



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ANTÔNIO MATEUS BARRETO GONDIM

SÓLITONS DE RICCI GRADIENTE SHRINKING

FORTALEZA

2020

ANTÔNIO MATEUS BARRETO GONDIM

SÓLITONS DE RICCI GRADIENTE SHRINKING

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior

FORTALEZA

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

G635s Gondim, Antonio Mateus..
Sólitons de Ricci Gradiente Shrinking / Antonio Mateus. Gondim. – 2020.
49 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2020.

Orientação: Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior.

1. Sóliton de Ricci. 2. Fluxo de Ricci. 3. Estimativa de volume. I. Título.

CDD 510

ANTÔNIO MATEUS BARRETO GONDIM

SÓLITONS DE RICCI GRADIENTE SHRINKING

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Geometria Diferencial.

Aprovado em: 28 / 07 / 2020.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ernani de Sousa Ribeiro Júnior
(Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Rafael Jorge Pontes Diógenes
UNILAB

Prof. Dr. João Francisco da Silva Filho
UNILAB

Dedico este trabalho ao meu pai.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Agradeço ao meu orientador Prof. Ernani Ribeiro Jr pela sua paciência e profissionalismo.

Aos membros da banca, por terem aceito o convite para participar da banca de mestrado.

Aos meus pais e avós, pelo eterno cuidado e afeto. Ao meu irmão, pela sua honra e companhia.

A minha noiva pela sua cumplicidade e afeto.

A minha família e aos meus amigos da UFC.

RESUMO

Neste trabalho, temos como objetivo principal estudar a geometria dos sólitons de Ricci gradiente shrinking completos e não compactos. Sólitons de Ricci gradiente são soluções auto-similares do fluxo de Ricci e aparecem como singularidades do fluxo. Apresentaremos uma prova para a estimativa de crescimento da função potencial de um sóliton de Ricci gradiente shrinking completo e não compacto. Além disso, mostraremos que tais sólitons têm crescimento de volume no máximo polinomial. Ambos os resultados foram provados originalmente por Huai-Dong Cao e Detang Zhou em 2010.

Palavras-chave: sóliton de Ricci; fluxo de Ricci; estimativa de volume.

ABSTRACT

The main purpose of this work is to study the geometry of noncompact gradient shrinking Ricci solitons. Ricci solitons are self-similar solutions of the Ricci flow, which appear as singularities of the Ricci flow. We present a proof to the growth estimate of the potential function of a complete noncompact gradient shrinking Ricci soliton. In addition, we present that such solitons have at most polynomial volume growth. Both results were proved originally by Huai-Dong Cao and Detang Zhou in 2010.

Keywords: Ricci soliton; Ricci flow; volume growth estimate.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	PRELIMINARES	11
2.1	Geodésicas	11
2.2	Conceitos básicos sobre operadores	12
2.3	Curvatura	15
2.4	Varição do Comprimento de Arco	21
2.5	Identidade de Green, Fórmula da Co-área	25
3	SÓLITONS DE RICCI	27
3.1	Definições e exemplos em sólitons de Ricci gradiente	27
3.2	Sólitons de Ricci gradiente <i>shrinking</i>	32
3.3	Comportamento assintótico da função potencial	33
3.4	Estimativa de volume para sólitons de Ricci <i>shrinking</i>	42
3.4.1	<i>Prova do Teorema 3.2</i>	45
4	CONCLUSÃO	48
	REFERÊNCIAS	49

1 INTRODUÇÃO

Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa. Dizemos que (M^n, g) é um sóliton de Ricci se existe um campo de vetores $V \in \mathfrak{X}(M)$ e uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$ satisfazendo a equação

$$Ric + \frac{1}{2}(\mathcal{L}_V g) = \lambda g, \quad (1)$$

onde Ric é o tensor curvatura de Ricci e \mathcal{L}_V é a derivada de Lie relativa ao campo vetorial $V \in \mathfrak{X}(M)$, ambas calculadas na métrica g .

Os sólitons de Ricci podem ser vistos como generalizações das variedades de Einstein. Mais precisamente, se considerarmos $V \in \mathfrak{X}(M)$ como um campo Killing ou um campo de vetores identicamente nulo, teremos que

$$Ric = \lambda g,$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, que é precisamente a equação que define as variedades de Einstein.

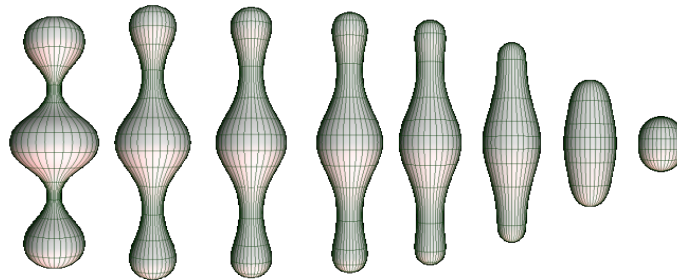
Se existir $f \in C^\infty(M)$ tal que $V = \nabla f$ em M^n , então (M^n, g) é dito sóliton de Ricci gradiente, e neste caso a equação do sóliton de Ricci, como veremos no Capítulo 3, torna-se

$$Ric + \nabla^2 f = \lambda g.$$

Os sólitons de Ricci aparecem na teoria do Fluxo de Ricci, que foi introduzido por Richard Hamilton em 1982, no artigo (8). O fluxo de Ricci é dado pela seguinte equação de evolução

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2Ric(g(t)) \quad \text{com} \quad g(0) = g_0.$$

Tal fluxo foi utilizado por Hamilton e vários outros matemáticos, incluindo G. Perelman, para estudar variedades compactas de dimensão três com curvatura de Ricci positiva. Em particular, foi a ferramenta utilizada por Perelman para provar a célebre “Conjectura de Poincaré”. O fluxo de Ricci modifica uma métrica inicial dada afim de obter uma nova métrica que tenha curvatura constante, ou seja, um processo que busca uniformizar a curvatura de uma variedade.



No contexto do Fluxo de Ricci, os sólitons são soluções auto-similares do fluxo, ou seja, soluções invariantes por difeomorfismo e scalings. Enders, Müller e Topping mostraram em 2011 que os *blow-ups* em torno de um ponto da singularidade do tipo I do fluxo de Ricci

convergem para um s3liton de Ricci gradiente shrinking.

Nesta disserta33o, estudaremos os s3litos de Ricci gradiente shrinking completos e n3o compactos. Apresentaremos primeiramente uma estimativa de crescimento da fun33o potencial do s3liton de Ricci gradiente shrinking provado por Cao e Zhou (3). Mais precisamente, discutiremos o seguinte resultado.

Teorema 1.1. *Seja (M^n, g, f) um s3liton de Ricci gradiente shrinking completo e n3o compacto. Ent3o a fun33o potencial f satisfaz*

$$\frac{(r(x) - c)^2}{4} \leq f(x) \leq \frac{(r(x) + c)^2}{4},$$

onde $r(x) = d(x_0, x)$ 3a fun33o dist3ncia para um ponto fixado x_0 em M e c 3a uma constante positiva que s3o depende da dimens3o n e da geometria da bola unit3ria centrada em x_0 , $B_{x_0}(1)$.

O segundo resultado que ser3 discutido neste trabalho 3a uma estimativa superior para o crescimento de volume das bolas geod3sicas de um s3liton de Ricci shrinking completo e n3o compacto. Tal estimativa 3a motivada pelo teorema cl3ssico de compara33o de volume de Bishop, que garante que as bolas geod3sicas das variedades completas e n3o-compactas de curvatura de Ricci n3o negativa t3m crescimento no m3ximo polinomial. Agora podemos enunciar o segundo resultado que ser3 discutido neste trabalho.

Teorema 1.2. *Sejam (M^n, g, f) um s3liton de Ricci gradiente, shrinking completo e n3o compacto, e x_0 um ponto em M^n . Ent3o, existe uma constante positiva $C_1 > 0$, tal que*

$$\text{Vol}(B_{x_0}(r)) \leq C_1 r^n$$

para $r > 0$ suficientemente grande.

O resultado acima tamb3m foi provado por Cao e Zhou em (3) e poder3 ser visto como uma aplica33o do Teorema 1.1. Observe que tal estimativa tamb3m pode ser considerada uma obstru33o para a exist3ncia de novos exemplos de s3liton de Ricci gradiente, shrinking completo e n3o compacto.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo, inicialmente, revisaremos algumas ferramentas básicas de geometria Riemanniana, assumindo já haver familiaridade com fatos introdutórios de variedades diferenciáveis, métricas Riemannianas, derivadas covariantes e geodésicas. No final do capítulo, as últimas seções serão destinadas ao estudo de equações que serão amplamente utilizadas no Capítulo 3, como por exemplo, as variações dos comprimentos de arco, fórmula da Co-área e a Identidade de Green.

2.1 Geodésicas

Geodésicas são curvas em uma variedade Riemanniana com aceleração nula ao longo do tempo. Esta noção é possível através da definição da derivada covariante ao longo de uma curva, como iremos explicitar nesta seção.

Definição 2.1. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana, com conexão Levi-Civita ∇ e $I \subset \mathbb{R}$ intervalo compacto. Uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow M$ é dita geodésica no ponto $t_0 \in I$ se*

$$\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$$

em t_0 . Se γ é geodésica para todo $t \in I$, então γ é dita uma geodésica.

Observe que, nas mesmas hipóteses da definição anterior, temos

$$\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma(t)}{dt} \right) := \nabla_{\frac{d\gamma(t)}{dt}} \frac{d\gamma(t)}{dt}.$$

Definiremos, agora, a noção de distância em uma variedade Riemanniana.

Definição 2.2. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana. A função distância $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por*

$$d(p, q) = \inf \{ L(\gamma); \gamma \text{ curva suave ligando } p, q \in M \},$$

onde L corresponde ao comprimento da curva.

Tendo em vista a Definição 2.2, dizemos que uma curva suave é uma geodésica minimizante se for uma geodésica e for a curva suave de menor comprimento ligando os pontos correspondentes as suas extremidades. Neste contexto, temos a seguinte proposição, cuja prova pode ser encontrada em (6).

Proposição 2.1. *Sendo (M^n, g) uma variedade Riemanniana munida com a distância $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, teremos que (M^n, d) é um espaço métrico. Mais precisamente, temos que:*

- (a) $d \geq 0$;
- (b) para todos $p, q \in M$ $d(p, q) = 0$ se, e somente se, $p = q$;
- (c) para todos $p, q, r \in M$, $d(p, q) + d(q, r) \geq d(p, r)$.

A seguinte definição será recorrente ao longo deste trabalho.

Definição 2.3. Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é dita geodesicamente completa se, dados $p, q \in M$, existe uma geodésica minimizante ligando p a q .

De posse da Definição 2.3, veja que o comprimento de uma geodésica minimizante é igual a distância entre os pontos das suas extremidades.

Agora apresentaremos o Teorema de Hopf-Rinow que mostra equivalências para o conceito de completude em uma variedade Riemanniana. A prova deste resultado pode ser encontrada em (6).

Teorema 2.1 (Hopf-Rinow). Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana e p um ponto fixado em M . Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) Os conjuntos limitados e fechados de M^n são compactos.
- (b) exp_p está definida em todo T_pM .
- (c) M^n é completa como espaço métrico.
- (d) M^n é geodesicamente completa.

Ao longo deste trabalho, devido ao Teorema 2.1, sempre que dissermos que uma variedade Riemanniana é completa, estaremos nos referindo ao fato de ser geodesicamente completa.

Tendo em vista o conteúdo que será abordado a seguir, para uma maior base nos conceitos de função exponencial, é importante consultar (6).

