



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**  
**PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE**  
**NACIONAL**

**LISANDRA MAYARA DOS SANTOS**

**RAZÃO ÁUREA: ABORDAGEM HISTÓRICA, APLICAÇÕES E SUA RELAÇÃO**  
**COM FIBONACCI**

**FORTALEZA**

**2020**

LISANDRA MAYARA DOS SANTOS

RAZÃO ÁUREA: ABORDAGEM HISTÓRICA, APLICAÇÕES E SUA RELAÇÃO COM  
FIBONACCI

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

FORTALEZA

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

S236r Santos, Lisandra Mayara dos.  
Razão Áurea: abordagem histórica, aplicações e sua relação com Fibonacci / Lisandra Mayara dos Santos. –  
2020.  
86 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de  
Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2020.  
Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo..

1. Número de Ouro. 2. Razão Áurea. 3. Sequência de Fibonacci. I. Título.

CDD 510

---

LISANDRA MAYARA DOS SANTOS

RAZÃO ÁUREA: ABORDAGEM HISTÓRICA, APLICAÇÕES E SUA RELAÇÃO COM  
FIBONACCI

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino da Matemática

Aprovada em: 23/10/2020.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Ângelo Papa Neto  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente agradeço a Deus pela força e sabedoria que tem me concedido para escrever este trabalho.

Aos meus pais por terem me criado com todo amor e carinho, sempre me apoiando e ajudando no que for necessário.

Agradeço imensamente ao meu esposo Wilker Andrade dos Santos Mota pelo apoio, motivação e muita compreensão durante esses anos de estudos.

A todos os professores do curso, pela dedicação e paciência, além do interesse e esforço em prol da aprendizagem dos educandos.

Não poderia esquecer-me dos amigos e amigas de turma pela convivência e amizade das quais jamais esquecerei.

Em especial ao meu orientador Professor Marcelo Ferreira de Melo pelo apoio, conselhos e orientação para a realização deste trabalho.

## RESUMO

A presente dissertação tem por objetivo realizar um estudo sobre o Número de Ouro, também chamado de Razão Áurea, número este que tem impressionado muitos pesquisadores ao longo da história por suas inúmeras aplicações no cotidiano. Inicialmente é apresentada a definição algébrica da Razão Áurea, algumas de suas propriedades e sua relação intrínseca com a sequência de Fibonacci. Através de uma abordagem histórica apresentamos inúmeras aplicações da Razão Áurea na Arquitetura, na Botânica, no corpo humano e também dentro da própria matemática, mais especificamente, na Geometria. Ao final do trabalho é feita uma análise de questões nos Vestibulares e Enem que envolvem este conceito, enfatizando assim a importância destes temas no ensino básico como uma oportunidade de despertar nos educandos uma nova forma de pensar a matemática como ciência transformadora da sociedade. Além disto, faremos a sugestão de algumas atividades que compreendem Número de Ouro associando-o a construções geométricas, outras áreas da matemática e até mesmo algumas curiosidades.

**Palavras-chave:** Número de Ouro; razão áurea; sequência de Fibonacci; geometria; ensino básico.

## ABSTRACT

This dissertation aims to conduct a study on the Golden Number, also called Golden Ratio, a number that has impressed many researchers throughout history for its numerous applications in everyday life. Initially, the algebraic definition of the Golden Ratio, some of its properties and its intrinsic relationship with the Fibonacci sequence are presented. Through a historical approach we present numerous applications of the Golden Reason in Architecture, in Botany, in the human body and also within mathematics itself, more specifically, in Geometry. At the end of the work, an analysis of questions in Vestibular and Enem that involve this concept is made, thus emphasizing the importance of these themes in basic education as an opportunity to awaken in students a new way of thinking about mathematics as a science that transforms society. In addition, we suggest some activities that comprise the Golden Number associating it with geometric constructions, other areas of mathematics and even some curiosities.

**Keywords:** gold number; golden ratio; Fibonacci sequence; geometry; basic education.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Estrela de Cinco Pontas .....	13
Figura 2 - Pentágono e Pentagrama .....	13
Figura 3 - Formação do Pentagrama.....	13
Figura 4 - Segmento Áureo .....	14
Figura 5 - Leonardo Fibonacci .....	19
Figura 6 - Número de Reflexões dos Espelhos .....	22
Figura 7 - Reprodução das Abelhas.....	23
Figura 8 - Diagonais de Um Pentágono.....	33
Figura 9 - Propriedade da Auto Propagação.....	33
Figura 10 - Pentágono Regular com duas diagonais .....	34
Figura 11 - Pentágono com duas diagonais e seus ângulos internos .....	34
Figura 12 - Triângulo Isósceles ACD.....	35
Figura 13 - Triângulos Isósceles ACD e CDF.....	36
Figura 14 - Quadrado ABCD .....	37
Figura 15 - Quadrado ABCD com os pontos médios E e F .....	37
Figura 16 - Diagonal FB do retângulo EBDF.....	38
Figura 17 - Prolongamento DG do lado CD.....	38
Figura 18 - Retângulo ACGH.....	39
Figura 19 - O Olho de Deus.....	40
Figura 20 - Espiral de Ouro dentro da série de retângulos .....	41
Figura 21- Espiral de Ouro a partir da série dos triângulos áureos .....	41
Figura 22 - Decágono Regular.....	42
Figura 23 - Dodecaedro Regular com os retângulos áureos .....	43
Figura 24 - Icosaedro Regular com os retângulos áureos.....	43
Figura 25 - Dodecaedro inscrito em um Icosaedro.....	44
Figura 26 - Icosaedro inscrito em um Dodecaedro.....	44
Figura 27 - Espiral Equiangular.....	45
Figura 28 - Voo do Falcão – Peregrino em forma de Espiral.....	46
Figura 29 - Girassol .....	46
Figura 30 - Concha dos Nautilus .....	47
Figura 31 - Espiral dos Nautilus e Espiral de Ouro.....	48



Figura 32 - Filotoxia.....	49
Figura 33 - Número de Fibonacci no crescimento dos ramos .....	50
Figura 34 - Sólidos de "A Proporção Divina" .....	51
Figura 35 - MonaLisa e o Retângulo Áureo .....	52
Figura 36 - A virgem dos Rochedos.....	52
Figura 37 - Homem Vitruviano e a Proporção Divina .....	53
Figura 38 - Modular de Le Corbusier.....	54
Figura 39 - Templo de Partenon.....	55
Figura 40 - Frente do Templo de Partenon.....	56
Figura 41 - Série de Retângulos Áureos no templo de Partenon.....	56
Figura 42 - Vista de cima da Pirâmide .....	57
Figura 43 - Razão Áurea e Geometria Plana .....	63
Figura 44 - Circunferência $\alpha$ .....	65
Figura 45 - Circunferência $\beta$ .....	65
Figura 46 - Pontos de Intersecção.....	66
Figura 47 - Determinação da Mediatriz.....	66
Figura 48 - Média e Extrema Razão .....	67
Figura 49 - Segmento de Reta AB e seu ponto médio M.....	68
Figura 50 - Circunferência de raio AB .....	69
Figura 51 - Intersecção da reta perpendicular com a circunferência.....	69
Figura 52 - Construção geométrica do $\phi$ .....	70
Figura 53 - Quadrado ABEF .....	71
Figura 54 - Arco EC .....	71
Figura 55 - Construção Geométrica do Retângulo Áureo .....	72
Figura 56 - Painéis solares e folhas .....	73
Figura 57 - Segmento com razão Áurea .....	75
Figura 58 - Pentágono razão $y/x$ .....	76
Figura 59 - Pentágono e os triângulos semelhantes.....	76
Figura 60 - Proporções no rosto humano.....	77
Figura 61 - Padrão de Harmonia.....	79
Figura 62 - MonaLisa e as Proporções Áureas .....	80
Figura 63 - Retângulos na MonaLisa .....	80
Figura 64 - Partenon e o Retângulo Áureo .....	82

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1- Problema dos Coelhos .....	20
Tabela 2 - Relação entre o número de Reflexões com Raios emergidos .....	22
Tabela 3 - Razão entre valores consecutivos de uma sequência arbitrária.....	26
Tabela 4 - Tabela da Razão Filotática .....	49
Tabela 5 - Tabela com dimensões da Pirâmide .....	58
Tabela 6 - Razões entre medidas do corpo humano .....	60

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	10
<b>2</b>	<b>RAZÃO ÁUREA: ORIGEM E DEFINIÇÕES</b> .....	12
<b>2.1</b>	<b>Origem</b> .....	12
<b>2.2</b>	<b>Definição</b> .....	14
<b>2.2.1</b>	<b>Valor Numérico</b> .....	15
<b>2.3</b>	<b>Propriedades</b> .....	17
<b>3</b>	<b>O VÍNCULO ENTRE O NÚMERO DE OURO E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI</b> .....	19
<b>3.1</b>	<b>O problema do coelho de Fibonacci</b> .....	20
<b>3.2</b>	<b>Fórmula de Binet</b> .....	23
<b>3.3</b>	<b>Propriedades Elementares da Sequência de Fibonacci</b> .....	28
<b>4</b>	<b>OCORRÊNCIAS NA GEOMETRIA</b> .....	32
<b>4.1</b>	<b>Pentágono regular e o Triângulo de Ouro</b> .....	32
<b>4.2</b>	<b>Retângulo de Ouro</b> .....	37
<b>4.3</b>	<b>Espiral de Ouro</b> .....	40
<b>4.4</b>	<b>Outras figuras geométricas relacionadas à Razão Áurea</b> .....	42
<b>5</b>	<b>OCORRÊNCIAS NA NATUREZA E NA CIÊNCIA</b> .....	45
<b>5.1</b>	<b>Espiral de Ouro na Natureza</b> .....	45
<b>5.2</b>	<b>Número de Ouro nas Artes</b> .....	50
<b>5.3</b>	<b>Número de Ouro na Arquitetura</b> .....	55
<b>6</b>	<b>APLICAÇÕES NO ENSINO BÁSICO</b> .....	59
<b>6.1</b>	<b>Atividades a serem propostas</b> .....	59
<b>6.1.1</b>	<b>Atividade I</b> .....	59
<b>6.1.2</b>	<b>Atividade II</b> .....	61
<b>6.1.3</b>	<b>Atividade III</b> .....	63
<b>6.1.4</b>	<b>Atividade IV</b> .....	64
<b>6.2</b>	<b>Sequência de Fibonacci e razão áurea nos vestibulares e Enem</b> .....	72
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO</b> .....	83
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	84

## 1 INTRODUÇÃO

Desde a disposição das folhas em uma árvore até grandes construções arquitetônicas, como o Partenon e as grandes pirâmides do Egito, inúmeras são as aplicações do número de Ouro. Você perceberá que este número, 1,61803..., faz suas aparições desde Conferências sobre História da Arte como em lista de números favoritos selecionados por matemáticos. O objetivo principal deste trabalho é apresentar a origem e a definição do Número de Ouro e da sequência de Fibonacci, bem como suas propriedades, oferecendo meios necessários para a introdução destes temas no Ensino Básico com sugestão de atividades e apresentação de questões de Vestibulares e Enem

Uma das motivações para este trabalho está nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) que afirma que “A História da Matemática, mediante um processo de transposição didática e juntamente com outros recursos didáticos e metodológicos, pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem em Matemática.” Sugerindo também o trabalho com "Resolução de situações-problema que envolvam a obtenção da mediatriz de um segmento, da bissetriz de um ângulo, de retas paralelas e perpendiculares e de alguns ângulos notáveis, fazendo uso de instrumentos como régua, compasso, esquadro e transferidor".

Temos então: Por um lado a História da Matemática despertando o interesse e trazendo uma maior compreensão dos conceitos matemáticos. E por outro lado, as construções geométricas que estimulam o aluno a desenvolver melhor o conteúdo de Geometria Plana.

Por apresentar uma grande variedade de aplicações seja na própria matemática ou em outras disciplinas, este é um excelente conteúdo que pode ser trabalhado no ensino fundamental. Ao final do trabalho, iremos propor um projeto de atividade em sala de aula em que os estudantes terão a oportunidade de fazer uma correlação entre o conteúdo matemático e a realidade no mundo exterior. Na atividade proposta além dos conceitos de história da matemática são trabalhados conceitos de construção geométrica como construção de retas perpendiculares, mediatriz, circunferência, quadrado, pentágono, retângulo e divisão de segmento.

Este estudo apresenta cinco capítulos no seu desenvolvimento, organizados da seguinte forma: No primeiro capítulo disserta-se sobre a origem da Razão Áurea, sua definição geométrica e valor numérico. São apresentadas ainda algumas propriedades deste número, bem como suas respectivas demonstrações. O segundo capítulo trata sobre a relação do número de Ouro com a sequência de Fibonacci, iniciando com a apresentação do célebre problema dos coelhos. Em seguida apresenta propriedades elementares desta sequência e a fórmula de Binet, usada para determinar um termo qualquer de uma sequência de Fibonacci. Já no terceiro capítulo é feita uma explanação sobre as aplicações do número de Ouro na Geometria, apresentando várias figuras geométricas vinculadas a Razão Áurea. O quarto capítulo versa sobre os ambientes, objetos e seres nos quais geralmente se anunciam que o número de Ouro aparece. E, por fim, no quinto capítulo são sugeridas atividades que podem ser aplicadas no Ensino Básico envolvendo a sequência de Fibonacci e a Razão Áurea. Também é feita a análise e resolução de questões de vestibulares e Enem sobre o tema proposto na presente dissertação.

## 2 RAZÃO ÁUREA: ORIGEM E DEFINIÇÕES

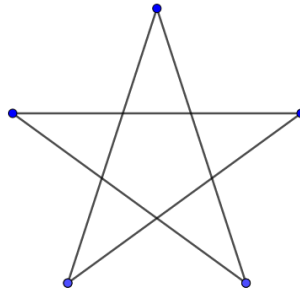
### 2.1 Origem

Existem alguns números invulgares que de alguma forma espantosa aparecem frequentemente na natureza e no cotidiano. Um dos mais conhecidos é o número Pi ( $\pi$ ), que representa a razão entre a circunferência de qualquer círculo e seu diâmetro. Menos popular que o número Pi, porém tão ou mais fascinante quanto, é o número Fi ( $\phi$ ).

São várias as aplicações e circunstâncias nas quais este belo número está presente. Um encantador arranjo de pétalas numa rosa vermelha, o famoso quadro “O Sacramento da Última Ceia”, de Salvador Dalí, as magníficas conchas espirais de moluscos e o pentagrama símbolo da irmandade Pitagórica são exemplos que possuem em comum este número. No século XIX o número Fi, recebeu o título honorífico de “Número Áureo”, “Razão Áurea” ou “Seção Áurea”, segundo Lívio (1). Ao longo deste trabalho usaremos os nomes Razão Áurea, Seção Áurea, Fi, Número de Ouro, Número Áureo e o símbolo  $\phi$ , visto que são as denominações mais comuns na literatura matemática.

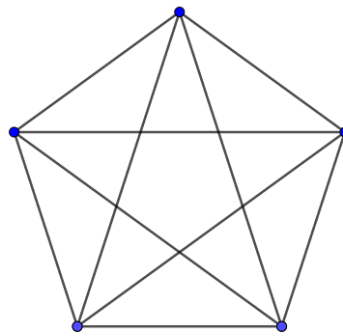
No decorrer da história é notável que tal número tem chamado a atenção de vários matemáticos, intrigando-os pela harmonia e beleza que desperta. Muitos pesquisadores acreditam que os Pitagóricos foram os primeiros a descobrir a Razão Áurea e a incomensurabilidade. Pitágoras de Samos foi um filósofo e matemático grego, fundador da escola Pitagórica. Segundo os Pitagóricos, o cosmo é regido por relações matemáticas. O símbolo de sua irmandade era o pentagrama – a estrela de cinco pontas (Figura 1) – e o nomeavam de Saúde. O pentagrama pode ser obtido ligando todos os vértices do pentágono regular por diagonais (Figura 2). Tais diagonais também formam um pentágono menor no centro, e as diagonais desse pentágono formam um pentagrama e um pentágono ainda menor. Este processo pode prosseguir indefinidamente, produzindo pentágonos e pentagramas cada vez menores (Figura 3). O pentagrama e o pentágono regular estão carregados de relações com o Número Áureo, como veremos adiante.

Figura 1 - Estrela de Cinco Pontas



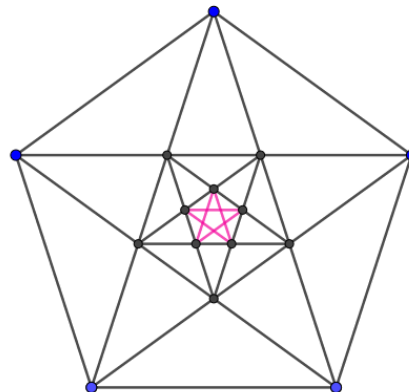
Fonte: elaborada pela autora.

Figura 2 - Pentágono e Pentagrama



Fonte: elaborada pela autora.

Figura 3 - Formação do Pentagrama



Fonte: elaborada pela autora.

A primeira descrição clara da Razão Áurea foi dada 300 a.C. pelo fundador da geometria como sistema dedutivo formalizado, Euclides de Alexandria, porém diversos são os registros de matemáticos que se dedicaram a estudar tal tema. Na Grécia antiga, temos Pitágoras e Euclides, na Idade Média podemos citar o matemático italiano Leonardo de Pisa e

o astrônomo renascentista Johannes Kepler, além de sujeitos do presente como o físico de Oxford, Roger Penrose. O mais incrível é que o fascínio pelo número de Ouro não se limita aos matemáticos. Estudiosos de diversas áreas têm pesquisado e explorado a onipresença deste número, dentre eles biólogos, artistas, músicos, historiadores, arquitetos, psicólogos e até místicos. Segundo Lívio (1), a Razão Áurea tem inspirado pensadores de todas as disciplinas mais do que qualquer outro número na história da Matemática.

## 2.2 Definição

Existem inúmeras formas de dividir um segmento  $\overline{AB}$  em duas partes. O matemático alemão Zeizing afirmou, em 1855, a seguinte declaração: "Para que um todo dividido em duas partes desiguais pareça belo do ponto de vista da forma, deve apresentar entre a parte menor e a maior a mesma relação que entre esta e o todo."

A primeira definição da Razão Áurea ("razão extrema e média") foi dada por volta de 300 a.C. por Euclides de Alexandria. Nas palavras de Euclides: "Diz-se que uma linha reta é cortada na razão extrema e média quando, assim como a linha toda está para o maior segmento, o maior segmento está para o menor" (Figura 4).

A definição geométrica da Razão Áurea é: Dado um segmento  $\overline{AB}$ , para escolher um ponto C entre A e B, tal que C divida o segmento  $\overline{AB}$  pela Proporção Áurea, é necessário que sendo  $\overline{AC} > \overline{BC}$ , então  $\overline{AC}$  dividido por  $\overline{BC}$  é igual a  $\overline{AB}$  dividido por  $\overline{AC}$ .

