UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

JANAÍNE BEZERRA DE LIMA

*-DERIVACÕES MULTIPLICATIVAS DE JORDAN SOBRE ANÉIS COM INVOLUCÃO

FORTALEZA
2018

JANAÍNE BEZERRA DE LIMA

*-DERIVACÕES MULTIPLICATIVAS DE JORDAN SOBRE ANÉIS COM INVOLUCÃO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Álgebra

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Lucas Rodrigues

Coorientador: Prof. Dr. Angelo Papa Neto

FORTALEZA

2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

L698* Lima, Janaine Bezerra de.
*-Derivações multiplicativas de Jordan sobre anéis com involução / Janaine Bezerra de Lima. – 2018.
91 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2018.
Orientação: Prof. Dr. Rodrigo Lucas Rodrigues.
Coorientação: Prof. Dr. Angelo Papa Neto.

1. Anéis primos. 2. *-Derivações de Jordan. 3. Involuções. 4. Identidades funcionais. 5. Anéis de quocientes maximais. I. Título.

CDD 510

JANAÍNE BEZERRA DE LIMA

*-DERIVACÕES MULTIPLICATIVAS DE JORDAN SOBRE ANÉIS COM INVOLUCÃO

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Álgebra

Aprovada em: 31/01/2018

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rodrigo Lucas Rodrigues (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Angelo Papa Neto (Coorientador)
Instituto Federal de Educacão, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Prof. Dr. Henrique Guzzo Jr.
Universidade de São Paulo (USP))

Dedico este trabalho a minha vó Vicência Bezerra.

AGRADECIMENTOS

Aos meus familiares, em especial a minha vó Vicência e a minha mãe Maria das Dores.

Ao meu orientador Rodrigo Lucas, que é meu principal exemplo de esforço, dedicação e ética, pela ajuda em todas as etapas deste trabalho e do curso de forma geral.

Ao meu orientador Rodrigo Lucas, que é meu principal exemplo de esforço, dedicação e ética, pela ajuda em todas as etapas deste trabalho e do curso de forma geral.

Ao meu coorientador Angelo Papa, por quem tenho uma enorme admiração, pela ajuda em todas as etapas deste trabalho.

Ao membro da banca Henrique Guzzo pela disponibilidade.

A todos os professores que foram cruciais em minha formação matemática, em especial Eduardo Landim, Francisco Ênio, Francisco Valdemiro e Alexandre Fernandes.

A minha amiga matemática Rosa Tayane que sempre me apoiou e ajudou durante todo o processo.

Aos meus companheiros de jornada que sabem perfeitamente como esse caminho é árduo, entre eles, Danielson Melo, Emanoel Ferreira, Esdras Muniz, Letícia Marques e Patrícia Renata.

As minhas amigas de trabalho Anatália Franco e Lacilda Silva que sempre me motivaram.

À CAPES pelo apoio financeiro.

“Se consegui ver mais longe é porque estava sobre os ombros de gigantes.”

(ISAAC NEWTON)

RESUMO

O estudo de *-derivações de Jordan foi motivado pelo problema de representabilidade de formas quadráticas por formas bilineares, a saber o questionamento se cada forma quadrática pode ser representada por alguma forma bilinear está conectado com a estrutura de *-derivações, como foi mostrado por Šemrl (ŠEMRL, 1990). Muitos resultados acerca de *-derivações de Jordan estão mencionados na literatura e motivaram o estudo da questão se em um anel primo $\mathscr{R}$ com involução que não é comutativo, qualquer *-derivação de $\mathscr{R}$ é $\mathscr{X}$-interna. Na primeira parte da dissertação apresentamos a demonstração de tal resultado quando a característica de $\mathscr{R}$ é diferente de 2, publicada por Lee e Zhou (LEE *et al.*, 2015a), em 2014. Para isso, usamos como ferramenta a teoria de identidades funcionais, que surgiu na tese de doutorado de Brešar (BREŠAR; ZALAR, 1992) em 1990, cujos fundamentos da teoria geral foram estabelecidos por Beidar (BEIDAR *et al.*, 2001) e que possuem conexões em diferentes áreas, por exemplo em física matemática, em análise funcional, na teoria de operadores, em álgebra linear, em álgebras de Jordan, de Lie e em outras álgebras não associativas. Em outro âmbito, a definição de *-derivação de Jordan não assume hipóteses de linearidade e nem de aditividade. Assim, uma questão natural e interessante é determinar sobre quais hipóteses uma *-derivação de Jordan é aditiva, o que foi descrito por Qi e Zhang (QI; ZHANG, 2016) em 2016. Na segunda parte da dissertação, o nosso objetivo principal é apresentar detalhadamente a demonstração dos teoremas conectados a tal questionamento. Em um primeiro momento, caracterizamos *-derivações multiplicativas de Jordan sobre a ação de produtos nulos e posteriormente suprimimos a última hipótese e estudamos o caso geral. Finalmente, apresentamos algumas consequências, entre elas uma descrição concreta de *-derivações de Jordan sobre *-anéis primos não comutativos, o que generaliza resultados já conhecidos sobre tais aplicações.

Palavras-chave: anéis primos; *-derivações de Jordan; involuções; identidades funcionais; anéis de quocientes maximais.

ABSTRACT

The study of Jordan *-derivations has been motivated by the representation problem for bilinear and quadratic forms. More precisely, the question if a quadratic form can be represented by a bilinear form is connected with the structure of *-derivations, as has been shown by Šemrl (ŠEMRL, 1990). Many results about Jordan *-derivations are mentioned in literature and motivated the study of the following question: in a noncommutative prime ring $\mathscr{R}$ with involution, any *-derivation is $\mathscr{X}$-inner. In the first part of the dissertation, we present a proof of this result for a ring $\mathscr{R}$ with characteristic not 2, published by Lee and Zhou (LEE *et al.*, 2015a) in 2014. For this, we used as a tool the theory of functional identities, introduced in Brešar (BREŠAR; VUKMAN, 1989) thesis, in 1990, whose general foundations established by Beidar (BEIDAR *et al.*, 2001) in the 90's, and has connections with many areas, as Mathematical Physics, Functional Analysis, Operator Theory, Linear Algebra, Jordan Algebras, Lie Algebras and other non-associative algebras. On the other hand, the definition of Jordan *-derivation does not assume does not assume linearity or additivity. So, one natural and interesting question is to determinate under which hypothesis a Jordan *-derivation is additive. This was described by Qi and Zhang(QI; ZHANG, 2016) in 2016. In the second part of the dissertation, our goal is to present in detail the proofs of theorems concerning the above question. At first, we characterize Jordan multiplicative *-derivations under the action of zero products, and secondly, we take off this last hypothesis and study the general case. Finally, we present some consequences, among which one concrete description of Jordan *-derivations over noncommutative prime *-rings. This generalizes already known results about these applications.

