y|-d_0)} \right]. \quad (4.35)$$

Nós teremos assim:

$$\begin{aligned} \frac{RH_0}{2D} e^{d_0} &= 1, \\ e^{-d_0} &= \frac{RH_0}{2D}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Portanto, temos que  $d_0 \rightarrow \infty$  quando  $H_0 \rightarrow 0$ . Com isso obtemos

$$A(y) = e^{-D|y|} - \left( \frac{RH_0}{2D} \right)^2 e^{D|y|}. \quad (4.37)$$

Podemos então aplicar o limite

$$\lim_{H_0 \rightarrow 0} A(y) = e^{-D|y|}, \quad (4.38)$$

e

$$\lim_{H_0 \rightarrow 0} e^{H_0 t} = 1. \quad (4.39)$$

Dessa forma recuperamos o caso estático [24], onde a métrica é dada por (3.10).

#### 4.1 Tensões nas 3-Branas e Parâmetro de Hubble

Agora, iremos substituir as Eqs. (4.31), (4.32) e (4.33) na componente  $G_{zz}$  da equação de Einstein, logo após integrar sobre um intervalo infinitesimal próximo aos limites  $y = 0$ ,  $y = \pi$ , portanto, obtemos

$$\begin{aligned} [-p_1(z) + \lambda_1(z)]|_{y=0} &= 8M^4 \sqrt{-\frac{\Lambda_B}{10M^4}} \coth(d_0) \operatorname{sech}(kz) \\ [-p_2(z) + \lambda_2(z)]|_{y=\pi} &= -8M^4 \sqrt{-\frac{\Lambda_B}{10M^4}} \coth(-D\pi + d_0) \operatorname{sech}(kz). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Nós encontramos que as 4-branas localizadas em  $y = 0$  e  $y = \pi$ , suas tensões são dependentes das coordenadas  $y$ ,  $z$ , no limite estático quando  $p_1 = p_2 = 0$ ,  $d_0 \rightarrow \infty$  e  $H_0 \rightarrow 0$  as tensões tornam-se iguais e com sinais opostos.

Similarmente, usando as Eqs. (4.31), (4.32) e (4.33), substituindo na componente  $G_{44}$  e integrando sobre um intervalo infinitesimal em  $z = 0$ ,  $z = \pi$ , encontramos

$$[-p_3(y) + \lambda_3(y)]|_{z=0} = 0$$



$$[-p_4(y) + \lambda_4(y)]|_{z=\pi} = -8M^4 \sqrt{-\frac{\Lambda_B}{10M^4}} \tanh(-D\pi + d_0). \quad (4.41)$$

Cada uma das 3-branas encontra-se na região onde as duas 4-branas se interceptam. Suas tensões, pressões e densidades de energia são a soma desses parâmetros nas duas 4-branas. A 3-brana do MPPE está fixada em  $y = \pi, z = 0$  tem, portanto

$$[-p_{vis} + \lambda_{vis}] = -8M^4 \sqrt{-\frac{\Lambda_B}{10M^4}} \coth(-D\pi + d_0). \quad (4.42)$$

Em contra partida, a brana Planck é identificada como a 3-brana situada em  $y = 0, z = \pi$ . Como resultado, temos

$$-p_{Pl} + \lambda_{Pl} = 8M^4 \sqrt{-\frac{\Lambda_B}{10M^4}} [\coth(d_0) \operatorname{sech}(k\pi) - \tanh(k\pi)]. \quad (4.43)$$

Novamente, podemos recuperar as tensões na brana estática aplicando o limite estático:  $d_0 \rightarrow \infty$  e  $p_{Pl} = 0$ . A combinação das tensões e pressões nas 4-branas a cerca das 3-branas localizadas em  $y = 0, z = 0$  e em  $y = \pi, z = \pi$  podem ser obtidas de forma semelhante:

$$-p(0,0) + \lambda(0,0) = 8M^4 \sqrt{-\frac{\Lambda_B}{10M^4}} \coth(d_0), \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} & -p(\pi, \pi) + \lambda(\pi, \pi) \\ &= -8M^4 \sqrt{-\frac{\Lambda_B}{10M^4}} [\coth(-D\pi + d_0) \operatorname{sech}(k\pi) + \tanh(k\pi)]. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Agora, encontraremos o parâmetro Hubble da teoria e a sua dependência das coordenadas compactas. Fazendo uma transformação de coordenadas na equação (4.34), ela assume a seguinte forma:

$$ds_4^2 = -dt^2 + e^{2H(y,z)t} \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (4.46)$$

em que o parâmetro de Hubble efetivo é

$$H(y,z) = \sqrt{-\frac{\Lambda_B}{10M^4}} \operatorname{sech}(kz) \operatorname{csch}(-D|y| + d_0). \quad (4.47)$$

A brana visível é dada por ( $y = \pi, z = 0$ ), obtemos

$$H(\pi,0) = \sqrt{-\frac{\Lambda_B}{10M^4}} \operatorname{csch}\left(-\frac{Rk\pi}{r \cosh(k\pi)} + d_0\right), \quad (4.48)$$

e a brana Planck é ( $y = 0, z = \pi$ ), portanto

$$H(0,\pi) = \sqrt{-\frac{\Lambda_B}{10M^4}} \operatorname{sech}(k\pi) \operatorname{csch}(d_0). \quad (4.49)$$

A constante cosmológica que domina o universo atual tem equação de estado dada por:

$$\rho_{vis} = -p_{vis} = \Lambda_{vis} \quad (4.50)$$

Assim, a Eq.(4.42) terá a forma,

$$-\lambda_{vis} + \Lambda_{vis} = -8M^4 \sqrt{-\frac{\Lambda_B}{10M^4}} \coth(-D\pi + d_0). \quad (4.51)$$

Substituindo a equação (4.50) na expressão acima, nós encontramos

$$\lambda_{vis} + \Lambda_{vis} = -8M^4 \sqrt{-\frac{\Lambda_B}{10M^4}} \coth(-D\pi + d_0), \quad (4.52)$$

mostrando que a brana do MPPE possui tensão negativa dada por:

$$\lambda_{vis} = -\Lambda_{vis} - 8M^4 \sqrt{-\frac{\Lambda_B}{10M^4}} \coth(-D\pi + d_0). \quad (4.53)$$

Elevando ao quadrado a Eq.(4.53), para  $\Lambda_6 < 0$  e desprezando  $\Lambda_{vis}^2$ , obtemos

$$\Lambda_{vis} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\lambda_{vis}^2}{8M^4 \sqrt{-\frac{\Lambda_B}{10M^4}} \coth(-D\pi + d_0)} - 8M^4 \sqrt{-\frac{\Lambda_B}{10M^4}} \coth(-D\pi + d_0) \right]. \quad (4.54)$$

Observa-se de forma clara que a Eq.(4.54) generaliza a constante cosmológica  $4D$  efetiva na brana visível para o cenário dinâmico duplamente deformado que relaciona a brana e a constante cosmológica do *bulk*.