Figura 4 - Segmento Áureo



Fonte: elaborada pela autora.

Com isso, temos a relação matemática:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

Apenas em 1899 que começou a utilizar-se a letra grega Phi ( $\Phi$ ) (lê-se fi) para representar o Número de Ouro. Até então, usava-se a letra grega tau ( $\tau$ ), que em grego, significa "o corte", entretanto o matemático americano Mark Barr, sugeriu começar a utilizar a letra Phi fazendo menção a Fídias, um dos maiores escultores e arquitetos da Grécia que



viveu entre 490 e 460 a.C.. Alguns historiadores da arte sustentam que Fídias utilizava Razão Áurea como fator de proporção em suas esculturas. As maiores realizações desse escultor foram o “Partenon de Atenas” e o “Zeus” no templo de Olímpia.

### 2.2.1 Valor Numérico

A Razão Áurea possui propriedades verdadeiramente únicas. Para que possamos estudá-las, iremos primeiros achar o valor exato de  $\Phi$ . Considerando o segmento  $\overline{AC} = x$  e  $\overline{BC} = y$  e substituindo os valores na definição, temos:

$$\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x} \quad (1)$$

Multiplicando os dois lados da equação (1) por  $y$ , obtemos  $x^2 = xy + y^2$ , que equivale à simples equação quadrática abaixo. Fixando  $y$ , iremos obter o valor de  $x$  em função de  $y$ .

$$x^2 - xy - y^2 = 0 \quad (2)$$

Observe que obtemos uma equação de 2º grau de coeficientes  $a = 1, b = -y$  e  $c = -y^2$ . Logo, temos que o discriminante da equação (2) é dado por:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-y)^2 - 4.1.(-y^2) = y^2 + 4y^2 = 5y^2$$

Aplicando o discriminante na fórmula de Bháskara, temos:

$$x = \frac{-(-y) \pm \sqrt{5y^2}}{2} = \frac{y \pm y\sqrt{5}}{2} = \frac{y(1 \pm \sqrt{5})}{2} \rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Portanto, obtemos as duas soluções (3) e (4).

$$\frac{x}{y} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (3)$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad (4)$$

Visto que  $x$  e  $y$  são segmentos de reta, então não podem assumir valor negativo. Logo concluímos que a solução positiva  $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887\dots$  nos concede o valor da razão Áurea. Vemos claramente que  $\Phi$  é irracional, já que é a metade da soma de 1 com a raiz quadrada de 5. Denotemos a solução negativa por  $\Phi'$ .

Existem algumas expressões que curiosamente resultam no número de ouro. Uma delas é:

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

Indicando o valor desta expressão por  $x$ , temos:

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}} \quad (5)$$

Elevando os dois membros da equação (5) ao quadrado, temos:

$$x^2 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}^2 \rightarrow x^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}} \quad (6)$$

A segunda expressão do lado direito da equação (6) é na verdade igual ao nosso  $x$  da equação (5). Logo basta substituir  $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$  por  $x$  na equação (6) e temos:

$$x^2 = 1 + x \rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \quad (7)$$

Para  $x > 0$ , temos que:

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

Outra expressão que resulta na Razão Áurea, desta vez envolvendo frações, é:

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}$$

Tomando como base nossa experiência anterior, podemos começar denotando o valor por  $x$ . Assim,

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}} \quad (8)$$

Note que, o denominador do segundo termo do lado direito da equação (8) é, de fato, idêntico ao valor de  $x$ . Portanto, temos a equação:

$$x = 1 + \frac{1}{x} \quad (9)$$

Multiplicando os dois lados da equação (9) por  $x$ , obtemos  $x^2 = x + 1$ , que é novamente a equação que define a Razão Áurea! Assim, essa notável fração contínua também é igual a  $\Phi$ .

### 2.3 Propriedades

Podemos obter algumas relações a respeito de  $\Phi$  e  $\Phi'$ . Observe:

i.  $\Phi' = -\frac{1}{\Phi}$ .

**Demonstração:** Sabendo que  $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , temos:

$$\begin{aligned} \Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \rightarrow \frac{1}{\Phi} &= \frac{2}{1 + \sqrt{5}} \rightarrow \frac{1}{\Phi} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} \rightarrow \frac{1}{\Phi} = \frac{2 - 2\sqrt{5}}{1 - 5} \\ &\rightarrow \frac{1}{\Phi} = \frac{2 - 2\sqrt{5}}{-4}. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{-2}$$

Com isto,

$$-\frac{1}{\Phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \Phi' \quad (10)$$

Como queríamos mostrar. ■

ii. O produto de  $\Phi$  com  $\Phi'$  é igual a -1.

**Demonstração:** De fato, segue da equação (10) que

$$\Phi \cdot \Phi' = \Phi \cdot \left(-\frac{1}{\Phi}\right) = -1$$

■

iii. A soma de  $\Phi$  com  $\Phi'$  é igual a 1.

**Demonstração:**

$$\Phi + \Phi' = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

■

iv. O número  $\Phi$  é um real positivo que subtraído de uma unidade torna-se seu inverso.

**Demonstração:** De fato, pelo item anterior tem-se  $\Phi + \Phi' = 1$ . Ao reorganizar os termos obtemos que:

$$\Phi - 1 = -\Phi' = \frac{1}{\Phi}$$

■

Segundo Livio, podemos verificar algumas destas propriedades interessantes usando uma simples calculadora científica de bolso. Digite o número 1,6180339887 e aperte  $[x^2]$ . Você vê alguma coisa surpreendente? Agora digite o número de novo, e desta vez aperte o botão  $[1/x]$ . Enquanto o quadrado do número 1,6180339887... dá 2,6180339887..., seu inverso ("um sobre") dá 0,6180339887..., todos tendo exatamente os mesmos dígitos depois da vírgula! A Razão Áurea tem as propriedades únicas de produzir seu quadrado simplesmente somando 1, e seu recíproco subtraindo 1, como já demonstramos.

### 3 O VÍNCULO ENTRE O NÚMERO DE OURO E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Leonardo de Pisa, também conhecido como Leonardo Fibonacci, foi o mais ilustre matemático europeu da Idade Média, trazendo novos capítulos interessantes na história do número de Ouro.

O papel de Fibonacci na história da Razão Áurea é realmente fascinante. Por um lado, nos problemas em que usava conscientemente a Razão Áurea, foi responsável por um progresso significativo, mas não espetacular. Por outro, simplesmente formulando um problema que, em princípio, nada tinha a ver ele expandiu drasticamente o escopo da Razão Áurea e de suas aplicações. (1)

Fibonacci (Figura 5) nasceu na década de 1170, na cidade de Pisa, na região da Toscana (Itália). Devido ao trabalho de seu pai, comerciante e funcionário do governo Italiano chamado Guglielmo, ele teve a oportunidade de conhecer vários países e culturas e assim entrar em contato com as diferentes formas de trabalho com a matemática.

Figura 5 - Leonardo Fibonacci



Fonte: Clube de Exatas

Após estudar e comparar diferentes sistemas numéricos e métodos de operações aritméticas, Fibonacci concluiu que os numerais indo-arábicos (que incluíam o princípio do valor de lugar) eram muitos superiores aos outros métodos. Desta forma, ele dedicou os sete primeiros capítulos de seu primeiro e mais conhecido livro, *Liber Abaci* (Livro do Ábaco – 1202), a explicações sobre a notação indo – arábica e suas aplicações práticas.

O *Liber Abaci* deu a Fibonacci um reconhecimento considerável, e sua fama chegou até os ouvidos do imperador romano Frederico II. O papel de Leonardo Bigollo (“Bigollo” significa “viajante” no dialeto toscano) na introdução dos algarismos indo-arábicos na Europa foi imprescindível. Além disto, ficou conhecido também pela famosa sequência numérica que o matemático francês Edouard Lucas no século XIX chamou de sequência de Fibonacci.

A contribuição mais importante de Fibonacci para a Razão Áurea (e a que trouxe mais fama para ele) foi um problema encontrado no Capítulo XII do *Liber Abaci*.

### 3.1 O problema do coelho de Fibonacci

O problema encontrado no capítulo XII do Liber Abaci, dizia o seguinte:

“Um homem pôs um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir deste par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá à luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês?”

De fato, a solução do problema é bastante simples. No primeiro mês temos apenas o par de coelhos inicial. No segundo mês, como o par de coelhos ainda não é fértil, então continuou apenas com um par de coelhos. No terceiro mês, o par de coelhos dá à luz a outro par de coelhos, então teremos dois pares de coelhos. No quarto mês o primeiro par de coelhos dá à luz a outro par, mas o segundo par de coelhos ainda não é fértil, totalizando três pares de coelhos nesse mês. No quinto mês, o primeiro casal de coelhos gera outro casal, o segundo casal também dá à luz a outro casal de coelho, mas o terceiro casal ainda não é fértil, totalizando então cinco pares de coelhos. Neste ponto, entendemos como proceder para obter o número de pares adultos, de pares filhotes e o total de pares nos sucessivos meses. Este número é formado pelo número de pares adultos no mês anterior, mais o número de pares de filhotes (que amadureceram) do mesmo mês anterior. Porém, o número de pares de filhotes do mês anterior é, na verdade, igual ao número de pares de adultos que existia no mês que antecedeu o mês em questão. Observe na tabela 1, o número de coelhos em cada mês:

Tabela 1- Problema dos Coelhos

Mês	Nº de pares adultos	Nº de pares de filhotes	Total
1º	0	1	1
2º	1	0	1
3º	1	1	2
4º	2	1	3
5º	3	2	5
6º	5	3	8
7º	8	5	13
8º	13	8	21
9º	21	13	34
10º	34	21	55
11º	55	34	89
12º	89	55	144

Fonte: elaborada pela autora.

A sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ..., na qual cada termo corresponde à soma dos dois anteriores, foi apropriadamente chamada de sequência de

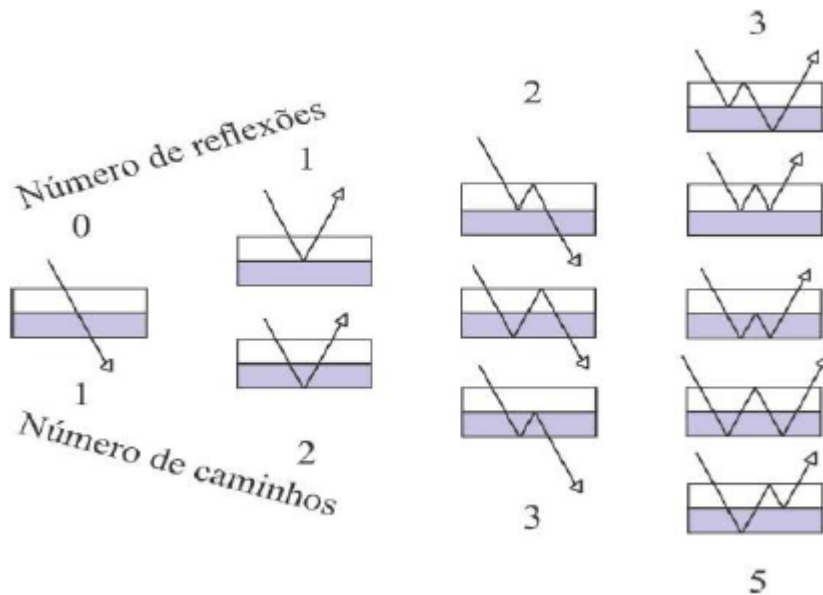
Fibonacci no século XIX pelo matemático francês Edouard Lucas ( 1842 -1891). A solução para o nosso problema então é o décimo segundo termo desta sequência. Portanto, teremos 144 pares de coelho ao final de um ano.

Sequências de números nas quais a relação entre termos sucessivos pode ser expressa por uma fórmula matemática são conhecidas como recursivas. A propriedade geral de que cada termo na sequência é igual à soma dos dois anteriores é expressa matematicamente como:  $F_{n+2} = F_{n-1} + F_n$ . Aqui,  $F_n$  representa o n-ésimo número na sequência (por exemplo,  $F_3$  é o terceiro termo).  $F_{n+1}$  é o termo que segue  $F_n$  e  $F_{n+2}$  vem depois de  $F_{n+1}$ .

O nome de Fibonacci é tão conhecido nos dias de hoje porque a sua sequência está longe de ficar limitada à reprodução de coelhos. Seja nas quantidades de pétalas das mais diversas flores, na óptica dos raios de luz, na árvore genealógica de um zangão, na distribuição de folhas em um caule, diversas são as suas aplicações.

Vamos analisar um fenômeno que está tão distante do tema da procriação de coelhos quanto se pode imaginar – a óptica dos raios de luz. Suponha uma situação em que se sobreponha duas placas de vidros com índices de refração diferentes. Ao colocar essas placas a exposição da luz, esta pode passar pela placa sem sofrer nenhuma reflexão, pode sofrer uma reflexão, duas reflexões, três reflexões, quatro reflexões e assim por diante. A sequência de Fibonacci vai aparecer nesse caso, quando contarmos o número de raios que emergiram desse sistema. Na figura 6 abaixo está representado o número de caminhos de acordo com cada número de reflexões. No caso de nenhuma reflexão, observe que somente existirá um raio emergido. No caso de sofrer uma reflexão interna, temos duas possibilidades de raios de luz emergentes. Na próxima parte, no caso de duas reflexões internas, teremos três possibilidades de raios emergidos. Continuando o raciocínio, na parte de três reflexões internas, teremos cinco raios emergidos.

Figura 6 - Número de Reflexões dos Espelhos



Fonte: Landim (2)

Note que a sequência dos números de raios emergidos desde o caso em que não tem nenhuma reflexão forma uma Sequência de Fibonacci (1, 2, 3, 5, 8, 13, ...) como mostra a Tabela 2.

Tabela 2 - Relação entre o número de Reflexões com Raios emergidos

Reflexões	Número de Raios Emergidos
0	1
1	2
2	3
3	5
4	8
5	13

Fonte: elaborada pela autora.

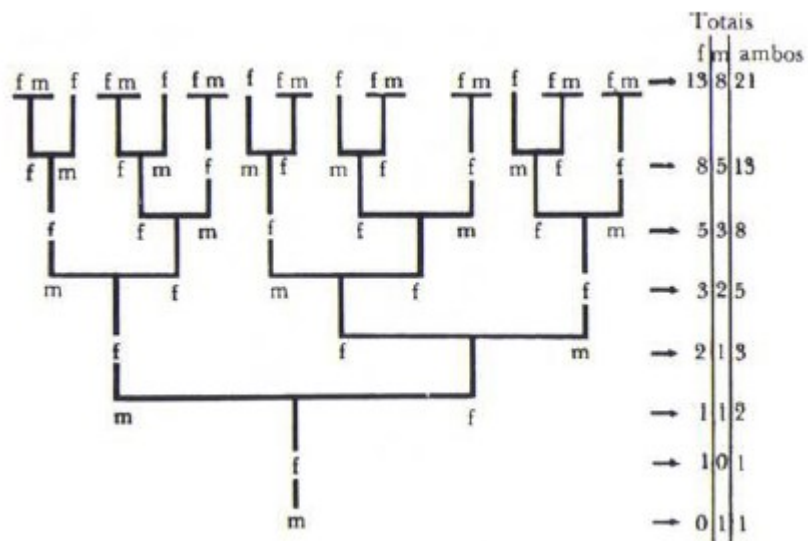
Outro caso, em que aparece a Sequência de Fibonacci é na árvore genealógica do Zangão, o macho da abelha. Os ovos de abelhas operárias que não são fertilizados se tornam



zangões. Desse modo, um zangão não tem um “pai”, somente uma “mãe”. Os ovos da rainha, por outro lado, são fertilizados por zangões e se tornam fêmeas (operárias ou rainhas).

Observe que um zangão tem uma mãe, dois avós, três bisavós, cinco trisavós e assim por diante. Os números da árvore genealógica 1, 1, 2, 3, 5, ... formam uma sequência de Fibonacci. A figura 7 abaixo, diz respeito a árvore genealógica do zangão.

Figura 7 - Reprodução das Abelhas



Fonte: Livio (10)

Nos próximos capítulos veremos mais algumas aplicações. No entanto, como essa sequência de Fibonacci se relaciona com a Razão Áurea?

### 3.2 Fórmula de Binet

Antes de mostrar a relação entre a Sequência de Fibonacci e a Razão Áurea, iremos estudar uma fórmula que nos permite calcular o n-ésimo termo da sequência sem precisar dos dois termos anteriores. A fórmula é a seguinte:

Para todo  $n \in \mathbb{N}^*$ , tem-se que:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

A fórmula acima é chamada de Fórmula de Binet, pois segundo Lívio (1):

Em meados do século XIX, o matemático francês Jacques Phillippe Marie Binet (1786 a 1856) redescobriu uma fórmula que, aparentemente, era conhecida no século XVIII pelo mais prolífico matemático da história, Leonard Euler (1707 a 1783), e pelo matemático francês Abraham de Moivre (1667 a 1754).

Para verificar a fórmula de Binet, devemos mostrar que, de fato, ela nos permite encontrar todos os termos das seqüências de Fibonacci. Para isso,  $F_1 = F_2 = 1$  e  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ , para  $n \geq 3$ . Assim, usaremos o Princípio de Indução Matemática, mas antes iremos enuncia-lo:

Princípio de Indução Matemática: Seja  $a \in \mathbb{N}$  e seja  $p(n)$  uma sentença aberta em  $n$ .

Suponha que:

- i.  $p(a)$  é verdade, e que
- ii.  $\forall n \geq a, p(n) \Rightarrow p(n+1)$  é verdade, então  $p(n)$  é verdade.

Inicialmente, vamos verificar que a fórmula de Binet satisfaz as condições iniciais, ou seja,  $F_1 = F_2 = 1$ .

De fato, para  $n=1$ , temos:

$$F_1 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5} - 1 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

Para  $n=2$ , temos:

$$F_2 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = \frac{1+2\sqrt{5}+5 - (1-2\sqrt{5}+5)}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

Portanto, as condições iniciais são válidas. Agora, mostraremos pelo Princípio da Indução Matemática que a sentença é verdadeira, para todo número natural  $n \geq 3$ .

Para  $n=3$ , temos:

$$\begin{aligned} F_3 &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3}{\sqrt{5}} = \frac{1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5} - (1-3\sqrt{5}+15-5\sqrt{5})}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{6\sqrt{5}+10\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2. \end{aligned}$$

Suponha que a Fórmula de Binet, vale para  $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$ . Vamos mostrar que a sentença também vale para  $n + 1$ :

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1\right)}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{2^2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1-2\sqrt{5}+5}{2^2}\right)}{\sqrt{5}} = \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Logo, a fórmula vale para  $n+1$ . Portanto, pelo Princípio de Indução Matemática, a fórmula vale para todo  $n > 3$ .