Keywords: prime rings; Jordan *-derivations; involutions; functional identities; maximal quotient rings.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Seja $\mathscr{R}$ um anel com involução *. Tal anel é chamado de *-anel. Seja $\mathscr{R}' \subseteq \mathscr{R}$ um subanel. Uma função aditiva $\delta : \mathscr{R}' \to \mathscr{R}$, isto é, que satisfaz para quaisquer $a,b \in \mathscr{R}'$ $\delta(a+b) = \delta(a)+\delta(b)$ é chamada de *-derivação de Jordan se $\delta(a^2) = \delta(a)a^* + a\delta(a)$, para todo $a \in \mathscr{R}'$. Note que, se $\mathscr{R}$ é livre de 2-torção, então a definição de *-derivação de Jordan é equivalente à $\delta(ab+ba) = \delta(a)b^* + a\delta(b) + \delta(b)a^* + b\delta(a)$, para quaisquer $a,b \in \mathscr{R}'$. É fácil verificar que, para qualquer $r \in \mathscr{R}$, a função δ definida por $\delta(a) = ar - ra^*$ é uma *-derivação de Jordan. Em particular, se $r \in \mathscr{R}'$, δ é chamada de uma *-derivação de Jordan interna.

O estudo de *-derivações de Jordan foi motivado pelo problema de representabilidade de funcionais quase-quadráticos por funcionais sesquilineares. De fato, a questão se cada funcional quase-quadrático é gerado por algum funcional sesquilinear está intimamente relacionada à estrutura de *-derivações de Jordan (veja (JACOBSON, 1975), (QI; ZHANG, 2016), (ŠEMRL, 1988), (ŠEMRL, 1990) e (ŠEMRL, 1993) e as referências contidas lá). Em (BREŠAR; VUKMAN, 1989), Brešar e Vukman provaram que se um *-anel $\mathscr{R}$ com elemento identidade, contendo o elemento $\frac{1}{2}$ e um elemento central invertível μ com $\mu^* = -\mu$, então toda *-derivação de Jordan aditiva de $\mathscr{R}$ é interna, isto é, é da forma $x \to xa - ax^*$, para algum $a \in \mathscr{R}$. Em particular, toda *-derivação de Jordan aditiva de uma *-álgebra complexa com elemento identidade é interna. Sejam $B(H)$ a álgebra de todos os operadores lineares limitados sobre um espaço real ou complexo de Hilbert H com $\dim(H) > 1$ e A uma álgebra de operadores sobre H. Šemrl em (ŠEMRL, 1990) provou que toda *-derivação de Jordan aditiva $\delta\colon A \to B(H)$ é da forma $\delta(A) = AT - TA^*$, para algum $T \in B(H)$. Seja $\mathscr{R}$ um *-anel primo não comutativo. Lee, Wong e Zhou (LEE, 2004),(LEE *et al.*, 2015b) mostraram que qualquer *-derivação de Jordan aditiva de $\mathscr{R}$ é da forma $x \to xa - ax^*$, para todo $x \in \mathscr{R}$, onde a está em um anel de quocientes maximal simétrico de $\mathscr{R}$, exceto quando $char(\mathscr{R}) = 2$ e $dim_C(\mathscr{R}C) = 4$, onde C é o centróide estendido de $\mathscr{R}$. Para outros resultados relacionados, veja (CHUANG *et al.*, 2013).

No Capítulo 2, definimos os conceitos preliminares necessários para o entendimento deste trabalho, relativos a anéis com involução e *-derivações de Jordan, anéis de quocientes maximais e identidades funcionais. Em seguida, no Capítulo 3, estudamos *-derivações de Jordan em anéis primos não comutativos. No Capítulo 4, caracterizamos algumas aplicações aditivas em anéis com involução. Posteriormente, introduzimos o conceito de *-derivações multiplicativas de Jordan. Nas definições *-derivações de Jordan não assumimos qualquer hipótese sobre aditividade. Assim, uma questão natural é determinar quando uma *-derivação multiplicativa de

Jordan é aditiva, o que foi descrito por Qi e Zhang (QI; ZHANG, 2016) em 2016. No Capítulo 5, caracterizamos *-derivações multiplicativas de Jordan sobre a ação de produtos nulos e posteriormente suprimimos a última hipótese e estudamos o caso geral. Finalmente, no Capítulo 6, apresentamos algumas consequências, entre elas uma descrição concreta de *-derivações de Jordan sob *-anéis primos não comutativos, o que generaliza resultados já conhecidos sobre tais aplicações.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos as definições dos objetos que serão estudados nos capítulos seguintes, bem como alguns exemplos elementares que motivam e ilustram tais definições.

2.1 Anéis com involução e $*$-derivações de Jordan

Uma **involução** em um anel $\mathscr{R}$ é uma função $*: \mathscr{R} \to \mathscr{R}$, denotada por $a \mapsto a^*$ tal que, para quaisquer $a, b \in \mathscr{R}$,

(1) $(a+b)^* = a^* + b^*$,

(2) $(ab)^* = b^* a^*$ e

(3) $(a^*)^* = a$.

Exemplo 1. *Seja $\mathscr{R} = M_n(\mathbb{R})$ o anel das matrizes $n \times n$ com coeficientes reais. A função que associa a cada matriz $A \in \mathscr{R}$ a sua transposta A^t é uma involução.*

Um anel que possui uma involução é chamado **anel com involução**, ou **$*$-anel**. Em um anel $\mathscr{R}$ com involução destacam-se dois subconjuntos: $S(\mathscr{R}) = \{a \in \mathscr{R} \mid a^* = a\}$, formado pelos elementos **simétricos** de $\mathscr{R}$, e $K(\mathscr{R}) = \{a \in \mathscr{R} \mid a^* = -a\}$, formado pelos elementos **antissimétricos** de $\mathscr{R}$. Em geral, com a multiplicação de $\mathscr{R}$, os subconjuntos $S(\mathscr{R})$ e $K(\mathscr{R})$ não são necessariamente subanéis.