Dado $p \in M$, seja a aplicação exponencial

$$exp_p : U \subset T_pM \rightarrow M,$$

dada por $exp_p(v) = exp(p, v)$, onde U é um aberto de T_pM , tal que a aplicação exponencial é um difeomorfismo restrita a este aberto, onde $exp(p, v) = \gamma(|v|, p, \frac{1}{|v|}v)$, sendo $\gamma : I \rightarrow M$ geodésica definida numa vizinhança de p . Dessa forma, definimos a bola normal, ou bola geodésica, de raio $\varepsilon > 0$ e centrada em $p \in M$, como sendo $exp_p(B_\varepsilon(0))$, onde $B_\varepsilon(0)$ está compactamente contida em V e $exp_p(0) = p$.

Geometricamente, dado $v \in B_\varepsilon(0) \subset T_pM$, $exp_p(v)$ é o ponto na variedade obtido percorrendo um comprimento de $|v|$, ao longo da única geodésica que passa por p , com velocidade igual a $\frac{v}{|v|}$ calculada no ponto p .

2.2 Conceitos básicos sobre operadores

Ao longo deste trabalho, (M^n, g) será tratado como uma variedade Riemanniana de dimensão n com métrica g e com conexão Levi Civita ∇ . O anel comutativo das funções suaves na variedade será denotado por $C^\infty(M)$.

Nesta seção, discutiremos alguns conceitos e resultados importantes sobre curvatura. Neste sentido, inicialmente, definiremos os operadores que serão amplamente utilizados nas próximas seções, assumimos que o leitor tenha conhecimentos básicos sobre tensores, que eventualmente, podem ser consultados em (12).

Dada uma função suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, definiremos o operador gradiente de f da seguinte forma.

Definição 2.4. Sendo $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, definimos o gradiente de f como sendo $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$, tal que

$$g(\nabla f, X) = \nabla_X f,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Em particular, o operador gradiente possui as seguintes propriedades, onde os detalhes da demonstração podem ser vistos em (6).

Proposição 2.2. Sejam $f, h \in C^\infty(M)$. Então:

- (1) $\nabla(f + h) = \nabla f + \nabla h$.
- (2) $\nabla(fh) = h\nabla f + f\nabla h$.

Além disso, temos a seguinte proposição.

Proposição 2.3. Seja $f \in C^\infty(M)$. Dados $p \in M$, $v \in T_p M$ e uma curva suave $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Então

$$g(\nabla f, v) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)|_{t=0}.$$

Em particular, sendo p um ponto crítico, então $\nabla f(p) = 0$.

Observe que sob as mesmas condições da proposição anterior, se $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave, então pela Proposição 2.3, temos que

$$\begin{aligned} g(\nabla(\psi \circ f), v) &= \frac{d}{dt}(\psi \circ f \circ \gamma)(t)|_{t=0} \\ &= \psi'(f(p)) \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)|_{t=0} \\ &= (\psi' \circ f)g(\nabla f, v)(p). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\nabla(\psi \circ f) = \psi' \nabla f.$$

Em coordenadas locais, temos a expressão do gradiente de uma função suave definida na variedade, pela seguinte proposição, cuja demonstração pode ser vista em (1).

Proposição 2.4. Sejam $f \in C^\infty(M)$ e $U \subset M$ uma vizinhança coordenada, com campos coordenados $\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n$. Então, temos a representação do gradiente de f em coordenadas, dada por

$$\nabla f = g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^l}.$$

Definiremos agora o divergente de um campo de vetores.

Definição 2.5. Seja X um campo de vetores diferenciável em M^n . O **divergente** de X é uma função $\operatorname{div}(X) : M \rightarrow \mathbb{R}$, dada, para $p \in M$ e para um referencial local ortonormal definido

numa vizinhança de p , por:

$$\operatorname{div}(X) = \sum_{i=1}^n g(\nabla_{X_i} X, X_i).$$

É importante destacar que o divergente de um $(1, k)$ -tensor é o $(0, k)$ -tensor obtido por

$$\operatorname{div}T(v_1, \dots, v_k) := \operatorname{tr}\{w \rightarrow (\nabla_w)T(v_1, \dots, v_k)\} = \sum_{i=1}^n g((\nabla_{X_i} T)(v_1, \dots, v_k), X_i),$$

onde $\{X_i\}_{i=1}^n$ é uma base ortonormal de $T_p M$ e p é um ponto fixado de M^n .

Agora definiremos o **Laplaciano** de uma função suave.

Definição 2.6. *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O Laplaciano de f é a função definida por $\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$.*

A seguir temos o conceito de **Hessiana**.

Definição 2.7. *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e p um ponto de M^n . A Hessiana de f é o campo de operadores lineares $(\operatorname{Hess} f)_p : T_p M \rightarrow T_p M$, definido por*

$$(\operatorname{Hess} f)_p(v) = \nabla_v \nabla f$$

para $v \in T_p M$.

Observe que a Hessiana também pode ser definida como uma forma bilinear simétrica

$$\operatorname{Hess} f(X, Y) = g((\nabla_X \nabla f), Y),$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Em outras palavras, a Hessiana é auto-adjunta.

Em coordenadas locais em torno de um ponto p fixado da variedade M^n , sendo $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=1}^n$ os campos de vetores coordenados nesta vizinhança, podemos expressar a Hessiana da seguinte forma

$$\nabla_i \nabla_j f := \operatorname{Hess} f\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \left\langle \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla f\right), \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle.$$

Agora mostraremos que o traço da Hessiana é igual ao Laplaciano

Proposição 2.5. *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então,*

$$\Delta f = \operatorname{tr}(\operatorname{Hess} f).$$

Demonstração. Como a Hessiana é um tensor, basta provarmos o resultado em um ponto p de M^n . Nesse sentido, dado $p \in M$, seja $U \subset M$ uma vizinhança coordenada em torno de p onde esteja definido um referencial ortonormal $\{X_1, \dots, X_n\}$. Portanto, temos que

$$\begin{aligned}
tr(Hess f)_p &= \sum_{k=1}^n g((Hess f)_p(X_k), X_k)(p) \\
&= \sum_{k=1}^n g(\nabla_{X_k} \nabla f, X_k)(p) \\
&= div(\nabla f) = \Delta f.
\end{aligned} \tag{2}$$

□

2.3 Curvatura

Nesta seção falaremos dos tensores de curvatura. Essas noções generalizam as definições de curvatura vistas em geometria diferencial no \mathbb{R}^3 , que possuem um importante papel nos estudos de curvas e superfícies.

As curvaturas seccional, de Ricci e escalar são oriundas do tensor de curvatura de Riemann, que por sua vez, intuitivamente, mede o quão uma dada variedade Riemanniana se difere do espaço Euclidiano. Neste sentido, temos a seguinte definição.

Definição 2.8. *Seja (M^n, g) variedade Riemanniana. A curvatura de Riemann é o $(1, 3)$ -tensor $Rm : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dado por*

$$Rm(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

para todo $X, Y, Z \in M$.

O tensor curvatura de Riemann também pode ser interpretado como sendo um tensor

$$Rm : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M),$$

dado por

$$Rm(X, Y, Z, W) = g(Rm(X, Y)Z, W).$$

A proposição a seguir será importante ao longo deste trabalho e sua prova pode ser encontrada em (6) e (11).

Proposição 2.6. *O tensor curvatura de Riemann Rm satisfaz as seguintes propriedades:*

- (1) $Rm(X, Y, Z, W) = -Rm(Y, X, Z, W) = Rm(Y, X, W, Z)$
- (2) $Rm(X, Y, Z, W) = Rm(Z, W, X, Y)$.
- (3) *Primeira Identidade de Bianchi:*

$$Rm(X, Y)Z + Rm(Y, Z)X + Rm(Z, X)Y = 0.$$

(4) *Segunda Identidade de Bianchi:*

$$(\nabla_Z Rm)(X, Y, W) + (\nabla_X Rm)(Y, Z, W) + (\nabla_Y Rm)(Z, X, W) = 0.$$

Prosseguindo, definiremos a noção de curvatura seccional, que é principalmente motivada pelo conceito de curvatura Gaussiana de uma superfície no \mathbb{R}^3 . Mais precisamente, temos a seguinte definição.

Definição 2.9. *Seja $P \subset T_p M$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente. Definimos a curvatura seccional do plano P , no ponto $p \in M$, por*

$$sec(X, Y) := \frac{g(Rm(X, Y)Y, X)}{|X|^2|Y|^2 - g(X, Y)^2},$$

onde $X, Y \in P$ são dois vetores linearmente independentes de $T_p M$. Destacamos que o valor da curvatura não dependerá da escolha dos vetores que geram P .

Definiremos agora as demais curvaturas comentadas acima.

Definição 2.10. *O tensor curvatura de Ricci*

$$Ric : \mathfrak{X}(M)^2 \rightarrow C^\infty(M),$$

definido como sendo o traço do tensor curvatura de Riemann, isto é,

$$Ric(Z, X) = tr\{W \rightarrow Rm(W, Z)X\}$$

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Considerando o conjunto de vetores ortonormais $\{X_k\}_{k=1}^n$ em $T_p M$, temos que dados $v, w \in T_p M$, então

$$Ric(v, w) = \sum_{k=1}^n g(Rm(X_k, v)w, X_k). \quad (3)$$

Essa expressão nos diz, em particular, que o tensor de Ricci é um tensor bilinear simétrico. Destacamos ainda que ele pode ser visto como um $(1, 1)$ -tensor simétrico

$$Ric(v) = \sum_{k=1}^n Rm(v, X_k)X_k.$$

O traço do tensor de Ricci nos fornece a função curvatura escalar.

Definição 2.11. *A curvatura escalar é uma função $R : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$R = tr Ric.$$

Em uma base ortonormal, como anteriormente, temos

$$\begin{aligned}
R &= \sum_{i=1}^n g(\text{Ric}(X_i), X_i) \\
&= \sum_{k,i=1}^n g(\text{Rm}(X_i, X_k)X_k, X_i) \\
&= 2 \sum_{k<i} g(\text{Rm}(X_i, X_k)X_k, X_i) \\
&= 2 \sum_{k<i} \text{sec}(X_i, X_j). \tag{4}
\end{aligned}$$

Observe, ainda, que expressando as curvaturas citadas acima em coordenadas, teremos que a curvatura de Riemann, a curvatura de Ricci e a curvatura escalar são, respectivamente, dadas por:

1. $R_{ijkl} = \text{Rm}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l}\right) = g\left(\text{Rm}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l}\right)$;
2. $R_{il} = g^{jk}R_{ijkl}$, que é o traço do Item 1;
3. $R = g^{ik}R_{ik}$, que é o traço do Item 2.

Para o que segue é importante comentarmos que a métrica g em uma variedade Riemanniana (M^n, g) é paralela, isto é,

$$\begin{aligned}
\nabla_k g_{ij} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} g_{ij} \\
&= \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \\
&= 0. \tag{5}
\end{aligned}$$

Provaremos agora a seguinte proposição, que faz uso do fato da métrica ser paralela e da Proposição [2.6](#)

Proposição 2.7. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana. Então valem as seguintes identidades:*

- (1) $g^{im}\nabla_m R_{ijkl} = (\text{div Rm})_{jkl} = \nabla_k R_{jl} - \nabla_l R_{jk}$.
- (2) $g^{im}\nabla_m R_{ik} = \nabla_m R_{mk} = \frac{1}{2}(\nabla_k R)$.

Prova. Pela segunda identidade de Bianchi, temos que

$$\nabla_m R_{ijkl} + \nabla_k R_{ijlm} + \nabla_l R_{ijmk} = 0.$$

Tomando o traço em i e m obtemos

$$g^{im}(\nabla_m R_{ijkl} + \nabla_k R_{ijlm} + \nabla_l R_{ijmk}) = 0.$$

Agora, usamos o fato da métrica ser paralela, isto é (5), para concluir que

$$\nabla_m g^{im} R_{ijkl} + \nabla_k g^{im} R_{ijlm} + \nabla_l g^{im} R_{ijmk} = 0. \quad (6)$$

Além disso, pelo Item (1) da Proposição 2.6 e a Definição 2.7 obtemos

$$\nabla_m g^{im} R_{ijkl} + \nabla_k g^{im} R_{ijlm} + \nabla_l g^{im} R_{ijmk} = \operatorname{div}(Rm)_{jkl} - \nabla_k g^{im} R_{jilm} + \nabla_l g^{im} R_{ijmk}, \quad (7)$$

isto é,

$$(\operatorname{div} Rm)_{jkl} - \nabla_k R_{jl} + \nabla_l R_{jk} = 0,$$

e portanto, obtemos o resultado desejado.