No cenário RS a constante cosmológica na brana visível é zero em razão do cancelamento exato entre correspondente constante cosmológica do *bulk* a tensão na brana [32]. Todavia, neste modelo a contribuição da constante cosmológica do *bulk* não contrabalança a tensão da brana visível, estimulando uma variação positiva na constante cosmológica de nosso universo. Por consequência, o nosso universo se expande exponencialmente devido a presença de uma pressão negativa.

## 5 CAMPOS BOSÔNICOS BACKGROUND COSMOLÓGICO

### 5.1 Solução Analítica para o Campo Escalar

O espectro de massa do campo escalar para o caso estático foi obtido na Ref. [28]. Algum tempo depois, uma solução analítica foi encontrada [30]. Nesta seção, consideramos a métrica cosmológica duplamente deformada dada pela Eq. (4.14) e encontramos uma solução analítica para o campo escalar. A ação do campo escalar sem massa é

$$S = \int d^6x \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{2} g^{MN} \partial_M \Phi \partial_N \Phi \right), \quad (5.1)$$

a equação de movimento é dada por:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_M [\sqrt{-g} g^{MN} \partial_N \Phi] = 0. \quad (5.2)$$

Para termos um entendimento mais aprofundado das contribuições das duas dimensões extras no espectro de massa, devemos decompor o campo escalar em modos de (KK)

$$\Phi(x^\mu, y, z) = \sum_{mn} \phi_{m,n}(x^\mu) \xi_{mn}(y) \chi_n(z) \quad (5.3)$$

por sua substituição na Eq. (5.2), daí encontramos

$$\frac{1}{V^3} \partial_\mu (V^3 \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\nu \phi_{mn}) - M_{mn}^2 \phi_{mn} = 0, \quad (5.4)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dz} \left( B^5 \frac{d\chi_p}{dz} \right) = -M_n^2 B^3 \chi_n, \quad (5.5)$$

e

$$\frac{1}{R^2} \frac{d}{dy} \left( A^4 \frac{d\xi_{mn}}{dy} \right) - M_n^2 A^4 \xi_{mn} = -M_{mn}^2 A^2 \xi_{mn}, \quad (5.6)$$

em que  $\tilde{g}_{00} = -1$ ,  $\tilde{g}_{ij} = V^2(t) \delta_{ij}$  é métrica dinâmica e  $M_{mn}^2$  é a massa na teoria efetiva.

Nós iniciaremos resolvendo a Eq. (5.5). Para tanto, usaremos o fator de dobra  $B(z)$  a fim de obter

$$\frac{d^2 \chi_n}{dz^2} + 5k \tanh(kz) \frac{d\chi_n}{dz} + [\text{sech}^2(kz) r^2 M_n^2 \cosh(k\pi)] \chi_n = 0. \quad (5.7)$$

Para alcançar a solução da equação acima, será feita a seguinte definição

$$\chi_n(z) = \text{sech}^{5/2}(kz) \tilde{\chi}_n(\omega), \quad \omega = \tanh(kz) \quad (5.8)$$

e substituindo na Eq. (5.7), nós obtemos

$$(1 - \omega^2) \frac{d^2 \tilde{\chi}_n}{d\omega^2} - 2\omega \frac{d\tilde{\chi}_n}{d\omega} + \left[ \alpha_n(\alpha_n + 1) - \frac{25}{4(1 - \omega^2)} \right] \tilde{\chi}_n = 0, \quad (5.9)$$

onde

$$\alpha_n = -\frac{1}{2} + \sqrt{4 + \frac{r^2 M_n^2 \cosh^2(k\pi)}{k^2}}. \quad (5.10)$$

A expressão (5.9) é a equação associada de Legendre que tem como solução

$$\chi_n(z) = A_1 P_n(z) + A_2 Q_n(z), \quad (5.11)$$

em que

$$P_n(z) = P_{\alpha_n}^{5/2}(\tanh(kz)) \operatorname{sech}^{5/2}(kz) \quad (5.12)$$

$$Q_n(z) = Q_{\alpha_n}^{5/2}(\tanh(kz)) \operatorname{sech}^{5/2}(kz). \quad (5.13)$$

Nós resolveremos agora a Eq. (5.6). Para isso, substituímos o fator de de dobra  $A(y)$  na Eq. (5.6) para obter

$$\frac{d^2 \xi_{mn}}{dy^2} - 4D \coth(\theta) \frac{d\xi_{mn}}{dy} + \left[ \operatorname{csch}^2(\theta) \frac{M_{mn}^2 D^2}{H_0^2} - M_j^2 R^2 \right] \xi_{mn} = 0, \quad (5.14)$$

onde

$$\theta = -Dy + d_0. \quad (5.15)$$

Executando as transformações

$$\xi_{mn}(y) = \operatorname{csch}^2(\theta) \tilde{\xi}_{mn}(\tau), \quad \tau = \coth(\theta), \quad (5.16)$$

encontramos

$$(1 - \tau^2) \frac{d^2 \tilde{\xi}_{mn}}{d\tau^2} - 2\tau \frac{d\tilde{\xi}_{mn}}{d\tau} + \left[ \gamma_{mn}(\gamma_{mn} + 1) - \frac{\lambda_n^2}{4(1 - \tau^2)} \right] \tilde{\xi}_{mn} = 0, \quad (5.17)$$

com

$$\lambda_n = \sqrt{4 + \frac{M_n^2 R^2}{D^2}} = \alpha_n + \frac{1}{2} \quad (5.18)$$

e

$$\gamma_{mn} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{M_{mn}^2}{H_0^2}}. \quad (5.19)$$