Exemplo 2. *Seja $\mathscr{R} = M_n(K)$ o anel das matrizes $n \times n$ com coeficientes em um corpo K, e $*: \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ a involução dada pela transposição de matrizes, como no Exemplo 1. Sejam $S(\mathscr{R}) = \{A \in \mathscr{R} \mid A^t = A\}$ e $K(\mathscr{R}) = \{A \in \mathscr{R} \mid A^t = -A\}$ os subconjuntos de matrizes simétricas e antissimétricas, respectivamente. Se $A, B \in S(\mathscr{R})$, então $(AB)^t = B^t A^t = BA$, que não é necessariamente igual a AB. Logo, AB não necessariamente pertence a $S(\mathscr{R})$. De modo análogo, $K(\mathscr{R})$ também não é fechado para a multiplicação de $\mathscr{R}$.*

Exemplo 3. *Seja F um corpo com característica diferente de 2. O conjunto $\mathscr{R} = M_n(F)$ das matrizes $n \times n$ com entradas em F é um anel com a multiplicação $\circ$, dada por $A \circ B = \frac{1}{2}(AB + BA)$. Com essa multiplicação, o subconjunto $S(\mathscr{R})$ é um subanel de $\mathscr{R}$. De fato, se $A, B \in S(\mathscr{R})$, então $(A \circ B)^t = \left(\frac{1}{2}(AB + BA)\right)^t = \frac{1}{2}((AB)^t + (BA)^t) = \frac{1}{2}(B^t A^t + A^t B^t) = \frac{1}{2}(BA + AB) = B \circ A = A \circ B$ (essa multiplicação é, obviamente, comutativa). A operação $\circ$ é chamada* ***multiplicação de Jordan*** *e, por isso, $S(\mathscr{R})$ é chamado* ***subanel de Jordan*** *de $\mathscr{R}$.*

Exemplo 4. *Novamente, consideremos F um corpo com característica diferente de 2 e o conjunto $\mathscr{R} = M_n(F)$ das matrizes com entradas em F. Esse conjunto é um anel com a operação $[\cdot,\cdot]$, chamada* ***colchete de Lie****, dada por $[A,B] = \frac{1}{2}(AB - BA)$. Com essa operação, o conjunto $K(\mathscr{R})$ é um subanel de $\mathscr{R}$. Isso pode ser verificado de modo similar ao que foi feito no Exemplo 3: se $A,B \in K(\mathscr{R})$, então $[A,B]^t = -[A,B]$, ou seja, $[A,B] \in K(\mathscr{R})$. Por essa razão, $K(\mathscr{R})$ é chamado* ***subanel de Lie*** *de $\mathscr{R}$.*

A seguir, apresentaremos um objeto que terá papel central em nosso trabalho. Para tornar sua definição mais natural, começaremos com a noção de derivação, depois o conceito de derivação de Jordan e finalmente a definição de $*$-derivação de Jordan.

Seja $\mathscr{R}$ um anel livre de 2-torção, e seja $\mathscr{R}' \subset \mathscr{R}$. Uma função $\delta : \mathscr{R}' \to \mathscr{R}$ é chamada **aditiva** se $\delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b)$, para quaisquer a, $b \in \mathscr{R}'$. Uma função aditiva $\delta : \mathscr{R}' \to \mathscr{R}$ é chamada **derivação** se satisfaz a “regra de Leibniz”, conhecida do Cálculo: $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$. Se δ satisfaz a regra de Leibniz para a multiplicação de Jordan, dada por $a \circ b = \frac{1}{2}(ab+ba)$, isto é, se

$$\delta(a \circ b) = \delta(a) \circ b + a \circ \delta(b), \tag{2.1}$$

dizemos que δ é uma **derivação de Jordan**. Poderemos escrever a condição (2.1) em termos da multiplicação original de $\mathscr{R}$: $\delta\left(\frac{1}{2}(ab+ba)\right) = \frac{1}{2}(\delta(a)b + b\delta(a)) + \frac{1}{2}(a\delta(b) + \delta(b)a)$. Como $\mathscr{R}$ é livre de 2-torção e δ é aditiva, essa última igualdade implica que

$$\delta(ab+ba) = \delta(a)b + b\delta(a) + \delta(b)a + a\delta(b). \tag{2.2}$$

Seja $\mathscr{R}$ um anel com involução e $\mathscr{R}'$ um subanel de $\mathscr{R}$. Uma função aditiva $\delta : \mathscr{R}' \to \mathscr{R}$ é chamada **$*$-derivação de Jordan** se, para todo $a \in \mathscr{R}'$,

$$\delta(a^2) = \delta(a)a^* + a\delta(a). \tag{2.3}$$

Se $\mathscr{R}$ é livre de 2-torção, então uma função $\delta : \mathscr{R}' \to \mathscr{R}$ é uma $*$-derivação de Jordan se, e somente se, para quaisquer $a,b \in \mathscr{R}'$,

$$\delta(ab+ba) = \delta(a)b^* + a\delta(b) + \delta(b)a^* + b\delta(a). \tag{2.4}$$

De fato, (2.4) pode ser obtida a partir de (2.3) por linearização, e (2.3) é uma consequência imediata de (2.4) fazendo-se $a = b$.

Exemplo 5. *Sejam $\mathscr{R}$ um anel com involução e $\mathscr{R}'$ um subanel de $\mathscr{R}$. Para qualquer $r \in \mathscr{R}$, $\delta : \mathscr{R}' \to \mathscr{R}$, dada por $\delta(a) = ar - ra^*$, é uma $*$-derivação de Jordan. Em particular, se $r \in \mathscr{R}'$, chamamos essa função δ de $*$-derivação de Jordan* ***interna****.*

2.2 Anéis de quocientes maximais

A construção clássica do corpo de frações de um domínio de integridade não se estende de modo canônico a anéis não comutativos. Neste caso, faz-se necessária uma construção mais elaborada que exibiremos aqui, em linhas gerais. O leitor interessado pode encontrar mais detalhes em (BEIDAR *et al.*, 1995) e (BREŠAR *et al.*, 2007).