Agora examine novamente a sequência de Fibonacci e, desta vez, observe as razões dos termos sucessivos como descrito na Tabela 3.

Tabela 3 - Razão entre valores consecutivos de uma sequência arbitrária

Razão	Resultado
1/1	1
2/1	2
3/2	1,5
5/3	1,666
8/5	1,600
13/8	1,625
21/13	1,6153
34/21	1,6190
55/34	1,6176
89/55	1,6181
144/89	1,6179

Fonte: elaborada pela autora.

À medida que avançamos na sequência de Fibonacci, a razão entre dois números sucessivos de Fibonacci oscila em torno da Razão Áurea (sendo alternadamente maior e menor), mas se aproxima cada vez mais dela. Se denotamos o  $n$ -ésimo número de Fibonacci como  $F_n$  e o seguinte como  $F_{n+1}$ , então descobriremos  $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ , se aproxima de  $\Phi$  quando  $n$  aumenta.

Provaremos que esta razão realmente se aproxima de  $\Phi$ .

**Demonstração:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}}{\frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1}}{\sqrt{5}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}\right]}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left[1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}\right]} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}}{1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{1 - \left(\frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)^{n-1}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Observe que  $-1 < \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-1} < 0$ , logo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-1} = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n-1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{1}\right) = \Phi. \end{aligned}$$

Desta forma, demonstramos que a razão entre dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci vai convergir para o número de Ouro. O número de Ouro também está relacionado a problemas geométricos que veremos no próximo capítulo embasado nos resultados que provamos anteriormente.

### 3.3 Propriedades Elementares da Sequência de Fibonacci

Conforme Zahn (3) (2011 p.7):

**Proposição 2.1:** “Dada a sequência de Fibonacci ( $f_n$ ) Então,  $\forall n$ , são válidas as seguintes propriedades:”

- (a) Soma dos números da sequência:  $\sum_{i=1}^n f_i = f_{n+2} - 1$
- (b) Soma dos números de ordem ímpar da sequência:  $\sum_{i=1}^n f_{2i-1} = f_{2n}$
- (c) Soma dos números de ordem par da sequência:  $\sum_{i=1}^n 2i = f_{2n+1} - 1$
- (d) Soma dos quadrados dos números da sequência:  $\sum_{i=1}^n f_i^2 = f_n \cdot f_{n+1}$

#### Demonstrações:

- (a) Sabendo que na Sequência de Fibonacci, cada termo é definido como a soma dos dois termos imediatamente anteriores a ele, podemos escrever que:

$$f_1 = f_3 - f_2$$

$$f_2 = f_4 - f_3$$

$$f_3 = f_5 - f_4$$

$$\begin{aligned}
 f_4 &= f_6 - f_5 \\
 &\dots \\
 f_{n-1} &= f_{n+1} - f_n \\
 f_n &= f_{n+2} - f_{n+1}
 \end{aligned}$$

Somando os dois lados da desigualdade acima, teremos:

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + \dots + f_{n-1} + f_n = f_{n+2} - 1$$

Ou seja,  $\sum_{i=1}^n f_i = f_{n+2} - 1$ . Como queríamos mostrar.

(b) Observando a Sequência de Fibonacci, podemos notar que:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= f_2 \\
 f_3 &= f_4 - f_2 \\
 f_5 &= f_6 - f_4 \\
 f_7 &= f_8 - f_6 \\
 &\dots \\
 f_{2n-1} &= f_{2n} - f_{2n-2}
 \end{aligned}$$

Somando os dois lados das igualdades acima, teremos:

$$f_1 + f_3 + f_5 + f_7 + \dots + f_{2n-1} = f_{2n}$$

Ou seja,  $\sum_{i=1}^n f_{2i-1} = f_{2n}$ .

(c) Para demonstrar a soma dos “n” primeiros termos de ordem par, iremos efetuar a soma dos termos até o termo que desejamos ( $f_{2n}$ ) menos a soma dos termos de ordem ímpar ( $f_1 + f_3 + f_5 + f_7 + \dots + f_{2n-1}$ ).

Adaptando a fórmula para a soma dos “n” primeiros termos, demonstrada no item a), para a soma dos “2n” primeiros termos, teremos:

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + \dots + f_{2n-1} + f_{2n} = f_{2n+2} - 1$$

Subtraindo da soma dos “2n” primeiros termos a soma dos termos de ordem ímpar (descrita no item b), temos:

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + \cdots + f_{2n-1} + f_{2n} - (f_1 + f_3 + f_5 + f_7 + \cdots + f_{2n-1}) \\ = f_{2n+2} - 1 - f_{2n} \Rightarrow$$

$$f_2 + f_4 + f_6 + f_8 + \cdots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$$

Ou seja,  $\sum_{i=1}^n 2i = f_{2n+1} - 1$ .

(d) Sabemos que pela definição da Sequência de Fibonacci, temos:

$$f_k = f_{k+1} - f_{k-1}$$

Multiplicando a equação acima por  $f_k$ , teremos:

$$f_k^2 = f_k \cdot f_{k+1} - f_k \cdot f_{k-1}$$

Substituindo na expressão acima, os valores para  $K= 1, 2, 3, 4, \dots, n$ , teremos:

$$K = 1 \rightarrow f_1^2 = f_1 \cdot f_2$$

$$K = 2 \rightarrow f_2^2 = f_2 \cdot f_3 - f_2 \cdot f_1$$

$$K = 3 \rightarrow f_3^2 = f_3 \cdot f_4 - f_3 \cdot f_2$$

$$K = 4 \rightarrow f_4^2 = f_4 \cdot f_5 - f_4 \cdot f_3$$

...

$$K = n \rightarrow f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1} - f_n \cdot f_{n-1}$$

Somando os dois lados da igualdade acima, teremos:

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 + \cdots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}$$

Ou seja,  $\sum_{i=1}^n f_i^2 = f_n \cdot f_{n+1}$ .

Apresenta-se a seguir um resumo das propriedades apresentadas em forma de aplicações numéricas. Seja a sequência de Fibonacci mostrada abaixo:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
F(n)	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	...



Da Proposição 2.1, foi visto que:

(a) Soma dos números da sequência:  $\sum_{i=1}^n f_i = f_{n+2} - 1$

Exemplo: Para  $n = 6$

$$1+1+2+3+5+8=20=f_8-1=21-1=20$$

(b) Soma dos números de ordem ímpar da sequência:  $\sum_{i=1}^n f_{2i-1} = f_{2n}$

Exemplo: Para  $n = 5$

$$1+2+5+13+34=55=f_{10}=55$$

(c) Soma dos números de ordem par da sequência:  $\sum_{i=1}^n 2f_i = f_{2n+1} - 1$

Exemplo: Para  $n = 4$

$$1+3+8+21=33=f_9-1=34-1=33$$

(d) Soma dos quadrados dos números da sequência:  $\sum_{i=1}^n f_i^2 = f_n \cdot f_{n+1}$

Exemplo: Para  $n = 4$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 15 = f_4 \cdot f_5 = 3 \cdot 5 = 15$$

## 4 OCORRÊNCIAS NA GEOMETRIA

Pode-se perceber a presença da Razão Áurea em diversas figuras geométricas como, Pentagrama, triângulo áureo, retângulo áureo, em algumas espirais e outras figuras geométricas. Todos os elementos descritos auxiliam na compreensão dos elementos da natureza. Por exemplo, a quantidade de folhas e o ângulo ideal para distribuição dos ramos de plantas podem estar relacionados ao Número de Ouro. A seguir temos construções geométricas áureas detalhadas e justificadas.

### 4.1 Pentágono regular e o Triângulo de Ouro

Pentágono é uma figura geométrica formada por cinco ângulos e lados. Um Pentágono é regular quando todos os seus lados e ângulos possuem a mesma medida. A soma dos ângulos internos de um polígono convexo de  $n$  lados ( $n \geq 3$ ) é dado pela seguinte fórmula matemática:

$$S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

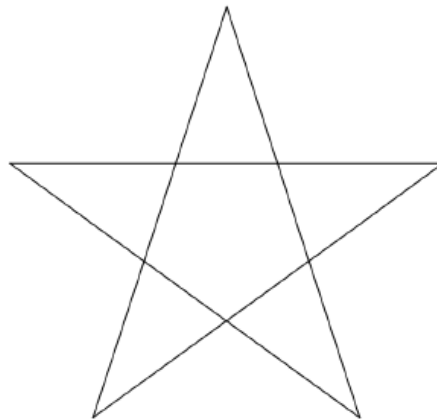
Logo, utilizando esta fórmula, a soma dos ângulos internos de um pentágono é:

$$S_5 = (5 - 2) \cdot 180^\circ = 3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$$

Como os ângulos internos de um polígono regular são todos congruentes, então podemos concluir que cada ângulo interno do pentágono regular mede  $108^\circ$ .

Como falado no capítulo 1, o pentagrama era utilizado como símbolo e emblema da sociedade Pitagórica. Ele pode ser obtido traçando todas as diagonais de um pentágono (Figura 8).

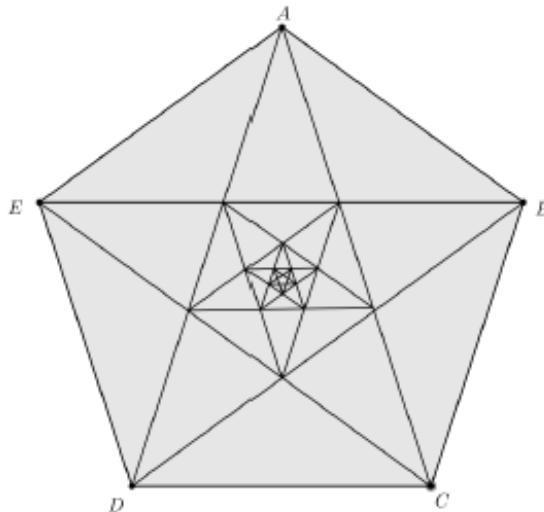
Figura 8 - Diagonais de Um Pentágono



Fonte: Francisco (4)

Note que após obter o pentagrama através do pentágono regular, em seu centro, obtemos outro pentágono regular. Traçando agora as diagonais do novo pentágono, teremos mais um pentágono e um pentagrama. Esse processo pode ser continuado infinitamente, obtendo pentágonos e pentagramas cada vez menores, conforme Figura 9. Esse processo é conhecido como auto propagação.

Figura 9 - Propriedade da Auto Propagação

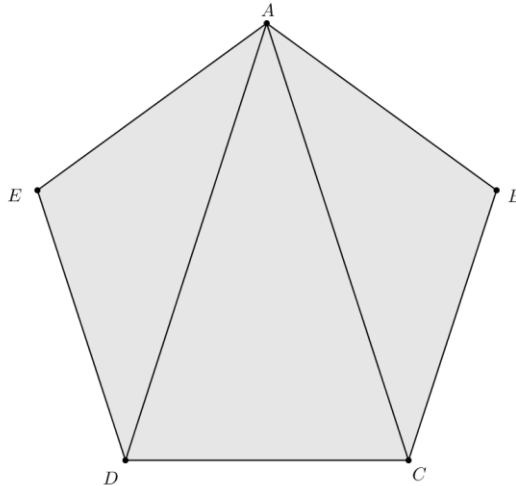


Fonte: Francisco (4)

Observe que dado um pentágono regular  $ABCDE$ , traçando as duas diagonais partindo de  $A$ , obtemos três triângulos isósceles:  $ABC$ ,  $ACD$  e  $ADE$  (Figura 10).  $ADE$  e  $ABC$  são isósceles pois os dois lados iguais desses triângulos são os lados do pentágono e o outro triângulo isósceles é  $ACD$ , pois os lados iguais desse triângulo são as duas diagonais do

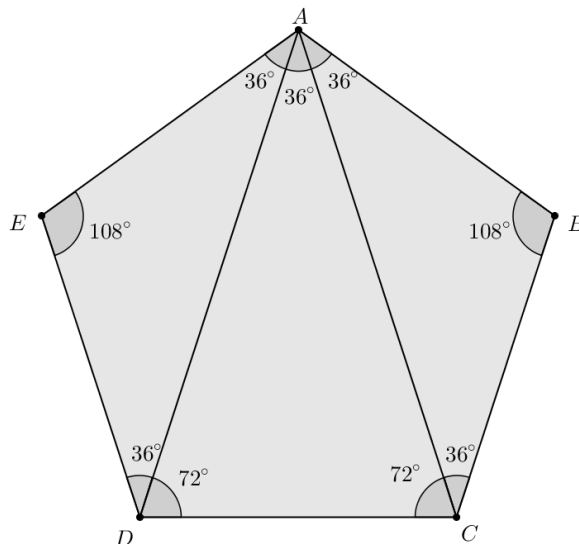
pentágono. Em um triângulo isósceles os ângulos da base são iguais. Assim nos triângulos ADE e ABC, os ângulos da base irão medir  $36^\circ$ , que é a metade de  $180 - 108$ , e o triângulo ACD possui os ângulos da base medindo  $72$  graus e o outro medindo  $36$  graus (Figura 11).

Figura 10 - Pentágono Regular com duas diagonais



Fonte: Francisco (4)

Figura 11 - Pentágono com duas diagonais e seus ângulos internos

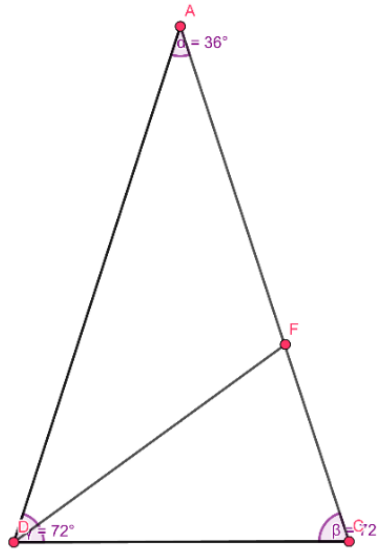


Fonte: Francisco (4)

Considerando agora somente o triângulo isósceles ACD e traçando a bissetriz interna do ângulo D desse triângulo, essa bissetriz intercepta o lado AC no ponto F. O triângulo CDF também é isósceles, pois como  $\overline{DF}$  é bissetriz, então o ângulo  $\hat{D}$ , interno nesse triângulo, mede  $36$  graus. Visto que  $\hat{C}$  mede  $72$  graus, então  $\hat{F}$  medirá também  $72$  graus pela soma dos

ângulos internos do triângulo. Assim, o triângulo CDF é isósceles com lados iguais  $\overline{CD}$  e  $\overline{DF}$  (Figura 12).

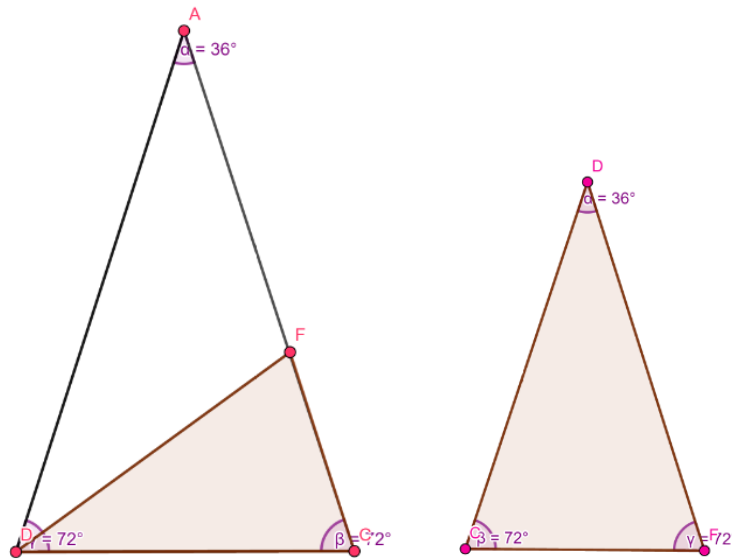
Figura 12 - Triângulo Isósceles ACD



Fonte: elaborada pela autora.

Observando agora os triângulos ACD e CDF, note que eles possuem os três ângulos iguais. O ângulo  $\hat{C}$  é comum aos dois triângulos, o ângulo  $\hat{D}$ , interno ao triângulo CDF, é congruente ao ângulo  $\hat{A}$ , interno a ACD, e por consequência o terceiro ângulo dos dois triângulos serão iguais. Assim, ACD é semelhante a CDF (Figura 13).

Figura 13 - Triângulos Isósceles ACD e CDF



Fonte: elaborada pela autora.

Aplicando a relação de semelhança nos dois triângulos, temos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CF}}$$

Como ADF e CDF são isósceles, então temos que  $\overline{CD} = \overline{DF} = \overline{AF}$ . Substituindo esta relação na igualdade acima, encontramos que:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{CF}}$$

Tal relação nos mostra que a bissetriz interna do ângulo da base divide o lado oposto em média e extrema razão. Portanto, o triângulo ADC é chamado de **Triângulo Áureo**.

Como o triângulo ACD é Áureo, a razão  $\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}}$  é justamente o número de Ouro. Observando que  $\overline{AD}$  é a diagonal do Pentágono Inicial ABCDE e  $\overline{CD}$  é a medida do lado do Pentágono, podemos constatar a presença da Razão Áurea também no Pentágono, através da razão entre a diagonal e o lado.

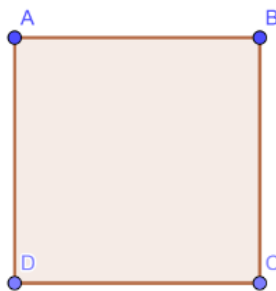
## 4.2 Retângulo de Ouro

Através do estudo da teoria das proporções, o matemático grego Endoxus constatou que a Razão Áurea era uma importante fonte para a estética, considerando o retângulo cujos lados apresentavam essa relação de notável harmonia. Endoxus chamou-o então, de Retângulo Áureo. Chama-se retângulo áureo a qualquer retângulo no qual as suas medidas estão na Razão Áurea.

Como construir um retângulo que pode ser considerado como Áureo a partir de segmento qualquer  $\overline{AB}$ ? Observe:

1º Passo: Com a medida do segmento  $\overline{AB}$  determinado, construa um quadrado ABCD de lado medindo  $\overline{AB}$  (Figura 14).

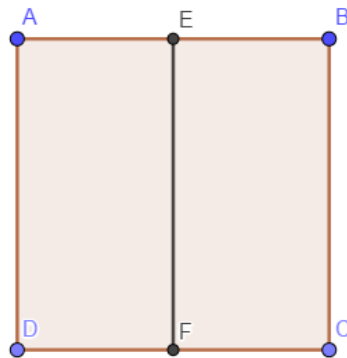
Figura 14 - Quadrado ABCD



Fonte: elaborada pela autora.

2º Passo: Sendo os pontos E e F os pontos médios dos segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ , respectivamente. Trace o segmento  $\overline{EF}$ .