Para provar o Item (2) usaremos, primeiramente, o primeiro item para concluir que

$$g^{im} \nabla_m R_{ijkl} = \nabla_k R_{jl} - \nabla_l R_{jk}.$$

Tomando o traço dessa expressão em j e l , concluimos que

$$g^{jl} g^{im} \nabla_m R_{ijkl} = g^{im} \nabla_m R_{ik}.$$

Agora, tomando o traço com respeito a j e l chegamos a

$$\begin{aligned} g^{jl} \nabla_k R_{jl} - g^{jl} \nabla_l R_{jk} &= \nabla_k g^{jl} R_{jl} - g^{jl} \nabla_l R_{jk} \\ &= \nabla_k R - g^{jl} \nabla_l R_{jk} = \nabla_k R - g^{im} \nabla_m R_{ik}. \end{aligned}$$

Organizando os termos obtemos

$$\nabla_k R - g^{im} \nabla_m R_{ik} = g^{im} \nabla_m R_{ik}.$$

Isto conclui a demonstração. □

O próximo lema, encontrado em (6), será usado na prova do Teorema 2.2, que será a fórmula de Bochner, ferramenta muito poderosa em geometria.

Lema 2.1. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana e $p \in M$. Então, existem uma vizinhança $U \subset M$, tal que $p \in U$, e um referencial ortonormal definido em U , dado por $\{X_i\}_{i=1}^n$, onde,*

no ponto p , temos que $\nabla_{X_i} X_j(p) = 0$, para todos $i, j = 1, \dots, n$.

Agora, enunciaremos a fórmula de Bochner.

Teorema 2.2 (Fórmula de Bochner). *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana. Então, para todo $f \in C^\infty(M)$, temos*

$$\frac{1}{2} \Delta |\nabla f|^2 = |\nabla^2 f|^2 + \langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle + Ric(\nabla f, \nabla f),$$

onde $\nabla^2 f$ também representa a Hessiana de f .

Prova. Fixado $p \in M$, seja $\{X_i\}_{i=1}^n$ referencial ortonormal local, suave, definido numa vizinhança contendo p , tal que $\nabla_{X_i} X_j(p) = 0$, o que é possível devido ao Lema 2.1. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta |\nabla f|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n X_i X_i \langle \nabla f, \nabla f \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n X_i \langle \nabla_{X_i} \nabla f, \nabla f \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n X_i Hess f(X_i, \nabla f) \\ &= \sum_{i=1}^n X_i Hess f(\nabla f, X_i), \end{aligned} \tag{8}$$

onde (8) é devido ao fato da Hessiana ser simétrica. E, assim, continuando de (8), temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n X_i Hess f(\nabla f, X_i) &= \sum_{i=1}^n X_i \langle \nabla_{\nabla f} (\nabla f), X_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n (\langle \nabla_{X_i} \nabla_{\nabla f} \nabla f, X_i \rangle + \langle \nabla_{\nabla f} \nabla f, \nabla_{X_i} X_i \rangle) \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{X_i} \nabla_{\nabla f} \nabla f, X_i \rangle. \end{aligned}$$

A última igualdade é devido a condição imposta ao referencial local, que é $\nabla_{X_i} X_i(p) = 0$. Continuando, observe que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{X_i} \nabla_{\nabla f} \nabla f, X_i \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle R(X_i, \nabla f) \nabla f, X_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{\nabla f} \nabla_{X_i} \nabla f, X_i \rangle \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{[X_i, \nabla f]} \nabla f, X_i \rangle. \end{aligned}$$

Na última igualdade, usamos o fato que, para $i = 1, \dots, n$, temos

$$\begin{aligned} R(X_i, \nabla f)\nabla f &= \nabla_{X_i}\nabla_{\nabla f}\nabla f - \nabla_{\nabla f}\nabla_{X_i}\nabla f \\ &\quad - \nabla_{[X_i, \nabla f]}\nabla f. \end{aligned}$$

Assim, substituindo em (8), obtemos

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = \sum_{i=1}^n \langle R(X_i, \nabla f)\nabla f, X_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{\nabla f}\nabla_{X_i}\nabla f, X_i \rangle \quad (9)$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{[X_i, \nabla f]}\nabla f, X_i \rangle \\ &= Ric(\nabla f, \nabla f) + \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{\nabla f}\nabla_{X_i}\nabla f, X_i \rangle \quad (10) \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{[X_i, \nabla f]}\nabla f, X_i \rangle. \quad (11)$$

Agora afirmamos que:

1. $\sum_{i=1}^n \langle \nabla_{\nabla f}\nabla_{X_i}\nabla f, X_i \rangle = \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle$;
2. $\sum_{i=1}^n \langle \nabla_{[X_i, \nabla f]}\nabla f, X_i \rangle = |\nabla^2 f|^2$.

E com isso concluiremos a prova da fórmula de Bochner. De fato, note que

$$\sum_{i=1}^n \langle \nabla_{\nabla f}\nabla_{X_i}\nabla f, X_i \rangle = \sum_{i=1}^n \nabla f(\langle \nabla_{X_i}\nabla f, X_i \rangle) - \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{X_i}\nabla f, \nabla_{\nabla f}X_i \rangle.$$

Mas pela definição do laplaciano de f , $\sum_{i=1}^n \langle \nabla_{X_i}\nabla f, X_i \rangle = \Delta f$, e também, como no ponto $p \in M$ temos $\langle \nabla_{X_i}\nabla f, \nabla_{\nabla f}X_i \rangle = 0$, pois $\nabla_{X_j}X_i = 0$ em p , para $i, j = 1, \dots, n$, concluímos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \nabla f(\langle \nabla_{X_i}\nabla f, X_i \rangle) - \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{X_i}\nabla f, \nabla_{\nabla f}X_i \rangle &= \nabla f\left(\sum_{i=1}^n \langle \nabla_{X_i}\nabla f, X_i \rangle\right) \\ &= \nabla f\left(\sum_{i=1}^n \langle \nabla_{X_i}\nabla f, X_i \rangle\right) \\ &= \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle, \end{aligned}$$

provando, assim, a primeira afirmação. E, por fim, em $p \in M^n$, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \langle \nabla_{[X_i, \nabla f]} \nabla f, X_i \rangle &= \sum_{i=1}^n Hessf([X_i, \nabla f], X_i) \\
&= \sum_{i=1}^n Hessf(\nabla_{X_i} \nabla f - \nabla_{\nabla f} X_i, X_i) \\
&= \sum_{i=1}^n Hessf(\nabla_{X_i} \nabla f, X_i) - \sum_{i=1}^n Hessf(\nabla_{\nabla f} X_i, X_i) \\
&= \sum_{i=1}^n Hessf(\nabla_{X_i} \nabla f, X_i),
\end{aligned}$$

onde usamos o fato de $Hessf(\nabla_{\nabla f} X_i, X_i) = 0$, $i = 1, \dots, n$. Assim,

$$\sum_{i=1}^n \langle \nabla_{[X_i, \nabla f]} \nabla f, X_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{X_i} \nabla f, \nabla_{X_i} \nabla f \rangle.$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^n \langle \nabla_{X_i} \nabla f, \nabla_{X_i} \nabla f \rangle = |Hessf|^2.$$

Provando, assim, a segunda afirmação e concluindo a prova da fórmula de Bochner. \square

Uma outra versão da fórmula de Bochner, que apresentaremos como lema, e será utilizada na prova do Lema 3.1, é a seguinte:

Lema 2.2. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana, e $f \in C^\infty(M)$. Então, vale a seguinte fórmula*

$$div(\nabla^2 f) = Ric(\nabla f) + \nabla \Delta f.$$

A prova do Lema 2.2 encontra-se em (1).

2.4 Variação do Comprimento de Arco

Nesta seção, falaremos da teoria de variação do comprimento de arco que, através dos Lemas 2.3 e 2.4, será essencial para demonstrar o Teorema 3.1. Para ver as demonstrações detalhadas do Lema 2.4 e Lema 2.3, veja (5).

Seja $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow M^n$ caminho diferenciável. O comprimento de γ é obtido por

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Além disso, a função distância é dada por

$$d(p, q) := \inf_{\gamma} L(\gamma),$$

onde o ínfimo é tomado sobre as curvas diferenciáveis ligando os pontos $p, q \in M$. Um segmento de geodésica é dito minimizante se o seu comprimento é igual a distância entre suas extremidades.

Seja $\gamma_s : [a, b] \rightarrow M^n$, $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, uma família de curvas suaves em M^n . Daí, definimos a variação própria como sendo a aplicação suave

$$\alpha : [a, b] \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M^n$$

dada por $\gamma_s(t) = \alpha(t, s)$ e $\gamma_s(a) = \alpha(a, 0)$, $\gamma_s(b) = \alpha(b, 0)$. Definimos o campo vetorial ao longo de $\alpha(s, t)$, com uma das variáveis fixadas, em cada caso, por:

$$U := \alpha_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), V := \alpha_* \left(\frac{\partial}{\partial s} \right).$$

Deste modo, note que

$$L(\gamma_s) = \int_a^b |U(\gamma_s(t))| dt,$$

com $s \in (-\epsilon, \epsilon)$. Estamos prontos para enunciar a primeira variação do comprimento de arco. A seguir, para o Lema 2.3 e Lema 2.4 consideramos que (M^n, g) é uma variedade Riemanniana.

Lema 2.3 (Primeira variação do comprimento de arco). *Seja $\gamma_s : [a, b] \rightarrow M^n$, $s \in (-\epsilon, \epsilon)$, uma variação própria, e estando γ_s parametrizada pelo comprimento de arco, temos que*

$$|T(\gamma_s)| = 1.$$

Assim, vale

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L(\gamma_s) = g(U, W) \Big|_a^b - \int_a^b g(W, \nabla_U U) dt.$$

Definimos agora uma aplicação suave $\alpha : [a, b] \times (-\epsilon, \epsilon) \times (-\delta, \delta) \rightarrow M^n$, que tem valores numa família de curvas a 2-parâmetro por

$$\alpha(t, v, z) = \gamma_{v,z}(t),$$

onde $\gamma_{v,z} : [a, b] \rightarrow M$, e $v \in (-\epsilon, \epsilon)$, $z \in (-\delta, \delta)$. Além disso, para $U, V, Z \in \mathfrak{X}(M)$, considere

$$\begin{aligned} U &:= \alpha_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \\ V &:= \alpha_*\left(\frac{\partial}{\partial v}\right), \\ Z &:= \alpha_*\left(\frac{\partial}{\partial w}\right). \end{aligned}$$

Dessa forma, estamos prontos para enunciar a segunda variação do comprimento de arco.

Lema 2.4 (Segunda Variação do Comprimento de Arco). *Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana, e $\gamma_{v,z} : [a, b] \rightarrow M$, onde $v \in (-\epsilon, \epsilon)$, $z \in (-\delta, \delta)$, uma variação própria a 2-parâmetro. Se $\gamma_{(0,0)}$ é parametrizada pelo comprimento de arco, então:*

$$\frac{d^2}{dvdw} L(\gamma_{(v,w)}) \Big|_{(0,0)} = \int_a^b \{g(\nabla_U V, \nabla_U Z) - g(\nabla_U V, U)g(\nabla_U Z, U)\} dt \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & - \int_a^b g((\nabla_U \nabla_Z V - \nabla_Z \nabla_U V - \nabla_{[U,Z]} V), U) dt \quad (13) \\ & - \int_a^b g(\nabla_V Z, \nabla_U U) dt + g(\nabla_V Z, U) \Big|_a^b. \end{aligned}$$

Recordando da definição do $(3, 1)$ -tensor de curvatura

$$Rm(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, podemos substituir (13) por $g(Rm(U, Z)V, U)$.