Se  $M_{mn}/H_0 > 3/2$ , então

$$\gamma_{mn} = -\frac{1}{2} + i\sigma_{mn}, \quad (5.20)$$

onde

$$\sigma_{mn} = \sqrt{\frac{M_{mn}^2}{H_0^2} - \frac{9}{4}}. \quad (5.21)$$

Como antes, a expressão (5.17) é a equação associada de Legendre com solução

$$\xi_{mn}(y) = B_1 P_{mn}(y) + B_2 Q_{mn}(y), \quad (5.22)$$

onde

$$P_{mn}(y) = \operatorname{Re} \left[ P_{\gamma_{mn}}^{\lambda_n}(\coth(-Dy + d_0)) \right] \operatorname{csch}^2(-Dy + d_0) \quad (5.23)$$

$$Q_{mn}(y) = \operatorname{Re} \left[ Q_{\gamma_{mn}}^{\lambda_n}(\coth(-Dy + d_0)) \right] \operatorname{csch}^2(-Dy + d_0). \quad (5.24)$$

Veja que encontramos uma solução geral e, portanto, não é necessário tomar uma ordem fixa. Isso ocorre devido ao fato de que ordem  $\alpha_n$  assume valores diferentes para distintos  $n$ , ou seja,  $M_n$  é dependente de  $\alpha_n$ .

Com nossa solução analítica, podemos obter o espectro de massa do sistema com grande acurácia. Antes, devemos aplicar as quatro condições de contorno nas Eqs. (5.11) e (5.22). Observe que essas condições são aplicadas tomando a derivada das mesmas que desaparecem em pontos fixos ( $z = 0, \pi$ ), and ( $y = 0, \pi$ ). Assim, temos as seguintes equações:

$$A_1 \bar{P}_n(0) + A_2 \bar{Q}_n(0) = 0, A_1 \bar{P}_n(\pi) + A_2 \bar{Q}_n(\pi) = 0, \quad (5.25)$$

$$B_1 P'_{mn}(0) + B_2 Q'_{mn}(0) = 0, B_1 P'_{mn}(\pi) + B_2 Q'_{mn}(\pi) = 0. \quad (5.26)$$

Soluções não triviais das equações acima são possíveis apenas se

$$\bar{P}_n(0) \bar{Q}_n(\pi) - \bar{Q}_n(0) \bar{P}_n(\pi) = 0 \quad (5.27)$$

$$P'_{mn}(0) Q'_{mn}(\pi) - Q'_{mn}(0) P'_{mn}(\pi) = 0. \quad (5.28)$$

Da Eq. (5.27) nós obtemos o parametro  $M_n$  e o usando na Eq. (5.28) obtemos o espectro de massa  $M_{mn}$  do campo escalar. Os valores dos parâmetros  $D$ ,  $k$  e  $d_0$  são obtidos através das Eqs. (4.33) e relação entre a massa de Planck na brana e o parâmetro de massa fundamental dada pela Eq. (3.70).

Analisando os valores numéricos na tabela, observamos que para um observador

na brana Tev os modos massivos são identificados como um espectro infinito de massas, no entanto, as massas possuem dois índices referentes as duas dimensões extras. Isto ocorre devido os modos massivos  $5D$  se dividirem em uma subtorre. Os modos massivos são determinados variando o índice  $m$  da dimensão  $z$  e fixando  $n$  o índice da dimensão  $y$ , observa-se as massas tornan-se quase estacionário. Para ilustrar claramente a dependência dos modos massivos em relação à constante de Hubble, produzimos a tabela 3.

Tabela 3: Relação espectro de massa com a constante de Hubble. A razão  $M_{mn}/H_0$  do campo escalar é mostrada na tabela.  $D = 11.52$ ,  $k = 0.25$ ,  $d_0 = 34$ .

$M_{mn}/H_0$					
$M_{1n}$	$M_{2n}$	$M_{3n}$	$M_{4n}$	$M_{5n}$	$M_{6n}$
10.56	6.10	2.75	2.64	2.62	2.63
22.57	7.65	7.60	21.21	22.13	22.86
42.06	10.89	14.29	42.41	42.52	42.98
56.06	21.18	35.16	63.28	62.36	63.61
77.04	77.04	77.04	77.17	77.27	77.49
84.03	84.03	84.03	84.19	84.28	84.46

Devemos ressaltar que estamos considerando o campo escalar sem massa. Portanto, o espectro de massa mostrado na tabela é uma correção ao encontrado para o caso estático. Da Eq. (5.26)

$$M_{mn} = H_0 \sqrt{\sigma_{mn}^2 + \frac{9}{4}} \quad (5.29)$$

e, portanto, esta correção é proporcional a  $H_0$ .

## 5.2 Solução Analítica Bóson de Calibre

Nesta seção, estudamos o bóson de calibre. O espectro de massa deste campo, para o caso estático, foi obtido aproximadamente na Ref. [29]. Algum tempo depois, uma solução analítica foi encontrada por [30, 31]. Aqui, consideramos a métrica cosmológica duplamente deformada dada pela Eq. (4.14) encontramos uma solução analítica para o campo de calibre neste *background*.

A ação para é dada por

$$S_g = \int d^6x \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{4} F_{MN} F^{MN} \right), \quad (5.30)$$

em que  $g$  é o determinante da métrica dada pela Eq. (4.14), e  $F_{MN} = \partial_M X_N - \partial_N X_M$  é o tensor

intensidade do campo de calibre. Variando a ação, obtemos a equação de movimento

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_M [\sqrt{-g} g^{MN} g^{LK} F_{NL}] = 0. \quad (5.31)$$

Uma solução particular para o sistema acima é dada por  $X_4 = X_5 = 0$ . Essa escolha elimina  $X_4$  e  $X_5$  da teoria efetiva na 3-brana. Executando a decomposição de (KK) no campo de calibre através da soma de modos

$$X_\sigma(x^\mu, y, z) = \sum_{qr} \tilde{X}_\sigma^{qr}(x^\mu) \rho_{qr}(y) \zeta_q(z), \quad (5.32)$$

e a substituindo na Eq. (5.31), é possível obter as seguintes equações

$$\frac{1}{V^3} \partial_\mu (V^3 \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\nu \tilde{X}_\sigma) - M_{qr}^2 \tilde{X}_\sigma = 0, \quad (5.33)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dz} \left( B^3 \frac{d\zeta_q}{dz} \right) = -M_q^2 B \zeta_q, \quad (5.34)$$

$$\frac{1}{R^2} \frac{d}{dy} \left( A^2 \frac{d\rho_{qr}}{dy} \right) - M_{qr}^2 A^2 \rho_{qr} = -M_{qr}^2 \rho_{pl}, \quad (5.35)$$

onde  $M_q$  é torre de KK na direção  $z$  e  $M_{qr}$  é a massa efetiva vista por um observador na 3-brana.