Um anel $\mathscr{R}$ é chamado **primo** se, dados $a,b \in \mathscr{R}$, $a\mathscr{R}b = 0$ (isto é, $axb = 0$, para todo $x \in \mathscr{R}$), implica que $a = 0$ ou $b = 0$. Um anel $\mathscr{R}$ é chamado **semiprimo** se, dado $a \in \mathscr{R}$, $a\mathscr{R}a = 0$ implica que $a = 0$. Embora seja possível definir anel quociente maximal sobre um anel semiprimo, vamos desenvolver aqui um caso mais restritivo em que se supõe que o anel sobre o qual vai se construir o anel de quocientes é primo. Antes, porém, no exemplo a seguir, que tem o objetivo de motivar a definição geral, vamos abordar o caso clássico de um corpo de quocientes sobre um domínio de integridade.

Exemplo 6. *Sejam D um domínio de integridade e Q o corpo de frações de D. Dado $q \in Q$, existem $a,b \in D$, $a \neq 0$, tais que $q = ba^{-1}$. Seja $I \neq 0$ um ideal de D tal que $I \subset aD$. A função $f\colon I \to D$ dada por $f(x) = xq$ é um homomorfismo de D-módulos. Reciprocamente, se $J \neq 0$ é um ideal de D e $g : J \to D$ é um homomorfismo de D-módulos, então $g(x) = xr$, para algum $r \in Q$. De fato, dados $x,y \in J$, $g(x)y = g(xy) = xg(y)$. Fixando $y \neq 0$, basta considerar $r = g(y)y^{-1} \in Q$.*

Dessa forma, é possível associar um elemento $q \in Q$ a um par (f,I) formado por um ideal de D e um homomorfismo de D-módulos $f : I \to D$. Em geral, essa correspondência não é biunívoca, sendo necessário agrupar os vários pares em classes, como faremos a seguir.

Em um anel não comutativo $\mathscr{R}$, é preciso distinguir ideais de acordo com a ordem da multiplicação. Um subgrupo do grupo aditivo de $\mathscr{R}$ é chamado **ideal à esquerda** de $\mathscr{R}$ se, dados $a \in \mathscr{R}$ e $x \in I$, temos $ax \in I$. De modo análogo, um subgrupo J do grupo aditivo de $\mathscr{R}$ é chamado **ideal à direita** se, dados $a \in \mathscr{R}$ e $y \in J$, $ya \in J$. Se I é um ideal à direita e também à esquerda, dizemos que I é um **ideal bilateral** ou, simplesmente, um **ideal** de $\mathscr{R}$.

Um ideal à direita I de um anel não comutativo $\mathscr{R}$ é chamado **denso à direita** se, dados $a,b \in \mathscr{R}$, com $a \neq 0$, existir $c \in \mathscr{R}$ tal que $ac \neq 0$ e $bc \in I$. Se J é um ideal à esquerda de $\mathscr{R}$, dizemos que J é um ideal **denso à esquerda** se, dados $a,b \in \mathscr{R}$, com $a \neq 0$, existir $c \in R$ tal que $ca \neq 0$ e $cb \in J$.

Consideremos o conjunto dos pares ordenados (f,I), onde I é um ideal denso à esquerda de $\mathscr{R}$ e $f : I \to \mathscr{R}$ é um homomorfismo de $\mathscr{R}$-módulos. Escrevemos $(f,I) \sim (g,J)$ para indicar que existe um ideal denso à esquerda $K \subset I \cap J$ tal que $f(x) = g(x)$, para todo $x \in K$. Não é difícil de verificar que $\sim$ é uma relação de equivalência. De fato, a reflexividade e a simetria são imediatas e a transitividade é válida pois interseção de dois ideais densos é um ideal denso.

Denotamos por $[f,I]$ a classe de equivalência representada pelo par (f,I). A adição e a multiplicação de classes são definidas por

$$[f,I] + [g,J] = [f+g, I \cap J],$$
$$[f,I] \cdot [g,J] = [gf, f^{-1}(J)].$$

Aqui, a justaposição gf indica a composição dos homomorfismos f e g, e $f^{-1}(J)$ denota a pré-imagem de J por f. Assim, como a interseção de dois ideais densos, a pré-imagem de um ideal denso também é um ideal denso.

É possível verificar que as operações dadas acima estão bem definidas e que o conjunto das classes de equivalência é um anel com estas duas operações. Como, em geral $fg \neq gf$, a multiplicação de classes não é comutativa.

O anel $\mathscr{R}$ pode ser mergulhado nesse anel de classes de modo canônico: $a \mapsto [r_a, \mathscr{R}]$, onde $r_a : \mathscr{R} \to \mathscr{R}$, dada por $r_a(x) = xa$ é a multiplicação à direita. Podemos, assim, considerar $\mathscr{R}$ como um subanel deste anel de classes.

Resumidamente, dado um anel primo $\mathscr{R}$, existe um anel $Q_{ml}(\mathscr{R})$ que satisfaz as seguintes condições:

(1) $\mathscr{R}$ é um subanel de $Q_{ml}(\mathscr{R})$;

(2) Para todo $q \in Q_{ml}(\mathscr{R})$, existe um ideal denso à esquerda I de $\mathscr{R}$ tal que $Iq \subset \mathscr{R}$.

(3) Se $q \in Q_{ml}(\mathscr{R})$, $q \neq 0$, então $Iq \neq 0$, para todo ideal denso à esquerda I de $\mathscr{R}$.

(4) Se I é um ideal denso à esquerda de $\mathscr{R}$ e $f : I \to \mathscr{R}$ é um homomorfismo de $\mathscr{R}$-módulos à esquerda, então existe $q \in Q_{ml}(\mathscr{R})$ tal que $f(x) = xq$, para todo $x \in I$.

As quatro propriedades acima caracterizam $Q_{ml}(\mathscr{R})$ a menos de isomorfismo. O anel $Q_{ml}(\mathscr{R})$ é chamado **anel quociente maximal à esquerda** de $\mathscr{R}$. De modo análogo, é possível definir-se o **anel quociente maximal à direita** de $\mathscr{R}$, denotado por $Q_{mr}(\mathscr{R})$.

Os dois exemplos a seguir podem ser consultados em (LEE *et al.*, 2015a), Lemma 1.3.

