

TESE DE MESTRADO

ESPALHAMENTO DE ONDAS PLANAS EM ESFERAS COM RUGOSIDADE

Autor: *Silas Lenz César*

Orientador: *Gil de Aquino Farias*

FORTALEZA-CEARÁ

- 1989 -

ESPALHAMENTO DE ONDAS PLANAS EM ESFERAS COM RUGOSIDADE

SILAS LENZ CESAR

Tese apresentada ao Departamento de Física,  
como parte dos requisitos para obtenção do título de

MESTRE EM FÍSICA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

FORTALEZA - 1989

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

C416e César, Silas Lenz.

Espalhamento de ondas planas em esferas com rugosidade / Silas Lenz César. – 1989.  
218 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa  
de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 1989.

Orientação: Prof. Dr. Gil de Aquino Farias.

1. Mie, Espalhamento de. 2. Espalhamento (Física). I. Título.

CDD 530

---



" ESPALHAMENTO DE ONDAS PLANAS EM ESFERAS COM RUGOSIDADE "

Silas Lenz Cesar

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física da  
Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos para  
obtenção do Grau de Mestre em Física.

Comissão Julgadora:

---

Gil de Aquino Farias (UFC)

----- Orientador

---

Eudenilson Lins de Albuquerque (UFRN)

Júlio Auto Neto (UFC)

Aprovada em, 20 de Julho de 1989.



À minha esposa

Aos meus filhos

Aos meus pais.

## A G R A D E C I M E N T O S

Ao Professor Gil de Aquino Farias, pela orientação valiosa, pela sua participação em todas as horas, pela compreensão humana que demonstrou, pela amizade que ficou.

À minha esposa Mônica, pela ajuda desprendida em todos os momentos.

À Professora Eloneid, pelas discussões e amizade.

Ao José Ramos Gonçalves, pela colaboração com o computador e pela amizade.

À Universidade Estadual do Ceará, pelo apoio e incentivo.

À Regina Fátima, pela paciência no trabalho de dactilografia, e ao Dedê, pelos desenhos.

Enfim, a todos os amigos que contribuíram de alguma forma para que esse trabalho fosse realizado.

## Í N D I C E

	<u>Página</u>
AGRADECIMENTO.....	iv
RESUMO.....	vii
ABSTRACT.....	viii
1. INTRODUÇÃO.....	01
2. TEORIA DE MIE.....	04
2.1. - Vetores Harmônicos Esféricos.....	04
2.2. - Espalhamento de Mie.....	13
2.2.1. Esfera Lisa Dielétrica.....	15
2.2.2. Esfera Lisa Condutora.....	23
2.2.3. Seção de Choque e Matriz de Espalhamento.....	25
2.3. - Espalhamento Rayleigh.....	42
3. CARACTERIZAÇÃO DA RUGOSIDADE.....	48
4. ESPALHAMENTO EM ESFERAS COM RUGOSIDADE - FORMALISMO.....	56
4.1. - Esfera Rugosa Dielétrica.....	60
4.1.1. Coeficientes em ordem zero- Esfera Rugosa Dielétrica.....	72
4.1.2. Coeficientes em ordem um - Esfera Rugosa Dielétrica.....	73
4.1.3. Coeficientes em ordem dois- Esfera Rugosa Dielétrica.....	77
4.2. - Esfera Rugosa Condutora.....	86
4.2.1. Coeficientes em ordem zero- Esfera Rugosa Condutora.....	90
4.2.2. Coeficientes em ordem um-	

Esfera Rugosa Condutora.....	90
4.2.3. Coeficientes em ordem dois-	
Esfera Rugosa Condutora.....	92
5. MATRIZ DE ESPALHAMENTO E SEÇÃO DE CHOQUE DE UMA ESFERA RUGOSA.....	97
5.1. - Espalhamento Rayleigh.....	106
5.1.1. Esfera Rugosa Dielétrica.....	107
5.1.2. Esfera Rugosa Condutora.....	117
6. RESULTADOS E CONCLUSÕES.....	127
7. FIGURAS.....	135
APÊNDICE A.....	147
- APÊNDICE B.....	161
APÊNDICE C.....	168
- APÊNDICE D.....	180
APÊNDICE E.....	202
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	217

## R E S U M O

Neste trabalho estudamos o espalhamento de uma onda plana por uma esfera rugosa a partir de uma teoria de perturbação no espalhamento de Mie, válida para qualquer comprimento de onda incidente. A rugosidade é descrita em termos do desvio médio quadrático ( $\delta_{rms}$ ) da superfície da esfera perfeita e de uma função de correlação gaussiana com comprimento de correlação angular  $a$ . Uma solução formal para o campo espalhado pela esfera rugosa é obtida de modo que a seção de choque diferencial e a matriz de espalhamento da esfera rugosa sejam determinadas até segunda ordem em  $\delta_{rms}$ .

No limite do espalhamento Rayleigh ( $\lambda \gg R$ ) os resultados são analisados em função do comprimento de correlação angular  $a$ .

## A B S T R A C T

We study the scattering of a plane wave from a rough surface by using a perturbation expansion on the Mie theory and the results are valid for any wavelength. The rough is described in terms of the mean-square departure of the surface ( $\delta_{\text{rms}}$ ) from a perfect sphere and a Gaussian correlation with angular correlation length  $\underline{a}$ . The scattered fields are obtained such that differential cross section and the scattering matrix are calculated up to the second-order in  $\delta_{\text{rms}}$ . The results are analyzed in the limit of long wavelength (Rayleigh scattering) as a function of the angular correlation length.

## I N T R O D U Ç Ã O

Um dos mais importantes problemas com solução exata na teoria de espalhamento elástico por partículas é o de uma esfera perfeita com raio e índice de refração arbitrários. Em 1908, Gustav Mie<sup>(1)</sup> desenvolveu a teoria (Teoria de Mie) que resolve este problema, procurando entender a variedade de cores no espalhamento por pequenas partículas colóidais de ouro em suspensão aquosa.

A solução formal obtida por Mie para os campos eletromagnéticos espalhados por uma esfera é uma série infinita de ondas parciais e por isso, embora estivesse disponível por tantos anos, somente com o advento de grandes computadores digitais é que ela se tornou de grande importância, sendo praticamente o único método teórico para se determinar as propriedades do espalhamento de luz por partículas de qualquer tamanho e índice de refração. A Teoria de Mie tem sido testada experimentalmente com os resultados em excelente acordo com a teoria<sup>(2)</sup> e ela mesma serve de teste para outras teorias não exatas mas que tentam extrair somente os efeitos físicos dominantes do espalhamento na região da frequência de interesse<sup>(3)</sup>.

No limite de comprimentos de onda muito maiores que o raio da esfera, somente os primeiros termos da série são relevantes e a partir disso se obtém a Lei de Rayleigh<sup>(4)</sup> do espalhamento para partículas pequenas, usada para explicar a cor azul do céu. No limite de comprimentos de onda muito meno

res que o raio da esfera, técnicas como a transformação de Watson modificada são utilizadas para condensar em alguns pólos de integrais complexas as informações físicas relevantes dispersas nas ondas parciais da solução de Mie, conseguindo com isso um entendimento melhor de fenômenos óticos, tais como o arco-íris e a auréola<sup>(5)</sup>.

Apesar da vasta aplicabilidade da teoria de Mie<sup>(6)</sup> muitas partículas de interesse não são esferas perfeitas e é de considerável importância que se estude o espalhamento em partículas irregulares ou quase esféricas. Trabalhos teóricos têm sido feitos para descrever o espalhamento em esferóides a partir de uma teoria de perturbação no espalhamento de Mie<sup>(7),(8)</sup>, ou através da expansão dos campos em coordenadas esferoidais<sup>(9)</sup>.

Em muitos problemas de interesse os espalhadores individuais são de forma irregular com uma superfície de perfil rugoso aleatório<sup>(10)</sup>. Vários trabalhos têm sido feitos para descrever o efeito da rugosidade no espalhamento por uma esfera com dimensões muito maiores que o comprimento de onda incidente<sup>(11),(12),(13)</sup>.

Neste trabalho vamos estudar o espalhamento de uma onda plana por uma esfera com rugosidade estatística a partir de uma teoria de perturbação no espalhamento de Mie, válida para qualquer comprimento de onda incidente. Vamos obter uma solução formal para o campo eletromagnético espalhado em termos das grandezas que caracterizam a rugosidade e das propriedades eletromagnéticas da esfera rugosa. A seção de choque diferencial e a matriz de espalhamento da esfera rugosa serão determinadas e no limite de esferas pequenas comparadas ao comprimento de onda ( espalhamento Rayleigh )

os resultados serão analisados em função dos parâmetros da rugosidade.

Para estudar o espalhamento de uma onda plana por uma esfera rugosa, vamos desenvolver inicialmente no capítulo II a base matemática da teoria de Mie, obtendo a seção de choque e matriz de espalhamento para uma esfera lisa dielétrica ou condutora, ao mesmo tempo em que introduzimos a notação que será usada nos capítulos subsequentes.

No Capítulo III, descrevemos o modelo de rugosidade que usaremos, caracterizando-o em termos dos parâmetros que descrevem o desvio médio quadrático ( $\delta_{rms}$ ) da superfície rugosa em relação ao raio médio ( $R$ ) da esfera lisa, e do comprimento de correlação angular ( $a$ ) da rugosidade para uma função de correlação gaussiana.

No Capítulo IV usamos uma teoria de perturbação em termos do parâmetro  $\delta_{rms}/R$  para obter os coeficientes da expansão do campo espalhado em vetores harmônicos esféricos. Este cálculo é feito para duas polarizações incidentes e para uma esfera rugosa dielétrica ou condutora.

No Capítulo V determinamos a seção de choque diferencial e a matriz de espalhamento da esfera rugosa até segunda ordem em  $\delta_{rms}/R$  e obtemos resultados analíticos no limite de espalhamento Rayleigh ( $\lambda \gg R$ ).

No Capítulo VI analisamos esses resultados em função do desvio médio quadrático ( $\delta_{rms}$ ) e do comprimento de correlação angular ( $a$ ) da rugosidade, procurando uma interpretação física. Concluimos com considerações gerais a respeito da aplicação e limitação do trabalho, sugerindo possíveis extensões do mesmo.

## C A P Í T U L O    I I

### TEORIA DE MIE

Neste Capítulo, vamos considerar o problema do espalhamento de uma onda plana por uma esfera perfeitamente lisa, de raio e índice de refração arbitrários. A esfera e o meio no qual ela está imersa são considerados isotrópicos, homogêneos e lineares nas suas propriedades eletromagnéticas. A solução exata desse problema foi desenvolvida inicialmente por GUSTAV MIE<sup>(1)</sup> e é conhecida como a Teoria de Mie.

Inicialmente desenvolveremos a base matemática da Teoria de Mie, descrevendo os vetores harmônicos esféricos e suas propriedades. Em seguida, resolveremos o problema do espalhamento obtendo os campos espalhados pela esfera como uma série infinita de vetores harmônicos esféricos. A partir dessa solução vamos derivar expressões analíticas para a seção de choque diferencial e elementos da matriz de espalhamento da esfera. Finalmente, aplicaremos os resultados obtidos, no limite de comprimentos de onda muito maiores que o raio da esfera, cuja região do espectro corresponde ao espalhamento RAY - LEIGH<sup>(4)</sup>.

#### 2.1. Vetores Harmônicos Esféricos

O assunto desta seção é a descrição de soluções das equações de Maxwell em coordenadas esféricas polares, para um

meio linear, homogêneo e isotrópico.

Sem perda de generalidade, vamos considerar uma dependência temporal harmônica para os campos elétricos e magnético dados respectivamente por

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}(\vec{x}) e^{-i\omega t} \quad (2.1a)$$

e

$$\vec{H}(\vec{x}, t) = \vec{H}(\vec{x}) e^{-i\omega t} \quad (2.1b)$$

Com a dependência harmônica expressa na equação (2.1), as equações de Maxwell num meio sem cargas livres ficam na forma

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad , \quad (2.2a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad (2.2b)$$

e

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = i\omega\mu\vec{H} \quad , \quad (2.3a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = -i\omega\epsilon\vec{E} \quad , \quad (2.3b)$$

onde  $\mu$  é a permeabilidade magnética do meio,  $\epsilon$  é a permissividade elétrica e  $\vec{E} = \vec{E}(\vec{x})$  e  $\vec{H} = \vec{H}(\vec{x})$  são as partes espaciais dos campos elétrico e magnético, respectivamente.

Aplicando o operador rotacional na equação (2.3a) e na equação (2.3b), obtemos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = i\omega\mu\vec{\nabla} \times \vec{H} = \mu\epsilon\omega^2\vec{E}, \quad (2.4a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H} = -i\omega\epsilon\vec{\nabla} \times \vec{E} = \mu\epsilon\omega^2\vec{H}. \quad (2.4b)$$

Usando a identidade

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}, \quad (2.5)$$

e o resultado das equações (2.2), podemos escrever as equações (2.4) como

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad (2.6a)$$

e

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0, \quad (2.6b)$$

onde

$$k^2 = \mu\epsilon\omega^2, \quad (2.7)$$

e deste modo os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  satisfazem a mesma equação de onda vetorial e são dependentes entre si de acordo com as equações (2.3).

Para resolver o problema do espalhamento em esferas, precisamos achar as soluções da equação (2.6) em coordenadas esféricas. Neste sistema de coordenadas, cada equação vetorial em (2.6) resulta num sistema de três equações escalares acopladas

das envolvendo as componentes do campo correspondente. Um modo direto de construir soluções vetoriais das equações (2.6) em coordenadas esféricas é considerar as soluções  $\psi = \psi(r, \theta, \phi)$  da equação de onda escalar

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad . \quad (2.8)$$

Definindo os vetores harmônicos esféricos  $\vec{L}(r, \theta, \phi)$ ,  $\vec{M}(r, \theta, \phi)$  e  $\vec{N}(r, \theta, \phi)$ , tais que

$$\vec{L} = \vec{\nabla} \psi \quad , \quad (2.9a)$$

$$\vec{M} = \vec{\nabla} \times (\vec{r} \psi), \quad (2.9b)$$

$$\vec{N} = \frac{1}{k} \vec{\nabla} \times \vec{M} \quad , \quad (2.9c)$$

pode-se verificar<sup>(14)</sup> que estes vetores são soluções independentes das equações (2.6). Dois quaisquer destes vetores são não-colineares, como mostram os produtos

$$\vec{M} \cdot \vec{N} = \vec{M} \cdot \vec{L} = 0, \quad (2.10)$$

$$\vec{N} \times \vec{L} \neq 0 \quad ,$$

e o vetor  $\vec{M}$  é perpendicular ao vetor  $\vec{r}$ ,

$$\vec{M} \cdot \vec{r} = 0 \quad . \quad (2.11)$$

Das equação (2.9) pode-se verificar que os vetores harmônicos esféricos satisfazem também às relações

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{M} = \vec{\nabla} \cdot \vec{N} = 0 \quad , \quad (2.12)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{L} \neq 0 \quad (2.13)$$

e

$$\vec{\nabla} \times \vec{M} = k\vec{N} \quad , \quad (2.14)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{N} = k\vec{M} \quad .$$

Os vetores  $\vec{M}$  e  $\vec{N}$  têm todas as propriedades requeridas pelos campos: Satisfazem a equação de onda (2.6), são solenoidais, equação (2.2), o rotacional de  $\vec{M}$  é proporcional a  $\vec{N}$  e vice-versa, equação (2.3). Embora o vetor  $\vec{L}$  satisfaça a equação (2.6) ele não é solenoidal, equação (2.13), e por isso não é solução para os campos do nosso problema.

As soluções da equação escalar (2.8) em coordenadas esféricas podem ser escritas na forma

$$\psi_{\underline{e}mn} = Z_n(kr) P_n^m(\cos\theta) \begin{cases} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{cases} \quad , \quad (2.15)$$

com  $n = 0, 1, 2, \dots$  e  $m = 0, 1, 2, \dots, n$ , e ao índice  $\underline{e}$  (par) associa-se a função  $\cos m\phi$ , ao índice  $\underline{o}$  (ímpar) associa-se a função  $\sin m\phi$ ,  $P_n^m(\cos\theta)$  são os polinômios associados de Legendre e  $Z_n(kr)$  representa uma função esférica de Bessel que deve ser

especificada de acordo com as condições de contorno do problema.

Para cada função  $\psi_{\text{emno}}$  construímos os vetores

$$\vec{M}_{\text{emno}} = \vec{\nabla} \times (\vec{r} \psi_{\text{emno}}) \quad (2.16a)$$

e

$$\vec{N}_{\text{emno}} = \frac{1}{k} \vec{\nabla} \times (\vec{M}_{\text{emno}}). \quad (2.16b)$$

Em termos de componentes esféricas a forma explícita destes vetores é <sup>(14)</sup>

$$\vec{M}_{\text{emno}} = Z_n(kr) \vec{M}_{\text{emno}}^T \quad (2.17a)$$

e

$$\vec{N}_{\text{emno}} = \frac{1}{kr} \frac{d}{d(kr)} [kr Z_n(kr)] \vec{N}_{\text{emno}}^T + \frac{Z_n(kr)}{kr} \vec{N}_{\text{emno}}^R \quad (2.17b)$$

onde os vetores  $\vec{M}_{\text{emno}}^T$  e  $\vec{N}_{\text{emno}}^T$  dependem apenas das coordenadas  $\theta$  e  $\phi$ , e são definidos por

$$\vec{M}_{\text{emno}}^T = \pm m \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \begin{Bmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{Bmatrix} \hat{e}_\theta - \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \begin{Bmatrix} \sin m\phi \\ \cos m\phi \end{Bmatrix} \hat{e}_\phi, \quad (2.18a)$$

$$\vec{N}_{emn}^T = \frac{d P_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \begin{Bmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{Bmatrix} \hat{e}_\theta + m \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \begin{Bmatrix} \sin m\phi \\ \cos m\phi \end{Bmatrix} \hat{e}_\phi, \quad (2.18b)$$

$$\vec{N}_{emn}^R = n(n+1)P_n^m(\cos\theta) \begin{Bmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{Bmatrix} \hat{e}_r, \quad (2.18c)$$

onde T indica que o vetor  $\vec{e}$  é transverso ao vetor  $\vec{r}$  e R indica direção radial.

Os vetores  $\vec{M}_{omn}^T$  e  $\vec{N}_{emn}^T$ , definidos nas equações (2.18a) e (2.18b) satisfazem uma série de relações importantes que serão usadas no decorrer deste trabalho. Escolhendo  $\lambda$  para denotar o índice e (par) ou o (ímpar), pode-se verificar os seguintes produtos

$$\vec{M}_{\lambda mn}^T \cdot \vec{M}_{\lambda' m' n'}^T = \vec{N}_{\lambda mn}^T \cdot \vec{N}_{\lambda' m' n'}^T, \quad (2.19a)$$

$$\vec{N}_{\lambda mn}^T \cdot \vec{M}_{\lambda' m' n'}^T = -\vec{M}_{\lambda mn}^T \cdot \vec{N}_{\lambda' m' n'}^T, \quad (2.19b)$$

e

$$\hat{e}_r \times \vec{M}_{\lambda mn}^T = \vec{N}_{\lambda mn}^T, \quad (2.20a)$$

$$\hat{e}_r \times \vec{N}_{\lambda mn}^T = -\vec{M}_{\lambda mn}^T. \quad (2.20b)$$

Usando as relações de ortogonalidade das funções  $\cos m\phi$  e  $\sin m\phi$  e dos polinômios associados de Legendre, obtêm-se as relações de ortogonalidade

$$\langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \vec{N}_{\lambda', m', n'}^T \rangle = - \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \vec{M}_{\lambda', m', n'}^T \rangle = 0 \quad (2.21a)$$

e

$$\langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \vec{M}_{\lambda', m', n'}^T \rangle = \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \vec{N}_{\lambda', m', n'}^T \rangle = (1 - \delta_{m,0} \delta_{\lambda,0}) \beta_{mn} \delta_{\lambda, \lambda'} \delta_{m, m'} \delta_{n, n'} \quad (2.21b)$$

onde

$$\beta_{mn} = 2\pi(1 + \delta_{m,0}) \frac{n(n+1)}{(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \quad , \quad (2.22)$$

e definimos a notação

$$\langle \vec{A} | \vec{B} \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \vec{A} \cdot \vec{B} \sin\theta d\theta d\phi = \int_0^{4\pi} \vec{A} \cdot \vec{B} d\Omega \quad . \quad (2.23)$$

Para cada solução  $\psi_{\lambda mn}$ , fisicamente aceitável, na equação (2.8), podemos construir dois vetores  $\vec{M}_{\lambda mn}$  e  $\vec{N}_{\lambda mn}$  que são soluções independentes da equação (2.6). Assim, qualquer solução para os campos  $\vec{E} = \vec{E}(r, \theta, \phi)$  e  $\vec{H} = \vec{H}(r, \theta, \phi)$  pode ser expressa como uma combinação linear dos vetores  $\vec{M}_{\lambda mn}$  e  $\vec{N}_{\lambda mn}$ ,

de modo que podemos escrever

$$\vec{E} = \sum_{\lambda=0,e} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [ A_{\lambda mn} \vec{M}_{\lambda mn} + B_{\lambda mn} \vec{N}_{\lambda mn} ] \quad (2.24a)$$

e

$$\vec{H} = \frac{k}{i\omega\mu} \sum_{\lambda=0;e} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [ A_{\lambda mn} \vec{N}_{\lambda mn} + B_{\lambda mn} \vec{M}_{\lambda mn} ] , \quad (2.24b)$$

onde a equação (2.24b) foi obtida da equação (2.24a) usando as equações (2.3a) e (2.14).

Para se determinar os coeficientes  $A_{\lambda mn}$  e  $B_{\lambda mn}$  nas equações (2.24), aplicamos as condições de contorno do problema e usamos as relações de ortogonalidade expressas nas equações (2.21).

Uma vez que no espalhamento Mie a onda incidente é uma onda plana, vamos considerar a expansão em vetores harmônicos esféricos desta onda, descritos pelos campos

$$\vec{E} = \hat{i} E_0 e^{ikz} \quad (2.25a)$$

$$\vec{H} = \hat{j} \frac{k}{\omega\mu} E_0 e^{ikz} \quad (2.25b)$$

Os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  dados nas equações (2.25) satisfazem as equações vetoriais dadas em (2.6) e são finitos para qualquer ponto do espaço. A função radial adequada para estes campos é a função esférica de Bessel do primeiro tipo,  $j_n(kr)$ .

Usando as propriedades dos vetores harmônicos esféricos  $\vec{M}_{\lambda mn}$  e  $\vec{N}_{\lambda mn}$ , pode-se mostrar<sup>(14)</sup> que os campos da equação (2.25) podem ser escritos na forma

$$\vec{E} = \vec{i} E_0 e^{ikz} = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{(2n+1)}{n(n+1)} [\vec{M}_{oln}^{(1)} - i\vec{N}_{eln}^{(1)}] , \quad (2.26a)$$

$$\vec{H} = \vec{j} \frac{k}{\omega\mu} E_0 e^{ikz} = - \frac{k}{\omega\mu} E_0 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{(2n+1)}{n(n+1)} [\vec{M}_{eln}^{(1)} + i\vec{N}_{oln}^{(1)}] , \quad (2.26b)$$

onde (1) indica que a função radial nas equações (2.17a) e (2.17b) é a função esférica de Bessel do primeiro tipo,  $j_n(kr)$ , e (2), (3) e (4) serão usados para as funções esféricas de Bessel do segundo tipo, Hankel do primeiro tipo e Hankel do segundo tipo, respectivamente. No que se segue, usaremos a notação adotada nesta seção.

## 2.2. - Espalhamento de Mie

Nesta seção vamos considerar o problema do espalhamento de uma onda plana por uma esfera perfeitamente lisa de raio  $R$ , Figura (1). Tanto a esfera como o meio infinito no qual ela está imersa são representados pelos valores  $\mu_1, \epsilon_1$  e  $\mu_2, \epsilon_2$  para a permeabilidade magnética e permissividade elétrica da esfera e do meio infinito, respectivamente. Usaremos o índice 1 para nos referirmos a grandezas no interior da esfera (meio 1) e o índice 2, para o meio infinito (meio 2). As permissividades elé

tricas da esfera ( $\epsilon_1$ ) e do meio infinito ( $\epsilon_2$ ) podem ser complexas de modo a incluir a condutividade ( $\sigma_1$ ) no interior da esfera e a absorção no meio infinito. A cada par,  $\mu_1, \epsilon_1$ , e  $\mu_2, \epsilon_2$ , associamos o número de onda correspondente, de acordo com a equação (2.7), de modo que

$$k_1^2 = \mu_1 \epsilon_1 \omega^2$$

e

(2.27)

$$k_2^2 = \mu_2 \epsilon_2 \omega^2$$

onde  $\omega$  é a frequência da onda incidente.

Considerando uma onda plana incidente na esfera, com a parte espacial descrita pelos campos

$$\vec{E}_i = iE_0 e^{ik_2 z} \quad (2.28a)$$

e

$$\vec{H}_i = \hat{j} \frac{k_2}{\omega \mu_2} E_0 e^{ik_2 z} \quad (2.28b)$$

vamos determinar a solução estacionária do campo eletromagnético total no meio 2,  $\vec{E}_2$  e  $\vec{H}_2$ , e o campo no interior da esfera,  $\vec{E}_1$  e  $\vec{H}_1$ . O campo eletromagnético total no meio 2 deve tender ao campo incidente para pontos muito distantes da esfera. Sendo assim, o campo total no meio 2 será escrito como a superpo-

sição do campo incidente,  $\vec{E}_i$  e  $\vec{H}_i$ , e do campo espalhado pela esfera,  $\vec{E}_s$  e  $\vec{H}_s$ , ou seja,

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_i + \vec{E}_s \quad (2.29a)$$

e

$$\vec{H}_2 = \vec{H}_i + \vec{H}_s \quad (2.29b)$$

No meio 1, o campo total é o campo transmitido para o interior da esfera,  $\vec{E}_t$  e  $\vec{H}_t$ . Deste modo,

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_t \quad (2.30a)$$

e

$$\vec{H}_1 = \vec{H}_t \quad (2.30b)$$

Os campos definidos nas equações (2.29) e (2.30) devem satisfazer as equações (2.6) em cada meio e as condições de contorno impostas pelas equações de Maxwell na superfície da esfera.

### 2.2.1. - Esfera Lisa Dielétrica

Considerando uma esfera dielétrica, as equações de Maxwell impõem a continuidade da componente tangencial dos campos na superfície da esfera, ou seja,

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad (2.31a)$$

e

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0 \quad , \quad (2.31b)$$

onde  $\vec{n}$  é um vetor normal à superfície da esfera.

Como  $\vec{n}$  é na direção radial, podemos reescrever a equação (2.31) a partir das equações (2.29) e (2.30), na forma

$$[ \vec{E}_i^T + \vec{E}_s^T - \vec{E}_t^T ]_{r=R} = 0 \quad (2.32a)$$

e

$$[ \vec{H}_i^T + \vec{H}_s^T - \vec{H}_t^T ]_{r=R} = 0 \quad , \quad (2.32b)$$

onde  $\underline{T}$  indica a parte transversa dos campos.

De modo análogo à seção anterior, vamos expandir os campos espalhado e transmitido em termos dos vetores  $\vec{M}_{\lambda mn}$  e  $\vec{N}_{\lambda mn}$  com funções radiais convenientes e aplicar as condições de contorno, equação (2.32), para determinar os coeficientes das expansões.

Para o campo incidente, equação (2.28), a expansão é dada pela equação (2.26). Neste campo, sem perda de generalidade, faremos  $E_0 = 1$ , de modo que o campo incidente pode ser escrito na forma

$$\vec{E}_i = \hat{i} e^{ik_2 z} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n [ \vec{M}_{0ln}^{(1)} - i \vec{N}_{eln}^{(1)} ] \quad (2.33a)$$

e

$$\vec{H}_i = \hat{j} e^{ik_2 z} = -\gamma_2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n [ \vec{M}_{eln}^{(1)} + i \vec{N}_{0ln}^{(1)} ] , \quad (2.33b)$$

onde definimos

$$\alpha_n = \frac{i^n (2n+1)}{n(n+1)} \quad (2.34)$$

e

$$\gamma_2 = \frac{k_2}{\omega \mu_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \quad (2.35)$$

O campo espalhado deve ter uma expansão cujas funções radiais tenham a forma  $\frac{e^{ik_2 r}}{k_2 r}$  para  $r \rightarrow \infty$ , que é típica dos campos irradiados<sup>(14)</sup>. A função radial que satisfaz esta condição é a função esférica de Bessel do terceiro tipo ou função esférica de Hankel do primeiro tipo,  $h_n(k_2 r)$ . O campo transmitido para o interior da esfera deve ser finito em  $r = 0$  e, portanto, a função radial adequada é a função esférica de Bessel do primeiro tipo,  $j_n(k_1 r)$ . Desse modo, os campos espalhado e transmitido podem ser expandidos na forma

$$\vec{E}_s = \sum_{\lambda} \sum_n \sum_m \alpha_n [ A_{\lambda mn}^s \vec{M}_{\lambda mn}^{(3)}(r, \theta, \phi) - i B_{\lambda mn}^s \vec{N}_{\lambda mn}^{(3)}(r, \theta, \phi) ] ,$$

(2.36a)

$$\vec{H}_s = -\gamma_2 \sum_{\lambda} \sum_n \sum_m \alpha_n [ B_{\lambda mn}^s \vec{M}_{\lambda mn}^{(3)}(r, \theta, \phi) + i A_{\lambda mn}^s \vec{N}_{\lambda mn}^{(3)}(r, \theta, \phi) ]$$

(2.36b)

e

$$\vec{E}^t = \sum_{\lambda} \sum_n \sum_m \alpha_n [ A_{\lambda mn}^t \vec{M}_{\lambda mn}^{(1)}(r, \theta, \phi) - i B_{\lambda mn}^t \vec{N}_{\lambda mn}^{(1)}(r, \theta, \phi) ] ,$$

(2.37a)

$$\vec{H}_t = -\gamma_1 \sum_{\lambda} \sum_n \sum_m \alpha_n [ B_{\lambda mn}^t \vec{M}_{\lambda mn}^{(1)}(r, \theta, \phi) + i A_{\lambda mn}^t \vec{N}_{\lambda mn}^{(1)}(r, \theta, \phi) ] ,$$

(2.37b)

respectivamente, onde definimos

$$\gamma_1 = \frac{k_1}{\omega \mu_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} .$$

(2.38)

Nas equações (2.36) e (2.37)  $A_{\lambda mn}^s$ ,  $B_{\lambda mn}^s$ ,  $A_{\lambda mn}^t$  e  $B_{\lambda mn}^t$  são os coeficientes das expansões que queremos calcular, com  $\lambda = (o, e)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  e  $m = 0, 1, \dots, n$ . A partir dessas equações qualquer somatória com limites não especificados indica uma soma sobre todos estes valores dos índices  $\lambda, n$  e  $m$ .

Definindo as funções

$$\hat{j}_n(\rho) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [ \rho j_n(\rho) ] ,$$

(2.39a)

$$\tilde{h}_n(\rho) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [ \rho h_n(\rho) ] \quad (2.39b)$$

$$e \quad \psi_n(\rho) = \frac{j_n(\rho)}{\rho} \quad , \quad (2.40a)$$

$$\phi_n(\rho) = \frac{h_n(\rho)}{\rho} \quad (2.40b)$$

e considerando as expansões dos vetores  $\vec{M}_{\lambda mn}$  e  $\vec{N}_{\lambda mn}$  dados nas equações (2.17) e (2.18), podemos reescrever as equações (2.33), (2.36) e (2.37), por ordem, na forma

$$\vec{E}_i = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n [ j_n(k_2 r) \vec{M}_{0ln}^T - i j_n(k_2 r) \vec{N}_{eln}^T - i \psi_n(k_2 r) \vec{N}_{eln}^R ] \quad , \quad (2.41a)$$

$$\vec{H}_i = - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \gamma_2 [ j_n(k_2 r) \vec{M}_{eln}^T + i j_n(k_2 r) \vec{N}_{0ln}^T + i \psi_n(k_2 r) \vec{N}_{0ln}^R ] \quad (2.41b)$$

e

$$\vec{E}_s = \sum_{\lambda mn} \alpha_n [ h_n(k_2 r) A_{\lambda mn}^S \vec{M}_{\lambda mn}^T - i \tilde{h}_n(k_2 r) B_{\lambda mn}^S \vec{N}_{\lambda mn}^T - i \phi_n(k_2 r) B_{\lambda mn}^S \vec{N}_{\lambda mn}^R ] , \quad (2.42.a)$$

$$\vec{H}_s = - \sum_{\lambda n m} \sum \alpha_n \gamma_2 [ h_n(k_2 r) B_{\lambda m n}^S \vec{M}_{\lambda m n}^T + i \bar{h}_n(k_2 r) A_{\lambda m n}^S \vec{N}_{\lambda m n}^T + i \phi_n(k_2 r) A_{\lambda m n}^S \vec{N}_{\lambda m n}^R ]$$

(2.42b)

e

$$\vec{E}_t = \sum_{\lambda n m} \sum \alpha_n [ j_n(k_1 r) A_{\lambda m n}^t \vec{M}_{\lambda m n}^T - i \dot{j}_n(k_1 r) B_{\lambda m n}^t \vec{N}_{\lambda m n}^T - i \psi_n(k_1 r) B_{\lambda m n}^t \vec{N}_{\lambda m n}^R ] ,$$

(2.43a)

$$\vec{H}_t = - \sum_{\lambda n m} \sum \alpha_n \gamma_1 [ j_n(k_1 r) B_{\lambda m n}^t \vec{M}_{\lambda m n}^T + i \dot{j}_n(k_1 r) A_{\lambda m n}^t \vec{N}_{\lambda m n}^T + i \psi_n(k_1 r) A_{\lambda m n}^t \vec{N}_{\lambda m n}^R ] .$$

(2.43b)

Substituindo a parte transversa destas séries nas condições de contorno, equação (2.32), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda n m} \sum \alpha_n [ h_n(R_2) A_{\lambda m n}^S - j_n(R_1) A_{\lambda m n}^t ] \vec{M}_{\lambda m n}^T(\theta, \phi) - i \sum_{\lambda n m} \sum \alpha_n [ \bar{h}_n(R_2) B_{\lambda m n}^S + \\ - \dot{j}_n(R_1) B_{\lambda m n}^t ] \vec{N}_{\lambda m n}^T(\theta, \phi) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n j_n(R_2) \vec{M}_{01n}^T(\theta, \phi) + \\ - i \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \dot{j}_n(R_2) \vec{N}_{e1n}^T(\theta, \phi) = 0 \end{aligned}$$

(2.44a)

e

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda n m} \sum \alpha_n [ \gamma_2 h_n(R_2) B_{\lambda m n}^S - \gamma_1 j_n(R_1) B_{\lambda m n}^t ] \vec{M}_{\lambda m n}^T(\theta, \phi) + i \sum_{\lambda n m} \sum \alpha_n [ \gamma_2 \bar{h}_n(R_2) A_{\lambda m n}^S + \\ - \gamma_1 \dot{j}_n(R_1) A_{\lambda m n}^t ] \vec{N}_{\lambda m n}^T(\theta, \phi) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \gamma_2 j_n(R_2) \vec{M}_{e1n}^T(\theta, \phi) + \\ + i \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \gamma_2 \dot{j}_n(R_2) \vec{N}_{01n}^T(\theta, \phi) = 0 , \end{aligned}$$

(2.44b)

onde definimos

$$R_1 = k_1 R$$

$$e \tag{2.45}$$

$$R_2 = k_2 R$$

Para determinar os coeficientes  $A_{\lambda mn}^s$  e  $A_{\lambda mn}^t$ , fazemos o produto escalar das equações (2.44a) e (2.44b) com os vetores  $\vec{M}_{\lambda mn}^T$  e  $\vec{N}_{\lambda mn}^T$ , respectivamente, integramos no ângulo sólido e usamos as relações de ortogonalidade dadas pelas equações (2.21a) e (2.21b). Feito isto, obtemos o sistema de equações

$$h_n(R_2)A_{\lambda mn}^s - j_n(R_1)A_{\lambda mn}^t = -j_n(R_2)\delta_{\lambda,0}\delta_{m,1} \quad , \tag{2.46a}$$

$$\gamma_2 \bar{h}_n(R_2)A_{\lambda mn}^s - \gamma_1 \dot{j}_n(R_1)A_{\lambda mn}^t = -\gamma_2 \dot{j}_n(R_2)\delta_{\lambda,0}\delta_{m,1} \quad . \tag{2.46b}$$

De modo análogo, para determinar os coeficientes  $B_{\lambda mn}^s$  e  $B_{\lambda mn}^t$ , fazemos o produto escalar das equações (2.44a) e (2.44b) por  $\vec{N}_{\lambda mn}^T$  e  $\vec{M}_{\lambda mn}^T$ , respectivamente, e integramos no ângulo sólido, obtendo

$$\bar{h}_n(R_2)B_{\lambda mn}^s - \dot{j}_n(R_1)B_{\lambda mn}^t = -\dot{j}_n(R_2)\delta_{\lambda,e}\delta_{m,1} \quad , \tag{2.47a}$$

$$\gamma_2 \bar{h}_n(R_2)B_{\lambda mn}^s - \gamma_1 j_n(R_1)B_{\lambda mn}^t = -\gamma_2 j_n(R_2)\delta_{\lambda,e}\delta_{m,1} \tag{2.47b}$$

Para frequências não ressonantes, onde os determinantes das equações (2.46) e (2.47) são diferentes de zero, a solução exata para os coeficientes é dada por

$$A_{oln}^s = - \frac{\gamma_2 j_n(R_1) \dot{j}_n(R_2) - \gamma_1 \dot{j}_n(R_1) j_n(R_2)}{\gamma_2 j_n(R_1) \bar{h}_n(R_2) - \gamma_1 \dot{j}_n(R_1) h_n(R_2)}, \quad (2.48a)$$

$$B_{eln}^s = - \frac{\gamma_1 j_n(R_1) \dot{j}_n(R_2) - \gamma_2 \dot{j}_n(R_1) j_n(R_2)}{\gamma_1 j_n(R_1) \bar{h}_n(R_2) - \gamma_2 \dot{j}_n(R_1) h_n(R_2)} \quad (2.48b)$$

e

$$A_{oln}^t = \frac{i\gamma_2}{R_2^2 [\gamma_2 j_n(R_1) \bar{h}_n(R_2) - \gamma_1 \dot{j}_n(R_1) h_n(R_2)]} \quad (2.49a)$$

$$B_{eln}^t = \frac{i\gamma_2}{R_2^2 [\gamma_1 j_n(R_1) \bar{h}_n(R_2) - \gamma_2 \dot{j}_n(R_1) h_n(R_2)]}, \quad (2.49b)$$

onde

$$A_{\lambda mn}^s = A_{\lambda mn}^t = 0, \text{ para } (\lambda, m) \neq (o, 1) \quad (2.50a)$$

e

$$B_{\lambda mn}^s = B_{\lambda mn}^t = 0, \text{ para } (\lambda, m) \neq (e, 1). \quad (2.50b)$$

## 2.2.2. - Esfera Lisa Condutora

No caso da esfera ser perfeitamente condutora ( $\sigma \rightarrow \infty$ ), os campos elétrico e magnético no interior da esfera ( $\vec{E}_t$  e  $\vec{H}_t$ ) são nulos. As condições de contorno para os campos externos na superfície da esfera impõem a continuidade da componente tangencial do campo elétrico e a descontinuidade da componente tangencial do campo magnético, de modo que

$$\vec{n} \times \vec{E}_2 = 0 \quad (2.51a)$$

e

$$\vec{n} \times \vec{H}_2 = \vec{K}, \quad (2.51b)$$

onde  $\vec{K}$  é uma densidade superficial de corrente a ser determinada.

Neste caso usaremos somente a equação (2.51a) para obter os coeficientes da expansão do campo elétrico, equação (2.36a), e o campo magnético será calculado a partir do campo elétrico de acordo com a equação (2.36b). A equação (2.51b) não será usada, a menos que se tenha interesse em determinar a densidade superficial de corrente  $\vec{K}$ .

Reescrevendo a equação (2.51a) na forma

$$[ \vec{E}_i^T + \vec{E}_s^T ]_r = R = 0 \quad (2.52)$$

e substituindo na equação (2.52) a parte transversa dos campos dados nas equações (2.41) e (2.42), obtemos

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda n m} \alpha_n h_n(R_2) A_{\lambda mn}^S \vec{M}_{\lambda mn}^T(\theta, \phi) - i \sum_{\lambda n m} \alpha_n \tilde{h}_n(R_2) B_{\lambda mn}^S \vec{N}_{\lambda mn}^T(\theta, \phi) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n j_n(R_2) \vec{M}_{0ln}^T(\theta, \phi) - i \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \dot{j}_n(R_2) \vec{N}_{eln}^T(\theta, \phi) = 0. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Fazendo o produto escalar da equação (2.53) com os vetores  $\vec{M}_{\lambda mn}^T(\theta, \phi)$  e  $\vec{N}_{\lambda mn}^T(\theta, \phi)$ , respectivamente, e integrando no ângulo sólido, obtemos

$$h_n(R_2) A_{\lambda mn}^S = -j_n(R_2) \delta_{\lambda, o} \delta_{m, l} \quad (2.54a)$$

e

$$\tilde{h}_n(R_2) B_{\lambda mn}^S = -\dot{j}_n(R_2) \delta_{\lambda, e} \delta_{m, l} \quad (2.54b)$$

Desse modo, a solução para os coeficientes será

$$A_{0ln}^S = - \frac{j_n(R_2)}{h_n(R_2)}, \quad (2.55a)$$

$$B_{eln}^S = - \frac{\dot{j}_n(R_2)}{\tilde{h}_n(R_2)}, \quad (2.55b)$$

onde

$$A_{\lambda mn} = 0, \text{ para } (\lambda, m) \neq (0, 1) \quad (2.56a)$$

e

$$B_{\lambda mn} = 0, \text{ para } (\lambda, m) \neq (e, 1) \quad (2.56b)$$

### 2.2.3. - Seção de Choque e Matriz de Espalhamento

Determinados os coeficientes das expansões dos campos espalhados e transmitidos, vamos agora desenvolver expressões gerais para a seção de choque e a matriz de espalhamento de um centro espalhador e aplicá-las para os casos da esfera dielétrica e esfera condutora.

Na zona de radiação em que  $k_2 r \rightarrow \infty$ , as funções radiais das equação (2.42) têm o comportamento

$$\lim_{k_2 r \rightarrow \infty} h_n(k_2 r) \sim (-i)^{n+1} \frac{e^{ik_2 r}}{k_2 r}, \quad (2.57a)$$

$$\lim_{k_2 r \rightarrow \infty} \tilde{h}_n(k_2 r) \sim (-i)^n \frac{e^{ik_2 r}}{k_2 r}, \quad (2.57b)$$

e

$$\lim_{k_2 r \rightarrow \infty} \phi_n(k_2 r) \sim (-i)^{n+1} \frac{e^{ik_2 r}}{(k_2 r)^2}. \quad (2.57c)$$

Uma vez que  $\phi_n(k_2 r)$  tende a zero mais rapidamente que as funções  $h_n(k_2 r)$  e  $\tilde{h}_n(k_2 r)$ , podemos escrever os campos na zo

de radiação, equação (2.42), como

$$\vec{E}_s \sim i \frac{e^{ik_2 r}}{k_2 r} \sum_{\lambda} \sum_n \sum_m \frac{-(2n+1)}{n(n+1)} [ A_{\lambda mn}^s \vec{M}_{\lambda mn}^T + B_{\lambda mn}^s \vec{N}_{\lambda mn}^T ] , \quad (2.58a)$$

$$\vec{H}_s \sim i \frac{e^{ik_2 r}}{k_2 r} \sum_{\lambda} \sum_n \sum_m \frac{-(2n+1)}{n(n+1)} [ A_{\lambda mn}^s \vec{N}_{\lambda mn}^T - B_{\lambda mn}^s \vec{M}_{\lambda mn}^T ] . \quad (2.58b)$$

Definindo o vetor amplitude de espalhamento

$$\vec{F}(\theta, \phi) = \sum_{\lambda} \sum_n \sum_m \frac{-(2n+1)}{n(n+1)} [ A_{\lambda mn}^s \vec{M}_{\lambda mn}^T(\theta, \phi) + B_{\lambda mn}^s \vec{N}_{\lambda mn}^T(\theta, \phi) ] , \quad (2.59)$$

as equações (2.58) ficam na forma

$$\vec{E}_s \sim i \frac{e^{ik_2 r}}{k_2 r} \vec{F}(\theta, \phi) , \quad (2.60a)$$

$$\vec{H}_s \sim i \frac{e^{ik_2 r}}{k_2 r} \gamma_2 [ \hat{e}_r \times \vec{F}(\theta, \phi) ] = \gamma_2 \hat{e}_r \times \vec{E}_s , \quad (2.60b)$$

onde

$$\hat{e}_r \cdot \vec{F}(\theta, \phi) = 0 , \quad (2.61)$$

e a equação (2.60b) foi obtida usando as equações (2.58b) e (2.20). As equações (2.60) e (2.61) mostram a dependência ra

dial e o caráter transversal típicos das ondas eletromagnéticas longe do centro espalhador .

A energia média por segundo absorvida por um pequeno detetor, com a superfície  $\Delta A$  alinhada na direção normal ao vetor  $\hat{e}_r$  com direção não muito próxima da direção incidente  $\hat{k}$ , ver Figura (2), é dada por

$$\Delta W_s = \vec{S}_s \cdot \hat{e}_r \Delta A \quad , \quad (2.62)$$

onde  $S_s$  é o vetor de Poynting médio associado com o campo espalhado

$$\vec{S}_s = \frac{1}{2} \text{Re} [ \vec{E}_s \times \vec{H}_s^* ] = \frac{\gamma_2}{2} | \vec{E}_s |^2 \hat{e}_r \quad . \quad (2.63)$$

Das equações (2.62) e (2.63a), obtemos

$$\Delta W_s = \frac{\gamma_2}{2} \frac{| \vec{F}(\theta, \phi) |^2}{k_2^2} \Delta \Omega \quad , \quad (2.64)$$

onde  $\Delta \Omega = \frac{\Delta A}{r^2}$  é o ângulo sólido subtendido pelo detetor.

A energia média incidente por segundo e por unidade de área normal à direção de propagação incidente, é dada por

$$\vec{S}_i \cdot \hat{k} = \frac{\gamma_2}{2} \quad , \quad (2.65)$$

onde  $\vec{S}_i$  é o vetor de Poynting médio incidente,

$$\vec{S}_i = \frac{1}{2} \text{Re} [ \vec{E}_i \times \vec{H}_i^* ] = \frac{\gamma_2}{2} | \vec{E}_i |^2 \hat{k} \quad . \quad (2.66)$$

A razão entre a potência média espalhada por ângulo sólido,  $\Delta W_s / \Delta \Omega$ , e o fluxo médio de energia incidente, equação (2.65), é a seção de choque diferencial de espalhamento da esfera

$$\sigma(\theta, \phi) = \frac{|\vec{F}(\theta, \phi)|^2}{k_2^2} = r^2 \frac{|\vec{E}_s|^2}{|\vec{E}_i|^2} \quad (2.67)$$

Para  $\theta = \pi$ , a equação (2.67) nos dá a seção de choque de espalhamento para trás (backscattering), e para  $\theta = 0$ , a seção de choque de espalhamento para frente (forward scattering). A seção de choque total de espalhamento é

$$\sigma_T = \int_0^{4\pi} \sigma(\theta, \phi) d\Omega \quad (2.68)$$

Interpondo polarizadores entre a onda incidente e a esfera, pode-se alterar o campo incidente (e conseqüentemente o campo espalhado) polarizando-o, por exemplo, nas direções paralela,  $\hat{e}_{\parallel}$ , ou perpendicular,  $\hat{e}_{\perp}$ , ao plano de espalhamento. As seções de choque de espalhamento, equação (2.67), para cada caso são, respectivamente,

$$\sigma_{\parallel}(\theta, \phi) = \frac{|\vec{F}_{\parallel}(\theta, \phi)|^2}{k_2^2} = \frac{r^2 |\vec{E}_{s\parallel}|^2}{|\vec{E}_i \cdot \hat{e}_{\parallel}|^2} \quad (2.69a)$$

e

$$\sigma_{\perp}(\theta, \phi) = \frac{|\vec{F}_{\perp}(\theta, \phi)|^2}{k_2^2} = \frac{r^2 |\vec{E}_{s\perp}|^2}{|\vec{E}_i \cdot \hat{e}_{\perp}|^2} \quad (2.69b)$$

É importante notar que o campo espalhado nas equações (2.69) depende do respectivo campo incidente, ou seja, o vetor amplitude de espalhamento,  $\vec{F}(\theta, \phi)$ , é diferente para as equações (2.69a) e (2.69b). De qualquer modo, nas equações (2.69) a seção de choque é independente da amplitude do respectivo campo incidente.

Interpondo polarizadores entre a esfera e o detetor, pode-se medir, para cada polarização incidente, as seções de choque de espalhamento, equação (2.67), com polarização paralela,  $\hat{e}_\theta$ , e perpendicular,  $\hat{e}_\phi$ , ao plano de espalhamento, dados respectivamente por

$$\sigma_{\parallel\theta}(\theta, \phi) = \frac{|\vec{E}_{\parallel}(\theta, \phi) \cdot \hat{e}_\theta|^2}{k_2^2} = r^2 \frac{|\vec{E}_{s\parallel} \cdot \hat{e}_\theta|^2}{|\vec{E}_i \cdot \hat{e}_{\parallel}|^2} \quad (2.70a)$$

$$\sigma_{\perp\theta}(\theta, \phi) = \frac{|\vec{E}_\perp(\theta, \phi) \cdot \hat{e}_\theta|^2}{k_2^2} = r^2 \frac{|\vec{E}_{s\perp} \cdot \hat{e}_\theta|^2}{|\vec{E}_i \cdot \hat{e}_\perp|^2} \quad (2.70b)$$

e

$$\sigma_{\parallel\phi}(\theta, \phi) = \frac{|\vec{E}_{\parallel}(\theta, \phi) \cdot \hat{e}_\phi|^2}{k_2^2} = r^2 \frac{|\vec{E}_{s\parallel} \cdot \hat{e}_\phi|^2}{|\vec{E}_i \cdot \hat{e}_{\parallel}|^2} \quad (2.71a)$$

$$\sigma_{\perp\phi}(\theta, \phi) = \frac{|\vec{E}_\perp(\theta, \phi) \cdot \hat{e}_\phi|^2}{k_2^2} = r^2 \frac{|\vec{E}_{s\perp} \cdot \hat{e}_\phi|^2}{|\vec{E}_i \cdot \hat{e}_\perp|^2}, \quad (2.71b)$$

de modo que as seções de choque, dadas nas equações (2.69), po

dem ser escritas como

$$\alpha_{//}(\theta, \phi) = \sigma_{//\theta}(\theta, \phi) + \sigma_{//\phi}(\theta, \phi) \quad (2.72a)$$

e

$$\sigma_{\perp}(\theta, \phi) = \sigma_{\perp\theta}(\theta, \phi) + \sigma_{\perp\phi}(\theta, \phi) \quad (2.72b)$$

As seções de choque dadas nas equações (2.70b) e (2.71a) são chamadas seções de choque de espalhamento com polarizações cruzadas .

Para obter uma informação completa a respeito da intensidade espalhada com uma polarização qualquer em função da intensidade incidente com uma polarização conhecida, precisamos conhecer a matriz de espalhamento da esfera. A matriz de espalhamento  $\vec{e}$  é obtida da matriz de amplitude de espalhamento, a qual relaciona o campo elétrico nas direções  $\hat{e}_{\theta}$  e  $\hat{e}_{\phi}$  com o campo elétrico incidente nas polarizações paralela e perpendicular ao plano de espalhamento, Figura 2. Esta relação é escrita na forma

$$\begin{bmatrix} E_{s\theta} \\ E_{s\phi} \end{bmatrix} = i \frac{e^{ik_2r}}{k_2r} \begin{bmatrix} S_2 & S_3 \\ S_4 & S_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{//} \\ E_{\perp} \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

onde o campo espalhado  $\vec{e}$  é dado por

$$\vec{E}_s = E_{s\theta} \hat{e}_\theta + E_{s\phi} \hat{e}_\phi = i \frac{e^{ik_2 r}}{k_2 r} (F_\theta \hat{e}_\theta + F_\phi \hat{e}_\phi), \quad (2.74)$$

e o campo incidente

$$\vec{E}_i = e^{ik_2 z} (E_{//} \hat{e}_{//} + E_{\perp} \hat{e}_{\perp}) = e^{ik_2 z} (E_x \hat{i} + E_y \hat{j}). \quad (2.75)$$

A matriz 2 x 2 da equação (2.73) é a matriz de amplitude de espalhamento e, em geral, seus elementos  $S_j$  ( $j=1,2,3,4$ ) dependem de  $\theta$  e  $\phi$ . Em geral, para um centro espalhador qualquer, é necessário determinar o campo espalhado para duas polarizações incidentes diferentes para se obter os elementos  $S_j$  ( $j = 1,2,3,4$ ). A relação entre as amplitudes do campo elétrico em cada direção na equação (2.75) é

$$E_{//} = E_x \cos\phi + E_y \sin\phi \quad (2.76)$$

$$E_{\perp} = -E_x \sin\phi + E_y \cos\phi$$

A matriz de espalhamento relacionando os parâmetros de Stokes da onda espalhada e os da onda incidente, é definida pela equação

$$\begin{bmatrix} I_s \\ Q_s \\ U_s \\ V_s \end{bmatrix} = \frac{1}{k_2^2 r^2} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_i \\ Q_i \\ U_i \\ V_i \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

onde os parâmetros de Stokes da onda espalhada e incidente são dados por

$$\begin{aligned}
 I_s &= \frac{\gamma_2}{2} \langle\langle E_{s\theta} E_{s\theta}^* + E_{s\phi} E_{s\phi}^* \rangle\rangle \\
 Q_s &= \frac{\gamma_2}{2} \langle\langle E_{s\theta} E_{s\theta}^* - E_{s\phi} E_{s\phi}^* \rangle\rangle \\
 U_s &= \frac{\gamma_2}{2} \langle\langle E_{s\theta} E_{s\phi}^* + E_{s\phi} E_{s\theta}^* \rangle\rangle \\
 V_s &= \frac{i\gamma_2}{2} \langle\langle E_{s\theta} E_{s\phi}^* - E_{s\phi} E_{s\theta}^* \rangle\rangle
 \end{aligned}
 \tag{2.78a}$$

e

$$\begin{aligned}
 I_i &= \frac{\gamma_2}{2} \langle\langle E_{\parallel} E_{\parallel}^* + E_{\perp} E_{\perp}^* \rangle\rangle \\
 Q_i &= \frac{\gamma_2}{2} \langle\langle E_{\parallel} E_{\parallel}^* - E_{\perp} E_{\perp}^* \rangle\rangle \\
 U_i &= \frac{\gamma_2}{2} \langle\langle E_{\parallel} E_{\perp}^* + E_{\perp} E_{\parallel}^* \rangle\rangle \\
 V_i &= \frac{i\gamma_2}{2} \langle\langle E_{\parallel} E_{\perp}^* - E_{\perp} E_{\parallel}^* \rangle\rangle
 \end{aligned}
 \tag{2.78b}$$

respectivamente, onde  $\langle\langle \dots \rangle\rangle$  representa a média temporal.