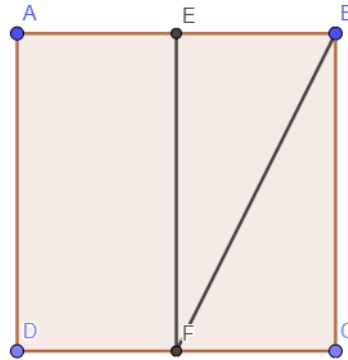
Figura 15 - Quadrado ABCD com os pontos médios E e F



Fonte: elaborada pela autora.

3º Passo: Trace a diagonal  $\overline{FB}$  do retângulo EBCF.

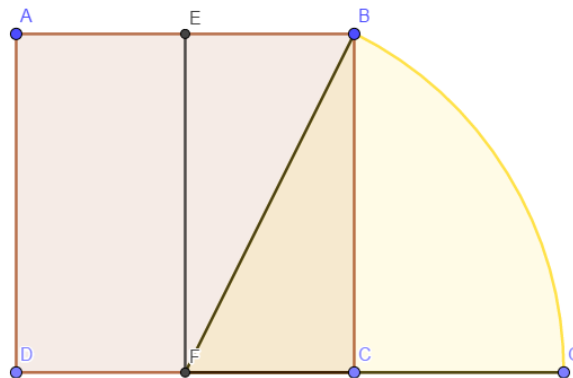
Figura 16 - Diagonal FB do retângulo EBCF



Fonte: elaborada pela autora.

4º Passo: Prolongue o lado  $\overline{CD}$ . Usando um compasso com centro em F, trace um arco com raio  $\overline{BF}$ . O ponto de encontro do prolongamento do lado  $\overline{CD}$  com o arco se chamará G.

Figura 17- Prolongamento DG do lado CD

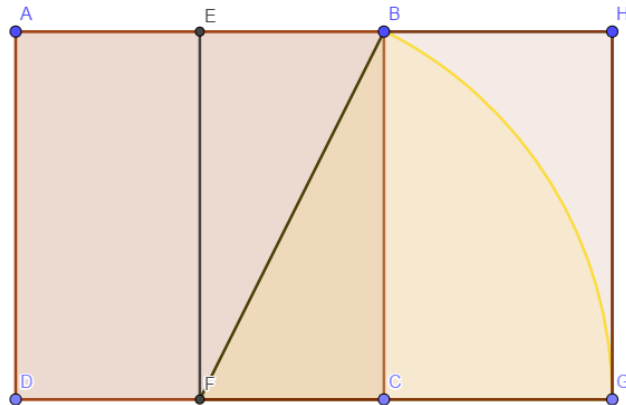


Fonte: elaborada pela autora.

5º Passo: Construa o retângulo BCGH junto ao quadrado ABCD. Formou-se um retângulo maior ADGH. Este último retângulo é um retângulo Áureo.



Figura 18 - Retângulo ACGH



Fonte: elaborada pela autora.

Demonstraremos agora por que este retângulo é um retângulo áureo. Observe:

Chamando o lado do quadrado ABCD de  $x$  e sabendo que o triângulo FBD é retângulo, usaremos o teorema de Pitágoras para medir o segmento  $\overline{BF}$ .

$$\begin{aligned}\overline{BF}^2 &= \overline{BC}^2 + \overline{CF}^2 \rightarrow \overline{BF}^2 = x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \rightarrow \overline{BF}^2 = x^2 + \frac{x^2}{4} \rightarrow \overline{BF}^2 = \frac{5x^2}{4} \rightarrow \\ &\rightarrow \overline{BF} = \frac{x\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

Mas vimos que  $\overline{BF} = \overline{FG}$  e  $\overline{DG} = \overline{DF} + \overline{FG}$ , então  $\overline{DG}$  será igual a:

$$\overline{DG} = \overline{DF} + \overline{FG} \rightarrow \overline{DG} = \frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{5}}{2} \rightarrow \overline{DG} = \frac{x+x\sqrt{5}}{2} = \frac{x \cdot (1+\sqrt{5})}{2}$$

Calculando a razão entre o maior e menor lado do retângulo, temos:

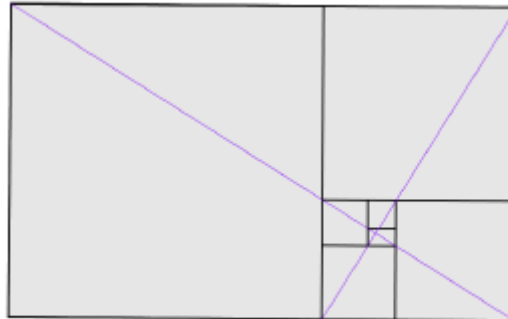
$$\frac{\overline{DG}}{\overline{AD}} = \frac{\frac{x \cdot (1+\sqrt{5})}{2}}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

De acordo com a definição, temos então que o retângulo ACGH é um Retângulo de Ouro, por construção.

O Retângulo Áureo é o único retângulo com a propriedade de que, ao se cortar um quadrado forma-se outro retângulo similar. Segundo Lívio (1), tal sequência de retângulos continuamente decrescentes converge para um ponto inalcançável que, devido às propriedades “divinas” atribuídas à Razão Áurea, o matemático Clifford A. Pickover sugeriu que deveríamos nos referir a esse ponto como “O Olho de Deus”. Se desenharmos duas diagonais

em qualquer par de retângulo pai – filho da série, como na Figura 19, todas irão se cruzar no mesmo ponto, assim obtemos o ponto denominado como o “Olho de Deus”.

Figura 19 - O Olho de Deus



Fonte: Francisco (4)

Um famoso psicólogo alemão, Gustav Fechner, realizou na década de 1960 experiências com o objetivo de estudar o interesse estético especial que encontramos no retângulo áureo. Tais experiências consistiam em mostrar a vários voluntários dez retângulos onde o quociente entre comprimento e largura variavam de 1,00 (no caso de um quadrado) à 2,5 (o que seria um retângulo alongado). Era pedido aos voluntários que escolhessem o retângulo mais agradável, elegante e harmônico. Fechner constatou que 76% das escolhas se concentraram em três retângulos que tinham as razões 1,50, 1,62 e 1,75, com pico no retângulo áureo (1,62). Cada um dos demais retângulos foi escolhido por menos de 10% dos voluntários. (1)

### 4.3 Espiral de Ouro

A espiral logarítmica, também conhecida como espiral equiangular, possui relação direta com o número de Ouro. Esta última denotação foi cunhada em 1638 pelo matemático e filósofo René Descartes (1596-1650). O nome “equiangular” se refere a uma propriedade única da espiral logarítmica, a autossimilaridade. Significa que à medida que aumentamos o raio da espiral no sentido horário, a curva não altera seu formato. Entusiasmado com essa propriedade, Jaques escreveu sobre a Espiral Logarítmica:

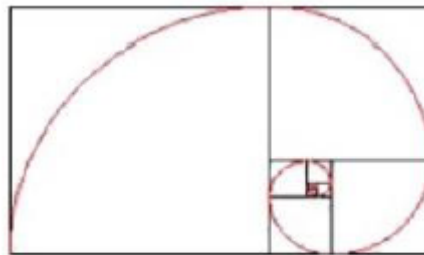
“Pode ser usada como um símbolo tanto de vigor e constância na adversidade quanto do corpo humano, o qual, após todas as mudanças, até mesmo após a morte, será restaurado ao seu exato e perfeito ser”.

A espiral Logarítmica pode ser percebida no Retângulo de Ouro e no Triângulo de Ouro. Já vimos que no interior do retângulo áureo, forma-se um quadrado cujo lado mede o lado menor do retângulo e forma-se também um retângulo ao lado do quadrado com as mesmas características do Retângulo Áureo. Repetindo o mesmo processo indefinidamente, nesse novo retângulo menor formado obteremos a chamada Série de Retângulos Áureos, representada na Figura 19.

Unindo os arcos de circunferência dentro dos quadrados na Série de Retângulos Áureos formamos a Espiral de Ouro. (Figura 20)

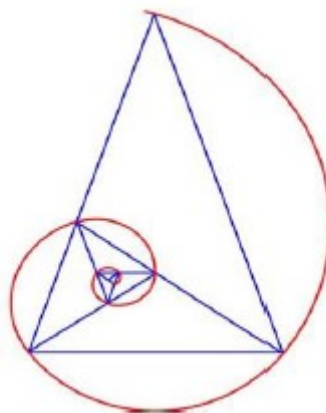
Da mesma forma, no triângulo Áureo temos a formação de uma Série de Triângulos Áureos. Unindo os vértices desses triângulos por meio de uma linha contínua obtemos também a Espiral de Ouro. (Figura 21)

Figura 20 - Espiral de Ouro dentro da série de retângulos



Fonte: Livio (1)

Figura 21- Espiral de Ouro a partir da série dos triângulos áureos



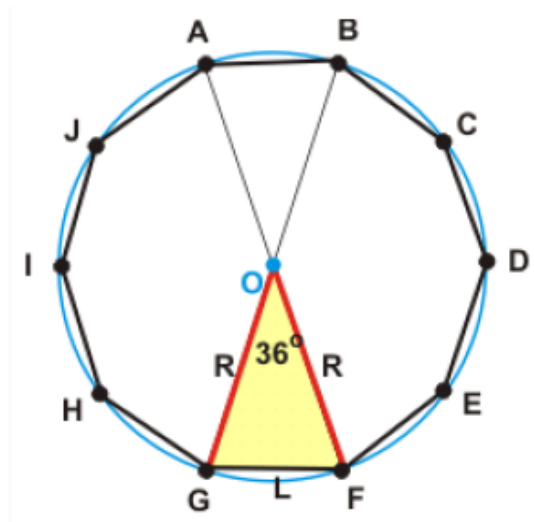
Fonte: Livio (1)

#### 4.4 Outras figuras geométricas relacionadas à Razão Áurea

Podemos perceber a presença do Número Áureo também no Decágono Regular (Polígono Regular de dez lados), Dodecaedro Regular (Poliedro de 12 faces) e o Icosaedro (Poliedro de vinte faces). Apesar de ter uma maior aplicação na Geometria Plana, também podemos encontrar aplicações do Número de Ouro na Geometria Espacial.

O Decágono Regular é um polígono de dez lados iguais que é inscrito em uma circunferência. Dessa forma, se dividirmos o raio dessa circunferência pelo lado do Decágono, encontramos justamente o Número de Ouro. (Figura 22)

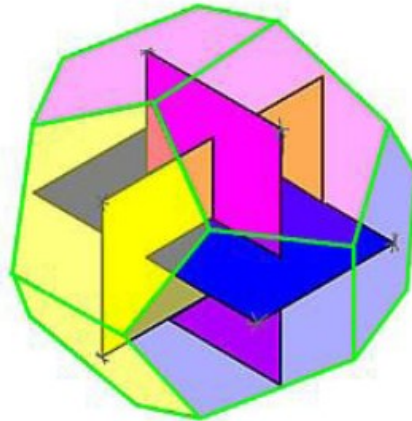
Figura 22 - Decágono Regular



Fonte: Landim (2)

De acordo com Mario Lívio, (1) O Dodecaedro regular é um poliedro composto por doze faces, sendo todos pentágonos regulares, o centro dessas doze faces podem ser divididos em três grupos de quatro, e cada um desses grupos formam um Retângulo Áureo.

Figura 23 - Dodecaedro Regular com os retângulos áureos



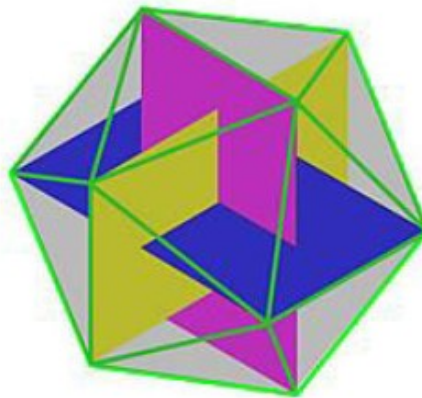
Fonte: Landim (2)

Considerando um Dodecaedro Regular de aresta 1, por exemplo, encontramos que a Área Total de sua superfície é  $15\Phi\sqrt{3-\Phi}$  e o volume é  $\frac{5\Phi^3}{6-2\Phi}$ .

Para o Icosaedro Regular, Mario Livio (1) afirma:

[...] se caracteriza por ser um poliedro composto de 20 faces, 12 vértices e 30 arestas. Podemos dividir os doze vértices de qualquer icosaedro regular e dividir em 3 grupos de quatro, onde encontraremos que os vértices de cada grupo formará um Retângulo Áureo.

Figura 24 - Icosaedro Regular com os retângulos áureos



Fonte: Landim (2)

Considerando um Icosaedro Regular com aresta de comprimento igual a 1, teremos seu volume  $\frac{5\Phi^5}{6}$ .

Se observamos um Dodecaedro inscrito em um Icosaedro (Figura 25) ou um Icosaedro inscrito em um Dodecaedro (Figura 26), em ambos os casos, a razão entre os comprimentos das arestas dos dois sólidos tem medida  $\Phi^2/\sqrt{5}$ .

Figura 25 - Dodecaedro inscrito em um Icosaedro



Fonte: Landim (2)

Figura 26 - Icosaedro inscrito em um Dodecaedro



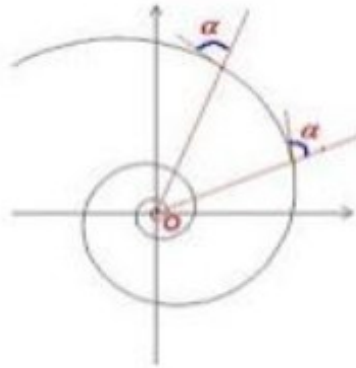
Fonte: Landim (2)

## 5 OCORRÊNCIAS NA NATUREZA E NA CIÊNCIA

### 5.1 Espiral de Ouro na Natureza

Conforme visto, a Espiral de Ouro também pode ser chamada de Espiral Equiangular. Este nome reflete outra propriedade da Espiral Logarítmica: Se traçarmos uma linha reta do polo até qualquer ponto da curva, ela cortará a curva formando exatamente sempre o mesmo ângulo.

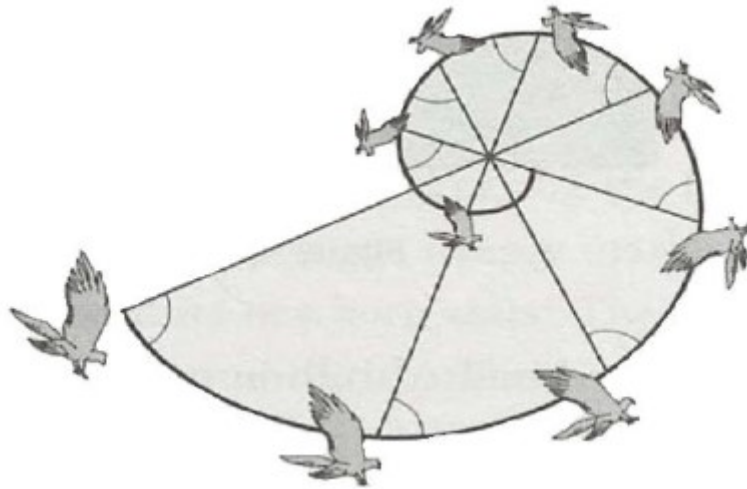
Figura 27 - Espiral Equiangular



Fonte: Livio (1)

Para atacar suas presas, os falcões-peregrinos usam essa propriedade. Pelo fato de seus olhos estarem nas laterais de sua cabeça, eles precisam inclinar a cabeça em torno de 40 graus para um dos lados e assim não perder o alvo de vista. Dessa forma, o falcão desce em rota de espiral logarítmica para poder manter esse ângulo constante, usando a propriedade Equiangular.

Figura 28 - Voo do Falcão – Peregrino em forma de Espiral



Fonte: Livio (1)

Algumas plantas curiosamente possuem números de Fibonacci escondidos por trás de sua beleza. Observando um girassol, por exemplo, percebemos que a distribuição de suas sementes é em formato de espiral (Figura 29). São várias espirais tanto no sentido horário quanto no sentido anti-horário e a quantidade delas está relacionada com os números de Fibonacci. Dependendo do tamanho do Girassol ele possui 21 espirais em um sentido e 34 no outro sentido, 34 espirais em um sentido e 55 em outro sentido, 55 e 89 ou 89 e 144, que são números de Fibonacci adjacentes.

Figura 29 - Girassol

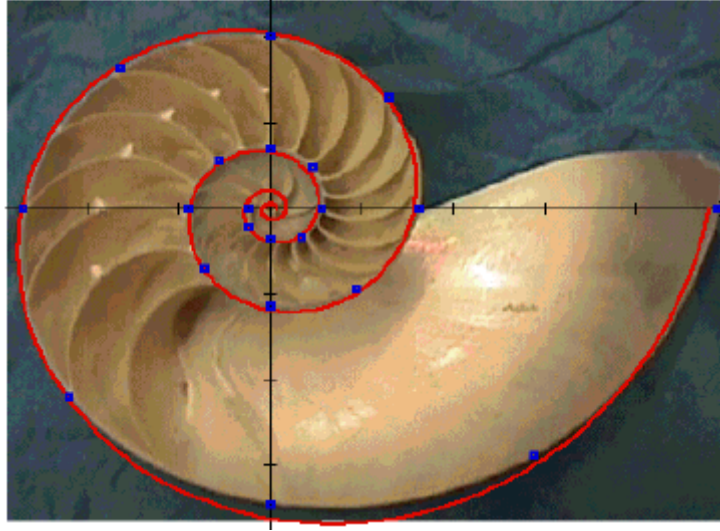


Fonte: Francisco (4)



Em alguns livros também encontramos a associação da concha de Náutilus com a Espiral de Ouro. Porém isto é um engano, como podemos ver na figura 30 abaixo:

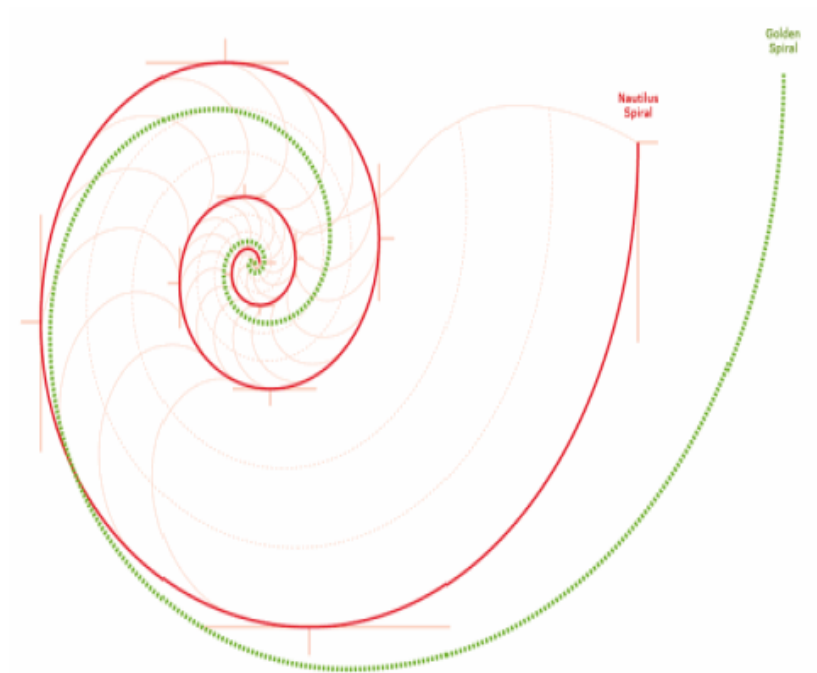
Figura 30 - Concha dos Nautilus



Fonte: Landim (2)

A concha de Náutilus cresce em espiral Logarítmica, mas essa espiral não é a espiral de Ouro. A figura abaixo mostra as duas curvas. A vermelha é a Espiral do Náutilus e a verde é a Espiral Áurea. Note que as curvas não se sobrepõem.