Exemplo 7. *Se $\mathscr{R}$ é comutativo, então $Q_{ml}(\mathscr{R})$ é o corpo de frações de $\mathscr{R}$. De fato, como as propriedades $(1)-(4)$ caracterizam $Q_{ml}(\mathscr{R})$ e (1),(2) e (3) são evidentes para um domínio de integridade e o corpo de frações, é suficiente verificarmos a validade de (4). Seja $f : I \to \mathscr{R}$*

um homomorfismo de $\mathscr{R}$-módulos (à esquerda) e considere $a, b \in I$ elementos não nulos. Então $af(b) = f(ab) = f(ba) = bf(a)$, logo $a^{-1}f(a) = b^{-1}f(b)$ e essa igualdade ocorre no corpo de frações Q de $\mathscr{R}$, o que implica que a fração $q = a^{-1}f(a) \in Q$ é constante, com a variando em I. Portanto $f(a) = aq$.

Exemplo 8. *Se $\mathscr{R} = K\langle x, y\rangle$ é a álgebra livre sobre o corpo K em duas indeterminadas não comutativas x e y, então x e y são divisores de zero em $Q_{ml}(\mathscr{R})$. De fato, seja $I = \mathscr{R}x + \mathscr{R}y$ o ideal formado pelos polinômios em $\mathscr{R}$ com coeficiente constante nulo. Esse ideal é um $\mathscr{R}$-módulo livre com base $\{x, y\}$. Podemos definir um homomorfismo de $\mathscr{R}$-módulos $f : I \to \mathscr{R}$, tal que $f(x) = 0$ e $f(y) = 1$. Então existe $q \in Q_{ml}(R)$ tal que $xq = 0$ e $yq = 1$. Analogamente, é possível mostrar que existe $q' \in Q_{ml}(\mathscr{R})$ tal que $xq' = 1$ e $yq' = 0$.*

O Exemplo 7 mostra que $Q_{ml}(\mathscr{R})$ generaliza a noção de corpo de frações. Já o Exemplo 8 comprova que $Q_{ml}(\mathscr{R})$ é grande demais, pois nele aparecem divisores de zero. Isso motiva o estudo de um anel de frações menor e mais adequado para aplicações, que definiremos a seguir.

Seja $\mathscr{R}$ um anel primo. O conjunto $Q_{ms}(\mathscr{R}) = \{q \in Q_{ml}(\mathscr{R}) \mid qI \subset R$, para algum ideal bilateral I de $\mathscr{R}\}$ é um subanel de $Q_{ml}(\mathscr{R})$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\mathscr{R} \subset Q_{ms}(\mathscr{R})$ com a mesma unidade;

(ii) Se $q \in Q_{ms}(\mathscr{R})$, então existem ideais bilaterais não nulos I e J de $\mathscr{R}$ tais que $Iq \subset \mathscr{R}$ e $qJ \subset \mathscr{R}$;

(iii) Se $q \in Q_{ms}(\mathscr{R})$ e I é um ideal bilateral não nulo de $\mathscr{R}$, então $Iq = 0$ ou $qI = 0$ implica $q = 0$;

(iv) Sejam I e J ideias bilaterais não nulos de $\mathscr{R}$. Sejam $f : I \to \mathscr{R}$ um homomorfismo de $\mathscr{R}$-módulos à esquerda e $g : J \to \mathscr{R}$ um homomorfismo de $\mathscr{R}$-módulos à direita. Suponha que, para quaisquer $a \in I$ e $b \in J$, $f(a)b = ag(b)$. Então existe $q \in Q_{ms}(\mathscr{R})$ tal que $f(a) = aq$ e $g(b) = qb$, para quaisquer $a \in I$ e $b \in J$.

As quatro propriedades acima caracterizam $Q_{ms}(\mathscr{R})$ a menos de isomorfismo. O anel $Q_{ms}(\mathscr{R})$ é chamado **anel quociente maximal simétrico**. Ele também pode ser visto como um subanel do anel quociente maximal à direita:

$$Q_{ms}(\mathscr{R}) = \{q \in Q_{mr}(\mathscr{R}) \mid Iq \subset \mathscr{R}, \text{ para algum ideal bilateral } I \text{ de } \mathscr{R}\}. \tag{2.5}$$

Assim, temos $\mathscr{R} \subset Q_{ms}(\mathscr{R}) \subset Q_{ml}(\mathscr{R})$, onde as inclusões indicam subanéis. Os centros de $Q_{ms}(\mathscr{R})$ e $Q_{ml}(\mathscr{R})$ coincidem: $C = Z(Q_{ms}(\mathscr{R})) = Z(Q_{ml}(\mathscr{R}))$ e são chamados **centroides**

estendidos de $\mathscr{R}$.

Se $\mathscr{R}$ é um anel primo, então o centroide estendido C de $\mathscr{R}$ é um corpo. De fato, dado $\lambda \neq 0$ em C, seja I um ideal bilateral satisfazendo (ii). Como $\lambda \neq 0$, λI é um ideal não nulo, por (iii). A função $f : \lambda I \to \mathscr{R}$, dada por $f(\lambda x) = x$, é um homomorfismo de $\mathscr{R}$-bimódulos. Usando a condição (iv) é possível obter-se $\mu \in C$ tal que $f(y) = \mu y$, para todo $y \in \lambda I$. Escrevendo $y = \lambda x$, com $x \in I$, obtemos $\mu\lambda x = x$. Logo, $(\mu\lambda - 1)I = 0$. Por (iii), $\mu\lambda = 1$, ou seja, λ é invertível.

Se um elemento $x \in \mathscr{R}$ for algébrico sobre C, denotamos por $\partial(x)$ o grau do polinômio minimal de x sobre C. Se x não é algébrico sobre C, dizemos que $\partial(x) = \infty$. Para um subconjunto $T \subset \mathscr{R}$, escrevemos $\partial(T) = \sup\{\partial(t) \mid t \in T\}$.

2.3 Identidades funcionais

Sejam $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ um conjunto enumerável de indeterminadas, $\mathbb{Z}\langle X\rangle$ a $\mathbb{Z}$-álgebra associativa livre gerada por X, $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}\langle X\rangle$ um polinômio tal que pelo menos um de seus monômios de maior grau tenha coeficiente 1 e também $S \subset \mathscr{R}$ um subconjunto não vazio de um anel $\mathscr{R}$. Se

$$f(r_1, \ldots, r_n) = 0 \tag{2.6}$$

para todos $r_1, \ldots, r_n \in \mathscr{R}$, dizemos que f é uma **identidade polinomial** em S. No caso em que $S = \mathscr{R}$, dizemos que o anel $\mathscr{R}$ satisfaz a identidade polinomial definida por f. Anéis que satisfazem identidades polinomiais são chamados **PI-anéis**.