Para encontrar  $M_{qr}$ , temos que inicialmente obter  $M_q$  da Eq.(5.34), à qual será usada na Eq. (5.35) para determinar a massa efetiva. Vamos começar resolvendo a Eq (5.34). Primeiro substituímos o fator de dobra  $B(z)$  para obter

$$\frac{d^2 \zeta_q}{dz^2} + 3k \tanh(kz) \frac{d\zeta_q}{dz} + [\text{sech}^2(kz) r^2 M_q^2 \cosh(k\pi)] \zeta_q = 0. \quad (5.36)$$

Agora, fazendo uma mudança de coordenada

$$\zeta_q(z) = \text{sech}^{3/2}(\omega) F_l(\omega), \quad \omega = \tanh(kz). \quad (5.37)$$

para obter

$$\begin{aligned} & (1 - \omega^2) \frac{d^2 F_q}{d\omega^2} - 2\omega \frac{dF_q}{d\omega} + \\ & \left[ \mu_q(\mu_q + 1) - \frac{9}{4(1 - \omega^2)} \right] F_q = 0, \end{aligned} \quad (5.38)$$

em que

$$\mu_q = -\frac{1}{2} + \sqrt{1 + \frac{r^2 M_q^2 \cosh^2(k\pi)}{k^2}}. \quad (5.39)$$

A expressão (5.38) é denotada de equação associada de Legendre com a solução dada por

$$\zeta_l(z) = C_1 P_q(z) + C_2 Q_q(z), \quad (5.40)$$

onde

$$P_q(z) = P_{\mu_q}^{3/2}(\tanh(kz)) \operatorname{sech}^{3/2}(kz) \quad (5.41)$$

$$Q_q(z) = Q_{\mu_q}^{3/2}(\tanh(kz)) \operatorname{sech}^{3/2}(kz). \quad (5.42)$$

são funções de Legendre do segundo tipo.

Para resolver a Eq. (5.35) nós usamos o fator de dobra  $A(y)$  e fazemos à seguinte transformação

$$\rho_{qr}(y) = \operatorname{csch}(\theta) G_{qr}(\tau), \quad \tau = \coth(\theta), \quad (5.43)$$

para chegar na equação

$$(1 - \tau^2) \frac{d^2 G_{qr}}{d\tau^2} - 2\tau \frac{dG_{qr}}{d\tau} + \left[ \beta_{qr}(\beta_{qr} + 1) - \frac{\Omega_q^2}{(1 - \tau^2)} \right] G_{qr} = 0. \quad (5.44)$$

Na equação acima temos usado as definições

$$\Omega_q = \sqrt{1 + \frac{M_q^2 R^2}{D^2}} = \mu_q + \frac{1}{2} \quad (5.45)$$

e

$$\beta_{qr} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{M_{qr}^2}{H_0^2}}. \quad (5.46)$$

Além disso, se  $M_{qr} > H_0/2$ , então

$$\beta_{qr} = -\frac{1}{2} + i\sigma_{qr} \quad (5.47)$$

onde

$$\sigma_{qr} = \sqrt{\frac{M_{qr}^2}{H_0^2} - \frac{1}{4}}. \quad (5.48)$$

Novamente, temos essa Eq. (5.44) é a equação associada a Legendre. Portanto, chegamos à solução

$$\rho_{qr}(y) = D_1 P_{qr}(y) + D_2 Q_{qr}(y), \quad (5.49)$$

onde

$$P_{qr}(y) = \operatorname{Re} \left[ P_{\beta_{qr}}^{\Omega_q}(\coth(-Dy + d_0)) \right] \operatorname{csch}(-Dy + d_0) \quad (5.50)$$

$$Q_{qr}(y) = \operatorname{Re} \left[ Q_{\beta_{qr}}^{\Omega_q}(\coth(-Dy + d_0)) \right] \operatorname{csch}(-Dy + d_0). \quad (5.51)$$

Das soluções (5.40) and (5.49) nós obtemos o espectro de massa aplicando as



condições de contorno em  $(z = 0, \pi)$  e  $(y = 0, \pi)$ . Nós obtemos

$$C_1 \bar{P}_q(0) + C_2 \bar{Q}_q(0) = 0, C_1 \bar{P}_q(\pi) + C_2 \bar{Q}_q(\pi) = 0, \quad (5.52)$$

$$D_1 P'_{qr}(0) + B_2 Q'_{qr}(0) = 0, D_1 P'_{qr}(\pi) + D_2 Q'_{qr}(\pi) = 0. \quad (5.53)$$

Soluções não triviais das equações acima são possíveis apenas se

$$\bar{P}_q(0) \bar{Q}_q(\pi) - \bar{Q}_q(0) \bar{P}_q(\pi) = 0, \quad (5.54)$$

$$P'_{qr}(0) Q'_{qr}(\pi) - Q'_{qr}(0) P'_{qr}(\pi) = 0. \quad (5.55)$$

Tabela 4: Relação espectro de massa com a constante de Hubble. A razão  $M_{qr}/H_0$  do campo de calibre é mostrada na tabela.  $D = 11.52$ ,  $k = 0.25$ ,  $d_0 = 34$ .

$M_{pl}/H_0$					
$M_{1l}$	$M_{2l}$	$M_{3l}$	$M_{4l}$	$M_{5l}$	$M_{6l}$
0.895	0.889	0.881	0.877	0.876	0.875
14.72	15.05	15.49	15.98	15.56	17.17
28.34	28.52	28.73	28.99	29.27	29.60
63.14	63.21	63.32	63.44	63.56	63.70
77.10	77.18	77.26	77.35	77.46	77.58
84.11	84.16	84.23	84.31	84.42	84.53

Como no caso do campo escalar, Eq. (5.26), obtemos o parâmetro  $M_q$  e usando-o na Eq. (5.55) obtemos o espectro de massa  $M_{qr}$  do campo de calibre. Novamente encontramos uma dependência entre a massa efetiva do bóson de calibre e a constante de Hubble dada por

$$M_{qr} = H_0 \sqrt{\sigma_{qr}^2 + \frac{1}{4}}. \quad (5.56)$$

Vale ressaltar que devido a efeitos cosmológicos, todos os modos massivos para campo vetorial são mais leves quando comparados ao caso estático. Os valores numéricos dos modos massivos são mostrados na tabela (4).