Figura 31 - Espiral dos Nautilus e Espiral de Ouro



Fonte: Landim (2)

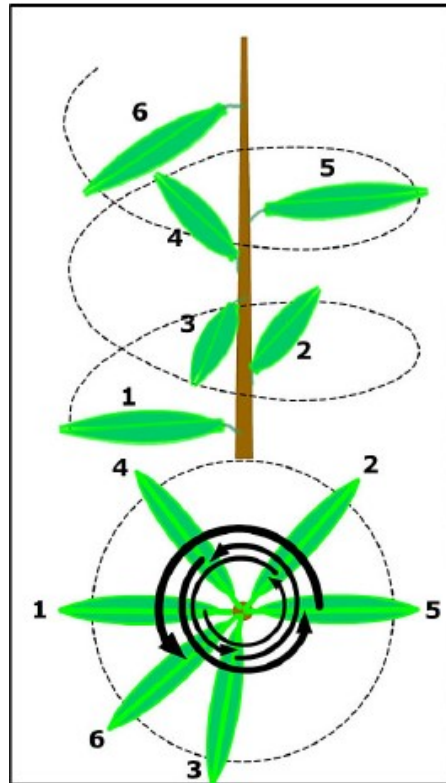
O termo Filotaxia, na Botânica, refere-se ao modo como as folhas crescem ao longo de um galho ou os talos ao longo de um ramo. Um talo vertical, por exemplo, cresce produzindo folhas com um espaço regular entre elas. As folhas não crescem umas sobre as outras, elas crescem em forma de espiral, visto que essa forma propicia um melhor aproveitamento de sua exposição ao sol, à chuva e ao ar (Figura 32).

A razão  $\frac{a}{b}$ , onde  $a$  é o número de voltas dadas pela espiral e  $b$  é o número de folhas que essa espiral passou, é considerada pelos botânicos como razão filotática. Tanto o numerador quanto o denominador na razão filotática tendem a serem números da Sequência de Fibonacci. Algumas razões filotáticas comuns são  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{8}{21}, \dots$ . Tais razões são de suma importância, pois determinadas espécies de plantas podem ser identificadas por sua razão filotática (Tabela 4).

Além de aparecerem relacionados às folhas das plantas, os números de Fibonacci também podem aparecer no crescimento dos ramos (Figura 33).

Nesta seção, vimos então diversas aplicações do número de Ouro, Sequência de Fibonacci e Espiral Áurea na Natureza. Veremos agora, algumas aplicações desse número nas Artes em geral.

Figura 32 - Filotxia



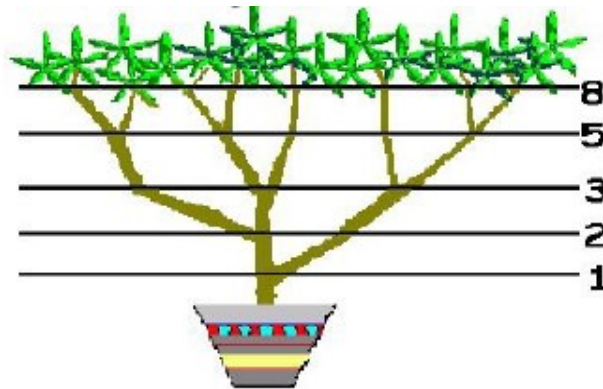
Fonte: Francisco (4)

Tabela 4 - Tabela da Razão Filotática

ESPÉCIE	RAZÃO FILOTÁTICA
Gramíneas	1/2
Ciperáceas	1/3
Macieiras	2/5
Tanchagens	3/8

Fonte: elaborada pela autora.

Figura 33 - Número de Fibonacci no crescimento dos ramos



Fonte: Mendes (5)

## 5.2 Número de Ouro nas Artes

No próprio corpo humano podemos encontrar algumas relações envolvendo a Razão Áurea através de medições. Alguns artistas, como Leonardo da Vinci e Le Corbusier, publicaram obras envolvendo estas relações. Na história da arte Renascentista também podemos perceber que a beleza nos quadros foi bastante explorada com base no número de Ouro.

Leonardo Di Ser Piero Da Vinci, ou simplesmente Leonardo Da Vinci, foi uma das figuras mais importantes do Alto Renascimento. Nascido no vilarejo de Anchiano, subordinado ao governo de Florença na atual Itália, no dia 15 de abril de 1452, Leonardo nasceu em uma época em que a Europa vivenciava mudanças ideológicas, culturais e sociais.

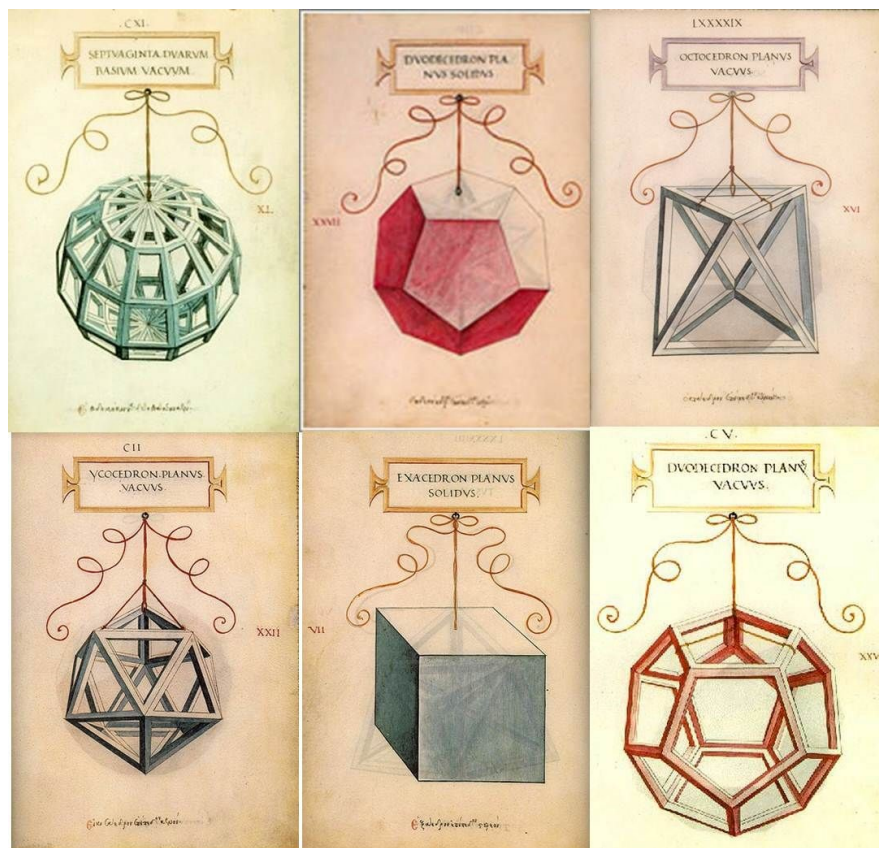
Da Vinci foi o Ilustrador do livro “A Proporção Divina” de Luca Pacioli (1445), no qual forneceu cerca de sessenta ilustrações de sólidos (Figura 34). Há cinco obras principais do artista em que se discute a presença intencional ou não da Proporção Áurea. São elas: “Virgem dos Rochedos”, “São Jerônimo”, o “Homem Vitruviano”, o desenho de uma “cabeça de ancião” e a famosa “Monalisa”.

No quadro Mona Lisa, há várias possíveis referências a Razão Áurea. Se desenharmos, por exemplo, um retângulo em torno do rosto da personagem, a altura dividida pela largura dará aproximadamente 1,618 (Figura 35). No caso de a “Virgem dos Rochedos” temos duas versões da obra: uma atualmente no Louvre, em Paris, e outra na National Gallery, em

Londres. A razão entre a altura e a largura da pintura que está no Louvre é de 1,64 e da outra é de 1,58, ambas razões próximas do Número de Ouro (Figura 36).

Já em o “Homem Vitruviano”, era objetivo de Leonardo da Vinci esboçar as proporções perfeitas do corpo humano. O desenho foi proposto por Marcus Vitruvius Pollio em sua obra Os Dez Livros da Arquitetura no século I a.C. A proposta era o modelo ideal do corpo Humano, onde parte de suas medidas baseavam-se na Razão Áurea (Figura 37).

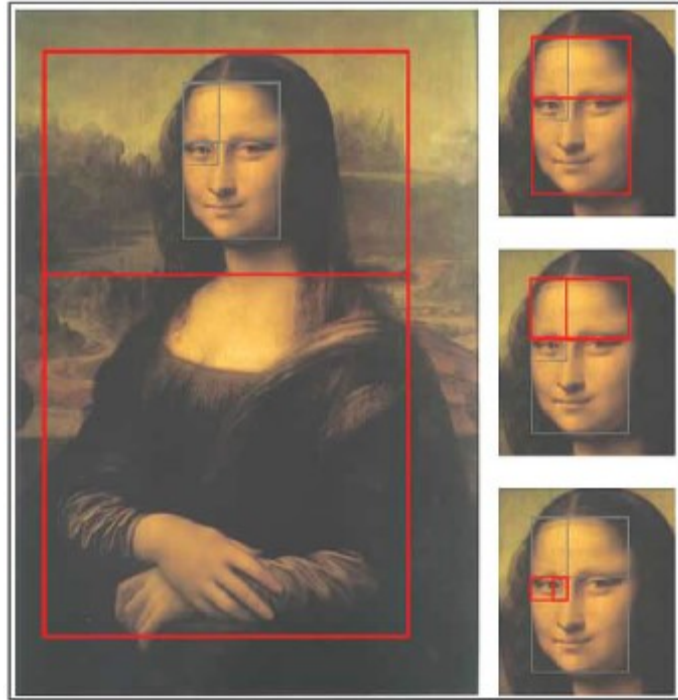
Figura 34 - Sólidos de "A Proporção Divina"



Fonte: Diário do Rio.



Figura 35 - Monalisa e o Retângulo Áureo



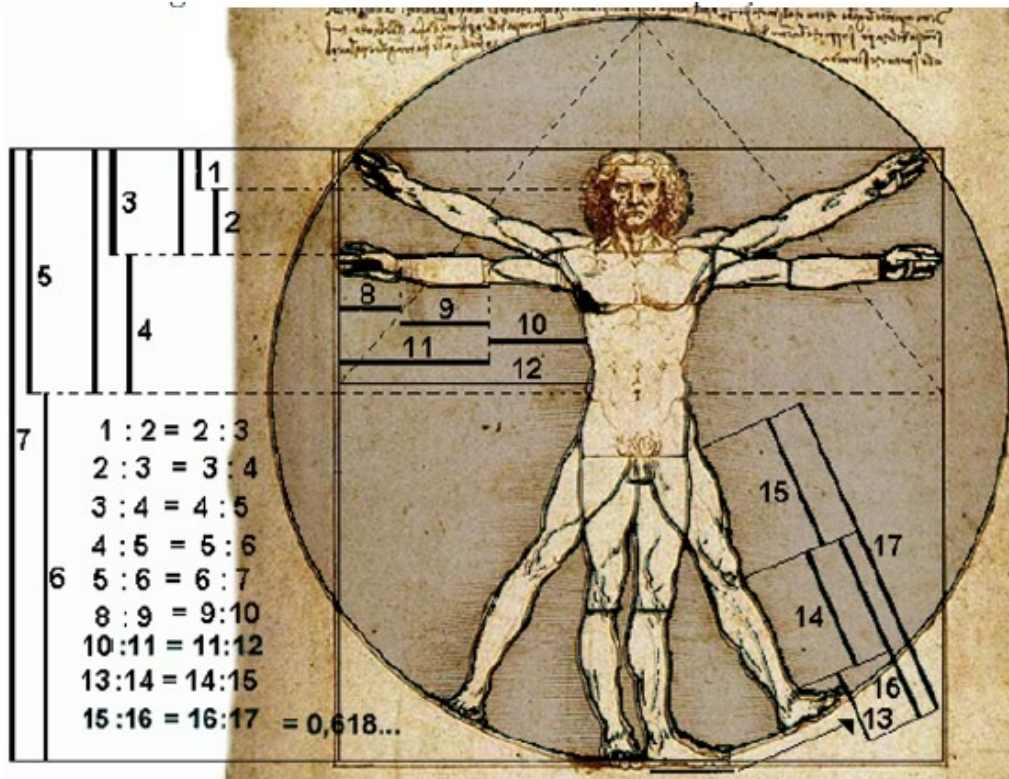
Fonte: Anastácio (6)

Figura 36 - A virgem dos Rochedos



Fonte: Anastácio (6)

Figura 37 - Homem Vitruviano e a Proporção Divina



Fonte: Blog AMC - Design

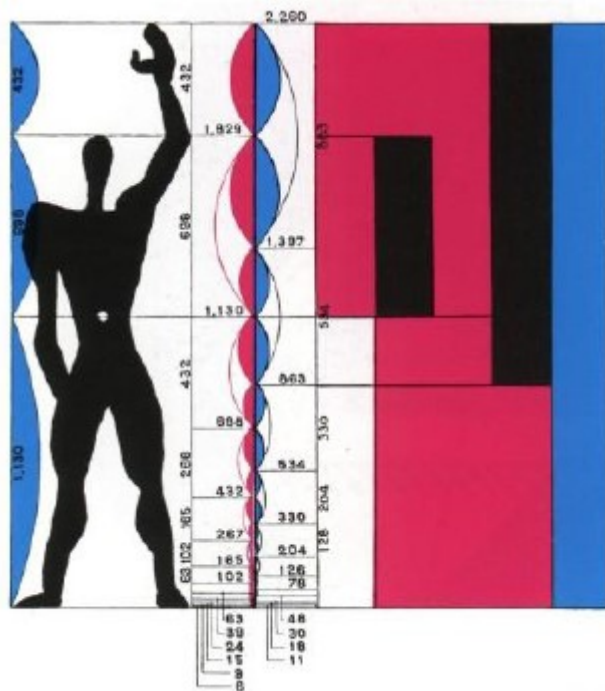
O Homem Vitruviano é usado como referência de simetria e proporção em todo o mundo. Ele possui proporções bem específicas. Veja:

- Face - do queixo ao topo da testa =  $\frac{1}{10}$  da altura do corpo;
- Palma da mão – do pulso ao topo do dedo médio =  $\frac{1}{10}$  da altura do corpo;
- Cabeça – do queixo ao topo =  $\frac{1}{8}$  da altura do corpo;
- Base do pescoço às raízes do cabelo =  $\frac{1}{6}$  da altura do corpo;
- Meio do peito ao topo da cabeça =  $\frac{1}{4}$  da altura do corpo;
- Pé =  $\frac{1}{6}$  da altura do corpo;
- Largura do peito =  $\frac{1}{4}$  da altura do corpo;
- Largura da palma da mão = quatro dedos;
- Largura dos braços abertos = altura do corpo;
- Umbigo = centro exato do corpo;

- Base do queixo à base das narinas =  $\frac{1}{3}$  da face;
- Nariz – da base às sobrancelhas =  $\frac{1}{3}$  da face;
- Orelha =  $\frac{1}{3}$  da face;
- Testa =  $\frac{1}{3}$  da face.

Um outro artista que também utilizou a Razão Áurea em suas obras foi Charles-Édouard Jeanneret mais conhecido como Le Corbusier. Le Corbusier criou um novo sistema proporcional chamado “Modulor” que, segundo ele, forneceria uma medida harmônica para a escala humana (Figura 38).

Figura 38 - Modulor de Le Corbusier



Fonte: Francisco (4)

Observe que as medições do “Modulor” foram realizadas tomando como base a Razão Áurea. Veja:

- A razão entre a sua altura e a distância do umbigo ao chão:  $\frac{1,826}{1,13} = 1,618 \dots$
- Razão entre a medida que vai do ombro até a ponta do dedo médio pela medida do cotovelo até a ponta do dedo médio;
- Razão da altura dos quadris pela altura dos joelhos;



- Razão da medida da cintura até a cabeça pela medida da cintura até o tórax.

### 5.3 Número de Ouro na Arquitetura

Vários livros e artigos afirmam que no Templo de Partenon existem várias dimensões que possuem relação com a Razão Áurea. O Partenon foi um templo dedicado à deusa grega Atena, construído no século V a.C. na Grécia Antiga e projetado pelos arquitetos Calícrates e Ictinos. Apesar de sua aparência minimalista, o Partenon é uma das expressões arquitetônicas mais refinadas da arquitetura grega (Figura 39).

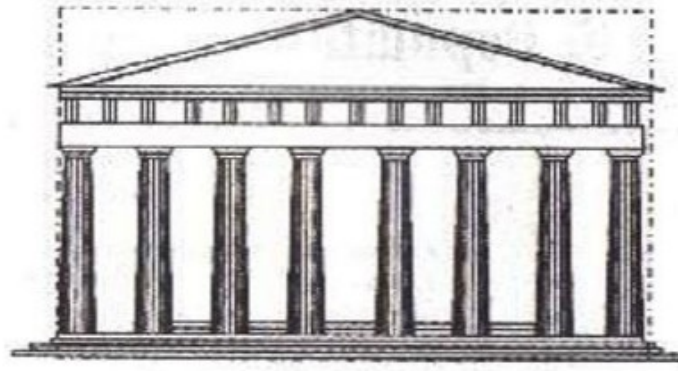
Figura 39 - Templo de Partenon



Fonte: Blog Portal Da História

No dia 6 de setembro de 1697, o templo de Partenon foi atacado pelos venezianos e sofreu grandes danos, porém sua estrutura básica manteve-se. Antes de ser atacado, ou seja, quando seu frontão triangular estava intacto, a frente do templo de Partenon ajustava-se perfeitamente em um retângulo Áureo.