A matriz 4x4 da equação (2.77) é a matriz de espalha-

mento e seus elementos podem ser obtidos a partir da matriz de amplitude, equação (2.73) e equação (2.78), tendo como resultado

$$S_{11} = \frac{1}{2} [ |S_1|^2 + |S_2|^2 + |S_3|^2 + |S_4|^2 ]$$

$$S_{12} = \frac{1}{2} [ |S_2|^2 - |S_1|^2 + |S_4|^2 - |S_3|^2 ]$$

(2.79a)

$$S_{21} = \frac{1}{2} [ |S_2|^2 - |S_1|^2 - |S_4|^2 + |S_3|^2 ]$$

$$S_{22} = \frac{1}{2} [ |S_1|^2 + |S_2|^2 - |S_3|^2 - |S_4|^2 ]$$

$$S_{33} = \text{Re} [ S_1 S_2^* + S_3 S_4^* ]$$

$$S_{34} = \text{Im} [ S_2 S_1^* + S_4 S_3^* ]$$

(2.79b)

$$S_{43} = \text{Im} [ S_1 S_2^* - S_3 S_4^* ]$$

$$S_{44} = \text{Re} [ S_1 S_2^* - S_3 S_4^* ]$$

$$S_{13} = \operatorname{Re} [ S_2 S_3^* + S_1 S_4^* ]$$

$$S_{14} = \operatorname{Im} [ S_2 S_3^* - S_1 S_4^* ]$$

$$S_{23} = \operatorname{Re} [ S_2 S_3^* - S_1 S_4^* ]$$

$$S_{24} = \operatorname{Im} [ S_2 S_3^* + S_1 S_4^* ]$$

(2.79c)

$$S_{31} = \operatorname{Re} [ S_2 S_4^* + S_1 S_3^* ]$$

$$S_{32} = \operatorname{Re} [ S_2 S_4^* - S_1 S_3^* ]$$

$$S_{41} = \operatorname{Im} [ S_2^* S_4 + S_3^* S_1 ]$$

$$S_{42} = \operatorname{Im} [ S_2^* S_4 - S_3^* S_1 ]$$

(2.79d)

Se o campo incidente  $\vec{e}$  é polarizado paralelo ao plano de espalhamento, temos  $E_{\perp} = 0$  e, pela equação (2.78b),  $Q_i = I_i$  e  $U_i = V_i = 0$ . Para esta polarização incidente, resulta da equação (2.79b) que

$$I_s = \frac{1}{k_2^2 r^2} (S_{11} + S_{12}) I_i \quad (2.80a)$$

$$Q_s = \frac{i}{k_2^2 r^2} (S_{21} + S_{22}) I_i \quad (2.80b)$$

A seção de choque nesse caso, equação (2.69a), será

$$\sigma_{\parallel} = r^2 \frac{I_s}{I_i} = \frac{1}{k_2^2} [ S_{11} + S_{12} ] = \frac{1}{k_2^2} [ |S_2|^2 + |S_4|^2 ] \quad (2.81)$$

e as seções de choque com polarização espalhada paralela e perpendicular ao plano de espalhamento, equações (2.70a) e (2.71a), serão, respectivamente,

$$\begin{aligned} \sigma_{\parallel\theta} &= r^2 \frac{(I_s + Q_s)/2}{I_i} = \frac{1}{k_2^2} \frac{1}{2} [ S_{11} + S_{22} + S_{12} + S_{21} ] = \\ &= \frac{1}{k_2^2} |S_2|^2 \quad (2.82a) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sigma_{\perp\phi} &= r^2 \frac{(I_s - Q_s)/2}{I_s} = \frac{1}{k_2^2} \frac{1}{2} [ S_{11} - S_{22} + S_{12} - S_{21} ] = \\ &= \frac{1}{k_2^2} |S_4|^2 \quad (2.82b) \end{aligned}$$

onde usamos a adição e a subtração da equação (2.78a) com a equação (2.78b) para obter  $E_{s\theta} E_{s\theta}^*$  e  $E_{s\phi} E_{s\phi}^*$ , separadamente.

Para um campo incidente polarizado perpendicular ao

plano de espalhamento, temos  $E = 0$  e assim,  $Q_i = -I_i$  e  $U_i = V_i = 0$ . Nesse caso, obtemos da equação (2.79b) que

$$I_s = \frac{1}{k_2^2 r^2} (S_{11} - S_{12}) I_i \quad (2.83a)$$

$$Q_s = \frac{1}{k_2^2 r^2} (S_{21} - S_{22}) I_i \quad (2.83b)$$

A seção de choque para esta polarização incidente, equação (2.69b), será

$$\sigma_{\perp} = r^2 \frac{I_s}{I_i} = \frac{1}{k_2^2} [S_{11} - S_{12}] = \frac{1}{k_2^2} [ |S_1|^2 + |S_3|^2 ] \quad (2.84)$$

e as seções de choque com polarização espalhada paralela e perpendicular ao plano de espalhamento, equações (2.70b) e (2.71b), serão

$$\begin{aligned} \sigma_{\perp\theta} &= r^2 \frac{(I_s + Q_s)/2}{I_i} = \frac{1}{k_2^2} \frac{1}{2} [ S_{11} - S_{22} - S_{12} + S_{21} ] = \\ &= \frac{1}{k_2^2} |S_3|^2 \quad (2.85a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\perp\phi} &= r^2 \frac{(I_s - Q_s)/2}{I_i} = \frac{1}{k_2^2} \frac{1}{2} [ S_{11} + S_{22} - S_{12} - S_{21} ] = \\ &= \frac{1}{k_2^2} |S_{11}|^2 \end{aligned} \quad (2.85b)$$

Se o campo incidente for não-polarizado teremos

$Q_i = U_i = V_i = 0$  e os parâmetros de Stokes da radiação espalhada serão

$$I_s = \frac{1}{k_2^2 r^2} S_{11} I_i \quad (2.86a)$$

$$Q_s = \frac{1}{k_2^2 r^2} S_{21} I_i \quad (2.86b)$$

$$U_s = \frac{1}{k_2^2 r^2} S_{31} I_i \quad (2.86c)$$

$$V_s = \frac{1}{k_2^2 r^2} S_{41} I_i \quad (2.86d)$$

Nesse caso,  $S_{11}$  dá a distribuição angular da radiação espalhada, a qual é parcialmente polarizada com grau de polarização definido por<sup>(6)</sup>

$$P = \frac{\sqrt{S_{21}^2 + S_{31}^2 + S_{41}^2}}{S_{11}} \quad (2.87)$$

As equações desenvolvidas até aqui, nesta seção, têm validade geral independente da forma do espalhador. Vamos agora reconsiderar o caso especial do espalhamento por uma esfera lisa dielétrica ou condutora, para um campo incidente polarizado ao longo do eixo x, com  $E_x = 1$  e  $E_y = 0$ , equação (2.28a). Nesse caso as amplitudes  $E_{\parallel}$  e  $E_{\perp}$ , equação (2.76), serão

$$E_{\parallel} = \cos\phi \quad (2.88a)$$

e

$$E_{\perp} = -\text{sen}\phi \quad (2.88b)$$

Substituindo as equações (2.88) na equação (2.73), obtemos

$$E_{S\theta} = i \frac{e^{ik_2 r}}{k_2 r} [ S_2 \cos\phi - S_3 \text{sen}\phi ] \quad (2.89a)$$

e

$$E_{S\phi} = i \frac{e^{ik_2 r}}{k_2 r} [ S_4 \cos\phi - S_1 \text{sen}\phi ] . \quad (2.89b)$$

Pelas soluções dadas nas equações (2.48), (2.50), (2.55) e (2.56) para os coeficientes do campo espalhado na esfera dielétrica e condutora, respectivamente, apenas  $A_{0ln}^S$  e

$B_{eln}^S$  são não nulos. Conseqüentemente as componentes do campo espalhado, equação (2.58a), por uma esfera lisa serão dadas por

$$E_{s\theta} = i \frac{e^{ik_2 r}}{k_2 r} \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(2n+1)}{n(n+1)} \left[ A_{oln}^S \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} + B_{eln}^S \frac{d P_n^1(\cos\theta)}{d\theta} \right] \cos\phi \quad (2.90a)$$

$$E_{s\phi} = i \frac{e^{ik_2 r}}{k_2 r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \left[ A_{oln}^S \frac{d P_n^1(\cos\theta)}{d\theta} + B_{eln}^S \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} \right] \sin\phi, \quad (2.90b)$$

onde  $A_{oln}^S$  e  $B_{eln}^S$  são dados pela equação (2.48) ou (2.55) para o espalhamento da esfera dielétrica ou condutora, respectivamente.

Comparando as equações (2.90) com as equações (2.89), obtemos

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(2n+1)}{n(n+1)} \left[ A_{oln}^S \frac{d P_n^1(\cos\theta)}{d\theta} + B_{eln}^S \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} \right] \quad (2.91a)$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} - \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \left[ A_{0ln}^s \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} + B_{eln}^s \frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta} \right] \quad (2.91b)$$

e

$$S_3 = S_4 = 0. \quad (2.91c)$$

Como  $S_3$  e  $S_4$  são nulos, equação (2.91c), os elementos da matriz de espalhamento, equações (2.79), terão a forma

$$S_{11} = S_{22} = \frac{1}{2} [ |S_2|^2 + |S_1|^2 ] \quad (2.92a)$$

$$S_{12} = S_{21} = \frac{1}{2} [ |S_2|^2 - |S_1|^2 ] \quad (2.92b)$$

$$S_{33} = S_{44} = \text{Re} [ S_1 S_2^* ] \quad (2.92c)$$

$$S_{34} = -S_{43} = \text{Im} [ S_2 S_1^* ] \quad (2.92d)$$

$$S_{13} = S_{14} = S_{23} = S_{24} = S_{31} = S_{32} = S_{41} = S_{42} = 0 \quad (2.92e)$$

Pelas equações (2.90) podemos concluir que as componentes do campo espalhado,  $E_{s\theta}$  e  $E_{s\phi}$ , diferem, em geral, de fase e de amplitude. Isso significa que um campo incidente linearmente polarizado induz uma radiação espalhada pela esfera

que é elipticamente polarizada, em geral. Exceções aparecem nos ângulos  $\phi = 0$ , onde  $E_{s\phi} = 0$ , e  $\phi = \frac{\pi}{2}$ , onde  $E_{s\theta} = 0$ . Nestes planos, a radiação espalhada é linearmente polarizada. Para um detector alinhado no plano  $xz(\phi=0)$ , Figura 2, a polarização incidente e a espalhada são paralelas ao plano de espalhamento ( $E_y = 0$  e  $E_{s\phi} = 0$ ). Para um detector alinhado no plano  $yz(\phi=\pi/2)$ , a polarização incidente e a espalhada são perpendiculares ao plano de espalhamento, pois  $E_{s\theta} = 0$ . Pela simetria da esfera podemos dizer que, se a onda incidente é totalmente polarizada paralela a um plano de espalhamento particular, então a onda espalhada também será totalmente polarizada paralela a este plano. De modo análogo, se a polarização incidente é perpendicular a um dado plano de espalhamento, a polarização espalhada também é perpendicular a este plano. Deste modo, para uma esfera lisa, não há polarização cruzada, ou seja, incidência com polarização paralela gerando espalhamento com polarização perpendicular e vice-versa. Nesse caso, são nulas as seções de choque com polarizações cruzadas definidas nas equações (2.70b) e (2.71a). Isso pode ser verificado de maneira bem geral substituindo as equações (2.92a) e (2.92b) nas equações (2.82b) e (2.85a) ou simplesmente fazendo  $S_3 = S_4 = 0$  nessas últimas equações.

Se o campo incidente na esfera é não-polarizado, o grau de polarização da radiação espalhada definida na equação (2.87) será

$$P = \frac{|S_{12}|}{S_{11}} = \frac{|\sigma_{\perp} - \sigma_{\parallel}|}{\sigma_{\perp} + \sigma_{\parallel}} \quad (2.93)$$

onde substituímos a equação (2.92e) na equação (2.87) e escrevemos  $S_{11}$  e  $S_{12}$  em termos de  $\sigma_{\perp}$  e  $\sigma_{\parallel}$  a partir das equações (2.84) e (2.81).

### 2.3. - Espalhamento Rayleigh

A teoria de Mie descrita na seção 2.2 é válida para qualquer faixa de comprimento de onda incidente relativo ao raio da esfera, e é exata, uma vez que nenhuma aproximação foi feita até aqui. No entanto, para se obter resultados quantitativos, aproximações têm que ser feitas, já que o campo espalhado é dado por uma série infinita, equação (2.42). Nosso interesse é estudar o espalhamento no limite de comprimentos de onda incidente muito maiores que o raio da esfera, comumente chamado de espalhamento Rayleigh<sup>(6)</sup>. Nesse limite, temos

$$R_2 = k_2 R = \frac{2\pi R}{\lambda_2} \ll 1. \quad (2.94)$$

Para isto, nas expansões a serem feitas, vamos reter os termos necessários para se obter a seção de choque e a matriz de espalhamento em primeira aproximação, ou seja, consideraremos apenas a potência mais baixa de  $R_2$ , conforme é feito no Apêndice E.

O resultado dos primeiros coeficientes do campo espalhado pela esfera dielétrica é dado pela Equação (E.3).

$$A_{\text{coll}}^S \approx i \frac{R_2^5}{45} (N^2 - 1) + O(R_2^7) \quad (2.95a)$$

$$B_{e11}^S \approx i \frac{2R_2^3}{3} \left( \frac{N^2-1}{N^2+2} \right) + O(R_2^5) , \quad (2.95b)$$

$$A_{o12}^S \approx O(R_2^7), \quad (2.95c)$$

$$B_{o12}^S \approx O(R_2^5), \quad (2.95d)$$

onde

$$N^2 = \epsilon_1 / \epsilon_2 , \quad (2.96)$$

e consideramos  $\mu_1 = \mu_2$ .

Considerando  $N^2 R_2 \ll 1$  na equação (2.95), temos

$B_{e11}^S \gg A_{o11}^S$ , e, assim, os elementos não nulos da equação (2.91) serão

$$S_1 \approx -iR_2^3 \left( \frac{N^2-1}{N^2+2} \right) \quad (2.97a)$$

$$S_2 \approx -iR_2^3 \left( \frac{N^2-1}{N^2+2} \right) \cos\theta . \quad (2.97b)$$

Nesta aproximação, a equação (2.77), que relaciona os parâmetros de Stokes da radiação incidente com a espalhada para a esfera dielétrica, será dada por

$$\begin{bmatrix} I_s \\ Q_s \\ U_s \\ V_s \end{bmatrix} = \frac{(k_2 R)^6}{k_2^2 r^2} \left| \frac{N^2 - 1}{N^2 + 2} \right|^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta) & -\frac{1}{2}(1 - \cos^2 \theta) & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}(1 - \cos^2 \theta) & \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_i \\ Q_i \\ U_i \\ V_i \end{bmatrix}$$

(2.98)

A partir das equações (2.98), (2.81) e (2.84) para polarizações incidentes paralela e perpendicular ao plano de espalhamento, as seções de choque serão dadas, respectivamente, por

$$\sigma_{\parallel} = k_2^4 R^6 \left| \frac{N^2 - 1}{N^2 + 2} \right|^2 \cos^2 \theta \quad (2.99a)$$

e

$$\sigma_{\perp} = k_2^4 R^6 \left| \frac{N^2 - 1}{N^2 + 2} \right|^2 \quad (2.99b)$$

Se a onda incidente for não polarizada, a seção de choque, equação (2.67), será

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_{\parallel} + \sigma_{\perp}) = k_2^4 R^6 \left| \frac{N^2 - 1}{N^2 + 2} \right|^2 \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta) \quad (2.100)$$

O grau de polarização da radiação espalhada, equação (2.93), nesse caso será

$$P = \frac{1 - \cos^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta} \quad (2.101)$$

A Figura 3 mostra as seções de choque em função do ângulo de espalhamento,  $\theta$ , dadas nas equações (2.99) e (2.100). A Figura 4 mostra o grau de polarização da radiação espalhada em função do ângulo de espalhamento,  $\theta$ , equação (2.101). Em  $\theta = 90^\circ$ , o grau de polarização é máximo ( $P = 1$ ), ou seja, a radiação espalhada é totalmente polarizada na direção perpendicular ao plano de espalhamento. A dependência da seção de choque de espalhamento, equação (2.100), com  $\lambda_2^{-4}$  é a conhecida lei de Rayleigh do espalhamento que é usada para explicar a cor azul do céu.

No caso da esfera condutora os coeficientes do campo espalhado são dados pela equação (E.15)

$$A_{o11}^s \approx -i \frac{R_2^3}{3} + O(R_2^5), \quad (2.102a)$$

$$A_{o12}^s \approx O(R_2^5) \quad (2.102b)$$

$$B_{e11}^s \approx 2i \frac{R_2^3}{3} + O(R_2^5) \quad (2.102c)$$

$$B_{e12}^s \approx O(R_2^5) \quad (2.102d)$$

Substituindo a equação (2.102a) e (2.102c) na equa-

ção (2.91), obtemos

$$S_1 = -iR_2^3 \left(1 - \frac{1}{2} \cos\theta\right) \quad (2.103a)$$

e

$$S_2 = -iR_2^3 \left(\cos\theta - \frac{1}{2}\right) \quad (2.103b)$$

Assim, para a esfera condutora, substituindo a equação (2.103) na equação (2.92), os parâmetros de Stokes serão relacionados através da equação

$$\begin{bmatrix} I_s \\ Q_s \\ U_s \\ V_s \end{bmatrix} = \frac{(k_2 R)^6}{8k_2^2 r^2} \begin{bmatrix} 5(1+\cos^2\theta)-8\cos\theta & -3(1-\cos^2\theta) \\ -3(1-\cos^2\theta) & 5(1+\cos^2\theta)-8\cos\theta \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 10\cos\theta-4(1+\cos^2\theta) & 0 \\ 0 & 10\cos\theta-4(1+\cos^2\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_i \\ Q_i \\ U_i \\ V_i \end{bmatrix} \quad (2.104)$$

Pe las equações (2.104), (2.81) e (2.84), as seções de choque de espalhamento com polarizações incidentes paralela e perpendicular ao plano de espalhamento serão, respectivamente,

$$\sigma_{\parallel} = k_2^4 R^6 \left( \cos\theta - \frac{1}{2} \right)^2 \quad (2.105a)$$

e

$$\sigma_{\perp} = k_2^4 R^6 \left( 1 - \frac{1}{2} \cos\theta \right)^2 \quad (2.105b)$$

Para uma onda incidente não polarizada, a seção de choque, equação (2.67) será

$$\sigma = \frac{1}{2} (\sigma_{\parallel} + \sigma_{\perp}) = k_2^4 R^6 \frac{1}{8} [ 5(1 + \cos^2\theta) - 8\cos\theta ], \quad (2.106)$$

e o grau de polarização, equação (2.93),

$$P = \frac{3\text{sen}^2\theta}{5(1 + \cos^2\theta) - 8\cos\theta} \quad (2.107)$$

Os gráficos das seções de choque e do grau de polarização em função do ângulo de espalhamento,  $\theta$ , são mostrados nas Figuras (5) e (6), respectivamente. A seção de choque é máxima para  $\theta = 180^\circ$  e o grau de polarização tem seu valor máximo,  $P = 1$ , em  $\theta = 60^\circ$ , no qual a seção de choque  $\sigma_{\parallel}$ , equação (2.105a), é nula.

### CAPÍTULO III

#### CARACTERIZAÇÃO DA RUGOSIDADE

O sistema físico que vamos considerar neste trabalho consiste de um meio infinito onde está imerso um dielétrico ou um condutor, na forma de uma esfera cuja superfície é rugosa.

A superfície desta esfera será dada pela forma polar

$$r = R + \xi(\theta, \phi) \quad (3.1)$$

onde  $\xi(\theta, \phi)$  é a função que descreve o desvio da superfície da esfera rugosa em relação à superfície de uma esfera lisa de raio  $R$ . A função  $\xi(\theta, \phi)$  será chamada perfil da rugosidade ou, simplesmente, rugosidade.

Neste Capítulo apresentamos as propriedades da rugosidade, que serão usadas nos Capítulos subsequentes.

Vamos considerar a rugosidade,  $\xi(\theta, \phi)$ , como sendo um processo estocástico estacionário, caracterizado pelas propriedades

$$\overline{\xi(\theta, \phi)} = 0 \quad (3.2)$$

e

$$\overline{\xi(\theta, \phi)\xi(\theta', \phi')} = \delta_{\text{rms}}^2 W(\cos\gamma). \quad (3.3)$$

Nas equações (3.2) e (3.3) a notação  $\overline{\dots}$  denota uma média estatística sobre o "ensemble" de realizações do perfil da superfície

cie. O ângulo  $\gamma$  na equação (3.3) é o ângulo entre os dois vetores posição dos pontos da superfície rugosa com coordenadas  $(\theta, \phi)$  e  $(\theta', \phi')$ , de modo que

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi'). \quad (3.4)$$

A função  $W(\cos\gamma)$  é a função de correlação da rugosidade entre os pontos  $(\theta, \phi)$  e  $(\theta', \phi')$ , cuja forma escolheremos posteriormente.

Da equação (3.2) concluímos que o raio médio da esfera rugosa é  $R$ . Na equação (3.3),  $\delta_{\text{rms}}$  é o desvio médio quadrático da rugosidade, de modo que

$$\xi^2(\theta, \phi) = \delta_{\text{rms}}^2, \quad (3.5)$$

e vamos considerar

$$\delta_{\text{rms}} \ll R, \quad (3.6)$$

de modo que a rugosidade da superfície seja pequena em relação às dimensões da esfera lisa.

Para que as equações (3.3) e (3.5) sejam satisfeitas, a função de correlação deve ser normalizada da forma

$$W(1) = 1. \quad (3.7)$$

A dependência da função de correlação entre os pon -

tos  $(\theta, \phi)$  e  $(\theta', \phi')$  apenas com o ângulo  $\gamma$ , equação (3.3), terá como consequência a restauração da simetria esférica do sistema ao serem tomados valores médios das grandezas físicas que descrevem o espalhamento.

A vantagem de um modelo estatístico sobre outros modelos mais específicos<sup>(15)</sup> é que a aplicação deste modelo é mais geral, no sentido de que não é necessário especificar a forma do perfil da rugosidade, mas somente valores médios como dados nas equações (3.2) e (3.3). Além disto, o modelo estatístico é, de fato, mais realista, tanto no caso de uma esfera rugosa como representando um número grande de espalhadores irregulares separados e orientados aleatoriamente<sup>(6)</sup>.

Uma vez que o sistema de coordenadas adequado para descrever o espalhamento é o de coordenadas esféricas, é conveniente escrever a função de correlação, equação (3.3), como uma expansão em polinômios de Legendre da forma

$$W(\cos\gamma) = \sum_{\ell=0}^{\infty} g_{\ell} P_{\ell}(\cos\gamma) \quad (3.8)$$

Usando o Teorema de Adição dos polinômios de Legendre<sup>(14)</sup>, podemos reescrever a equação (3.8) na forma

$$W(\cos\gamma) = \sum_{\ell=0}^{\infty} g_{\ell} P_{\ell}(\cos\theta) P_{\ell}(\cos\theta') + 2 \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\ell} g_{\ell} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_{\ell}^m(\cos\theta) P_{\ell}^m(\cos\theta') \cos m(\theta-\phi'). \quad (3.9)$$

Substituindo a equação (3.9) na equação (3.3), obtemos

$$\begin{aligned}
\overline{\xi(\theta, \phi)\xi(\theta', \phi)} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \delta_{\text{rms}}^2 g_{\ell} P_{\ell}(\cos\theta) P_{\ell}(\cos\theta') + \\
&+ \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\ell} 2\delta_{\text{rms}}^2 g_{\ell} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_{\ell}^m(\cos\theta) P_{\ell}^m(\cos\theta') \cos m\phi \cos m\phi' + \\
&+ \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\ell} 2\delta_{\text{rms}}^2 g_{\ell} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_{\ell}^m(\cos\theta) P_{\ell}^m(\cos\theta') \sin m\phi \sin m\phi' .
\end{aligned}$$

(3.10)

Podemos expandir a função  $\xi(\theta, \phi)$  em termos de funções harmônicas esféricas de superfície, de modo que

$$\xi(\theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} R_{\ell m} P_{\ell}^m(\cos\theta) \cos m\phi + \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\ell} S_{\ell m} P_{\ell}^m(\cos\theta) \sin m\phi,$$

(3.11)

onde  $R_{\ell m}$  e  $S_{\ell m}$  são quantidades estatísticas.

A substituição da equação (3.11) na equação (3.2) resulta nas propriedades

$$\overline{R_{\ell m}} = 0 \tag{3.12a}$$

e

$$\overline{S_{\ell m}} = 0 \tag{3.12b}$$

e substituindo a equação (3.11) na equação (3.3), teremos

$$\begin{aligned} \overline{\xi(\theta, \phi)\xi(\theta', \phi')} &= 2 \sum_{\ell, \ell'} \sum_{m, m'} \overline{R_{\ell m} S_{\ell' m'}} P_{\ell}^m(\cos\theta) P_{\ell'}^{m'}(\cos\theta') \cos m\phi \sin m'\phi' + \\ &+ \sum_{\ell, \ell'} \sum_{m, m'} \overline{R_{\ell m} R_{\ell' m'}} P_{\ell}^m(\cos\theta) P_{\ell'}^{m'}(\cos\theta') \cos m\phi \cos m'\phi' + \\ &+ \sum_{\ell, \ell'} \sum_{m, m'} \overline{S_{\ell m} S_{\ell' m'}} P_{\ell}^m(\cos\theta) P_{\ell'}^{m'}(\cos\theta') \sin m\phi \sin m'\phi' \end{aligned} \quad (3.13)$$

Comparando as equações (3.13) e (3.10), obtemos

$$\overline{R_{\ell m} R_{\ell' m'}} = (2 - \delta_{m, 0}) \delta_{\text{rms}}^2 g_{\ell} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} \delta_{\ell, \ell'} \delta_{m, m'} \quad , \quad m \geq 0 \quad , \quad (3.14a)$$

$$\overline{S_{\ell m} S_{\ell' m'}} = 2 \delta_{\text{rms}}^2 g_{\ell} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} \delta_{\ell, \ell'} \delta_{m, m'} \quad , \quad m \geq 1 \quad , \quad (3.14b)$$

$$\overline{R_{\ell m} S_{\ell' m'}} = 0 \quad (3.14c)$$

Para que possamos obter resultados quantitativos, de vemos escolher uma forma explícita para a função de correla -

ção. A idéia central nesse caso é que a função de correlação deve ter um valor máximo em  $\gamma = 0$  e decrescer com o aumento de  $\gamma$ , já que se espera que a correlação entre os valores da rugosidade de dois pontos distintos na superfície diminua com a distância entre eles. A função que escolhemos para a função de correlação,  $W(\cos\gamma)$ , equação (3.3), que satisfaz estas condições e é normalizada, equação (3.7), é a função Gaussiana

$$W(\cos\gamma) = e^{-d^2/D^2} \quad (3.15)$$

onde  $d = d(\cos\gamma)$  é a distância entre dois pontos,  $(\theta, \phi)$  e  $(\theta', \phi')$ , na superfície da esfera de raio  $R$ , e  $D$  é o parâmetro que dá o comprimento de correlação da rugosidade. Em termos do ângulo  $\gamma$ , a distância  $d$  é dada por

$$d = 2R\text{sen}(\gamma/2) \quad (3.16)$$

Substituindo a equação (3.16) na equação (3.15), podemos escrever

$$W(\cos\gamma) = e^{-\frac{4}{a^2} \text{sen}^2(\gamma/2)}, \quad (3.17)$$

onde definimos

$$a = D/R \quad (3.18)$$

O parâmetro  $a$  definido na equação (3.18) é o comprimento angu

lar de correlação da rugosidade.

Os coeficientes  $g_\ell$  da equação (3.8) podem ser obtidos usando a expansão<sup>(16)</sup>

$$e^{x \cos \gamma} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) I_\ell(x) P_\ell(\cos \gamma), \quad (3.19)$$

onde  $I_\ell(x)$  é a função esférica de Bessel Modificada.

Fazendo  $x = 2/a^2$  e multiplicando a equação (3.19) por  $e^{-2/a^2}$ , temos

$$e^{-\frac{2}{a^2} (1-\cos \gamma)} = e^{-\frac{4}{a^2} \sin^2 \gamma / 2} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) e^{-2/a^2} I_\ell(2/a^2) P_\ell(\cos \gamma). \quad (3.20)$$

Comparando a equação (3.20) com as equações (3.17) e (3.8), obtemos

$$g_\ell = (2\ell+1) e^{-2/a^2} I_\ell(2/a^2) \quad (3.21)$$

Considerando  $\cos \gamma = 1$ , na equação (3.20), pode-se mostrar que os coeficientes  $g_\ell$  satisfazem a regra

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} g_\ell = 1 \quad (3.22)$$

Derivando a equação (3.20) com respeito a  $\cos \gamma$  pode-se obter também as relações

$$\sum_{l=0}^{\infty} l(l+1)g_l(x) = 2x \quad (3.23)$$

e

$$\sum_{l=0}^{\infty} l(l-1)(l+1)(l+2)g_l(x) = 8x^2 \quad (3.24)$$

Uma vez conhecidos os valores do desvio médio quadrático da rugosidade ( $\delta_{rms}$ ) e do comprimento de correlação angular ( $a$ ), podemos determinar a função de correlação  $W(\cos\gamma)$ , equação (3.17), o produto  $\xi(\theta, \phi)\xi(\theta', \phi')$ , equação (3.3), os coeficientes  $g_l$ , equação (3.2), e os valores médios de todos os produtos entre coeficientes  $R_{lm}$  e  $S_{lm}$ , equação (3.14). Assim, a rugosidade fica completamente caracterizada por estes dois parâmetros ( $\delta_{rms}$  e  $a$ ).

O comprimento de correlação da rugosidade ( $D$ ) está relacionado ao comprimento de correlação angular ( $a$ ) conforme a equação (3.18) e o desvio médio quadrático da rugosidade ( $\delta_{rms}$ ) deve ser muito menor que o raio médio da esfera rugosa, equação (3.6).

Nos Capítulos a seguir, o valor médio de produtos envolvendo mais de duas funções rugosidade são de ordem superior a  $\delta_{rms}^2$  e por isso tais produtos não serão considerados.

## CAPÍTULO IV

### ESPALHAMENTO EM ESFERAS COM RUGOSIDADE-FORMALISMO

O problema central desse trabalho consiste em calcular o campo eletromagnético espalhado por uma esfera rugosa, considerando uma onda plana incidente sobre ela. Nosso interesse é estudar as diferenças qualitativas e quantitativas entre esse espalhamento e o espalhamento por uma esfera perfeitamente lisa, ou seja, queremos determinar os efeitos da rugosidade no espalhamento.

O modelo que usaremos para caracterizar a rugosidade da esfera está descrito no Capítulo III. Pela equação (3.6) foi considerada a condição de que o desvio médio quadrático da rugosidade ( $\delta_{\text{rms}}$ ) seja muito menor que o raio (R) da esfera não perturbada, de modo que podemos escrever

$$\delta^2 \ll 1, \quad (4.1)$$

onde definimos

$$\delta = \delta(\theta, \phi) = \xi(\theta, \phi)/R. \quad (4.2)$$

Neste Capítulo vamos desenvolver um formalismo devido a ERMA<sup>(8)</sup>, que nos permite calcular o campo espalhado pela esfera rugosa através de uma teoria de perturbação no espa

lhamento de Mie, em termos de  $\delta$ . Assim, vamos expandir os campos em potências de  $\delta$  até termos da ordem de  $\delta^2$ , de modo a nos permitir determinar o valor médio da seção de choque e dos elementos da matriz de espalhamento até segunda ordem em  $\delta_{\text{rms}}/R$ . O formalismo é geral no sentido de que é válido para esferas rugosas condutoras ou dielétricas e para qualquer faixa de comprimento de onda.

O sistema que vamos considerar, Figura (7), consiste de um meio infinito (meio 2) onde é imersa uma esfera rugosa (meio 1) homogênea e linear nas suas propriedades eletromagnéticas. Tanto a esfera rugosa como o meio infinito no qual ela está imersa são representados pelos valores  $\mu_1, \epsilon_1$  e  $\mu_2, \epsilon_2$ , para a permeabilidade magnética e permissividade elétrica da esfera rugosa e do meio infinito, respectivamente. As permissividades elétricas da esfera rugosa ( $\epsilon_1$ ) e do meio infinito podem ser complexas de modo a incluir a condutividade ( $\sigma_1$ ) no interior da esfera e a absorção no meio infinito.

Neste Capítulo vamos considerar um campo eletromagnético incidente sobre a esfera rugosa com polarização ao longo do eixo x, para o qual serão obtidas com detalhes as soluções formais dos campos espalhado e transmitido. No apêndice B são dadas as soluções formais dos campos espalhado e transmitido pela esfera rugosa para uma polarização incidente no eixo y, mas com os cálculos sendo descritos sucintamente, já que seguem os mesmos passos descritos neste Capítulo.

O campo incidente com polarização x é dado pela equação (2.33) e pode ser escrito em coordenadas esféricas, equação (2.41), na forma

$$\vec{E}_i = \hat{e} e^{ik_2 z} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n [ j_n(k_2 r) \vec{M}_{0ln}^{\uparrow} - i j_n(k_2 r) \vec{N}_{eln}^{\uparrow} - i \psi_n(k_2 r) \vec{N}_{eln}^{\uparrow R} ] \quad (4.4a)$$

$$\vec{H}_i = \hat{j} \gamma_2 e^{ik_2 z} = - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \gamma_2 [ j_n(k_2 r) \vec{M}_{eln}^{\uparrow} + i j_n(k_2 r) \vec{N}_{0ln}^{\uparrow} + i \psi_n(k_2 r) \vec{N}_{0ln}^{\uparrow R} ] \quad (4.4b)$$

De modo análogo ao que fizemos na seção 2.2, no problema da esfera lisa, definimos o campo total, no meio 2, como a superposição do campo incidente ( $\vec{E}_i, \vec{H}_i$ ) e do campo espalhado pela esfera rugosa ( $\vec{E}_s, \vec{H}_s$ ), e, no meio 1, como o campo transmitido para o interior da esfera rugosa, de modo que

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_i + \vec{E}_s \quad , \quad (4.5a)$$

$$\vec{H}_2 = \vec{H}_i + \vec{H}_s \quad (4.5b)$$

e

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_t \quad , \quad (4.6a)$$

$$\vec{H}_1 = \vec{H}_t \quad (4.6b)$$

O campos espalhado e transmitido pela esfera rugosa serão escritos na mesma forma que as expansões dadas pelas equações (2.42) e (2.43), respectivamente,

$$E_s = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\nu} \alpha_n [h_n(k_2 r) A_{\lambda \mu \nu}^S \vec{M}_{\lambda \mu \nu}^T - i k_n(k_2 r) B_{\lambda \mu \nu}^S \vec{N}_{\lambda \mu \nu}^T - i \phi_n(k_2 r) B_{\lambda \mu \nu}^S \vec{N}_{\lambda \mu \nu}^R], \quad (4.7a)$$

$$H_s = -\sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\nu} \alpha_n \gamma_2 [h_n(k_2 r) B_{\lambda \mu \nu}^S \vec{M}_{\lambda \mu \nu}^T + i k_n(k_2 r) A_{\lambda \mu \nu}^S \vec{N}_{\lambda \mu \nu}^T + i \phi_n(k_2 r) A_{\lambda \mu \nu}^S \vec{N}_{\lambda \mu \nu}^R] \quad (4.7b)$$

e

$$\vec{E}_t = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\nu} \alpha_n [j_n(k_1 r) A_{\lambda \mu \nu}^t \vec{M}_{\lambda \mu \nu}^T - i j_n(k_1 r) B_{\lambda \mu \nu}^t \vec{N}_{\lambda \mu \nu}^T - i \psi_n(k_1 r) B_{\lambda \mu \nu}^t \vec{N}_{\lambda \mu \nu}^R] \quad (4.8a)$$

$$H_t = -\sum_{\lambda} \sum_{\mu} \sum_{\nu} \alpha_n \gamma_1 [j_n(k_1 r) B_{\lambda \mu \nu}^t \vec{M}_{\lambda \mu \nu}^T + i j_n(k_1 r) A_{\lambda \mu \nu}^t \vec{N}_{\lambda \mu \nu}^T + i \psi_n(k_1 r) A_{\lambda \mu \nu}^t \vec{N}_{\lambda \mu \nu}^R] \quad (4.8b)$$

onde  $A_{\lambda \mu \nu}^S, B_{\lambda \mu \nu}^S, A_{\lambda \mu \nu}^t$  e  $B_{\lambda \mu \nu}^t$  são os coeficientes que queremos calcular, por aproximações sucessivas até segunda ordem em  $\delta$ .

O campo espalhado, equação (4.7), satisfaz à equação de onda, equação (2.6), no meio 2 e tende a zero para pontos longe da esfera rugosa. O campo transmitido, equação (4.8), satisfaz à equação de onda, equação (2.6), no meio 1, e é finito em  $r = 0$ . Os campos no meio 2, equação (4.5), e no meio 1, equação (4.6), devem satisfazer às condições de contorno impostas pelas equações de Maxwell na superfície da esfera rugosa.

A teoria de perturbação que desenvolveremos neste trabalho para resolver o problema do espalhamento em esferas rugosas é equivalente ao método de Rayleigh-Fano<sup>(17)</sup> no sentido de que extendemos a validade das expressões (4.7) e (4.8) para o interior da região  $R - |\xi_{\max}(\theta, \phi)| < r < R + |\xi_{\max}(\theta, \phi)|$  impondo a continuidade dessas expressões até a superfície da esfera rugosa  $r = R + \xi(\theta, \phi)$ . Entretanto, como vamos tratar de uma teoria de perturbação restrita à condição expressa na eq.(4.1), os limites de validade do método de Rayleigh-Fano<sup>(17)</sup> são satisfeitos *à priori*.

4.1. - Esfera Rugosa Dielétrica

No caso da esfera rugosa ser um dielétrico, as equações de Maxwell impõem a continuidade da componente tangencial dos campos na superfície da esfera rugosa, ou seja,

$$\vec{n} \times [\vec{E}_2 - \vec{E}_1]_{r=R+\xi(\theta,\phi)} = 0 \quad (4.9a)$$

e

$$\vec{n} \times [\vec{H}_2 - \vec{H}_1]_{r=R+\xi(\theta,\phi)} = 0 \quad , \quad (4.9b)$$

onde  $\vec{n}$  é um vetor normal à superfície da esfera rugosa em qualquer ponto desta, dado por

$$\vec{n} = \hat{e}_r - \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \xi(\theta,\phi)}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \xi(\theta,\phi)}{\partial \phi} \hat{e}_\phi \right]_{r=R+\xi(\theta,\phi)} \quad (4.10)$$

Definindo os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  como

$$\vec{E} = [\vec{E}_2 - \vec{E}_1]_{r=R+\xi(\theta,\phi)} = [\vec{E}_i + \vec{E}_s - \vec{E}_t]_{r=R+\xi(\theta,\phi)} \quad (4.11a)$$

e

$$\vec{H} = [\vec{H}_2 - \vec{H}_1]_{r=R+\xi(\theta,\phi)} = [\vec{H}_i + \vec{H}_s - \vec{H}_t]_{r=R+\xi(\theta,\phi)} \quad , \quad (4.11b)$$

podemos escrever as equações (4.9a) e (4.9b) na forma

$$\vec{n} \times \vec{E} = 0 \quad (4.12a)$$

e

$$\vec{n} \times \vec{H} = 0 \quad (4.12b)$$

O vetor  $\vec{n}$ , dado na equação (4.10), pode ser separado numa parte com direção transversal ao vetor  $\vec{r}$  e outra com direção radial, de modo que podemos escrever

$$\vec{n} = \vec{n}^T + \vec{n}^R, \quad (4.13)$$

onde as partes transversal e radial de  $\vec{n}$  são, respectivamente,

$$\vec{n}^T = - \frac{1}{(1+\delta)} \left[ \frac{\partial \delta}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{\text{sen} \theta} \frac{\partial \delta}{\partial \phi} \hat{e}_\phi \right] \quad (4.14a)$$

e

$$\vec{n}^R = \hat{e}_r \quad (4.14b)$$

e  $\delta$  é dado pela equação (4.2).

A partir das equações (4.4), (4.7) e (4.8) podemos também separar os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ , definidos na equação (4.11), em partes transversal e radial, de modo que

$$\vec{E} = \vec{E}^T + \vec{E}^R \quad (4.15a)$$

e

$$\vec{H} = \vec{H}^T + \vec{H}^R, \quad (4.15b)$$

onde as partes transversal e radial de  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  são dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \vec{E}^T = & \left\{ \sum_{\lambda m n} \alpha_n \left[ h_n(k_2 r) A_{\lambda m n}^S - j_n(k_1 r) A_{\lambda m n}^t \right] \vec{M}_{\lambda m n}^T - i \sum_{\lambda m n} \alpha_n \left[ h_n(k_2 r) B_{\lambda m n}^S - j_n(k_1 r) B_{\lambda m n}^t \right] \vec{N}_{\lambda m n}^T + \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n j_n(k_2 r) \vec{M}_{0 n}^T - i \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \dot{j}_n(k_2 r) \vec{N}_{e n}^T \right\}_{r=R+\xi(\theta, \phi)} \end{aligned} \quad (4.16a)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}^T = & \left\{ - \sum_{\lambda m n} \alpha_n \left[ \gamma_2 h_n(k_2 r) B_{\lambda m n}^S - \gamma_1 j_n(k_1 r) B_{\lambda m n}^t \right] \vec{M}_{\lambda m n}^T - i \sum_{\lambda m n} \alpha_n \left[ \gamma_2 h_n(k_2 r) A_{\lambda m n}^S + \right. \right. \\ & \left. \left. - \gamma_1 j_n(k_1 r) A_{\lambda m n}^t \right] \vec{N}_{\lambda m n}^T - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \gamma_2 \dot{j}_n(k_2 r) \vec{M}_{e n}^T - i \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \gamma_2 \dot{j}_n(k_2 r) \vec{N}_{0 n}^T \right\}_{r=R+\xi(\theta, \phi)} \end{aligned} \quad (4.16b)$$

e

$$\vec{E}^R = \left\{ -i \sum_{\lambda m n} \alpha_n \left[ \phi_n(k_2 r) B_{\lambda m n}^S - \psi_n(k_1 r) B_{\lambda m n}^t \right] \vec{N}_{\lambda m n}^R - i \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \psi_n(k_2 r) \vec{N}_{e n}^R \right\}_{r=R+\xi(\theta, \phi)}, \quad (4.17a)$$

$$\vec{H}^R = \left\{ -i \sum_{\lambda m n} \alpha_n \left[ \gamma_2 \phi_n(k_2 r) A_{\lambda m n}^S - \gamma_1 \psi_n(k_1 r) A_{\lambda m n}^t \right] \vec{N}_{\lambda m n}^R - i \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \gamma_2 \psi_n(k_2 r) \vec{N}_{0 n}^R \right\}_{r=R+\xi(\theta, \phi)}. \quad (4.17b)$$

Substituindo as equações (4.13) e (4.15a) na equação (4.12a) e as equações (4.13) e (4.15b) na equação (4.12b), ob-

temos

$$\vec{n} \times \vec{E} = (\vec{n}^R \times \vec{E}^T + \vec{n}^T \times \vec{E}^R) + (\vec{n}^T \times \vec{E}^T) = 0 \quad (4.18a)$$

e

$$\vec{n} \times \vec{H} = (\vec{n}^R \times \vec{H}^T + \vec{n}^T \times \vec{H}^R) + (\vec{n}^T \times \vec{H}^T) = 0, \quad (4.18a)$$

respectivamente.

Das equações (4.18a) e (4.18b) resulta

$$\vec{n}^R \times \vec{E}^T + \vec{n}^T \times \vec{E}^R = 0 \quad (4.19a)$$

e

$$\vec{n}^R \times \vec{H}^T + \vec{n}^T \times \vec{H}^R = 0, \quad (4.19b)$$

$$\vec{n}^T \times \vec{E}^T = 0 \quad (4.20a)$$

e

$$\vec{n}^T \times \vec{H}^T = 0 \quad (4.20b)$$

Fazendo o produto escalar das equações (4.19a) e (4.19b) com o vetor  $\vec{n}^R$ , obtemos, respectivamente

$$\vec{E}^T = \vec{n}^T |\vec{E}^R| \quad (4.21a)$$

e

$$\vec{H}^T = \vec{n}^T |\vec{H}^R|. \quad (4.21b)$$

As equações (4.20a) e (4.20b) são automaticamente satisfeitas pelas soluções dadas nas equações (4.21a) e (4.21b). As equações (4.21) são completamente equivalentes às condições de contorno expressas na equação (4.9) e serão o ponto de partida para obtermos aproximações sucessivas dos campos em ordem de  $\delta$ . Uma vez que queremos somente os valores médios da seção de choque e da Matriz de espalhamento da esfera rugosa, vamos escrever os campos como expansões em potências de  $\delta$ , de modo que os coeficientes do campo espalhado, equação (4.7), serão escritos na forma

$$A_{\lambda mn}^s = {}^0A_{\lambda mn}^s + {}^1A_{\lambda mn}^s + {}^2A_{\lambda mn}^s + \dots \quad (4.22a)$$

$$B_{\lambda mn}^s = {}^0B_{\lambda mn}^s + {}^1B_{\lambda mn}^s + {}^2B_{\lambda mn}^s + \dots \quad (4.22b)$$

e os coeficientes do campo transmitido

$$A_{\lambda mn}^t = {}^0A_{\lambda mn}^t + {}^1A_{\lambda mn}^t + {}^2A_{\lambda mn}^t + \dots \quad (4.23a)$$

$$B_{\lambda mn}^t = {}^0B_{\lambda mn}^t + {}^1B_{\lambda mn}^t + {}^2B_{\lambda mn}^t + \dots \quad (4.23b)$$

onde os termos do lado direito das equações (4.22) e (4.23) têm valores médios estatísticos em ordem de  $\delta$ , tais que

$$\overline{{}^0C} \sim (\delta_{\text{rms}}/R)^0, \quad (4.24a)$$

$$\left( \overline{|^i C|^2} \right)^{1/2} \sim (\delta_{\text{rms}}/R)^1, \quad (4.24b)$$

$$\overline{|^2 C|^2} \sim (\delta_{\text{rms}}/R)^2, \quad (4.24c)$$

onde  $^i C = [^i A_{\lambda mn}^s, ^i B_{\lambda mn}^s, ^i A_{\lambda mn}^t, ^i B_{\lambda mn}^t]$ ,  $i = 0, 1, 2$ , representa qualquer dos termos do lado direito das equações (4.22) e (4.23).

As funções que dependem de  $r$  no lado direito das equações (4.16) e (4.17) podem ser expandidas em potências de  $\delta$ , na forma

$$f_n(k_2 r) \Big|_{r=R+\xi(\theta, \phi)} = f_n^0(R_2) + \delta f_n^1(R_2) + \delta^2 f_n^2(R_2) + \dots \quad (4.25a)$$

e

$$f_n(k_1 r) \Big|_{r=R+\xi(\theta, \phi)} = f_n^0(R_1) + \delta f_n^1(R_1) + \delta^2 f_n^2(R_1) + \dots, \quad (4.25b)$$

onde  $f_n(\rho)$  representa qualquer das funções de  $r$  mencionadas, e definimos

$$f_n^0(\rho) = f_n(\rho), \quad (4.26a)$$

$$f_n^1(\rho) = \rho \frac{df_n(\rho)}{d\rho}, \quad (4.26b)$$

$$f_n^2(\rho) = \frac{\rho^2}{2} \frac{d^2 f_n(\rho)}{d\rho^2} \quad (4.26c)$$

Substituindo as equações (4.22), (4.23) e (4.25) nas equações (4.16) e (4.17), podemos escrever as partes transversal e radial dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  na forma

$$\vec{E}^T = {}^0\vec{E}^T + {}^1\vec{E}^T + {}^2\vec{E}^T + \dots, \quad (4.27a)$$

$$\vec{H}^T = {}^0\vec{H}^T + {}^1\vec{H}^T + {}^2\vec{H}^T + \dots, \quad (4.27b)$$

e

$$\vec{E}^R = {}^0\vec{E}^R + {}^1\vec{E}^R + \dots, \quad (4.28a)$$

$$\vec{H}^R = {}^0\vec{H}^R + {}^1\vec{H}^R + \dots, \quad (4.28b)$$

onde os índices superiores dos termos no lado direito das equações (4.27) e (4.28) denotam suas ordens em relação a  $\delta$  conforme explicado na seqüência das equações (4.22) e (4.23).

Expandindo o fator  $(1+\delta)^{-1}$  do lado direito da equação (4.14) podemos escrever o vetor  $\vec{n}^T$  na forma

$$\vec{n}^T = {}^1\vec{n}^T + {}^2\vec{n}^T + \dots \quad (4.29)$$

onde

$${}^1\vec{n}^T = - \left[ \frac{\partial \delta}{\partial \theta} \hat{e}_r + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \delta}{\partial \phi} \hat{e}_\phi \right], \quad (4.30a)$$

$${}^2\vec{n}^T = - \delta {}^1\vec{n}^T = \delta \left[ \frac{\partial \delta}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \delta}{\partial \phi} \hat{e}_\phi \right], \quad (4.30b)$$

e a raiz quadrada da média de  $|1_{\vec{n}}^{\rightarrow T}|^2$  e a média de cada componente de  $2_{\vec{n}}^{\rightarrow T}$  são proporcionais a  $(\delta_{\text{rms}}/R)^1$  e  $(\delta_{\text{rms}}/R)^2$ , respectivamente.

Substituindo as equações (4.27a), (4.28a) e (4.29) na equação (4.21a) e as equações (4.27b), (4.28b) e (4.29) na equação (4.21b) e igualando os termos de mesma ordem em  $\delta$ , obtemos a sequência de equações

$$0_{\vec{E}}^{\rightarrow T} = 0 \quad (4.31a)$$

e

$$0_{\vec{H}}^{\rightarrow T} = 0 \quad , \quad (4.31b)$$

$$1_{\vec{E}}^{\rightarrow T} = 1_{\vec{n}}^{\rightarrow T} |0_{\vec{E}}^{\rightarrow R}| \quad (4.32a)$$

e

$$1_{\vec{H}}^{\rightarrow T} = 1_{\vec{n}}^{\rightarrow T} |0_{\vec{H}}^{\rightarrow R}| \quad , \quad (4.32b)$$

$$2_{\vec{E}}^{\rightarrow T} = 1_{\vec{n}}^{\rightarrow T} |1_{\vec{E}}^{\rightarrow R}| + 2_{\vec{n}}^{\rightarrow T} |0_{\vec{E}}^{\rightarrow R}| \quad (4.33a)$$

e

$$2_{\vec{H}}^{\rightarrow T} = 1_{\vec{n}}^{\rightarrow T} |1_{\vec{H}}^{\rightarrow R}| + 2_{\vec{n}}^{\rightarrow T} |0_{\vec{H}}^{\rightarrow R}| \quad , \quad (4.33b)$$

As equações (4.31a) e (4.31b) envolvem somente os coeficientes em ordem zero ( ${}^0A_{\lambda mn}^s$ ,  ${}^0B_{\lambda mn}^s$ ,  ${}^0A_{\lambda mn}^t$  e  ${}^0B_{\lambda mn}^t$ ) e são iguais às condições de contorno dos campos na esfera lisa, equações (2.32a) e (2.32b), respectivamente. Portanto, os

coeficientes calculados a partir das equações (4.31) e (2.32) são iguais, ou seja, o espalhamento da esfera rugosa em ordem zero é o espalhamento de Mie para a esfera lisa. Determinados os coeficientes em ordem zero, podemos calcular os coeficientes em ordem um ( ${}^1A_{\lambda mn}^s$ ,  ${}^1B_{\lambda mn}^s$ ,  ${}^1A_{\lambda mn}^t$ ,  ${}^1B_{\lambda mn}^t$ ) pelas equações (4.32a) e (4.32b). Obtidas as soluções para os coeficientes em ordem um podemos calcular os coeficientes em ordem dois ( ${}^2A_{\lambda mn}^s$ ,  ${}^2B_{\lambda mn}^s$ ,  ${}^2A_{\lambda mn}^t$ ,  ${}^2B_{\lambda mn}^t$ ) a partir das equações (4.33a) e (4.33b), e assim sucessivamente poderíamos determinar todos os termos do lado direito das equações (4.22) e (4.23). Neste trabalho calcularemos os campos só até segunda ordem em  $\delta$ , uma vez que queremos a média da seção de choque e matriz de espalhamento da esfera rugosa até segunda ordem em  $\delta_{rms}/R$ , o que é suficiente para se estudar os efeitos dominantes devido a rugosidade no espalhamento.