### 5.3 SOLUÇÃO ANALÍTICA CAMPO DE KALB-RAMOND

Nós estudaremos o compartimento do campo de Kalb-Ramond (KR) ou 2-Forma (2F) no background cosmológico 6D. O nosso principal objetivo, aqui, é procurar compreender o espectro de massa desse campo na 3-brana que descreve o nosso universo homogêneo e isotrópico. O estudo de localização e outros aspectos relacionados ao campo KR é encontrado nas Refs. [60–66].

Nó iniciaremos com a ação em  $6D$  para o campo tensorial KR

$$S = \int d^6x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{12} H^{MNP} H_{MNP} \right], \quad (5.57)$$

a métrica do background é dada pela Eq. (4.14),  $H_{MNP} = \partial_{[M} C_{NP]}$  é o tensor de intensidade para o campo 2F. Variando a ação encontramos facilmente a equação de movimento a KR é:

$$\partial_M \left[ \sqrt{-g} g^{ML} g^{NQ} g^{PR} H_{LQR} \right] = 0. \quad (5.58)$$

Nós vamos considerar a seguinte escolha de gauge  $C_{M5} = \partial_\mu C^{\mu\nu} = 0$ . A equação acima pode ser reescrita explicitando as coordenadas das dimensões extras como:

$$\partial_\mu \partial^\mu C^{\nu\rho} + \frac{A^2}{R^2} (\partial_y \partial^y C^{\nu\rho}) + \frac{A^2 B}{r^2} \partial_z [B \partial^z C^{\nu\rho}] = 0. \quad (5.59)$$

Agora, fazendo a decomposição de KK:

$$C^{\nu\rho}(x^\mu, y, z) = \bar{C}^{\nu\rho}(x^\mu) U(y)_{nk} H(z)_b, \quad (5.60)$$

a equação de movimento torna-se

$$\partial_\mu \partial^\mu \bar{C}^{\nu\rho} - \left[ \frac{A^2}{R^2 U_{ab}} (\partial_y \partial^y U_{ab}) + \frac{A^2 B}{r^2 H_b} \partial_z (B \partial^z H_b) \right] \bar{C}^{\nu\rho} = 0, \quad (5.61)$$

após a redução dimensional, obtemos

$$(\square - M_{ab}^2) C^{\nu\rho} = 0. \quad (5.62)$$

em que  $M_{ab}$  é massa efetiva da teoria. Focaremos nossa atenção apenas para os modos massivos da teoria efetiva na 3-brana. Nós encontramos a equação:

$$-M_{ab}^2 = \frac{A^2}{R^2 U_{ab}} (\partial_y \partial^y U_{ab}) + \frac{A^2 B}{r^2 H_b} \partial_z (B \partial^z H_b). \quad (5.63)$$

Aplicando o método de separação de variáveis:

$$B^2 \frac{d^2 H_b}{dz^2} + B \frac{dB}{dz} \frac{dH_b}{dz} = -r^2 M_k^2 U_b, \quad (5.64)$$

$$\frac{d^2 U_{ab}}{dy^2} - M_b^2 R^2 U_{ab} = -\frac{M_{nk}^2 R^2 U_{ab}}{A^2}, \quad (5.65)$$

onde  $M_b^2$  é o modo massivo referente a dimensão  $z$ . A Eq. (5.64) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{d^2 H_b}{dz^2} + \tanh(kz) \frac{dH_b}{dz} + r^2 M_b^2 \text{sech}^2(kz) H_b = 0. \quad (5.66)$$

A fim de resolver a Eq. (5.66), devemos fazer uma mudança de variável:

$$\omega = \tanh(kz), \quad (5.67)$$

assim, a Eq. (5.65) torna-se,

$$(1 - \omega^2) \frac{d^2 \tilde{H}_b}{d\omega^2} - \omega \frac{d\tilde{H}_b}{d\omega} + \frac{r^2 M_b^2}{k^2} \tilde{H}_b = 0. \quad (5.68)$$

Redefinido a função

$$\tilde{H}_b = (1 - \omega^2)^{1/2} F(\omega), \quad (5.69)$$

e a substituindo na Eq. (5.68), obtemos

$$\tilde{H}_b(\omega) = (1 - \omega^2)^{1/2} \left[ P_{\lambda_b}^{1/2}(\omega) + Q_{\lambda_b}^{1/2}(\omega) \right], \quad (5.70)$$

na coordenada antiga, a solução é dada por

$$H_b(z) = (\text{sech}(kz))^{1/2} \left[ P_{\lambda_b}^{1/2}(\tanh(kz)) + Q_{\lambda_b}^{1/2}(\tanh(kz)) \right], \quad (5.71)$$

em que  $P_{\lambda_b}^{1/2}$  e  $Q_{\lambda_b}^{1/2}$  são funções de Legendre do segundo tipo, com

$$\lambda_b = -\frac{1}{2} + \frac{rM_b \cosh(k\pi)}{k}. \quad (5.72)$$

Seguindo o mesmo o mesmo procedimento feito na Eq. (5.64), a Eq. (5.65) torna-se

$$(1 - \tau^2) \frac{d^2 \tilde{U}_{ab}}{d\tau^2} - 2\tau \frac{d\tilde{U}_{ab}}{d\tau} - \left[ \frac{M_{ab}^2}{H_0^2} + \frac{16}{(1 - \tau^2)} \right] \tilde{U}_{ab} = 0, \quad (5.73)$$

cuja solução é:

$$U_{ab}(y) = D_1 P_{ab}(y) + D_2 Q_{ab}(y), \quad (5.74)$$

onde

$$P_{ab}(y) = \text{Re} \left[ P_{\gamma_{ab}}^{\zeta_b}(\coth(-Dy + d_0)) \right] \text{csch}^4(-Dy + d_0) \quad (5.75)$$

$$Q_{ab}(y) = \text{Re} \left[ Q_{\gamma_{ab}}^{\zeta_b}(\coth(-Dy + d_0)) \right] \text{csch}^4(-Dy + d_0), \quad (5.76)$$

onde

$$\zeta_b = \frac{RM_b}{D}, \quad (5.77)$$

e

$$\gamma_{ab} = -\frac{1}{2} + \sqrt{1 - \frac{16M_{ab}^2}{H_0^2}}. \quad (5.78)$$