Exemplo 9. *Um anel $\mathscr{R}$ é comutativo se, e somente se, satisfaz a identidade dada pelo polinômio $f(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2x_1$. Logo, todo anel comutativo é um PI-anel.*

Exemplo 10. *Se A é uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo K, então A é um PI-anel. Neste caso, dizemos que A é uma PI-álgebra. Se a dimensão de A sobre K é n, então todo polinômio multilinear alternado em $n+1$ indeterminadas é uma identidade em A.*

A definição de identidade funcional é uma modificação da noção de identidade polinomial.

Seja $X = \{x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots\}$ um conjunto enumerável. Seja $\mathbb{Z}\langle X\rangle$ a $\mathbb{Z}$-álgebra associativa livre gerada por X. Considere o polinômio

$$f = f(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{Z}\langle X\rangle, \tag{2.7}$$

onde $m \geq 0$ e $n \geq 0$, tal que um de seus monômios de maior grau tenha coeficiente igual a 1. Seja S um subconjunto não vazio de um anel $\mathscr{R}$. Para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$, seja $F_i : \overbrace{S \times \cdots \times S}^{m} \to \mathscr{R}$ uma função. Dizemos que f é uma **identidade funcional** em S com as funções $F_1,\ldots,F_n$ se

$$f(r_1,\ldots,r_m,F_1(r_1,\ldots,r_m),\ldots,F_n(r_1,\ldots,r_m)) = 0, \tag{2.8}$$

para quaisquer $r_1,\ldots,r_m \in S$. Neste caso, $F_1,\ldots F_n$ são chamadas soluções desta identidade funcional.

Exemplo 11. *Toda identidade polinomial é uma identidade funcional. De fato, seja S um subconjunto não vazio de um anel $\mathscr{R}$ e seja $f = f(x_1,\ldots,x_m) \in \mathbb{Z}\langle X\rangle$ uma identidade polinomial em S. Podemos escrever*

$$f = F_1x_1 + \cdots + F_mx_m$$

onde $F_i = F_i(x_1,\ldots,x_m)$ é um polinômio para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$ que pode ser visto como uma função polinomial $S \times \cdots \times S \to \mathscr{R}$, dada por $(x_1,\ldots,x_m) \mapsto F_i(x_1,\ldots,x_m)$. Dessa forma, a identidade polinomial f pode ser vista como a identidade funcional

$$\varphi(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_m) = x_1y_1 + \cdots + x_my_m$$

com soluções $F_1,\ldots,F_m$.

3 *-DERIVAÇÕES DE JORDAN EM ANÉIS PRIMOS

Uma *-derivação de Jordan é dita $\mathscr{X}$-interna se é da forma $\delta(x) = xa - ax^*$, com $x \in \mathscr{R}$ e $a \in \mathscr{Q}_{ms}$.

Na literatura já são conhecidos alguns resultados sobre *-derivações de Jordan, como por exemplo os citados a seguir.

(T1) Toda *-derivação de Jordan de uma *-álgebra complexa é interior (Veja (BREŠAR; VUKMAN, 1989)).

(T2) Toda *-derivação de Jordan de $\mathscr{B}(H)$, a álgebra de todos operadores lineares limitados sob um espaço de Hilbert real H de $\dim_{\mathfrak{R}}(H) > 1$, é interior (Veja (ŠEMRL, 1993)).

(T3) Seja $\mathscr{R}$ um anel com involução *, primo e com $char(\mathscr{R}) \neq 2$. Suponha que $\mathscr{R}$ tenha uma base não-nulo, mas não é um anel com divisores de zero. Então qualquer *-derivação de Jordan $\mathscr{R}$ é $\mathscr{X}$-interna (Veja (CHUANG *et al.*, 2013)).

(T4) Seja $\mathscr{R}$ uma álgebra não comutativa central simples com involução *. Então qualquer *-derivação de Jordan $\mathscr{R}$ é interna (Veja (FOŠNER; LEE, 2014)).

Com os resultados acima, é razoável fazer o seguinte questionamento.

Em um anel primo $\mathscr{R}$ com involução e não comutativo, qualquer *-derivação de $\mathscr{R}$ é $\mathscr{X}$-interna?

Neste capítulo apresentamos a resposta a esta questão impondo $char(\mathscr{R}) \neq 2$.

Lema 3.0.1. *Suponha que exista $a \in \mathscr{Q}_{ml}$ tal que $\delta(x) = xa - ax^*$, para todo $x \in \mathscr{N}$, onde $\mathscr{N}$ é um ideal não nulo de $\mathscr{R}$. Então, $a \in \mathscr{Q}_{ms}$ e $\delta(x) = xa - ax^*$, para qualquer $x \in \mathscr{R}$.*

Demonstração. Sejam $x \in \mathscr{N}$ e $y \in \mathscr{R}$. Assim, como $\mathscr{N}$ é um ideal temos que $xy + yx \in \mathscr{N}$. Então,

$$\delta(xy+yx) = (xy+yx)a - a(xy+yx)^* = xya + yxa - ay^*x^* - ax^*y^*. \tag{3.1}$$

Por outro lado, segue da definição de *-derivação de Jordan, que

$$\begin{aligned}
\delta(xy+yx) &= \delta(x)y^* + x\delta(y) + \delta(y)x^* + y\delta(x) \\
&= (xa - ax^*)y^* + x\delta(y) + \delta(y)x^* + y(xa - ax^*) \\
&= xay^* - ax^*y^* + x\delta(y) + \delta(y)x^* + yxa - yax^* \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Subtraindo as igualdades (3.2) e (3.1), obtemos

$$xay^* - ax^*y^* + x\delta(y) + \delta(y)x^* + yxa - yax^* - xya - yxa + ay^*x^* + ax^*y^* = 0$$

$$xay^* + x\delta(y) + \delta(y)x^* - yax^* - xya + ay^*x^* = 0$$
$$\delta(y)x^* - yax^* + ay^*x^* + xay^* - xya + x\delta(y) = 0$$
$$[\delta(y) - ya + ay^*]x^* + x[ay^* - ya + \delta(y)] = 0$$

Seja $u = \delta(y) - ya + ay^*$. Consequentemente, pela última igualdade, segue que $ux^* + xu = 0$, para qualquer $x \in \mathscr{R}$. Em particular, dados x e $z \in \mathscr{N}$, note que

$$(xz)u = -u(xz)^* = -(uz^*)x^* = z(ux^*) = -zxu, \tag{3.3}$$

isto é, $(xz + zx)u = 0$.