Para proceder ao cálculo dos coeficientes dos campos espalhado e transmitido, equações (4.22) e (4.23), é conveniente escrever separadamente as expressões de cada termo do lado direito das equações (4.27) e (4.28). Substituindo as equações (4.22) e (4.23) nas equações (4.16) e (4.17) e expandindo as funções dependentes de  $r$  no lado direito das equações (4.16) e (4.17), obtemos, por ordem,

Ordem zero:

$$\begin{aligned}
 {}^0\vec{E}^T &= \sum_{\lambda} \sum_{m} \sum_{n} \alpha_n \left[ h_n(R_2) {}^0A_{\lambda mn}^s - j_n(R_1) {}^0A_{\lambda mn}^t \right] \vec{M}_{\lambda mn}^T + \\
 &- i \sum_{\lambda} \sum_{m} \sum_{n} \alpha_n \left[ \bar{h}_n(R_2) {}^0B_{\lambda mn}^s - \bar{j}_n(R_1) {}^0B_{\lambda mn}^t \right] \vec{N}_{\lambda mn}^T + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n j_n(R_2) \vec{M}_{0ln}^T - i \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \bar{j}_n(R_2) \vec{N}_{eln}^T
 \end{aligned} \tag{4.34a}$$

$$\begin{aligned}
\vec{H}^{0T} = & -\sum_{\lambda nm} \alpha_n [\gamma_2 h_n(R_2)^0 B_{\lambda mn}^s - \gamma_1 j_n(R_1)^0 B_{\lambda mn}^t] \vec{M}_{\lambda mn}^{*T} + \\
& - i \sum_{\lambda nm} \alpha_n [\gamma_2 \bar{h}_n(R_2)^0 A_{\lambda mn}^s - \gamma_1 \dot{j}_n(R_1)^0 A_{\lambda mn}^t] \vec{N}_{\lambda mn}^{*T} + \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \gamma_2 j_n(R_2) \vec{M}_{e1n}^{*T} - i \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \gamma_2 \dot{j}_n(R_2) \vec{N}_{o1n}^{*T} \quad (4.34b)
\end{aligned}$$

$$\vec{E}^{0R} = - i \sum_{\lambda nm} \alpha_n [\phi_n(R_2)^0 B_{\lambda mn}^s - \psi_n(R_1)^0 B_{\lambda mn}^t] \vec{N}_{\lambda mn}^{*R} - i \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \psi_n(R_2) \vec{N}_{e1n}^{*R} \quad (4.35a)$$

$$\vec{H}^{0R} = - \sum_{\lambda nm} \alpha_n [\gamma_2 \phi_n(R_2)^0 A_{\lambda mn}^s - \gamma_1 \psi_n(R_1)^0 A_{\lambda mn}^t] \vec{M}_{\lambda mn}^{*R} - i \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \gamma_2 \psi_n(R_2) \vec{N}_{o1n}^{*R} \quad (4.35b)$$

Ordem um:

$$\begin{aligned}
\vec{E}^{1T} = & \sum_{\lambda nm} \alpha_n [h_n^1(R_2)^1 A_{\lambda mn}^s - j_n^1(R_1)^1 A_{\lambda mn}^t] \vec{M}_{\lambda mn}^{*T} - i \sum_{\lambda nm} \alpha_n [h_n^1(R_2)^1 B_{\lambda mn}^s - \dot{j}_n^1(R_1)^1 B_{\lambda mn}^t] \vec{N}_{\lambda mn}^{*T} + \\
& + \sum_{\lambda nm} \alpha_n [h_n^1(R_2)^0 A_{\lambda mn}^s - j_n^1(R_1)^0 A_{\lambda mn}^t] \delta \vec{M}_{\lambda mn}^{*T} - i \sum_{\lambda nm} \alpha_n [h_n^1(R_2)^0 B_{\lambda mn}^s - \dot{j}_n^1(R_1)^0 B_{\lambda mn}^t] \delta \vec{N}_{\lambda mn}^{*T} + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n j_n^1(R_2) \delta \vec{M}_{o1n}^{*T} - i \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \dot{j}_n^1(R_2) \delta \vec{N}_{e1n}^{*T} \quad (4.36a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{H}^T = & - \sum_{\lambda \mu \nu} \sum \sum \alpha_n [\gamma_2 h_n(R_2)^1 B_{\lambda \mu \nu}^S - \gamma_1 j_n(R_1)^1 B_{\lambda \mu \nu}^t] \vec{M}_{\lambda \mu \nu}^T - i \sum_{\lambda \mu \nu} \sum \sum \alpha_n [\gamma_2 \bar{h}_n(R_2)^1 A_{\lambda \mu \nu}^S + \\
& - \gamma_1 \bar{j}_n(R_1)^1 A_{\lambda \mu \nu}^t] \vec{N}_{\lambda \mu \nu}^T - \sum_{\lambda \mu \nu} \sum \sum \alpha_n [\gamma_2 h_n^1(R_2)^0 B_{\lambda \mu \nu}^S - \gamma_1 j_n^1(R_1)^0 B_{\lambda \mu \nu}^t] \delta \vec{M}_{\lambda \mu \nu}^T + \\
& - i \sum_{\lambda \mu \nu} \sum \sum \alpha_n [\gamma_2 \bar{h}_n^1(R_2)^0 A_{\lambda \mu \nu}^S - \gamma_1 \bar{j}_n^1(R_1)^0 A_{\lambda \mu \nu}^t] \delta \vec{N}_{\lambda \mu \nu}^T + \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \gamma_2 j_n^1(R_2) \delta \vec{M}_{e1n}^T - i \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \gamma_2 \bar{j}_n^1(R_2) \delta \vec{N}_{o1n}^T \quad (4.36b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{E}^R = & -i \sum_{\lambda \mu \nu} \sum \sum \sum \alpha_n [\phi_n(R_2)^1 B_{\lambda \mu \nu}^S - \psi_n(R_1)^1 B_{\lambda \mu \nu}^t] \vec{N}_{\lambda \mu \nu}^R - i \sum_{\lambda \mu \nu} \sum \sum \alpha_n [\phi_n^1(R_2)^0 B_{\lambda \mu \nu}^S - \psi_n^1(R_1)^0 B_{\lambda \mu \nu}^t] \delta \vec{N}_{\lambda \mu \nu}^R + \\
& - i \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \psi_n^1(R_2) \delta \vec{N}_{e1n}^R \quad (4.37a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{H}^R = & -i \sum_{\lambda} \sum \sum \sum \alpha_n [\gamma_2 \phi_n(R_2)^1 A_{\lambda \mu \nu}^S - \gamma_1 \psi_n(R_1)^1 A_{\lambda \mu \nu}^t] \vec{N}_{\lambda \mu \nu}^R - i \sum_{\lambda \mu \nu} \sum \sum \sum \alpha_n [\gamma_2 \phi_n^1(R_2)^0 A_{\lambda \mu \nu}^S + \\
& - \gamma_1 \psi_n^1(R_2)^0 A_{\lambda \mu \nu}^t] \delta \vec{N}_{\lambda \mu \nu}^R - i \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \gamma_2 \psi_n^1(R_2) \delta \vec{N}_{o1n}^R \quad (4.37b)
\end{aligned}$$

Ordem dois:

$$\begin{aligned}
 \overset{2 \rightarrow T}{E} = & \sum_{\lambda \mu \nu} \sum \sum \alpha_n [h_n(R_2)^2 A_{\lambda \mu \nu}^s - j_n(R_1)^2 A_{\lambda \mu \nu}^t] \overset{\rightarrow T}{M}_{\lambda \mu \nu} - i \sum_{\lambda \mu \nu} \sum \sum \alpha_n [\tilde{h}_n(R_2)^2 B_{\lambda \mu \nu}^s - \tilde{j}_n(R_1)^2 B_{\lambda \mu \nu}^t] \overset{\rightarrow T}{N}_{\lambda \mu \nu} + \\
 & + \sum_{\lambda \mu \nu} \sum \sum \alpha_n [h_n^1(R_2)^1 A_{\lambda \mu \nu}^s - j_n^1(R_1)^1 A_{\lambda \mu \nu}^t] \overset{\rightarrow T}{M}_{\lambda \mu \nu} - i \sum_{\lambda \mu \nu} \sum \sum \alpha_n [\tilde{h}_n^1(R_2)^1 B_{\lambda \mu \nu}^s - \tilde{j}_n^1(R_1)^1 B_{\lambda \mu \nu}^t] \overset{\rightarrow T}{N}_{\lambda \mu \nu} + \\
 & + \sum_{\lambda \mu \nu} \sum \sum \alpha_n [h_n^2(R_2)^0 A_{\lambda \mu \nu}^s - j_n^2(R_1)^0 A_{\lambda \mu \nu}^t] \overset{2 \rightarrow T}{M}_{\lambda \mu \nu} - i \sum_{\lambda \mu \nu} \sum \sum \alpha_n [\tilde{h}_n^2(R_2)^0 B_{\lambda \mu \nu}^s - \tilde{j}_n^2(R_1)^0 B_{\lambda \mu \nu}^t] \overset{2 \rightarrow T}{N}_{\lambda \mu \nu} + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n j_n^2(R_2) \delta_{0ln}^{\overset{2 \rightarrow T}{M}} - i \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tilde{j}_n^2(R_2) \delta_{eln}^{\overset{2 \rightarrow T}{N}} \quad (4.38a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \overset{2 \rightarrow T}{H} = & - \sum_{\lambda \mu \nu} \sum \sum \alpha_n [\gamma_2 h_n(R_2)^2 B_{\lambda \mu \nu}^s - \gamma_1 j_n(R_1)^2 B_{\lambda \mu \nu}^t] \overset{\rightarrow T}{M}_{\lambda \mu \nu} - i \sum_{\lambda \mu \nu} \sum \sum \alpha_n [\gamma_2 \tilde{h}_n(R_2)^2 A_{\lambda \mu \nu}^s + \\
 & - \gamma_1 \tilde{j}_n(R_1)^2 A_{\lambda \mu \nu}^t] \overset{\rightarrow T}{N}_{\lambda \mu \nu} - \sum_{\lambda \mu \nu} \sum \sum \alpha_n [\gamma_2 h_n^1(R_2)^1 B_{\lambda \mu \nu}^s - \gamma_1 j_n^1(R_1)^1 B_{\lambda \mu \nu}^t] \overset{\rightarrow T}{M}_{\lambda \mu \nu} + \\
 & - i \sum_{\lambda \mu \nu} \sum \sum \alpha_n [\gamma_2 \tilde{h}_n^1(R_2)^1 A_{\lambda \mu \nu}^s - \gamma_1 \tilde{j}_n^1(R_1)^1 A_{\lambda \mu \nu}^t] \overset{\rightarrow T}{N}_{\lambda \mu \nu} + \\
 & - \sum_{\lambda \mu \nu} \sum \sum \alpha_n [\gamma_2 h_n^2(R_2)^0 B_{\lambda \mu \nu}^s - \gamma_1 j_n^2(R_1)^0 B_{\lambda \mu \nu}^t] \overset{2 \rightarrow T}{M}_{\lambda \mu \nu} - i \sum_{\lambda \mu \nu} \sum \sum \alpha_n [\gamma_2 \tilde{h}_n^2(R_2)^0 A_{\lambda \mu \nu}^s + \\
 & - \gamma_1 \tilde{j}_n^2(R_1)^0 A_{\lambda \mu \nu}^t] \overset{2 \rightarrow T}{N}_{\lambda \mu \nu} - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \gamma_2 j_n^2(R_2) \delta_{eln}^{\overset{2 \rightarrow T}{M}} - i \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \gamma_2 \tilde{j}_n^2(R_2) \delta_{eln}^{\overset{2 \rightarrow T}{N}}
 \end{aligned}$$

(4.38b)

## 4.1.1. - Coeficientes em ordem zero - esfera rugosa dielétrica

As equações para os coeficientes em ordem zero são obtidos substituindo as equações (4.34a) e (4.34b) nas equações (4.31a) e (4.31b), respectivamente, resultando

$$\begin{aligned} & \sum \sum \sum \alpha_n [h_n(R_2)^0 A_{\lambda mn}^s - j_n(R_1)^0 A_{\lambda mn}^t] \vec{M}_{\lambda mn}^T - i \sum \sum \sum \alpha_n [h_n(R_2)^0 B_{\lambda mn}^s - j_n(R_1)^0 B_{\lambda mn}^t] \vec{N}_{\lambda mn}^T + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n j_n(R_2) \vec{M}_{0ln}^T - i \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n j_n(R_2) \vec{N}_{eln}^T = 0 \end{aligned} \quad (4.39a)$$

e

$$\begin{aligned} & \sum \sum \sum \alpha_n [\gamma_2 h_n(R_2)^0 B_{\lambda mn}^s - \gamma_1 j_n(R_1)^0 B_{\lambda mn}^t] \vec{M}_{\lambda mn}^T + i \sum \sum \sum \alpha_n [\gamma_2 h_n(R_2)^0 A_{\lambda mn}^s + \\ & - \gamma_1 j_n(R_1)^0 A_{\lambda mn}^t] \vec{N}_{\lambda mn}^T + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \gamma_2 j_n(R_2) \vec{M}_{eln}^T + i \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \gamma_2 j_n(R_2) \vec{N}_{0ln}^T = 0 \end{aligned} \quad (4.39b)$$

As equações (4.39a) e (4.39b) são idênticas às equações (2.44a) e (2.44b), respectivamente, e, portanto, têm as mesmas soluções, equações (2.48), (2.49) e (2.50), que reescrevemos na forma,

$$G_{A_{\lambda mn}^s} = - \left[ \frac{\gamma_2 j_n(R_1) j_n(R_2) - \gamma_1 j_n(R_1) j_n(R_2)}{DA_n} \right] \delta_{\lambda,0} \delta_{m,1}, \quad (4.40a)$$

$${}^0B_{\lambda mn}^s = - \left[ \frac{\gamma_1 j_n(R_1) \dot{j}_n(R_2) - \gamma_2 \dot{j}_n(R_1) j_n(R_2)}{DB_n} \right] \delta_{\lambda, e} \delta_{m, l} \quad (4.40b)$$

e

$${}^0A_{\lambda mn}^t = \left[ \frac{i\gamma_2}{R_2^2 DA_n} \right] \delta_{\lambda, o} \delta_{m, l} \quad (4.41a)$$

$${}^0B_{\lambda mn}^t = \left[ \frac{i\gamma_2}{R_2^2 DB_n} \right] \delta_{\lambda, e} \delta_{m, l} \quad (4.41b)$$

onde definimos  $DA_n$  e  $DB_n$  como

$$DA_n = \gamma_2 j_n(R_1) \dot{h}_n(R_2) - \gamma_1 \dot{j}_n(R_1) h_n(R_2) \quad (4.42a)$$

$$DB_n = \gamma_1 j_n(R_1) \dot{h}_n(R_2) - \gamma_2 \dot{j}_n(R_1) h_n(R_2) \quad (4.42b)$$

#### 4.1.2. - Coeficientes em ordem um - esfera rugosa dielétrica

Considerando somente os coeficientes de ordem zero não nulos  ${}^0A_{oln}^s$ ,  ${}^0B_{eln}^s$ ,  ${}^0A_{oln}^t$ ,  ${}^0B_{eln}^t$  equações (4.40) e (4.41), obtemos as equações para os coeficientes em ordem um, pela substituição das equações (4.35a) e (4.36a) na equação (4.32a) e das equações (4.35b) e (4.36b) na equação (4.32b), com o resultado

$$\begin{aligned}
& \sum_{\lambda n m} \sum \alpha_n [\bar{h}_n(R_2)^1 A_{\lambda mn}^S - \bar{j}_n(R_1)^1 A_{\lambda mn}^t] \bar{M}_{\lambda mn}^{\rightarrow T} - i \sum_{\lambda n m} \sum \alpha_n [\bar{h}_n(R_2)^1 B_{\lambda mn}^S - \bar{j}_n(R_1)^1 B_{\lambda mn}^t] \bar{N}_{\lambda mn}^{\rightarrow T} + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [j_k^1(R_2) + h_k^1(R_2)^0 A_{01k}^S - j_k^1(R_1)^0 A_{01k}^t] \delta \bar{M}_{01k}^{\rightarrow T} - i \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [j_k^1(R_2) + \\
& + \bar{h}_k^1(R_2)^0 B_{e1k}^S - \bar{j}_k^1(R_1)^0 B_{e1k}^t] \delta \bar{N}_{e1k}^{\rightarrow T} = -i \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [\psi_k(R_2) + \phi_k(R_2)^0 B_{e1k}^S - \psi_k(R_1)^0 B_{e1k}^t] \bar{N}_{e1k}^{1 \rightarrow T, R}
\end{aligned}
\tag{4.43a}$$

e

$$\begin{aligned}
& \sum_{\lambda n m} \sum \alpha_n [\gamma_2 \bar{h}_n(R_2)^1 B_{\lambda mn}^S - \gamma_1 \bar{j}_n(R_1)^1 B_{\lambda mn}^t] \bar{M}_{\lambda mn}^{\rightarrow T} + i \sum_{\lambda n m} \sum \alpha_n [\gamma_2 \bar{h}_n(R_2)^1 A_{\lambda mn}^S - \gamma_1 \bar{j}_n(R_1)^1 A_{\lambda mn}^t] \bar{N}_{\lambda mn}^{\rightarrow T} + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [\gamma_2 j_k^1(R_2) + \gamma_2 h_k^1(R_2)^0 B_{e1k}^S - \gamma_1 j_k^1(R_1)^0 B_{e1k}^t] \delta \bar{M}_{e1k}^{\rightarrow T} + i \sum_{\lambda n m} \sum \alpha_k [\gamma_2 j_k^1(R_2) + \\
& + \gamma_2 \bar{h}_k^1(R_2)^0 A_{01k}^S - \gamma_1 \bar{j}_k^1(R_1)^0 A_{01k}^t] \delta \bar{N}_{01k}^{\rightarrow T} = \\
& = i \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [\gamma_2 \psi_k(R_2) + \gamma_2 \phi_k(R_2)^0 A_{01k}^S - \gamma_1 \psi_k(R_1)^0 A_{01k}^t] \bar{N}_{01k}^{1 \rightarrow T, R}
\end{aligned}
\tag{4.43b}$$

onde  $N_{e1k}^R$  é o módulo do vetor  $N_{e1k}^R$

É conveniente aqui, definir as quantidades

$$a_k^1 = j_k^1(R_2) + h_k^1(R_2)^0 A_{01k}^S - j_k^1(R_1)^0 A_{01k}^t
\tag{4.44a}$$

$$b_k^1 = j_k^1(R_2) + \bar{n}_k^1(R_2)^0 B_{elk}^S - j_k^1(R_1)^0 B_{elk}^t \quad (4.44b)$$

$$c_k^0 = \psi_k(R_2) + \phi_k(R_2)^0 B_{elk}^S - \psi_k(R_1)^0 B_{elk}^t \quad (4.44c)$$

$$d_k^1 = \gamma_2 j_k^1(R_2) + \gamma_2 \bar{n}_k^1(R_2)^0 A_{olk}^S - \gamma_1 j_k^1(R_1)^0 A_{olk}^t \quad (4.44d)$$

$$e_k^1 = \gamma_2 j_k^1(R_2) + \gamma_2 h_k^1(R_2)^0 B_{elk}^S - \gamma_1 j_k^1(R_1)^0 B_{elk}^t \quad (4.44e)$$

$$f_k^0 = \psi_k(R_2) + \phi_k(R_2)^0 B_{elk}^S - \psi_k(R_1)^0 B_{elk}^t \quad (4.44f)$$

cujas expressões em termos das funções de Bessel estão calculadas no apêndice D.

Fazendo o produto escalar das equações (4.43a) por  $\vec{M}_{\lambda mn}^T$  e (4.43b) por  $\vec{N}_{\lambda mn}^T$ , integrando-as no ângulo sólido e usando as relações de ortogonalidade, equação (2.21), obtemos o sistema de equações

$$\alpha_n \beta_{mn} [h_n(R_2)^1 A_{\lambda mn}^S - j_n(R_1)^1 A_{\lambda mn}^t] = - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [a_k^1 \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{M}_{olk}^T \rangle - i b_k^1 \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{N}_{elk}^T \rangle + i c_k^0 \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \vec{1}_n^T | \vec{N}_{elk}^R \rangle] \quad (4.45a)$$

$$\alpha_n \beta_{mn} [\gamma_2 \bar{n}_n(R_2)^1 A_{\lambda mn}^S - \gamma_1 j_n(R_1)^1 A_{\lambda mn}^t] = - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [d_k^1 \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{N}_{olk}^T \rangle - i e_k^1 \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{M}_{elk}^T \rangle - f_k^0 \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \vec{1}_n^T | \vec{N}_{olk}^R \rangle] , \quad (4.45b)$$

onde usamos as definições dadas na equação (4.44) e a notação bra-ket definida na equação (2.23) na forma

$$\langle \vec{A} | \delta | \vec{B} \rangle = \langle \vec{A} | \delta | \vec{B} \rangle \quad \text{e} \quad \langle \vec{A} | \overset{1}{\vec{n}}^T | B \rangle = \langle \vec{A} | \overset{1}{\vec{n}}^T | B \rangle$$

De modo análogo, fazendo o produto escalar das equações (4.43a) por  $\overset{1}{N}_{\lambda mn}^T$  e (4.43b) por  $\overset{1}{M}_{\lambda mn}^T$  e integrando-as no ângulo sólido, resulta no sistema de equações

$$\begin{aligned} \alpha_n \beta_{mn} [\overset{1}{j}_n(R_2) \overset{1}{B}_{\lambda mn}^S - \overset{1}{j}_n(R_1) \overset{1}{B}_{\lambda mn}^t] = i \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [-a_k \overset{1}{\langle N}_{\lambda mn}^T | \delta | \overset{1}{M}_{olk}^T \rangle + \\ + i b_k \overset{1}{\langle M}_{\lambda mn}^T | \delta | \overset{1}{N}_{elk}^T \rangle - i c_k \overset{0}{\langle N}_{\lambda mn}^T | \overset{1}{\vec{n}}^T | N_{elk}^R \rangle] \end{aligned} \quad (4.46a)$$

$$\begin{aligned} \alpha_n \beta_{mn} [\gamma_2 \overset{1}{h}_n(R_2) \overset{1}{B}_{\lambda mn}^S - \gamma_1 \overset{1}{j}_n(R_1) \overset{1}{B}_{\lambda mn}^t] = i \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [-d_k \overset{1}{\langle M}_{\lambda mn}^T | \delta | \overset{1}{N}_{olk}^T \rangle + \\ + i e_k \overset{1}{\langle M}_{\lambda mn}^T | \delta | \overset{1}{M}_{elk}^T \rangle + f_k \overset{0}{\langle M}_{\lambda mn}^T | \overset{1}{\vec{n}}^T | N_{olk}^R \rangle] \end{aligned} \quad (4.46b)$$

Definindo as quantidades

$$\overset{1}{E}_{\lambda mn}^k = a_k \overset{1}{\langle M}_{\lambda mn}^T | \delta | \overset{1}{M}_{olk}^T \rangle - i b_k \overset{1}{\langle M}_{\lambda mn}^T | \delta | \overset{1}{N}_{elk}^T \rangle + i c_k \overset{0}{\langle M}_{\lambda mn}^T | \overset{1}{\vec{n}}^T | N_{elk}^R \rangle \quad (4.47a)$$

$$\overset{1}{F}_{\lambda mn}^k = d_k \overset{1}{\langle N}_{\lambda mn}^T | \delta | \overset{1}{N}_{olk}^T \rangle - i e_k \overset{1}{\langle N}_{\lambda mn}^T | \delta | \overset{1}{M}_{elk}^T \rangle - f_k \overset{0}{\langle N}_{\lambda mn}^T | \overset{1}{\vec{n}}^T | N_{olk}^R \rangle \quad (4.47b)$$

$$\overset{1}{H}_{\lambda mn}^k = -a_k \overset{1}{\langle N}_{\lambda mn}^T | \delta | \overset{1}{M}_{olk}^T \rangle + i b_k \overset{1}{\langle N}_{\lambda mn}^T | \delta | \overset{1}{N}_{elk}^T \rangle - i c_k \overset{0}{\langle N}_{\lambda mn}^T | \overset{1}{\vec{n}}^T | N_{elk}^R \rangle \quad (4.47c)$$

$$l_{P\lambda mn}^k = -d_k^1 \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{N}_{0lk}^T \rangle + i e \frac{1}{k} \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{M}_{elk}^T \rangle + f_k^0 \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \vec{n}^T | \vec{N}_{0lk}^R \rangle \quad (4.47d)$$

podemos escrever as soluções das equações (4.45) e (4.46) na forma

$$l_{A\lambda mn}^s = \frac{1}{\alpha_n \beta_{mn} DA_n} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left[ \gamma_1 \dot{j}_n(R_1) l_{E\lambda mn}^k - j_n(R_1) l_{F\lambda mn}^k \right] \quad (4.48a)$$

$$l_{E\lambda mn}^s = \frac{i}{\alpha_n \beta_{mn} DB_n} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left[ \gamma_1 j_n(R_1) l_{H\lambda mn}^k - \dot{j}_n(R_1) l_{P\lambda mn}^k \right] \quad (4.48b)$$

e

$$l_{A\lambda mn}^t = \frac{1}{\alpha_n \beta_{mn} DA_n} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left[ \gamma_2 \bar{n}_n(R_2) l_{E\lambda mn}^k - n_n(R_2) l_{F\lambda mn}^k \right] \quad (4.49a)$$

$$l_{B\lambda mn}^t = \frac{i}{\alpha_n \beta_{mn} DB_n} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left[ \gamma_2 h_n(R_2) l_{H\lambda mn}^k - \bar{n}_n(R_2) l_{P\lambda mn}^k \right] \quad (4.49b)$$

onde  $DA_n$  e  $DB_n$  são dados na equação (4.42). Nas equações (4.48) e (4.49) os coeficientes de ordem um,  $l_{A\lambda mn}^{s,t}$  e  $l_{B\lambda mn}^{s,t}$ , são dados em termos das quantidades  $l_{E\lambda mn}^k$ ,  $l_{F\lambda mn}^k$ ,  $l_{H\lambda mn}^k$  e  $l_{P\lambda mn}^k$ , as quais são calculadas no apêndice C.

#### 4.1.3. - Coeficientes em ordem dois - Esfera Rugosa Dielétrica

Considerando os coeficientes de ordem um e ordem ze-

ro calculados, obtemos as equações para os coeficientes de ordem dois, substituindo as equações (4.38a), (4.35a) e (4.37a) na equação (4.33a) e as equações (4.38b), (4.35b) e (4.37b) na equação (4.33b), resultando nas equações

$$\begin{aligned}
& \Sigma \Sigma \Sigma \alpha_n [h_n(R_2)^2 A_{\lambda mn}^s - j_n(R_1)^2 A_{\lambda mn}^t] \vec{M}_{\lambda mn}^T - i \Sigma \Sigma \Sigma \alpha_n [\bar{h}_n(R_2)^2 B_{\lambda mn}^s - \bar{j}_n(R_1)^2 B_{\lambda mn}^t] \vec{N}_{\lambda mn}^T + \\
& + \Sigma \Sigma \Sigma \alpha_n [h_n^1(R_2)^1 A_{\lambda', m', n'}^s - j_n^1(R_1)^1 A_{\lambda', m', n'}^t] \delta \vec{M}_{\lambda', m', n'}^T - i \Sigma \Sigma \Sigma \alpha_n [\bar{h}_n^1(R_2)^1 B_{\lambda', m', n'}^s + \\
& - \bar{j}_n^1(R_1)^1 B_{\lambda', m', n'}^t] \delta \vec{N}_{\lambda', m', n'}^T + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [j_k^2(R_2) + h_k^2(R_2)^0 A_{0lk}^s - j_k^2(R_1)^0 A_{0lk}^t] \delta^{2 \rightarrow T} M_{0lk}^T + \\
& - i \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [j_k^2(R_2) + h_k^2(R_2)^0 B_{elk}^s - j_k^2(R_1)^0 B_{elk}^t] \delta^{2 \rightarrow T} N_{elk}^T = \\
& = -i \Sigma \Sigma \Sigma \alpha_n [\phi_n(R_2)^1 B_{\lambda', m', n'}^s - \psi_n(R_1)^1 B_{\lambda', m', n'}^t] \delta^{1 \rightarrow T, R} N_{\lambda', m', n'}^T - i \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [\psi_k^1(R_2) + \\
& + \phi_k^1(R_2)^0 B_{elk}^s - \psi_k^1(R_1)^0 B_{elk}^t] \delta^{1 \rightarrow T, R} N_{elk}^T - i \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [\psi_k(R_2) + \phi_k(R_2)^0 B_{elk}^s - \psi_k(R_1)^0 B_{elk}^t] \delta^{2 \rightarrow T, R} N_{elk}^T
\end{aligned}
\tag{4.50a}$$

$$\begin{aligned}
& \Sigma\Sigma\Sigma\alpha_n [\gamma_2 h_n(R_2)^2 B_{\lambda mn}^S - \gamma_1 j_n(R_1)^2 B_{\lambda mn}^t] M_{\lambda mn}^{\rightarrow T} + i\Sigma\Sigma\Sigma\alpha_n [\gamma_2 \tilde{h}_n(R_2)^2 A_{\lambda mn}^S + \\
& - \gamma_1 \dot{j}_n(R_1)^2 A_{\lambda mn}^t] N_{\lambda mn}^{\rightarrow T} + \Sigma\Sigma\Sigma\alpha_n [\gamma_2 h_n^1(R_2)^1 B_{\lambda',m',n'}^S - \gamma_1 \dot{j}_n^1(R_1)^1 B_{\lambda',m',n'}^t] \delta_{\lambda',m',n'}^{\rightarrow T} + \\
& + i\Sigma\Sigma\Sigma\alpha_n [\gamma_2 \tilde{h}_n^1(R_2)^1 A_{\lambda',m',n'}^S - \gamma_1 \dot{j}_n^1(R_1)^1 A_{\lambda',m',n'}^t] \delta_{\lambda',m',n'}^{\rightarrow T} + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_n [\gamma_2 j_k^2(R_2) + \gamma_2 h_k^2(R_2)^0 B_{elk}^S - \gamma_1 \dot{j}_k^2(R_1)^0 B_{elk}^t] \delta_{elk}^{2\rightarrow T} + i \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [\gamma_2 \dot{j}_k^2(R_2) + \\
& + \gamma_2 \tilde{h}_k^2(R_2)^0 A_{olk}^S - \gamma_1 \dot{j}_k^2(R_1)^0 A_{olk}^t] \delta_{olk}^{2\rightarrow T} = i\Sigma\Sigma\Sigma\alpha_n [\gamma_2 \phi_n(R_2)^1 A_{\lambda',m',n'}^S + \\
& - \gamma_1 \psi_n(R_1)^1 A_{\lambda',m',n'}^t] N_{\lambda',m',n'}^{1\rightarrow T,R} + i \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [\gamma_2 \psi_k^1(R_2) + \gamma_2 \phi_k^1(R_2)^0 A_{olk}^S + \\
& - \gamma_1 \psi_k^1(R_1)^0 A_{olk}^t] \delta_{olk}^{1\rightarrow T,R} + i \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [\gamma_2 \psi_k(R_2) + \gamma_2 \phi_k(R_2)^0 A_{olk}^S + \\
& - \gamma_1 \psi_k(R_1)^0 A_{olk}^t] N_{olk}^{2\rightarrow T,R} \tag{4.50b}
\end{aligned}$$

Neste ponto, é conveniente definir as quantidades

$$a_k^2 = \dot{j}_k^2(R_2) + h_k^2(R_2)^0 A_{olk}^S - \dot{j}_k^2(R_1)^0 A_{olk}^t \tag{4.51a}$$

$$b_k^2 = \dot{j}_k^2(R_2) + \tilde{h}_k^2(R_2)^0 B_{elk}^S - \dot{j}_k^2(R_1)^0 B_{elk}^t \tag{4.51b}$$

$$c_k^1 = \psi_k^1(R_2) + \phi_k^1(R_2)^0 B_{elk}^S - \psi_k^1(R_1)^0 B_{elk}^t \tag{4.51c}$$

$$d_k^2 = \gamma_2 \dot{j}_k^2(R_2) + \gamma_2 \ddot{n}_k^2(R_2) {}^0A_{olk}^S - \gamma_1 \dot{j}_k^2(R_1) {}^0A_{olk}^t \quad (4.51d)$$

$$e_k^2 = \gamma_2 \dot{j}_k^2(R_2) + \gamma_2 h_k^2(R_2) {}^0B_{elk}^S - \gamma_1 \dot{j}_k^2(R_1) {}^0B_{elk}^t \quad (4.51e)$$

$$f_k^1 = \gamma_2 \psi_k^1(R_2) + \gamma_2 \phi_k^1(R_2) {}^0A_{olk}^S - \gamma_1 \psi_k^1(R_1) {}^0A_{olk}^t \quad (4.51f)$$

e também

$$T_{\lambda'm'n'} = h_{n'}^1(R_2) {}^1A_{\lambda'm'n'}^S - j_{n'}^1(R_1) {}^1A_{\lambda'm'n'}^t \quad (4.52a)$$

$$U_{\lambda'm'n'} = \ddot{n}_{n'}^1(R_2) {}^1B_{\lambda'm'n'}^S - \dot{j}_{n'}^1(R_1) {}^1B_{\lambda'm'n'}^t \quad (4.52b)$$

$$V_{\lambda'm'n'} = \phi_{n'}^1(R_2) {}^1B_{\lambda'm'n'}^S - \psi_{n'}^1(R_1) {}^1B_{\lambda'm'n'}^t \quad (4.52c)$$

$$X_{\lambda'm'n'} = \gamma_2 \ddot{n}_{n'}^1(R_2) {}^1A_{\lambda'm'n'}^S - \gamma_1 \dot{j}_{n'}^1(R_1) {}^1A_{\lambda'm'n'}^t \quad (4.52d)$$

$$Y_{\lambda'm'n'} = \gamma_2 h_{n'}^1(R_2) {}^1B_{\lambda'm'n'}^S - \gamma_1 \dot{j}_{n'}^1(R_1) {}^1B_{\lambda'm'n'}^t \quad (4.52e)$$

$$Z_{\lambda'm'n'} = \gamma_2 \phi_{n'}^1(R_2) {}^1A_{\lambda'm'n'}^S - \gamma_1 \psi_{n'}^1(R_1) {}^1A_{\lambda'm'n'}^t \quad (4.52f)$$

Usando as definições dadas nas equações (4.51) e (4.52) obtemos um sistema de equações para os coeficientes  ${}^2A_{\lambda mn}^s$  e  ${}^2A_{\lambda mn}^t$ , fazendo o produto escalar da equação (4.50a) por  $\vec{M}_{\lambda mn}^T$  e (4.50b) por  $\vec{N}_{\lambda mn}^T$  e integrando-as no ângulo sólido, resulta

$$\begin{aligned} \alpha_n \beta_{nm} [h_n(R_2) {}^2A_{\lambda mn}^s - j_n(R_1) {}^2A_{\lambda mn}^t] = & - \sum_k \alpha_k [a_k^2 \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta^2 | \vec{M}_{01k}^T \rangle + \\ & - i b_k^2 \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta^2 | \vec{N}_{elk}^T \rangle - i (c_k^1 - c_k^0) \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | {}^2\vec{n}^T | N_{elk}^R \rangle] + \\ & - \sum \sum \sum \alpha_n [X_{\lambda' m' n'} \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{M}_{\lambda' m' n'}^T \rangle - i U_{\lambda' m' n'} \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{N}_{\lambda' m' n'}^T \rangle + \\ & + i V_{\lambda' m' n'} \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | {}^1\vec{n}^T | N_{\lambda' m' n'}^R \rangle] \end{aligned} \quad (4.53a)$$

e

$$\begin{aligned} \alpha_n \beta_{nm} [\gamma_2 h_n(R_2) {}^2A_{\lambda mn}^s - \gamma_1 j_n(R_1) {}^2A_{\lambda mn}^t] = & - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [d_k^2 \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta^2 | \vec{N}_{01k}^T \rangle + \\ & - i e_k^2 \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta^2 | \vec{M}_{elk}^T \rangle + (f_k^1 - f_k^0) \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | {}^2\vec{n}^T | N_{01k}^R \rangle] + \\ & - \sum \sum \sum \alpha_n [X_{\lambda' m' n'} \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{N}_{\lambda' m' n'}^T \rangle - i Y_{\lambda' m' n'} \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{M}_{\lambda' m' n'}^T \rangle + \\ & - Z_{\lambda' m' n'} \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | {}^1\vec{n}^T | N_{\lambda' m' n'}^R \rangle] \end{aligned} \quad (4.53b)$$

De modo análogo, fazendo o produto escalar das equações (4.50a) por  $\vec{N}_{\lambda mn}^T$  e (4.50b) por  $\vec{M}_{\lambda mn}^T$  e integrando-as no ângulo sólido, obtemos o seguinte sistema de equações para os coeficientes  ${}^2B_{\lambda mn}^s$  e  ${}^2B_{\lambda mn}^t$

$$\begin{aligned} \alpha_n \beta_{mn} [h_n (R_2) {}^2B_{\lambda mn}^s - j_n (R_1) {}^2B_{\lambda mn}^t] = i \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [-a_k^2 \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta^2 | \vec{M}_{olk}^T \rangle + \\ + i b_k^2 \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta^2 | \vec{N}_{elk}^T \rangle + i (c_k^1 - c_k^0) \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | {}^2\vec{N}_{n}^T | N_{elk}^R \rangle] + i \Sigma \Sigma \Sigma \alpha_n [-T_{\lambda' m' n'} \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{M}_{\lambda' m' n'}^T \rangle + \\ + i U_{\lambda' m' n'} \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{N}_{\lambda' m' n'}^T \rangle - i V_{\lambda' m' n'} \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | {}^1\vec{N}_{n}^T | N_{\lambda' m' n'}^R \rangle] \end{aligned} \quad (4.54a)$$

$$\begin{aligned} \alpha_n \beta_{mn} [\gamma_2 h_n (R_2) {}^2B_{\lambda mn}^s - \gamma_1 j_n (R_1) {}^2B_{\lambda mn}^t] = i \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [-d_k^2 \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta^2 | \vec{N}_{elk}^T \rangle + \\ + i e_k^2 \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta^2 | \vec{M}_{elk}^T \rangle - (f_k^1 - f_k^0) \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | {}^2\vec{N}_{n}^T | N_{olk}^R \rangle] + \\ + i \Sigma \Sigma \Sigma \alpha_n [-X_{\lambda' m' n'} \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{N}_{\lambda' m' n'}^T \rangle + i Y_{\lambda' m' n'} \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{M}_{\lambda' m' n'}^T \rangle \\ + Z_{\lambda' m' n'} \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | {}^1\vec{N}_{n}^T | N_{\lambda' m' n'}^R \rangle] \end{aligned} \quad (4.54b)$$

Nas equações (4.53) e (4.54) usamos a relação  $\delta_{\vec{n}}^{1 \rightarrow T} = \delta_{\vec{n}}^{2 \rightarrow T}$ , equação (4.30b).

Definindo as quantidades

$${}^2 E_{\lambda mn}^k = a_k^2 \langle \vec{M}_{\lambda mn}^{\rightarrow T} | \delta^2 | \vec{M}_{01k}^{\rightarrow T} \rangle - i b_k^2 \langle \vec{M}_{\lambda mn}^{\rightarrow T} | \delta^2 | \vec{N}_{e1k}^{\rightarrow T} \rangle - i (c_k^1 - c_k^0) \langle \vec{M}_{\lambda mn}^{\rightarrow T} | {}^2 \vec{n}^{\rightarrow T} | N_{e1k}^R \rangle, \quad (4.55a)$$

$${}^2 F_{\lambda mn}^k = d_k^2 \langle \vec{N}_{\lambda mn}^{\rightarrow T} | \delta^2 | \vec{N}_{01k}^{\rightarrow T} \rangle - i e_k^2 \langle \vec{N}_{\lambda mn}^{\rightarrow T} | \delta^2 | \vec{M}_{e1k}^{\rightarrow T} \rangle + (f_k^1 - f_k^0) \langle \vec{N}_{\lambda mn}^{\rightarrow T} | {}^2 \vec{n}^{\rightarrow T} | N_{01k}^R \rangle, \quad (4.55b)$$

$${}^2 H_{\lambda mn}^k = -a_k^2 \langle \vec{N}_{\lambda mn}^{\rightarrow T} | \delta^2 | \vec{M}_{01k}^{\rightarrow T} \rangle + i b_k^2 \langle \vec{N}_{\lambda mn}^{\rightarrow T} | \delta^2 | \vec{N}_{e1k}^{\rightarrow T} \rangle + i (c_k^1 - c_k^0) \langle \vec{N}_{\lambda mn}^{\rightarrow T} | {}^2 \vec{n}^{\rightarrow T} | N_{e1k}^R \rangle, \quad (4.55c)$$

$${}^2 P_{\lambda mn}^k = -d_k^2 \langle \vec{M}_{\lambda mn}^{\rightarrow T} | \delta^2 | \vec{N}_{01k}^{\rightarrow T} \rangle + i e_k^2 \langle \vec{M}_{\lambda mn}^{\rightarrow T} | \delta^2 | \vec{M}_{e1k}^{\rightarrow T} \rangle - (f_k^1 - f_k^0) \langle \vec{M}_{\lambda mn}^{\rightarrow T} | {}^2 \vec{n}^{\rightarrow T} | N_{01k}^R \rangle, \quad (4.55d)$$

e

$${}^2 E_{mn}^{m'n'} = \sum_{\lambda'} \langle \vec{M}_{\lambda m'n'}^{\rightarrow T} | \delta | \vec{M}_{\lambda m'n'}^{\rightarrow T} \rangle - i U_{\lambda m'n'} \langle \vec{M}_{\lambda m'n'}^{\rightarrow T} | \delta | \vec{N}_{\lambda m'n'}^{\rightarrow T} \rangle + i V_{\lambda m'n'} \langle \vec{M}_{\lambda m'n'}^{\rightarrow T} | {}^1 \vec{n}^{\rightarrow T} | N_{\lambda m'n'}^R \rangle, \quad (4.56a)$$

$$\begin{aligned}
2_{F\lambda mn}^{m'n'} &= \sum_{\lambda'} X_{\lambda' m'n'} \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{N}_{\lambda' m'n'}^T \rangle - i Y_{\lambda' m'n'} \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{M}_{\lambda' m'n'}^T \rangle + \\
&- Z_{\lambda' m'n'} \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \vec{1}_n^T | N_{\lambda' m'n'}^R \rangle, \quad (4.56b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2_{Hmn}^{m'n'} &= \sum_{\lambda'} -T_{\lambda' m'n'} \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{M}_{\lambda' m'n'}^T \rangle + i U_{\lambda' m'n'} \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{N}_{\lambda' m'n'}^T \rangle + \\
&- i V_{\lambda' m'n'} \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \vec{1}_n^T | N_{\lambda' m'n'}^R \rangle, \quad (4.56c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2_{P\lambda mn}^{m'n'} &= \sum_{\lambda'} -X_{\lambda' m'n'} \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{N}_{\lambda' m'n'}^T \rangle + i Y_{\lambda' m'n'} \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{M}_{\lambda' m'n'}^T \rangle + \\
&+ Z_{\lambda' m'n'} \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \vec{1}_n^T | N_{\lambda' m'n'}^R \rangle, \quad (4.56d)
\end{aligned}$$

as soluções dos sistemas de equações (4.53) e (4.59) podem ser escritas na forma

$$\begin{aligned}
2_{A\lambda mn}^s &= \frac{1}{\alpha_n \beta_{mn} D A_n} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [Y_{1n} \dot{j}_n(R_{-1})^2 E_{\lambda mn}^k - j_n(R_{-1})^2 F_{\lambda mn}^k] + \right. \\
&+ \left. \sum_{n'm'} \sum_n \alpha_n [Y_{1n} \dot{j}_n(R_{-1})^2 E_{\lambda mn}^{m'n'} - j_n(R_{-1})^2 F_{\lambda mn}^{m'n'}] \right\} \quad (4.57a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^2B_{\lambda mn}^s &= \frac{1}{\alpha_n \beta_{mn} DB_n} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [\gamma_1 j_n (R_1)^2 H_{\lambda mn}^k - \dot{j}_n (R_1)^2 P_{\lambda mn}^k] \right\} + \\
&+ \sum_{n'm'} \alpha_{n'} [\gamma_1 j_n (R_1)^2 H_{\lambda mn}^{m'n'} - \dot{j}_n (R_1)^2 P_{\lambda mn}^{m'n'}] \} \quad (4.57b)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
{}^2A_{\lambda mn}^t &= \frac{1}{\alpha_n \beta_{mn} DA_n} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [\gamma_2 \tilde{h}_n (R_2)^2 E_{\lambda mn}^k - h_n (R_2)^2 F_{\lambda mn}^k] \right\} + \\
&+ \sum_{n'm'} \alpha_{n'} [\gamma_2 \tilde{h}_n (R_2)^2 E_{\lambda mn}^{m'n'} - h_n (R_2)^2 F_{\lambda mn}^{m'n'}] \} \quad (4.58a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^2B_{\lambda mn}^t &= \frac{1}{\alpha_n \beta_{mn} DB_n} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [\gamma_2 h_n (R_2)^2 H_{\lambda mn}^k - \tilde{h}_n (R_2)^2 P_{\lambda mn}^k] \right\} + \\
&+ \sum_{n'm'} \alpha_{n'} [\gamma_2 h_n (R_2)^2 H_{\lambda mn}^{m'n'} - \tilde{h}_n (R_2)^2 P_{\lambda mn}^{m'n'}] \} \quad (4.58b)
\end{aligned}$$

As quantidades definidas na equação (4.51) são calculadas no apêndice D e a média estatística das quantidades  ${}^2E_{\lambda mn}^k$ ,  ${}^2F_{\lambda mn}^k$ ,  ${}^2H_{\lambda mn}^k$ ,  ${}^2P_{\lambda mn}^k$ , equação (4.55) e  ${}^2E_{\lambda mn}^{m'n'}$ ,  ${}^2F_{\lambda mn}^{m'n'}$ ,  ${}^2H_{\lambda mn}^{m'n'}$ ,  ${}^2P_{\lambda mn}^{m'n'}$ , equação (4.56), é calculada no apêndice C, o que nos permite obter o valor médio dos coeficientes de segunda ordem.

4.2. - Esfera Rugosa Condutora

No caso da esfera rugosa ser perfeitamente condutora ( $\sigma_1 \rightarrow \infty$ ) os campos elétrico e magnético transmitidos para o seu interior ( $\vec{E}_t$  e  $\vec{H}_t$ ) são nulos e as condições de contorno dos campos na superfície da esfera rugosa são,

$$\vec{n} \times \vec{E}_2 \Big|_{r = R + \xi(\theta, \phi)} = 0 \quad (4.59a)$$

$$\vec{n} \times \vec{H}_2 \Big|_{r = R + \xi(\theta, \phi)} = \vec{K} \quad (4.59b)$$

onde  $\vec{K}$  é a densidade superficial de corrente a ser determinada e  $\vec{n}$  é o vetor normal à superfície da esfera rugosa dado pela equação (4.10).

De modo análogo ao que fizemos no caso da esfera lisa condutora, usaremos somente a equação (4.59a) para calcularmos os coeficientes do campo elétrico espalhado, equação (4.7a), obtendo o campo magnético pela equação (4.7b).

Definindo o campo  $\vec{E}$  como,

$$\vec{E} = [E_2]_{r = R + \xi(\theta, \phi)} = [\vec{E}_i + \vec{E}_s]_{r = R + \xi(\theta, \phi)} \quad (4.60)$$

a equação (4.59a) fica na forma,

$$\vec{n} \times \vec{E} = 0 \quad (4.61)$$

Separando o campo  $\vec{E}$  em partes transversal e radial,

$$\vec{E} = \vec{E}^T + \vec{E}^R \quad (4.62)$$

e substituindo as equações (4.13) e (4.62) na equação (4.61), obtemos após alguns arranjos a equação

$$\vec{E}^T = \vec{n}^T | \vec{E}^R | \quad (4.63)$$

onde  $\vec{n}^T$  é dado pela equação (4.14a) e as partes transversal e radial do campo  $\vec{E}$  são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \vec{E}^T = & \left\{ \sum \sum \sum \alpha_n h_n(k_2 r) A_{\lambda mn}^S \vec{M}_{\lambda mn}^T - i \sum \sum \sum \alpha_n \tilde{h}_n(k_2 r) B_{\lambda mn}^S \vec{N}_{\lambda mn}^T + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n j_n(k_2 r) \vec{M}_{0ln}^T + \right. \\ & \left. - i \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \dot{j}_n(k_2 r) \vec{N}_{eln}^T \right\}_{r=R+\xi(\theta, \phi)} \end{aligned} \quad (4.64a)$$

$$\vec{E}^R = \left\{ -i \sum \sum \sum \alpha_n \phi_n(k_2 r) B_{\lambda mn}^S \vec{N}_{\lambda mn}^R - i \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \psi_n(k_2 r) \vec{N}_{eln}^R \right\}_{r=R+\xi(\theta, \phi)} \quad (4.64b)$$

Escrevendo os coeficientes do campo espalhado como expansões em ordens de  $\delta$ , de modo que,

$$A_{\lambda mn}^S = {}^0 A_{\lambda mn}^S + {}^1 A_{\lambda mn}^S + {}^2 A_{\lambda mn}^S + \dots \quad (4.65a)$$

$$B_{\lambda mn}^S = {}^0 B_{\lambda mn}^S + {}^1 B_{\lambda mn}^S + {}^2 B_{\lambda mn}^S + \dots \quad (4.65b)$$

e expandindo as funções de  $r$  da equação (4.64) em potências de

$\delta$  conforme as equações (4.22) e (4.25), podemos escrever os campos  $\vec{E}^R$  e  $\vec{E}^T$  na forma

$$\vec{E}^T = {}^0\vec{E}^T + {}^1\vec{E}^T + {}^2\vec{E}^T + \dots \quad (4.66a)$$

$$\vec{E}^R = {}^0\vec{E}^R + {}^1\vec{E}^R + \dots \quad (4.66b)$$

onde cada termo do lado direito das equações (4.66a) e (4.66b) é dado a seguir, por ordem,

ordem zero:

$$\begin{aligned} {}^0\vec{E}^T &= \Sigma\Sigma\Sigma\alpha_n h_n(R_2) {}^0A_{\lambda mn}^S \vec{M}_{\lambda mn}^T - i\Sigma\Sigma\Sigma\alpha_n \tilde{h}_n(R_2) {}^0B_{\lambda mn}^S \vec{N}_{\lambda mn}^T + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n j_n(R_2) \vec{M}_{0ln}^T - i \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tilde{j}_n(R_2) \vec{N}_{eln}^T, \end{aligned} \quad (4.67a)$$

$${}^0\vec{E}^R = -i\Sigma\Sigma\Sigma\alpha_n \phi_n(R_2) {}^0B_{\lambda mn}^E \vec{N}_{\lambda mn}^R - i \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \psi_n(R_2) \vec{N}_{eln}^R \quad (4.67b)$$

ordem um:

$$\begin{aligned} {}^1\vec{E}^T &= \Sigma\Sigma\Sigma\alpha_n h_n(R_2) {}^1A_{\lambda mn}^S \vec{M}_{\lambda mn}^T - i\Sigma\Sigma\Sigma\alpha_n \tilde{h}_n(R_2) {}^1B_{\lambda mn}^S \vec{N}_{\lambda mn}^T + \Sigma\Sigma\Sigma\alpha_n h_n^1(R_2) {}^0A_{\lambda mn}^S \delta\vec{M}_{\lambda mn}^T + \\ &- i\Sigma\Sigma\Sigma\alpha_n \tilde{h}_n^1(R_2) {}^0B_{\lambda mn}^S \delta\vec{N}_{\lambda mn}^T + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n j_n^1(R_2) \delta\vec{M}_{0ln}^T - i \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tilde{j}_n^1(R_2) \delta\vec{N}_{eln}^T, \end{aligned} \quad (4.68a)$$

$$1_{\vec{E}}^{\rightarrow R} = - \sum \sum \sum \alpha_n \phi_n(R_2) {}^1 B_{\lambda mn}^S \vec{N}_{\lambda mn}^{\rightarrow R} - i \sum \sum \sum \alpha_n \phi_n^1(R_2) {}^0 B_{\lambda mn}^S \delta \vec{N}_{\lambda mn}^{\rightarrow R} - i \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \psi_n^1(R_2) \delta \vec{N}_{e ln}^{\rightarrow R} \quad (4.68b)$$

ordem dois:

$$\begin{aligned} 2_{\vec{E}}^{\rightarrow T} = & \sum \sum \sum \alpha_n h_n(R_2) {}^2 A_{\lambda mn}^S \vec{M}_{\lambda mn}^{\rightarrow T} - i \sum \sum \sum \alpha_n \tilde{h}_n(R_2) {}^2 B_{\lambda mn}^S \vec{N}_{\lambda mn}^{\rightarrow T} + \sum \sum \sum \alpha_n h_n^1(R_1) {}^1 A_{\lambda mn}^S \delta \vec{M}_{\lambda mn}^{\rightarrow T} + \\ & - i \sum \sum \sum \alpha_n \tilde{h}_n^1(R_2) {}^1 B_{\lambda mn}^S \delta \vec{N}_{\lambda mn}^{\rightarrow T} + \sum \sum \sum \alpha_n h_n^2(R_2) {}^0 A_{\lambda mn}^S \delta {}^2 \vec{M}_{\lambda mn}^{\rightarrow T} - i \sum \sum \sum \alpha_n \tilde{h}_n^2(R_2) {}^0 B_{\lambda mn}^S \delta {}^2 \vec{N}_{\lambda mn}^{\rightarrow T} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n j_n^2(R_2) \delta {}^2 \vec{M}_{0 ln}^{\rightarrow T} - i \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tilde{j}_n^2(R_2) \delta {}^2 \vec{N}_{e ln}^{\rightarrow T} . \end{aligned} \quad (4.69)$$

Substituindo as equações (4.66a), (4.66b) e (4.29) na equação (4.63) e igualando os termos de mesma ordem em  $\delta$ , obtemos a sequência de aproximações

$$0_{\vec{E}}^{\rightarrow T} = 0 \quad (4.70)$$

$$1_{\vec{E}}^{\rightarrow T} = 1_n^{\rightarrow T} | 0_{\vec{E}}^{\rightarrow R} | \quad (4.71)$$

$$2_{\vec{E}}^{\rightarrow T} = 1_n^{\rightarrow T} | 1_{\vec{E}}^{\rightarrow R} | + 2_n^{\rightarrow T} | 0_{\vec{E}}^{\rightarrow R} | \quad (4.72)$$

Da equação (4.70) obtemos os coeficientes em ordem zero ( ${}^0 A_{\lambda mn}^S$  e  ${}^0 B_{\lambda mn}^S$ ) que são iguais aos coeficientes calculados no caso da esfera lisa condutora. Na sequência calcularemos os coeficientes em ordem um ( ${}^1 A_{\lambda mn}^S$  e  ${}^1 B_{\lambda mn}^S$ ) pela equação (4.71) e os coeficientes em ordem dois ( ${}^2 A_{\lambda mn}^S$  e  ${}^2 B_{\lambda mn}^S$ ) pela equação (4.72).