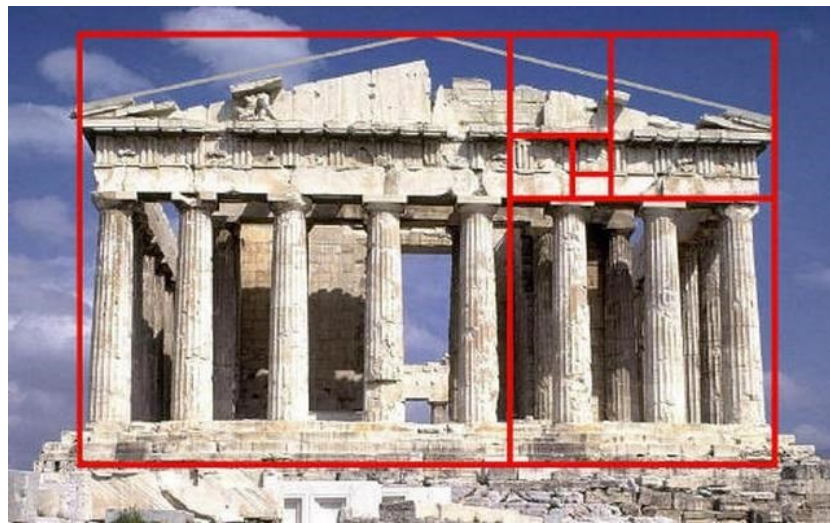
Figura 40 - Frente do Templo de Partenon



Fonte: Landim (2)

Adolfo Zeising, no trabalho publicado em 1884 titulado por “A Seção Áurea”, mostra que a dimensão da altura da fachada dividida pela parte de cima das colunas, é justamente o Número de Ouro. Alguns livros trazem essa informação e incluem outras razões envolvendo dimensões desse templo relacionadas com a Razão Áurea (Figura 41).

Figura 41 - Série de Retângulos Áureos no templo de Partenon



Fonte: Blog Projeto Batente

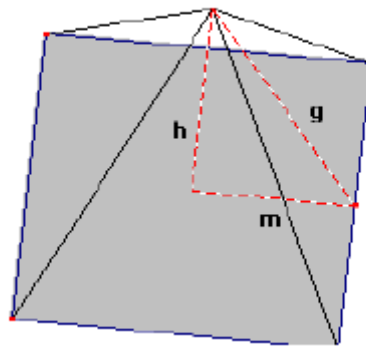
Mario Lívio afirma no Livro Razão Áurea (1) que, se analisarmos os diferentes trabalhos sobre Razão Áurea, podemos encontrar medições distintas relacionadas ao Partenon. De acordo com o livro *Arquitetura: da Pré-história ao pós-modernismo* de Marvim Trachtenberg, as dimensões do templo são 13,75 metros de altura e 30,9 metros de comprimento. Efetuando a divisão do comprimento pela altura obtemos 2,25 que é um valor bem discrepante do Número de Ouro. Segundo Stuart Rossiter no livro intitulado Grécia, se

considerarmos a altura como sendo a altura do ápice acima do pedestal sobre a qual a série de coluna se assenta a altura seria de 18 metros e, calculando novamente a razão de comprimento pela altura essa razão seria agora de 1,72, valor mais próximo do verdadeiro número de Ouro.

O fato é que alguns pesquisadores podem ter procurado medidas no templo para considerar que ele foi construído de acordo com a Razão Áurea, pela razão de estarem empolgados com tantas aplicações. Não há nenhuma comprovação de que fato a construção foi baseada na Razão Áurea.

Outra grande construção que muitos pesquisadores relacionam com o número de Ouro são as pirâmides do Egito. No livro *Gnomo: dos Faraós aos Fractais*, o francês Midhat J. Gazalez relata: “O historiador grego Heródoto aprendeu com os sacerdotes egípcios que o quadrado da altura da grande Pirâmide é igual a área de sua face lateral triangular.” Tal afirmação é determinante, pois é equivalente a declarar que as Grandes Pirâmides foram projetadas de tal maneira que a razão entre a altura de sua face triangular e metade do lado da base fosse igual a Razão Áurea (Figura 42). Veja:

Figura 42 - Vista de cima da Pirâmide



Fonte: Landim (2)

Heródoto afirmou que  $h^2 = g \cdot m$ . Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo pontilhado dentro da pirâmide, temos:  $g^2 = m^2 + h^2$ . Substituindo a primeira equação na segunda, temos:

$$g^2 = m^2 + g \cdot m$$

Dividindo ambos os membros da igualdade por  $m^2$ , temos:

$$\left(\frac{g}{m}\right)^2 = 1 + \frac{g}{m}$$

Chamando  $\frac{g}{m}$  de  $x$ , temos:

$$x^2 = 1 + x \rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

Sabemos que raiz positiva desta equação é o número de ouro, logo a razão  $\frac{g}{m}$  é igual ao número de Ouro.

Na tabela abaixo, temos os dados de duas pirâmides do Egito:

Tabela 5 - Tabela com dimensões da Pirâmide

	Quéops	Quéfren
Altura da Pirâmide	146,59	143,50
Dimensões da base	230,33 x 230,33	215,20 x 215,20

Fonte: elaborada pela autora.

Aplicando o teorema de Pitágoras para encontrar o valor da altura da face triangular da Pirâmide Quéops encontramos que a altura será 186,41. Ao dividir a altura da face triangular pela metade do lado da base, obtemos:

$$\frac{186,41}{115,165} = 1,6186$$

Assim, a razão entre a altura da face triangular e a metade do lado da base, na pirâmide Quéops, é exatamente o número de Ouro.

Aplicando o mesmo raciocínio na segunda Pirâmide, a de Quéfren, encontramos que a altura da face triangular é igual a 179,36 e a razão entre a altura da face triangular e a metade do lado da base é:

$$\frac{179,36}{107,60} = 1,6669 \dots \neq \Phi$$

Da mesma forma que o Partenon, não há comprovação que prove, de fato, que a construção das Pirâmides foi baseada na Razão Áurea. Na verdade, é bastante improvável que os antigos babilônicos ou antigos egípcios tenham descoberto a Razão Áurea.

## 6 APLICAÇÕES NO ENSINO BÁSICO

Neste capítulo serão sugeridas atividades que têm como objetivo apresentar aos alunos a sequência de Fibonacci e a Razão Áurea. Os exercícios têm como público alvo os alunos do nono ano do Ensino Fundamental e dos anos do Ensino Médio. Ao final do capítulo, serão comentadas questões de vestibulares e do Enem, que envolvam os conteúdos abordados nesta dissertação.

Biembengut (7) afirma em seu livro, *Modelagem Matemática no Ensino*, que:

O número de Ouro pode valer também como ponto de partida para introduzir os números irracionais e a equação do segundo grau, sendo assim, indicado para o nono ano do ensino fundamental, o que permite ao aluno perceber de onde e como a matemática é aplicada.

É essencial que, no ensino de Matemática, haja uma interligação entre um embasamento teórico que apresente um rigor científico necessário ao nível que o discente está inserido com conhecimentos que façam parte do contexto de vida dos alunos, relacionando com situações do dia a dia. Desta forma, ficará mais claro a importância da Matemática e seu valor.

É importante que o docente promova situações que favoreçam o aprendizado. Uma estratégia para tornar as aulas mais relevantes é levar o aluno a perceber as variadas aplicações do conteúdo dentro do seu dia a dia, sempre levando em consideração a história do sujeito para que, desta forma, o conhecimento tenha onde se ancorar.

### 6.1 Atividades a serem propostas

#### 6.1.1 *Atividade I*

Sabe-se que o corpo humano possui uma grande propensão de apresentar a razão áurea em suas medidas. A proposta deste exercício é estabelecer razões entre algumas medidas das mais variadas partes do corpo humano e eleger o aluno que mais se aproxima do padrão de simetria estabelecido pela razão áurea.

No início da atividade, o professor pode comentar a obra de Leonardo da Vinci, o homem Vitruviano, que foi explanada no capítulo 4 da presente dissertação. Também poderá elucidar o fato de que, na Grécia Antiga, já se discutia que a razão entre algumas partes do corpo humano tendem a ser o número  $\Phi$ , sendo sempre associado a um padrão de beleza.

Algumas razões do corpo humano que tendem a ser áureas são:

- Razão da altura total pela altura do umbigo;
- Razão entre a medida que vai do ombro até a ponta do dedo médio pela medida do cotovelo até a ponta do dedo médio;
- Razão da altura dos quadris pela altura dos joelhos;
- Razão da medida da cintura até a cabeça pela medida da cintura até o tórax;
- Razão do tamanho dos dedos pela medida da dobra central até a ponta.

O professor irá organizar os alunos em grupos com iguais quantidades de homens e mulheres e entregará a tabela 5 para cada aluno realizar suas medições. É necessário que os alunos sejam avisados com antecedência para que levem as fitas métricas. Feitas as medições, o próximo passo é calcular a média aritmética e o desvio padrão das medidas e em cada grupo será eleito o casal que possui suas medidas mais próximas da razão áurea, ou seja, que possui a média aritmética mais perto do número de Ouro e o menor desvio padrão. Por último, será eleito em toda sala o casal Vitruviano.

Tabela 6 - Razões entre medidas do corpo humano

Medidas	Alunos					
	1	2	3	4	5	6
Da altura (a)						
Do umbigo até o chão (b)						
Do ombro até a ponta do dedo médio (c)						
Do cotovelo até a ponta do dedo médio (d)						
Da linha dos lábios até o queixo com a face relaxada (e)						
Da ponta do nariz à linha dos lábios com a face relaxada (f)						
Razões	Resultados					
$x_1 = a/b$						
$x_2 = c/d$						
$x_3 = e/f$						
Média aritmética das 3 razões ( $x_m$ )						
Desvio padrão das 3 razões (DP)						

Fonte: Leopoldino (8)

As fórmulas para o cálculo da média aritmética e desvio padrão são:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

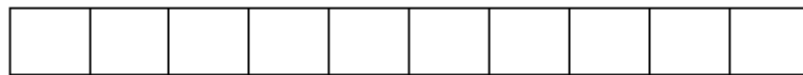
$$DP = \sqrt{\frac{(x_1 - x_m)^2 + (x_2 - x_m)^2 + (x_3 - x_m)^2}{3}}$$

Esta atividade além de utilizar conceitos fundamentais da estatística, média aritmética e desvio padrão, também possui um aspecto histórico que deve ser destacado e comentado. O fato que a razão áurea foi associada a um padrão estético de harmonia e beleza presente na maioria das pessoas. Dentro disto pode-se sugerir uma pesquisa a expressão “Divina Proporção” atribuída a razão áurea.

### 6.1.2 Atividade II

Esta atividade direcionada para o público do Ensino Médio consiste em relacionar o princípio fundamental da contagem com os fundamentos da lógica presentes no estudo das sequências, particularmente, a de Fibonacci. Tal exercício é:

“De quantas maneiras pode-se pintar a faixa abaixo, composta de 10 quadrados adjacentes, apenas com as cores azul ou vermelho, de modo que dois quadrados adjacentes não possam ser pintados de azul?”



*Solução:*

Iniciaremos a solução trabalhando com uma faixa que tenha apenas um quadrado. Neste caso, temos duas possibilidades: pinta-se de azul ou vermelho.

A
---

       ou      

V
---

Considerando agora o caso em que a faixa possui dois quadrados, se o primeiro quadrado for azul, o segundo quadrado obrigatoriamente será vermelho (não podem existir dois quadrados azuis lado a lado). Já se o primeiro quadrado for vermelho, o segundo quadrado pode ser azul ou vermelho. Nesse caso então, temos três possibilidades.

A	V
---	---

       ou      

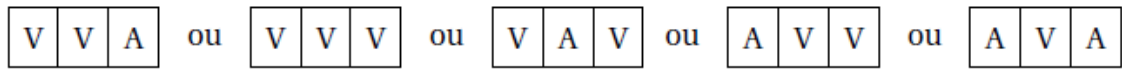
V	A
---	---

       ou      

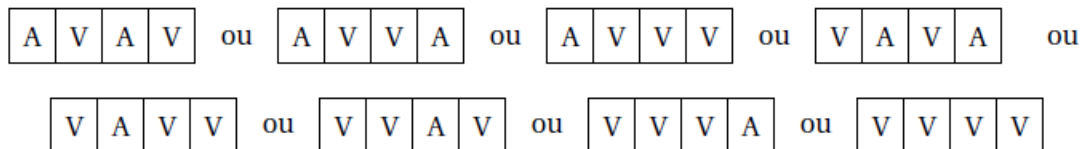
V	V
---	---

Considerando agora que a faixa tem três quadrados, temos duas situações: se o primeiro quadrado for pintado de vermelho, aqui tem-se três possibilidades para pintar os dois quadrados seguintes (AV, VA ou VV), ou se o primeiro quadrado for pintado de azul,

como o segundo não poderá ser azul temos duas possibilidades para os quadrados seguintes (VA ou VV). Portanto, existirão cinco maneiras de pintar a faixa:



Com quatro quadrados temos que, se a pintura do primeiro quadrado for vermelha, os três próximos quadrados equivalem as 5 maneiras descritas no caso anterior em que a faixa tinha apenas três quadrados e, se o primeiro quadrado for azul, o próximo só poderá ser vermelho e os dois restantes equivalem as 3 maneiras descritas no caso em que a faixa possui dois quadrados. Assim, o número de maneiras de pintar uma faixa com quatro quadrados será  $5+3 = 8$  maneiras.



Neste ponto é importante notar que o modelo recursivo de Fibonacci acontece. Para uma faixa com um quadrado, temos 2 maneiras. Para uma faixa com dois quadrados, temos 3 maneiras. Já em uma faixa com três quadrados, temos  $2 + 3 = 5$  maneiras. Em uma faixa com quatro quadrados, temos  $3 + 5 = 8$  maneiras. Desta forma, para uma faixa com cinco quadrados, teremos  $8 + 5 = 13$  possibilidades. Sempre se somam os dois resultados anteriores, indicando assim que ocorre o modelo recursivo de Fibonacci. Seguindo o raciocínio para 6, 7, 8, 9 e 10 quadrados temos, respectivamente, 21, 34, 55, 89 e 144 maneiras diferentes de pintar a faixa. Como no problema citado a faixa possui 10 quadradinhos temos 144 maneiras diferentes de pintar a faixa sem que dois quadrados adjacentes sejam pintados de azul.

A ideia central desta atividade é estimular nos alunos a busca de novas alternativas quando novos elementos são introduzidos no problema, no caso, não serem permitidos que dois quadrados vizinhos sejam azuis. A solução do exercício recaiu no estudo de sequências, no caso, a de Fibonacci.



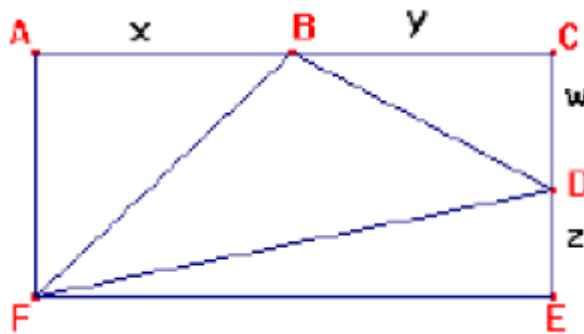
### 6.1.3 Atividade III

A seguinte atividade relaciona conceitos de geometria plana com Razão Áurea. Seu público alvo são estudantes do nono ano do Ensino Fundamental ou Primeiro Ano do Ensino Médio.

Veiga (9) (2006, pág. 48) cita:

Dados um retângulo e um triângulo inscrito neste retângulo conforme a figura 43, de forma que quando removido deixa três triângulos todos com a mesma área. Mostre que os lados do retângulo estão divididos na mesma razão e determine seu valor.

Figura 43 - Razão Áurea e Geometria Plana



Fonte: Veiga (9)

Solução:

Dado o retângulo ACEF, mostrado na figura 44, temos que  $\overline{AB} = x$ ,  $\overline{BC} = y$ ,  $\overline{CD} = w$  e  $\overline{DE} = z$ . Com isso, as áreas dos triângulos ABF, BCD e DEF são:

$$A_{\Delta ABF} = \frac{x \cdot (w+z)}{2}, A_{\Delta BCD} = \frac{y \cdot w}{2} \text{ e } A_{\Delta DEF} = \frac{z \cdot (x+y)}{2}.$$

De acordo com os dados da questão, as áreas dos triângulos ABF, BCD e DEF são iguais, logo:

$$\frac{x \cdot (w+z)}{2} = \frac{y \cdot w}{2} = \frac{z \cdot (x+y)}{2} \Leftrightarrow x \cdot (w+z) = y \cdot w = z \cdot (x+y)$$

Disto, temos:

$$x \cdot (w+z) = y \cdot w \Leftrightarrow x = \frac{y \cdot w}{w+z}$$

e

$$x \cdot (w + z) = z \cdot (x + y) \Leftrightarrow xw + xz = zx + zy \Leftrightarrow xw = zy \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{w}{z}$$

Desta equação já conclui-se que os dois lados do retângulo são divididos na mesma razão. Para encontrar o valor desta razão devemos substituir uma equação na outra, observe:

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} = \frac{w}{z} &\Leftrightarrow \frac{y}{\frac{y \cdot w}{w + z}} = \frac{w}{z} \Leftrightarrow \frac{w + z}{w} = \frac{w}{z} \Leftrightarrow w^2 = wz + z^2 \Leftrightarrow \frac{w^2}{z^2} = \frac{w}{z} + 1 \Leftrightarrow \left(\frac{w}{z}\right)^2 - \frac{w}{z} - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Nomeando a razão procurada de  $r$ , temos a equação do segundo grau  $r^2 - r - 1$ , que tem como solução positiva:

$$r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi$$

Desta forma, a razão entre os lados do retângulo é o número de Ouro. Uma outra curiosidade que pode ser abordada também com os alunos é que a razão entre a diagonal e o lado de um pentágono regular corresponde ao número de ouro, como demonstrado no capítulo três.

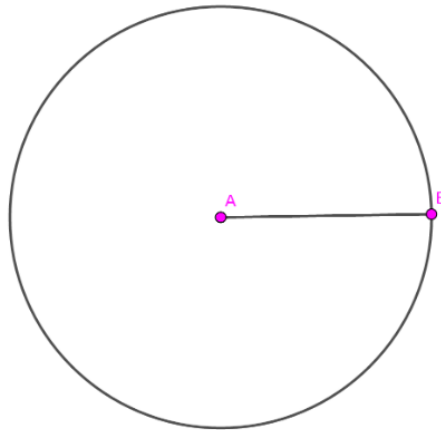
#### 6.1.4 Atividade IV

Esta atividade, direcionada para o nono ano do Ensino Fundamental, consiste em realizar algumas construções geométricas utilizando apenas régua e compasso. Teremos a construção do ponto médio de um segmento, média e extrema razão (presente no segmento áureo), número de ouro e o retângulo áureo.

i) Ponto médio de um segmento

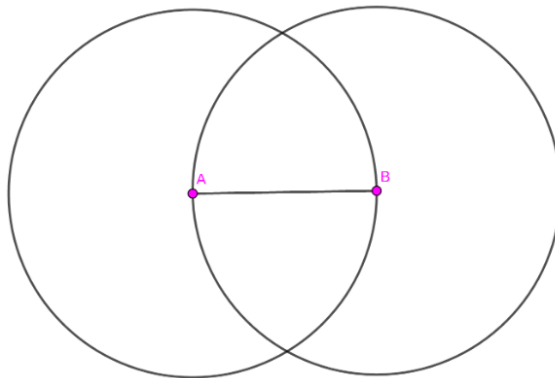
Seja um segmento AB qualquer:

1) Com compasso em A e raio AB descreve-se uma circunferência  $\alpha$  (Figura 44).