Tomando no lema acima $Z = V$ e fazendo $\nabla_U U = 0$ com $|U| = 1$, teremos o seguinte corolário.

Corolário 2.1. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana e γ_s família a 1-parâmetro de caminhos suaves com extremidades fixas e γ_0 geodésica parametrizada pelo comprimento de arco. Então:*

$$\frac{d^2}{ds^2} L(\gamma_s) \Big|_{s=0} = \int_a^b (|\nabla_U V - g(\nabla_U V, U)U|^2 - g(Rm(U, V)V, U)) dt.$$

Dados $W, T \in \mathfrak{X}(M)$, definimos

$$(\nabla_T W)^* = (\nabla_T W) - g((\nabla_T W), T)T.$$

Uma geodésica é dita *estável* se sua segunda variação de comprimento de arco é não negativa.

Provaremos a seguir uma desigualdade que será usada na prova do Teorema 3.1.

Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana e considere $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ uma geodésica estável e parametrizada pelo comprimento de arco. Considere também $\{X_i\}_{i=1}^{n-1}$ como sendo um referencial ortonormal, paralelo ao longo de γ e ortogonal a γ' . Portanto, pelo Corolário [2.1](#), e tomando $U = \frac{d\gamma}{dt}$ ao longo de γ e $V = \psi \sum_{i=1}^{n-1} X_i$, também definido ao longo de γ , sendo $\psi : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ função contínua e suave por partes ao longo de γ , obtemos que

$$\sum_{i=1}^{n-1} \int_a^b (|\nabla_{\gamma'}(\psi X_i)|^2 - g(Rm(\gamma', \psi X_i)\psi X_i, \gamma')) dt \geq 0. \quad (14)$$

Por outro lado, já que o referencial é paralelo ao longo da curva γ , observe que

$$\begin{aligned} \nabla_{\gamma'} \psi X_i &= \psi \nabla_{\gamma'} X_i + \frac{d}{dt} \psi(\gamma(t)) X_i \\ &= \frac{d}{dt} \psi(\gamma(t)) X_i \\ &= \frac{d\psi}{dt} X_i. \end{aligned}$$

Em particular, deduzimos que

$$\begin{aligned} |(\nabla_{\gamma'} \psi X_i)|^2 &= g(\nabla_{\gamma'} \psi X_i, \nabla_{\gamma'} \psi X_i) + (g((\nabla_{\gamma'} \psi X_i), \gamma'))^2 \\ &= g\left(\frac{d\psi}{dt} X_i, \frac{d\psi}{dt} X_i\right) + \left(g\left(\frac{d\psi}{dt} X_i, \gamma'\right)\right)^2 \\ &= g\left(\frac{d\psi}{dt} X_i, \frac{d\psi}{dt} X_i\right), \end{aligned} \quad (15)$$

já que $\{X_i\}_{i=1}^{n-1}$ é ortogonal a γ' ao longo de γ , e portanto,

$$g\left(\frac{d\psi}{dt} X_i, \gamma'\right) = 0.$$

Também, como $|X_i|^2 = 1$, temos de [\(15\)](#), que

$$|(\nabla_{\gamma'} \psi X_i)|^2 = \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2.$$

Assim, como

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} g(Rm(\gamma', X_i)X_i, \gamma') &= \sum_{i=1}^{n-1} g(Rm(X_i, \gamma')\gamma', X_i) \\ &= Ric(\gamma', \gamma'), \end{aligned}$$

segue de [\(14\)](#) que

$$(n-1) \int_a^b \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 dt \geq \int_a^b \psi^2 Ric(\gamma', \gamma') dt. \quad (16)$$

2.5 Identidade de Green, Fórmula da Co-área

Estabeleceremos aqui alguns resultados importantes para o que será discutido no próximo capítulo. Inicialmente, com intuito de dar uma base mais sólida para o enunciado da Fórmula da Co-área, um dos principais resultados desta seção, relembremos a seguinte definição.

Definição 2.12. *Seja $F : M \rightarrow N$ uma aplicação suave entre variedades diferenciáveis. A aplicação F é dita submersão se, para todo $p \in M$, tivermos $(F_*)_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ sobrejetiva.*

Com isso temos a seguinte proposição, cuja prova está em (12).

Proposição 2.8. *Seja $F : M \rightarrow N$ submersão. Então, dado $p \in N$, $F^{-1}(p)$ é uma subvariedade mergulhada de M .*

Enunciaremos agora o Teorema de Stokes. Para uma prova detalhada, consulte (12).

Teorema 2.3. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n com bordo suave ∂M e seja ω uma $(n - 1)$ -forma de suporte compacto. Então,*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana de dimensão n e orientada. Então existe uma única n -forma diferenciável alternada tal que

$$\Omega_p(X_1, \dots, X_n) = 1$$

para todo $p \in M$, e toda base ortonormal orientável $\{X_i\}_{i=1}^n$ em $T_p M$. Tal forma é dita forma volume Riemanniano, e é comumente denotada por dV_g .

Como consequência do Teorema 2.3 temos o seguinte resultado, conhecido como teorema da Divergência, que pode ser encontrado em (12).

Teorema 2.4 (Teorema da Divergência). *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão n . Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ é uma campo de vetores diferenciável em M^n , então*

$$\int_M \operatorname{div}(X) dV_g = \int_{\partial M} \langle X, N \rangle dA$$

onde N é a normal exterior definida no bordo, dV_g a forma de volume Riemanniano e dA a forma induzida pela forma volume Riemanniano dV_g , definida bordo da variedade.

Como consequência imediata do Teorema 2.4 obtemos a primeira identidade de Green, que pode ser encontrada em (5).

Corolário 2.2 (Primeira Identidade de Green). *Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana orientável e funções suaves $\phi, \psi : M \rightarrow \mathbb{R}$. Então, sendo dV_g a forma de volume Riemanniano*

em M e dS a forma de volume induzida em ∂M , temos que

$$\int_M (\psi \Delta \varphi + \langle \nabla \psi, \nabla \varphi \rangle) dV_g = \int_{\partial M} \psi \langle \nabla \varphi, N \rangle dS,$$

onde N é a normal unitária definida em ∂M .

Agora podemos enunciar a fórmula da Co-área, cuja demonstração de uma versão mais geral do teorema pode ser encontrada em (10).

Teorema 2.5 (Fórmula da Co-área). *Sejam M^n e N^k variedades Riemannianas, com $k \leq n$, e suas respectivas formas de volume dadas por dV_M e dV_N . Seja $F : M \rightarrow N$ submersão diferenciável. Para cada $q \in N$, defina $M_q := F^{-1}(q)$. Seja ω_q a forma de volume de M_q , induzida por dV_M . Também, para cada $p \in M$, defina o Jacobiano de F , como sendo $J : M \rightarrow (0, \infty)$, dado por*

$$J(p) := \sqrt{\det((\hat{F}_*)_p((\hat{F}_*)_p)^T)},$$

que é invariante por mudança de coordenadas locais, sendo \hat{F} representação de F em coordenadas locais.

Assim, obtemos que

$$\int_M dV_M = \int_N dV_N \int_{M_q} \frac{1}{J(p)} \omega_q(p).$$

Note que, de fato, pela Proposição 2.8, $M_q := F^{-1}(q)$ é uma subvariedade diferenciável mergulhada de M . E, portanto, pode ser tratada como uma variedade diferenciável, sobre a qual integramos no Teorema 2.5.

Por uma questão de notação, seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana. Tomando $p \in M$, $r > 0$ tal que $B_p(r) \subset M$, e sendo dV_g sua forma de volume, temos que o volume de uma bola centrada em p e de raio r é denotado por $Vol(B_p(r))$, e é dado por

$$Vol(B_p(r)) = \int_{B_p(r)} dV_g.$$

3 SÓLITONS DE RICCI

Neste capítulo, inicialmente, definiremos e demonstraremos fatos importantes sobre sólitons de Ricci, que será o objeto de estudo deste trabalho. Após, demonstraremos os principais teoremas, presentes no artigo de Cao e Zhou (3).

3.1 Definições e exemplos em sólitons de Ricci gradiente

Definição 3.1. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana, e sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. A derivada de Lie na métrica g é dada por:*

$$(\mathcal{L}_X g)(Y, Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X).$$

Portanto, sejam $f \in C^\infty(M)$, $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=1}^n$ um referencial local coordenado, e tomando $X = \nabla f$, $Y = \frac{\partial}{\partial x_i}$, e $Z = \frac{\partial}{\partial x_j}$ teremos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\nabla f} g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) &= (\mathcal{L}_{\nabla f} g)_{ij} \\ &= 2g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla f, \frac{\partial}{\partial x_j}\right), \end{aligned}$$

onde usamos que $g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla f, \frac{\partial}{\partial x_j}) = g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla f, \frac{\partial}{\partial x_i})$.

Definição 3.2. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana completa. Dizemos que (M^n, g) é um sólito de Ricci se existirem $\lambda \in \mathbb{R}$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$ tais que*

$$Ric + \frac{1}{2} \mathcal{L}_X g = \lambda g. \quad (17)$$

Quando $X = \nabla f$ em $\mathfrak{X}(M)$, onde $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave, então denominaremos sólito de Ricci gradiente. Nestas condições, o sólito será representado por (M^n, g, f, λ) .

Desta forma, como já definimos, $Hess f(X, Y) = g(\nabla_X \nabla f, Y)$, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos que em coordenadas locais

$$(Hess f)_{ij} = g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla f, \frac{\partial}{\partial x_j}\right). \quad (18)$$

Portanto, substituindo os campos de vetores coordenados na equação (17), e usando (18), obtemos

$$Ric\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \frac{1}{2} (\mathcal{L}_{\nabla f} g)_{ij} = R_{ij} + (Hess f)_{ij} = R_{ij} + \nabla_i \nabla_j f.$$

Dessa forma, temos a equação do sóliton de Ricci gradiente, em coordenadas locais, dada por

$$R_{ij} + \nabla_i \nabla_j f = \lambda g_{ij}.$$

Se $\lambda = 0$, $\lambda > 0$, $\lambda < 0$, então o sóliton de Ricci é chamado *steady*, *shrinking*, *expanding*, respectivamente. De acordo com o que fora provado no Teorema 2.3 de (1), no caso de $\lambda > 0$, podemos normalizar $\lambda = \frac{1}{2}$, originando um sóliton de Ricci gradiente shrinking cuja equação será

$$R_{ij} + \nabla_i \nabla_j f = \frac{1}{2} g_{ij}. \quad (19)$$

Isto é,

$$Ric + Hess f = \frac{1}{2} g.$$

Agora, apresentaremos um exemplo de sóliton de Ricci gradiente.

Exemplo 3.1. O sóliton Gaussiano (\mathbb{R}^n, g_0) é um sóliton de Ricci gradiente, onde g_0 é a métrica canônica do \mathbb{R}^n , e com função potencial $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \frac{|x|^2}{4}$. De fato, considerando o referencial coordenado ortonormal de \mathbb{R}^n , vindo da parametrização global $Id : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, como sendo $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=1}^n$, temos que

$$R_{ij} = Ric\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{k=1}^{k=n} g(Rm\left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}) = 0,$$

pois $Rm\left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \frac{\partial}{\partial x_j} = 0$, já que as derivadas covariantes comutam. Por outro lado, note que

$$\nabla_i \nabla_j f = \frac{\delta_{ij}}{2}$$

e assim, como $g_{ij} = \delta_{ij}$, vale a equação do sóliton de Ricci gradiente para $\lambda = \frac{1}{2}$, isto é, satisfaz (19).