## 4.2.1. - Coeficientes em ordem-zero - Esfera Rugosa Condutora

Substituindo a equação (4.67a) na equação (4.70), te  
remos

$$\begin{aligned} & \sum \sum \sum \alpha_n h_n(R_2) {}^0 A_{\lambda mn}^s \vec{M}_{\lambda mn}^T - i \sum \sum \sum \alpha_n \tilde{h}_n(R_2) {}^0 B_{\lambda mn}^s \vec{N}_{\lambda mn}^T + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n j_n(R_2) \vec{M}_{0ln}^T - i \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \tilde{j}_n(R_2) \vec{N}_{eln}^T = 0 . \end{aligned} \quad (4.73)$$

A equação (4.73) é idêntica a equação (2.53) no caso da esfera lisa condutora e, portanto, têm as mesmas soluções, equações (2.55) e (2.56), que reescrevemos na forma

$${}^0 A_{\lambda mn}^s = \frac{-j_n(R_2)}{h_n(R_2)} \delta_{\lambda, o} \delta_{m, l} \quad (4.74a)$$

$${}^0 B_{\lambda mn}^s = \frac{-\tilde{j}_n(R_2)}{\tilde{h}_n(R_2)} \delta_{\lambda, e} \delta_{m, l} \quad (4.74b)$$

## 4.2.2. - Coeficientes em ordem um - Esfera Rugosa Condutora

Considerando somente os coeficientes de ordem zero não nulos ( ${}^0 A_{0ln}^s$  e  ${}^0 B_{eln}^s$ ) e substituindo as equações (4.68a) e (4.67b) na equação (4.71) obtemos

$$\begin{aligned} & \Sigma \Sigma \Sigma \alpha_{n n} h_n(R_2) {}^1 A_{\lambda mn}^S \vec{M}_{\lambda mn}^T - i \Sigma \Sigma \Sigma \alpha_{n n} \tilde{h}_n(R_2) {}^1 B_{\lambda mn}^S \vec{N}_{\lambda mn}^T + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [j_k^1(R_2) + h_k^1(R_2) {}^0 A_{olk}^S] \delta \vec{M}_{olk}^T + \\ & - i \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [j_k^1(R_2) + \tilde{h}_k^1(R_2) {}^0 B_{elk}^S] \delta \vec{N}_{elk}^T = -i \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [\psi_k(R_2) + \phi_k(R_2) {}^0 B_{elk}^S] |{}^1 \vec{n}^T \vec{N}_{eln}^R \end{aligned} \quad (4.75)$$

As equações para os coeficientes de ordem um  ${}^1 A_{\lambda mn}^S$  e  ${}^1 B_{\lambda mn}^S$  são obtidas fazendo o produto escalar da equação (4.75) por  $\vec{M}_{\lambda mn}^T$  e  $\vec{N}_{\lambda mn}^T$ , respectivamente, e integrando no ângulo sólido com o resultado

$$\begin{aligned} \alpha_{n mn} \beta_{n n} h_n(R_2) {}^1 A_{\lambda mn}^S &= -i \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [a_k^1 \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta \vec{M}_{olk}^T \rangle - i b_k^1 \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta \vec{N}_{elk}^T \rangle + \\ & + i c_k^0 \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | {}^1 \vec{n}^T | N_{elk}^R \rangle] \end{aligned} \quad (4.76a)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{n mn} \beta_{n n} \tilde{h}_n(R_2) {}^1 B_{\lambda mn}^S &= -i \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [a_k^1 \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta \vec{M}_{olk}^T \rangle - i b_k^1 \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta \vec{N}_{elk}^T \rangle + \\ & + i c_k^0 \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | {}^1 \vec{n}^T | N_{elk}^R \rangle] \end{aligned} \quad (4.76b)$$

onde definimos as quantidades

$$a_k^1 = j_k^1(R_2) + h_k^1(R_2) {}^0 A_{olk}^S \quad (4.77a)$$

$$b_k^1 = j_k^1(R_2) + \tilde{h}_k^1(R_2) {}^0 B_{elk}^S \quad (4.77b)$$

$$c_k^0 = \psi_k(R_2) + \phi_k(R_2) {}^0B_{elk}^S \quad (4.77c)$$

A expressão exata destas quantidades, equação (4.77), é obtida no apêndice D.

Definindo

$${}^1E_{\lambda mn}^k = a_k^1 \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{M}_{01k}^T \rangle - ib_k^1 \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{N}_{elk}^T \rangle + ic_k^0 \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | {}^1n^T | \vec{N}_{elk}^R \rangle \quad (4.78a)$$

$${}^1H_{\lambda mn}^k = -[a_k^1 \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{M}_{01k}^T \rangle - ib_k^1 \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{N}_{elk}^T \rangle + ic_k^0 \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | {}^1n^T | \vec{N}_{elk}^R \rangle] \quad (4.78b)$$

obtemos as soluções

$${}^1A_{\lambda mn}^S = \frac{-1}{\alpha_n \beta_{mn} h_n(R_2)} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k {}^1E_{\lambda mn}^k \quad (4.79a)$$

$${}^1B_{\lambda mn}^S = \frac{+1}{\alpha_n \beta_{mn} \bar{h}_n(R_2)} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k {}^1H_{\lambda mn}^k \quad (4.79b)$$

As quantidades  ${}^1E_{\lambda mn}^k$  e  ${}^1H_{\lambda mn}^k$  definidas nas equações (4.78) são calculadas no Apêndice C.

#### 4.2.3. - Coeficientes em ordem dois - Esfera Rugosa Condutora

Substituindo as equações (4.69), (4.68b) e (4.67b)

na equação (4.72), teremos

$$\begin{aligned}
 & \Sigma\Sigma\Sigma\alpha_{n'n} h_{\lambda mn}^2(R_2) A_{\lambda mn}^S \vec{M}_{\lambda mn}^T - i\Sigma\Sigma\Sigma\alpha_{n'n} \tilde{h}_{\lambda mn}^2(R_2) B_{\lambda mn}^S \vec{N}_{\lambda mn}^T + \Sigma\Sigma\Sigma\alpha_{n'n} h_{\lambda'm'n'}^1(R_2) A_{\lambda'm'n'}^S \delta_{\lambda'm'n'}^{\vec{M}^T} + \\
 & -i\Sigma\Sigma\Sigma\alpha_{n'n} \tilde{h}_{\lambda'm'n'}^1(R_2) B_{\lambda'm'n'}^S \delta_{\lambda'm'n'}^{\vec{N}^T} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [j_k^2(R_2) + h_k^2(R_2) A_{olk}^S] \delta_{olk}^{\vec{M}^T} + \\
 & -i \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [j_k^2(R_2) + \tilde{h}_k^2(R_2) B_{elk}^S] \delta_{elk}^{\vec{N}^T} = -i\Sigma\Sigma\Sigma\alpha_{n'n} \phi_{n'}(R_2) B_{\lambda'm'n'}^S \vec{N}_{\lambda'm'n'}^T + \\
 & -i \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [\psi_k^1(R_2) + \phi_k^1(R_2) B_{elk}^S] \delta_{elk}^{\vec{N}^T} + \\
 & -i \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [\psi_k^1(R_2) + \phi_k^1(R_2) B_{elk}^S] \delta_{elk}^{\vec{N}^T} , \tag{4.80}
 \end{aligned}$$

onde os coeficientes  $A_{\lambda mn}^S$ ,  $B_{\lambda mn}^S$ ,  $A_{olk}^S$  e  $B_{elk}^S$  são dados pelas equações (4.79) e (4.74).

Definindo as quantidades

$$a_k^2 = j_k^2(R_2) + h_k^2(R_2) A_{olk}^S \tag{4.81a}$$

$$b_k^2 = \dot{j}_k^2(R_2) + \tilde{h}_k^2(R_2) B_{elk}^S \tag{4.81b}$$

$$c_k^2 = \psi_k^1(R_2) + \phi_k^1(R_2) B_{elk}^S, \tag{4.81c}$$

e fazendo o produto escalar da equação (4.80) pelos vetores  $\vec{M}_{\lambda mn}^T$  e  $\vec{N}_{\lambda mn}^T$ , respectivamente, e integrando no ângulo sólido,

obtemos

$$\begin{aligned}
 a_{n\ mn\ n}^{\beta\ h} (R_2)^2 A_{\lambda mn}^S &= -\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [a_k^2 \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta^2 | \vec{M}_{olk}^T \rangle - i b_k^2 \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta^2 | \vec{N}_{elk}^T \rangle + \\
 &- i(c_k^1 - c_k^0) \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | {}^2 \vec{n}^T | N_{elk}^R \rangle] + \\
 &- \Sigma \Sigma \Sigma \alpha_n [h_n^1 (R_2)^1 A_{\lambda' m' n'}^S \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{M}_{\lambda' m' n'}^T \rangle - i \tilde{n}_n^1 (R_2)^1 B_{\lambda' m' n'}^S \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{N}_{\lambda' m' n'}^T \rangle + \\
 &+ i \phi_n (R_2)^1 B_{\lambda' m' n'}^S \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | {}^1 \vec{n}^T | N_{\lambda' m' n'}^R \rangle] \quad (4.82a)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 a_{n\ mn\ n}^{\beta\ \tilde{h}} (R_2)^2 B_{\lambda mn}^S &= i \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [-a_k^2 \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta^2 | \vec{M}_{olk}^T \rangle + i b_k^2 \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta^2 | \vec{N}_{elk}^T \rangle + \\
 &+ i(c_k^1 - c_k^0) \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | {}^2 \vec{n}^T | N_{elk}^R \rangle] + i \Sigma \Sigma \Sigma \alpha_n [-h_n^1 (R_2)^1 A_{\lambda' m' n'}^S \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{M}_{\lambda' m' n'}^T \rangle + \\
 &+ i \tilde{n}_n^1 (R_2)^1 B_{\lambda' m' n'}^S \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{N}_{\lambda' m' n'}^T \rangle - i \phi_n (R_2)^1 B_{\lambda' m' n'}^S \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | {}^1 \vec{n}^T | N_{\lambda' m' n'}^R \rangle] \quad (4.82b)
 \end{aligned}$$

A partir das definições

$${}^2 E_{\lambda mn}^k = a_k^2 \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta^2 | \vec{M}_{olk}^T \rangle - i b_k^2 \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta^2 | \vec{N}_{elk}^T \rangle - i(c_k^1 - c_k^0) \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | {}^2 \vec{n}^T | N_{elk}^R \rangle \quad (4.83a)$$

$${}^2H_{\lambda mn}^k = -a_k^2 \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta^2 | \vec{M}_{01k}^T \rangle + i b_k^2 \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta^2 | \vec{N}_{elk}^T \rangle + i (c_k^1 - c_k^0) \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | {}^2\vec{n}^T | N_{elk}^R \rangle$$

(4.83b)

e

$${}^2E_{\lambda mn}^{m'n'} = \sum_{\lambda'} [h_n^1(R_2) {}^1A_{\lambda', m'n'}^S \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{M}_{\lambda', m'n'}^T \rangle - i \tilde{n}_n^1(R_2) {}^1B_{\lambda', m'n'}^S \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{N}_{\lambda', m'n'}^T \rangle +$$

$$+ i \phi_{n'}(R_2) {}^1B_{\lambda', m'n'}^S \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | {}^1\vec{n}^T | N_{\lambda', m'n'}^R \rangle]$$

(4.84a)

$${}^2H_{\lambda mn}^{m'n'} = \sum_{\lambda'} [-h_n^1(R_2) {}^1A_{\lambda', m'n'}^S \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{M}_{\lambda', m'n'}^T \rangle + i \tilde{n}_n^1(R_2) {}^1B_{\lambda', m'n'}^S \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{N}_{\lambda', m'n'}^T \rangle +$$

$$- i \phi_{n'}(R_2) {}^1B_{\lambda', m'n'}^S \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | {}^1\vec{n}^T | N_{\lambda', m'n'}^R \rangle]$$

(4.84b)

as soluções para os coeficientes em ordem dois podem ser escritas na forma

$${}^2A_{\lambda mn}^S = \frac{-1}{\alpha_n \beta_{mn} \tilde{h}_n(R_2)} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 E_{\lambda mn}^k + \sum_{n', m'} \alpha_{n'}^2 E_{\lambda mn}^{m'n'} \right]$$

(4.85a)

$${}^2B_{\lambda mn}^S = \frac{i}{\alpha_n \beta_{mn} \tilde{h}_n(R_2)} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 H_{\lambda mn}^k + \sum_{n', m'} \alpha_{n'}^2 H_{\lambda mn}^{m'n'} \right]$$

(4.85b)

As quantidades definidas na equação (4.81) são calculadas no Apêndice D. No Apêndice C determinamos a média estatística

tica das quantidades definidas nas equações (4.83) e (4.84), o que nos permite obter o valor médio dos coeficientes de ordem dois para a esfera condutora.

Os resultados formais obtidos neste Capítulo são exatos até segunda ordem em  $\delta$  e podem ser aplicados para esferas com rugosidade estatística ou determinística. No primeiro caso só interessa os valores médios das grandezas físicas que descrevem o espalhamento e para isso necessita-se dos valores médios dos coeficientes de ordem dois e de todos os produtos possíveis entre coeficientes de ordem um. No último caso usa-se diretamente as fórmulas desenvolvidas neste Capítulo com o perfil da rugosidade conhecido. Em particular pode-se aplicar este formalismo para estudar o espalhamento em esferoides<sup>(8)</sup> cujas excentricidades sejam pequenas o suficiente para que termos de ordens maiores possam ser desprezados. No próximo Capítulo aplicaremos os resultados deste para a rugosidade estatística descrita no Capítulo III.

## C A P Í T U L O V

### MATRIZ DE ESPALHAMENTO E SEÇÃO DE CHOQUE DE UMA ESFERA RUGOSA

Neste Capítulo aplicaremos os resultados do Capítulo IV e Apêndice A para obter os valores médios da seção de choque e elementos da matriz de espalhamento da esfera rugosa até termos da ordem de  $\delta_{rms}^2 / R^2$ . Embora os resultados obtidos tenham validade geral, expressões analíticas simples para a seção de choque e matriz de espalhamento serão obtidas no limite de espalhamento Rayleigh ( $\lambda \gg R$ ) que é o nosso interesse neste trabalho.

No espalhamento por uma esfera lisa (Espalhamento de Mie) desenvolvido no Capítulo II, determinamos os elementos da matriz de espalhamento a partir do campo espalhado para uma única polarização incidente (polarização x), devido a simetria esférica do problema. No espalhamento por uma esfera rugosa não temos, a priori, uma simetria esférica e portanto, para a determinação da matriz de espalhamento se faz necessário obter os campos espalhados para duas polarizações incidentes, x e y. No Capítulo IV determinamos os coeficientes do campo espalhado para uma polarização incidente no eixo x até segunda ordem em  $k$  e no apêndice A determinamos os coeficientes do campo espalhado para uma polarização incidente no eixo y. A partir dessas soluções podemos obter os elementos da matriz de espalhamento da esfera rugosa e, só então, tomaremos a média estatística restaurando a simetria esférica do sistema mas mantendo os efeitos da rugosidade.

Na zona de radiação ( $k_2 r \rightarrow \infty$ ) os campos elétricos espalhados devido às polarizações incidentes no eixo  $x$  e  $y$  são, respectivamente.

$$\vec{E}_s^x \approx i \frac{e^{ik_2 r}}{k_2 r} \vec{F}^x(\theta, \phi) \approx i \frac{e^{ik_2 r}}{k_2 r} \sum_{\lambda} \sum_n \sum_m \frac{-(2n+1)}{n(n+1)} [A_{\lambda mn}^x \vec{M}_{\lambda mn}^{\dagger} + B_{\lambda mn}^x \vec{N}_{\lambda mn}^{\dagger}] ,$$

(5.1a)

$$\vec{E}_s^y \approx i \frac{e^{ik_2 r}}{k_2 r} \vec{F}^y(\theta, \phi) \approx i \frac{e^{ik_2 r}}{k_2 r} \sum_{\lambda} \sum_n \sum_m \frac{(2n+1)}{n(n+1)} [A_{\lambda mn}^y \vec{M}_{\lambda mn}^{\dagger} - B_{\lambda mn}^y \vec{N}_{\lambda mn}^{\dagger}] ,$$

(5.1b)

onde redefinimos a notação para especificar a polarização incidente, de modo que  $(A_{\lambda mn}^x, B_{\lambda mn}^x) = (A_{\lambda mn}^S, B_{\lambda mn}^S)$  para a polarização incidente no eixo  $x$  e  $(A_{\lambda mn}^y, B_{\lambda mn}^y) = (A_{\lambda mn}^S, B_{\lambda mn}^S)$  para a polarização no eixo  $y$ . Os coeficientes referentes a polarização  $x$ ,  $A_{\lambda mn}^x$  e  $B_{\lambda mn}^x$ , são dados até segunda ordem em  $\delta$  pelas equações (4.40), (4.48) e (4.57) e os coeficientes referentes a polarização  $y$ ,  $A_{\lambda mn}^y$  e  $B_{\lambda mn}^y$ , são dados pelas equações (A.10), (A.13) e (A.17). Nas equações (5.1),  $\vec{F}^x(\theta, \phi)$  e  $\vec{F}^y(\theta, \phi)$  são os vetores amplitude de espalhamento, equação (2.59), referentes às polarizações  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Na zona de radiação, as componentes do campo elétrico espalhado paralela e perpendicular ao plano de espalhamento estão relacionadas com as componentes  $E_x$  e  $E_y$  do campo incidente através da matriz de amplitude de espalhamento dada na equação (2.73), que podemos escrever na forma

$$\begin{bmatrix} F_{\theta} \\ F_{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_2 & S_3 \\ S_4 & S_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \cos\phi + E_y \sin\phi \\ -E_x \sin\phi + E_y \cos\phi \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

onde substituímos as equações (2.60) e (2.76) na equação (2.73).

Se o campo incidente tem polarização x de modo que  $E_x = 1$  e  $E_y = 0$  obtemos da equação (5.2)

$$F_{\theta}^x = S_2 \cos\phi - S_3 \sin\phi \quad (5.3a)$$

$$F_{\phi}^x = S_4 \cos\phi - S_1 \sin\phi \quad (5.3b)$$

onde  $F_{\theta}^x$  e  $F_{\phi}^x$  são as componentes do vetor amplitude de espalhamento referentes à polarização x e podem ser obtidas da equação (5.1a) na forma

$$F_{\theta}^x = \sum_{\lambda} \sum_n \sum_m - \frac{(2n+1)}{n(n+1)} [A_{\lambda mn}^x \vec{M}_{\lambda mn}^T \cdot \hat{e}_{\theta} + B_{\lambda mn}^x \vec{N}_{\lambda mn}^T \cdot \hat{e}_{\theta}], \quad (5.4a)$$

$$F_{\phi}^x = \sum_{\lambda} \sum_n \sum_m - \frac{(2n+1)}{n(n+1)} [A_{\lambda mn}^x \vec{M}_{\lambda mn}^T \cdot \hat{e}_{\phi} + B_{\lambda mn}^x \vec{N}_{\lambda mn}^T \cdot \hat{e}_{\phi}]. \quad (5.4b)$$

Se o campo incidente é polarizado no eixo y de modo que  $E_x = 0$  e  $E_y = 1$ , temos da equação (5.2)

$$F_{\theta}^y = S_2 \sin\phi + S_3 \cos\phi, \quad (5.5a)$$

$$F_{\phi}^y = S_4 \sin\phi + S_1 \cos\phi, \quad (5.5b)$$

onde  $F_{\theta}^Y$  e  $F_{\phi}^Y$  são as componentes do vetor amplitude de espalhamento referentes à polarização y e são obtidas da equação (5.16) na forma

$$F_{\theta}^Y = \sum \sum \sum \frac{(2n+1)}{n(n+1)} [A_{\lambda mn}^Y \vec{M}_{\lambda mn}^T \cdot \hat{e}_{\theta} - B_{\lambda mn}^Y \vec{N}_{\lambda mn}^T \cdot \hat{e}_{\theta}] , \quad (5.6a)$$

$$F_{\phi}^Y = \sum \sum \sum \frac{(2n+1)}{n(n+1)} [A_{\lambda mn}^Y \vec{M}_{\lambda mn}^T \cdot \hat{e}_{\phi} - B_{\lambda mn}^Y \vec{N}_{\lambda mn}^T \cdot \hat{e}_{\phi}] . \quad (5.6b)$$

A partir das equações (5.3) e (5.5), obtemos

$$S_1 = -F_{\phi}^X \text{sen} \phi + F_{\phi}^Y \text{cos} \phi , \quad (5.7a)$$

$$S_2 = F_{\theta}^X \text{cos} \phi + F_{\theta}^Y \text{sen} \phi , \quad (5.7b)$$

$$S_3 = -F_{\theta}^X \text{sen} \phi + F_{\theta}^Y \text{cos} \phi , \quad (5.7c)$$

$$S_4 = F_{\phi}^X \text{cos} \phi + F_{\phi}^Y \text{sen} \phi . \quad (5.7d)$$

Os valores médios dos elementos da matriz de espalhamento são obtidos substituindo a equação (5.7) na equação (2.79) e tomando a média estatística do resultado. Assim, teremos

$$\overline{S_{11}} = \frac{1}{2} (|\overline{F_{\theta}^x}|^2 + |\overline{F_{\phi}^x}|^2 + |\overline{F_{\theta}^y}|^2 + |\overline{F_{\phi}^y}|^2),$$

$$\begin{aligned} \overline{S_{12}} &= \frac{1}{2} [|\overline{F_{\theta}^x}|^2 + |\overline{F_{\phi}^x}|^2 - |\overline{F_{\theta}^y}|^2 - |\overline{F_{\phi}^y}|^2] \cos 2\phi + \\ &+ \operatorname{Re} [\overline{F_{\theta}^x F_{\theta}^{y*}} + \overline{F_{\phi}^x F_{\phi}^{y*}}] \sin 2\phi, \end{aligned}$$

(5.8)

$$\overline{S_{21}} = \frac{1}{2} [|\overline{F_{\theta}^x}|^2 - |\overline{F_{\phi}^x}|^2 + |\overline{F_{\theta}^y}|^2 - |\overline{F_{\phi}^y}|^2],$$

$$\begin{aligned} \overline{S_{22}} &= \frac{1}{2} [|\overline{F_{\theta}^x}|^2 - |\overline{F_{\phi}^x}|^2 - |\overline{F_{\theta}^y}|^2 + |\overline{F_{\phi}^y}|^2] \cos 2\phi + \\ &+ \operatorname{Re} [\overline{F_{\theta}^x F_{\theta}^{y*}} - \overline{F_{\phi}^x F_{\phi}^{y*}}] \sin 2\phi \end{aligned}$$

e

$$\overline{S_{33}} = -\operatorname{Re} (\overline{F_{\theta}^x F_{\phi}^{x*}} - \overline{F_{\theta}^y F_{\phi}^{y*}}) \sin 2\phi + \operatorname{Re} (\overline{F_{\theta}^x F_{\phi}^{y*}} + \overline{F_{\phi}^x F_{\theta}^{y*}}) \cos 2\phi,$$

$$\overline{S_{34}} = \operatorname{Im} (\overline{F_{\theta}^x F_{\phi}^{y*}} + \overline{F_{\phi}^x F_{\theta}^{y*}}), \quad (5.9)$$

$$\overline{S_{43}} = \operatorname{Im} (\overline{F_{\phi}^x F_{\theta}^{x*}} - \overline{F_{\theta}^y F_{\phi}^{y*}}) \sin 2\phi - \operatorname{Im} (\overline{F_{\theta}^x F_{\phi}^{y*}} - \overline{F_{\phi}^x F_{\theta}^{y*}}) \cos 2\phi,$$

$$\overline{S_{44}} = \operatorname{Re} (\overline{F_{\theta}^x F_{\phi}^{y*}} - \overline{F_{\phi}^x F_{\theta}^{y*}})$$

e

$$\begin{aligned} \overline{S_{13}} &= \frac{1}{2} (|\overline{F_{\theta}^x}|^2 + |\overline{F_{\phi}^x}|^2 - |\overline{F_{\theta}^y}|^2 - |\overline{F_{\phi}^y}|^2) \operatorname{sen} 2\phi + \\ &- \operatorname{Re}(\overline{F_{\theta}^x F_{\theta}^y} + \overline{F_{\phi}^x F_{\phi}^y}) \cos 2\phi, \end{aligned}$$

$$\overline{S_{14}} = -\operatorname{Im}(\overline{F_{\theta}^x F_{\theta}^y} + \overline{F_{\phi}^x F_{\phi}^y}),$$

(5.10)

$$\begin{aligned} \overline{S_{23}} &= \frac{1}{2} (|\overline{F_{\theta}^x}|^2 - |\overline{F_{\phi}^x}|^2 - |\overline{F_{\theta}^y}|^2 + |\overline{F_{\phi}^y}|^2) \operatorname{sen} 2\phi + \\ &- \operatorname{Re}(\overline{F_{\theta}^x F_{\theta}^y} - \overline{F_{\phi}^x F_{\phi}^y}) \cos 2\phi, \end{aligned}$$

$$\overline{S_{24}} = -\operatorname{Im}(\overline{F_{\theta}^x F_{\theta}^y} - \overline{F_{\phi}^x F_{\phi}^y})$$

e

$$\overline{S_{31}} = \operatorname{Re}(\overline{F_{\theta}^x F_{\phi}^y} + \overline{F_{\theta}^y F_{\phi}^x}),$$

(5.11)

$$\overline{S_{32}} = \operatorname{Re}(\overline{F_{\theta}^x F_{\phi}^x} - \overline{F_{\theta}^y F_{\phi}^y}) \cos 2\phi + \operatorname{Re}(\overline{F_{\theta}^x F_{\phi}^y} + \overline{F_{\phi}^x F_{\theta}^y}) \operatorname{sen} 2\phi,$$

$$\overline{S_{41}} = -\operatorname{Im}(\overline{F_{\theta}^x F_{\phi}^x} + \overline{F_{\theta}^y F_{\phi}^y}),$$

$$\overline{S_{42}} = -\operatorname{Im}(\overline{F_{\theta}^x F_{\phi}^x} - \overline{F_{\theta}^y F_{\phi}^y}) \cos 2\phi - \operatorname{Im}(\overline{F_{\theta}^x F_{\phi}^y} - \overline{F_{\phi}^x F_{\theta}^y}) \operatorname{sen} 2\phi.$$

A média estatística das seções de choque com polarizações incidentes paralela e perpendicular ao plano de espalha

mento, equações (2.69a) e (2.69b), será

$$\begin{aligned} \overline{\sigma_{\parallel}} = & \frac{1}{k_2^2} \{ (|F_{\theta}^x|^2 + |F_{\phi}^x|^2) \cos^2 \phi + (|F_{\theta}^y|^2 + |F_{\phi}^y|^2) \sin^2 \phi + \\ & + \operatorname{Re}(F_{\theta}^x F_{\theta}^y{}^* + F_{\phi}^x F_{\phi}^y{}^*) \sin^2 \phi \} , \end{aligned} \quad (5.12a)$$

$$\begin{aligned} \overline{\sigma_{\perp}} = & \frac{1}{k_2^2} \{ (|F_{\theta}^x|^2 + |F_{\phi}^x|^2) \sin^2 \phi + (|F_{\theta}^y|^2 + |F_{\phi}^y|^2) \cos^2 \phi + \\ & - \operatorname{Re}(F_{\theta}^x F_{\theta}^y{}^* + F_{\phi}^x F_{\phi}^y{}^*) \sin^2 \phi \} , \end{aligned} \quad (5.12b)$$

A média estatística das seções de choque com polarizações cruzadas, equações (2.70b) e (2.71a), será

$$\overline{\sigma_{\parallel\phi}} = \frac{1}{k_2^2} \{ |F_{\phi}^x|^2 \cos^2 \phi + |F_{\phi}^y|^2 \sin^2 \phi + \operatorname{Re}(F_{\phi}^x F_{\phi}^y{}^*) \sin^2 \phi \} , \quad (5.13a)$$

$$\overline{\sigma_{\perp\theta}} = \frac{1}{k_2^2} \{ |F_{\theta}^x|^2 \sin^2 \phi + |F_{\theta}^y|^2 \cos^2 \phi - \operatorname{Re}(F_{\theta}^x F_{\theta}^y{}^*) \sin^2 \phi \} . \quad (5.13b)$$

e para as seções de choque com mesma polarização incidente e espalhada, teremos

$$\overline{\sigma_{\parallel\theta}} = \frac{1}{k_2^2} \{ |F_\theta^x|^2 \cos^2 \phi + |F_\theta^y|^2 \sin^2 \phi + \operatorname{Re}(F_\theta^x F_\theta^y) \sin^2 \phi \},$$

(5.14a)

$$\overline{\sigma_{\perp\phi}} = \frac{1}{k_2^2} \{ |F_\phi^x|^2 \sin^2 \phi + |F_\phi^y|^2 \cos^2 \phi - \operatorname{Re}(F_\phi^x F_\phi^y) \sin^2 \phi \}.$$

(5.14b)

As equações (5.8) a (5.14) envolvem os valores médios de todos os tipos de produtos entre os coeficientes  $A_{\lambda mn}^x$ ,  $B_{\lambda mn}^x$ ,  $A_{\lambda mn}^y$  e  $B_{\lambda mn}^y$  e seus complexos conjugados com índices independentes. Estas equações têm validade geral seja para a esfera rugosa, seja para um conjunto de espalhadores distribuídos aleatoriamente. Considerações de simetria mostram<sup>(18)</sup> que se o espalhador ou conjunto de espalhadores tem simetria esférica os dois blocos de elementos da matriz de espalhamento, equações (5.10) e (5.11), seriam nulos. Como no nosso sistema a simetria é restaurada ao serem tomados os valores médios, os dois blocos da matriz de espalhamento, equações (5.10) e (5.11) são nulos independentemente do comprimento da onda incidente e da ordem de grandeza em  $\delta$  em que são calculados os coeficientes. No nosso caso isso poderia ser verificado diretamente a partir da relação entre os coeficientes do campo espalhado para a polarização y com os da polarização x. Essa relação pode ser obtida girando-se a esfera rugosa ( $\phi \rightarrow \phi - \pi/2$ ), obtendo-se a solução na polarização x e fazendo  $\phi \rightarrow \phi - \pi/2$  nesta so-

lução.

Se  $C_{\lambda mn}$  representa um dos coeficientes  $A_{\lambda mn}^{x,y}$  ou  $B_{\lambda mn}^{x,y}$  e  $C_{\lambda' m' n'}^{i*}$  o complexo conjugado de um outro destes coeficientes com índices diferentes, então o valor médio do produto  $C_{\lambda mn} C_{\lambda' m' n'}^{i*}$  até segunda ordem em  $\delta_{rms}^2$  será da forma

$$C_{\lambda mn} C_{\lambda' m' n'}^{i*} = \overline{(C_{\lambda mn}^0 C_{\lambda' m' n'}^{i*0})} + \overline{(C_{\lambda mn}^1 C_{\lambda' m' n'}^{i*1})} + \overline{(C_{\lambda mn}^2 C_{\lambda' m' n'}^{i*2} + C_{\lambda' m' n'}^{i*2} C_{\lambda mn}^2)} \quad (5.15)$$

Os coeficientes em ordem zero não nulos são  $A_{0ln}^x$ ,  $B_{eln}^x$ ,  $A_{eln}^y$  e  $B_{0ln}^y$  onde  $A_{eln}^y = A_{0ln}^x$  e  $B_{0ln}^y = B_{eln}^x$  conforme as equações (4.40) e (A.10). Desse modo o primeiro termo no lado direito da equação (5.15) geram os mesmos resultados obtidos no Capítulo II no espalhamento de Mie, uma vez que a rugosidade não aparece em ordem zero. O valor médio dos coeficientes de segunda ordem está determinado no Apêndice C, equações (C.13) e (C.14). As médias não nulas são  $A_{0ln}^x$ ,  $B_{eln}^x$ ,  $A_{eln}^y$  e  $B_{0ln}^y$  onde  $A_{eln}^y = A_{0ln}^x$  e  $B_{0ln}^y = B_{eln}^x$ . Desse modo, os produtos ordem zero com ordem dois, geram um espalhamento coerente com o espalhamento de Mie, ainda que as contribuições relativas em duas direções quaisquer possam ser diferentes. Os produtos envolvendo os coeficientes de ordem um com ordem um são, em geral, diferentes de zero para quaisquer índices e, portanto, produzem um espalhamento incoerente, com distribuição angular diferente do espalhamento de Mie. A partir da equação (5.15) as seções de choque e os elementos da

matriz de espalhamento podem ser escritas na forma

$$\sigma = {}^{02}\sigma + {}^{11}\sigma \quad (5.16a)$$

$$S_{ij} = {}^{02}S_{ij} + {}^{11}S_{ij} \quad (5.16b)$$

onde o primeiro termo no lado direito das equações (5.16) corresponde ao espalhamento de Mie (ordem zero com ordem zero) acrescido do espalhamento coerente (ordem zero com ordem dois) e o segundo termo corresponde ao espalhamento incoerente (ordem um com ordem um).

A partir do valor médio dos coeficientes de ordem dois, equações (C.13) e (C.14), e da solução para os coeficientes em ordem um, equações (4.48) e (A.13), podemos obter o valor médio da seção de choque e da matriz de espalhamento para qualquer faixa de comprimento de onda incidente. Para comprimentos de onda pequenos comparados com o raio da esfera a convergência das séries que expressam a seção de choque e matriz de espalhamento da esfera rugosa é lenta e por isso uma análise nessa região de comprimento de onda deverá ser feita numericamente. Entretanto para a região de comprimento de onda grande comparado ao raio médio da esfera rugosa (espalhamento Rayleigh), expressões analíticas simples para estas grandezas podem ser derivadas.

### 5.1. - Espalhamento Rayleigh

Nesta seção vamos considerar o espalhamento pela esfe

ra rugosa no limite  $\lambda \gg R$  (espalhamento Rayleigh), de modo que a seção de choque e a matriz de espalhamento serão obtidas na potência mais baixa de  $R_2$  ( $R_2 = 2\pi R/\lambda$ ), conforme fizemos no Capítulo II para a esfera lisa. No limite  $R_2 \rightarrow 0$  os coeficientes de ordem zero, ordem um e o valor médio dos coeficientes de ordem dois para as polarizações  $x$  e  $y$  das esferas dielétrica ou condutora são calculados no Apêndice E.

### 5.1.1. - Esfera Rugosa Dielétrica

Na potência mais baixa de  $R_2$  os coeficientes, do campo espalhado devido às polarizações incidentes  $x$  e  $y$ , de ordem zero, ordem um e ordem dois referentes a esfera rugosa dielétrica são dados respectivamente pelas equações (E.3), (E.7b e 8b) e (E.16b), de modo que

$${}^0_{B_{eln}}{}^x = {}^0_{B_{oll}}{}^y = i \frac{2R_2^3}{3} \frac{N^2 - 1}{N^2 + 2} \quad (5.17a)$$

e

$${}^1B_{e11}^x = \frac{2iR_2^3}{R} \frac{N^2-1}{N^2+2} \left[ R_{00} \frac{-1}{5} \frac{N^2-1}{N^2+2} (R_{20} - 6R_{22}) \right]$$

$${}^1B_{e01}^x = \frac{2iR_2^3}{R} \frac{N^2-1}{N^2+2} \left[ \frac{3}{5} \frac{N^2-1}{N^2+2} R_{21} \right],$$

$${}^1B_{o11}^x = \frac{2iR_2^3}{R} \frac{N^2-1}{N^2+2} \left[ \frac{6}{5} \frac{N^2-1}{N^2+2} S_{22} \right],$$

(5.17b)

$${}^1B_{o11}^y = \frac{2iR_2^3}{R} \frac{N^2-1}{N^2+2} \left[ R_{00} - \frac{1}{5} \frac{N^2-1}{N^2+2} (R_{20} + 6R_{22}) \right],$$

$${}^1B_{e01}^y = \frac{2iR_2^3}{R} \frac{N^2-1}{N^2+2} \left[ \frac{3}{5} \frac{N^2-1}{N^2+2} S_{21} \right]$$

$${}^1B_{e11}^y = \frac{2iR_2^3}{R} \frac{N^2-1}{N^2+2} \left[ \frac{6}{5} \frac{N^2-1}{N^2+2} S_{22} \right]$$

e

$$\overline{{}^2B_{e11}^x} = \overline{{}^2B_{o11}^y} = 2iR_2^3 \frac{N^2-1}{N^2+2} (\delta_{rms}^2 / R^2) \left[ g_0 + \frac{7g_1}{10} + \sum_{\ell=2}^{\infty} g_{\ell} B_{\ell} \right]$$

(5.17c)

onde  $B_{\ell}$  é dado pela equação (E.17). Os coeficientes  ${}^0A_{\lambda mn}^{x,y}$ ,  ${}^1A_{\lambda mn}^{x,y}$  e  ${}^2A_{\lambda mn}^{x,y}$  não serão considerados por serem de ordem superior em  $R_2$ .

Substituindo as equações (5.17) nas equações (5.4) e (5.6) podemos obter as componentes do vetor amplitude de espalhamento para as polarizações x e y na forma

$$\begin{aligned}
F_{\theta}^x \approx & -iR_2^3 \frac{N^2-1}{N^2+2} \left\{ [1+3(\delta_{\text{rms}}^2/R^2)(g_0+7g_1/10 + \sum_{\ell=2}^{\infty} g_{\ell} B_{\ell})] \cos\theta \cos\phi \right\} + \\
& - \frac{iR_2^3}{R} \frac{N^2-1}{N^2+2} \left\{ 3[R_{00} \cos\theta \cos\phi - \frac{1}{5} \frac{N^2-1}{N^2+2} (R_{20} \cos\theta \cos\phi - 6R_{22} \cos\theta \cos\phi + \right. \\
& \left. - 6S_{22} \cos\theta \sin\phi + 3R_{21} \sin\theta)] \right\}, \quad (5.18a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{\phi}^x \approx & iR_2^3 \frac{N^2-1}{N^2+2} \left\{ [1+3(\delta_{\text{rms}}^2/R^2)(g_0+7g_1/10 + \sum_{\ell=2}^{\infty} g_{\ell} B_{\ell})] \sin\phi \right\} + \\
& + \frac{iR_2^3}{R} \frac{N^2-1}{N^2+2} \left\{ 3[R_{00} \sin\phi - \frac{1}{5} \frac{N^2-1}{N^2+2} (R_{20} \sin\phi - 6R_{22} \sin\phi + 6S_{22} \cos\phi)] \right\} \\
& \quad (5.18b)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
F_{\theta}^y \approx & -iR_2^3 \frac{N^2-1}{N^2+2} \left\{ [1+3(\delta_{\text{rms}}^2/R^2)(g_0+7g_1/10 + \sum_{\ell=2}^{\infty} g_{\ell} B_{\ell})] \cos\phi \sin\theta \right\} + \\
& - \frac{iR_2^3}{R} \frac{N^2-1}{N^2+2} \left\{ 3[R_{00} \cos\theta \sin\phi - \frac{1}{5} \frac{N^2-1}{N^2+2} (R_{20} \cos\theta \sin\phi + 6R_{22} \cos\theta \sin\phi + \right. \\
& \left. - 6S_{22} \cos\theta \cos\phi + 3S_{21} \sin\phi)] \right\}, \quad (5.19a)
\end{aligned}$$

$$F_{\phi}^y \approx -iR_2^3 \frac{N^2-1}{N^2+2} \{ [1+3(\delta_{rms}^2/R^2)(g_0+7g_1/10 + \sum g_{\ell} B_{\ell}) \cos \phi] +$$

$$- \frac{iR_2^3}{R} \frac{N^2-1}{N^2+2} \{ 3[R_{00} \cos \phi - \frac{1}{5} \frac{N^2-1}{N^2+2} (R_{20} \cos \phi + 6R_{22} \cos \phi + 6S_{22} \sin \phi)] \}$$

(5.19b)

onde usamos a equação (2.18) para obter as componentes  $\theta$  e  $\phi$  dos vetores  $\vec{M}_{o11}^T$ ,  $\vec{N}_{e11}^T$ ,  $\vec{M}_{e01}^T$  e  $\vec{N}_{o01}^T$ .

O primeiro termo das equações (5.18) e (5.19) produzirá o espalhamento de Mie (de ordem  $(\delta_{rms}/R)^0$ ) acrescido do espalhamento coerente (de ordem  $(\delta_{rms}/R)^2$ ) e o segundo termo é responsável pelo espalhamento incoerente (de ordem  $(\delta_{rms}/R)^2$ ), sendo nulos quaisquer produtos entre esses dois termos pois  $\overline{R_{\ell m}}$  e  $\overline{S_{\ell m}}$  são nulos, equação (3.12). Substituindo o primeiro termo das equações (5.18) e (5.19) nas equações (5.8) a (5.11) e tomando a média estatística, obtemos os elementos não nulos da matriz de espalhamento referentes a esfera lisa mais a correção coerente da rugosidade

$$\overline{{}^0S_{11}} = \overline{{}^0S_{22}} = R_2^6 \left| \frac{N^2-1}{N^2+2} \right|^2 \{ 1+6(\delta_{rms}^2/R^2) [g_0+7g_1/10 + \sum_{\ell=2}^{\infty} g_{\ell} \text{Re}(B_{\ell})] \} \times$$

$$\times \left[ \frac{1}{2} (1+\cos^2 \theta) \right], \quad (5.20a)$$

$$\overline{{}^0S_{12}} = \overline{{}^0S_{21}} = R_2^6 \left| \frac{N^2-1}{N^2+2} \right|^2 \{ 1+6(\delta_{rms}^2/R^2) [g_0+7g_1/10 + \sum_{\ell=2}^{\infty} g_{\ell} \text{Re}(B_{\ell})] \} \times$$

$$\times \left[ -\frac{1}{2} (1-\cos^2 \theta) \right], \quad (5.20b)$$

$$\overline{02S_{33}} = \overline{02S_{44}} = R_2^6 \left| \frac{N^2-1}{N^2+2} \right|^2 \left\{ 1 + 6(\delta_{\text{rms}}^2/R^2) [g_0 + 7g_1/10 + \sum_{\ell=2}^{\infty} g_{\ell} \text{Re}(B_{\ell})] \right\} \times$$

$$\times [\cos\theta], \quad (5.20c)$$

onde  $\text{Re}(B_{\ell})$  é a parte real de  $B_{\ell}$ .

Substituindo o segundo termo das equações (5.18) e (5.19) nas equações (5.8) a (5.11) e usando os valores médios dos produtos  $R_{\ell m} R_{\ell' m'}$ ,  $S_{\ell m} S_{\ell' m'}$  dados na equação (3.14), obtemos os elementos não nulos da matriz de espalhamento referentes a correção incoerente da rugosidade na forma

$$\overline{11S_{11}} = 9(\delta_{\text{rms}}^2/R^2) R_2^6 \left| \frac{N^2-1}{N^2+2} \right|^2 \left\{ g_0 + \frac{7g_2}{25} \left| \frac{N^2-1}{N^2+2} \right|^2 \right\} \left[ \frac{1}{2} (1 + \cos^2\theta) \right] +$$

$$+ 9(\delta_{\text{rms}}^2/R^2) R_2^6 \left| \frac{N^2-1}{N^2+2} \right|^2 \left\{ \frac{6g_2}{25} \left| \frac{N^2-1}{N^2+2} \right|^2 \right\} \left[ \frac{1}{2} (1 - \cos^2\theta) \right]$$

$$(5.21a)$$

$$\overline{11S_{22}} = 9(\delta_{\text{rms}}^2/R^2) R_2^6 \left| \frac{N^2-1}{N^2+2} \right|^2 \left\{ g_0 + \frac{7g_2}{25} \left| \frac{N^2-1}{N^2+2} \right|^2 \right\} \left[ \frac{1}{2} (1 + \cos^2\theta) \right]$$

$$(5.21b)$$

$$\overline{11S_{12}} = \overline{11S_{21}} = 9(\delta_{\text{rms}}^2/R^2) R_2^6 \left| \frac{N^2-1}{N^2+2} \right|^2 \left\{ g_0 + \frac{g_2}{25} \left| \frac{N^2-1}{N^2+2} \right|^2 \right\} \left[ -\frac{1}{2} (1 - \cos^2\theta) \right],$$

$$(5.21c)$$

$$\overline{11S_{33}} = 9(\delta_{\text{rms}}^2/R^2) R_2^6 \left| \frac{N^2-1}{N^2+2} \right|^2 \left\{ g_0 + \frac{g_2}{25} \left| \frac{N^2-1}{N^2+2} \right|^2 \right\} [-\cos\theta],$$

$$(5.21d)$$

$${}^{11}S_{44} = 9(\delta_{\text{rms}}^2/R^2)R_2^6 \left| \frac{N^2-1}{N^2+2} \right|^2 \left\{ g_0 - \frac{5g_2}{25} \left| \frac{N^2-1}{N^2+2} \right|^2 \right\} [\cos\theta],$$

(5.21e)

Com os resultados obtidos nas equações (5.20) e (5.21) a matriz de espalhamento da esfera rugosa dielétrica pode ser escrita na forma:

$$S = R_2^6 \left| \frac{N^2-1}{N^2+2} \right|^2 \left\{ 1 + 15(\delta_{\text{rms}}^2/R^2) \left[ g_0 + \frac{14}{50} g_1 + \frac{2}{5} \sum_{\ell=2}^{\infty} g_{\ell} \text{Re}(B_{\ell}) \right] \right\} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+\cos^2\theta) & -\frac{1}{2}(1-\cos^2\theta) & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}(1-\cos^2\theta) & \frac{1}{2}(1+\cos^2\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} + R_2^6 (\delta_{\text{rms}}^2/R^2) \left| \frac{N^2-1}{N^2+2} \right|^4 \frac{9g_2}{25} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(13+\cos^2\theta) & -\frac{1}{2}(1-\cos^2\theta) & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}(1-\cos^2\theta) & \frac{1}{2}(1+\cos^2\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5\cos\theta \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

As seções de choque paralela e perpendicular podem ser obtidas substituindo as equações (5.18) e (5.19) nas equações (5.12) e considerando a média estatística dos produtos  $R_{\ell m} R_{\ell' m'}$ ,

$S_{\ell m} S_{\ell' m'}$  e  $S_{\ell m}^R S_{\ell' m'}$ , equações (3.14) de modo que

$$\begin{aligned} \overline{\sigma_{\parallel}} = & \frac{R_2^6}{k_2^2} \left| \frac{N^2-1}{N^2+2} \right|^2 \{ 1 + 15 (\delta_{\text{rms}}^2 / R^2) [g_0 + 14g_1/50 + \frac{3g_2}{125} \left| \frac{N^2-1}{N^2+2} \right|^2 + \\ & + \frac{2}{5} \sum_{\ell=0}^{\infty} g_{\ell} \text{Re}(B_{\ell})] \} [\cos^2 \theta] + \frac{R_2^6}{k_2^2} (\delta_{\text{rms}}^2 / R^2) \frac{54g_2}{25} \left| \frac{N^2-1}{N^2+2} \right|^4 \end{aligned} \quad (5.23a)$$

$$\overline{\sigma_{\perp}} = \frac{R_2^6}{k_2^2} \left| \frac{N^2-1}{N^2+2} \right|^2 \{ 1 + 15 (\delta_{\text{rms}}^2 / R^2) [g_0 + \frac{14g_1}{50} + \frac{21}{125} g_2 \left| \frac{N^2-1}{N^2+2} \right|^2 + \frac{2}{5} \sum_{\ell} g_{\ell} \text{Re}(B_{\ell})] \} \quad (5.23b)$$

As seções de choque com polarizações cruzadas são obtidas das equações (5.13) com o resultado

$$\overline{\sigma_{\parallel\phi}} = \overline{\sigma_{\perp\theta}} = \frac{R_2^6}{k_2^2} \left| \frac{N^2-1}{N^2+2} \right|^4 (\delta_{\text{rms}}^2 / R^2) \frac{27g_2}{25} \quad (5.24)$$

e as seções de choque com mesma polarização incidente e espalhada, equações (5.14), são

$$\begin{aligned} \overline{\sigma_{\parallel\theta}} = & \frac{R_2^6}{k_2^2} \left| \frac{N^2-1}{N^2+2} \right|^2 \frac{1}{2} \{ 1 + 15 (\delta_{\text{rms}}^2 / R^2) [g_0 + \frac{14g_1}{50} + \frac{3g_2}{125} \left| \frac{N^2-1}{N^2+2} \right|^2 + \\ & + \frac{2}{5} \sum_{\ell=0}^{\infty} g_{\ell} \text{Re}(B_{\ell})] \} \end{aligned} \quad (5.25a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\perp\phi}}{k_2} = & \frac{R_2^6}{2} \left| \frac{N^2-1}{N^2+2} \right|^2 \left\{ 1 + 15 \left( \delta_{\text{rms}}^2 / R^2 \right) \left[ g_0 + \frac{14g_1}{50} + \frac{3g_2}{125} \left| \frac{N^2-1}{N^2+2} \right|^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2}{5} \sum_{\ell=0}^{\infty} g_{\ell} \text{Re}(B_{\ell}) \right] \right\} \left[ \cos^2\theta - \frac{1}{2} \right] \end{aligned} \quad (5.25b)$$

Para uma radiação incidente não polarizada o grau de polarização da radiação espalhada, equação (2.93), será

$$\begin{aligned} P = & \left\{ 1 + 15 \left( \delta_{\text{rms}}^2 / R^2 \right) \left[ g_0 + 14g_1/50 + \frac{3g_2}{125} \left| \frac{N^2-1}{N^2+2} \right|^2 + \frac{2}{5} \sum_{\ell} g_{\ell} \text{Re}(B_{\ell}) \right] \right\} [1 - \cos^2\theta] \\ & \left\{ 1 + 15 \left( \delta_{\text{rms}}^2 / R^2 \right) \left[ g_0 + \frac{14g_1}{50} + \frac{3g_2}{125} \left| \frac{N^2-1}{N^2+2} \right|^2 + \frac{2}{5} \sum_{\ell} g_{\ell} \text{Re}(B_{\ell}) \right] \right\} \times \\ & \times [1 + \cos^2\theta] + \frac{108}{25} g_2 \left( \delta_{\text{rms}}^2 / R^2 \right) \left| \frac{N^2-1}{N^2+2} \right|^2 \end{aligned} \quad (5.26)$$

Os resultados obtidos para os elementos da matriz de espalhamento e para as seções de choque são independentes de  $\phi$ , mostrando a restauração da simetria do sistema ao serem tomados os valores médios estatísticos destas grandezas. No entanto, a contribuição da rugosidade é evidente em cada uma das grandezas dadas nas equações (5.20) e (5.26).

Fazendo  $(\delta_{\text{rms}}/R)$  nulo, obtemos os resultados do espalhamento por uma esfera lisa de raio  $R$  (espalhamento de Mie). Para um comprimento de correlação angular infinito ( $a \rightarrow \infty$ ), to

dos os coeficientes  $g_\ell$ ,  $\ell = 1, 2, 3, \dots$  são nulos, exceto  $g_0$  cujo valor é um. Isso significa uma rugosidade estatística independente da posição, ou seja, um aumento isotrópico no raio da esfera lisa por um fator de  $(1+\delta)$ . Nesse caso teremos um espalhamento por uma esfera lisa com o raio alterado para  $R \rightarrow R(1+\delta)$  de modo que podemos escrever

$$\overline{R_2^6} \rightarrow \overline{R_2^6(1+\delta)^6} \approx R_2^6 [ 1 + 15(\delta_{\text{rms}}^2/R^2) ] \quad (5.27)$$

Este resultado pode ser verificado fazendo  $g_\ell = \delta_{\ell,0}$  nas equações (5.20) a (5.26).

Um efeito qualitativo importante da rugosidade é a seção de choque com polarização cruzada equação (5.24), a qual não pode ser produzida por uma esfera lisa (ou conjunto de esferas) de qualquer tamanho, pois no espalhamento de Mie a seção de choque com polarizações cruzadas é sempre nula, equação (2.91c).

Um outro efeito da rugosidade é no grau de polarização da radiação espalhada para uma incidência não polarizada, equação (5.26), que pode ser escrita na forma

$$P = \frac{A \sin^2 \theta}{A(1 + \cos^2 \theta) + B} \quad (5.28)$$

onde

$$A = 1 + 15(\delta_{\text{rms}}^2 / R^2) \left[ g_0 + 14g_1/50 + \frac{2g_2}{125} \left| \frac{N^2-1}{N^2+2} \right|^2 + \frac{2}{5} \sum_{\ell} g_{\ell} \text{Re}(B_{\ell}) \right]$$

e (5.29)

$$B = \frac{108}{25} (\delta_{\text{rms}}^2 / R^2) g_2 \left| \frac{N^2-1}{N^2+2} \right|^2$$

Da equação (5.28) pode-se verificar que o grau de polarização em  $\theta = \pi/2$  é menor que um, com um valor aproximado

$$P (\theta = \pi/2) \approx 1 - 4,32 (\delta_{\text{rms}}^2 / R^2) g_2 \left| \frac{N^2-1}{N^2+2} \right|^2 \quad (5.30)$$

Estes efeitos no grau de polarização e na seção de choque com polarizações cruzadas são devidos ao espalhamento extra dado pelo termo independente de  $\theta$  na seção de choque de polarização incidente paralela, equação (5.23a).

Para a esfera rugosa  $\overline{\sigma}_{\parallel}(\pi/2) \neq 0$  enquanto no espalhamento de Mie  $\sigma_{\parallel}(\pi/2) = 0$ , equação (2.99a).

Medidas da seção de choque com polarizações cruzadas nos dão informações sobre o comprimento de correlação angular e o desvio médio quadrático da rugosidade. Uma análise mais detalhada destes resultados será feita no Capítulo seguinte.