Figura 44 - Circunferência  $\alpha$ 

Fonte: elaborada pela autora.

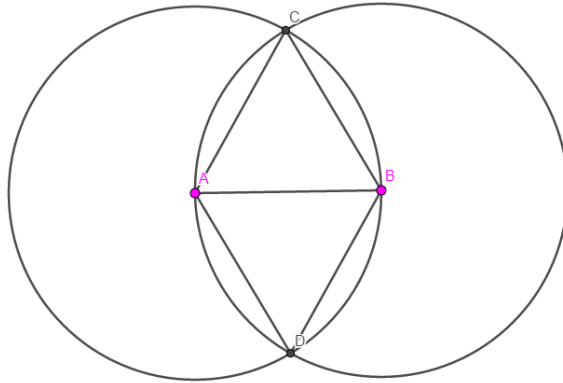
- 2) Com compasso em B e raio AB descreve-se uma circunferência  $\beta$  (Figura 45).

Figura 45 - Circunferência  $\beta$ 

Fonte: elaborada pela autora.

- 3) Note que  $\alpha$  e  $\beta$  se intersectam em C e D cujas distâncias a A e B são iguais a AB (Figura 46).

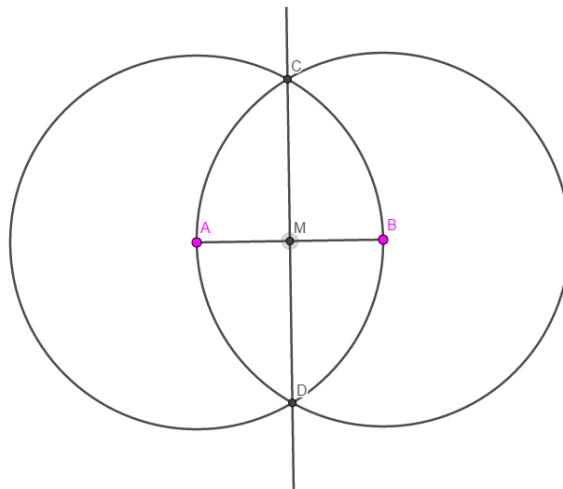
Figura 46 - Pontos de Intersecção



Fonte: elaborada pela autora.

- 4) Por dois pontos passa uma única reta, logo a reta que une C e D é a mediatriz do segmento AB. A intersecção de CD com AB é o ponto médio de AB (Figura 47).

Figura 47 - Determinação da Mediatriz

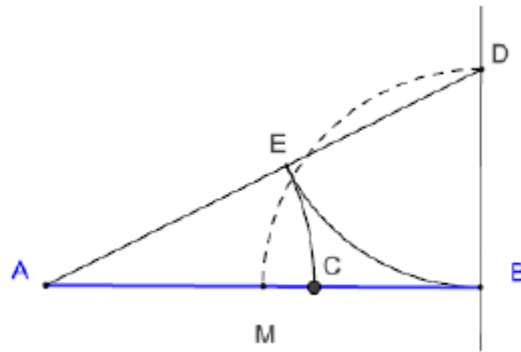


Fonte: elaborada pela autora.

## ii) Média e Extrema Razão

Iremos mostrar como determinar um ponto C pertencente a um segmento AB, tal que C divida o segmento AB, de comprimento  $\overline{AB} = a$  em média e extrema razão (Figura 48).

Figura 48 - Média e Extrema Razão



Fonte: Rodrigues (10)

A construção se deu da seguinte forma:

- 1) Determina-se o ponto médio  $M$  do segmento  $AB$ , conforme mostrado no item i).  
Assim,  $\overline{MB} = \frac{a}{2}$ .
- 2) Traça-se uma reta perpendicular ao segmento  $AB$ , que passe por  $B$ .
- 3) Centra-se o compasso em  $B$  e traça-se uma circunferência com raio de medida  $\overline{BM}$ .  
O ponto em que esta circunferência interceptar a reta anterior, será chamado de ponto  $D$ . Por construção,  $\overline{BD} = \overline{BM} = \frac{a}{2}$ .
- 4) Traça-se o segmento  $AD$ .
- 5) Marca-se o ponto  $E$  sobre o segmento  $\overline{AD}$ , tal que  $\overline{BD} = \overline{ED}$ . Assim,  $\overline{ED} = \frac{a}{2}$ .  
Para isso, centra-se o compasso em  $D$  e traça-se uma circunferência com raio de medida  $\overline{BD}$ .
- 6) Com o compasso em  $A$ , traça-se uma circunferência de raio  $\overline{AE}$ . Tal circunferência intercepta o segmento  $\overline{AB}$  em  $C$ . Por construção,  $\overline{AE} = \overline{AC} = x$ .

Temos um triângulo retângulo  $ABD$  com as medidas:

$$\overline{AB} = a$$

$$\overline{BD} = \frac{a}{2}$$

$$\overline{AD} = \overline{AE} + \overline{ED} = x + \frac{a}{2}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$\begin{aligned}(\overline{AD})^2 &= (\overline{BD})^2 + (\overline{AB})^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 \Leftrightarrow x^2 + ax + \frac{a^2}{4} \\ &= \frac{a^2}{4} + a^2 \Leftrightarrow x^2 + ax - a^2 = 0\end{aligned}$$

Resolvendo esta equação do segundo grau na incógnita  $x$ , temos:

$$x_1 = -a \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \quad e \quad x_2 = a \left( \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

Como  $x$  é um valor positivo, o único valor possível para  $x$  será:

$$x = a \left( \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

Como, por definição, a razão áurea é  $\frac{a}{x}$ , temos:

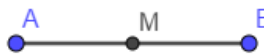
$$\frac{a}{x} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)} = \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{1})^2} = \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{4} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

Concluindo assim nossa justificativa de que o ponto  $C$  divide  $AB$  em média e extrema razão.

iii) Número de Ouro

- 1) Considere um segmento de reta  $AB$  e determine seu ponto médio  $M$ , conforme descrito em: i) (Figura 49).

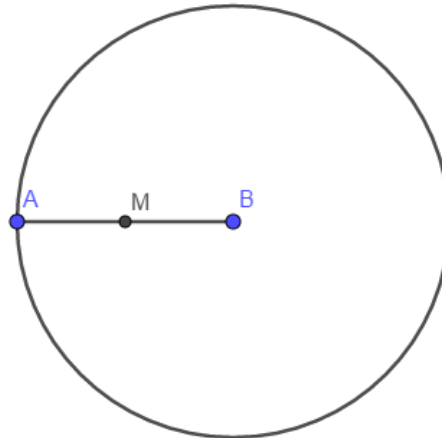
Figura 49 - Segmento de Reta  $AB$  e seu ponto médio  $M$ .



Fonte: elaborada pela autora.

- 2) Com o compasso em  $B$  e abertura igual ao comprimento do segmento  $AB$ , traça – se uma circunferência (Figura 50).

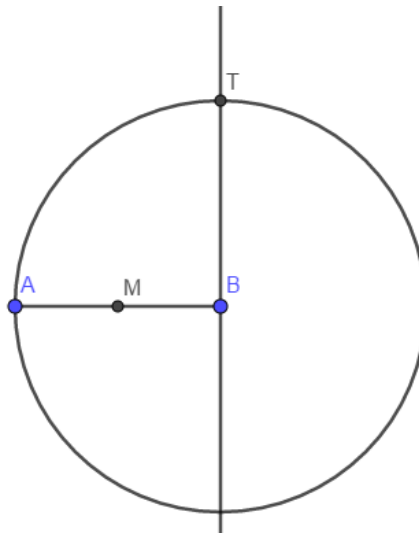
Figura 50 - Circunferência de raio AB



Fonte: elaborada pela autora.

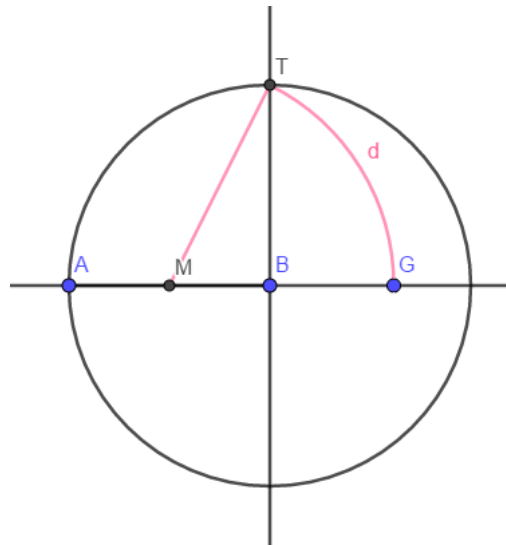
- 3) Traça-se uma reta perpendicular ao segmento AB, que passe por B. O ponto de intersecção da reta com a circunferência é o ponto T. Por construção,  $\overline{AB} = \overline{BT}$ . (Figura 51)

Figura 51 - Intersecção da reta perpendicular com a circunferência



Fonte: elaborada pela autora.

- 4) Com o compasso em M e abertura até T, traça-se o arco e determina o ponto G, intersecção da reta que contém o segmento  $\overline{AB}$  e a circunferência com centro no ponto M e raio de medida igual a  $\overline{MT}$ . Deste modo,  $\overline{AG} = \Phi$  (Figura 52).

Figura 52 - Construção geométrica do  $\phi$ 

Fonte: elaborada pela autora.

Justificativa da construção:

Sendo  $\overline{AB} = 1$ , então  $\overline{MB} = \frac{1}{2}$ . Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo BMT, temos:

$$(\overline{MT})^2 = (\overline{BT})^2 + (\overline{MB})^2 \Leftrightarrow (\overline{MT})^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (\overline{MT})^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \overline{MT} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Como  $\overline{MG} = \overline{MT}$ , então  $\overline{AG} = \overline{AM} + \overline{MT} \Leftrightarrow \overline{AG} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \overline{AG} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$

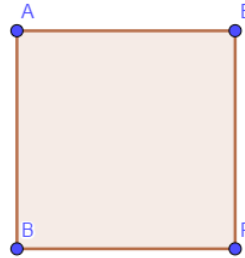
#### iv) Retângulo Áureo

Os passos a serem seguidos para construção do retângulo áureo com régua e compasso são:

- 1) Desenha-se um quadrado ABEF cujo lado tem medida a (Figura 53).



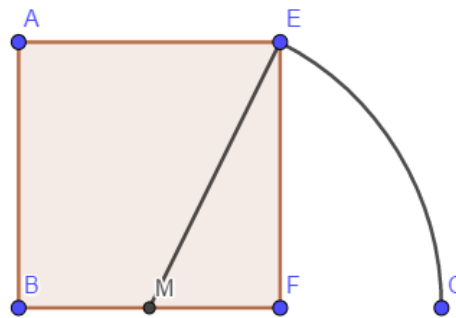
Figura 53 - Quadrado ABEF



Fonte: elaborada pela autora.

- 2) Marca-se o ponto médio  $M$  de um dos lados, por exemplo o lado  $BF$ . Com o compasso centrado em  $M$  e raio igual ao comprimento do segmento  $ME$  traça-se um arco (Figura 54).

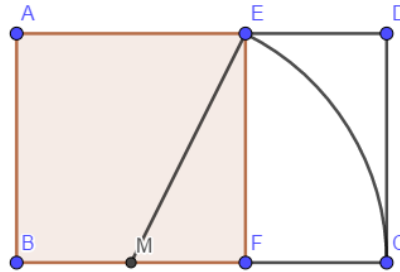
Figura 54 - Arco EC



Fonte: elaborada pela autora.

- 3) Traça-se uma reta perpendicular ao segmento de reta  $BC$ , que passe por  $C$  determinando-se um ponto  $D$ . Tal ponto é a intersecção desta reta construída com o prolongamento do segmento  $AE$  e, a seguir, constrói-se o retângulo  $ABCD$ .

Figura 55 - Construção Geométrica do Retângulo Áureo



Fonte: elaborada pela autora.

Justificativa da construção:

Sendo  $\overline{BF} = \overline{EF} = a$ , então  $\overline{MF} = \frac{a}{2}$ .

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo EFM, temos:

$$(\overline{ME})^2 = (\overline{MF})^2 + (\overline{EF})^2 \Leftrightarrow (\overline{ME})^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 \Leftrightarrow \overline{ME} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Por construção,  $\overline{ME} = \overline{MC}$ . Desta forma,

$$\overline{BC} = \overline{BM} + \overline{MC} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{a(1 + \sqrt{5})}{2}$$

Fazendo a razão entre as medidas dos lados do retângulo, temos:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{a(1 + \sqrt{5})}{2}}{a} = \frac{(1 + \sqrt{5})}{2}$$

Assim, a razão de suas medidas corresponde a razão áurea.

## 6.2 Sequência de Fibonacci e razão áurea nos vestibulares e Enem

Apresentaremos a seguir uma coleção de questões extraídas de alguns processos seletivos para ingresso no ensino técnico ou superior e que envolvem razão áurea ou sequência de Fibonacci. As seguintes questões estão resolvidas e comentadas.

1ª) (UNB 2012) “Considere o texto:

Aidan Dwyer, um jovem norte-americano de 13 anos de idade, após ter analisado o papel das folhas das plantas como coletores solares naturais para o processo de fotossíntese, desenvolveu uma inovadora maneira de dispor painéis solares de modo a otimizar a coleta de energia luminosa.

Durante uma caminhada, ao observar as árvores, ele percebeu que as folhas ao longo de um ramo e os galhos em torno do caule apresentavam um padrão de crescimento espiralado ascendente que obedecia à sequência de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...), que é determinada pela seguinte fórmula de recorrência:  $F_1 = 1$ ;  $F_2 = 1$  e para  $n \geq 3$ ,  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ . Essa distribuição das folhas, além de dar equilíbrio ao caule, propicia-lhe melhor aproveitamento de sua exposição ao Sol, à chuva e ao ar.

Em 1874, o matemático inglês Wiesner concluiu que, para que as folhas em um caule de uma árvore ficassem melhor expostas à luz do Sol, o ângulo entre as folhas deveria ser aproximadamente igual a  $\left(\frac{360}{\Phi^2}\right)^\circ = 137,5^\circ$ , que é conhecido como ângulo áureo, em que  $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

Figura 56 - Painéis solares e folhas



Fonte: Vestibular UNB 2012

A figura acima ilustra o trabalho de Aidan. Após medir as posições dos galhos em várias árvores, ele realizou, no quintal de sua casa, experimentos com pequenos coletores solares posicionados em uma armação metálica que imitava a configuração natural das folhas.

Ele montou, ainda, uma quantidade igual de sensores e os dispôs em um painel, como é feito nos coletores comerciais. Com equipamentos simples, traçou gráficos comparativos da captação solar e observou que sua árvore solar captava 20% mais energia que o painel plano comum.”

O Globo, 20/8/2011 (com adaptações).

Tendo como base as informações do texto acima, julgue os itens a seguir:

- Infere-se do texto, a partir da sequência de Fibonacci, que a distribuição das folhas em torno do caule facilita a exposição das folhas à luz e, conseqüentemente, o anabolismo de carboidratos.
- No cerrado, espécies de plantas com maior investimento em área foliar levam vantagem em relação às que investem mais em raízes.
- A partir das informações apresentadas, é correto afirmar que  $\Phi^{-1} = \Phi - 1$ .
- Se  $x$  é um número real tal que  $\left|x - \frac{F_7}{F_6}\right| > 2$ , então  $x > 2$  ou  $x < -0,3$ .

Solução:

- Correto. Os hidratos de carbono são moléculas orgânicas que contém um grupo carbonilo (aldeído ou cetona) e mais grupos hidroxilo (OH-). Sua síntese ocorre através de diversas vias:
  - A fotossíntese para criar glicose em organismos fotossintéticos.
  - O glicogênese para a polimerização de glicogênio a partir da glucose.
- Incorreto. A vegetação do Cerrado apresenta área foliar reduzida para suportar a estação seca, que é vencida pela planta através de suas raízes profundas.
- Correto. Observe:

$$\Phi^{-1} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5} - 1)}{(1 + \sqrt{5}) \cdot (1 - \sqrt{5})}$$

$$\Phi^{-1} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5} - 1)}{4}$$

Daí, temos:

$$\Phi^{-1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \Phi - 1$$

- Correto. A sequência é (1,1,2,3,5,8,13,21,...) onde  $F_7 = 13$  e  $F_6 = 8$ .

$$\left|x - \frac{13}{8}\right| > 2 \therefore x - \frac{13}{8} < -2 \text{ ou } x - \frac{13}{8} > 2$$

$$\therefore x < \frac{-3}{8} \text{ ou } x > \frac{29}{8}$$

Qualquer  $x$  no intervalo apresentado obedece à condição dada.

$$x > \frac{29}{8} \Rightarrow x > 2$$

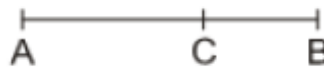
$$x < \frac{-3}{8} \Rightarrow x < -0,3$$

Comentário:

Nesta questão se destaca a transdisciplinaridade (matemática, química e biologia) com aplicações cotidianas. É importante ressaltar que vimos neste trabalho que o ângulo áureo é, aproximadamente,  $222,5^\circ$ , que é o ângulo replementar a  $360^\circ$ , ou seja o ângulo que completa a volta, estando assim de acordo com o trecho do jornal O Globo. O ângulo áureo citado na questão é imprescindível para aumentar a captação da energia solar e maximizar a fotossíntese.

2ª) (Fuvest 2011) “Define-se geometricamente a razão áurea do seguinte modo: O ponto C da figura abaixo divide o segmento na razão áurea quando os valores  $AC/AB$  e  $CB/AC$  são iguais. Esse valor comum é chamado razão áurea.

Figura 57 - Segmento com razão Áurea



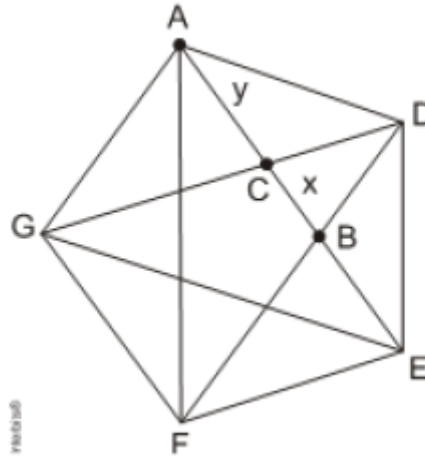
Fonte: Vestibular FUVEST 2011

A razão áurea, também denominada proporção áurea, número de ouro ou divina proporção, conquistou a imaginação popular e é tema de vários livros e artigos. Em geral, suas propriedades matemáticas estão corretamente enunciadas, mas muitas afirmações feitas sobre ela na arte, na arquitetura, na literatura e na estética são falsas ou equivocadas. Infelizmente, essas afirmações sobre a razão áurea foram amplamente divulgadas e adquiriram status de senso comum. “Mesmo livros de geometria utilizados no ensino médio trazem conceitos incorretos sobre ela.”