Pelo Teorema 6.4.1 de (BEIDAR *et al.*, 1995), $\mathscr{N}$ e $\mathscr{Q}_{ml}(\mathscr{R})$ satisfazem as mesmas identidades polinomiais generalizadas. Portanto, $(xz + zx)u = 0$, para quaisquer $x, z \in \mathscr{Q}_{ml}(\mathscr{R})$.

Se $char(\mathscr{R}) \neq 2$, então tomando $x = 1 = z$, podemos concluir que $u = 0$. Se $char(\mathscr{R}) = 2$, então $(xz + zx)u = 0$, ou seja, $[x, z]u = 0$, para quaisquer $x, z \in \mathscr{Q}_{ml}(\mathscr{R})$. Logo, uma vez que $\mathscr{R}$ é não comutativo, segue que $u = 0$.

Assim, em ambos os casos, temos que $0 = u = \delta(y) - ya + ay^*$, ou seja, $\delta(y) = ya - ay^*$, para todo $y \in \mathscr{R}$. Agora, como $a \in \mathscr{Q}_{ml}(\mathscr{R})$, pelo Teorema A.1 de (BREŠAR *et al.*, 2007), existe algum ideal à esquerda denso $\mathscr{L}$ de $\mathscr{R}$ tal que $\mathscr{L}a \subseteq \mathscr{R}$. Além disso, dado $y \in \mathscr{L}^*$, sabemos que $0 = \delta(y) - ya + ay^*$, o que implica que $ay^* = ya - \delta(y) \in \mathscr{R}$, pois $ya \in \mathscr{L}a \subseteq \mathscr{R}$. Portanto, $a\mathscr{L}^* \subseteq \mathscr{R}$, logo $\mathscr{L}^*$ é um ideal à direita denso de $\mathscr{R}$, o que nos permite concluir que $a \in \mathscr{Q}_{ms}(\mathscr{R})$. □

Definição 3.0.1. *Um ideal $\mathscr{I}$ de $\mathscr{R}$ satisfazendo $\mathscr{I}^* = \mathscr{I}$ é chamado de *-ideal.*

Lema 3.0.2. *Sejam $f, g : \mathscr{J} \to \mathscr{Q}_{ml}(\mathscr{R})$ duas aplicações aditivas, onde $\mathscr{J}$ é um *-ideal não nulo de $\mathscr{R}$. Suponha que*

$$\delta(zx) - z\delta(x) = f(z)x^* + g(x)z^*, \tag{3.4}$$

para quaisquer $x, z \in \mathscr{J}$. Se $\partial(S(\mathscr{R}) \cup K(\mathscr{R})) > 2$, então, δ é $\mathscr{X}$-interna.

Demonstração. Sejam t, x e $z \in \mathscr{J}$. Substituindo z por tz em (3.4), temos que

$$\begin{aligned} \delta(tzx) - (tz)\delta(x) &= f(tz)x^* + g(x)(tz)^* \\ \delta(tzx) &= (tz)\delta(x) + f(tz)x^* + g(x)z^*t^*. \end{aligned} \tag{3.5}$$

E multiplicando (3.4) por t, vale que

$$t\delta(zx) = tz\delta(x) + tf(z)x^* + tg(x)z^* \tag{3.6}$$

Desse modo, a diferença entre (3.5) e (3.6) resulta em

$$\delta(tzx) - t\delta(zx) = (f(tz) - tf(z))x^* + g(x)z^*t^* + tg(x)z^* \tag{3.7}$$

Agora, por (3.4), sabemos que

$$\delta(t(zx)) - t\delta(zx) = f(t)(zx)^* + g(zx)t^* \tag{3.8}$$

Assim, pelas igualdades (3.7) e (3.8), segue que

$$f(t)(zx)^* + g(zx)t^* = (f(tz) - tf(z)x^* + g(x)z^*t^* - tg(x)z^*$$
$$g(x)z^*t^* - g(zx)t^* + (f(tz) - tf(z))x^* - f(t)x^*z^* - tg(x)z* = 0$$
$$(g(x)z^* - g(zx))t^* + (f(tz) - tf(z))x^* - (f(t)x^* + tg(x))z* = 0$$

Uma vez que $\partial(S(\mathscr{R}) \cup K(\mathscr{R})) > 2$, pelo Teorema (3.1) de (BEIDAR *et al.*, 2001), podemos concluir que $g(x)z^* - g(zx) = 0$, $f(tz) - tf(z) = 0$ e $f(t)x^* + tg(x) = 0$, isto é,

$$g(x)z^* = g(zx), f(tz) = tf(z) \text{ e } f(t)x^* + tg(x) = 0. \tag{3.9}$$

Logo, pelo Lema 3.0.1, existe $a \in \mathscr{Q}_{ml}(\mathscr{R})$ tal que $f(z) = za$, para todo $z \in \mathscr{J}$. Consequentemente, $g(x) = -ax^*$, para todo $x \in \mathscr{J}$, por (3.9). Assim, por (3.4), vale que $\delta(zx) - z\delta(x) = zax^* - ax^*z^*$, para quaisquer $x, z \in \mathscr{J}$. Considere a aplicação aditiva $\tilde{\delta} : \mathscr{J} \to \mathscr{Q}_{ml}$ dada $\tilde{\delta}(x) = ax - ax^*$, para qualquer $x \in \mathscr{J}$. Note que

$$\begin{aligned}
(\delta - \tilde{\delta})(zx) &= \delta(zx) - \tilde{\delta}(zx) \\
&= z\delta(x) + zax^* - ax^*z^* - zax + a(zx)^* \\
&= z\delta(x) + zax^* - ax^*z^* - zax + ax^*z^* \\
&= z\delta(x) - z(ax - ax^*) \\
&= z\delta(x) - z\tilde{\delta}(x) \\
&= z[\delta(x) - \tilde{\delta}(x)] \\
&= z(\delta - \tilde{\delta})(x),
\end{aligned}$$