## 5.1.2. - Esfera Rugosa Condutora

Na potência mais baixa de  $R_2$  os coeficientes do campo espalhado devido às polarizações incidentes x e y, de ordem zero, ordem um e ordem dois referentes à esfera rugosa condutora são dados respectivamente pelas equações (E.15), (E.18), (E.19) e (E.24), de modo que

$${}^0A_{o11}^x = {}^0A_{e11}^y \approx \frac{-iR_2^3}{3}, \quad (5.31a)$$

$${}^0B_{e11}^x = {}^0B_{o11}^y \approx \frac{2iR_2^3}{3}$$

e

$${}^1A_{o11}^x \approx \frac{-iR_2^3}{R} \left[ R_{00} + \frac{1}{5} \left( \frac{R_{20}}{2} + 3R_{22} \right) \right]$$

$${}^1A_{e01}^x \approx \frac{iR_2^3}{R} \left[ \frac{3}{10} S_{21} \right]$$

$${}^1A_{e11}^x \approx \frac{iR_2^3}{R} \left[ \frac{3}{5} S_{22} \right]$$

(5.31b)

$${}^1B_{e11}^x \approx \frac{2iR_2^3}{R} \left[ R_{00} - \frac{1}{5} (R_{20} - 6R_{22}) \right]$$

$${}^1B_{e01}^x \approx \frac{2iR_2^3}{R} \left[ \frac{3}{5} R_{21} \right]$$

$${}^1B_{o11}^x \approx \frac{2iR_2^3}{R} \left[ \frac{6}{5} S_{22} \right]$$

$${}^1A_{e11}^y \approx \frac{-iR_2^3}{R} \left[ R_{00} + \frac{1}{5} \left( \frac{R_{20}}{2} - 3R_{22} \right) \right]$$

$${}^1A_{e01}^y \approx \frac{iR_2^3}{R} \left[ \frac{3}{10} R_{21} \right]$$

$${}^1A_{o11}^y \approx \frac{iR_2^3}{R} \left[ \frac{3}{5} S_{22} \right]$$

$${}^1B_{o11}^y \approx \frac{2iR_2^3}{R} \left[ R_{00} - \frac{1}{5} (R_{20} + 6R_{22}) \right] \quad (5.31c)$$

$${}^1B_{e01}^y \approx \frac{2iR_2^3}{R} \left[ \frac{3}{5} S_{21} \right]$$

$${}^1B_{e11}^y \approx \frac{2iR_2^3}{R} \left[ \frac{6}{5} S_{22} \right]$$

e

$$\overline{{}^2A_{o11}^x} = \overline{{}^2A_{e11}^y} \approx -iR_2^3 (\delta_{rms}^2 / R^2) [g_0 + \sum g_\ell A_\ell]$$

(5.31d)

$$\overline{{}^2B_{e11}^x} = \overline{{}^2B_{o11}^y} \approx 2iR_2^3 (\delta_{rms}^2 / R^2) [g_0 + \sum g_\ell B_\ell]$$

onde  $A_\ell$  e  $B_\ell$  são dados pelas equações (E.25) e a somatória varia de  $\ell = 1$  a  $\ell = \infty$ .

Substituindo as soluções (5.31) nas equações (5.4) e (5.6) podemos obter as componentes do vetor amplitude de espalhamento para as polarizações x e y, na forma

$$\begin{aligned}
F_{\theta}^x \approx & -iR_2^3 \left\{ \left[ 1 + 3 \left( \frac{\delta_{\text{rms}}^2}{R^2} \right) (g_0 + \sum g_{\ell} B_{\ell} / 2 + \sum g_{\ell} A_{\ell} / 2) \right] \left( \cos \theta - \frac{1}{2} \right) \cos \phi + \right. \\
& + 3 \left( \frac{\delta_{\text{rms}}^2}{R^2} \right) (\sum g_{\ell} B_{\ell} / 2 - \sum g_{\ell} A_{\ell} / 2) \left( \cos \theta + \frac{1}{2} \right) \cos \phi \left. \right\} + \\
& - \frac{3iR_2^3}{R} \left\{ \left( \cos \theta - \frac{1}{2} \right) R_{00} \cos \phi - \frac{1}{5} \left[ \left( \cos \theta + \frac{1}{4} \right) R_{20} \cos \phi - 6 \left( \cos \theta - \frac{1}{4} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. * (R_{22} \cos \phi + S_{22} \sin \phi) + 3R_{21} \sin \theta \right] \right\}
\end{aligned}$$

(5.32a)

$$\begin{aligned}
F_{\phi}^x \approx & iR_2^3 \left\{ \left[ 1 + 3 \left( \frac{\delta_{\text{rms}}^2}{R^2} \right) (g_0 + \sum g_{\ell} B_{\ell} / 2 + \sum g_{\ell} A_{\ell} / 2) \right] \left( 1 - \frac{1}{2} \cos \theta \right) \sin \phi + \right. \\
& + 3 \left( \frac{\delta_{\text{rms}}^2}{R^2} \right) (\sum g_{\ell} B_{\ell} / 2 - \sum g_{\ell} A_{\ell} / 2) \left( 1 + \frac{1}{2} \cos \theta \right) \sin \phi \left. \right\} + \\
& + \frac{3iR_2^3}{R} \left\{ \left( 1 - \frac{1}{2} \cos \theta \right) R_{00} \sin \phi - \frac{1}{5} \left[ \left( 1 + \frac{1}{4} \cos \theta \right) R_{20} \sin \phi - 6 \left( 1 - \frac{1}{4} \cos \theta \right) \right. \right. \\
& \left. \left. * (R_{22} \sin \phi - S_{22} \cos \phi) + \frac{3}{4} S_{21} \sin \theta \right] \right\}
\end{aligned}$$

(5.32b)

$$\begin{aligned}
F_{\theta}^y \approx & -iR_2^3 \left\{ \left[ 1 + 3\left(\frac{\delta_{\text{rms}}^2}{R^2}\right) (g_0 + \Sigma g_{\ell}^B/2 + \Sigma g_{\ell}^A/2) \right] \left( \cos\theta - \frac{1}{2} \right) \text{sen}\phi + \right. \\
& + 3\left(\frac{\delta_{\text{rms}}^2}{R^2}\right) (\Sigma g_{\ell}^B/2 - \Sigma g_{\ell}^A/2) \left( \cos\theta + \frac{1}{2} \right) \text{sen}\phi \left. \right\} + \\
& - \frac{3iR_2^3}{R} \left\{ \left( \cos\theta - \frac{1}{2} \right) R_{00} \text{sen}\phi - \frac{1}{5} \left[ \left( \cos\theta + \frac{1}{4} \right) R_{20} \text{sen}\phi + 6 \left( \cos\theta - \frac{1}{4} \right) \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times (R_{22} \text{sen}\phi - S_{22} \cos\phi) + 3S_{21} \text{sen}\theta \right] \right\} \quad (5.33a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{\phi}^y \approx & -iR_2^3 \left\{ \left[ 1 + 3\left(\frac{\delta_{\text{rms}}^2}{R^2}\right) (g_0 + \Sigma g_{\ell}^B/2 + \Sigma g_{\ell}^A/2) \right] \left( 1 - \frac{1}{2} \cos\theta \right) \cos\phi + \right. \\
& + 3\left(\frac{\delta_{\text{rms}}^2}{R^2}\right) (\Sigma g_{\ell}^B/2 - \Sigma g_{\ell}^A/2) \left( 1 + \frac{1}{2} \cos\theta \right) \cos\phi \left. \right\} + \\
& - \frac{3iR_2^3}{R} \left\{ \left( 1 - \frac{1}{2} \cos\theta \right) R_{00} \cos\phi - \frac{1}{5} \left[ \left( 1 + \frac{1}{4} \cos\theta \right) R_{20} \cos\phi + 6 \left( 1 - \frac{1}{4} \cos\theta \right) \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times (R_{22} \cos\phi + S_{22} \text{sen}\phi) + \frac{3}{4} R_{21} \text{sen}\theta \right] \right\} \quad (5.33b)
\end{aligned}$$

O primeiro termo das equações (5.32) e (5.33) corresponderão ao espalhamento de Mie acrescido da correção coerente (de ordem  $\delta_{\text{rms}}^2/R^2$ ) e o segundo termo corresponderá à correção incoerente do espalhamento (de ordem  $\delta_{\text{rms}}^2/R^2$ ).

Definindo as quantidades

$$B_{\ell}^{+} = \frac{B_{\ell} + A_{\ell}}{2},$$

(5.34)

$$B_{\ell}^{-} = \frac{B_{\ell} - A_{\ell}}{2}$$

e substituindo o primeiro termo das equações (5.32) e (5.33) nas equações (5.8) a (5.11) obtemos os elementos não nulos da matriz de espalhamento referentes a ordem zero mais a correção coerente, na forma

$$\begin{aligned} \overline{02S_{11}} = \overline{02S_{22}} &= \frac{R_2^6}{8} \{ [5(1+\cos^2\theta) - 8\cos\theta] [1 + 6(\delta_{\text{rms}}^2/R^2)(g_0 + \Sigma g_{\ell} B_{\ell}^{+})] + \\ &+ 18(\delta_{\text{rms}}^2/R^2) [1 + \cos^2\theta] [\Sigma g_{\ell} B_{\ell}^{-}] \} \end{aligned} \quad (5.35a)$$

$$\begin{aligned} \overline{02S_{12}} = \overline{02S_{21}} &= \frac{R_2^6}{8} [3(\cos^2\theta - 1)] \{ [1 + 6(\delta_{\text{rms}}^2/R^2)(g_0 + \Sigma g_{\ell} B_{\ell}^{+})] + \\ &+ 10(\delta_{\text{rms}}^2/R^2) (\Sigma g_{\ell} B_{\ell}^{-}) \} \end{aligned} \quad (5.35b)$$

$$\begin{aligned} \overline{02S_{33}} = \overline{02S_{44}} &= \frac{R_2^6}{8} \{ [10\cos\theta - 4(1 + \cos^2\theta)] [1 + 6(\delta_{\text{rms}}^2/R^2)(g_0 + \Sigma g_{\ell} B_{\ell}^{+})] + \\ &+ 18(\delta_{\text{rms}}^2/R^2) (\cos\theta) (\Sigma g_{\ell} B_{\ell}^{-}) \} \end{aligned} \quad (5.35c)$$

Pela equação (E.25) pode-se verificar que as quantidades  $B_{\ell}^{+}$  e

$\bar{B}_\ell$  definidas na equação (5.34) são sempre positivas.

Substituindo o segundo termo das equações (5.32) e (5.33) nas equações (5.8) a (5.11) e usando os valores médios dos produtos  $R_{\ell m} R_{\ell' m'}$ ,  $S_{\ell m} S_{\ell' m'}$  e  $R_{\ell m} S_{\ell' m'}$  dados na equação (3.14) obtemos os elementos não nulos da matriz de espalhamento referentes à correção incoerente da rugosidade, na forma

$$\overline{S_{11}} = \frac{9R_2^6}{8} (\delta_{rms}^2 / R^2) \{ [5(1+\cos^2\theta) - 8\cos\theta] g_0 + \frac{g_2}{100} [17(13+\cos^2\theta) - 80\cos\theta] \} \quad (5.36a)$$

$$\overline{S_{22}} = \frac{9R_2^6}{8} (\delta_{rms}^2 / R^2) \{ [5(1+\cos^2\theta) - 8\cos\theta] g_0 + \frac{g_2}{100} [17(1+\cos^2\theta) + 16\cos\theta] \} \quad (5.36b)$$

$$\overline{S_{12}} = \overline{S_{21}} = \frac{9R_2^6}{8} (\delta_{rms}^2 / R^2) [3(\cos^2\theta - 1)] \left[ g_0 + \frac{g_2}{20} \right] \quad (5.36c)$$

$$\overline{S_{33}} = \frac{9R_2^6}{8} (\delta_{rms}^2 / R^2) \{ [10\cos\theta - 4(1+\cos^2\theta)] g_0 + \frac{g_2}{50} [17\cos\theta + 4(1+\cos^2\theta)] \} \quad (5.36d)$$

$$\overline{S_{44}} = \frac{9}{8} R_2^6 (\delta_{rms}^2 / R^2) \{ [10\cos\theta - 4(1+\cos^2\theta)] g_0 + \frac{g_2}{50} [4(13+\cos^2\theta) - 85\cos\theta] \} \quad (5.36e)$$

A partir destas equações, (5.35) e (5.36), a matriz de espalhamento da esfera rugosa condutora no limite do espalhamento Rayleigh pode ser escrita na forma

$$\overline{S} = \frac{R_2^6}{8} \left[ 1 + 15 \left( \delta_{\text{rms}}^2 / R^2 \right) (g_0 + \frac{2}{5} \sum g_\ell B_\ell^+) \right] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 5(1+\cos^2\theta)-8\cos\theta & 3(\cos^2\theta-1) & 0 & 0 \\ 3(\cos^2\theta-1) & 5(1+\cos^2\theta)-8\cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10\cos\theta-4(1+\cos^2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10\cos\theta-4(1+\cos^2\theta) \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{9R_2^6}{800} \left( \delta_{\text{rms}}^2 / R^2 \right) g_2 \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 17(13+\cos^2\theta)-80\cos\theta & 15(\cos^2\theta-1) & 0 & 0 \\ 15(\cos^2\theta-1) & 17(1+\cos^2\theta)+16\cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 34\cos\theta+8(1+\cos^2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -340\cos\theta+16(13+\cos^2\theta) \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{9R_2^6}{8} \left( \delta_{\text{rms}}^2 / R^2 \right) \left( \sum g_\ell B_\ell^- \right) \begin{bmatrix} (1+\cos^2\theta) & \frac{5}{3}(\cos^2\theta-1) & 0 & 0 \\ \frac{5}{3}(\cos^2\theta-1) & (1+\cos^2\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

As seções de choque paralela e perpendicular ao plano de espalhamento podem ser obtidas substituindo as equações (5.32) e (5.33) nas equações (5.12) e usando os valores médios dos produtos  $R_{\ell m}^R R_{\ell' m'}$ ,  $S_{\ell m}^S S_{\ell' m'}$  e  $R_{\ell m}^S S_{\ell' m'}$ , equação (3.14), de modo que

$$\begin{aligned} \overline{\sigma_{\parallel}} = & \frac{R_2^6}{k_2^2} \left( \cos\theta - \frac{1}{2} \right)^2 \left[ 1 + 15 \left( \delta_{\text{rms}}^2 / R^2 \right) (g_0 + \frac{2}{5} \Sigma g_{\ell}^{B^+}) \right] + \\ & + \frac{6R_2^6}{k_2^2} \left( \delta_{\text{rms}}^2 / R^2 \right) \left( \cos^2\theta - \frac{1}{4} \right) (\Sigma g_{\ell}^{B^-}) + \frac{9R_2^6}{400k_2^2} \left( \delta_{\text{rms}}^2 / R^2 \right) g_2 (11\cos^2\theta + 103 - 40\cos\theta) \end{aligned} \quad (5.38a)$$

e

$$\begin{aligned} \overline{\sigma_{\perp}} = & \frac{R_2^6}{k_2^2} \left( 1 - \frac{1}{2} \cos\theta \right)^2 \left[ 1 + 15 \left( \delta_{\text{rms}}^2 / R^2 \right) (g_0 + \frac{2}{5} \Sigma g_{\ell}^{B^+}) \right] + \\ & + \frac{15R_2^6}{4k_2^2} \left( \delta_{\text{rms}}^2 / R^2 \right) \left( \cos^2\theta + \frac{7}{5} \right) (\Sigma g_{\ell}^{B^-}) + \frac{9R_2^6}{400k_2^2} \left( \delta_{\text{rms}}^2 / R^2 \right) g_2 (\cos^2\theta + 118 - 40\cos\theta) \end{aligned} \quad (5.38b)$$

As seções de choque com polarizações cruzadas são obtidas das equações (5.13) com o resultado

$$\overline{\sigma_{\parallel\phi}} = \overline{\sigma_{\perp\theta}} = \frac{27R_2^6}{400k_2^2} \left( \delta_{\text{rms}}^2 / R^2 \right) g_2 (17 - 8\cos\theta) \quad (5.39)$$

e as seções de choque com mesma polarização incidente e espalhada, equação (5.14), são

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\parallel\theta}}{k_2^2} &= \frac{R_2^6}{k_2^2} \left( \cos\theta - \frac{1}{2} \right)^2 \left[ 1 + 15 \left( \delta_{\text{rms}}^2 / R^2 \right) (g_0 + \frac{2}{5} \Sigma g_{\ell}^{B_{\ell}^+}) \right] + \\ &+ \frac{6R_2^6}{k_2^2} \left( \delta_{\text{rms}}^2 / R^2 \right) \left( \cos^2\theta - \frac{1}{4} \right) (\Sigma g_{\ell}^{B_{\ell}^-}) + \frac{9R_2^6}{400k_2^2} \left( \delta_{\text{rms}}^2 / R^2 \right) g_2 (11\cos^2\theta + 1 + 8\cos\theta) \end{aligned} \quad (5.40a)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\perp\phi}}{k_2^2} &= \frac{R_2^6}{k_2^2} \left( 1 - \frac{1}{2} \cos\theta \right)^2 \left[ 1 + 15 \left( \delta_{\text{rms}}^2 / R^2 \right) (g_0 + \frac{2}{5} \Sigma g_{\ell}^{B_{\ell}^+}) \right] + \\ &+ \frac{15R_2^6}{8k_2^2} \left( \delta_{\text{rms}}^2 / R^2 \right) \left( \cos^2\theta + \frac{7}{5} \right) (\Sigma g_{\ell}^{B_{\ell}^-}) + \frac{9R_2^6}{400k_2^2} \left( \delta_{\text{rms}}^2 / R^2 \right) g_2 (4 + \cos\theta)^2. \end{aligned} \quad (5.40b)$$

Para uma radiação incidente não polarizada o grau de polarização da radiação espalhada, equação (2.93), será

$$\begin{aligned}
P = & 3(1-\cos^2\theta) \{ [1+15(\delta_{\text{rms}}^2/R^2)(g_0 + 2\Sigma g_\ell B_\ell^+/5)] + 10(\delta_{\text{rms}}^2/R^2)(\Sigma g_\ell B_\ell^-) + 9(\delta_{\text{rms}}^2/R^2)g_2/20 \} \\
& [5(1+\cos^2\theta)-8\cos\theta] [1+15(\delta_{\text{rms}}^2/R^2)(g_0+2\Sigma g_\ell B_\ell^+/5)] + \\
& + 9(\delta_{\text{rms}}^2/R^2)[2(1+\cos^2\theta)](\Sigma g_\ell B_\ell^-) + \frac{9(\delta_{\text{rms}}^2/R^2)}{100} g_2 [17(13+\cos^2\theta)-80\cos\theta] .
\end{aligned}$$

(5.41)

De modo análogo ao caso da esfera rugosa dielétrica os valores médios obtidos para os elementos da matriz de espalhamento e seções de choque da esfera rugosa condutora são independentes de  $\phi$ , ou seja, a simetria é novamente restaurada, e reproduzem os resultados esperados do espalhamento de Mie nos limites em que  $\delta_{\text{rms}} \rightarrow 0$  e  $a \rightarrow \infty$ . A rugosidade induz uma seção de choque com polarização cruzada, equação (5.39), que é máxima em  $\theta = \pi$ . Na esfera condutora a rugosidade diminui o grau de polarização e produz um desvio para ângulos maiores na posição do máximo do grau de polarização de modo que o máximo ocorre para  $\theta$  dado aproximadamente pela equação

$$\cos\theta \approx \frac{1}{2} - (\delta_{\text{rms}}^2/R^2) \left[ 3 \sum_{\ell=1}^{\infty} g_\ell B_\ell^- + 2,565g_2 \right] \quad (5.42)$$

## CAPÍTULO VI

### RESULTADOS E CONCLUSÕES

Neste Capítulo vamos analisar os resultados obtidos no Capítulo V para as seções de choque e matriz de espalhamento da esfera rugosa em termos dos parâmetros que caracterizam a rugosidade que são o desvio médio quadrático da rugosidade ( $\delta_{rms}$ ) e o comprimento de correlação angular  $a$ .

Conforme a teoria de perturbação formulada no Capítulo IV, as seções de choque e matriz de espalhamento da esfera rugosa foram obtidas em primeira aproximação na potência  $(\delta_{rms}/R)^2$ , incluindo nesta aproximação as correções coerente e incoerente do campo espalhado. Valores para o desvio médio quadrático e comprimento de correlação serão escolhidos de modo que termos de ordem superior a  $(\delta_{rms}/R)^2$  podem ser desprezados. Vamos escolher valores para o desvio quadrático da rugosidade tais que  $\frac{\delta_{rms}}{R} < 0,1$ . Um aumento do desvio médio quadrático da rugosidade significa um aumento na altura das "saliências" e na profundidade dos "vales" da rugosidade e desse modo o efeito da rugosidade no espalhamento será mais acentuado (para  $a$  fixo). No limite do espalhamento Rayleigh, quanto maior  $\delta_{rms}$  maior será a seção de choque em qualquer direção conforme podemos verificar nas expressões para as seções de choque da esfera rugosa condutora ou dielétrica, equações (5.23) a (5.25) e (5.38) a (5.40), onde a soma de

todos os termos que contêm o fator  $\delta_{\text{rms}}^2 / R^2$  é positivo ou nulo para quaisquer ângulos. No limite oposto ao espalhamento Rayleigh ( $\lambda \ll R$ ), a rugosidade diminui a seção de choque diferencial de espalhamento nas direções de reflexão especular às custas de um espalhamento difuso em outras direções quaisquer (11), (12), (13).

Para um valor fixo do desvio médio quadrático da rugosidade o formalismo desenvolvido no Capítulo 4 não é válido para comprimentos de correlação angular ( $a$ ) muito pequeno. Para que se possa fazer uma teoria de perturbação a partir da equação (4.21) é necessário que o módulo do vetor  $\vec{n}^T$  dado na equação (4.14a) seja pequeno, isto é, a "inclinação" da rugosidade deve ser suave. Isso significa que a distância entre dois "picos" da rugosidade deve ser muito maior que a altura dos "picos". Um limite inferior para o comprimento de correlação angular pode ser obtido a partir da condição

$$(\vec{n}^T)^2 \ll 1,$$

onde  $\vec{n}^T$ , equação (4.30), é o primeiro termo na expansão do vetor  $\vec{n}^T$ . A partir das equações (4.30) e (3.14) pode-se mostrar que

$$(\vec{n}^T)^2 = \frac{4}{a^2} \frac{\delta_{\text{rms}}^2}{R^2}$$

de modo que o comprimento de correlação angular deve ser tal que

$$a \gg 2 \frac{\delta_{\text{rms}}}{R} .$$

O comprimento de correlação angular é o ângulo para o qual a função de correlação de dois pontos da rugosidade tem o valor  $e^{-1}$ . Sendo assim  $a = 0$  implica em não haver correlação entre dois pontos distintos da rugosidade por mais próximos que estejam, ou seja, a superfície será descontínua de um ponto a outro. Desse modo  $a$  pequeno significa uma superfície densa de irregularidades, ou seja, o ângulo entre os vetores posição de dois picos é pequeno. Por outro lado, valores grandes de  $a$  significa ângulos grandes entre os "picos". Fisicamente o comprimento de correlação  $D = Ra$ , equação (3.18), é uma grandeza característica da rugosidade análoga ao "comprimento de onda" de uma superfície periódica, do mesmo modo que o desvio médio quadrático é o análogo da amplitude da superfície periódica. Assim, não há prejuízo em pensarmos no comprimento de correlação angular como o ângulo entre dois picos da rugosidade.

Os efeitos da variação do comprimento de correlação angular no espalhamento serão analisados a partir dos gráficos das seções de choque e do grau de polarização da esfera rugosa dielétrica e condutora.

A seção de choque de espalhamento devido a uma incidência paralela  $\overline{\sigma}_{//}$  na esfera rugosa dielétrica é dada pela equação (5.23). Na figura 8 mostramos a dependência angular de  $\overline{\sigma}_{//}$  para alguns valores de comprimento de correlação angular tomando um índice de refração  $N^2 = 20,0 + i0,0$ . Para qualquer ângulo  $\theta$ ,  $\overline{\sigma}_{//}$  é maior que a seção de choque paralela da esfera lisa. Este efeito é mais acentuado nas direções para frente e para trás em que  $\theta$  é próximo de 0 e  $\pi$ , respectivamente. Em  $\theta = \pi/2$ ,  $\overline{\sigma}_{//}$  é diferente de zero conforme se obtém da equação (5.23) mas o efeito é pequeno, não aparecendo no gráfico para

valores usados de  $\delta_{\text{rms}}$ ,  $\underline{a}$  e  $N^2$ . A medida que o comprimento de correlação angular toma valores grandes  $\overline{\sigma_{\parallel}}$  aumenta até um valor limite.

A seção de choque perpendicular  $\overline{\sigma_{\perp}}$ , equação (5.23b) tem um comportamento em função de  $\underline{a}$  semelhante a  $\overline{\sigma_{\parallel}}$  mas a contribuição da rugosidade é independente de  $\theta$ . A seção de choque com polarização cruzada  $\overline{\sigma_{\perp\phi}}$ , equação (5.24), é também independente de  $\theta$  mas tem um comportamento em função do comprimento de correlação angular diferente de  $\overline{\sigma_{\perp}}$  tendendo a zero para  $\underline{a} \rightarrow \infty$  e  $\underline{a} \rightarrow 0$  e apresentando um máximo em torno de  $\underline{a} \approx 1$ . Este comportamento em função de  $\underline{a}$  é dado pela função  $g_2(2/a^2)$ , equação (3.21). Para os valores de  $\delta_{\text{rms}}$ ,  $\underline{a}$  e  $N^2$  escolhidos,  $\overline{\sigma_{\perp\phi}}$  é pequeno. No entanto  $\overline{\sigma_{\perp\phi}}$  pode ter um valor apreciável se existe uma ressonância, de modo que a parte real de  $N^2$  na equação (5.24) seja próxima de -2 e a parte imaginária de  $N^2$  seja pequena para alguma frequência no limite do espalhamento Rayleigh ( $\lambda \gg R$ ). Essa frequência corresponde ao modo de Frohlich<sup>(6)</sup> e na região de comprimento de onda onde isto ocorre, o espalhamento é muito sensível à forma da partícula. Partículas de Na e Ag com tais comportamentos têm sido estudadas<sup>(19), (20)</sup> e efeitos apreciáveis são atribuídos a pequenas deformações na forma esférica destas partículas. Em geral, para partículas nestas condições, a teoria de Mie concorda muito bem com os resultados experimentais, mas eventuais correções quânticas para partículas muito pequenas podem ser feitas<sup>(21)</sup>.

O efeito da rugosidade no grau de polarização da esfera rugosa dielétrica é produzir uma despolarização da onda espalhada, diminuindo o valor máximo de P conforme a equação (5.30).

Nos gráficos das seções de choque paralela e perpendicular observamos sempre um aumento na seção de choque com o comprimento de correlação angular. Este efeito apresenta uma saturação, uma vez que um comprimento de correlação infinito' pode ser interpretado como uma esfera com o raio acrescido de  $R$  para  $R + \delta_{rms}$ , equação (5.27). Embora não tenha sido mostrado nos gráficos verificamos que comprimentos de correlação angular decrescentes com  $a \ll 1$  (observado o limite da teoria) implicam numa diminuição da contribuição da rugosidade nas seções de choque  $\overline{\sigma_{//}}$  e  $\overline{\sigma_{\perp}}$ . Isto porque o limite de comprimento de correlação angular  $a \rightarrow 0$  também pode ser interpretado' como uma esfera de raio  $R \rightarrow R + \delta_{rms}$ . Nesta teoria não é possível verificar este limite ( $a \rightarrow 0$ ). Entretanto, observamos um aumento na seção de choque com a diminuição do comprimento de correlação angular para valores de  $a < 1$  com  $\delta_{rms} \approx 0,01R$ .

No caso da esfera condutora os efeitos da rugosidade no espalhamento são geralmente mais acentuados quando comparados com o espalhamento da esfera rugosa dielétrica. Isso' se deve a interferência dos dipolos elétricos, associados aos coeficientes  $B_{\lambda ml}$ , com os dipolos magnéticos, associados com os coeficientes  $A_{\lambda ml}$ , os quais são de mesma ordem na potência  $R_2^3$ , equação (5.31).

A figura 9 mostra o comportamento da seção de choque paralela espalhada pela esfera rugosa condutora, em função de  $\theta$  para alguns valores do comprimento de correlação angular. O gráfico mostra que  $\overline{\sigma_{//}}$  diminui para um valor limite quando  $a \rightarrow \infty$  e aumenta a medida que  $a$  diminui.

Verificamos que a rugosidade produz um desvio no mínimo de  $\overline{\sigma_{//}}$ , para ângulos maiores que  $60^\circ$ . O gráfico da se-

ção de choque perpendicular  $\overline{\sigma}_\perp$ , é mostrado na figura 10, e o comportamento de  $\overline{\sigma}_\perp$  em relação ao comprimento de correlação angular é semelhante ao comportamento de  $\overline{\sigma}$ . Para as seções de choque  $\overline{\sigma}_\parallel$  e  $\overline{\sigma}_\perp$  o efeito da rugosidade é mais acentuado para  $\theta \rightarrow 180^\circ$ .

O gráfico da seção de choque cruzada  $\overline{\sigma}_{\perp\theta}$  da esfera rugosa condutora, equação (5.39), é mostrado na figura 11. Em função do comprimento de correlação angular  $\overline{\sigma}_{\perp\theta}$  tem um comportamento semelhante à seção de choque cruzada da esfera dielétrica, apresentando um ponto de máximo e tendendo a zero para  $a \rightarrow \infty$ , seguindo o comportamento da função  $g_2(2/a^2)$ , equação (3.21). A seção de choque cruzada  $\overline{\sigma}_{\perp\theta}$  é uma função crescente de  $\theta$ .

Uma quantidade usada como medida da não esfericidade de partículas é a razão entre a seção de choque cruzada  $\overline{\sigma}_{\perp\theta}$  e a seção de choque  $\overline{\sigma}$  para uma onda incidente não polarizada ( $\sigma = (\sigma_\perp + \sigma_\parallel)/2$ ). Quanto maior  $\overline{\sigma}_{\perp\theta}$ , maior é a deformação esférica das partículas. Com isso podemos entender o comportamento das seções de choque com polarizações cruzadas em função do comprimento de correlação interpretando o ponto de máximo a  $\sim 1$  como correspondendo à deformação esférica máxima "percebida" por uma onda incidente com  $\lambda \gg R$ . O limite  $a \rightarrow \infty$  corresponde a um aumento uniforme no raio da esfera e, portanto,  $\overline{\sigma}_{\perp\theta} \rightarrow 0$  neste limite. No limite  $a \rightarrow 0$  as irregularidades muito finas não seriam "percebidas" pela onda incidente e assim  $\overline{\sigma}_{\perp\theta} \rightarrow 0$ . Isso ocorre tanto para a seção de choque cruzada da esfera rugosa condutora como da esfera rugosa dielétrica.

O grau de polarização da esfera rugosa condutora é

mostrado na figura 12, onde podemos observar o desvio do máximo para ângulos maiores que  $60^\circ$  e uma despolarização (diminuição de  $P$ ) da onda espalhada. Quanto menor o comprimento de correlação angular, maior é o desvio angular do máximo de  $P$  e a despolarização da onda espalhada tem um ponto de máximo em função de  $a$ . Esse comportamento também é verificado no limite oposto ao Rayleigh<sup>(12)</sup> ( $\lambda \ll R$ ).

Embora a teoria usada neste trabalho tenha sido aplicada para descrever o espalhamento em esferas com rugosidade, podemos usá-la também para estudar um esferóide com perfil conhecido, desde que o mesmo tenha excentricidade pequena, conforme a motivação inicial deste formalismo desenvolvido por ERMA<sup>(8)</sup>. Entretanto, mais do que o espalhamento por um único esferóide, uma esfera rugosa com valores adequados de  $\delta_{rms}$  e  $a$  poderia representar um número grande de esferóides orientados aleatoriamente<sup>(9)</sup> ou mesmo uma coleção de partículas irregulares que tenham um plano de simetria<sup>(10)</sup> de modo que os dois blocos não diagonais de elementos da matriz de espalhamento sejam nulos. Isto porque a matriz de espalhamento de um conjunto de partículas é a soma das matrizes de espalhamento das partículas individuais, se não houver uma relação de fase sistemática entre elas.

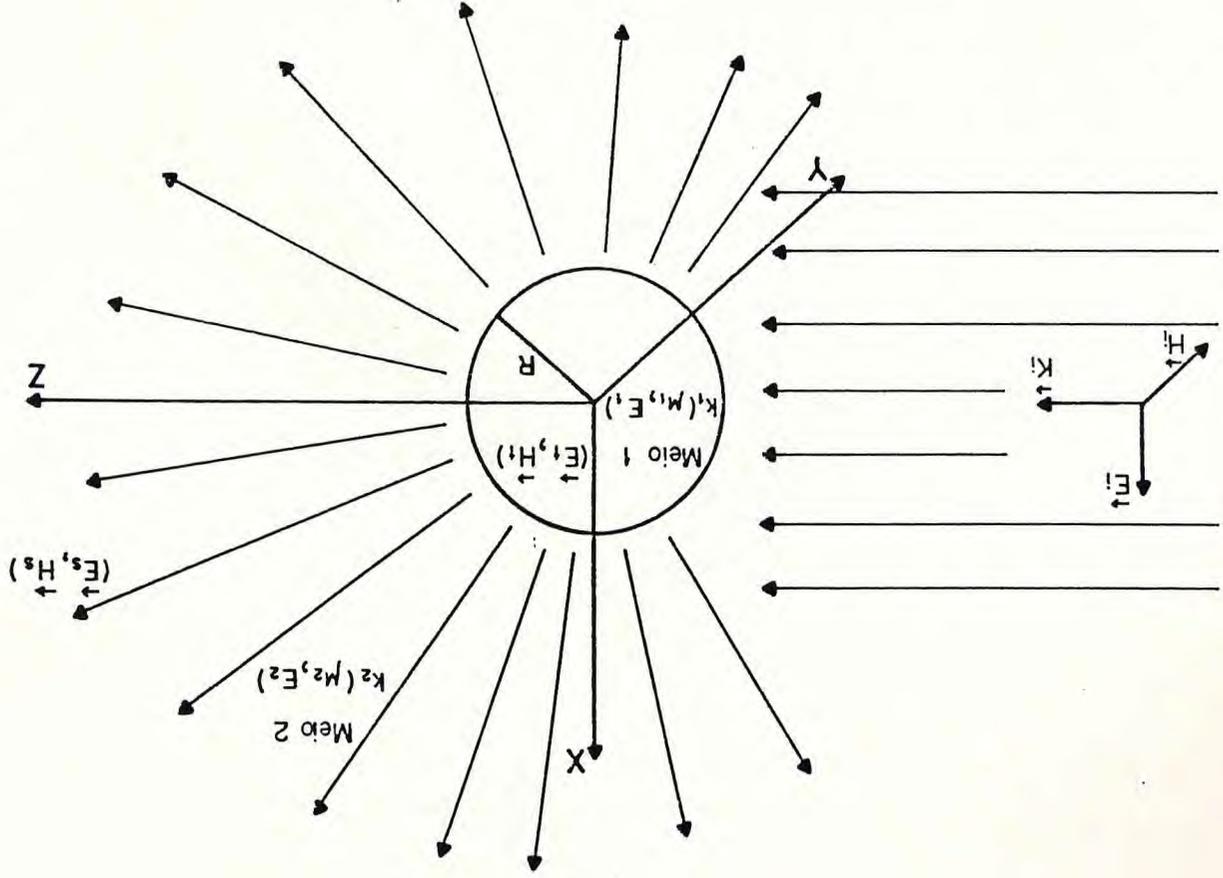
A teoria de perturbação desenvolvida no Capítulo IV é válida para qualquer faixa de comprimento de onda incidente, não se restringindo ao limite de espalhamento Rayleigh ( $\lambda \gg R$ ) para o qual foi aplicada no Capítulo V. Além disso o efeito da curvatura da esfera é próprio do formalismo e não é inculido posteriormente na aproximação do plano tangente como usualmente é feito no espalhamento em esferas rugo-

sas no limite de comprimento de onda pequeno comparado com o raio da esfera <sup>(12), (21)</sup> ( $\lambda \ll R$ ). Naturalmente que nessa faixa de comprimento de onda a solução terá que levar em conta um número grande de termos e as análises devem ser numéricas. Basicamente as dificuldades numéricas seriam as mesmas da teoria de Mie já que se trata de uma teoria de perturbação em termos de um parâmetro independente,  $\delta_{rms}$ .

Métodos matemáticos, tais como a transformação de Watson modificada <sup>(5)</sup>, poderiam ser empregados de modo a reter os efeitos físicos da rugosidade em pólos de integrais complexas em vez de ficarem distribuídos num número grande de termos nas soluções em série. As dificuldades seriam evidentemente maiores pois além de termos os coeficientes para todos os valores do índice  $m$  (com as funções harmônicas que os acompanham), os próprios coeficientes do campo espalhado até segunda ordem em  $\delta$  seriam dados em termos de séries e não de forma fechada como no espalhamento de Mie.

Para as seções de choque obtidas no Capítulo V no limite Rayleigh ( $\lambda \gg R$ ) incluindo o comportamento dessas grandezas em função do comprimento de correlação  $a$ , os resultados mostram um efeito apreciável na região próxima à ressonância em que  $N^2 \sim -1$ .

FIGURA 1 - Diagrama de espalhamento de uma onda plana por uma esfera r ssea.



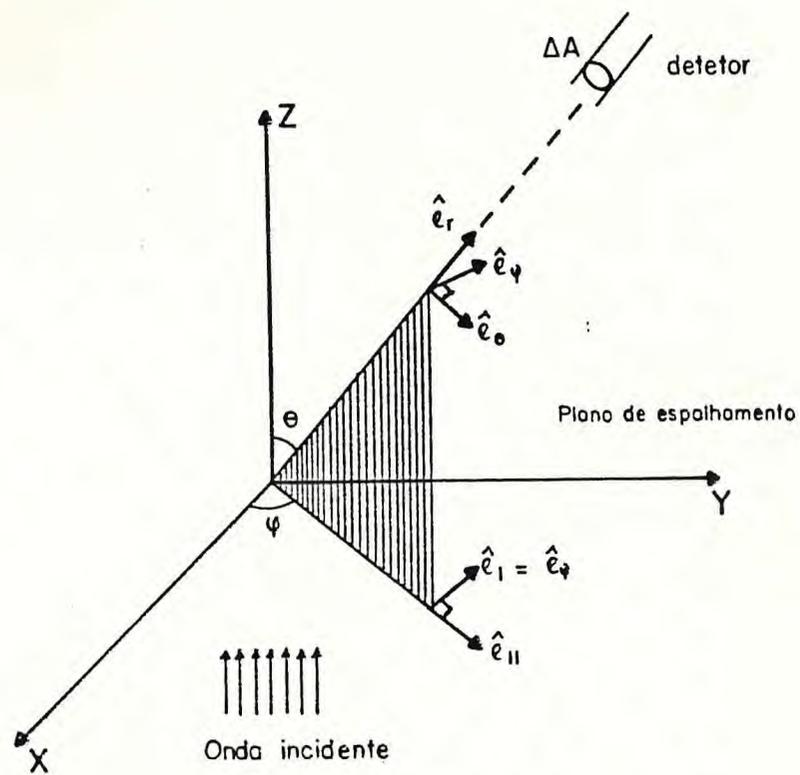


FIGURA 2 - Geometria utilizada no espalhamento de uma onda plana por uma esfera.

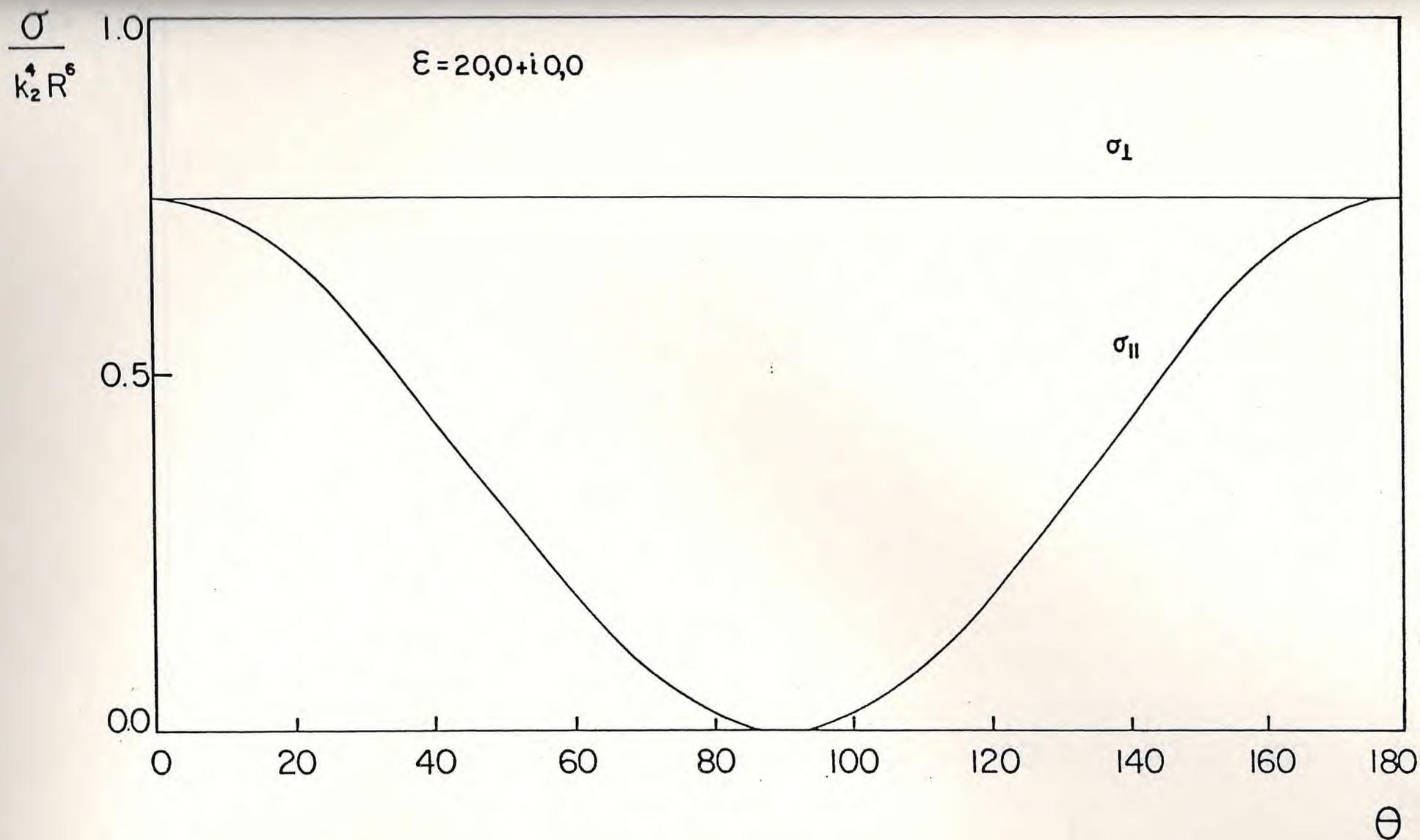


FIGURA 3 - Seções de choque de espalhamento da esfera lisa dielétrica para uma onda plana incidente paralela e perpendicular ao plano de espalhamento em função do ângulo de espalhamento  $\theta$ .

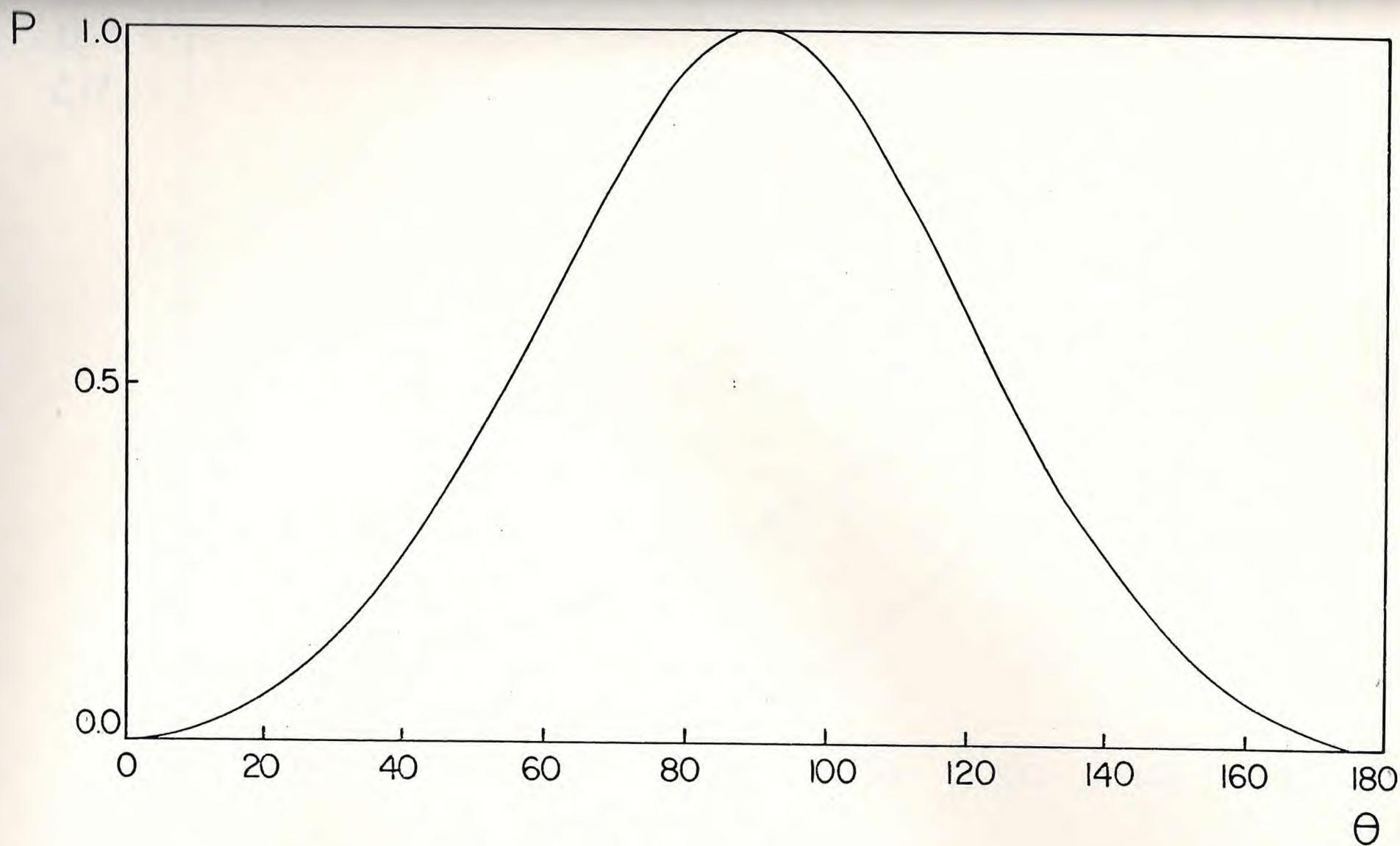


FIGURA 4 - Grau de polarização da esfera lisa dieletrica em função do ângulo de espalhamento  $\theta$ .

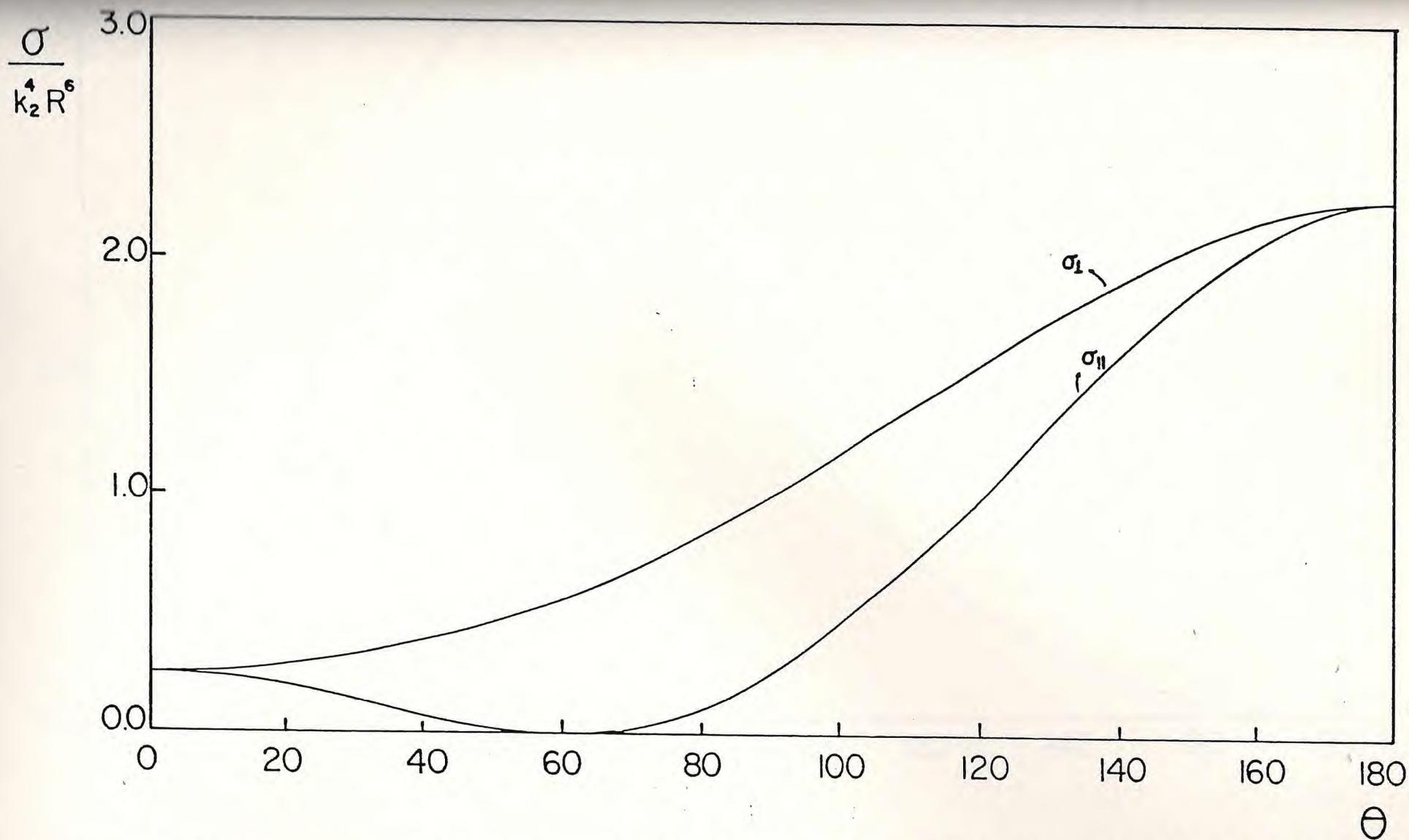
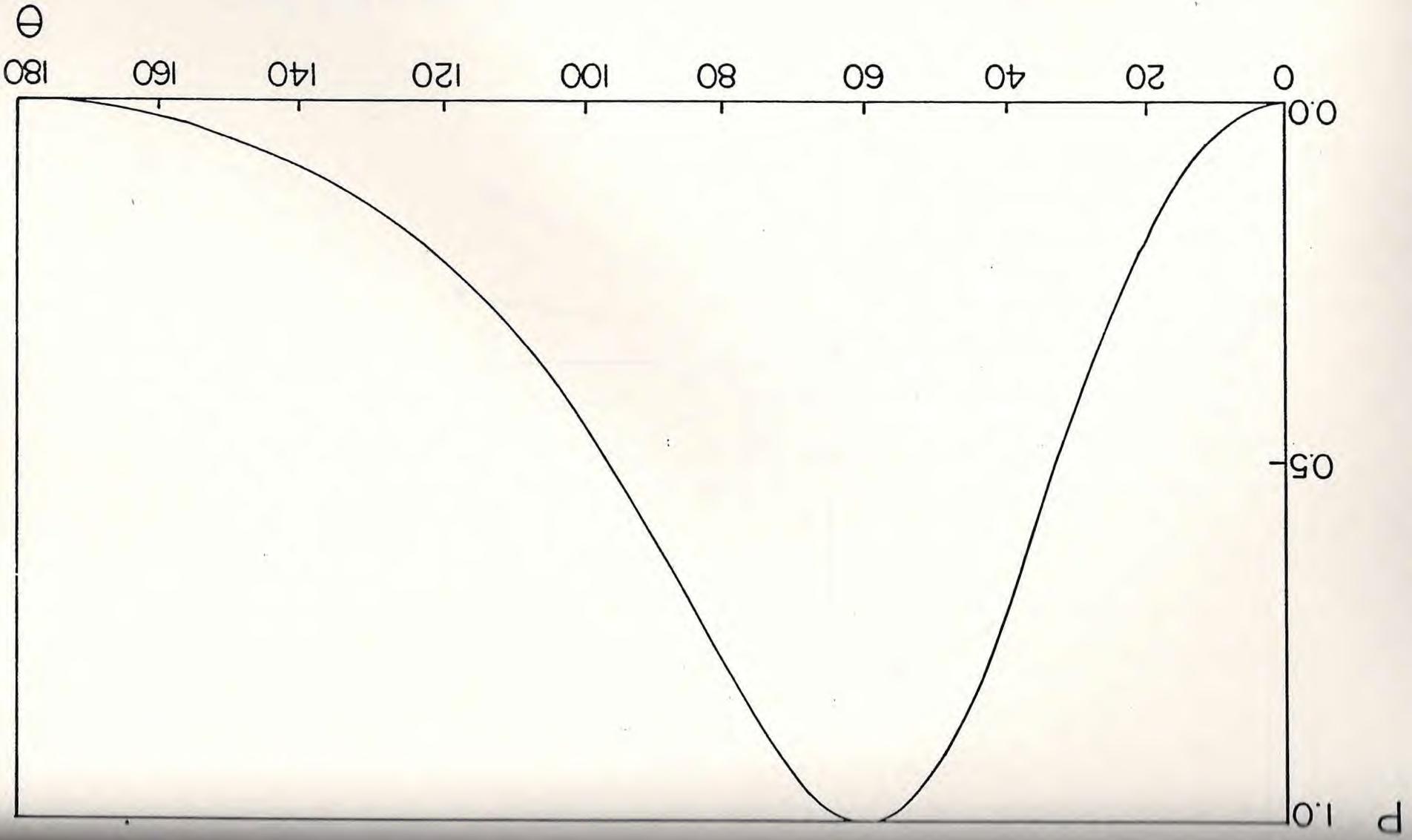


FIGURA 5 - Seções de choque de espalhamento da esfera lisa condutora para uma onda plana incidente paralela e perpendicular ao plano de espalhamento em função do ângulo de espalhamento  $\theta$ .

FIGURA 6 - Grau de polarização da esfera lisa condutora em função do ângulo de espalhamento  $\theta$ .