Para calcular o espectro do campo KR com respeito a dimensão extra  $z$ , aplicaremos as condições

de contorno levando em consideração a continuidade da derivada das funções nos pontos do orbifolds. Agora, aplicando as condições de contorno ( $z = 0, \pi$ ) na solução (5.71), obtemos a seguinte equação

$$P_{(1+\lambda_b)}^{1/2}(0) Q_{(1+\lambda_b)}^{1/2}(\tanh(k\pi)) - P_{(1+\lambda_b)}^{1/2}(\tanh(k\pi)) Q_{(1+\lambda_b)}^{1/2}(0) + \tanh(k\pi) \left[ P_{\lambda_b}^{1/2}(0) Q_{(1+\lambda_b)}^{1/2}(\tanh(k\pi)) - P_{(1+\lambda_b)}^{1/2}(\tanh(k\pi)) Q_{\lambda_b}^{1/2}(0) \right] = 0, \quad (5.79)$$

que é uma equação transcendental cujas raízes são os  $\lambda_b$ . Antes de encontrar o espectro de massa, estabeleceremos a relação entre os parâmetros das funções de Legendre das duas soluções. Da equação (5.72) encontramos a relação

$$\lambda_b = -\frac{1}{2} + \sqrt{1 + \frac{M_b^2 R^2}{D^2}} \quad (5.80)$$

e usando a equação (5.18), obtemos

$$\zeta_b = \lambda_b + \frac{1}{2} \quad (5.81)$$

a qual mistura os termos de massa das duas soluções.

Além disso, se  $M_{ab} > H_0/4$ , então

$$\beta_{ab} = -\frac{1}{2} + i\sigma_{ab} \quad (5.82)$$

onde

$$\sigma_{ab} = \sqrt{\frac{16M_{ab}^2}{H_0^2} - 1}. \quad (5.83)$$

A partir da Eq. (5.74), podemos obter o espectro de massa aplicando as condições de contorno ( $y = 0, \pi$ ), temos que

$$\begin{aligned} D_1 P'_{ab}(0) + D_2 Q'_{ab}(0) &= 0, \\ D_1 P'_{ab}(\pi) + D_2 Q'_{ab}(\pi) &= 0. \end{aligned} \quad (5.84)$$

Soluções não triviais das equações acima são possíveis apenas se

$$P'_{ab}(0) Q'_{ab}(\pi) - Q'_{ab}(0) P'_{ab}(\pi) = 0. \quad (5.85)$$

Nós obtemos o parâmetro  $M_b$  da Eq. (5.79) e usando-o na Eq. (5.85) obtemos o espectro de massa  $M_{ab}$  da KR. Uma dependência entre a massa do campo KR e a constante de Hubble efetiva é encontrada dada por

$$M_{ab} = H_0 \sqrt{\sigma_{ab}^2 + \frac{1}{16}}. \quad (5.86)$$

Tabela 5: Relação espectro de massa com a constante de Hubble. A razão  $M_{ab}/H_0$  do campo de Kalb-Ramond é mostrada na tabela.  $D = 11.52$ ,  $k = 0.25$ ,  $d_0 = 34$ .

$M_{ab}/H_0$					
$M_{1b}$	$M_{2b}$	$M_{3b}$	$M_{4b}$	$M_{5b}$	$M_{6b}$
5.32	7.15	10.64	14.02	19.86	26.44
16.43	21.94	27.35	33.84	40.21	48.24
31.92	37.71	46.06	53.77	70.55	81.19
43.08	50.31	59.22	58.34	73.01	84.58
58.07	70.89	90.51	101.5	112.6	123.1
79.45	90.58	97.88	111.6	124.2	137.9

Nós encontramos a solução analítica para o campo KR que são funções associadas de Legendre (5.71) e (5.76). Em seguida aplicando as condições de contorno apropriadas nos *orbifolds* das duas dimensões extras, obtemos a equação para os modos massivos  $M_b$  em seguida o substituímos na equação transcendental (5.85), assim, calculamos numericamente razão do espectro de massa do campo KR com a constante de Hubble da teoria fundamental. Na tabela (5), estão os valores numéricos das torres de KK para o campo 2F.

## 6 CONCLUSÃO

Em resumo, usamos um espaço-tempo com cosmologia duplamente deformado para investigar os campos escalares e de calibre. Esse problema foi analisado para o caso estático nas Refs. [28–31]. Para um cenário com cosmologia (ver Ref [32]), o estudo dos campos bosônicos está faltando. Para os campos escalar e de calibre, descobrimos que as equações de movimento podem ser transformadas em uma equação associada de Legendre. Portanto, as soluções analíticas podem ser encontradas e são fornecidas nas Eqs. (5.11), (5.22), (5.40) e (5.49). Essas soluções e impondo as condições de contorno, obtemos o espectro de massa de ambos os campos. Alguns dos modos de massa são dados nas tabelas (3) e (4). Um resultado interessante é que em ambos os casos os modos massivos (Eqs. (5.29) e (5.86)), são dados por

$$M_{rs} = H_0 \sqrt{\sigma_{rs}^2 + \frac{n}{4}}, \quad (6.1)$$

onde  $n = 9$  ou  $n = 1$  para os campos escalar e de calibre, respectivamente. Portanto, a torre de massa no cenário cosmológico da Ref. [32], é proporcional ao parâmetro  $H_0$ . Também encontramos a torre de massa de KK para o campo de KR nesse *background* tabela (5)

Devemos apontar que na metodologia acima pode ser usado para investigar outros campos bosônicos em um *background* cosmológico multiplamente deformado. Por exemplo, o espectro de massa de gráviton foi encontrado para o caso estático na Ref. [57]. Outra questão que surge é como determinar o modo não massivo (modo zero) do campo de calibre na teoria efetiva. Para esse fim pode ser necessário a inclusão de algum tipo de acoplamento na ação (5.30) a fim de recuperar o fóton do MPPE na teoria efetiva [67].