Vejam agora mais dois exemplos de sólitons de Ricci gradientes. O seguinte exemplo está demonstrado em visto em (1).

Exemplo 3.2. Considere a variedade Riemanniana (\mathbb{R}^2, g) , com carta globalmente definida $Id : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde a métrica g é definida em coordenadas por

$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{1 + x^2 + y^2},$$

e considere $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x, y) = -\log(1 + x^2 + y^2).$$

Então, teremos um sóliton de Ricci gradiente steady. Isto é, satisfazendo $Ric + Hess f = 0$.

A seguir, apresentaremos outro exemplo de sóliton de Ricci gradiente shrinking

completo e não compacto.

Exemplo 3.3. Considere o produto da esfera com a reta real, $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$, $t \in (-\infty, 0)$, $n \geq 3$, e a família de métricas nesta variedade produto, definida para cada t , por

$$g(t) := 2(n-2)|t|g_{\mathbb{S}^{n-1}} + dr^2,$$

onde $g_{\mathbb{S}^{n-1}}$ é a métrica canônica definida na esfera, e dr^2 a métrica canônica definida na reta real. Definindo $f_t(\theta, r) := \frac{r^2}{4|t|}$, para $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$, $r \in \mathbb{R}$ e $t < 0$, temos que $(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}, g, \Delta f, \frac{1}{2|t|})$ é um sólito de Ricci gradiente shrinking.

Apresentaremos alguns fatos importantes envolvendo a função potencial, em prol de primeiramente provarmos o Teorema 3.1.

Lema 3.1. Seja (M^n, g_{ij}, f) um sólito de Ricci gradiente shrinking completo satisfazendo

$$R_{ij} + \nabla_i \nabla_j f = \frac{1}{2}g_{ij}.$$

Então, temos as seguinte equações:

1. $R + \Delta f = \frac{n}{2}$;
2. $\nabla R = 2Ric(\nabla f)$;
3. $R + |\nabla f|^2 - f = C_0$,

onde C_0 é uma constante real. A menos de adicionar uma constante a função potencial f , definindo assim uma nova função potencial, podemos considerar

$$R + |\nabla f|^2 = f.$$

Prova. Para a prova da primeira igualdade, Item 1, tome o traço da equação fundamental

$$R_{ij} + \nabla_i \nabla_j f = \frac{1}{2}g_{ij},$$

e daí

$$\sum_{i=1}^n g^{ii}(R_{ii} + \nabla_i \nabla_i f) = \frac{n}{2},$$

e portanto, $R + \Delta f = \frac{n}{2}$. Estabelecendo assim, a primeira identidade.

Para provarmos a segunda identidade, lembre que a métrica é paralela e portanto, tomando o divergente da equação fundamental, temos que

$$\operatorname{div} Ric + \operatorname{div}(\nabla^2 f) = 0.$$

Agora usando a Proposição 2.7 (2), temos que

$$\frac{1}{2}\nabla R = \operatorname{div} Ric,$$

e concluimos que

$$\frac{1}{2}\nabla R + \operatorname{div}(\nabla^2 f) = 0.$$

Pelo Lema 2.2, temos que $\operatorname{div}(\nabla^2 f) = \operatorname{Ric}(\nabla f) + \nabla\Delta f$, e assim,

$$\frac{1}{2}\nabla R + \operatorname{Ric}(\nabla f) + \nabla\Delta f = 0. \quad (20)$$

Em coordenadas, essa expressão é equivalente a

$$\frac{1}{2}\nabla_i R + R_{ij}(\nabla_j f) + \nabla_i \Delta f = 0. \quad (21)$$

Por outro lado, derivando o Item 1, $R + \Delta f = \frac{n}{2}$, obtemos

$$\nabla_i R + \nabla_i \Delta f = 0.$$

Substituindo em (21), temos $\nabla_i R = 2R_{ij}(\nabla_j f)$, isto é,

$$\nabla R = 2\operatorname{Ric}(\nabla f). \quad (22)$$

Para a prova da última identidade, Item 3, considere a função $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\varphi(x) = R(x) + |\nabla f(x)|^2 - f(x).$$

Deste modo, temos a expressão do gradiente da função

$$\nabla\varphi = \nabla R + \nabla|\nabla f|^2 - \nabla f.$$

Mas, de (22), temos que

$$\begin{aligned} \nabla\varphi &= \nabla R + \nabla|\nabla f|^2 - \nabla f \\ &= 2\operatorname{Ric}(\nabla f) + \nabla|\nabla f|^2 - \nabla f. \end{aligned} \quad (23)$$

Agora, para $Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos que

$$\langle \nabla|\nabla f|^2, Y \rangle = Y(|\nabla f|^2),$$

pela definição de gradiente de uma função suave, e daí,

$$\begin{aligned} Y|\nabla f|^2 &= Y\langle \nabla f, \nabla f \rangle \\ &= 2\langle \nabla_Y \nabla f, \nabla f \rangle \\ &= 2\operatorname{Hess}f(\nabla f, Y) \\ &= 2\langle \nabla_{\nabla f} \nabla f, Y \rangle, \end{aligned}$$

onde usamos na penúltima igualdade que o Hessiano é um operador simétrico. Portanto, como Y é arbitrário, temos, pela definição do gradiente de uma função aplicada a função $|\nabla f|^2$, que

$$\nabla|\nabla f|^2 = 2\nabla_{\nabla f}\nabla f.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\nabla\varphi &= \nabla(R + |\nabla f|^2 - f) \\ &= 2Ric(\nabla f) + 2\nabla_{\nabla f}\nabla f - \nabla f.\end{aligned}$$

Deste modo, pela equação fundamental, temos que $\nabla\varphi = 0$ em M , e então φ é constante em M . Consequentemente,

$$R + |\nabla f|^2 - f = C,$$

para uma constante real C .

□

3.2 Sólitos de Ricci gradiente *shrinking*

Nesta seção, apresentaremos os principais resultados deste trabalho. Em todos os resultados nos restringimos ao estudo dos sólitos de Ricci gradiente *shrinking* completos e não compactos. O primeiro resultado fornece estimativas, superior e inferior, para o crescimento da função potencial. O segundo resultado dá uma estimativa superior para o crescimento de volume das bolas geodésicas de raio suficientemente grande.

Agora, enunciaremos o primeiro teorema, resultado que foi obtido por H.-D. Cao e D. Zhou em (3).

De agora em diante, (M^n, g, f) será um sólito de Ricci gradiente, *shrinking* completo e não compacto.

Teorema 3.1. *Seja (M^n, g, f) um sólito de Ricci gradiente *shrinking* completo e não compacto. Então a função potencial f satisfaz*

$$\frac{(r(x) - c_1)^2}{4} \leq f(x) \leq \frac{(r(x) + c_2)^2}{4},$$

onde $r(x) := d(x_0, x)$ é a função distância para um ponto fixado x_0 de M^n , e $c_1, c_2 > 0$ são constantes positivas que só dependem da dimensão n , e da geometria da bola unitária centrada em x_0 , $B_{x_0}(1)$.

Note que se tomarmos $c := \max\{c_1, c_2\} > 0$, obtemos

$$\frac{(r(x) - c)^2}{4} \leq f(x) \leq \frac{(r(x) + c)^2}{4}.$$

De fato, no decorrer deste trabalho, faremos uso desta observação, mas ao citarmos o resultado que está sendo utilizado, citaremos simplesmente o Teorema 3.1, uma vez que tal observação seja uma consequência direta de tal teorema.

O sólito de Ricci Gaussiano, visto no Exemplo [3.1](#), é um sólito de Ricci gradiente *shrinking* não compacto, onde a função potencial $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz $f(x) = \frac{1}{4}r^2(x)$. Este exemplo nos garante que a estimativa superior e inferior do Teorema 3.1 são ótimas.

O segundo teorema, Teorema 3.2, obtido por H.-D. Cao e D. Zhou, no artigo (3), consiste de uma estimativa superior para a taxa de crescimento de volume das bolas geodésicas de um sólito de Ricci gradiente *shrinking* completo e não compacto. Enunciaremos agora o segundo teorema.

Teorema 3.2. *Sejam (M^n, g, f) um sólito de Ricci gradiente, *shrinking* completo e não compacto, e x_0 um ponto fixado em M^n . Então existe uma constante positiva $C_1 > 0$ tal que*

$$\text{Vol}(B_{x_0}(r)) \leq C_1 r^n,$$

para $r > 0$ suficientemente grande.

A estimativa do Teorema 3.2 é ótima, pois, considerando novamente o Exemplo 3.1, do sólito de Ricci Gaussiano, temos que o volume de uma bola geodésica de raio $r > 0$ é da ordem Cr^n , onde C é uma constante positiva. Assim, podemos considerar que o crescimento de volume de um sólito de Ricci shrinking gradiente completo e não compacto é no máximo Euclidiano.

3.3 Comportamento assintótico da função potencial

Nesta seção provaremos o Teorema 3.1. A seguir, obteremos a estimativa superior para a função potencial em termos da função distância.

Lema 3.2. *Seja (M^n, g_{ij}, f) um sólito de Ricci gradiente shrinking completo, com a função potencial satisfazendo*

$$R + |\nabla f|^2 - f = 0.$$

Seja um ponto $x_0 \in M$ fixado, e $r(x) := d(x, x_0)$. Então, vale:

1. $f(x) \leq \frac{1}{4}(r(x) + 2\sqrt{f(x_0)})^2$.
2. $|\nabla f(x)| \leq \frac{1}{2}r(x) + \sqrt{f(x_0)}$.
3. $R(x) \leq \frac{1}{4}(r(x) + 2\sqrt{f(x_0)})^2$.

Para provarmos o Lema 3.2 usaremos o seguinte lema que é um caso particular da Proposição 5.5 de (2).

Lema 3.3. *Seja (M^n, g, f) um sólito de Ricci gradiente shrinking completo. Então, na métrica g , temos que $R \geq 0$, isto é, a curvatura escalar de M^n é não negativa.*

Agora provaremos o Lema 3.2.

Prova. Usando o Lema 3.3, temos $R \geq 0$ e usando que $f = R + |\nabla f|^2$, temos que $f \geq 0$. Em particular,

$$0 \leq |\nabla f|^2 \leq f.$$

Em coordenadas, temos

$$\nabla f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \nabla \sqrt{f} &= g^{ij} \frac{\partial \sqrt{f}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{f}} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{f}} \nabla f. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |\nabla\sqrt{f}| &= \left| \frac{1}{2\sqrt{f}} \nabla f \right| \\ &= \frac{1}{2\sqrt{f}} |\nabla f|. \end{aligned}$$

Sendo $0 \leq |\nabla f|^2 \leq f$, temos que $|\nabla f| \leq \sqrt{f}$, e então

$$|\nabla\sqrt{f}| \leq \frac{1}{2}.$$

Considere $h : M \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $h(x) := \sqrt{f(x)}$. Sendo M uma variedade Riemanniana completa, para todos pontos $x, y \in M$ existe geodésica minimizante ligando x e y . Seja $r := d(x, y)$ e $\alpha : [0, r] \rightarrow M$ tal geodésica minimizante, donde $\alpha(0) = x$ e $\alpha(r) = y$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$\begin{aligned} h(y) - h(x) &= h(\alpha(r)) - h(\alpha(0)) \\ &= \int_0^r \frac{d}{dt} h(\alpha(t)) dt \\ &= \int_0^r \langle \nabla h, \alpha'(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

Na última igualdade usamos que

$$\frac{d}{dt} h(\alpha(t)) = \langle \nabla h, \alpha'(t) \rangle.$$

Agora, aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwartz concluimos que

$$\begin{aligned} |h(y) - h(x)| &\leq \int_0^r |\langle \nabla h(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle| dt \\ &\leq \int_0^r |\nabla h| |\alpha'(t)| dt \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^r |\alpha'(t)| dt = \frac{d(x, y)}{2}, \end{aligned}$$

já que $|\nabla h(\alpha(t))| \leq \frac{1}{2}$.