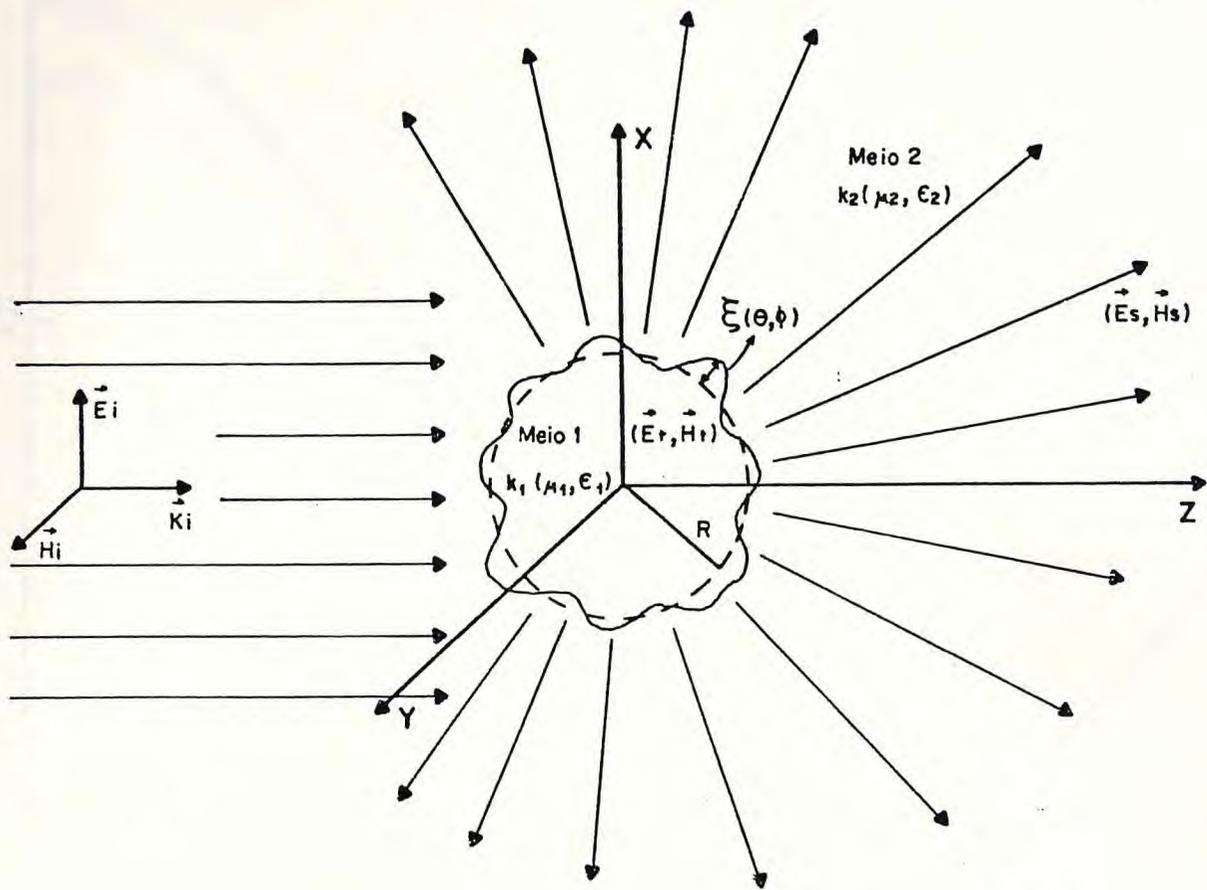


FIGURA 7 - Diagrama do espalhamento de uma onda plana por uma esfera rugosa.

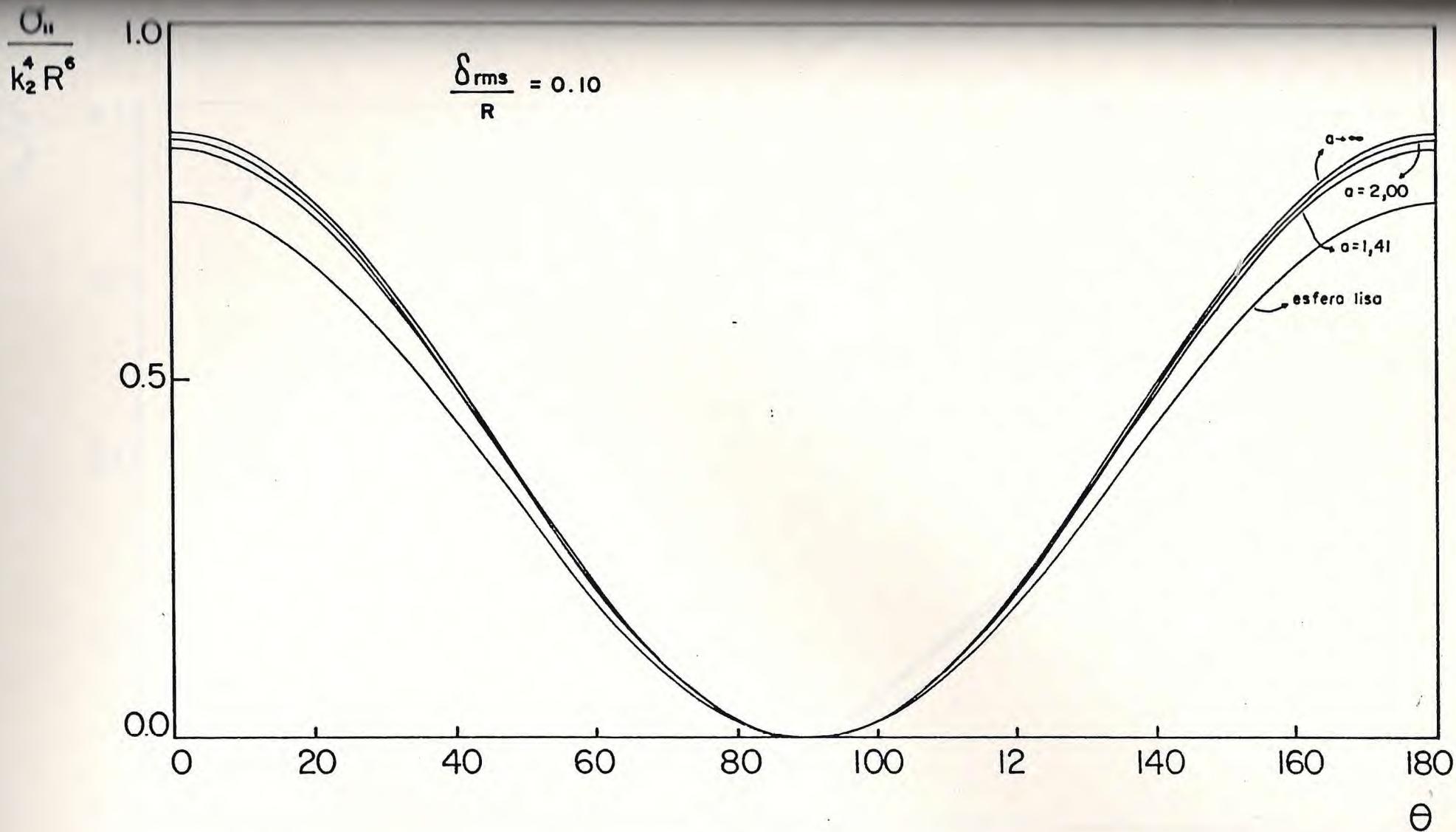


FIGURA 8 - Seção de choque de espalhamento da esfera rugosa dielétrica para uma onda plana incidente paralela ao plano de espalhamento em função do ângulo de espalhamento  $\theta$ , para alguns valores do comprimento de correlação angular  $a$ .

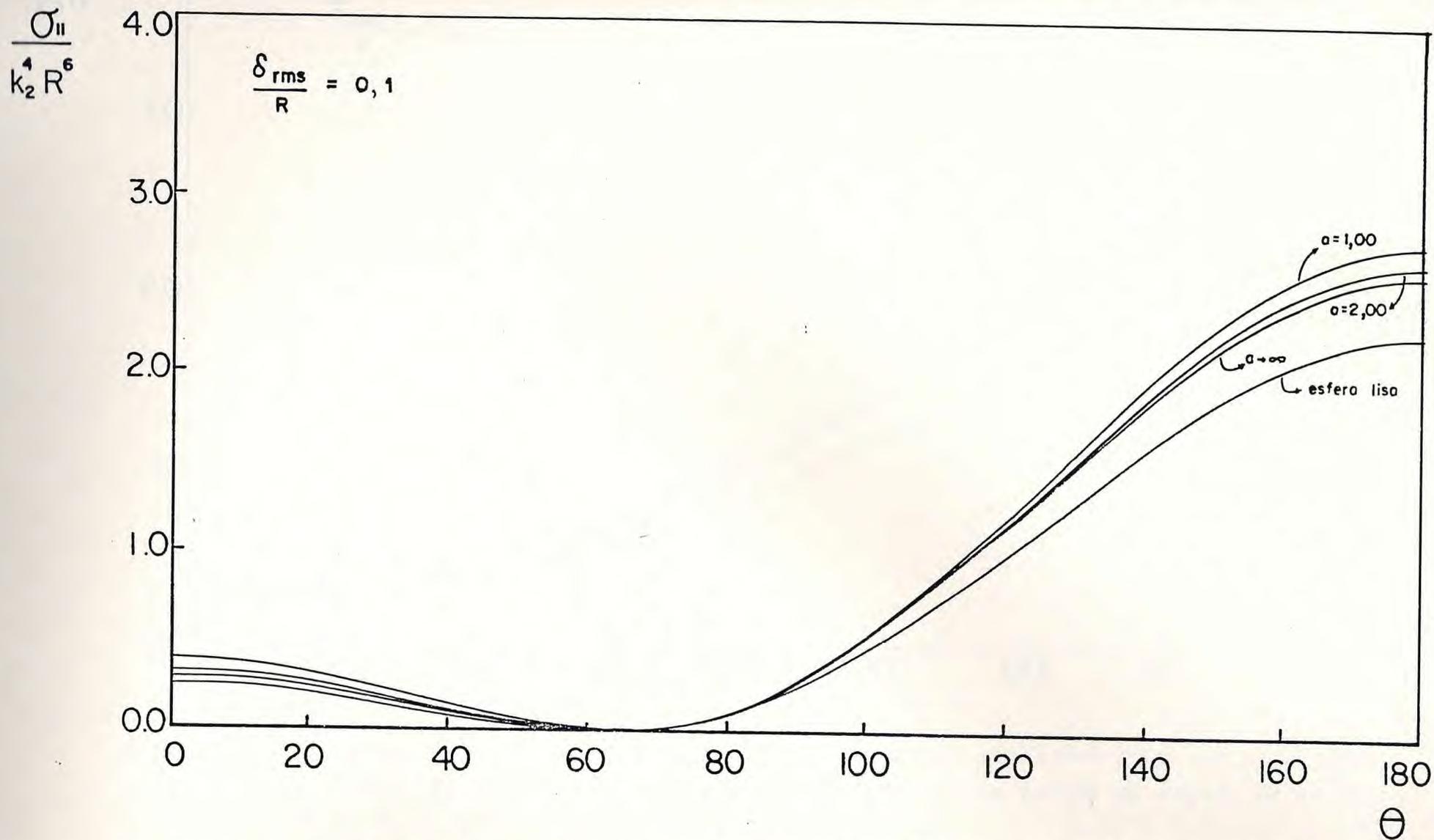


FIGURA 9 - Seção de choque de espalhamento da esfera rugosa condutora para uma onda plana incidente paralela ao plano de espalhamento em função do ângulo de espalhamento  $\theta$ , para alguns valores do comprimento de correlação angular.

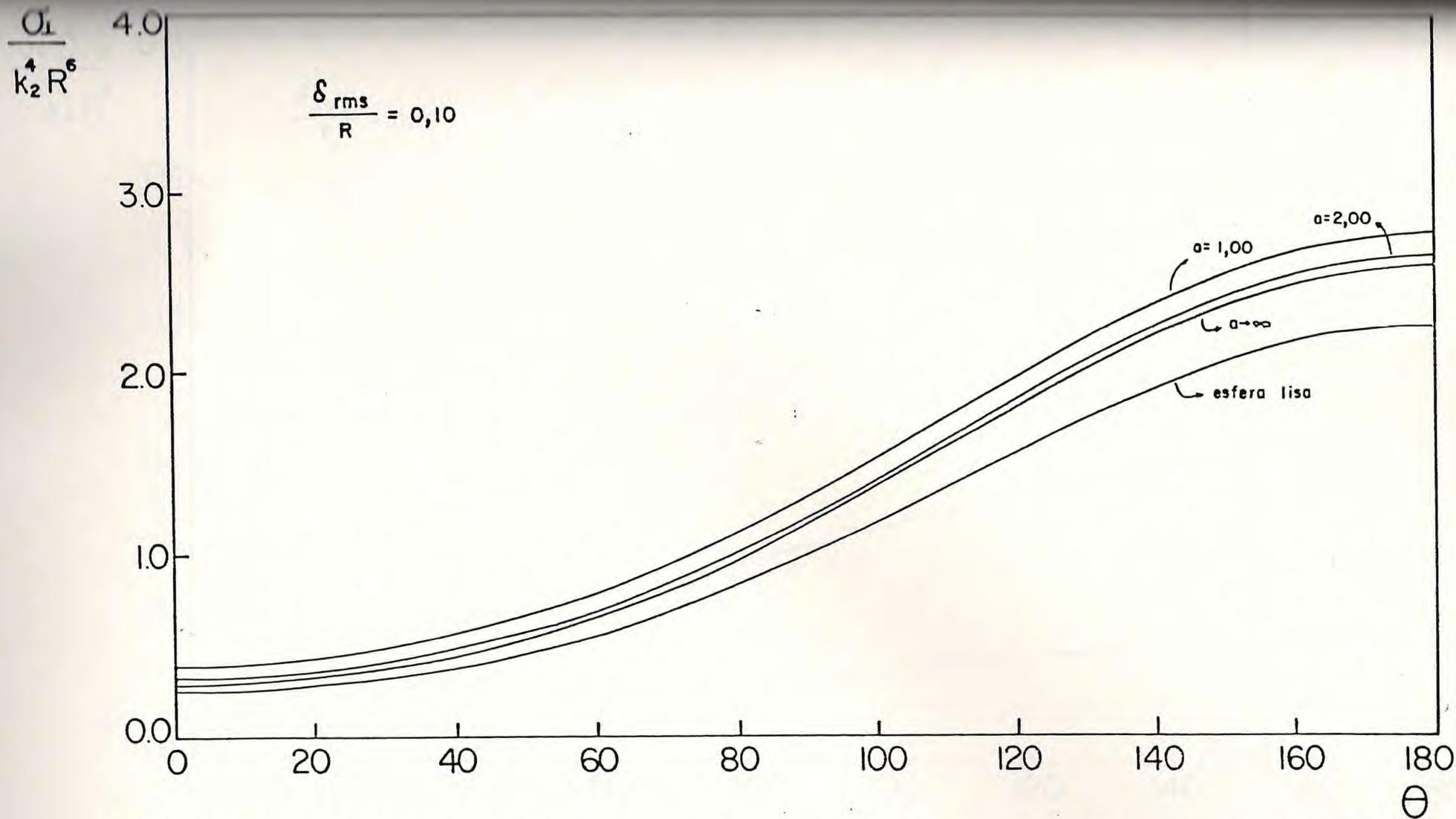


FIGURA 10 - Seção de choque de espalhamento da esfera rugosa condutora para uma onda plana incidente perpendicular ao plano de espalhamento em função do ângulo de espalhamento  $\theta$ , para alguns valores de  $a$ .

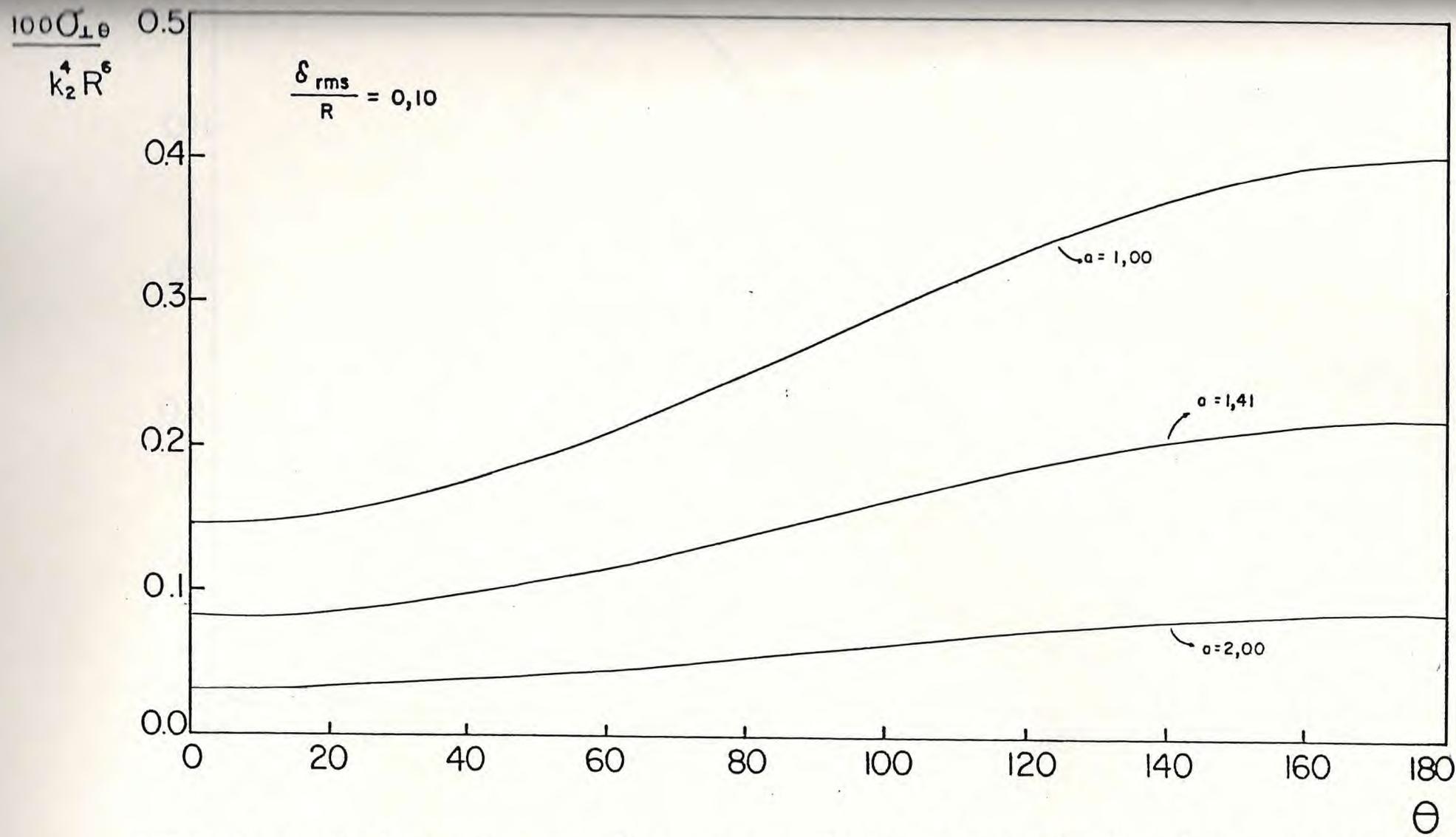


FIGURA 11 - Seção de choque de espalhamento com polarizações cruzadas da esfera rugosa condutora em função do ângulo de espalhamento  $\theta$ , para alguns valores do comprimento de correlação angular  $a$ .

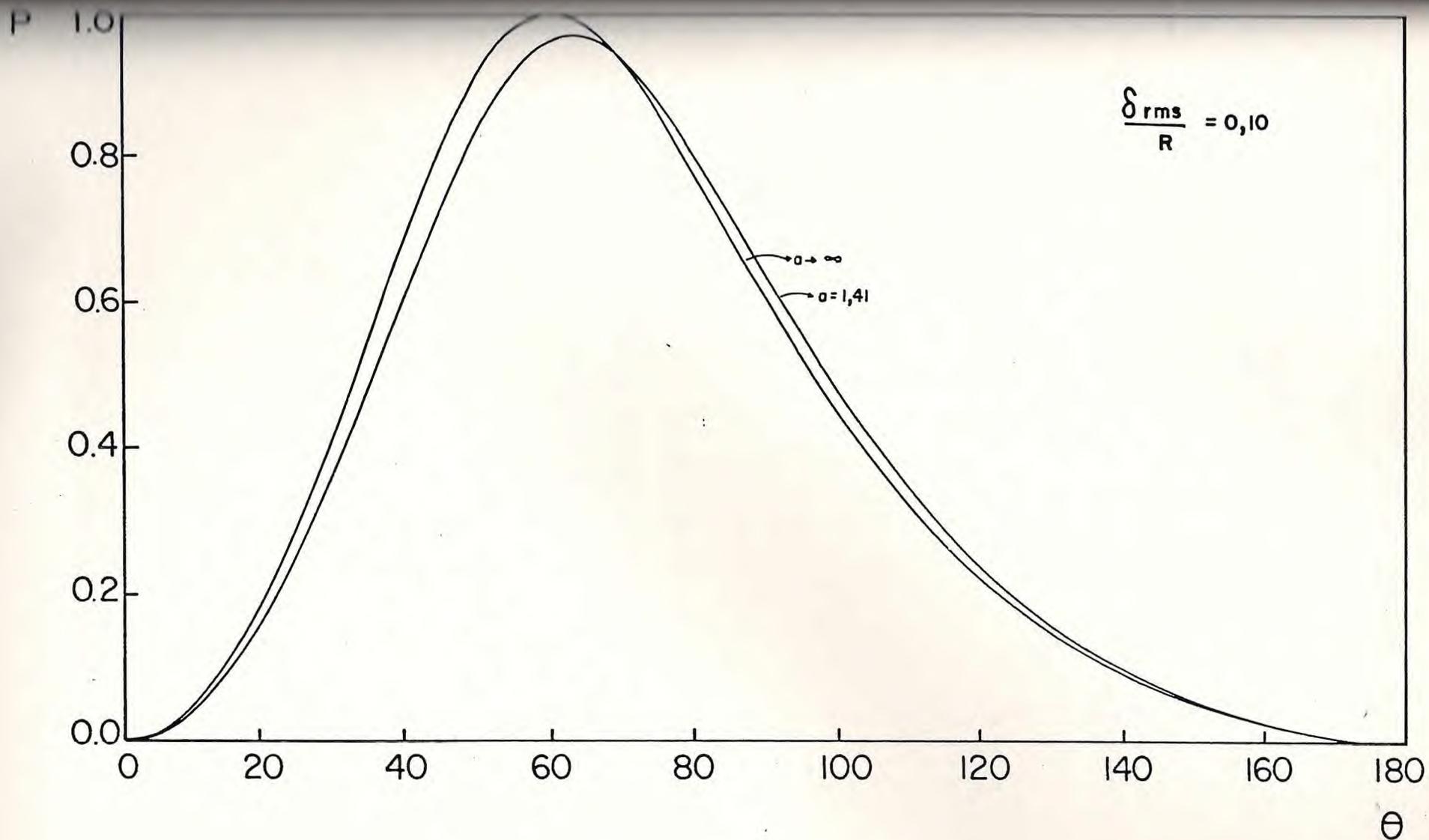


FIGURA 12 - Grau de polarização da esfera rugosa condutora em função do ângulo de espalhamento  $\theta$ , para alguns valores do comprimento de correlação angular  $a$ .

## A P Ê N D I C E A

Considerando um campo eletromagnético incidente na esfera rugosa com polarização ao longo do eixo y, onde

$$\vec{E}_i = \hat{j} e^{ik_2 z} \quad (A.1a)$$

e

$$\vec{H}_i = -\hat{i} \gamma_2 e^{ik_2 z} \quad (A.1b)$$

podemos escrever este campo em termos dos vetores harmônicos esféricos, fazendo a transformação  $\phi \rightarrow \phi - \pi/2$  nas equações (4.4a) e (4.4b) de modo que

$$\vec{E}_i = \hat{j} e^{ik_2 z} = - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left[ j_n(k_2 r) \vec{M}_{eln}^T + i j_n(k_2 r) \vec{N}_{0ln}^T + i \psi_n(k_2 r) \vec{N}_{0ln}^R \right] \quad (A.2a)$$

e

$$\vec{H}_i = -\hat{i} \gamma_2 e^{ik_2 z} = - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \gamma_2 \left[ j_n(k_2 r) \vec{M}_{cln}^T - i j_n(k_2 r) \vec{N}_{eln}^T - i \psi_n(k_2 r) \vec{N}_{eln}^R \right] \quad (A.2b)$$

A.1. Esfera Rugosa Dielétrica - Polarização  $\vec{y}$

Para um campo incidente dado pelas equações (A.2) é conveniente escrever os campos espalhado e transmitido por uma esfera rugosa dielétrica como expansões da forma

$$\vec{E}_s = - \sum \sum \sum \alpha_n [h_n(k_2 r) A_{\lambda mn}^s \vec{M}_{\lambda mn}^T + i \bar{h}_n(k_2 r) B_{\lambda mn}^s \vec{N}_{\lambda mn}^T + i \phi_n(k_2 r) B_{\lambda mn}^s \vec{N}_{\lambda mn}^R]$$

(A.3a)

$$\vec{H}_s = - \sum \sum \sum \alpha_n \gamma_2 [h_n(k_2 r) B_{\lambda mn}^s \vec{M}_{\lambda mn}^T - i \bar{h}_n(k_2 r) A_{\lambda mn}^s \vec{N}_{\lambda mn}^T - i \phi_n(k_2 r) A_{\lambda mn}^s \vec{N}_{\lambda mn}^R]$$

(A.3b)

$$\vec{E}_t = - \sum \sum \sum \alpha_n [j_n(k_1 r) A_{\lambda mn}^t \vec{M}_{\lambda mn}^T + i j_n(k_1 r) B_{\lambda mn}^t \vec{N}_{\lambda mn}^T + i \psi_n(k_1 r) B_{\lambda mn}^t \vec{N}_{\lambda mn}^R]$$

(A.4a)

$$\vec{H}_t = - \sum \sum \sum \alpha_n \gamma_1 [j_n(k_1 r) B_{\lambda mn}^t \vec{M}_{\lambda mn}^T - i j_n(k_1 r) A_{\lambda mn}^t \vec{N}_{\lambda mn}^T - i \psi_n(k_1 r) A_{\lambda mn}^t \vec{N}_{\lambda mn}^R]$$

(A.4b)

onde o campo total no meio 2 ( $\vec{E}_2, \vec{H}_2$ ) e o campo total no meio 1 ( $\vec{E}_1, \vec{H}_1$ ) são, respectivamente

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_i + \vec{E}_s, \quad (A.5a)$$

$$\vec{H}_2 = \vec{H}_i + \vec{H}_s \quad (\text{A.5b})$$

e

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_t \quad (\text{A.6a})$$

$$\vec{H}_1 = \vec{H}_t \quad (\text{A.6b})$$

O campo total no meio 2 e no meio 1 devem satisfazer às condições de contorno na superfície da esfera rugosa, equação (4.9), com o vetor normal à esfera rugosa dado pela equação (4.10). Seguindo os mesmos passos da seção 4.1, as condições de contorno dos campos, equação (4.9), ficam na forma

$$\vec{E}^T = \vec{n}^T | \vec{E}^R | \quad (\text{A.7a})$$

e

$$\vec{H}^T = \vec{n}^T | \vec{H}^R |, \quad (\text{A.7b})$$

onde  $\vec{E}^T$ ,  $\vec{H}^T$  e  $\vec{E}^R$ ,  $\vec{H}^R$  são, respectivamente, as partes transversal e radial dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  definidos como

$$\vec{E} = [\vec{E}_2 - \vec{E}_1]_{r=R+\xi(\theta,\phi)} = [E_i + E_s - E_t]_{r=R+\xi(\theta,\phi)} \quad (\text{A.8a})$$

$$\vec{H}^T = [\vec{H}_2 - \vec{H}_1]_{r=R+\xi(\theta,\phi)} = [\vec{H}_i + \vec{H}_s - \vec{H}_t]_{r=R+\xi(\theta,\phi)} \quad (\text{A.8b})$$

Expandindo as funções radiais dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  na equação (A.8) e escrevendo os coeficientes  $A_{\lambda mn}^{s,t}$  e  $B_{\lambda mn}^{s,t}$  como

séries em potências de  $\delta$ , na forma

$$A_{\lambda mn}^{s,t} = {}^0A_{\lambda mn}^{s,t} + {}^1A_{\lambda mn}^{s,t} + {}^2A_{\lambda mn}^{s,t} + \dots \quad (\text{A.9a})$$

$$B_{\lambda mn}^{s,t} = {}^0B_{\lambda mn}^{s,t} + {}^1B_{\lambda mn}^{s,t} + {}^2B_{\lambda mn}^{s,t} + \dots, \quad (\text{A.9b})$$

podemos escrever também as partes transversal e radial de  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  como séries em potências de  $\delta$  na forma das equações (4.27) e (4.28). Com a expansão do vetor  $\vec{n}^T$  em potências de  $\delta$  no lado direito das equações (A.7a) e (A.7b) obtemos a sequência de equações (4.31), (4.32) e (4.33).

As soluções para os coeficientes  ${}^0A_{\lambda mn}^{s,t}$  e  ${}^0B_{\lambda mn}^{s,t}$  são obtidas a partir da equação (4.31) pelo mesmo processo usado na seção 4.1.1., com os resultados

$${}^0A_{\lambda mn}^s = - \left[ \frac{\gamma_2 j_n(R_1) \dot{j}_n(R_2) - \gamma_1 \dot{j}_n(R_1) j_n(R_2)}{DA_n} \right] \delta_{\lambda, e} \delta_{m, 1} \quad (\text{A.10a})$$

$${}^0B_{\lambda mn}^s = - \left[ \frac{\gamma_1 j_n(R_1) \dot{j}_n(R_2) - \gamma_2 \dot{j}_n(R_1) j_n(R_2)}{DB_n} \right] \delta_{\lambda, o} \delta_{m, 1} \quad (\text{A.10b})$$

e

$${}^0A_{\lambda mn}^t = \left[ \frac{i\gamma_2}{R_2^2 DA_n} \right] \delta_{\lambda, e} \delta_{m, 1} \quad (\text{A.11a})$$

$${}^0B_{\lambda mn}^t = \left[ \frac{i\gamma_2}{R_2^2 DB_n} \right] \delta_{\lambda,0} \delta_{m,1} \quad (\text{A.11b})$$

onde

$$DA_n = \gamma_2 j_n(R_1) \bar{h}_n(R_2) - \gamma_1 \dot{j}_n(R_1) h_n(R_2) \quad (\text{A.12a})$$

$$DB_n = \gamma_1 j_n(R_1) \bar{h}_n(R_2) - \gamma_2 \dot{j}_n(R_1) h_n(R_2) . \quad (\text{A.12b})$$

Os coeficientes  ${}^0A_{eln}^{s,t}$  e  ${}^0B_{oln}^{s,t}$  para uma polarização incidente no eixo  $y$  são idênticos aos coeficientes  ${}^0A_{oln}^{s,t}$  e  ${}^0B_{eln}^{s,t}$ , respectivamente, para uma polarização incidente no eixo  $x$ , como era de se esperar pela simetria do sistema em ordem zero.

A partir das soluções de ordem zero, equações (A.10) e (A.11), podemos obter os coeficientes de ordem um pelas equações (4.32a) e (4.32b), com os resultados escritos na forma

$${}^1A_{\lambda mn}^s = \frac{1}{\alpha_n \beta_{mn} DA_n} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [\gamma_1 \dot{j}_n(R_1) {}^1E_{\lambda mn}^k - j_n(R_1) {}^1F_{\lambda mn}^k] \quad (\text{A.13a})$$

$${}^1B_{\lambda mn}^s = \frac{i}{\alpha_n \beta_{mn} DB_n} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [\gamma_1 j_n(R_1) {}^1H_{\lambda mn}^k - \dot{j}_n(R_1) {}^1P_{\lambda mn}^k] \quad (\text{A.13b})$$

e

$${}^1A_{\lambda mn}^t = \frac{1}{\alpha_n \beta_{mn} DA_n} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left[ \gamma_{2\pi_n(R_2)} {}^1E_{\lambda mn}^k - h_n(R_2) {}^1F_{\lambda mn}^k \right] \quad (\text{A.14a})$$

$${}^1B_{\lambda mn}^t = \frac{i}{\alpha_n \beta_{mn} DB_n} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left[ \gamma_{2h_n(R_2)} {}^1H_{\lambda mn}^k - \pi_n(R_2) {}^1P_{\lambda mn}^k \right] \quad (\text{A.14b})$$

onde definimos

$${}^1E_{\lambda mn}^k = a_k^1 \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{M}_{elk}^T \rangle + i b_k^1 \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{N}_{olk}^T \rangle - i c_k^0 \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | {}^1\vec{n}^T | N_{olk}^R \rangle$$

$${}^1F_{\lambda mn}^k = d_k^1 \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{N}_{elk}^T \rangle + i e_k^1 \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{M}_{olk}^T \rangle - f_k^0 \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | {}^1\vec{n}^T | N_{elk}^R \rangle$$

(A.15)

$${}^1H_{\lambda mn}^k = a_k^1 \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{M}_{elk}^T \rangle + i b_k^1 \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{N}_{olk}^T \rangle - i c_k^0 \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | {}^1\vec{n}^T | N_{olk}^R \rangle$$

$${}^1P_{\lambda mn}^k = d_k^1 \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{N}_{elk}^T \rangle + i e_k^1 \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{M}_{olk}^T \rangle - f_k^0 \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | {}^1\vec{n}^T | N_{\lambda mk}^R \rangle$$

$$a_k^1 = j_k^1(R_2) + h_k^1(R_2) {}^0A_{elk}^S - j_k^1(R_1) {}^0A_{elk}^t$$

$$b_k^1 = \dot{j}_k^1(R_2) + \dot{h}_k^1(R_2) {}^0B_{olk}^S - \dot{j}_k^1(R_1) {}^0B_{olk}^t$$

$$c_k^0 = \psi_k(R_2) + \phi_k(R_2) {}^0B_{olk}^S - \psi_k(R_1) {}^0B_{olk}^t$$

(A.16)

$$d_k^1 = \gamma_2 \dot{j}_k^1(R_2) + \gamma_2 \dot{h}_k^1(R_2) {}^0A_{elk}^S - \gamma_1 \dot{j}_k^1(R_1) {}^0A_{elk}^t$$

$$e_k^1 = \gamma_2 j_k^1(R_2) + \gamma_2 h_k^1(R_2) {}^0B_{olk}^S - \gamma_1 j_k^1(R_1) {}^0B_{olk}^t$$

$$f_k^0 = \gamma_2 \psi_k(R_2) + \gamma_2 \phi_k(R_2) {}^0A_{elk}^S - \gamma_1 \psi_k(R_1) {}^0A_{elk}^t$$

A partir das soluções dadas nas equações (A.13) e (A.14) e da equação (4.33), podemos obter os coeficientes de ordem dois na forma

$${}^2A_{\lambda mn}^S = \frac{1}{\alpha_n \beta_{mn} DA_n} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [\gamma_1 \dot{j}_n(R_1) {}^2E_{\lambda mn}^k - \dot{j}_n(R_1) {}^2F_{\lambda mn}^k] + \sum_{n'm'} \alpha_{n'} [\gamma_1 \dot{j}_n(R_1) {}^2E_{\lambda mn}^{m'n'} - \dot{j}_n(R_1) {}^2F_{\lambda mn}^{m'n'}] \right\} \quad (A.17a)$$

$${}^2B_{mn}^S = \frac{i}{\alpha_n \beta_{mn} DB_n} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [\gamma_1 j_n(R_1) {}^2H_{\lambda mn}^k - j_n(R_1) {}^2P_{\lambda mn}^k] + \sum_{n'm'} \alpha_{n'} [\gamma_1 j_n(R_1) {}^2H_{mn}^{m'n'} + j_n(R_1) {}^2P_{\lambda mn}^{m'n'}] \right\} \quad (A.17b)$$

e

$$\begin{aligned}
2A_{\lambda mn}^t &= \frac{1}{\alpha_n \beta_{mn} DA_n} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left[ Y_2 \bar{h}_n(R_2) 2E_{\lambda mn}^k - h_n(R_2) 2F_{\lambda mn}^k \right] + \sum_{n', m'} \alpha_{n'} \left[ Y_2 \bar{h}_n(R_2) 2E_{\lambda mn}^{m'n'} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - h_n(R_2) 2F_{\lambda mn}^{m'n'} \right] \right\} \quad (A.18a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2B_{\lambda mn}^t &= \frac{i}{\alpha_n \beta_{mn} DB_n} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left[ Y_2 h_n(R_2) 2H_{\lambda mn}^k - \bar{h}_n(R_2) 2P_{\lambda mn}^k \right] + \sum_{n', m'} \alpha_{n'} \left[ Y_2 h_n(R_2) 2H_{\lambda mn}^{m'n'} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \bar{h}_n(R_2) 2P_{\lambda mn}^{m'n'} \right] \right\} \quad (A.18b)
\end{aligned}$$

onde definimos

$$\begin{aligned}
2E_{\lambda mn}^k &= a_k^2 \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta^2 | \vec{M}_{elk}^T \rangle + i b_k^2 \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta^2 | \vec{N}_{olk}^T \rangle + i (c_k^1 - c_k^0) \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | 2 \vec{n}^T | N_{olk}^R \rangle \\
2F_{\lambda mn}^k &= d_k^2 \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta^2 | \vec{N}_{elk}^T \rangle + i e_k^2 \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta^2 | \vec{M}_{olk}^T \rangle + (f_k^1 - f_k^0) \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | 2 \vec{n}^T | N_{elk}^R \rangle \\
&\quad (A.19)
\end{aligned}$$

$$2H_{\lambda mn}^k = a_k^2 \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta^2 | \vec{M}_{elk}^T \rangle + i b_k^2 \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta^2 | \vec{N}_{olk}^T \rangle + i (c_k^1 - c_k^0) \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | 2 \vec{n}^T | N_{olk}^R \rangle$$

$$2P_{\lambda mn}^k = d_k^2 \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta^2 | \vec{N}_{elk}^T \rangle + i e_k^2 \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta^2 | \vec{M}_{olk}^T \rangle + (f_k^1 - f_k^0) \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | 2 \vec{n}^T | N_{elk}^R \rangle$$

e

$$2_{E_{\lambda mn}}^{m'n'} = \sum_{\lambda} T_{\lambda}{}_{m'n'} \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{M}_{\lambda}^T \rangle + iU_{\lambda}{}_{m'n'} \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{N}_{\lambda}^T \rangle +$$

$$- iV_{\lambda}{}_{m'n'} \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \vec{1}_n^T | N_{\lambda}^R \rangle$$

$$2_{F_{\lambda mn}}^{m'n'} = \sum_{\lambda} X_{\lambda}{}_{m'n'} \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{N}_{\lambda}^T \rangle + Y_{\lambda}{}_{m'n'} \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{M}_{\lambda}^T \rangle +$$

$$- Z_{\lambda}{}_{m'n'} \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \vec{1}_n^T | N_{\lambda}^R \rangle$$

(A.20)

$$2_{H_{\lambda mn}}^{m'n'} = \sum_{\lambda} T_{\lambda}{}_{m'n'} \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{M}_{\lambda}^T \rangle + iU_{\lambda}{}_{m'n'} \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{N}_{\lambda}^T \rangle +$$

$$- iV_{\lambda}{}_{m'n'} \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \vec{1}_n^T | N_{\lambda}^R \rangle$$

$$2_{P_{\lambda mn}}^{m'n'} = \sum_{\lambda} X_{\lambda}{}_{m'n'} \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{N}_{\lambda}^T \rangle + iY_{\lambda}{}_{m'n'} \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{M}_{\lambda}^T \rangle +$$

$$- Z_{\lambda}{}_{m'n'} \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \vec{1}_n^T | N_{\lambda}^R \rangle$$

As quantidades que multiplicam as integrais nas equações (A.19) e (A.20) são definidas, respectivamente, por

$$a_k^2 = j_k^2(R_2) + h_k^2(R_2) {}^0A_{elk}^s - j_k^2(R_1) {}^0A_{elk}^t$$

$$b_k^2 = \dot{j}_k^2(R_2) + \dot{h}_k^2(R_2) {}^0B_{olk}^s - \dot{j}_k^2(R_1) {}^0B_{olk}^t$$

$$c_k^1 = \psi_k^1(R_2) + \phi_k^1(R_2) {}^0B_{olk}^s - \psi_k^1(R_1) {}^0B_{olk}^t$$

(A.21)

$$d_k^2 = \gamma_2 \dot{j}_k^2(R_2) + \gamma_2 \dot{h}_k^2(R_2) {}^0A_{elk}^s - \gamma_1 \dot{j}_k^2(R_1) {}^0A_{elk}^t$$

$$e_k^2 = \gamma_2 j_k^2(R_2) + \gamma_2 h_k^2(R_2) {}^0B_{olk}^s - \gamma_1 j_k^2(R_1) {}^0B_{olk}^t$$

$$f_k^1 = \gamma_2 \psi_k^1(R_2) + \gamma_2 \phi_k^1(R_2) {}^0A_{elk}^s - \gamma_1 \psi_k^1(R_1) {}^0A_{elk}^t$$

e

$$T_{\lambda'm'n'} = h_{n'}^1(R_2) {}^1A_{\lambda'm'n'}^s - j_{n'}^1(R_1) {}^1A_{\lambda'm'n'}^t$$

$$U_{\lambda'm'n'} = \dot{h}_{n'}^1(R_2) {}^1B_{\lambda'm'n'}^s - \dot{j}_{n'}^1(R_1) {}^1B_{\lambda'm'n'}^t$$

$$V_{\lambda'm'n'} = \phi_{n'}^1(R_2) {}^1B_{\lambda'm'n'}^s - \psi_{n'}^1(R_1) {}^1B_{\lambda'm'n'}^t$$

(A.22)

$$X_{\lambda'm'n'} = \gamma_2 \dot{h}_{n'}^1(R_2) {}^1A_{\lambda'm'n'}^s - \gamma_1 \dot{j}_{n'}^1(R_1) {}^1A_{\lambda'm'n'}^t$$

$$Y_{\lambda'm'n'} = \gamma_2 h_{n'}^1(R_2) {}^1B_{\lambda'm'n'}^s - \gamma_1 j_{n'}^1(R_1) {}^1B_{\lambda'm'n'}^t$$

$$Z_{\lambda'm'n'} = \gamma_2 \phi_{n'}^1(R_2) {}^1A_{\lambda'm'n'}^s - \gamma_1 \psi_{n'}^1(R_1) {}^1A_{\lambda'm'n'}^t$$

Como os coeficientes em ordem zero para uma polarização y incidente,  ${}^0A_{elk}^{s,t}$  e  ${}^0B_{olk}^{s,t}$  têm o mesmo valor que os coeficientes  ${}^0A_{olk}^{s,t}$  e  ${}^0B_{elk}^{s,t}$  para a polarização x incidente, as quantidades definidas nas equações (A.16) e (A.21) têm o mesmo valor que as quantidades definidas nas equações (4.44) e (4.51), respectivamente.

## A.2 - Esfera Rugosa Condutora-Polarização Y

No caso da esfera rugosa condutora, para um campo com polarização incidente ao longo do eixo y, definimos o campo  $\vec{E}$  na forma

$$\vec{E} = [\vec{E}_2]_r = R+\xi(\theta,\phi) = [\vec{E}_i + \vec{E}_s]_r = R+\xi(\theta,\phi) \quad (A.23)$$

onde  $E_2$  é o campo total no meio 2 dado pela equação (A.5a) e os campos incidente ( $\vec{E}_i$ ) e espalhado ( $\vec{E}_s$ ) são dados pelas equações (A.2a) e (A.3a), respectivamente.

Da condição de ser nula a componente tangencial do campo elétrico na superfície da esfera rugosa, equação (4.59a), podemos obter a condição

$$\vec{E}^T = \vec{n}^T |\vec{E}^R|, \quad (A.24)$$

onde  $\vec{E}^T$  e  $\vec{E}^R$  são as partes transversal e radial do campo  $\vec{E}$ , equação (A.23), e  $\vec{n}^T$  é dado pela equação (4.10).

Expandindo os coeficientes  $A_{\lambda mn}^S$  e  $B_{\lambda mn}^S$  em potência de  $\delta$  na forma

$$A_{\lambda mn}^s = {}^0 A_{\lambda mn}^s + {}^1 A_{\lambda mn}^s + {}^2 A_{\lambda mn}^s + \dots \quad (\text{A.25a})$$

$$B_{\lambda mn}^s = {}^0 B_{\lambda mn}^s + {}^1 B_{\lambda mn}^s + {}^2 B_{\lambda mn}^s + \dots \quad (\text{A.25b})$$

e expandindo as funções radiais dos campos  $\vec{E}^T$  e  $\vec{E}^R$ , obtemos da equação (A.24) as soluções dos três primeiros termos no lado direito das equações (A.25a) e (A.25b), por ordem

ordem zero:

$${}^0 A_{\lambda mn}^s = \frac{-j_n(R_2)}{h_n(R_2)} \delta_{\lambda, e} \delta_{m, l} \quad (\text{A.26a})$$

$${}^0 B_{\lambda mn}^s = \frac{-\dot{j}_n(R_2)}{\dot{h}_n(R_2)} \delta_{\lambda, o} \delta_{m, l} \quad (\text{A.26b})$$

ordem um:

$${}^1 A_{\lambda mn}^s = \frac{1}{\alpha_n \beta_{mn} h_n(R_2)} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k {}^1 E_{\lambda mn}^k \quad (\text{A.27a})$$

$${}^1 B_{\lambda mn}^s = \frac{i}{\alpha_n \beta_{mn} \dot{h}_n(R_2)} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k {}^1 H_{\lambda mn}^k, \quad (\text{A.27b})$$

onde

$${}^1 E_{\lambda mn}^k = a_k^1 \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{M}_{elk}^T \rangle + i b_k^1 \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{N}_{olk}^T \rangle - i c_k^0 \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \vec{n}^T | \vec{N}_{olk}^R \rangle \quad (\text{A.28})$$

$${}^1 H_{\lambda mn}^k = a_k^1 \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{M}_{elk}^T \rangle + i b_k^1 \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{N}_{olk}^T \rangle - i c_k^0 \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \vec{n}^T | \vec{N}_{olk}^R \rangle$$

e

$$a_k^1 = j_k^1(R_2) + h_k^1(R_2)^0 A_{elk}^S$$

$$b_k^1 = j_k^1(R_2) + h_k^1(R_2)^0 B_{olk}^S \quad (A.29)$$

$$c_k^0 = \psi_k(R_2) + \phi_n(R_2)^0 B_{olk}^S$$

ordem dois:

$${}^2 A_{\lambda mn}^S = \frac{-1}{\alpha_n \beta_{mn} h_n(R_2)} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k {}^2 E_{\lambda mn}^k + \sum_{n'm'} \alpha_{n'} {}^2 E_{\lambda mn}^{m'n'} \right] \quad (A.30a)$$

$${}^2 B_{\lambda mn}^S = \frac{i}{\alpha_n \beta_{mn} h_n(R_2)} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k {}^2 H_{\lambda mn}^k + \sum_{n'm'} \alpha_{n'} {}^2 H_{\lambda mn}^{m'n'} \right], \quad (A.30b)$$

onde definimos

$${}^2 E_{\lambda mn}^k = a_k^2 \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta^2 | \vec{M}_{elk}^T \rangle + i b_k^2 \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta^2 | \vec{N}_{olk}^T \rangle + i (c_k^1 - c_k^0) \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | {}^{2 \rightarrow T} | \vec{N}_{olk}^R \rangle$$

$${}^2 H_{\lambda mn}^k = a_k^2 \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta^2 | \vec{M}_{elk}^T \rangle + i b_k^2 \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta^2 | \vec{N}_{olk}^T \rangle + i (c_k^1 - c_k^0) \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | {}^{2 \rightarrow T} | \vec{N}_{olk}^R \rangle$$

(A.31)

$${}^2 E_{\lambda mn}^{m'n'} = \sum_{\lambda'} |h_{n'}^1| A_{\lambda'm'n'}^S \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{M}_{\lambda'm'n'}^T \rangle + i h_{n'}^1 B_{\lambda'm'n'}^S \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{N}_{\lambda'm'n'}^T \rangle +$$

$$- i \phi_{n'} B_{\lambda'm'n'}^S \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | {}^{1 \rightarrow T} | \vec{N}_{\lambda'm'n'}^R \rangle$$

$${}^2 H_{\lambda mn}^{m'n'} = \sum_{\lambda'} |h_{n'}^1| A_{\lambda'm'n'}^S \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{M}_{\lambda'm'n'}^T \rangle + i h_{n'}^1 B_{\lambda'm'n'}^S \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \delta | \vec{N}_{\lambda'm'n'}^T \rangle +$$

$$- i \phi_{n'} B_{\lambda'm'n'}^S \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | {}^{1 \rightarrow T} | \vec{N}_{\lambda'm'n'}^R \rangle$$

e

$$a_k^2 = j_k^2(R_2) + h_k^2(R_2) {}^0A_{elk}^S$$

$$b_k^2 = \tilde{j}_k^2(R_2) + \tilde{h}_k^2(R_2) {}^0B_{olk}^S$$

(A.32)

$$c_k^1 = \psi_k^1(R_2) + \phi_k^1(R_2) {}^0B_{olk}^S$$

Os coeficientes  ${}^0A_{elk}^S$  e  ${}^0B_{olk}^S$ , equação (A.26), para a polarização y são iguais aos coeficientes  ${}^0A_{olk}^S$  e  ${}^0B_{elk}^S$ , equação (4.74), para a polarização x, e, portanto, as quantidades definidas nas equações (A.29) e (A.32) têm o mesmo valor que as quantidades definidas nas equações (4.77) e (4.81), respectivamente.

A P Ê N D I C E B

Neste apêndice vamos tabelar as integrais envolvendo as funções  $\delta(\theta, \phi)$ ,  ${}^1\vec{n}^T(\theta, \phi)$ ,  $\overline{\delta^2(\theta, \phi)}$ ,  $\overline{{}^2\vec{n}^T(\theta, \phi)}$  e os vetores  $\vec{M}_{\lambda mn}^T(\theta, \phi)$ ,  $\vec{N}_{\lambda mn}^T(\theta, \phi)$  e  $\vec{N}_{\lambda mn}^R(\theta, \phi)$ .

Os vetores  $\vec{M}_{\lambda mn}^T$ ,  $\vec{N}_{\lambda mn}^T$  e  $\vec{N}_{\lambda mn}^R$ , equação (2.18), são escritos na forma

$$\vec{M}_{\lambda mn}^T = \pm m \frac{P_n^m}{\sin\theta} \begin{Bmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{Bmatrix} \hat{e}_\theta - \frac{dP_n^m}{d\theta} \begin{Bmatrix} \sin m\phi \\ \cos m\phi \end{Bmatrix} \hat{e}_\phi \quad (B.1a)$$

$$\vec{N}_{\lambda mn}^T = \frac{dP_n^m}{d\theta} \begin{Bmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{Bmatrix} \hat{e}_\theta \mp m \frac{P_n^m}{\sin\theta} \begin{Bmatrix} \sin m\phi \\ \cos m\phi \end{Bmatrix} \hat{e}_\phi \quad (B.1b)$$

$$N_{\lambda mn}^R = n(n+1) P_n^m \begin{Bmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{Bmatrix}, \quad (B.1c)$$

onde  $N_{\lambda mn}^R$  é o módulo do vetor  $\vec{N}_{\lambda mn}^R$ .

A rugosidade  $\xi(\theta, \phi)$  e o vetor  ${}^1\vec{n}^T(\theta, \phi)$  são dados, respectivamente, pelas equações (3.11) e (4.30a), a partir das quais podemos escrever

$$\delta = \frac{\xi(\theta, \phi)}{R} = \frac{1}{R} \left[ \sum_{\ell} \sum_{q} R_{\ell q} P_{\ell}^q \cos q\phi + \sum_{\ell} \sum_{q} S_{\ell q} P_{\ell}^q \sin q\phi \right] \quad (B.2a)$$

$$\begin{aligned}
\vec{l}_n^T &= - \left[ \frac{\partial \delta}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \delta}{\partial \phi} \hat{e}_\phi \right] = \\
&= \frac{-1}{R} \left\{ \left[ \sum_{\ell} \sum_q R_{\ell q} \frac{dP_\ell^q}{d\theta} \cos q\phi + \sum_{\ell} \sum_q S_{\ell q} \frac{dP_\ell^q}{d\theta} \sin q\phi \right] \hat{e}_\theta + \right. \\
&\quad \left. + \left[ - \sum_{\ell} \sum_q R_{\ell q} \frac{P_\ell^q}{\sin \theta} \sin q\phi + \sum_{\ell} \sum_q S_{\ell q} \frac{P_\ell^q}{\sin \theta} \cos q\phi \right] \hat{e}_\phi \right\} \\
&\hspace{20em} (B.2b)
\end{aligned}$$

onde  $\ell = 0, 1, \dots$  e  $q = 0, 1, \dots, \ell$ .