Outra possibilidade é o estudo do campo spinorial. Em um futuro próximo, gostaríamos de apresentar soluções analíticas para esses campos em um fundo cosmológico multiplamente deformado. Por fim, uma possibilidade interessante é considerar o *backreaction* do campo sobre o cenário inflacionário.

## REFERÊNCIAS

- [1] GABADADZE, G. ICTP lectures on large extra dimensions. *ICTP Lect. Notes Ser.*, v. 14, p. 77–120, 2003.
- [2] KALUZA, T. Zum Unitätsproblem der Physik. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys. )*, v. 1921, p. 966–972, 1921.
- [3] KLEIN, O. Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity. (In German and English). *Z. Phys.*, v. 37, p. 895–906, 1926.
- [4] POLCHINSKI, J. *String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). ISBN 978-0-511-25227-3, 978-0-521-67227-6, 978-0-521-63303-1.
- [5] HORAVA, P.; WITTEN, E. Eleven-dimensional supergravity on a manifold with boundary. *Nucl. Phys.*, B475, p. 94–114, 1996.
- [6] HORAVA, P.; WITTEN, E. Heterotic and type I string dynamics from eleven-dimensions. *Nucl. Phys.*, B460, p. 506–524, 1996. [397(1995)].
- [7] ARKANI-HAMED, N.; DIMOPOULOS, S.; DVALI, G. R. The Hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. *Phys. Lett.*, B429, p. 263–272, 1998.
- [8] ANTONIADIS, I. et al. New dimensions at a millimeter to a Fermi and superstrings at a TeV. *Phys. Lett. B*, v. 436, p. 257–263, 1998.
- [9] DIENES, K. R.; DUDAS, E.; GHERGHETTA, T. Extra space-time dimensions and unification. *Phys. Lett.*, B436, p. 55–65, 1998.
- [10] RUBAKOV, V. A.; SHAPOSHNIKOV, M. E. Do We Live Inside a Domain Wall? *Phys. Lett. B*, v. 125, p. 136–138, 1983.
- [11] RANDALL, L.; SUNDRUM, R. A Large mass hierarchy from a small extra dimension. *Phys. Rev. Lett.*, v. 83, p. 3370–3373, 1999.
- [12] RANDALL, L.; SUNDRUM, R. An Alternative to compactification. *Phys. Rev. Lett.*, v. 83, p. 4690–4693, 1999.
- [13] DVALI, G. R.; GABADADZE, G.; PORRATI, M. 4-D gravity on a brane in 5-D Minkowski space. *Phys. Lett. B*, v. 485, p. 208–214, 2000.
- [14] DVALI, G.; GABADADZE, G.; SHIFMAN, M. Diluting cosmological constant in infinite volume extra dimensions. *Phys. Rev. D*, v. 67, p. 044020, 2003.
- [15] ODA, I. Bosonic fields in the string - like defect model. *Phys. Rev. D*, v. 62, p. 126009, 2000.
- [16] AGHABABAIE, Y. et al. Warped brane worlds in six-dimensional supergravity. *JHEP*, v. 09, p. 037, 2003.

- [17] BONELLI, G.; BOYARSKY, A. Six-dimensional topological gravity and the cosmological constant problem. *Phys. Lett.*, B490, p. 147–153, 2000.
- [18] KANTI, P.; MADDEN, R.; OLIVE, K. A. A 6-D brane world model. *Phys. Rev.*, D64, p. 044021, 2001.
- [19] GIOVANNINI, M.; MEYER, H. B. Six-dimensional Abelian vortices with quadratic curvature self interactions. *Phys. Rev.*, D64, p. 124025, 2001.
- [20] BURDMAN, G.; DOBRESCU, B. A.; PONTON, E. Six-dimensional gauge theory on the chiral square. *JHEP*, v. 02, p. 033, 2006.
- [21] FRÈRE, J. M. et al. Neutrino hierarchy and fermion spectrum from a single family in six dimensions: realistic predictions. *JHEP*, v. 08, p. 078, 2013.
- [22] SARKAR, U. *Particle and astroparticle physics*. New York, USA: Taylor & Francis, 2008. (Series in high energy physics, cosmology, and gravitation). ISBN 978-1-58488-931-1.
- [23] GOGBERASHVILI, M.; MIDODASHVILI, P.; SINGLETON, D. Fermion Generations from 'Apple-Shaped' Extra Dimensions. *JHEP*, v. 08, p. 033, 2007.
- [24] CHOUDHURY, D.; SENGUPTA, S. Living on the edge in a spacetime with multiple warping. *Phys. Rev.*, D76, p. 064030, 2007.
- [25] FLANAGAN, E. E.; TYE, S.; WASSERMAN, I. Cosmological expansion in the Randall-Sundrum brane world scenario. *Phys. Rev. D*, v. 62, p. 044039, 2000.
- [26] KIM, H. B.; KIM, H. D. Inflation and gauge hierarchy in Randall-Sundrum compactification. *Phys. Rev. D*, v. 61, p. 064003, 2000.
- [27] BINETRUY, P. et al. Brane cosmological evolution in a bulk with cosmological constant. *Phys. Lett. B*, v. 477, p. 285–291, 2000.
- [28] KOLEY, R.; MITRA, J.; SENGUPTA, S. Scalar Kaluza-Klein modes in a multiply warped braneworld. *EPL*, v. 91, n. 3, p. 31001, 2010.
- [29] DAS, A.; HUNDI, R. S.; SENGUPTA, S. Bulk Higgs and Gauge fields in a multiply warped braneworld model. *Phys. Rev.*, D83, p. 116003, 2011.
- [30] ARUN, M. T.; CHOUDHURY, D. Bulk gauge and matter fields in nested warping: I. the formalism. *JHEP*, v. 09, p. 202, 2015.
- [31] ARUN, M. T.; CHOUDHURY, D. Bulk gauge and matter fields in nested warping: II. Symmetry Breaking and phenomenological consequences. *JHEP*, v. 04, p. 133, 2016.
- [32] BANERJEE, N.; LAHIRI, S.; SENGUPTA, S. Cosmology in multiply warped braneworld scenario. *Int. J. Mod. Phys.*, A29, p. 1450069, 2014.
- [33] RIBEIRO, A. S.; ALENCAR, G.; LANDIM, R. R. Analytical solutions for bosonic fields in the cosmological multiply warped braneworld. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 36, n. 16, p. 2150110, 2021.
- [34] ZWIEBACH, B. *A first course in string theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006. ISBN 978-0-521-83143-7, 978-0-511-20757-0.