Portanto, como α é uma geodésica minimizante, temos que

$$|h(y) - h(x)| \leq \frac{1}{2} d(x, y).$$

Logo, a função h é Lipschitz. Então, para um ponto x_0 fixado, temos

$$\begin{aligned}\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x_0)} &\leq |\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x_0)}| \\ &\leq \frac{1}{2}r(x),\end{aligned}$$

implicando que

$$f(x) \leq \frac{1}{4}(r(x) + 2\sqrt{f(x_0)})^2. \quad (24)$$

Isto prova o primeiro item.

Continuando, como $0 \leq |\nabla f|^2 \leq f$, temos de (24), que

$$\begin{aligned}|\nabla f(x)|^2 &\leq f(x) \\ &\leq \frac{1}{4}(r(x) + 2\sqrt{f(x_0)})^2,\end{aligned}$$

implicando que

$$|\nabla f(x)| \leq \frac{1}{2}r(x) + \sqrt{f(x_0)}.$$

Para concluir a prova do lema, usaremos que $R(x) + |\nabla f(x)|^2 - f(x) = 0$ e o primeiro item para deduzir que

$$\begin{aligned}R(x) &= f(x) - |\nabla f(x)|^2 \\ &\leq f(x) \\ &\leq \frac{1}{4}(r(x) + 2\sqrt{f(x_0)})^2,\end{aligned}$$

o que implica

$$R(x) \leq \frac{1}{4}(r(x) + 2\sqrt{f(x_0)})^2$$

e isto finaliza a prova do lema. \square

Provaremos a seguir a estimativa inferior para a função potencial em termos da função distância. Em particular, combinando a proposição a seguir com o Lema 3.2 obteremos o resultado enunciado no Teorema 3.1. Mais precisamente, temos a seguinte proposição.

Proposição 3.1. *Seja (M^n, g_{ij}, f) um sóliton de Ricci gradiente shrinking completo e não compacto satisfazendo:*

$$R_{ij} + \nabla_i \nabla_j f = \frac{1}{2}g_{ij},$$

$$R + |\nabla f|^2 = f.$$

Então, fixado $x_0 \in M$, temos

$$f(x) \geq \frac{1}{4}(r(x) - c_1)^2,$$

onde c_1 é uma constante positiva que depende somente de n e da geometria de g_{ij} na bola

unitária em $B_{x_0}(1)$.

Prova. Inicialmente, para $s_0 > 2$, defina uma função *cut-off* $\phi : [0, s_0] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\phi(s) = \begin{cases} s, & \text{se } 0 \leq s \leq 1, \\ 1, & \text{se } 1 \leq s \leq s_0 - 1, \\ s_0 - s, & \text{se } s_0 - 1 \leq s \leq s_0. \end{cases}$$

Considere uma geodésica minimizante parametrizada pelo comprimento de arco $\gamma : [0, s_0] \rightarrow M$, com $x_0 = \gamma(0)$. Por abuso de notação, como o comprimento de qualquer segmento de geodésica minimizante parametrizada pelo comprimento de arco realiza a distância entre os pontos correspondentes as suas extremidades, podemos definir $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$, uma função radial, contínua, diferenciável em quase todos os pontos e suave por partes ao longo de γ , tal que, para $s \in [0, s_0]$, temos $\phi(s) = \phi(r(x))$, onde $x = \gamma(s)$, e $s = r(x) = d(x_0, \gamma(s))$.

Escolha uma variação própria para tal geodésica, isto é, defina $\gamma_0 : [0, s_0] \rightarrow M$, tal que $\gamma(s) = \gamma_0(s)$, para todo $s \in [0, s_0]$, e sendo $\epsilon > 0$, para cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, temos $\gamma_t : [0, s_0] \rightarrow M$ curva suave, onde $\gamma_t(0) = \gamma_0(0) = \gamma(0)$ e $\gamma_t(s_0) = \gamma_0(s_0) = \gamma(s_0)$. Seja, para todo $s \in [0, s_0]$, $X(s) := (\gamma_0)'(s) = (\gamma)'(s)$ o vetor tangente unitário ao longo de γ_0 .

Como γ_0 é geodésica minimizante, sua segunda variação do comprimento de arco será não negativa, isto é,

$$\frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} L(\gamma_s) \geq 0.$$

Portanto, de (I6), concluímos que, para $0 < s \leq s_0$, vale

$$\int_0^s \phi^2(t) Ric(X(t), X(t)) dt \leq (n-1) \int_0^s |\phi'(t)|^2 dt,$$

já que (I6) vale para toda função contínua, não negativa, diferenciável em quase todos os pontos e suave por partes ao longo de γ .

Como $B_{x_0}(1)$ é compacto, temos que

$$\sup_{B_1(\gamma(0))} |Ric(X, X)| < \infty,$$

onde X é campo de vetores unitário em $B_{x_0}(1)$.

Agora, note que

$$\begin{aligned} \int_0^{s_0} Ric(X(t), X(t)) dt &= \int_0^{s_0} \phi^2 Ric(X(t), X(t)) + \int_0^{s_0} (1 - \phi^2(t)) Ric(X(t), X(t)) dt \\ &\leq (n-1) \int_0^{s_0} |\phi'(t)|^2 dt \\ &\quad + \int_0^{s_0} (1 - \phi^2(t)) Ric(X(t), X(t)) dt. \end{aligned} \tag{25}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \int_0^{s_0} (1 - \phi^2(t)) Ric(X(t), X(t)) dt &= \int_0^1 (1 - \phi^2(t)) Ric(X(t), X(t)) dt \\ &+ \int_1^{s_0-1} (1 - \phi^2(t)) Ric(X(t), X(t)) dt \\ &+ \int_{s_0-1}^{s_0} (1 - \phi^2(t)) Ric(X(t), X(t)) dt, \end{aligned} \quad (26)$$

e assim observe que

$$\int_1^{s_0-1} (1 - \phi^2(t)) Ric(X(t), X(t)) dt = 0, \quad (27)$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1 - \phi^2(t)) Ric(X(t), X(t)) dt &\leq \left| \int_0^1 (1 - \phi^2(t)) Ric(X(t), X(t)) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |Ric(X(t), X(t))| dt \\ &\leq \sup_{B_{x_0}(1)} |Ric|. \end{aligned} \quad (28)$$

Também,

$$\begin{aligned} \int_{s_0-1}^{s_0} (1 - \phi^2(t)) Ric(X(t), X(t)) dt &\leq \left| \int_{s_0-1}^{s_0} (1 - \phi^2(t)) Ric(X(t), X(t)) dt \right| \\ &= \left| \int_{s_0-1}^{s_0} (1 - (s_0 - t)^2) Ric(X(t), X(t)) dt \right| \\ &\leq \int_{s_0-1}^{s_0} (1 - (s_0 - t)^2) |Ric(X(t), X(t))| dt \\ &\leq \int_{s_0-1}^{s_0} |Ric(X(t), X(t))| dt \\ &\leq \sup_{B_{\gamma(s_0)}(1)} |Ric|. \end{aligned} \quad (29)$$

Além disso,

$$\int_0^{s_0} |\phi'(t)|^2 dt = \int_0^1 |\phi'(t)|^2 dt + \int_1^{s_0-1} |\phi'(t)|^2 dt + \int_{s_0-1}^{s_0} |\phi'(t)|^2 dt = 2. \quad (30)$$

Deste modo, substituindo (29), (28), (27) em (26), e depois comparando o resultado disto com (25), temos que

$$\int_0^{s_0} Ric(X(t), X(t)) dt \leq 2(n-1) + \sup_{B_{x_0}(1)} |Ric| + \sup_{B_{\gamma(s_0)}(1)} |Ric|. \quad (31)$$

Por outro lado, aplicando a equação do sóliton de Ricci gradiente ao longo de $\gamma(t)$,

que é a equação (19), nos campos de vetores $X(t)$ que possuem norma unitária ao longo de γ , temos que

$$\begin{aligned}\nabla_{X(t)}(f \circ \gamma)'(t) &= \nabla_{X(t)}\nabla_{X(t)}f \circ \gamma(t) \\ &= \frac{1}{2} - Ric(X(t), X(t)).\end{aligned}\tag{32}$$

Defina, por abuso de notação, $f'(t) = (f \circ \gamma)'(t)$, onde $f(t) := f \circ \gamma(t)$. Deste modo, integrando (32), de 0 a s_0 , e usando (31), obtemos que

$$\begin{aligned}\int_0^{s_0} \nabla_{X(t)}f'(t)dt &= f'(s_0) - f'(0) \\ &= \int_0^{s_0} \left[\frac{1}{2} - Ric(X(t), X(t)) \right] \\ &= \frac{s_0}{2} - \int_0^{s_0} Ric(X(t), X(t))dt \\ &\geq \frac{s_0}{2} - 2(n-1) - \sup_{B_{x_0}(1)} |Ric| - \sup_{B_{\gamma(s_0)}(1)} |Ric|.\end{aligned}$$

Se o tensor de Ricci for limitado em M^n , isto é, $|Ric| \leq C$, com $C > 0$, então

$$\begin{aligned}f'(s_0) &\geq \frac{1}{2}s_0 + f'(0) - 2(n-1) - 2C \\ &= \frac{1}{2}(s_0 - c),\end{aligned}$$

onde $c := 2(n-1) + 2C - f'(0)$. Deste modo, vale

$$\int_0^{s_0} f'(s)ds \geq \int_0^{s_0} \frac{1}{2}(s - c)ds,$$

e assim, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$f(s_0) - f(0) \geq \frac{1}{4}(s_0 - c)^2 - \frac{c^2}{4}.$$

Usando o fato de f ser positiva, concluímos

$$f(s_0) \geq f(s_0) - f(0) \geq \frac{1}{4}(s_0 - c)^2 - \frac{c^2}{4},$$

onde $x_0 = \gamma(0)$, e assim, por γ ser geodésica minimizante ligando x_0 e $\gamma(s_0)$, e de comprimento s_0 , temos $d(x_0, \gamma(s_0)) = s_0$. O que prova a proposição neste caso específico.