A partir das equações (B.1) e (B.2) podemos obter as tabelas de integrais

Tabela B-1

$$\begin{aligned}
\langle \vec{M}_{\theta mn}^T | \delta | \vec{M}_{\theta lk}^T \rangle &= \langle \vec{N}_{\theta mn}^T | \delta | \vec{N}_{\theta lk}^T \rangle = \\
&= \frac{\pi}{2R} \sum_{\ell} \sum_q R_{\ell q} \left[ (1 \mp \delta_{q,1}) \delta_{q,m+1} I_{nmkl}^{+\ell q} + (1 + \delta_{q,0}) \delta_{q,m-1} I_{nmkl}^{-\ell q} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \vec{M}_{\phi mn}^T | \delta | \vec{N}_{\theta lk}^T \rangle &= - \langle \vec{N}_{\theta mn}^T | \delta | \vec{M}_{\theta lk}^T \rangle = \\
&= \frac{\pi}{2R} \sum_{\ell} \sum_q R_{\ell q} \left[ (1 \mp \delta_{q,1}) \delta_{q,m+1} J_{nmkl}^{+\ell q} \pm (1 + \delta_{q,0}) \delta_{q,m-1} J_{nmkl}^{-\ell q} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \vec{M}_{\theta mn}^T | \delta | \vec{M}_{\phi lk}^T \rangle &= \langle \vec{N}_{\theta mn}^T | \delta | \vec{N}_{\phi lk}^T \rangle = \\
&= \frac{\pi}{2R} \sum_{\ell} \sum_q S_{\ell q} \left[ (1 \mp \delta_{q,1}) \delta_{q,m+1} I_{nmkl}^{+\ell q} \pm (1 - \delta_{q,0}) \delta_{q,m-1} I_{nmkl}^{-\ell q} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{M}_{\ominus mn}^T | \delta | \vec{N}_{\ominus lk}^T \rangle &= -\langle \vec{N}_{\ominus mn}^T | \delta | \vec{M}_{\ominus lk}^T \rangle = \\ &= \frac{\pi}{2R} \sum_{\ell} \sum_q S_{\ell q} \left[ \pm (1 \mp \delta_{q,1}) \delta_{q,m+1} J_{nmkl}^{\pm \ell q} - (1 - \delta_{q,0}) \delta_{q,m-1} \bar{J}_{nmkl}^{\pm \ell q} \right] \end{aligned}$$


---

Tabela B-2

$$\begin{aligned} \langle \vec{M}_{\ominus mn}^T | \vec{1}_n^T | N_{\ominus lk}^R \rangle &= \\ &= \frac{k(k+1)\pi}{2R} \sum_{\ell} \sum_q R_{\ell q} \left[ -(1 \mp \delta_{q,1}) \delta_{q,m+1} \bar{J}_{nm\ell q}^{\pm k1} \mp (1 + \delta_{q,0}) \delta_{q,m-1} \bar{J}_{nm\ell q}^{\pm k1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{N}_{\ominus mn}^T | \vec{1}_n^T | N_{\ominus lk}^R \rangle &= \\ &= \frac{k(k+1)\pi}{2R} \sum_{\ell} \sum_q R_{\ell q} \left[ \mp (1 \pm \delta_{q,1}) \delta_{q,m+1} \bar{I}_{nm\ell q}^{\pm k1} - (1 + \delta_{q,0}) \delta_{q,m-1} \bar{I}_{nm\ell q}^{\pm k1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{M}_{\ominus mn}^T | \vec{1}_n^T | N_{\ominus lk}^R \rangle &= \\ &= \frac{k(k+1)\pi}{2R} \sum_{\ell} \sum_q S_{\ell q} \left[ \mp (1 \mp \delta_{q,1}) \delta_{q,m+1} \bar{J}_{nm\ell q}^{\pm k1} + (1 - \delta_{q,0}) \delta_{q,m-1} \bar{J}_{nm\ell q}^{\pm k1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{N}_{\ominus mn}^T | \vec{1}_n^T | N_{\ominus lk}^R \rangle &= \\ &= \frac{k(k+1)\pi}{2R} \sum_{\ell} \sum_q S_{\ell q} \left[ -(1 \pm \delta_{q,1}) \delta_{q,m+1} \bar{I}_{nm\ell q}^{\pm k1} \pm (1 - \delta_{q,0}) \delta_{q,m-1} \bar{I}_{nm\ell q}^{\pm k1} \right] \end{aligned}$$


---

As quantidades  $\bar{I}_{nmkl}^{\pm \ell q}$ ,  $J_{nmkl}^{\pm \ell q}$ ,  $\bar{I}_{nm\ell q}^{\pm k1}$ ,  $\bar{J}_{nm\ell q}^{\pm k1}$  que

aparecem nas tabelas B-1 e B-2 são integrais em  $\theta$  definidas a partir das integrais

$$\bar{I}_{nmn'm'}^{\ell q} = \int_0^\pi \left( \frac{dP_n^m}{d\theta} \frac{dP_{n'}^{m'}}{d\theta} + mm' \frac{P_n^m P_{n'}^{m'}}{\sin^2 \theta} \right) P_\ell^q \sin \theta \, d\theta \quad (\text{B.3a})$$

$$\bar{J}_{nmn'm'}^{\ell q} = \int_0^\pi \left( m \frac{P_n^m}{\sin \theta} \frac{dP_{n'}^{m'}}{d\theta} + m' \frac{P_{n'}^{m'}}{\sin \theta} \frac{dP_n^m}{d\theta} \right) P_\ell^q \sin \theta \, d\theta, \quad (\text{B.3b})$$

onde  $nm, n'm'$  e  $\ell q$  são índices que podem ter quaisquer valores inteiros positivos ou nulos desde que  $m \leq n$ ,  $m' \leq n'$  e  $q \leq \ell$ .

Para  $n'm' = kl$ , temos as integrais da tabela B-1

$$\bar{I}_{nmkl}^{\ell q} = \int_0^\pi \left( \frac{dP_n^m}{d\theta} \frac{dP_k^l}{d\theta} + m \frac{P_n^m P_k^l}{\sin^2 \theta} \right) P_\ell^q \sin \theta \, d\theta \quad (\text{B.4a})$$

$$\bar{J}_{nmkl}^{\ell q} = \int_0^\pi \left( m \frac{dP_n^m}{d\theta} \frac{P_k^l}{\sin \theta} + \frac{P_k^l}{\sin \theta} \frac{dP_n^m}{d\theta} \right) P_\ell^q \sin \theta \, d\theta \quad (\text{B.4b})$$

e para  $\ell q = kl$  e  $n'm' = \ell q$ , temos as integrais da tabela B-2

$$\bar{I}_{nm\ell q}^{kl} = \int_0^\pi \left( \frac{dP_n^m}{d\theta} \frac{dP_\ell^q}{d\theta} + m q \frac{P_n^m P_\ell^q}{\sin^2 \theta} \right) P_k^l \sin \theta \, d\theta \quad (\text{B.5a})$$

$$\bar{J}_{nm\ell q}^{kl} = \int_0^\pi \left( m \frac{P_n^m}{\sin \theta} \frac{dP_\ell^q}{d\theta} + q \frac{P_\ell^q}{\sin \theta} \frac{dP_n^m}{d\theta} \right) P_k^l \sin \theta \, d\theta \quad (\text{B.5b})$$

Os resultados de algumas integrais das equações

(B.4) e (B.5) são dados na tabela B-3 a seguir, os quais podem ser obtidos usando as relações de recorrência dos Polinômios Associados de Legendre<sup>(1b)</sup>.

Tabela B-3

$$\bar{I}_{nmll}^{+l,m+1} = - \bar{I}_{llnm}^{+l,m+1} = \frac{C_l}{T_{l,m+1}} \left[ \frac{(\ell-1)}{2\ell-1} \delta_{n,\ell-1} + \frac{\ell+2}{2\ell+3} \delta_{n,\ell+1} \right]$$

$$\bar{I}_{nmll}^{-l,m-1} = \bar{I}_{llnm}^{-l,m-1} = \frac{C_l}{T_{l,m-1}} \left[ \frac{(\ell-1)(\ell-m)(\ell-m+1)}{2\ell-1} \delta_{n,\ell-1} + \frac{(\ell+2)(\ell+m)(\ell+m+1)}{2\ell+3} \delta_{n,\ell+1} \right]$$

$$\bar{I}_{lll,m+1}^{-nm} = \frac{C_l}{T_{l,m+1}} \left[ \frac{\ell+1}{2\ell-1} \delta_{n,\ell-1} + \frac{\ell}{2\ell+3} \delta_{n,\ell+1} \right]$$

$$\bar{I}_{lll,m-1}^{+nm} = \frac{-C_l}{T_{l,m-1}} \left[ \frac{(\ell+1)(\ell-m)(\ell-m+1)}{2\ell-1} \delta_{n,\ell-1} + \frac{\ell(\ell+m)(\ell+m+1)}{2\ell+3} \delta_{n,\ell+1} \right]$$

$$\bar{I}_{nml,m+1}^{-11} = \frac{C_l}{T_{l,m+1}} \left[ \frac{(\ell-1)(\ell+1)}{2\ell-1} \delta_{n,\ell-1} - \frac{\ell(\ell+2)}{2\ell+3} \delta_{n,\ell+1} \right]$$

$$\bar{I}_{nml,m-1}^{-11} = \frac{-C_l}{T_{l,m-1}} \left[ \frac{(\ell-1)(\ell+1)(\ell-m)(\ell-m+1)}{2\ell-1} \delta_{n,\ell-1} + \frac{\ell(\ell+2)(\ell+m)(\ell+m+1)}{2\ell+3} \delta_{n,\ell+1} \right]$$

$$J_{nmll}^{+\ell, m+1} = -J_{llnm}^{+\ell, m+1} = \frac{C_\ell}{T_{\ell, m+1}} \delta_{n, \ell}$$

$$J_{nmll}^{-\ell, m-1} = J_{llnm}^{-\ell, m-1} = \frac{C_\ell}{T_{\ell, m-1}} (\ell+m)(\ell-m+1) \delta_{n, \ell}$$

$$J_{lll, m+1}^{-nm} = \frac{C_\ell}{T_{\ell, m+1}} \delta_{n, \ell}$$

$$J_{lll, m-1}^{+nm} = \frac{-C_\ell}{T_{\ell, m-1}} (\ell+m)(\ell-m+1) \delta_{n, \ell}$$


---

onde

$$C_\ell = \frac{2}{2\ell+1} \quad \text{e} \quad T_{\ell, m} = \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}$$

A média estatística da função  $\delta^2(\theta, \phi)$  pode ser obtida da equação (3.5) com o resultado

$$\overline{\delta^2} = \frac{\overline{\xi^2(\theta, \phi)}}{R^2} = \frac{\delta_{rms}^2}{R^2} \quad (\text{B.6})$$

A função vetorial  ${}^2\vec{n}^T(\theta, \phi)$  é dada pela equação (4.30b) de modo que podemos escrever

$$\overline{2_{\vec{n}}^T} = -\delta \overline{1_{\vec{n}}^T} = \frac{1}{R^2} \left[ \overline{\xi \frac{\partial \xi}{\partial \theta}} \hat{e}_\theta + \frac{1}{\text{sen}\theta} \overline{\xi \frac{\partial \xi}{\partial \phi}} \hat{e}_\phi \right] \quad (\text{B.7})$$

A partir das equações (3.3) e (3.11) pode-se mostrar que não há correlação entre a rugosidade e suas derivadas, de modo que

$$\overline{\xi \frac{\partial \xi}{\partial \theta}} = \overline{\xi \frac{\partial \xi}{\partial \phi}} = 0 . \quad (\text{B.8})$$

Sendo assim, temos

$$\overline{2_{\vec{n}}^T} = 0 \quad (\text{B.9})$$

A partir das equações (B.6) e (B.9) e das relações de ortogonalidade, equações (2.21), obtemos as integrais

$$\begin{aligned} \langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \overline{\delta^2} | \vec{M}_{\lambda' m' n'}^T \rangle &= \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \overline{\delta^2} | \vec{N}_{\lambda' m' n'}^T \rangle = \\ &= (1 - \delta_{\lambda, \theta} \delta_{m, 0}) \frac{\delta_{\text{rms}}^2}{R^2} \beta_{mn} \delta_{\lambda, \lambda'} \delta_{m, m'} \delta_{n, n'} \end{aligned} \quad (\text{B.10a})$$

e

$$\langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \overline{\delta^2} | \vec{N}_{\lambda' m' n'}^T \rangle = 0 \quad (\text{B.10b})$$

$$\langle \vec{M}_{\lambda mn}^T | \overline{2_{\vec{n}}^T} | N_{\lambda' m' n'}^R \rangle = \langle \vec{N}_{\lambda mn}^T | \overline{2_{\vec{n}}^T} | N_{\lambda' m' n'}^R \rangle = 0 . \quad (\text{B.10c})$$

A P Ê N D I C E C

C.1. - Esfera Rugosa Dielétrica

No problema do espalhamento por uma esfera rugosa dielétrica com uma polarização incidente no eixo x, seção 4.1, foram definidas as quantidades  $l_{E\lambda mn}^k$ ,  $l_{F\lambda mn}^k$ ,  $l_{H\lambda mn}^k$  e  $l_{P\lambda mn}^k$ , equação (4.47). A partir dos resultados das tabelas B-1 e B-2 podemos escrever estas quantidades na forma

$$\begin{pmatrix} l_{E\text{omn}}^k \\ l_{F\text{omn}}^k \end{pmatrix}^x = \frac{\pi}{2R} \left[ - \sum_{\ell} \sum_{q} R_{\ell q} (1-\delta_{q,1}) \delta_{q,m+1} \begin{pmatrix} +_{E\text{mn}}^{k\ell} \\ +_{F\text{mn}}^{k\ell} \end{pmatrix} + \sum_{\ell} \sum_{q} R_{\ell q} (1+\delta_{q,0}) \delta_{q,m-1} \begin{pmatrix} +_{E\text{mn}}^{k\ell} \\ -_{F\text{mn}}^{k\ell} \end{pmatrix} \right] \quad (\text{C.1a})$$

$$\begin{pmatrix} l_{E\text{emn}}^k \\ l_{F\text{mn}}^k \end{pmatrix}^x = \frac{\pi}{2R} \left[ \sum_{\ell} \sum_{q} S_{\ell q} (1+\delta_{q,1}) \delta_{q,m+1} \begin{pmatrix} +_{E\text{mn}}^{k\ell} \\ +_{F\text{mn}}^{k\ell} \end{pmatrix} - \sum_{\ell} \sum_{q} S_{\ell q} (1-\delta_{q,0}) \delta_{q,m-1} \begin{pmatrix} -_{E\text{mn}}^{k\ell} \\ -_{F\text{mn}}^{k\ell} \end{pmatrix} \right] \quad (\text{C.1b})$$

$$\begin{pmatrix} l_{H\text{emn}}^k \\ l_{P\text{emn}}^k \end{pmatrix}^x = \pm \frac{\pi}{2R} \left[ \sum_{\ell} \sum_{q} R_{\ell q} (1+\delta_{q,1}) \delta_{q,m+1} \begin{pmatrix} +_{H\text{mn}}^{k\ell} \\ +_{P\text{mn}}^{k\ell} \end{pmatrix} - \sum_{\ell} \sum_{q} R_{\ell q} (1+\delta_{q,0}) \delta_{q,m-1} \begin{pmatrix} -_{H\text{mn}}^{k\ell} \\ -_{P\text{mn}}^{k\ell} \end{pmatrix} \right] \quad (\text{C.1c})$$

$$\begin{pmatrix} 1_{H_{omn}}^k \\ 1_{P_{omn}}^k \end{pmatrix}^x = \pm \frac{\pi}{2R} \left[ \sum_{\ell} \sum_{q} S_{\ell q} (1-\delta_{q,1}) \delta_{q,m+1} \begin{pmatrix} +_{H_{m,n}}^{kl} \\ +_{P_{m,n}}^{kl} \end{pmatrix} - \sum_{\ell} \sum_{q} S_{\ell q} (1-\delta_{q,0}) \delta_{q,m-1} \begin{pmatrix} -_{H_{m,n}}^{kl} \\ -_{P_{m,n}}^{kl} \end{pmatrix} \right] \quad (C.1d)$$

onde x indica a polarização incidente. E no caso da esfera rugosa dielétrica com uma polarização incidente no eixo y as quantidades definidas nas equações (A.15) podem ser escritas na forma

$$\begin{pmatrix} 1_{E_{emn}}^k \\ 1_{F_{emn}}^k \end{pmatrix}^y = \frac{\pi}{2R} \left[ \sum_{\ell} \sum_{q} R_{\ell q} (1+\delta_{q,1}) \delta_{q,m+1} \begin{pmatrix} +_{E_{mn}}^{kl} \\ +_{F_{mn}}^{kl} \end{pmatrix} + \sum_{\ell} \sum_{q} R_{\ell q} (1+\delta_{q,0}) \delta_{q,m-1} \begin{pmatrix} -_{E_{mn}}^{kl} \\ -_{F_{mn}}^{kl} \end{pmatrix} \right] \quad (C.2a)$$

$$\begin{pmatrix} 1_{E_{emn}}^k \\ 1_{F_{emn}}^k \end{pmatrix}^y = \frac{\pi}{2R} \left[ \sum_{\ell} \sum_{q} S_{\ell q} (1-\delta_{q,1}) \delta_{q,m+1} \begin{pmatrix} +_{E_{m,n}}^{kl} \\ +_{F_{m,n}}^{kl} \end{pmatrix} + \sum_{\ell} \sum_{q} S_{\ell q} (1-\delta_{q,0}) \delta_{q,m-1} \begin{pmatrix} -_{E_{mn}}^{kl} \\ -_{F_{mn}}^{kl} \end{pmatrix} \right] \quad (C.2b)$$

$$\begin{pmatrix} 1_{H_{omn}}^k \\ 1_{P_{omn}}^k \end{pmatrix}^y = \mp \frac{\pi}{2R} \left[ \sum_{\ell} \sum_{q} R_{\ell q} (1-\delta_{q,1}) \delta_{q,m+1} \begin{pmatrix} +_{H_{mn}}^{kl} \\ +_{P_{mn}}^{kl} \end{pmatrix} + \sum_{\ell} \sum_{q} R_{\ell q} (1+\delta_{q,0}) \delta_{q,m-1} \begin{pmatrix} -_{H_{mn}}^{kl} \\ -_{P_{mn}}^{kl} \end{pmatrix} \right] \quad (C.2c)$$

$$\begin{pmatrix} 1_{H_{em}}^k \\ 1_{P_{em}}^k \end{pmatrix} y = \pm \frac{\pi}{2R} \left[ \sum_{\ell} \sum_{q} S_{\ell q} (1 + \delta_{q,1}) \delta_{q,m+1} \begin{pmatrix} +_{H_{mn}}^{kl} \\ +_{P_{mn}}^{kl} \end{pmatrix} + \sum_{\ell} \sum_{q} S_{\ell q} (1 - \delta_{q,0}) \delta_{q,m-1} \begin{pmatrix} -_{H_{mn}}^{kl} \\ -_{P_{mn}}^{kl} \end{pmatrix} \right]$$

(C.2d)

onde  $y$  indica a polarização incidente. As quantidades  $E_{mn}^{\pm kl}$ ,  $F_{mn}^{\pm kl}$ ,  $H_{mn}^{\pm kl}$  e  $P_{mn}^{\pm kl}$  no lado direito das equações (C.1) e (C.2) são definidos como

$$E_{mn}^{\pm kl} = a_k^1 \frac{+_{I_{nmk}}^{\ell, m+1}}{I_{nmk}^{\ell, m+1}} \pm i b_k^1 \frac{+_{J_{nmk}}^{\ell, m+1}}{J_{nmk}^{\ell, m+1}} \pm i k(k+1) c_k^0 \frac{-_{J_{nm\ell, m+1}}^{k1}}{J_{nm\ell, m+1}^{k1}} \quad (C.3a)$$

$$F_{mn}^{\pm kl} = d_k^1 \frac{+_{I_{nmk}}^{\ell, m+1}}{I_{nmk}^{\ell, m+1}} \mp i e_k^1 \frac{+_{J_{nmk}}^{\ell, m+1}}{J_{nmk}^{\ell, m+1}} + k(k+1) f_k^0 \frac{-_{I_{nm\ell, m+1}}^{k1}}{I_{nm\ell, m+1}^{k1}} \quad (C.3b)$$

$$H_{mn}^{\pm kl} = a_k^1 \frac{+_{J_{nmk}}^{\ell, m+1}}{J_{nmk}^{\ell, m+1}} \pm i b_k^1 \frac{+_{I_{nmk}}^{\ell, m+1}}{I_{nmk}^{\ell, m+1}} \pm i k(k+1) c_k^0 \frac{-_{I_{nm\ell, m+1}}^{k1}}{I_{nm\ell, m+1}^{k1}} \quad (C.3c)$$

$$P_{mn}^{\pm kl} = d_k^1 \frac{+_{J_{nmk}}^{\ell, m+1}}{J_{nmk}^{\ell, m+1}} \mp i e_k^1 \frac{+_{I_{nmk}}^{\ell, m+1}}{I_{nmk}^{\ell, m+1}} + k(k+1) f_k^0 \frac{-_{J_{nm\ell, m+1}}^{k1}}{J_{nm\ell, m+1}^{k1}} \quad (C.3d)$$

onde as quantidades  $a_k^1$ ,  $b_k^1$ ,  $c_k^0$ ,  $d_k^1$ ,  $e_k^1$  e  $f_k^0$  são calculadas no Apêndice D.

No cálculo de segunda ordem do espalhamento por uma esfera dielétrica foram definidas as quantidades  ${}^2_{E_{\lambda mn}}^k$ ,  ${}^2_{F_{\lambda mn}}^k$ ,  ${}^2_{H_{\lambda mn}}^k$  e  ${}^2_{P_{\lambda mn}}^k$  para uma polarização incidente no eixo  $x$ , equação (4.55), e no eixo  $y$ , equação (A.19). O valor médio destas quantidades podem ser obtidos diretamente das integrais dadas na equação (B.10) com os resultados não nulos sendo dados por

$$\frac{\text{---}}{2E_{oln}^k} \times \frac{\text{---}}{2E_{eln}^k} = (\delta_{rms}^2 / R^2) a_k^2 \beta_{ln} \delta_{k,n} \quad (C.4a)$$

$$\frac{\text{---}}{2F_{oln}^k} \times \frac{\text{---}}{2F_{eln}^k} = (\delta_{rms}^2 / R^2) d_k^2 \beta_{ln} \delta_{k,n} \quad (C.4b)$$

$$\frac{\text{---}}{2H_{eln}^k} \times \frac{\text{---}}{2H_{oln}^k} = i(\delta_{rms}^2 / R^2) b_k^2 \beta_{ln} \delta_{k,n} \quad (C.4c)$$

$$\frac{\text{---}}{2P_{eln}^k} \times \frac{\text{---}}{2P_{oln}^k} = i(\delta_{rms}^2 / R^2) e_k^2 \beta_{ln} \delta_{k,n} \quad (C.4d)$$

onde  $a_k^2$ ,  $b_k^2$ ,  $d_k^2$  e  $e_k^2$  são calculados no Apêndice D e x e y indicam as respectivas polarizações incidentes.

No cálculo de segunda ordem do espalhamento por uma esfera dielétrica foram definidas as quantidades  $T_{\lambda mn}$ ,  $U_{\lambda mn}$ ,  $V_{\lambda mn}$ ,  $X_{\lambda mn}$ ,  $Y_{\lambda mn}$  e  $Z_{\lambda mn}$  para polarização incidente no eixo x, equação (4.52), e no eixo y, equação (A.22). A partir das soluções para os coeficientes em ordem um para as duas polarizações, equações (4.48), (4.49), (A.13) e (A.14), podemos escrever estas quantidades na forma

$$(T_{\lambda mn})^{x,y} = \frac{1}{\alpha_n \beta_{mn}} \sum_k \alpha_k [A1_n^k ({}^1E_{\lambda mn}^k)^{x,y} + A2_n^k ({}^1F_{\lambda mn}^k)^{x,y}] \quad (C.5a)$$

$$(U_{\lambda mn})^{x,y} = \frac{i}{\alpha_n \beta_{mn}} \sum_k \alpha_k [B1_n^k ({}^1H_{\lambda mn}^k)^{x,y} + B2_n^k ({}^1P_{\lambda mn}^k)^{x,y}] \quad (C.5b)$$

$$(V_{\lambda mn})^{x,y} = \frac{i}{\alpha_n \beta_{mn}} \sum_k \alpha_k [B3_n^k ({}^1H_{\lambda mn}^k)^{x,y} + B4_n^k ({}^1P_{\lambda mn}^k)^{x,y}] \quad (C.5c)$$

$$(X_{\lambda mn})^{x,y} = \frac{1}{\alpha_n \beta_{mn}} \sum_k \alpha_k [A3_n ({}^1E_{\lambda mn}^k)^{x,y} + A4_n ({}^1F_{\lambda mn}^k)^{x,y}] \quad (C.5d)$$

$$(Y_{\lambda mn})^{x,y} = \frac{i}{\alpha_n \beta_{mn}} \sum_k \alpha_k [B5_n ({}^1H_{\lambda mn}^k)^{x,y} + B6_n ({}^1P_{\lambda mn}^k)^{x,y}] \quad (C.5e)$$

$$(Z_{\lambda mn})^{x,y} = \frac{1}{\alpha_n \beta_{mn}} \sum_k \alpha_k [A5_n ({}^1E_{\lambda mn}^k)^{x,y} + A6_n ({}^1F_{\lambda mn}^k)^{x,y}] \quad (C.5f)$$

onde x e y denotam as respectivas polarizações e definimos as quantidades

$$A1_n = [\gamma_1 \dot{j}_n(R_1) h_n^1(R_2) - \gamma_2 j_n^1(R_1) \tilde{h}_n(R_2)] / DA_n \quad (C.6a)$$

$$A2_n = [j_n^1(R_1) h_n(R_2) - j_n(R_1) h_n^1(R_2)] / DA_n \quad (C.6b)$$

$$A3_n = \gamma_1 \gamma_2 [\dot{j}_n(R_1) \tilde{h}_n^1(R_2) - \dot{j}_n^1(R_1) \tilde{h}_n(R_2)] / DA_n \quad (C.6c)$$

$$A4_n = [\gamma_1 \dot{j}_n^1(R_1) h_n(R_2) - \gamma_2 j_n(R_1) \tilde{h}_n^1(R_2)] / DA_n \quad (C.6d)$$

$$A5_n = \gamma_1 \gamma_2 [\dot{j}_n(R_1) \phi_n(R_2) - \psi_n(R_1) \tilde{h}_n(R_2)] / DA_n \quad (C.6e)$$

$$A6_n = [\gamma_1 \psi_n(R_1) h_n(R_2) - \gamma_2 j_n(R_1) \phi_n(R_2)] / DA_n \quad (C.6f)$$

$$B1_n = [\gamma_1 j_n(R_1) \bar{h}_n^2(R_2) - \gamma_2 \dot{j}_n^1(R_1) h_n(R_2)] / DB_n \quad (C.7a)$$

$$B2_n = [\dot{j}_n^1(R_1) \bar{h}_n(R_2) - \dot{j}_n(R_1) \bar{h}_n^1(R_2)] / DB_n \quad (C.7b)$$

$$B3_n = [\gamma_1 j_n(R_1) \phi_n(R_2) - \gamma_2 \psi_n(R_1) h_n(R_2)] / DB_n \quad (C.7c)$$

$$B4_n = [\psi_n(R_1) \bar{h}_n(R_2) - \dot{j}_n(R_1) \phi_n(R_2)] / DB_n \quad (C.7d)$$

$$B5_n = \gamma_1 \gamma_2 [j_n(R_1) h_n^1(R_2) - j_n^1(R_1) h_n(R_2)] / DB_n \quad (C.7e)$$

$$B6_n = [\gamma_1 j_n^1(R_1) \bar{h}_n(R_2) - \gamma_2 \dot{j}_n(R_1) h_n^1(R_2)] / DB_n \quad (C.7f)$$

As quantidades definidas nas equações (C.6) e (C.7) estão calculadas no Apêndice D. Pelas equações (4.56) e (A.20), definiremos as quantidades  ${}^2E_{mn}^{m'n'}$ ,  ${}^2F_{mn}^{m'n'}$ ,  ${}^2H_{mn}^{m'n'}$  e  ${}^2P_{mn}^{m'n'}$ , para as polarizações x e y, respectivamente. O valor médio destas quantidades pode ser calculado a partir das equações (C.5), (C.1) e (C.2) e das relações estatísticas dadas na equação (3.14). Deste cálculo, resulta que as únicas quantidades não nulas são dadas por

$$\begin{aligned} \overline{2_{E_{oln}}^{m'n'}} \times \overline{2_{E_{eln}}^{m'n'}} y &= \pi^2 \frac{\delta_{rms}^2}{R^2} \frac{1}{\alpha_{n'} \beta_{m'n'}} \sum_k \sum_l \alpha_{kl} g_{kl} \times \\ &\times (1+\delta_{m',0}) T_{\ell,m'+1} [I_{nl,n'm'}^{+\ell,m'+1} (A1_{n'} E_{m'n'}^{+kl}, +A2_{n'} F_{m'n'}^{+kl}, ) + J_{n,n'm'}^{+\ell,m'+1} (B1_{n'} H_{m'n'}^{+kl}, -B2_{n'} P_{m'n'}^{+kl}, ) + \\ &+ n'(n'+1) J_{nl\ell,m'+1}^{-n'm'} (B3_{n'} H_{m'n'}^{+kl}, -B4_{n'} P_{m'n'}^{+kl}, )] + T_{\ell,m'-1} [I_{nl,n'm'}^{+\ell,m'-1} (A1_{n'} E_{m'n'}^{+kl}, +A2_{n'} F_{m'n'}^{+kl}, ) + \\ &- I_{nl,n'm'}^{-\ell,m'-1} (B1_{n'} H_{m'n'}^{+kl}, B2_{n'} P_{m'n'}^{+kl}, ) - n'(n'+1) J_{nl\ell,m'-1}^{-n'm'} (B3_{n'} H_{m'n'}^{+kl}, -B4_{n'} P_{m'n'}^{+kl}, ) ] \end{aligned} \quad (C.8a)$$

$$\begin{aligned} \overline{2_{F_{oln}}^{m'n'}} \times \overline{2_{F_{eln}}^{m'n'}} y &= \pi^2 \frac{\delta_{rms}^2}{R^2} \frac{1}{\alpha_{n'} \beta_{m'n'}} \sum_k \sum_l \alpha_{kl} g_{kl} \times \\ &\times (1+\delta_{m',0}) T_{\ell,m'+1} [I_{n,n'm'}^{+\ell,m'n'} (A3_{n'} E_{m'n'}^{+kl}, +A4_{n'} F_{m'n'}^{+kl}, ) - J_{n,n'm'}^{+\ell,m'+1} (B5_{n'} H_{m'n'}^{+kl}, -B6_{n'} P_{m'n'}^{+kl}, ) + \\ &+ n'(n'+1) I_{nl\ell,m'+1}^{-n'm'} (A5_{n'} E_{m'n'}^{+kl}, +A6_{n'} F_{m'n'}^{+kl}, )] + T_{\ell,m'-1} [I_{n,n'm'}^{-\ell,m'-1} (A3_{n'} E_{m'n'}^{+kl}, +A4_{n'} F_{m'n'}^{+kl}, ) + \\ &+ J_{n,n'm'}^{-\ell,m'-1} (B5_{n'} H_{m'n'}^{+kl}, -B6_{n'} P_{m'n'}^{+kl}, ) + n'(n'+1) I_{nl\ell,m'-1}^{-n'm'} (A5_{n'} E_{m'n'}^{+kl}, +A6_{n'} F_{m'n'}^{+kl}, ) ] \end{aligned} \quad (C.8b)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{2_{H_{eln}}^{m'n'}}}{x} &= \frac{\overline{2_{H_{oIn}}^{m'n'}}}{y} = \pi^2 \frac{\delta_{rms}^2}{R^2} \frac{-1}{\alpha_n \beta_{m'n'}} \sum_{\kappa} \sum_{\ell} \alpha_{\kappa} g_{\ell} \times \\
&\times (1 + \delta_{m',0}) T_{\ell, m'+1} \left[ J_{nIn'm'}^{+\ell, m'+1} (A1_n, E_{m'n'}^{+kl}, +A2_n, F_{m'n'}^{+kl}) + I_{nIn'm'}^{+\ell, m'+1} (B1_n, H_{m'n'}^{+kl}, -B2_n, P_{m'n'}^{+kl}) + \right. \\
&+ n'(n'+1) I_{nIn'm'+1}^{n'm'} (B3_n, H_{m'n'}^{+kl}, -B4_n, P_{m'n'}^{+kl}) \left. \right] + T_{\ell, m'-1} \left[ J_{nIn'm'}^{-\ell, m'-1} (A1_n, E_{m'n'}^{+kl}, +A2_n, F_{m'n'}^{+kl}) - \right. \\
&- I_{nIn'm'}^{-\ell, m'-1} (B1_n, H_{m'n'}^{+kl}, -B2_n, P_{m'n'}^{+kl}) - n'(n'+1) I_{nIn'm'-1}^{n'm'} (B3_n, H_{m'n'}^{+kl}, -B4_n, P_{m'n'}^{+kl}) \left. \right]
\end{aligned}$$

(C.8c)

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{2_{P_{eln}}^{m'n'}}}{x} &= \frac{\overline{2_{P_{oIn}}^{m'n'}}}{y} = \pi^2 \frac{\delta_{rms}^2}{R^2} \frac{+1}{\alpha_n \beta_{m'n'}} \sum_{\kappa} \sum_{\ell} \alpha_{\kappa} g_{\ell} \times \\
&\times (1 + \delta_{m',0}) T_{\ell, m'+1} \left[ J_{nIn'm'}^{+\ell, m'+1} (A3_n, E_{m'n'}^{+kl}, +A4_n, F_{m'n'}^{+kl}) - I_{nIn'm'}^{+\ell, m'+1} (B5_n, H_{m'n'}^{+kl}, -B6_n, P_{m'n'}^{+kl}) + \right. \\
&+ n'(n'+1) J_{nIn'm'+1}^{n'm'} (A5_n, E_{m'n'}^{+kl}, +A6_n, F_{m'n'}^{+kl}) \left. \right] + T_{\ell, m'-1} \left[ J_{nIn'm'}^{-\ell, m'-1} (A3_n, E_{m'n'}^{+kl}, +A4_n, F_{m'n'}^{+kl}) + \right. \\
&+ I_{nIn'm'}^{-\ell, m'-1} (B5_n, H_{m'n'}^{+kl}, -B6_n, P_{m'n'}^{+kl}) + n'(n'+1) J_{nIn'm'-1}^{n'm'} (A5_n, E_{m'n'}^{+kl}, +A6_n, F_{m'n'}^{+kl}) \left. \right]
\end{aligned}$$

(C.8d)

onde definimos

$$T_{\ell, m} = \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} \quad (C.9)$$

C.2. - Esfera Rugosa Condutora

No caso da esfera rugosa condutora as quantidades  $l_{E_{\lambda mn}}^k$ ,  $l_{H_{\lambda mn}}^k$  definidas nas equações (4.78) e (A.28) para as polarizações incidentes x e y, são, respectivamente,

$$\begin{Bmatrix} l_{E_{omn}}^k \\ l_{H_{emn}}^k \end{Bmatrix}^x = + \frac{\pi}{2R} \left[ \sum_{\ell} \sum_{q} R_{\ell q} (1+\delta_{q,1}) \delta_{q,m+1} \begin{Bmatrix} +_{E_{mn}}^{kl} \\ +_{H_{mn}}^{kl} \end{Bmatrix} - \sum_{\ell} \sum_{q} R_{\ell q} (1+\delta_{q,0}) \delta_{q,m-1} \begin{Bmatrix} -_{E_{mn}}^{kl} \\ -_{H_{mn}}^{kl} \end{Bmatrix} \right] \quad (C.10a)$$

$$\begin{Bmatrix} l_{E_{emn}}^k \\ l_{H_{omn}}^k \end{Bmatrix}^x = \frac{\pi}{2R} \left[ \sum_{\ell} \sum_{q} S_{\ell q} (1+\delta_{q,1}) \delta_{q,m+1} \begin{Bmatrix} +_{E_{mn}}^{kl} \\ +_{H_{mn}}^{kl} \end{Bmatrix} - \sum_{\ell} \sum_{q} S_{\ell q} (1-\delta_{q,0}) \delta_{q,m-1} \begin{Bmatrix} -_{E_{mn}}^{kl} \\ -_{H_{mn}}^{kl} \end{Bmatrix} \right] \quad (C.10b)$$

e

$$\begin{Bmatrix} l_{E_{emn}}^k \\ l_{H_{omn}}^k \end{Bmatrix}^y = + \frac{\pi}{2R} \left[ \sum_{\ell} \sum_{q} R_{\ell q} (1+\delta_{q,1}) \delta_{q,m+1} \begin{Bmatrix} +_{E_{mn}}^k \\ +_{H_{mn}}^k \end{Bmatrix} + \sum_{\ell} \sum_{q} R_{\ell q} (1+\delta_{q,0}) \delta_{q,m-1} \begin{Bmatrix} -_{E_{mn}}^{kl} \\ -_{H_{mn}}^{kl} \end{Bmatrix} \right] \quad (C.11a)$$

$$\begin{pmatrix} 1_{E_{omn}}^k \\ 1_{H_{emn}}^k \end{pmatrix}^y = \frac{\pi}{2R} \left[ \sum_{\ell} \sum_{q} S_{\ell q} (1 + \delta_{q,1}) \delta_{q,m+1} \begin{pmatrix} +_{E_{mn}}^{k\ell} \\ +_{H_{mn}}^{k\ell} \end{pmatrix} + \sum_{\ell} \sum_{q} S_{\ell q} (1 - \delta_{q,0}) \delta_{q,m-1} \begin{pmatrix} -_{E_{mn}}^{k\ell} \\ -_{H_{mn}}^{k\ell} \end{pmatrix} \right]$$

(C.11b)

onde

$$+_{E_{mn}}^{k\ell} = a_k^1 \frac{+}{I_{nmk\bar{1}}^{\ell,m+1}} \pm ib_k^1 \frac{+}{J_{nmn\bar{1}}^{\ell,m+1}} \pm ik(n+1)c_k^0 \frac{-}{J_{nm\ell,m\pm 1}^{k1}} \quad (C.12a)$$

$$-_{A_{mn}}^{k\ell} = a_k^1 \frac{+}{J_{nmk\bar{1}}^{\ell,m+1}} \pm ib_k^1 \frac{+}{I_{nmk\bar{1}}^{\ell,m+1}} \pm in(n+1)c_k^0 \frac{-}{I_{nm\ell,m\pm 1}^{k1}} \quad (C.12b)$$

As quantidades  $d_k^1, b_k^1$  e  $c_k^0$  são calculadas no Apêndice D.

O valor médio das quantidades  ${}^2_{E_{\lambda mn}}^k, {}^2_{H_{\lambda mn}}^k$  definidas nas equações (4.83) e (A.31) é calculado de modo idêntico ao que fizemos no caso da esfera dielétrica, com os resultados não nulos dados por

$$\overline{{}^2_{E_{oln}}^k}^x = \overline{{}^2_{E_{eln}}^k}^y = (\delta_{rms}^2 / R^2) a_k^2 \beta_{ln}^2 \delta_{k,n} \quad (C.13a)$$

$$\overline{{}^2_{H_{eln}}^k}^x = \overline{{}^2_{H_{oln}}^k}^y = i(\delta_{rms}^2 / R^2) b_k^2 \beta_{ln}^2 \delta_{k,n} \quad (C.13b)$$

onde  $a_k^2$  e  $b_k^2$  são determinados no Apêndice D, equação (D.4).

A partir das equações (C.10) e (C.11) e das relações estatísticas dadas na equação (3.14) podemos obter o valor mé-

dio das quantidades  ${}^2E_{\lambda mn}^{m'n'}$  e  ${}^2H_{\lambda mn}^{m'n'}$  definidas nas equações (4.84) e (A.20), para as polarizações x e y, respectivamente,

Os resultados não nulos são

$$\begin{aligned} \overline{{}^2E_{oln}^{m'n'}}^x &= \overline{{}^2E_{eln}^{m'n'}}^y = \frac{\pi^2 \delta_{rms}^2}{R^2} \frac{1}{\alpha_{n'} \beta_{m'n'}} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} d_k g_{\ell}^x \\ &\times (1 + \delta_{m',0}) T_{\ell, m'+1} \left\{ \frac{h_{n'}^1(R_2)}{h_{n'}(R_2)} \frac{J_{nl n' m'}^{\ell, m'+1} E_{m'n'}^{+k\ell}}{I_{nl n' m'}^{+k\ell}} + \left[ \frac{\tilde{h}_{n'}^1(R_2)}{\tilde{h}_{n'}(R_2)} \frac{J_{nl n' m'}^{\ell, m'+1}}{I_{nl n' m'}^{+k\ell}} + \right. \right. \\ &+ n'(n'+1) \frac{\phi_{n'}(R_2)}{\tilde{h}_{n'}(R_2)} \frac{J_{nl \ell, m'+1}^{-n' m'} H_{m'n'}^{+k\ell}}{I_{nl \ell, m'+1}^{+k\ell}} \left. \right\} - T_{\ell, m'-1} \left\{ \frac{h_{n'}^1(R_2)}{h_{n'}(R_2)} \frac{J_{nl n' m'}^{\ell, m'-1} E_{m'n'}^{-k\ell}}{I_{nl n' m'}^{-k\ell}} + \right. \\ &+ \left. \left[ \frac{\tilde{h}_{n'}^1(R_2)}{\tilde{h}_{n'}(R_2)} \frac{J_{nl n' m'}^{\ell, m'-1}}{I_{nl n' m'}^{-k\ell}} + n'(n'+1) \frac{\phi_{n'}(R_2)}{\tilde{h}_{n'}(R_2)} \frac{J_{nl \ell, m'-1}^{+n' m'} H_{m'n'}^{-k\ell}}{I_{nl \ell, m'-1}^{-k\ell}} \right] \right\} \quad (C.14a) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \overline{{}^2H_{eln}^{m'n'}}^x &= \overline{{}^2H_{oln}^{m'n'}}^y = \frac{\pi^2 \delta_{rms}^2}{R^2} \frac{-1}{\alpha_{n'} \beta_{m'n'}} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \alpha_k g_{\ell}^x \\ &\times (1 + \delta_{m',0}) T_{\ell, m'+1} \left\{ \frac{h_{n'}^1(R_2)}{h_{n'}(R_2)} \frac{J_{nl n' m'}^{\ell, m'+1} E_{m'n'}^{+k\ell}}{I_{nl n' m'}^{+k\ell}} + \left[ \frac{\tilde{h}_{n'}^1(R_2)}{\tilde{h}_{n'}(R_2)} \frac{J_{nl n' m'}^{\ell, m'+1}}{I_{nl n' m'}^{+k\ell}} + \right. \right. \\ &+ n'(n'+1) \frac{\phi_{n'}(R_2)}{\tilde{h}_{n'}(R_2)} \frac{J_{nl \ell, m'+1}^{-n' m'} H_{m'n'}^{+k\ell}}{I_{nl \ell, m'+1}^{+k\ell}} \left. \right\} - T_{\ell, m'-1} \left\{ \frac{h_{n'}^1(R_2)}{h_{n'}(R_2)} \frac{J_{nl n' m'}^{\ell, m'-1} E_{m'n'}^{-k\ell}}{I_{nl n' m'}^{-k\ell}} + \right. \\ &+ \left. \left[ \frac{\tilde{h}_{n'}^1(R_2)}{\tilde{h}_{n'}(R_2)} \frac{J_{nl n' m'}^{\ell, m'-1}}{I_{nl n' m'}^{-k\ell}} + n'(n'+1) \frac{\phi_{n'}(R_2)}{\tilde{h}_{n'}(R_2)} \frac{J_{nl \ell, m'-1}^{+n' m'} H_{m'n'}^{-k\ell}}{I_{nl \ell, m'-1}^{-k\ell}} \right] \right\} \quad (C.14b) \end{aligned}$$

onde  $\frac{h_n^1(R_2)}{h_n(R_2)}$ ,  $\frac{\tilde{h}_n^1(R_2)}{\tilde{h}_n(R_2)}$  e  $\frac{\phi_n(R_2)}{\tilde{h}_n(R_2)}$  são determinados no Apêndi-

ce D.

## A P Ê N D I C E D

No Capítulo IV seção 4.2, foram definidas as seguintes quantidades, referentes à esfera rugosa dielétrica

$$a_k^{1,2} = j_k^{1,2}(R_2) + h_k^{1,2}(R_2) {}^0A_{olk}^s - j_k^{1,2}(R_1) {}^0A_{olk}^t \quad (D.1a)$$

$$b_k^{1,2} = \dot{j}_k^{1,2}(R_2) + \dot{h}_k^{1,2}(R_2) {}^0B_{elk}^s - \dot{j}_k^{1,2}(R_1) {}^0B_{elk}^t \quad (D.1b)$$

$$c_k^{0,1} = \psi_k^{0,1}(R_2) + \phi_k^{0,1}(R_2) {}^0B_{elk}^s - \psi_k^{0,1}(R_1) {}^0B_{elk}^t \quad (D.1c)$$

$$d_k^{1,2} = \gamma_2 \dot{j}_k^{1,2}(R_2) + \gamma_2 \dot{h}_k^{1,2}(R_2) {}^0A_{olk}^s - \gamma_1 \dot{j}_k^{1,2}(R_1) {}^0A_{olk}^t \quad (D.1d)$$

$$e_k^{1,2} = \gamma_2 j_k^{1,2}(R_2) + \gamma_2 h_k^{1,2}(R_2) {}^0B_{elk}^s - \gamma_1 j_k^{1,2}(R_1) {}^0B_{elk}^t \quad (D.1e)$$

$$f_k^{0,1} = \gamma_2 \psi_k^{0,1}(R_2) + \gamma_2 \phi_k^{0,1}(R_2) {}^0A_{olk}^s - \gamma_1 \psi_k^{0,1}(R_1) {}^0A_{olk}^t \quad (D.1f)$$

onde

$${}^0A_{olk}^s = \frac{\gamma_1 \dot{j}_k(R_1) j_k(R_2) - \gamma_2 j_k(R_1) \dot{j}_k(R_2)}{DA_k} \quad (D.2a)$$

$${}^0B_{elk}^s = \frac{\gamma_2 \dot{j}_k(R_1) j_k(R_2) - \gamma_1 j_k(R_1) \dot{j}_k(R_2)}{DB_k} \quad (D.2b)$$

$${}^0A_{olk}^t = \frac{i\gamma_2}{R_2^2 DA_k} \quad (D.2c)$$

$${}^0B_{elk}^t = \frac{i\gamma_2}{R_2^2 DB_k} \quad (D.2d)$$

e

$$DA_k = \gamma_2 \dot{j}_k(R_1) \dot{n}_k(R_2) - \gamma_1 \dot{j}_k(R_1) h_k(R_2) \quad (D.3a)$$

$$DB_k = \gamma_1 \dot{j}_k(R_1) \dot{n}_k(R_2) - \gamma_2 \dot{j}_k(R_1) h_k(R_2) \quad (D.3b)$$

Na seção 4.3, referente à esfera rugosa condutora, foram definidas as quantidades

$$a_k^{1,2} = j_k^{1,2}(R_2) + h_k^{1,2}(R_2) {}^0A_{olk}^s \quad (D.4a)$$

$$b_k^{1,2} = \dot{j}_k^{1,2}(R_2) + \dot{n}_k^{1,2}(R_2) {}^0B_{elk}^s \quad (D.4b)$$

$$c_k^{0,1} = \psi_k^{0,1}(R_2) + \phi_k^{0,1}(R_2) {}^0B_{elk}^s \quad (D.4c)$$

onde

$${}^0A_{olk}^s = - \frac{j_k(R_2)}{h_k(R_2)} \quad (D.5a)$$

$${}^0B_{elk}^s = - \frac{\dot{j}_k(R_2)}{\dot{n}_k(R_2)} \quad (D.5b)$$

Neste apêndice vamos escrever as quantidades dadas nas equações (D.1) e (D.4) e os coeficientes de ordem zero  ${}^0A_{olk}^s$  e  ${}^0B_{elk}^s$ , numa forma adequada para se fazer expansões em série de Taylor e de modo que as expressões obtidas estejam diretamente relacionadas com as funções esféricas de Bessel e as constantes eletromagnéticas dos meios,  $\mu_1, \epsilon_1$  e  $\mu_2, \epsilon_2$ .

As funções  $j_k(x)$  e  $h_k(x)$  definidas na equação (2.39) podem ser escritas na forma

$$\dot{j}_k(x) = \frac{j_k(\rho)}{\rho} [1 + \rho j_k'(\rho)/j_k(\rho)] \quad (D.6)$$

$$\dot{h}_k(x) = \frac{h_k(\rho)}{\rho} [1 + \rho h_k'(\rho)/h_k(\rho)]$$

onde as linhas denotam derivadas com respeito ao argumento  $\rho$ .

Substituindo a equação (D.6) na equação (D.3) podemos obter as expressões

$$DA_k = \frac{\gamma_2}{R_2} j_k(R_1) h_k(R_2) [(1 - \mu_{21}) + R_2 h_k'(R_2)/h_k(R_2) - \mu_{21} (R_1) j_k'(R_1)/j_k(R_1)] \quad (D.7)$$

$$DB_k = \frac{\gamma_2}{R_1} j_k(R_1) h_k(R_2) [(\epsilon_{12} - 1) + \epsilon_{12} R_2 h_k'(R_2)/h_k(R_2) - R_1 j_k'(R_1)/j_k(R_1)]$$

onde definimos

$$\mu_{21} = \mu_2/\mu_1 \quad (D.8)$$

$$\epsilon_{12} = \epsilon_1/\epsilon_2$$

e usamos as relações

$$\frac{\gamma_1 R_2}{\gamma_2 R_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

(D.9)

$$\frac{\gamma_1 R_1}{\gamma_2 R_2} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

Substituindo as equações (D.7a) e (D.7b) nas equações (D.2a) e (D.2b) respectivamente, obtemos

$$\theta_{A_{olk}}^s = \frac{-j_k(R_2)}{h_k(R_2)} \frac{(1-\mu_{21}) + R_2 j_k'(R_2)/j_k(R_2) - \mu_{21} R_1 j_k'(R_1)/j_k(R_1)}{(1-\mu_{21}) + R_2 h_k'(R_2)/h_k(R_2) - \mu_{21} R_1 j_k'(R_1)/j_k(R_1)}$$

(D.10)

$$\theta_{B_{elk}}^s = \frac{-j_k(R_2)}{h_k(R_2)} \frac{(\epsilon_{12}-1) + \epsilon_{12} R_2 j_k'(R_2)/j_k(R_2) - R_1 j_k'(R_1)/j_k(R_1)}{(\epsilon_{12}-1) + \epsilon_{12} R_2 h_k'(R_2)/h_k(R_2) - R_1 j_k'(R_1)/j_k(R_1)}$$

para  $\mu_2 = \mu_1$  o índice de refração relativo entre os meios é  $N = (\epsilon_1/\epsilon_2)^{1/2}$  e os coeficientes  $\theta_{A_{olk}}^s$  e  $\theta_{B_{elk}}^s$  referentes à esfera dielétrica ficam na forma

$$\theta_{A_{olk}}^s = \frac{-j_k(R_2)}{h_k(R_2)} \frac{R_2 j_k'(R_2)/j_k(R_2) - R_1 j_k'(R_1)/j_k(R_1)}{R_2 h_k'(R_2)/h_k(R_2) - R_1 j_k'(R_1)/j_k(R_1)}$$

(D.11)

$$\theta_{B_{elk}}^s = \frac{-j_k(R_2)}{h_k(R_2)} \frac{(N^2-1) + N^2 R_2 j_k'(R_2)/j_k(R_2) - R_1 j_k'(R_1)/j_k(R_1)}{(N^2-1) + N^2 R_2 h_k'(R_2)/h_k(R_2) - R_1 j_k'(R_1)/j_k(R_1)}$$

Substituindo a equação (D.6) na equação (D.5) os coeficientes  ${}^0A_{0lk}^s$  e  ${}^0B_{elk}^s$  referentes à esfera condutora ficam na forma

$${}^0A_{0lk}^s = \frac{-j_k(R_2)}{h_k(R_2)} \quad (D.12a)$$

$${}^0B_{elk}^s = \frac{-j_k(R_2)}{h_k(R_2)} \frac{1+R_2 j_k'(R_2)/j_k(R_2)}{1+R_2 h_k'(R_2)/h_k(R_2)} \quad (D.12b)$$

Partindo das definições dadas na equação (2.39 e 40) e da notação definida na equação (4.26) podemos obter as funções

$$j_k^1 = \rho j_k'$$

$$j_k^2 = \frac{\rho^2}{2} j_k''$$

$$\dot{j}_k^1 = \rho j_k'' + j_k' - \frac{j_k}{\rho} \quad (D.13)$$

$$\dot{j}_k^2 = \frac{1}{2} [\rho^2 j_k''' + \rho j_k'' - 2j_k' + \frac{2j_k}{\rho}]$$

$$\psi_k^0 = \frac{j_k}{\rho}$$

$$\phi_k^0 = \rho j_k' - \frac{j_k}{\rho}$$

A equação diferencial das funções esféricas de Bessel <sup>(16)</sup> nos permite obter as funções  $j_k'''$  e  $j_k''$  em termos das

funções  $j_k$  e  $j'_k$  e assim as equações (D.13) ficam na forma

$$j_k^1 = \rho j'_k$$

$$j_k^2 = \frac{1}{2} [k(k+1) - \rho^2] j_k - \rho j'_k$$

$$j_k^1 = \frac{1}{\rho} [k(k+1) - (1+\rho^2)] j_k - j'_k$$

(D.14)

$$j_k^2 = \frac{1}{2\rho} [\rho^2 + 2 - 3k(k+1)] j_k + \frac{1}{2} [k(k+1) + 2 - \rho^2] j'_k$$

$$\psi_k^0 = \frac{1}{\rho} j_k$$

$$\psi_k^1 = -\frac{1}{\rho} j_k + j'_k$$

Procedendo de modo análogo com as funções esféricas de Hankel, obtemos

$$h_k^1 = \rho h'_k$$

$$h_k^2 = \frac{1}{2} [k(k+1) - \rho^2] h_k - \rho h'_k$$

$$h_k^1 = \frac{1}{\rho} [k(k+1) - (1+\rho^2)] h_k - h'_k$$

(D.15)

$$h_k^2 = \frac{1}{2\rho} [\rho^2 + 2 - 3k(k+1)] h_k + \frac{1}{2} [k(k+1) + 2 - \rho^2] h'_k$$

$$\phi_k^0 = \frac{1}{\rho} h_k$$

$$\phi_k^1 = \frac{-1}{\rho} h_k + h'_k$$

Se  $f_k(R_2)$  representa o primeiro termo no lado direito das equações (D.1) e (D.4) e  $g_k(R_2)$  representa as funções que multiplicam os coeficientes  ${}^0A_{olk}^s$  e  ${}^0B_{elk}^s$  no segundo termo destas equações, então, podemos escrever as funções  $f_k(R_2)$  e  $g_k(R_2)$  na forma

$$f_k(R_2) = \alpha(R_2)j_k(R_2) + \beta(R_2)j'_k(R_2) \quad (D.16)$$

$$g_k(R_2) = \alpha(R_2)h_k(R_2) + \beta(R_2)h'_k(R_2)$$

onde  $\alpha(R_2)$  e  $\beta(R_2)$  podem ser obtidos das equações (D.11) e (D.12), e contêm um fator  $\gamma_2$  no caso das equações (D.1d), (D.1e) e (D.1f)

S semelhantemente, se  $f_k(R_1)$  representa as funções que multiplicam os coeficientes  ${}^0A_{olk}^t$  e  ${}^0B_{elk}^t$  na equação (D.1), temos

$$f_k(R_1) = \alpha(R_1)j_k(R_1) + \beta(R_1)j'_k(R_1) \quad (D.17)$$

onde  $\alpha(R_1)$  e  $\beta(R_1)$  têm a mesma forma de  $\alpha(R_2)$  e  $\beta(R_2)$ , respectivamente, mas com um fator  $\gamma_1$  (em vez de  $\gamma_2$ ) no caso das equações (D.1d), (D.1e) e (D.1f).