- [35] SEWARDS, T. V. A Sectorial approach to Kaluza-Klein theory. 9 2008.
- [36] OVERDUIN, J.; WESSON, P. Kaluza-klein gravity. *Physics Reports*, Elsevier BV, v. 283, n. 5-6, p. 303–378, Apr 1997. ISSN 0370-1573.
- [37] BLAU, M.; THIRRING, W. E.; LANDI, G. INTRODUCTION TO KALUZA-KLEIN THEORIES. In: *25th Internationale Universitatswochen fur Kernphysik (International School of Particle Physics: Concepts and Trends in Particle Physics)*. [S.l.: s.n.], 1986.
- [38] OVERDUIN, J. Paul Wesson and Space-Time-Matter Theory. 11 2018.
- [39] CHYBA, C. F. KALUZA-KLEIN UNIFIED FIELD THEORY AND APPARENT FOUR-DIMENSIONAL SPACE-TIME. *Am. J. Phys.*, v. 53, p. 863–872, 1985.
- [40] MAARTENS, R.; KOYAMA, K. Brane-World Gravity. *Living Rev. Rel.*, v. 13, p. 5, 2010.
- [41] RAYCHAUDHURI, S.; SRIDHAR, K. *Particle Physics of Brane Worlds and Extra Dimensions*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2016. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). ISBN 978-0-521-76856-6, 978-1-316-57283-2.
- [42] SHIROMIZU, T.; MAEDA, K.-i.; SASAKI, M. The Einstein equation on the 3-brane world. *Phys. Rev. D*, v. 62, p. 024012, 2000.
- [43] CSAKI, C.; ERLICH, J.; TERNING, J. The Effective Lagrangian in the Randall-Sundrum model and electroweak physics. *Phys. Rev. D*, v. 66, p. 064021, 2002.
- [44] GOLDBERGER, W. D.; WISE, M. B. Bulk fields in the Randall-Sundrum compactification scenario. *Phys. Rev. D*, v. 60, p. 107505, 1999.
- [45] GHERGHETTA, T.; POMAROL, A. Bulk fields and supersymmetry in a slice of AdS. *Nucl. Phys. B*, v. 586, p. 141–162, 2000.
- [46] CHANG, S. et al. Bulk standard model in the Randall-Sundrum background. *Phys. Rev. D*, v. 62, p. 084025, 2000.
- [47] DAVOUDIASHL, H.; HEWETT, J. L.; RIZZO, T. G. Bulk gauge fields in the Randall-Sundrum model. *Phys. Lett. B*, v. 473, p. 43–49, 2000.
- [48] POMAROL, A. Gauge bosons in a five-dimensional theory with localized gravity. *Phys. Lett. B*, v. 486, p. 153–157, 2000.
- [49] COHEN, A. G.; KAPLAN, D. B. Solving the hierarchy problem with noncompact extra dimensions. *Phys. Lett. B*, v. 470, p. 52–58, 1999.
- [50] CHODOS, A.; POPPITZ, E. Warp factors and extended sources in two transverse dimensions. *Phys. Lett. B*, v. 471, p. 119–127, 1999.
- [51] GREGORY, R. Nonsingular global string compactifications. *Phys. Rev. Lett.*, v. 84, p. 2564–2567, 2000.
- [52] OLASAGASTI, I.; VILENKIN, A. Gravity of higher dimensional global defects. *Phys. Rev. D*, v. 62, p. 044014, 2000.

- [53] ARKANI-HAMED, N. et al. Solving the hierarchy problem with exponentially large dimensions. *Phys. Rev. D*, v. 62, p. 105002, 2000.
- [54] NIHEI, T. Gravity localization with a domain wall junction in six-dimensions. *Phys. Rev. D*, v. 62, p. 124017, 2000.
- [55] CHAICHIAN, M.; KOBAKHIDZE, A. B. Large hierarchy from extra dimensions. *Phys. Lett. B*, v. 478, p. 299–306, 2000.
- [56] ISRAEL, W. Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity. *Nuovo Cim. B*, v. 44S10, p. 1, 1966. [Erratum: *Nuovo Cim. B* 48, 463 (1967)].
- [57] ARUN, M. T. et al. Graviton modes in multiply warped geometry. *Phys. Lett. B*, v. 746, p. 266–275, 2015.
- [58] WEINBERG, S. *Cosmology*. Oxford: Oxford Univ. Press, 2008.
- [59] WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. New York, NY: Wiley, 1972.
- [60] ALENCAR, G. et al. Antisymmetric Tensor Fields in Randall Sundrum Thick Branes. *Phys. Lett. B*, v. 693, p. 503–508, 2010.
- [61] ALENCAR, G. et al. Antisymmetric Tensor Fields in Codimension Two Brane-World. *EPL*, v. 93, n. 1, p. 10003, 2011.
- [62] ALENCAR, G.; JARDIM, I.; LANDIM, R.  $p$ -Forms non-minimally coupled to gravity in Randall–Sundrum scenarios. *Eur. Phys. J. C*, v. 78, n. 5, p. 367, 2018.
- [63] FU, C.-E. et al. Localization and mass spectrum of  $q$ -form fields on branes. *Phys. Lett. B*, v. 757, p. 180–186, 2016.
- [64] FU, C.-E. et al. New localization mechanism and Hodge duality for  $q$ -form field. *Phys. Rev. D*, v. 93, n. 6, p. 064007, 2016.
- [65] FU, C.-E. et al. Localization of  $q$ -form fields on  $AdS_{p+1}$  branes. *Phys. Lett. B*, v. 735, p. 7–11, 2014.
- [66] FU, C.-E. et al.  $q$ -Form fields on  $p$ -branes. *JHEP*, v. 10, p. 060, 2012.
- [67] ALENCAR, G. et al. Gauge field localization on the brane through geometrical coupling. *Physics Letters B*, Elsevier BV, v. 739, p. 125–127, Dec 2014. ISSN 0370-2693.