Agora mostraremos que o resultado continua verdadeiro sem a limitação na curvatura de Ricci. Para isso, primeiramente, integrando de $t = 1$ a $t = s_0 - 1$ a expressão em (32),

calculada ao longo da curva $\gamma(t)$,

$$\nabla_{X(t)} f'(t) = \nabla_{X(t)} \nabla_{X(t)} f = \frac{1}{2} - Ric(X(t), X(t)),$$

obtemos

$$\begin{aligned} f'(s_0 - 1) - f'(1) &= \int_1^{s_0-1} \nabla_{X(t)} f'(t) dt \\ &= \frac{1}{2}(s_0 - 2) - \int_1^{s_0-1} Ric(X(t), X(t)) dt \\ &= \frac{1}{2}(s_0 - 2) - \int_1^{s_0-1} \phi^2(t) Ric(X(t), X(t)) dt. \end{aligned} \quad (33)$$

Lembre que, de (16),

$$\int_0^{s_0} \phi^2(t) Ric(X(t), X(t)) dt \leq 2(n - 1),$$

e assim,

$$\begin{aligned} \int_1^{s_0-1} \phi^2(t) Ric(X(t), X(t)) dt &\leq 2(n - 1) - \int_0^1 \phi^2(t) Ric(X(t), X(t)) dt \\ &\quad - \int_{s_0-1}^{s_0} \phi^2(t) Ric(X(t), X(t)) dt. \end{aligned} \quad (34)$$

De modo análogo, deduzimos que

$$\begin{aligned} - \int_0^1 \phi^2(t) Ric(X(t), X(t)) dt &\leq \left| \int_0^1 \phi^2(t) Ric(X(t), X(t)) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |Ric(X(t), X(t))| dt \\ &\leq \sup_{B_{x_0}(1)} |Ric|. \end{aligned}$$

Desta forma, substituindo em (34), observamos que

$$\int_1^{s_0-1} \phi^2(t) Ric(X(t), X(t)) dt \leq 2(n - 1) + \sup_{B_{x_0}(1)} |Ric| - \int_{s_0-1}^{s_0} \phi^2(t) Ric(X(t), X(t)) dt.$$

Portanto, comparando com (33), temos que

$$\begin{aligned} f'(s_0 - 1) - f'(1) &\geq \frac{1}{2}(s_0 - 2) - 2(n - 1) - \sup_{B_{x_0}(1)} |Ric| \\ &\quad + \int_{s_0-1}^{s_0} \phi^2(t) Ric(X(t), X(t)) dt. \end{aligned} \quad (35)$$

Por outro lado, para todo $t \in [0, s_0]$, multiplicando a equação (32) por $\phi^2(t)$, e

integrando-a sobre a variável t , de $t = s_0 - 1$ a $t = s_0$, concluimos que

$$\begin{aligned} \int_{s_0-1}^{s_0} \phi^2(t) Ric(X(t), X(t)) dt &= \frac{1}{2} \int_{s_0-1}^{s_0} \phi^2(t) dt - \int_{s_0-1}^{s_0} \phi^2(t) \nabla_{X(t)} f'(t) dt \\ &= \frac{1}{6} - \int_{s_0-1}^{s_0} \phi^2(t) \nabla_{X(t)} f'(t) dt, \end{aligned} \quad (36)$$

onde usamos que $\int_{s_0-1}^{s_0} \phi^2(t) dt = \frac{1}{3}$.

Ao mesmo tempo, por integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{s_0-1}^{s_0} \phi^2(t) \nabla_{X(t)} f'(t) dt + \int_{s_0-1}^{s_0} 2\phi(t)\phi'(t)f'(t) dt &= \int_{s_0-1}^{s_0} \phi^2(t) \nabla_{X(t)} f'(t) dt \\ &\quad - \int_{s_0-1}^{s_0} 2\phi(t) f'(t) dt \\ &= \left[\phi^2(t) f'(t) \right] \Big|_{t=s_0-1}^{t=s_0} \\ &= -f'(s_0 - 1), \end{aligned}$$

onde usamos que $\phi(s_0) = 0$. Então, deduzimos que

$$\int_{s_0-1}^{s_0} \phi^2(t) Ric(X(t), X(t)) dt = -f'(s_0 - 1) + \int_{s_0-1}^{s_0} 2\phi(t) f'(t) dt.$$

Agora substituindo a expressão acima em (36), chegamos em

$$\begin{aligned} \int_{s_0-1}^{s_0} \phi^2(t) \nabla_{X(t)} f'(t) dt &= \frac{1}{2} \int_{s_0-1}^{s_0} \phi^2(t) dt + f'(s_0 - 1) - 2 \int_{s_0-1}^{s_0} \phi(t) f'(t) dt \\ &= \frac{1}{6} + f'(s_0 - 1) - 2 \int_{s_0-1}^{s_0} \phi(t) f'(t) dt. \end{aligned} \quad (37)$$

Substituindo (37) em (35), temos

$$2 \int_{s_0-1}^{s_0} \phi(t) f'(t) dt \geq \frac{s_0}{2} - 2n + \frac{7}{6} + f'(1) - \sup_{B_{x_0}(1)} |Ric|. \quad (38)$$

Antes de prosseguirmos, relembre que da demonstração do Lema 3.2, já sabemos que $|\nabla f| \leq \sqrt{f}$ em M , e portanto,

$$\begin{aligned} |f'(s)| &= |\langle \nabla f(s), \gamma'(s) \rangle| \\ &\leq |\nabla f(s)| |\gamma'(s)| \\ &= |\nabla f(s)| \\ &\leq \sqrt{f(s)}. \end{aligned} \quad (39)$$

Também, como já vimos na prova do Lema 3.2,

$$|\sqrt{f(s_0)} - \sqrt{f(s)}| \leq \frac{1}{2}(s - s_0) \leq \frac{1}{2},$$

para $s \in [s_0 - 1, s_0]$. Assim,

$$\sup_{s \in [s_0 - 1, s_0]} \sqrt{f(s)} \leq \sqrt{f(s_0)} + \frac{1}{2},$$

e por (39), deduzimos que

$$\sup_{s \in [s_0 - 1, s_0]} |f'(s)| \leq \sqrt{f(s_0)} + \frac{1}{2}.$$

Substituindo em (38), e notando que $2 \int_{s_0 - 1}^{s_0} \phi(t) dt = 1$, temos

$$\begin{aligned} \sqrt{f(s_0)} + \frac{1}{2} &= 2 \int_{s_0 - 1}^{s_0} \phi(t) (\sqrt{f(s_0)} + \frac{1}{2}) dt \\ &\geq 2 \int_{s_0 - 1}^{s_0} \phi(t) |f'(t)| dt \\ &\geq |2 \int_{s_0 - 1}^{s_0} \phi(t) f'(t) dt| \\ &\geq 2 \int_{s_0 - 1}^{s_0} \phi(t) f'(t) dt \\ &\geq \frac{s_0}{2} - 2n + \frac{7}{6} + f'(1) - \sup_{B_{x_0}(1)} |Ric|. \end{aligned} \tag{40}$$

Então, concluímos que

$$\sqrt{f \circ \gamma(s_0)} \geq \frac{1}{2}(s_0 - c_1),$$

para

$$c_1 := |2(\frac{-1}{2} + \frac{7}{6} - 2n + f'(1) - \sup_{B_{x_0}(1)} |Ric|)|,$$

constante positiva dependendo da dimensão da variedade, e da geometria da bola unitária centrada em x_0 .

Como γ é geodésica minimizante ligando $x_0 = \gamma(0)$ a $\gamma(s_0)$, então seu comprimento será s_0 , e portanto $s_0 = d(\gamma(0), \gamma(s_0))$. Pelo Teorema 2.1, temos que fixado $x_0 \in M$ e dado $p \in M$, obtemos uma geodésica minimizante parametrizada pelo comprimento de arco ligando x_0 e p , e assim, pela arbitrariedade da geodésica minimizante γ , provamos a proposição. \square

Deste modo, uma vez já provados o Lema 3.2 e a Proposição 3.1, finalizamos a prova do Teorema 3.1.

3.4 Estimativa de volume para sólitons de Ricci shrinking

Nesta seção, provaremos o Teorema 3.2. Obteremos, primeiramente, uma identidade que será usada no Lema 3.4. Neste sentido, considere:

1. $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\rho(x) := 2\sqrt{f(x)}$,
2. $D(r) := \{x \in M; \rho(x) < r\}$, para $r > 0$,
3. $V(r) := \int_{D(r)} dV$.

Veja que $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma submersão, onde o Jacobiano da diferencial de ρ em x é dado por

$$J(x) := \sqrt{|((d\rho)_x)((d\rho)_x)^T|}.$$

Mas, para $x \in M$ e $v \in T_x M$ arbitrários, segue que $(\rho_*)_x v = \langle \nabla \rho(x), v \rangle$, e portanto, temos que $J(x) = |\nabla \rho(x)|$.

Observe ainda que $\rho^{-1}(s) = \partial D(s)$, para $0 \leq s \leq r$. Assim, pelo Teorema 2.5, temos que

$$V(r) = \int_0^r ds \int_{\partial D(s)} \frac{1}{|\nabla \rho|} dA.$$

Além disso, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$V'(r) = \int_{\partial D(r)} \frac{1}{|\nabla \rho|} dA.$$

Veja que, dado $x \in \partial D(s)$, temos que $\rho(x) = s$, o que implica que $\sqrt{f(x)} = \frac{s}{2}$. Então, como $\nabla \rho = \frac{1}{\sqrt{f}} \nabla f$, teremos que

$$\begin{aligned} V'(r) &= \int_{\partial D(r)} \frac{1}{|\nabla \rho|} dA \\ &= \int_{\partial D(r)} \frac{\sqrt{f}}{|\nabla f|} dA \\ &= \frac{r}{2} \int_{\partial D(r)} \frac{1}{|\nabla f|} dA, \end{aligned} \tag{41}$$

chegando na identidade desejada.

Lema 3.4. *Seja (M^n, g_{ij}, f) um sólito de Ricci gradiente shrinking completo e não compacto.*

Então

$$nV(r) - rV'(r) = 2 \int_{D(r)} R dV - 2 \int_{\partial D(r)} \frac{R}{|\nabla f|} dA.$$

Prova. Integrando sobre $D(r)$ em ambos os lados da seguinte equação, que vem do item 1 do Lema 3.1,

$$R + \Delta f = \frac{n}{2},$$

obtemos que

$$\int_{D(r)} n dV - \int_{D(r)} 2R dV = \int_{D(r)} 2\Delta f dV,$$

consequentemente,

$$nV(r) - \int_{D(r)} 2R dV = \int_{D(r)} 2\Delta f dV.$$

Como $\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$, pelo Teorema 2.4 temos então que

$$\int_{D(r)} \Delta f dV = \int_{\partial D} \langle \nabla f, \frac{1}{|\nabla \rho|} \nabla \rho \rangle dV,$$

de onde $\frac{\nabla \rho}{|\nabla \rho|}$ é a normal unitária a $\partial D(r)$.

De fato, veja que $\partial D(r) = \{x \in M; \rho(x) = r\}$. Dados $p \in \partial D(r)$, uma curva suave $\gamma : I \rightarrow \partial D(r)$, com $0 \in I$ e $\gamma(0) = p$, então de $\rho|_{\partial D(r)} = r$, teremos que

$$\frac{d}{dt} \rho(\gamma(t))|_{t=0} = \langle \nabla \rho(\gamma(0)), \gamma'(0) \rangle = 0.$$

Dessa forma, por $p \in M$ e $\gamma(t)$, uma curva passando por p , serem arbitrários, temos que $\nabla \rho(p) \perp T_p \partial D(r)$, para todo $p \in \partial D(r)$.

Como $\nabla \rho(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}} \nabla f(x)$, obtemos

$$\frac{\nabla \rho(x)}{|\nabla \rho(x)|} = \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{D(r)} \Delta f dV &= \int_{\partial D(r)} \langle \nabla f, \frac{\nabla \rho}{|\nabla \rho|} \rangle dA \\ &= \int_{\partial D(r)} \langle \nabla f, \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \rangle dA \\ &= \int_{\partial D(r)} |\nabla f| dA, \end{aligned}$$

e daí,

$$\int_{D(r)} \Delta f dV = \int_{\partial D(r)} |\nabla f| dA. \quad (42)$$

Além disso, usando que $R + |\nabla f|^2 = f$, e substituindo (42) em

$$nV(r) - \int_{D(r)} 2R dV = \int_{D(r)} 2\Delta f dV,$$

geramos

$$\begin{aligned} nV(r) - 2 \int_{D(r)} R dV &= 2 \int_{\partial D(r)} |\nabla f| dA \\ &= 2 \int_{\partial D(r)} \frac{f - R}{|\nabla f|} dA. \end{aligned}$$

Como $x \in \partial D(r)$ implica que $\rho(x) = 2\sqrt{f(x)} = r$, então $f(x) = \frac{r^2}{4}$. Assim, temos

$$\begin{aligned} nV(r) - 2 \int_{D(r)} R dV &= 2 \int_{\partial D(r)} \frac{f}{|\nabla f|} dA - 2 \int_{\partial D(r)} \frac{R}{|\nabla f|} dA \\ &= \frac{r^2}{2} \int_{\partial D(r)} \frac{1}{|\nabla f|} dA - 2 \int_{\partial D(r)} \frac{R}{|\nabla f|} dA \\ &= rV'(r) - 2 \int_{\partial D(r)} \frac{R}{|\nabla f|} dA. \end{aligned}$$

Dessa forma, chegamos ao resultado desejado. □

Antes de iniciarmos a prova do Teorema 3.2, observe que integrando

$$R + \Delta f = \frac{n}{2}$$

sobre $D(r)$, obtemos

$$\int_{D(r)} R dV + \int_{D(r)} \Delta f dV = \frac{n}{2} V(r).$$

Além disso, por (42), vemos que

$$\int_{D(r)} R dV + \int_{D(r)} \Delta f dV = \int_{D(r)} R dV + \int_{\partial D(r)} |\nabla f| dA.$$

Como $\int_{\partial D(r)} |\nabla f| dA \geq 0$, temos que $\frac{n}{2} V(r) - \int_{D(r)} R \geq 0$. Portanto,

$$\frac{n}{2} V(r) \geq \int_{D(r)} R dV. \quad (43)$$

Agora, tendo em mãos o Lema 3.4 e (43), como uma aplicação do Teorema 3.1, estamos prontos para provar o Teorema 3.2.