A partir das equações (D.13) e (D.14) podemos desenvolver uma fórmula para as quantidades definidas na equação (A.1) que envolvem os coeficientes  ${}^0A_{olk}^s$  e  ${}^0A_{olk}^t$  se  $A_k(\mu_1, \epsilon_1; \mu_2, \epsilon_2)$  representa as quantidades definidas nas equações (D.1a), (D.1d) e (D.1f), podemos escrever

$$A_k(\mu_1, \epsilon_1; \mu_2, \epsilon_2) = f_k(R_2) + g_k(R_2) {}^0 A_{olk}^s - f_k(R_1) {}^0 A_{olk}^t \quad (D.18)$$

De modo análogo, se  $B_k(\mu_1, \epsilon_1; \mu_2, \epsilon_2)$  representa as quantidades definidas nas equações (D.1b), (D.1c) e (D.1e), podemos escrever

$$B_k(\mu_1, \epsilon_1; \mu_2, \epsilon_2) = f_k(R_2) + g_k(R_2) {}^0 B_{elk}^s - f_k(R_1) {}^0 B_{elk}^t \quad (D.19)$$

Substituindo as equações (D.2a), (D.2c) e (D.3a) na equação (D.15) e as equações (D.2b), (D.2d) e (D.3b) na equação (D.16) e usando o Wronskiano,

$$j_k(x)h_k'(x) - j_k'(x)h_k(x) = \frac{i}{x^2} \quad , \quad (D.20)$$

podemos obter as fórmulas

$$A_k(\mu_1, \epsilon_1; \mu_2, \epsilon_2) = \frac{i\gamma_2 j_k(R_1)}{R_2^2 DA_k} \{ \alpha(R_2) - \alpha(R_1) - (1 - \mu_{21}) \frac{\beta(R_2)}{R_2} + \frac{1}{\gamma_2 R_1} [\gamma_1 \beta(R_2) - \gamma_2 \beta(R_1)] \} \times \\ \times \frac{R_1 j_k'(R_1)}{j_k(R_1)} \quad (D.21a)$$

$$B_k(\mu_1, \epsilon_1; \mu_2, \epsilon_2) = \frac{i\gamma_2 j_k(R_1)}{R_2^2 DB_k} \{ (1 - \epsilon_{12}) \frac{\beta(R_2)}{R_1} + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \alpha(R_2) - \alpha(R_1) + \frac{1}{R_1} [\beta(R_2) - \beta(R_1)] \} \times \\ \times \frac{R_1 j_k'(R_1)}{j_k(R_1)} \quad (D.21b)$$

No caso da esfera rugosa condutora, se  $A_k(\mu_2, \epsilon_2)$  representa as quantidades definidas na equação (D.4a) e  $B_k(\mu_2, \epsilon_2)$  representa as quantidades definidas nas equações (D.4b) e (D.4c), podemos escrever

$$A_k(\mu_2, \epsilon_2) = f_k(R_2) + g_k(R_2) {}^0A_{01k}^S$$

$$e \quad (D.22)$$

$$B_k(\mu_2, \epsilon_2) = f_k(R_2) + g_k(R_2) {}^0B_{e1k}^S .$$

Substituindo a equação (D.5a) na equação (D.19a) e a equação (D.5b) na equação (D.19b) podemos obter as fórmulas

$$A_k(\mu_2, \epsilon_2) = \frac{-i\beta(R_2)}{R_2^2 h_k(R_2)} \quad (D.23a)$$

$$B_k(\mu_2, \epsilon_2) = \frac{i}{R_2^2 h_k(R_2)} [\alpha(R_2) - \beta(R_2)/R_2] \quad (D.23b)$$

Para as quantidades  $A_k(\mu_1, \epsilon_1; \mu_2, \epsilon_2)$  e  $B_k(\mu_1, \epsilon_1; \mu_2, \epsilon_2)$  as funções  $\alpha(R_2), \alpha(R_1), \beta(R_2)$  e  $\beta(R_1)$  são dadas nas Tabelas a seguir

TABELA D.1a

$A_k(\mu_1 \varepsilon_1; \mu_2 \varepsilon_2)$	$\alpha(R_2)$	$\alpha(R_1)$	$\beta(R_2)$	$\beta(R_1)$
$a_k^1$	0	0	$R_2$	$R_1$
$d_k^1$	$(\gamma_2/R_2) [k(k+1) - (1+R_2^2)]$	$(\gamma_1/R_1) [k(k+1) - (1+R_1^2)]$	$-\gamma_2$	$-\gamma_1$
$f_k^0$	$(\gamma_2/R_2)$	$(\gamma_1/R_1)$	0	0
$a_k^2$	$[k(k+1) - R_2^2] / 2$	$[k(k+1) - R_1^2] / 2$	$-R_2$	$-R_1$
$d_k^2$	$[R_2^2 + 2 - 3k(k+1)] (\gamma_2 / 2R_2)$	$[R_1^2 + 2 - 3k(k+1)] (\gamma_1 / 2R_1)$	$[k(k+1) + 2 - R_2^2] (\gamma_2 / 2)$	$[k(k+1) + 2 - R_1^2] (\gamma_1 / 2)$
$f_k^1$	$-(\gamma_2/R_2)$	$-(\gamma_1/R_1)$	$\gamma_2$	$\gamma_1$

TABELA D.1b

$B_k(\mu_1 \varepsilon_1; \mu_2 \varepsilon_2)$	$\alpha(R_2)$	$\alpha(R_1)$	$\beta(R_2)$	$\beta(R_1)$
$b_k^1$	$[k(k+1)-(1+R_2^2)](1/R_2)$	$[k(k+1)-(1+R_1^2)](1/R_1)$	-1	-1
$c_k^0$	$(1/R_2)$	$(1/R_1)$	0	0
$e_k^1$	0	0	$\gamma_2 R_2$	$\gamma_1 R_1$
$b_k^2$	$[R_2^2+2-3k(k+1)](1/2R_2)$	$[R_1^2+2-3k(k+1)](1/2R_1)$	$[k(k+1)+2-R_2^2]/2$	$[k(k+1)+2-R_1^2]/2$
$c_k^1$	$(-1/R_2)$	$(-1/R_1)$	1	1
$e_k^2$	$[k(k+1)-R_2^2](\gamma_2/2)$	$[k(k+1)-R_1^2](\gamma_1/2)$	$-\gamma_2 R_2$	$-\gamma_1 R_1$

Para as quantidades  $A_k(\mu_2, \varepsilon_2)$  e  $B_k(\mu_2, \varepsilon_2)$  as funções  $\alpha(R_2)$  e  $\beta(R_2)$  são

TABELA D.2a

$A_k(\mu_2, \varepsilon_2)$	$\alpha(R_2)$	$\beta(R_2)$
$a_k^1$	0	$R_2$
$a_k^2$	$[k(k+1) - R_2^2]/2$	$-R_2$

TABELA D.2b

$B_k(\mu_2, \varepsilon_2)$	$\alpha(R_2)$	$\beta(R_2)$
$b_k^1$	$[k(k+1) - (1+R_2^2)]/R_2$	-1
$c_k^0$	$(1/R_2)$	0
$b_k^2$	$[R_2^2 + 2 - 3k(k+1)](1/2R_2)$	$[k(k+1) + 2 - R_2^2]/2$
$c_k^1$	$(-1/R_2)$	1

Substituindo os valores das tabelas (D. 1a) e (D. 1b) nas fórmulas (D.18a) e (D.18b), respectivamente, podemos obter as quantidades definidas na equação (D.1) na forma

$$a_k^1 = \frac{-i}{R_2^2 h_k} \frac{(1-\mu_{21})(1 + R_1 j'_k/j_k)}{(1-\mu_{21}) + R_2 h'_k/h_k - \mu_{21} R_1 j'_k/j_k}$$

$$b_k^1 = \frac{i}{R_2^2 h_k} \frac{k(k+1)(\epsilon_{12}-1) + (1-\mu_{21})R_1^2}{(\epsilon_{12}-1) + \epsilon_{12} R_2 h'_k/h_k - R_1 j'_k/j_k}$$

$$c_k^0 = \frac{i}{R_2^2 h_k} \frac{(\epsilon_{12} - 1)}{(\epsilon_{12}-1) + \epsilon_{12} R_2 h'_k/h_k - R_1 j'_k/j_k}$$

(D.24)

$$d_k^1 = \frac{i\gamma_2}{h_k} \frac{(\epsilon_{12}-1) + k(k+1)(1-\mu_{21})(1/R_2^2)}{(1-\mu_{21}) + R_2 h'_k/h_k - \mu_{21} R_1 j'_k/j_k}$$

$$e_k^1 = \frac{-i\gamma_2}{R_2^2 h_k} \frac{(\epsilon_{12}-1)(1 + R_1 j'_k/j_k)}{(\epsilon_{12}-1) + \epsilon_{12} R_2 h'_k/h_k - R_1 j'_k/j_k}$$

$$f_k^0 = \frac{i\gamma_2}{R_2^2 h_k} \frac{(1-\mu_{21})}{(1-\mu_{21}) + R_2 h'_k/h_k - \mu_{21} R_1 j'_k/j_k}$$

$$a_k^2 = \frac{i}{R_2 h_k} \frac{(1-\mu_{21})(R_1 j_k'/j_k - 1) + (\epsilon_{12} - \mu_{21})(R_2^2/2\mu_{21})}{(1-\mu_{21}) + R_2 h_k'/h_k - \mu_{21} R_1 j_k'/j_k}$$

$$b_k^2 = \frac{-i}{2R_2^2 h_k} \frac{(\epsilon_{12} - 1)[4k(k+1) - R_2^2] + (1-\mu_{21})R_1^2 - (R_2^2/\mu_{21})(\epsilon_{12} - \mu_{21})(R_1 j_k'/j_k)}{(\epsilon_{12} - 1) + \epsilon_{12} R_2 h_k'/h_k - R_1 j_k'/j_k}$$

$$c_k^1 = \frac{-2i}{R_2^2 h_k} \frac{(\epsilon_{12} - 1)}{(\epsilon_{12} - 1) + \epsilon_{12} R_2 h_k'/h_k - R_1 j_k'/j_k}$$

(D. 25 )

$$d_k^2 = \frac{-i\gamma_2}{2h_k} \frac{(\epsilon_{12} - 1) + (1-\mu_{21})[4k(k+1) - R_2^2](1/R_2^2) - (\epsilon_{12} - \mu_{21})R_1 j_k'/j_k}{(1-\mu_{21}) + R_2 h_k'/h_k - \mu_{21} R_1 j_k'/j_k}$$

$$e_k^2 = \frac{i\gamma_2}{R_2 h_k} \frac{(\epsilon_{12} - 1)(1 + R_1 j_k'/j_k) + (\epsilon_{12} - \mu_{21})(R_1^2/2)}{(\epsilon_{12} - 1) + \epsilon_{12} R_2 h_k'/h_k - R_1 j_k'/j_k}$$

$$f_k^1 = \frac{-2i\gamma_2}{R_2^2 h_k} \frac{(1 - \mu_{21})}{(1 - \mu_{21}) + R_2 h_k'/h_k - \mu_{21} R_1 j_k'/j_k}$$

Nas equações (D.24) e (D.25) omitimos o argumento  $R_1$  das funções  $j_k(R_1)$  e  $j_k'(R_1)$  e o argumento  $R_2$  das funções  $h_k(R_2)$  e  $h_k'(R_2)$ .

Para  $\mu_1 = \mu_2$  e  $N^2 = \epsilon_{12}$  as equações (D.24) e (d.25) fi

cam na forma

$$a_k^1 = 0$$

$$b_k^1 = (N^2-1)[ik(k+1)/R_2^2 h_k] [(N^2-1)+N^2 R_2 h'_k/h_k - R_1 j'_k/j_k]^{-1}$$

$$c_k^0 = (N^2-1)[i/R_2^2 h_k] [(N^2-1)+N^2 R_2 h'_k/h_k - R_1 j'_k/j_k]^{-1}$$

(D.26)

$$d_k^1 = (N^2-1)[i\gamma_2/h_k] [R_2 h'_k/h_k - R_1 j'_k/j_k]^{-1}$$

$$e_k^1 = (N^2-1)[-i\gamma_2/R_2 h_k] [1+R_1 j'_k/j_k] [(N^2-1)+N^2 R_2 h'_k/h_k - R_1 j'_k/j_k]^{-1}$$

$$f_k^0 = 0$$

e

$$a_k^2 = (N^2-1)[iR_2/2h_k] [R_2 h'_k/h_k - R_1 j'_k/j_k]^{-1}$$

$$b_k^2 = (N^2-1)[-i/2R_2^2 h_k] [4k(k+1)+R_2^2(1-R_1 j'_k/j_k)] [(N^2-1)+N^2 R_2 h'_k/h_k - R_1 j'_k/j_k]^{-1}$$

$$c_k^1 = (N^2-1)[-2i/R_2^2 h_k] [(N^2-1)+N^2 R_2 h'_k/h_k - R_1 j'_k/j_k]^{-1}$$

$$d_k^2 = (N^2-1)[i\gamma_2/2h_k] [R_1 j'_k/j_k - 1] [R_2 h'_k/h_k - R_1 j'_k/j_k]^{-1}$$

(D.27)

$$e_k^2 = (N^2-1)[i\gamma_2/R_2 h_k] [1+(R_1^2/2)+R_1 j'_k/j_k] [(N^2-1)+N^2 R_2 h'_k/h_k - R_1 j'_k/j_k]^{-1}$$

$$f_k^1 = 0$$

Substituindo os valores das tabelas (D.2 a) e (D.2 b) nas equações (D.23a) e (D.23b), respectivamente, podemos obter as quantidades definidas na equação (D.4) referentes à esfera rugosa condutora

$$a_k^1 = [ -i/R_2 h_k ]$$

$$b_k^1 = [ +i/R_2^2 h_k ] [ k(k+1) - R_2^2 ] [ 1 + R_2 h'_k / h_k ]^{-1} \quad (D.28)$$

$$c_k^0 = [ i/R_2 h_k ] [ 1 + R_2 h'_k / h_k ]^{-1}$$

e

$$a_k^2 = [ +i/R_2 h_k ]$$

$$b_k^2 = [ -i/R_2^2 h_k ] [ 2k(k+1) - R_2^2 ] [ 1 + R_2 h'_k / h_k ]^{-1} \quad (D.29)$$

$$c_k^1 = [ -2i/R_2^2 h_k ] [ 1 + R_2 h'_k / h_k ]^{-1}$$

No Apêndice C, equações (C.6) e (C.7), foram definidos as quantidades  $A1_n, A2_n, A3_n, A4_n, A5_n, A6_n$  e  $B1_n, B2_n, B3_n, B4_n, B5_n, B6_n$ . A partir das equações (D.6) e (D.7) podemos obter estas quantidades na forma

$$A1_n = \frac{\mu_{21} R_2 h'_n / h_n - R_1 j'_n / j_n - (1 - \mu_{21}) (R_1 j'_n / j_n) (R_2 h'_n / h_n)}{(1 - \mu_{21}) + R_2 h'_n / h_n - \mu_{21} R_1 j'_n / j_n} \quad (D.30a)$$

$$A^2_n = \frac{-R_2}{\gamma_2} \frac{R_2 h'_n/h_n - R_1 j'_n/j_n}{(1-\mu_{21}) + R_2 h'_n/h_n - \mu_{21} R_1 j'_n/j_n} \quad (\text{D.30b})$$

$$A^3_n = \frac{-\gamma_2}{R_2} \left\{ \frac{\mu_{21} n(n+1) (R_2 h'_n/h_n - R_1 j'_n/j_n) - R_2^2 (\epsilon_{12} - \mu_{21}) - R_2^2 [\epsilon_{12} R_2 h'_n/h_n - \mu_{21} R_1 j'_n/j_n]}{(1-\mu_{21}) + R_2 h'_n/h_n - \mu_{21} R_1 j'_n/j_n} \right\}$$

(D.30c)

$$A^4_n = 1 - \frac{n(n+1)(1-\mu_{21}) + R_2^2 (\epsilon_{12} - 1)}{(1-\mu_{21}) + R_2 h'_n/h_n - \mu_{21} R_1 j'_n/j_n} \quad (\text{D.30d})$$

$$A^5_n = - \frac{\gamma_2 \mu_{21}}{R^2} \frac{R_2 h'_n/h_n - R_1 j'_n/j_n}{(1-\mu_{21}) + R_2 h'_n/h_n - \mu_{21} R_1 j'_n/j_n} \quad (\text{D.30e})$$

$$A^6_n = - \frac{(1-\mu_{21})}{(1-\mu_{21}) + R_2 h'_n/h_n - \mu_{21} R_1 j'_n/j_n} \quad (\text{D.30f})$$

e

$$B^1_n = -1 + \frac{n(n+1)(\epsilon_{12} - 1) + R^2(1-\mu_{21})}{(\epsilon_{12} - 1) + \epsilon_{12} R_2 h'_n/h_n - R_1 j'_n/j_n} \quad (\text{D.31a})$$

$$B2_n = \frac{1}{\gamma_2 R_2} \left\{ \frac{[n(n+1)] [R_2 h'_n / h_n - R_1 j'_n / j_n]}{(\epsilon_{12} - 1) + \epsilon_{12} R_2 h'_n / h_n - R_1 j'_n / j_n} + \right. \\ \left. - \frac{R_2^2 / \mu_{21}}{(\epsilon_{12} - 1) + \epsilon_{12} R_2 h'_n / h_n - R_1 j'_n / j_n} \frac{[\epsilon_{12}^{-\mu_{21}} + \epsilon_{12} R_2 h'_n / h_n - \mu_{21} R_1 j'_n / j_n]}{(\epsilon_{12} - 1) + \epsilon_{12} R_2 h'_n / h_n - R_1 j'_n / j_n} \right\} \quad (D.31b)$$

$$B3_n = \frac{(\epsilon_{12} - 1)}{(\epsilon_{12} - 1) + \epsilon_{12} R_2 h'_n / h_n - R_1 j'_n / j_n} \quad (D.31c)$$

$$B4_n = \frac{1}{\gamma_2 R_2} \frac{R_2 h'_n / h_n - R_1 j'_n / j_n}{(\epsilon_{12} - 1) + \epsilon_{12} R_2 h'_n / h_n - R_1 j'_n / j_n} \quad (D.31d)$$

$$B5_n = \gamma_2 R_2 \epsilon_{12} \frac{R_2 h'_n / h_n - R_1 j'_n / j_n}{(\epsilon_{12} - 1) + \epsilon_{12} R_2 h'_n / h_n - R_1 j'_n / j_n} \quad (D.31e)$$

$$B6_n = \frac{\epsilon_{12} R_1 j'_n / j_n - R_2 h'_n / h_n + (\epsilon_{12} - 1) [R_1 j'_n / j_n] [R_2 h'_n / h_n]}{(\epsilon_{12} - 1) + \epsilon_{12} R_2 h'_n / h_n - R_1 j'_n / j_n} \quad (D.31f)$$

Para  $\mu_1 = \mu_2$  e  $N^2 = \epsilon_1 / \epsilon_2$  as equações (D.30) e (D.31) ficam na forma

$$A1_n = 1 \quad (D.32a)$$

$$A2_n = -R_2 / \gamma_2 \quad (D.32b)$$

$$A3_n = \frac{\gamma_2}{R_2} \left[ -n(n+1) + R_2^2 \frac{(N^2-1) + N^2 R_2 h'_n/h_n - R_1 j'_n/j_n}{R_2 h'_n/h_n - R_1 j'_n/j_n} \right] \quad (D.32c)$$

$$A4_n = 1 - \frac{R_2^2(N^2-1)}{R_2 h'_n/h_n - R_1 j'_n/j_n} \quad (D.32d)$$

$$A5_n = -\gamma_2/R_2 \quad (D.32e)$$

$$A6_n = 0 \quad (D.32f)$$

e

$$B1_n = -1 + \frac{n(n+1)(N^2-1)}{(N^2-1) + N^2 R_2 h'_n/h_n - R_1 j'_n/j_n} \quad (D.33a)$$

$$B2_n = \frac{1}{\gamma_2 R_2} \left\{ -R_2^2 + \frac{[n(n+1)][R_2 h'_n/h_n - R_1 j'_n/j_n]}{(N^2-1) + N^2 R_2 h'_n/h_n - R_1 j'_n/j_n} \right\} \quad (D.33b)$$

$$B3_n = \frac{(N^2-1)}{(N^2-1) + N^2 R_2 h'_n/h_n - R_1 j'_n/j_n} \quad (D.33c)$$

$$B4_n = \frac{1}{\gamma_2 R_2} \frac{R_2 h'_n / h_n - R_1 j'_n / j_n}{(N^2 - 1) + N^2 h'_n / h_n - R_1 j'_n / j_n} \quad (D.33d)$$

$$B5_n = \gamma_2 R_2 N^2 \frac{R_2 h'_n / h_n - R_1 j'_n / j_n}{(N^2 - 1) + N^2 R_2 h'_n / h_n - R_1 j'_n / j_n} \quad (D.33e)$$

$$B6_n = \frac{N^2 R_1 j'_n / j_n - R_2 h'_n / h_n + (N^2 - 1) [R_1 j'_n / j_n] [R_2 h'_n / h_n]}{(N^2 - 1) + N^2 R_2 h'_n / h_n - R_1 j'_n / j_n} \quad (D.33f)$$

No Apêndice C as equações (C.14a) e (C.14b) referentes à esfera rugosa condutora contêm as funções  $h_n^1(R_2)/h_n(R_2)$ ,  $\bar{h}_n^1(R_2)/\bar{h}_n(R_2)$  e  $\phi_n(R_2)/\bar{h}_n(R_2)$ . Considerando as equações (D.4) e (D.5) podemos obter estas funções na forma

$$\frac{h_n^1}{h_n} = R_2 h'_n / h_n$$

$$\frac{\bar{h}_n^1}{\bar{h}_n} = -1 + \frac{n(n+1) - R_2^2}{1 + R_2 h'_n / h_n} \quad (D.34)$$

$$\frac{\phi_n}{\bar{h}_n} = \frac{1}{1 + R_2 h'_n / h_n}$$

Nas soluções formais para os coeficientes  ${}^1A_{mn}^s$ ,  ${}^1B_{\lambda mn}^s$ ,  ${}^2A_{\lambda mn}^s$ ,  ${}^2B_{\lambda mn}^s$  referentes à esfera rugosa dielétrica (equações (4.47), (4.56), (E.13) e (B.17)) aparecem as funções  $\gamma_1 \dot{j}_n(R_1)/DA_n$ ,  $j_n(R_1)/DA_n$ ,  $\gamma_1 j_n(R_1)/DB_n$  e  $\dot{j}_n(R_1)/DB_n$ . A partir das equações (D.7) e (D.6) obtemos estas funções na forma

$$\frac{\gamma_1 \dot{j}_n}{DA_n} = \frac{\mu_{21}}{h_n} \frac{1 + R_1 j'_n / j_n}{(1 - \mu_{21}) + R_2 h'_n / h_n - \mu_{21} R_1 j'_n / j_n} \quad (\text{D.35a})$$

$$\frac{j_n}{DA_n} = \frac{R_2}{\gamma_2 h_n} \frac{1}{(1 - \mu_{21}) + R_2 h'_n / h_n - \mu_{21} R_1 j'_n / j_n} \quad (\text{D.35b})$$

$$\frac{\gamma_1 j_n}{DB_n} = \frac{R_2}{h_n} \frac{\epsilon_{12}}{(\epsilon_{12} - 1) + \epsilon_{12} R_2 h'_n / h_n - R_1 j'_n / j_n} \quad (\text{D.35c})$$

$$\frac{\dot{j}_n}{DB_n} = \frac{1}{\gamma_2 h_n} \frac{1 + R_1 j'_n / j_n}{(\epsilon_{12} - 1) + \epsilon_{12} R_2 h'_n / h_n - R_1 j'_n / j_n} \quad (\text{D.35d})$$

Para  $\mu_{21} = 1$  e  $\epsilon_{12} = N^2$  temos

$$\frac{\gamma_1 \dot{j}_n}{DA_n} = \frac{1}{h_n} \frac{1 + R_1 j'_n / j_n}{R_2 h'_n / h_n - R_1 j'_n / j_n} \quad (\text{D.36a})$$

$$\frac{\dot{j}_n}{DA_n} = \frac{R_2}{\gamma_2 h_n} \frac{1}{R_2 h'_n / h_n - R_1 \dot{j}'_n / \dot{j}_n} \quad (\text{D.36b})$$

$$\frac{\gamma_1 \dot{j}_n}{DB_n} = \frac{R_2}{h_n} \frac{N^2}{(N^2 - 1) + N^2 R_2 h'_n / h_n - R_1 \dot{j}'_n / \dot{j}_n} \quad (\text{D.36c})$$

$$\frac{\dot{j}_n}{DB_n} = \frac{1}{\gamma_2 h_n} \frac{1 + R_1 \dot{j}'_n / \dot{j}_n}{(N^2 - 1) + N^2 R_2 h'_n / h_n - R_1 \dot{j}'_n / \dot{j}_n} \quad (\text{D.36d})$$

## A P Ê N D I C E E

Neste Apêndice vamos determinar os coeficientes do campo espalhado de ordem zero,  ${}^0A_{\lambda mn}^s$  e  ${}^0B_{\lambda mn}^s$ , ordem um,  ${}^1A_{\lambda mn}^s$  e  ${}^1B_{\lambda mn}^s$  e de ordem dois,  ${}^2A_{\lambda mn}^s$  e  ${}^2B_{\lambda mn}^s$ , em primeira aproximação no limite de espalhamento Rayleigh ( $R_2 \rightarrow 0$ ), para as polarizações incidentes no eixo x e no eixo y.

As expansões em série de potências das funções esféricas de Bessel  $j_n(\rho)$  e  $n_n(\rho)$  são<sup>(23)</sup>

$$j_n(\rho) = \frac{\rho^n}{1.3.5\dots(2n+1)} \left[ 1 - \frac{(\rho^2/2)}{1!(2n+3)} + \frac{(\rho^2/2)^2}{2!(2n+3)(2n+5)} - \dots \right]$$

$$n_n(\rho) = \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{\rho^{n+1}} \left[ 1 - \frac{(\rho^2/2)}{1!(1-2n)} + \frac{(\rho^2/2)^2}{2!(1-2n)(3-2n)} - \dots \right]$$

(E.1)

Destas séries podemos obter os primeiros termos das séries das funções

$$\rho j_n'(\rho)/j_n(\rho) \approx n - \frac{\rho^2}{(2n+3)} + O(\rho^4) \quad (E.2a)$$

$$\rho h_n'(\rho)/h_n(\rho) \approx -(n+1) + \frac{\rho^2}{(2n-1)} + O(\rho^3) \quad (E.2b)$$

$$\frac{1}{h_n(\rho)} \approx \frac{i\rho^{n+1}}{1.3.5\dots(2n-1)} \left[ 1 - \frac{\rho^2}{2(2n-1)} + O(\rho^3) \right], \quad (\text{E.2c})$$

onde  $h_n = j_n + i\eta_n$  é a função esférica de Hankel do primeiro tipo e as equações (E.2) são válidas para  $n \geq 1$ .

A partir das expansões dadas nas equações (E.1) e (E.2) vamos obter os resultados a seguir neste apêndice. Usaremos a notação  $(A_{\lambda mn}^x, B_{\lambda mn}^x) = (A_{\lambda mn}^S, B_{\lambda mn}^S)$  para nos referirmos aos coeficientes do campo espalhado em qualquer ordem devido a polarização incidente no eixo x e  $(A_{\lambda mn}^y, B_{\lambda mn}^y) = (A_{\lambda mn}^S, B_{\lambda mn}^S)$  para nos referirmos aos coeficientes do campo espalhado devido a polarização incidente no eixo y. No caso da esfera rugosa dielétrica os coeficientes serão obtidos para esferas não magnéticas de modo que  $\mu_2 = \mu_1$  e  $N = (\epsilon_1/\epsilon_2)^{1/2}$ .

#### E.1.1. - Coeficientes de ordem zero - Esfera Rugosa Dielétrica

Das equações (4.40), (A.10) e (D.11) obtemos

$$\begin{aligned} {}^0A_{o11}^x &= {}^0A_{e11}^y \approx i \frac{R_2^5}{45} (N^2 - 1) + O(R_2^7) \\ {}^0B_{e11}^x &= {}^0B_{o11}^y \approx i \frac{2R_2^3}{3} \left( \frac{N^2 - 1}{N^2 + 2} \right) + O(R_2^5) \\ {}^0A_{o12}^x &= {}^0A_{e12}^y \approx O(R_2^7) \\ {}^0B_{e12}^x &= {}^0B_{o12}^y \approx O(R_2^5) \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

## E.1.2 - Coeficientes em ordem um - Esfera Rugosa Dielétrica

As quantidades dadas nas equações (D.26) não nulas ( $a_k^1 = f_k^0 = 0$ ) e com índice  $k = 1$  resultam

$$b_1^1 \approx 2 \left( \frac{N^2 - 1}{N^2 + 2} \right) + O(R_2^2)$$

$$c_1^1 \approx \left( \frac{N^2 + 1}{N^2 + 2} \right) + O(R_2^2)$$

(E.4)

$$d_1^1 \approx \frac{\gamma_2 R_2^2}{3} (N^2 - 1) + O(R_2^4)$$

$$e_1^1 \approx -2\gamma_2 R_2 \left( \frac{N^2 - 1}{N^2 + 2} \right) + O(R_2^3)$$

e para  $k = 2, 3, \dots$  os resultados são de ordem superior em  $R_2$  e por isso serão omitidos. Assim, as quantidades definidas nas equações (C.3) serão

$$E_{mn}^{\pm k \ell} = 0 \quad (E.5a)$$

$$F_{mn}^{\pm 1 \ell} \approx \pm 2i\gamma_2 R_2 \left( \frac{N^2 - 1}{N^2 + 2} \right) J_{nm1}^{\pm \ell, m \pm 1} + O(R_2^2) \quad (E.5b)$$

$$H_{mn}^{\pm 1 \ell} \approx \pm 2i \left( \frac{N^2 - 1}{N^2 + 2} \right) (I_{nm1}^{\pm \ell, m \pm 1} + \bar{I}_{nm\ell, m \pm 1}^{\pm 1 \ell}) + O(R_2^2) \quad (E.5c)$$

$$P_{mn}^{\pm 1\ell} \approx \pm 2i\gamma_2 R_2 \left( \frac{N^2 - 1}{N^2 + 2} \right) I_{nml\bar{1}}^{\pm \ell, m+1} + O(R_2^2) \quad . \quad (E.5d)$$

O resultado dado na equação (E.5a) é válido para quaisquer  $\bar{1}$  índices pois  $b_k^1 = k(k+1)c_k^0$  e pode-se mostrar que

$$J_{nmk\bar{1}}^{\pm \ell, m+1} + \bar{J}_{nm\ell, m+1}^{k1} = 0 \quad .$$

As funções dadas nas equações (D.36) com potência mais baixa de  $R_2$  serão

$$\frac{\gamma_1 \dot{j}_1(R_1)}{DA_1} \approx - \frac{2iR_2^2}{3} + O(R_2^4)$$

$$\frac{j_1(R_1)}{DA_1} \approx - \frac{iR_2^3}{3\gamma_2} + O(R_2^5)$$

(E.6)

$$\frac{\gamma_1 j_1(R_1)}{DB_1} \approx -iR_2^3 \left( \frac{N^2}{N^2 + 2} \right) + O(R_2^5)$$

$$\frac{\dot{j}_1(R_1)}{DB_1} \approx - \frac{2iR_2^2}{\gamma_2} \left( \frac{1}{N^2 + 2} \right) + O(R_2^4).$$

A partir das equações (E.5), (E.6) com a tabela B.3 e das equações (C.1) e (C.2) podemos obter os coeficientes de ordem um para as polarizações x e y, equações (4.48) e (A.13). Para a polarização x teremos

$$l_{A_{o11}}^x \approx O(R_2^4)$$

$$l_{A_{e01}}^x \approx O(R_2^4)$$

(E.7a)

$$l_{A_{e11}}^x \approx O(R_2^5)$$

e

$$l_{B_{e11}}^x \approx \frac{2i}{R} R_2^3 \left( \frac{N^2-1}{N^2+2} \right) \left[ R_{00} - \left( \frac{N^2-1}{N^2+2} \right) \frac{1}{5} R_{20} + \left( \frac{N^2-1}{N^2+2} \right) \frac{6}{5} R_{22} \right]$$

$$l_{B_{e01}}^x \approx \frac{2i}{R} R_2^3 \left( \frac{N^2-1}{N^2+2} \right) \left[ \left( \frac{N^2-1}{N^2+2} \right) \frac{3}{5} R_{21} \right]$$

(E.7b)

$$l_{B_{o11}}^x \approx \frac{2i}{R} R_2^3 \left( \frac{N^2-1}{N^2+2} \right) \left[ \left( \frac{N^2-1}{N^2+2} \right) \frac{6}{5} S_{22} \right]$$

e para a polarização y

$$l_{A_{e11}}^y \approx O(R_2^4)$$

$$l_{A_{e01}}^y \approx O(R_2^4)$$

(E.8a)

$$l_{A_{o11}}^y \approx O(R_2^5)$$

e

$${}^1B_{o11}^y \approx \frac{2i}{R} R_2^3 \left( \frac{N^2-1}{N^2+2} \right) \left[ R_{00} - \left( \frac{N^2-1}{N^2+2} \right) \frac{1}{5} R_{20} - \left( \frac{N^2-1}{N^2+2} \right) \frac{6}{5} R_{22} \right]$$

$${}^1B_{e01}^y \approx \frac{2i}{R} R_2^3 \left( \frac{N^2-1}{N^2+2} \right) \left[ \left( \frac{N^2-1}{N^2+2} \right) \frac{3}{5} S_{21} \right] \quad (E.8b)$$

$${}^1B_{e11}^y \approx \frac{2i}{R} R_2^3 \left( \frac{N^2-1}{N^2+2} \right) \left[ \left( \frac{N^2-1}{N^2+2} \right) \frac{6}{5} S_{22} \right].$$

### E.1.3. - Coeficientes em ordem dois-Esfera Rugosa Dielétrica

Em primeira aproximação as quantidades obtidas na equação (D.28) que aparecem na equação (C.4) resultam

$$a_1^2 \approx \frac{R_2^3}{6} (N^2-1) + O(R_2^5)$$

$$b_1^2 \approx -4 \left( \frac{N^2-1}{N^2+2} \right) + O(R_2^2)$$

$$d_1^2 \approx -\frac{\gamma_2 R_2^4}{30} N^2 (N^2-1) + O(R_2^5)$$

(E.9)

$$e_1^2 \approx 2\gamma_2 R_2 \left( \frac{N^2-1}{N^2+2} \right) + O(R_2^3).$$

Para  $k > 1$  o resultado é de ordem superior em  $R_2$  excluindo a quantidade  $d_2^2 \approx O(R_2^3)$ .

Pelas equações (E.9) as quantidades dadas na equa-

çãõ (C.4) serãõ

$$\overline{2_{H_{eln}^1}} \times \overline{2_{H_{oln}^1}} \approx -4i(\delta_{rms}^2/R^2)\beta_{11}\left(\frac{N^2-1}{N^2+2}\right)\delta_{n,1} + O(R_2^2)$$

(E. 10a)

$$\overline{2_{P_{eln}^1}} \times \overline{2_{P_{oln}^1}} \approx 2i(\delta_{rms}^2/R^2)\beta_{11}(\gamma_2 R_2)\left(\frac{N^2-1}{N^2+2}\right)\delta_{n,1} + O(R_2^3)$$

e

$$\overline{2_{E_{oln}^1}} \times \overline{2_{E_{eln}^1}} \approx O(R_2^3)$$

$$\overline{2_{F_{oln}^1}} \times \overline{2_{F_{eln}^1}} \approx O(R_2^4)$$

(E.10b)

$$\overline{2_{F_{oln}^2}} \times \overline{2_{F_{eln}^2}} \approx O(R_2^3)$$

As quantidades dadas pelas equações (D.32) e (D.33) no limite  $R_2 \rightarrow 0$  serãõ

$$A1_n = 1$$

$$A2_n = -R_2/\gamma_2$$

$$A3_n \approx -n(n+1)\gamma_2/R_2 + O(R_2)$$

(E.11a)

$$A4_n \approx 1 + O(R_2^2)$$

$$A5_n = -\gamma_2/R_2$$

$$A6_n = 0$$

e

$$B1_n \approx -1 - \frac{n(n+1)(N^2-1)}{1+n(N^2+1)} + O(R_2^2)$$

$$B2_n \approx \frac{1}{\gamma_2 R_2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{1+n(N^2+1)} + O(R_2^2)$$

$$B3_n \approx \frac{-(N^2-1)}{1+n(N^2+1)} + O(R_2^2)$$

(E. 11b)

$$B4_n \approx \frac{1}{\gamma_2 R_2} \frac{(2n+1)}{1+n(N^2+1)} + O(R_2^2)$$

$$B5_n \approx \gamma_2 R_2 \frac{(2n+1)N^2}{1+n(N^2+1)} + O(R_2^3)$$

$$B6_n \approx -1 + \frac{n(n+1)(N^2-1)}{1+n(N^2+1)} + O(R_2^2)$$

A partir das equações (E.11a), (E.11b) e (C.8) e das integrais da tabela B-3 podemos obter os resultados

$$\sum_{n'} \sum_{m'} \alpha_{n'} \overline{2_{E_{oll}}^{m'n'}}^x = \sum_{n'} \sum_{m'} \alpha_{n'} \overline{2_{E_{ell}}^{m'n'}}^y \approx O(R_2^3)$$

(E. 12a)

$$\sum_{n'} \sum_{m'} \alpha_{n'} \overline{2_{F_{oll}}^{m'n'}}^x = \sum_{n'} \sum_{m'} \alpha_{n'} \overline{2_{F_{ell}}^{m'n'}}^y \approx O(R_2^2)$$

e

$$\sum_{n'} \sum_{m'} \alpha_{n'} \overline{2_{\text{ell}}^{m'n'}}^x = \sum_{n'} \sum_{m'} \alpha_{n'} \overline{2_{\text{oll}}^{m'n'}}^y \approx 4\pi (\delta_{\text{rms}}^2 / R^2) \left( \frac{N^2-1}{N^2+2} \right) \left\{ 6g_0 + \frac{g_1}{5} \left( \frac{54N^2+71}{2N^2+3} \right) \right\} +$$

$$+ \sum_{\ell=2}^{\infty} g_{\ell} \frac{(\ell+2)}{(2\ell+1)^2(2\ell+3)} \left\{ [4\ell^2(\ell+2)+3\ell(\ell+3)+3] + \frac{2(\ell+1)(N^2-1)}{1+(\ell+1)(N^2+1)} [4\ell^2(\ell+2)+3\ell(\ell+3)+3] \right\} +$$

$$+ \frac{6(\ell+1)^3(2\ell+3)}{1+(\ell+1)(N^2+1)} \left\{ + \sum_{\ell=2}^{\infty} g_{\ell} \frac{(\ell-1)}{(2\ell-1)(2\ell+1)^2} \left\{ -[4\ell^2(\ell+2)-\ell(\ell+1)-1] \right\} \right\} +$$

$$+ \frac{2\ell(N^2-1)}{1+(\ell-1)(N^2+1)} [4\ell^2(\ell+2)-\ell(\ell+1)-1] + \frac{6\ell^3(2\ell-1)}{1+(\ell-1)(N^2+1)} \left. \right\} + O(R_2^2)$$

(E. 12b)

$$\sum_{n'} \sum_{m'} \alpha_{n'} \overline{2_{\text{ell}}^{m'n'}}^x = \sum_{n'} \sum_{m'} \alpha_{n'} \overline{2_{\text{oll}}^{m'n'}}^y \approx -4\pi (\delta_{\text{rms}}^2 / R^2) (\gamma_2 R_2) \left( \frac{N^2-1}{N^2+2} \right) \left\{ 4g_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{3g_1}{5} \left( \frac{13N^2+17}{2N^2+3} \right) \right\} + \sum_{\ell=2}^{\infty} g_{\ell} \frac{(\ell+2)}{(2\ell+1)^2(2\ell+3)} \left\{ 3(\ell+1)^2 - \frac{3(\ell+1)^3(\ell+2)(N^2-1)}{1+(\ell+1)(N^2+1)} \right\} +$$

$$+ \frac{(2\ell+3)N^2}{1+(\ell+1)(N^2+1)} [4\ell^2(\ell+2)+3\ell(\ell+3)+3] \left. \right\} +$$

$$+ \sum_{\ell=2}^{\infty} g_{\ell} \frac{(\ell-1)}{(2\ell-1)(2\ell+1)^2} \left\{ -3\ell + \frac{3\ell^3(\ell-1)(N^2-1)}{1+(\ell-1)(N^2+1)} - \frac{(2\ell-1)N^2}{1+(\ell-1)(N^2+1)} [4\ell^2(\ell+2)-(\ell+1)-1] \right\} +$$

$$+ \sum_{\ell=2}^{\infty} g_{\ell} \left. \right\} + O(R_2^3).$$

Pelas equações (E.10), (E.12) e (E. 6) obtemos os coeficientes de ordem dois, equação (4. 57), de ordem mais baixa em  $R_2$

$$\overline{A_{O11}^x} = \overline{A_{e11}^y} \approx 0(R_2^5) \quad (E.13a)$$

$$\overline{B_{e11}^x} = \overline{B_{O11}^y} \approx 2iR_2^3 \left( \frac{N^2-1}{N^2+2} \right) \left[ g_0 + \frac{7g_1}{10} + \sum_{\ell=2}^{\infty} g_{\ell} B_{\ell} \right] \quad (E.13b)$$

onde

$$\begin{aligned} B_{\ell} = & \frac{1}{(N^2+2)} \left( \frac{(\ell+2)(N^2)}{(2\ell+1)^2(2\ell+3)} \left\{ \frac{1}{2} [4\ell^2(\ell+2)+3\ell(\ell+3)+3] \right. \right. + \\ & + \frac{(\ell+1)(N^2-1)}{1+(\ell+1)(N^2+1)} [4\ell^2(\ell+2)+3\ell(\ell+3)+3] + \frac{3(\ell+1)^3(2\ell+3)}{1+(\ell+1)(N^2+1)} \left. \right\} + \\ & + \frac{(\ell+2)}{(2\ell+1)^2(2\ell+3)} \left\{ 3(\ell+1)^2 - \frac{3(\ell+1)^3(\ell+2)(N^2-1)}{1+(\ell+1)(N^2+1)} \right. + \\ & + \frac{(2\ell+3)N^2}{1+(\ell+1)(N^2+1)} [4\ell^2(\ell+2)+3\ell(\ell+3)+3] \left. \right\} + \\ & + \frac{(\ell-1)(N^2)}{(2\ell-1)(2\ell+1)^2} \left\{ -\frac{1}{2} [4\ell^2(\ell+2) - (\ell+1) - 1] \right. + \\ & + \frac{\ell(N^2-1)}{1+(\ell-1)(N^2+1)} [4\ell^2(\ell+2) - (\ell+1) - 1] + \frac{3\ell^3(2\ell-1)}{1+(\ell-1)(N^2+1)} \left. \right\} + \\ & + \frac{(\ell-1)}{(2\ell-1)(2\ell+1)^2} \left\{ -3\ell^2 + \frac{3\ell^3(\ell-1)(N^2-1)}{1+(\ell-1)(N^2+1)} - \frac{(2\ell-1)N^2}{1+(\ell-1)(N^2+1)} [4\ell^2(\ell+2) - \ell(\ell+1) - 1] \right. + \\ & \left. \left. - (N^2+1) \right\} . \end{aligned} \quad (E.14)$$

## E.2.1 - Coeficientes em ordem zero-Esfera Rugosa Condutora

A partir das equações (4.74), (A.26) e (D.12) obtemos

$${}^0A_{o11}^x = {}^0A_{e11}^y \approx -i \frac{R_2^3}{3} + O(R_2^5)$$

$${}^0B_{e11}^x = {}^0B_{o11}^y \approx i \frac{2}{3} R_2^3 + O(R_2^5)$$

(E.15)

$${}^0A_{o12}^x = {}^0A_{e12}^y \approx +O(R_2^5)$$

$${}^0B_{e12}^x = {}^0B_{o12}^y \approx O(R_2^5) .$$

## E.2.2 - Coeficientes em ordem um-Esfera Rugosa Condutora

A partir das equações (D.28) obtemos

$$a_1^1 \approx R_2 + O(R_2^3)$$

$$b_1^1 \approx 2 + O(R_2^3)$$

(E.16)

$$c_1^0 \approx 1 + \frac{R_2^2}{2} + O(R_2^3) .$$

As quantidades definidas na equação (C.12) serão

$$E_{mn}^{\pm l\ell} \approx R_2 \frac{\pm}{I} \ell, m+1 \pm i R_2^2 J_{nm\ell, m\pm 1}^{\pm 11} + O(R_2^3)$$

(E. 17)

$$H_{mn}^{\pm l\ell} \approx \pm 2i \left( \frac{\pm}{I} \ell, m+1 + \frac{\pm 11}{I_{nm\ell, m\pm 1}} \right) + R_2 \frac{\pm}{J} \ell, m+1 + O(R_2^2).$$

A partir das equações (E.2c), (E.16) e (E.17) podemos obter os coeficientes de ordem um referentes à esfera rugosa condutora para as polarizações x e y, equações (A.27) e (4.79). Para a polarização x, teremos

$$1_{A_{011}}^x \approx -i \frac{R_2^3}{R} \left[ R_{00} + \frac{R_{20}}{10} + \frac{3}{5} R_{22} \right]$$

$$1_{A_{e01}}^x \approx i \frac{R_2^3}{R} \left[ \frac{3}{10} S_{21} \right] \quad (\text{E.18a})$$

$$1_{A_{e11}}^x \approx i \frac{R_2^3}{R} \left[ \frac{3}{5} S_{22} \right]$$

e

$$1_{B_{e11}}^x \approx 2i \frac{R_2^3}{R} \left[ R_{00} - \frac{R_{20}}{5} + \frac{6}{5} R_{22} \right]$$

$$1_{B_{e01}}^x \approx 2i \frac{R_2^3}{R} \left[ \frac{3}{5} R_{21} \right] \quad (\text{E. 18b})$$

$$1_{B_{011}}^x \approx 2i \frac{R_2^3}{R} \left[ \frac{6}{3} S_{22} \right]$$

e para a polarização y

$$l_{A_{e11}}^y \approx -i \frac{R_2^3}{R} \left[ R_{00} + \frac{R_{20}}{10} - \frac{3}{5} R_{22} \right]$$

$$l_{A_{e01}}^y \approx i \frac{R_2^3}{R} \left[ \frac{3}{10} R_{21} \right]$$

(E.19a)

$$l_{A_{o11}}^y \approx i \frac{R_2^3}{R} \left[ \frac{3}{5} S_{22} \right]$$

e

$$l_{B_{o11}}^y \approx 2i \frac{R_2^3}{R} \left[ R_{00} - \frac{R_{20}}{5} - \frac{6}{5} R_{22} \right]$$

$$l_{B_{e01}}^y \approx 2i \frac{R_2^2}{R} \left[ \frac{3}{5} S_{21} \right]$$

(E.19b)

$$l_{B_{e11}}^y \approx 2i \frac{R_2^3}{R} \left[ \frac{6}{5} S_{22} \right].$$

### E.2.3. - Coeficientes em ordem dois-Esfera Rugosa Condutora

Em primeira aproximação as quantidades dadas na equação (D.29) que aparecem na equação (C.13) serão

$$a_1^2 \approx -R_2 + O(R_2^3)$$

(E.20)

$$b_1^2 \approx -4 + O(R_2^2)$$

e assim, para as quantidades dadas na equação (C.13), teremos

$$\frac{\overline{E_{oln}^2}}{E_{oln}^2} \times \frac{\overline{E_{eln}^2}}{E_{eln}^2} \approx -(\delta_{rms}^2/R^2)R_2 \beta_{11n,1} \delta_{n,1} + O(R_2^3) \quad (E.21)$$

$$\frac{\overline{H_{eln}^2}}{H_{eln}^2} \times \frac{\overline{H_{oln}^2}}{H_{oln}^2} \approx -4i(\delta_{rms}^2/R^2)\beta_{11} \delta_{n,1} + O(R_2^2).$$

As quantidades dadas pela equação (D.34) serão

$$\frac{h_n^1}{h_n} \approx -(n+1) + O(R_2^2)$$

$$\frac{\tilde{h}_n^1}{\tilde{h}_n} \approx -(n+2) + O(R_2^2) \quad (E.22)$$

$$\frac{\phi_n}{\tilde{h}_n} \approx -\frac{1}{n} + O(R_2^2).$$

A partir das equações (E.22), (C.14) e das integrais da tabela B.3 podemos obter

$$\sum_{n'} \sum_{m'} \overline{E_{o11}^{2,m'n'} x} = \sum_{n'} \sum_{m'} \overline{E_{e11}^{2,m'n'} y} \approx 3\pi i (\delta_{rms}^2 / R^2) (R_2) \left\{ -\frac{8}{3} g_0 + \frac{14}{15} g_1 + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=2}^{\infty} g_l \left[ \frac{2(l+1)^2(l+2)^2}{(2l+1)^2(2l+3)} - \frac{l(l-1)(2l^2-l-1)}{(2l-1)(2l+3)^2} - \frac{2}{3} \right] \right\} + O(R_2^3).$$

$$\sum_{n'} \sum_{m'} \overline{H_{e11}^{2,m'n'} x} = \sum_{n'} \sum_{m'} \overline{H_{o11}^{2,m'n'} y} \approx 8\pi (\delta_{rms}^2 / R_2) \left\{ 3g_0 + \frac{37}{10} g_1 + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=2}^{\infty} g_l \left[ \frac{3(l+2)[4l^2(l+2)+3l(l+3)+3]}{2(2l+1)^2(2l+3)} + \frac{(l+1)[4l^2(l+2)-l(l+1)-1]}{2(2l-1)(2l+1)^2} \right] \right\} + O(R_2^2).$$

(E.23 )

Da equação (E.23) obtemos os coeficientes de ordem dois referentes à esfera rugosa condutora, equações (4.85) e (A.30 ),

$$\overline{A_{o11}^x} = \overline{A_{e11}^y} \approx -i R_2^3 (\delta_{rms}^2 / R^2) \left[ g_0 + \sum_{l=1}^{\infty} g_l A_l \right] + O(R_2^5)$$

(E.24 )

$$\overline{B_{e11}^x} = \overline{B_{o11}^y} \approx 2i R_2^3 (\delta_{rms}^2 / R^2) \left[ g_0 + \sum_{l=1}^{\infty} g_l B_l \right] + O(R_2^5)$$

onde

$$A_l = \frac{3}{2} \frac{(l+1)^2(l+2)^2}{(2l+1)^2(2l+3)} - \frac{3l(l-1)(2l^2-l-1)}{4(2l-1)(2l+1)^2} - \frac{3}{2} \quad (E.25 )$$

$$B_l = \frac{3}{2} \frac{(l+2)[4l^2(l+2)+3l(l+3)+3]}{(2l+1)^2(2l+3)} + \frac{(l+1)[4l^2(l+2)-l(l+1)-1]}{2(2l-1)(2l+1)^2} - 2 .$$

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. MIE, G. - Ann. Phys. 25, 377 (1908).
2. RUSSEL, B.K.; MANTOVANI, J.G.; ANDERSON, R.E.; WARMACK, R.J. e FERRELL, T.L. - Physical Review 35, 1232 (1987).
3. FERRARI Jr., N.F. - Tese de Doutorado, (Universidade de São Paulo) não publicado.
4. RAYLEIGH, Lord. - Philos. Mag. 41, 107-120, 274-278 (1871).
5. NUSSENZVEIG, H.M. - J. Opt. Soc. Am. 69, 1068 (1979).
6. BOHREN, C.F e HUFFMAN, D.R. - Absorption and Scattering of Light by small particles, John Wiley and Sons (1983).
7. ERMA, V.A. - Phys. Rev. 176, 1544 (1968).
8. ERMA, V.A. - Phys. Rev. 179, 1238 (1969).
9. ASANO, S e SATO, M. - Appl. Opt. 19, 962 (1980).
10. SCHEURMAN, D.W. Ed. - Light Scattering by Irregularly Shaped Particles, Plenum, New York (1980).
11. ABDELAZZEZ, M.K. - IEEE Trans. Antennas Propagat. AP-31, 375 (1983).

12. SHIFFER, R. e THIELFELT, Y. O. - J. Appl. Phys. 57, 2437 (1985).
13. BAHAR, E., CHAKRABARTI, S. e FITZPATRICK, M. - Appl. Opt. 25, 2530 (1986).
14. STRATTON, J.A. - Electromagnetic Theory, McGraw-Hill, New York (1941).
15. BECKMANN, P. e SPIZZICHINO, A. - The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces, Pergamon Press, Oxford (1963).
16. ARFKEN, G. - Mathematical Methods for Physicists, Academic Press, New York (1970).
17. TOIGO, F., MARVIN, A., CELLI, V. e HILL, N.R. - Phys. Rev. B 15, 5618 (1977).
18. VAN DE HULST, H.C. - Light Scattering by Small Particles, Wiley, New York (1957).
19. DUTHLER, C.J., JOHNSON, S.E. e BROIDA, H.P. - Phys. Rev. Lett. 26, 1236 (1971).
20. EVERSOLE, J.D. e BROIDA, H.P. - Phys. Rev. B 15, 1644 (1977).
21. LEUNG, K.M. - Solid State Comm. 50, 449 (1984).
22. BARRICK, D.E. - Rough Surfaces and Radar Cross Section Handbook, ed. Ruck, G.T., Plenum Press, New York (1970).
23. ANTOSIEWICZ, H.A. - Bessel functions of fractal order, in Handbook of Mathematical Functions, ed. Abramowitz M. e Stegun I.A., National Bureau of Standards, Washington (1964).