*Trecho traduzido e adaptado do artigo de G. Markowsky, Misconceptions about the golden ratio, The College Mathematics Journal, 23, 1, january, 1992, pp. 2-19.*

Na figura a seguir, o pentágono ADEFG é um pentágono regular. Utilize semelhança de triângulos para demonstrar que o ponto C da figura divide o segmento AB na razão áurea.

Figura 58 - Pentágono razão  $y/x$

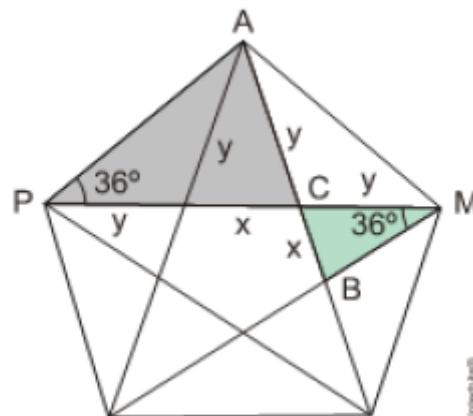


Fonte: Vestibular FUVEST 2011

Solução:

Considerando os triângulos PAC e MBC destacados na figura abaixo:

Figura 59 - Pentágono e os triângulos semelhantes



Fonte: Vestibular FUVEST 2011

Os triângulos PAC e MBC são semelhantes pois possuem ordenadamente dois ângulos congruentes  $\widehat{ACP} = \widehat{MCB}$  e  $\widehat{APC} = \widehat{BMC}$ . Assim, tem-se:

$$\Delta PAC \sim \Delta MBC \Rightarrow \frac{\overline{CP}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{BC}} \Rightarrow \frac{x+y}{y} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

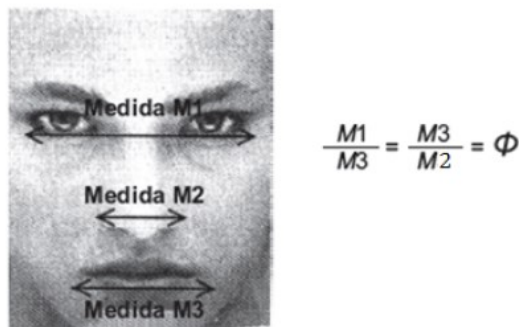
Como queríamos demonstrar.

Comentário:

Percebe-se um equívoco por parte do elaborador da questão no trecho do enunciado: “O ponto C da figura abaixo divide o segmento na razão áurea quando os valores  $AC/AB$  e  $CB/AC$  são iguais. Esse valor comum é chamado razão áurea.” Pois, na realidade, a razão áurea é o inverso das razões apresentadas  $AB/AC=AC/CB$ , como foi mostrado na solução.

3ª) (ENEM PPL 2013) Estudos revelam que, independentemente de etnia, idade e condição social, as pessoas têm padrões estéticos comuns de beleza facial e que as faces consideradas bonitas apresentam-se em proporção áurea. A proporção áurea é a constante  $\varphi=1,618\dots$ . Uma agência de modelos reconhece a informação citada e utiliza-a como critério de beleza facial de suas contratadas. Para entrevistar uma nova candidata a modelo, a referida agência pede uma fotografia de rosto no ato da inscrição e, com ela, determina as medidas mostradas na figura.

Figura 60 - Proporções no rosto humano



Fonte: ENEM PPL 2013

Analisando a fotografia de cinco candidatas, I, II, III, IV e V, para a seleção de uma única garota, foram constatadas estas medidas:

- Candidata I:  $M1= 11$  cm;  $M2= 5,5$  cm e  $M3=7$ cm.
- Candidata II:  $M1 = 10,5$  cm;  $M2 = 4,5$  cm e  $M3 = 6,5$  cm.
- Candidata III:  $M1 = 11,5$  cm;  $M2 = 3,5$  cm e  $M3 = 6,5$  cm.
- Candidata IV:  $M1 = 10$  cm;  $M2 = 4$  cm e  $M3 = 6,5$  cm.
- Candidata V:  $M1 = 10,5$  cm;  $M2 = 4$  cm e  $M3 = 6,5$  cm.

CONTADOR, P. R. M. A matemática na arte e na vida.  
São Paulo: Livraria da Física, 2007 (adaptado).

A candidata selecionada pela agência de modelos, segundo os critérios da proporção áurea, foi:

- a) I
- b) II
- c) III
- d) IV
- e) V

Solução:

Devemos calcular as razões de todas as candidatas:

$$\text{Candidata I: } \frac{11}{7} = 1,57 \text{ e } \frac{7}{5,5} = 1,27$$

$$\text{Candidata II: } \frac{10,5}{6,5} = 1,615 \text{ e } \frac{6,5}{4,5} = 1,44$$

$$\text{Candidata III: } \frac{11,5}{6,5} = 1,76 \text{ e } \frac{6,5}{3,5} = 1,85$$

$$\text{Candidata IV: } \frac{10}{6,5} = 1,53 \text{ e } \frac{6,5}{4} = 1,625$$

$$\text{Candidata V: } \frac{10,5}{6,5} = 1,615 \text{ e } \frac{6,5}{4} = 1,625$$

A candidata V apresentou suas razões aproximadamente 1,6. Resposta: Letra e.

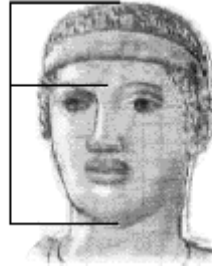
Comentário:

Nesta questão discute-se o uso da razão áurea como padrão de beleza estético. Tal questão está relacionada com a atividade sugerida em que os alunos devem realizar suas medidas e determinar suas razões, analisando qual aluno tem suas razões mais próximas da razão áurea.

4ª) (UFRJ 2005). Observe a figura abaixo que demonstra um padrão de harmonia, segundo os gregos.



Figura 61 - Padrão de Harmonia



FONTE: VESTIBULAR UFRJ 2005

Há muito tempo os gregos já conheciam o número de ouro  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , que é aproximadamente 1,618. Tal número foi durante muito tempo "padrão de harmonia". Por exemplo, ao se tomar a medida de uma pessoa (altura) e dividi-la pela medida que vai da linha umbilical até o chão, vê-se que a razão é a mesma que a da medida do queixo até a testa, em relação à medida da linha dos olhos até o queixo, e é igual ao número de ouro. Considere a cantora Ivete Sangalo, harmoniosa, segundo os padrões gregos. Assumindo que a sua distância da linha umbilical até o chão é igual a  $\frac{22 \cdot (\sqrt{5}-1)}{25}$  metros, determine a altura da mesma.

Solução:

Representando a altura da cantora por  $H$  e a distância da linha umbilical até o chão de  $h$ , tem-se, de acordo com o enunciado:

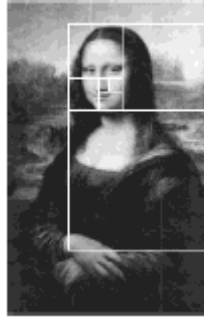
$$\frac{H}{h} = \varphi \Leftrightarrow H = h \cdot \varphi \Leftrightarrow H = \frac{22 \cdot (\sqrt{5}-1)}{25} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow H = \frac{22}{50} \cdot \frac{5-1}{1} \Leftrightarrow H = \frac{88}{50} \Leftrightarrow H = 1,76 \text{ m.}$$

Comentário: Esta questão aborda o conceito de razão áurea no corpo humano, exigindo dos alunos habilidades de potenciação, radiciação e produtos notáveis.

5ª) A "Divina Proporção" também conhecida como proporção áurea foi usada por Leonardo da Vinci para pintar a Mona Lisa, uma de suas mais notáveis obras. Em vários pontos do quadro aparece o retângulo áureo, como ilustrado na figura 62. Na fig. 63 os quadriláteros ABDF, CDFH, EFHJ, GHJL, IJLN, KLNO são retângulos áureos semelhantes e

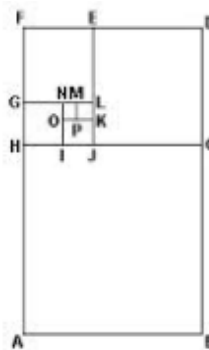
os quadriláteros ABCH, CDEJ, EFGL, GHIN, IJKO e KLMP são quadrados. Sabendo-se que a razão entre o maior lado e o menor lado do retângulo áureo é igual ao número de ouro  $\phi$ , qual a razão entre a área do quadrado KLMP e área do quadrado ABCH?

Figura 62 - MonaLisa e as Proporções Áureas



Fonte: Vestibular UFF 2007

Figura 63 - Retângulos na MonaLisa



Fonte: Vestibular UFF 2007

- a)  $\frac{1}{\phi^6}$    b)  $\frac{1}{\phi^{10}}$    c)  $\frac{1}{\phi^8}$    d)  $\frac{1}{\phi^5}$    e)  $\frac{1}{\phi^{12}}$

Solução:

Determina-se os lados dos quadrados ABCH, CDEJ, EFGL, GHIN, IJKO e KLMP.

- Lado do quadrado ABCH:

De acordo com o enunciado,  $\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \phi$ . Considerando-se que  $\overline{AB} = 1$ , temos  $\overline{BD} = \phi$ .

Sendo ABCH um quadrado,  $\overline{BC} = 1$ .

- Lado do quadrado CDEJ:

Sendo  $\overline{BD} = \varphi$ , o quadrado CDEJ terá lado  $\overline{CD} = \varphi - 1$ . Como já falado em 1.4,  $\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$ , assim  $\overline{CD} = \overline{DE} = \frac{1}{\varphi}$ .

- Lado do quadrado EFGL:

Sendo  $\overline{DE} = \frac{1}{\varphi}$ , o quadrado EFGL terá lado  $\overline{EF} = \overline{AB} - \overline{DE} \Leftrightarrow \overline{EF} = \overline{FG} = 1 - \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi^2}$ .

- Lado do quadrado GHIN:

Sendo  $\overline{FG} = \frac{1}{\varphi^2}$ , o quadrado GHIN terá lado  $\overline{GH} = \overline{CD} - \overline{FG} \Leftrightarrow \overline{GH} = \overline{HI} = \frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\varphi^2} = \frac{1}{\varphi^3}$ .

- Lado do quadrado IJKO:

Sendo  $\overline{HI} = \frac{1}{\varphi^3}$ , o quadrado IJKO terá lado  $\overline{IJ} = \overline{EF} - \overline{HI} \Leftrightarrow \overline{IJ} = \overline{JK} = \frac{1}{\varphi^2} - \frac{1}{\varphi^3} = \frac{1}{\varphi^4}$ .

- Lado do quadrado KLMP:

Sendo  $\overline{JK} = \frac{1}{\varphi^4}$ , o quadrado KLMP terá lado  $\overline{KL} = \overline{GH} - \overline{JK} \Leftrightarrow \overline{KL} = \frac{1}{\varphi^3} - \frac{1}{\varphi^4} = \frac{1}{\varphi^5}$ .

A razão entre as áreas A dos quadrados KLMP, de lado  $\frac{1}{\varphi^5}$ , e o quadrado de lado unitário ABCH, será então:

$$\frac{A_{KLMP}}{A_{ABCH}} = \frac{\left(\frac{1}{\varphi^5}\right)^2}{1^2} = \frac{1}{\varphi^{10}}$$

Resposta: Letra b

Comentário: Questão que envolve o conceito de retângulo áureo e as propriedades do número de ouro.

6ª) (UFSJ 2013) “O Partenon é uma obra arquitetônica grega, cujas aberturas entre suas colunas têm o formato de quadriláteros que são chamados de retângulos de ouro.

Figura 64 - Partenon e o Retângulo Áureo



Fonte: Vestibular UFSJ 2013

Eles recebem esse nome porque a razão entre a altura  $\overline{AB}$  e a base  $\overline{AD}$  é igual ao número de ouro, que é igual a, aproximadamente, 1,618. Para que as portas de uma construção, que têm altura de 2,43 metros, também sejam retângulos de ouro, é CORRETO afirmar que elas terão suas larguras entre:

- A) 1,5 m e 1,51 m. B) 1,61 m e 1,62 m. C) 1,4 m e 1,41 m. D) 1,31 m e 1,32 m.

Solução:

Sendo H a medida da altura da porta e L a medida da largura da porta, é necessário que:

$$\frac{H}{L} = 1,618 \Leftrightarrow \frac{2,43}{L} = 1,618 \Leftrightarrow L = \frac{2,43}{1,618} \approx 1,501 \text{ m}$$

Resposta: Letra A.

Comentário: Questão envolvendo o conceito da razão áurea na arquitetura, tema este tratado no Capítulo 4 do presente trabalho.

## 7 CONCLUSÃO

Ao longo deste trabalho foi apresentada a beleza e as múltiplas curiosidades relacionadas ao número de Ouro. Inicialmente, por meio do contexto histórico, percorreu-se sobre a definição de Razão Áurea dada por Euclides de Alexandria, que culminou em um número irracional com desdobramentos intrigantes na Grécia Antiga, transcendendo em padrões inesperados em vários campos da ciência e na própria natureza.

Em seguida, constatou-se diversas aplicações da Sequência de Fibonacci na natureza, inicialmente surgindo como um problema de reprodução animal e depois se manifestando como um processo de auto-organização em sistemas naturais. Além disso, foi apresentada uma ligação espantosa: o limite da razão entre dois termos sucessivos da sequência de Fibonacci converge para o número de ouro quando  $n$  tende para o infinito.

Foram mostradas ainda as definições de retângulo áureo, triângulo áureo, espiral áurea e espiral logarítmica, interligados ao conceito de razão áurea. Como também as variadas aplicações na natureza, em ambientes, objetos e seres em geral.

A ideia, motivada no Renascimento, de que a razão áurea é uma razão absoluta, uma espécie de número místico, presente em toda a natureza também foi discutida. Nos levando a dedução de que muitas aplicações na verdade foram alvos de malabarismos numéricos com intenção de visualizar aplicações onde não existe. Com isso, espera-se também motivar a quebra de paradigmas em conceitos absolutos e imutáveis relativos a Razão Áurea, lembrando que o conhecimento matemático sempre deve estar sujeito a verificações e demonstrações.

Já no último capítulo foram mostrados como os conceitos de Razão Áurea e Sequência de Fibonacci podem ser utilizados no ensino de razões e proporções, números irracionais, equações quadráticas, sequências numéricas, noções de limites e geometria plana, através de algumas sugestões de atividades. Destacou-se ainda a apresentação de questões envolvendo esses conceitos em exames seletivos de todo o país, comentadas e resolvidas, através de uma perspectiva interdisciplinar.

O estudo sobre este tema foi bastante agradável e aprendi bastante sobre o mesmo. É um tema muito amplo e repleto de possibilidades para a sala de aula. Espero que este trabalho sirva de fonte de pesquisa e que as atividades propostas sirvam como inspiração e sugestão para diversos professores do ensino fundamental e médio. Acredito que as mesmas são munidas de uma vasta riqueza e possibilidade de aproximação da Matemática com o mundo concreto.

## REFERÊNCIAS

- 1 LÍVIO, M. **Razão Áurea**: a história de  $\Phi$ , um número surpreendente. 6 ed. Rio de Janeiro: Record, 2011.
- 2 LANDIM, Nilo Pinheiro. **Razão áurea**: expressando a beleza desse número para o ensino médio. 2014. 70 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal Rural do Semi Árido, Mossoró, 2014. Disponível em: <https://ppgmat.ufersa.edu.br/wp-content/uploads/sites/58/2016/02/Disserta%C3%A7%C3%A3o-Nilo-Pinheiro.pdf>. Acesso em: 02 dez. 2020.
- 3 ZAHN, Maurício. **Sequência de Fibonacci e o número de ouro**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2011.
- 4 FRANCISCO, Samuel Vilela de Lima. **Entre o fascínio e a realidade da razão áurea**. 2017. 119 f. Dissertação (Mestrado Profissional) – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2017. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/148903>. Acesso em: 02 dez. 2020.
- 5 MENDES, Fernanda M. P. **A matemática na natureza**. 2007. 218 f. Dissertação (Mestrado em Matemática e Ciências da Natureza) – Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real, 2007. Disponível em: <https://docplayer.com.br/11524105-A-matematica-na-natureza.html>. Acesso em: 02 dez. 2020.
- 6 ANASTÁCIO, L. R. **Razão áurea**: um rico tesouro de surpresas. 2015. 14 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de São João del Rei, São João del Rei, 2015.
- 7 BIEMBENGUT, Maria Salett. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Contexto, 2000.
- 8 LEOPOLDINO, Karlo Sérgio Medeiros. **Sequências de Fibonacci e a razão áurea**: aplicações no ensino básico. 2016. 117 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufrn.br/handle/123456789/21244>. Acesso em: 02 dez. 2020.
- 9 VEIGA, Leila E. M. **A volta do número de Ouro**. 2006. 56 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Ensino de Matemática) – Instituto Superior de Educação, Praia, 2006. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10961/2242>. Acesso em: 02 dez. 2020.
- 10 CÂMARA, M. A.; RODRIGUES, M. S. O número  $\phi$ . **FAMAT em Revista**, Uberlândia, n. 11, p. 81-184, out. 2008. Disponível em: <http://www.antigo.famat.ufu.br/node/262>. Acesso em: 02 dez 2020.
- 11 ÁVILA, Geraldo. Retângulo Áureo, divisão áurea e Sequência de Fibonacci. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, v. 6, p. 9-14, 1985.
- 12 HUMTLEY, H. E. **A divina proporção**: um ensaio sobre a beleza na matemática. Brasília: Editora UNB, 1985. (Coleção pensamento científico, v. 18).

- 13 RAMOS, Marcos G. Oliveira. **A sequência de Fibonacci e o número de ouro**. 2013. 93 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2013. Disponível em: <http://www.biblioteca.uesc.br/biblioteca/bdtd/201160277D.pdf>. Acesso em: 02 dez. 2020.
- 14 RAMOS, Paulo Luiz da Silva. **Razão áurea: uma proposta para o ensino**. 2016. 99 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade de Brasília, Brasília, 2016. Disponível em: <https://repositorio.unb.br/handle/10482/21312>. Acesso em: 02 dez. 2020.
- 15 BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs): ensino médio**. Brasília: MEC, 2000.
- 16 KFOURI, Viviane de Oliveira. **Fi: o número de ouro**. 2014. 63 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014. Disponível em: <http://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tde/2950>. Acesso em: 02 dez. 2020.