3.4.1 Prova do Teorema 3.2

Prova. Seja $\chi(r) := \int_{D(r)} R dV$. Pelo Teorema 2.5, temos que

$$\begin{aligned}\chi(r) &= \int_0^r ds \int_{\partial D(s)} \frac{R}{|\nabla \rho|} dA \\ &= \frac{1}{2} \int_0^r s ds \int_{\partial D(s)} \frac{R}{|\nabla f|} dA,\end{aligned}$$

onde usamos que para $x \in \partial D(s)$ temos $\frac{1}{|\nabla \rho(x)|} = \frac{s}{2} \frac{1}{|\nabla f(x)|}$, para todo $0 < s \leq r$. Portanto, usando o Teorema Fundamental do Cálculo deduzimos que

$$\chi'(r) = \frac{r}{2} \int_{\partial D(r)} \frac{R}{|\nabla f|} dA. \quad (44)$$

Assim, pelo Lema 3.4,

$$nV(r) - rV'(r) = 2\chi(r) - \frac{4}{r}\chi'(r).$$

Daí, multiplicando ambos os membros por r^{-n-1} , e usando o fato que

$$[r^{-n}V(r)]' = -(r^{-n-1}nV(r) - r^{-n}V'(r)), \text{ temos}$$

$$(r^{-n}V(r))' = 4r^{-n-2}\chi'(r) - 2r^{-n-1}\chi(r).$$

Integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{r_0}^r 4r^{-n-2}\chi'(r) dr &= [4r^{-n-2}\chi(r)]_{r_0}^r - 4 \int_{r_0}^r (-n-2)r^{-n-3}\chi(r) dr \\ &= [4r^{-n-2}\chi(r)]_{r_0}^r + 4 \int_{r_0}^r (n+2)r^{-n-3}\chi(r) dr.\end{aligned} \quad (45)$$

Agora, aplicando (45) ao integrarmos ambos os membros de

$$(r^{-n}V(r))' = 4r^{-n-2}\chi'(r) - 2r^{-n-1}\chi(r)$$

de r_0 até r , obtemos

$$\begin{aligned}r^{-n}V(r) - r_0^{-n}V(r_0) &= [4r^{-n-2}\chi(r)]_{r_0}^r + 4(n+2) \int_{r_0}^r r^{-n-3}\chi(r) dr - 2 \int_{r_0}^r r^{-n-1}\chi(r) dr \\ &= 4r^{-n-2}\chi(r) - 4r_0^{-n-2}\chi(r_0) \\ &\quad + 2 \int_{r_0}^r r^{-n-3}\chi(r)(2(n+2) - r^2) dr.\end{aligned} \quad (46)$$

Como pelo Lema 3.3 temos $R \geq 0$, e por

$$\chi'(s) = \frac{s}{2} \int_{\partial D(s)} \frac{R}{|\nabla f|} dA,$$

para todo $0 < s \leq r$, temos que $\chi(s)$ é crescente. Também, pela definição de $\chi(s)$, e por $R \geq 0$, temos $\chi(s) \geq 0$.

Agora, sendo $r' > 0$ tal que $V(r') > 0$, defina $r_0 := \max\{\sqrt{2(n+2)}, r'\}$, e por $r^2 > r_0^2 \geq 2(n+2)$, e $\chi(s)$ ser função crescente e positiva, temos

$$r^{-n-3}\chi(r)(2(n+2) - r^2) \leq \chi(r_0)r^{-n-3}(2(n+2) - r^2).$$

Integrando entre r_0 , r , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^r r^{-n-3}\chi(r)(2(n+2) - r^2)dr &\leq \chi(r_0) \int_{r_0}^r r^{-n-3}(2(n+2) - r^2)dr \\ &= \chi(r_0) \left[-2r^{-n-2} + \frac{r^{-n}}{n} \right]_{r_0}^r. \end{aligned}$$

Isto substituído em (46), nos diz que

$$\begin{aligned} r^{-n}V(r) - r_0^{-n}V(r_0) &\leq 4r^{-n-2}\chi(r) - 4r_0^{-n-2}\chi(r_0) + 2\chi(r_0) \left[-2r^{-n-2} + \frac{r^{-n}}{n} \right]_{r_0}^r \\ &= 4r^{-n-2}\chi(r) - 4r_0^{-n-2}\chi(r_0) + 2\chi(r_0) \left(-2r^{-n-2} + 2r_0^{-n-2} + \frac{r^{-n} - r_0^{-n}}{n} \right) \\ &\leq 4r^{-n-2}\chi(r) - 4r_0^{-n-2}\chi(r_0) + 2\chi(r_0) \left(\frac{r^{-n} - r_0^{-n}}{n} \right) + 4\chi(r_0)r_0^{-n-2} \\ &\leq 4r^{-n-2}(\chi(r)), \end{aligned} \tag{47}$$

já que $\chi(r_0) \geq 0$ e $\left(\frac{r^{-n} - r_0^{-n}}{n} \right) \leq 0$.

Por outro lado, como $\int_{D(r)} R \leq \frac{n}{2}V(r)$, temos $\chi(r) \leq \frac{n}{2}V(r)$, e então, multiplicando ambos os membros por $4r^{-2}$, geramos

$$4r^{-2}\chi(r) \leq 2nr^{-2}V(r) \leq \frac{1}{2}V(r),$$

já que podemos tomar $r > r_0 \geq \sqrt{2(n+2)}$ suficientemente grande de tal sorte que valha $2nr^{-2} \leq \frac{1}{2}$. Assim, substituindo esta informação em (47), obtemos

$$\begin{aligned} V(r) &\leq 4r^{-2}\chi(r) + r_0^{-n}r^nV(r_0) \\ &\leq \frac{1}{2}V(r) + r_0^{-n}V(r_0)r^n, \end{aligned}$$

para $r > 0$ suficientemente grande, implicando em

$$V(r) \leq 2r_0^{-n}V(r_0)r^n,$$

onde $V(r_0) > 0$.

Mas, para todo $x \in B_{x_0}(r)$, onde $x_0 \in M$ está fixado na hipótese, temos $|x - x_0| < r$, e pelo Teorema 3.1, $\rho(x) := 2\sqrt{f(x)} < d(x, x_0) + c < r + c$, onde $c > 0$ é a constante

originada do Teorema 3.1, que depende da dimensão, e da geometria da bola unitária centrada em x_0 . Logo, de $\rho(x) := 2\sqrt{f(x)} < d(x, x_0) + c < r + c$, temos que, dado $x \in B_{x_0}(r)$, devemos ter $x \in D(r + c)$, lembrando que $D(r + c) := \{x \in M; \rho(x) < r + c\}$.

Portanto, $B_{x_0}(r) \subset D(r + c)$ e, conseqüentemente,

$$\text{Vol}(B_{x_0}(r)) \leq V(r + c).$$

Mas, para $r > r_0$, e tal que $2nr^{-2} \leq \frac{1}{2}$, temos $V(r) \leq 2r_0^{-n}V(r_0)r^n$, e assim,

$$\text{Vol}(B_{x_0}(r)) \leq V(r + c) \leq 2r_0^{-n}V(r_0)(r + c)^n.$$

Deste modo, segue que, se também tivermos $r > c$, então

$$\begin{aligned} \text{Vol}(B_{x_0}(r)) &\leq V(r + c) \\ &\leq V(2r) \\ &\leq 2r_0^{-n}V(r_0)(2r)^n \\ &= 2^{n+1}r_0^{-n}V(r_0)r^n. \end{aligned} \tag{48}$$

Com efeito, temos que para $r > 0$ suficientemente grande, e fazendo $C_1 = 2^{n+1}r_0^{-n}V(r_0)$, obtemos o resultado $\text{Vol}(B_{x_0}(r)) \leq C_1r^n$, sendo C_1 constante positiva. Desta forma, o teorema está provado.

□

4 CONCLUSÃO

Neste trabalho, apresentamos dois resultados importantes da teoria de sólitons de Ricci gradientes obtidos por Huai-Dong Cao e Detang Zhou em 2010 e publicado no *Journal of Differential Geometry*.

Primeiro, mostramos estimativas superior e inferior da função potencial de um sólito de Ricci gradiente *shrinking* completo e não compacto. Em segundo, como consequência do primeiro resultado, mostramos uma estimativa superior para a taxa de crescimento do volume das bolas geodésicas de um sólito de Ricci gradiente *shrinking* completo e não compacto. Em particular, como consequência destes dois fatos, que foram tratados neste presente trabalho, podemos concluir mais dois fatos importantes nessa teoria. Primeiro, que adicionando-se uma hipótese na curvatura escalar, consegue-se uma estimativa inferior para o volume da bola geodésica, de raio suficientemente grande, em um sólito de Ricci gradiente *shrinking* completo e não compacto. Segundo, que o volume ponderado de um sólito de Ricci gradiente *shrinking* completo e não compacto é finito.

REFERÊNCIAS

- BATISTA, R. M. **Rigidez de solitons gradiente**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Matemática, Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013. Disponível em: <http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/7218>. Acesso em: 12 nov. 2019.
- CAO, H.-D. Recent progress on Ricci solitons. **Adv. Lect. Math. (ALM)**, United States, v. 11, 2010, p. 1-38.
- CAO, H.-D.; ZHOU, D. On complete gradient Ricci solitons. **J. Differential Geom**, United States, v. 85, n. 2, p. 175-186, 2010.
- CARRILLO, J. A.; NI, L. Sharp logarithmic Sobolev inequalities on gradient solitons and applications. **Commun. Anal. Geom.**, United States, v. 17, p. 721-753, 2009.
- CHOW, B.; LU, P.; NI, L. **Hamilton's Ricci flow**. Providence, R.I. : American Mathematical Society, 2006. (Graduate Studies in Mathematics, 77).
- CARMO, M. P. do. **Geometria riemanniana**. 4 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. (Projeto Euclides)
- FELDMAN, M., ILMANEN, T. KNOPFF, D. Rotationally symmetric shrinking and expanding gradient Kahler Ricci solitons. **J. Differential Geometry**, United States, v. 65, p. 169-209, 2003,
- HAMILTON, R. S. Three manifolds with positive Ricci curvature. **J. Differential Geometry**, United States, v. 17, n. 2, p. 255-306, 1982.
- HOLOPAINEN, I. **Riemannian geometry**. Helsinki: University of Helsinki, 2010.
- JOST, J. **Riemannian geometry and geometric analysis**. 6th. ed. Berlim: Springer-Verlag, 2011.
- LEE, J. M. **Introduction to riemannian manifolds**. 2nd ed. New York: Springer, 2009.
- LEE, J. M. **Introduction to smooth manifolds**. New York: Springer, 2009.