para quaisquer $x, z \in \mathscr{J}$, ou seja, $(\delta - \tilde{\delta})(zx) = z(\delta - \tilde{\delta})(x)$, para quaisquer $x, z \in \mathscr{J}$. Em vista disso, novamente pelo Lema 3.0.1, existe $c \in \mathscr{Q}_{ml}$ tal que $(\delta - \tilde{\delta})(x) = xc$, para todo $x \in \mathscr{J}$, ou equivalentemente $\delta(x) = \tilde{\delta}(x) + xc = xa - ax^* + xc = x(a+c) - ax^*$, para todo $x \in \mathscr{J}$. Agora, como δ é uma *-derivação de Jordan, sabemos que

$$\begin{aligned}
\delta(x^2) &= \delta(x)x^* + x\delta(x) \\
x^2(a+c) - a(x^2)^* &= (x(a+c) - ax^*) + x(x(a+c) - ax^*) \\
x^2a + x^2c - ax^*x^* &= xax^* + xcx^* - ax^*x^* + xxa + xxc - xax^*
\end{aligned}$$

o que implica que $xcx^* = 0$, para todo $x \in \mathscr{J}$. Consequentemente, $c = 0$. Portanto, $\delta(x) = xa - ax^*$, para qualquer $x \in \mathscr{J}$. Logo, pelo Lema anterior, podemos concluir que $a \in \mathscr{Q}_{ms}(\mathscr{R})$ e $\delta(x) = xa - ax^*$, para qualquer $x \in \mathscr{R}$. $\square$

O passo fundamental para provar o primeiro teorema desta seção é construir algumas identidades funcionais. O próximo lema fornece tais identidades e é válido para um anel arbitrário $\mathscr{R}$.

Lema 3.0.3. *Seja $B : \mathscr{R} \times \mathscr{R} \to A$ uma aplicação biaditiva e sejam $f, g : \mathscr{R} \to A$ aplicações aditivas, onde A é um grupo aditivo. Suponha que $B(x,y) = f(xy) + g(yx)$, para quaisquer $x, y \in \mathscr{R}$. Então,*

$$B(xw,yz) - B(x,wyz) = B(zxw,y) - B(zx,wy), \tag{3.10}$$

para quaisquer $w,x,y,z \in \mathscr{R}$.

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} B(xw,yz) - B(x,wyz) &= f(xwyz) + g(yzxw) - f(xwyz) - g(wyzx) \\ &= g(yzxw) - g(wyzx) \\ &= g(yzxw) + f(zxwy) - f(zxwy) - g(wyzx) \\ &= B(zxw,y) - B(zx,wy) \end{aligned}$$

$\square$

Para qualquer $F : \mathscr{R}^{m+1} \to \mathscr{Q}_{ml}(\mathscr{R})$ e para $1 \leq i < j \leq m+1$, defina as aplicações $F^i : \mathscr{R}^m\ arrow \mathscr{Q}_{ml}(\mathscr{R})$ e $F^{ij} : \mathscr{R}^m \to \mathscr{Q}_{ml}(\mathscr{R})$ do seguinte modo

$$\begin{aligned} F^i(r_1, r_2, ..., r_m) &= F(r_1, r_2, ..., r_{i-1}, r_{i+1}, ..., r_m), \\ F^{ij}(r_1, r_2, ..., r_{m+1}) &= F^{ji}(r_1, r_2, ..., r_{m+1}), \\ &= F(r_1, r_2, ..., r_{i-1}, r_{i+1}, ..., r_{j-1}, r_{j+1}, ..., r_{m+1}) \end{aligned}$$

para quaisquer $r_1, r_2, ..., r_{m+1} \in \mathscr{R}$. A aplicação F é chamada $(m-1)$-aditiva se é aditiva com relação a cada argumento. Além disso, aplicações 0-aditivas são definidas como constantes.

Teorema 3.0.1. *Seja $\mathscr{R}$ um anel primo com involução $*$, que não é comutativo. Suponha $\partial(S(\mathscr{R}) \cup K(\mathscr{R})) > 4$. Então, qualquer *-derivação de Jordan de $\mathscr{R}$ é $\mathscr{X}$-interna.*

Demonstração. Sejam $\delta : \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ uma *-derivação de Jordan e $B : \mathscr{R} \times \mathscr{R} \to \mathscr{Q}_{ml}(\mathscr{R})$ a aplicação biaditiva definida por

$$B(x,y) = \delta(x)y^* + x\delta(y) + \delta(y)x^* + y\delta(x),$$

para quaisquer $x,y \in \mathscr{R}$. Pelo Lema 3.0.1, temos que $B(x,y) = \delta(xy+yx) = \delta(xy)+\delta(yx)$, para quaisquer $x,y \in \mathscr{R}$, ou seja, B satisfaz as hipóteses do Lema 3.0.3 considerando $f = g = \delta$. Assim, a igualdade (3.10) é válida, isto é,

$$B(wx,yz) - B(x,wyz) = B(zwx,y) - B(zx,wy),$$

e, pela definição de B, segue

$$\begin{aligned} \delta(xw)(yz)^* + (xw)\delta(yz) + \delta(yz)(xw)^* + \qquad & \delta(zwx)y^* + (zwx)\delta(y) + \delta(y)(zwx)^* + \\ +(yz)\delta(xw) - \delta(x)(wyz)^* - x\delta(wyz) - \quad = \quad & y\delta(zwx) - \delta(zx)(wy)^* - (zx)\delta(wy) - \\ -\delta(wyz)x^* - (wyz)\delta(x) \qquad & -\delta(wy)(zx)^* - (wy)\delta(zx) \end{aligned}$$

para quaisquer $w,x,y,z \in \mathscr{R}$. Assim pelas propriedades de involução, segue que

$$\begin{aligned} \delta(xw)z^*y^* + (xw)\delta(yz) + \delta(yz)w^*x^* + \qquad & \delta(zwx)y^* + (zwx)\delta(y) + \delta(y)x^*w^*z^* + \\ +(yz)\delta(xw) - \delta(x)z^*y^*w^* - x\delta(wyz) - \quad = \quad & +y\delta(zwx) - \delta(zx)y^*w^* - (zx)\delta(wy) - \\ -\delta(wyz)x^* - (wyz)\delta(x) \qquad & -\delta(wy)x^*z^* - (wy)\delta(zx) \end{aligned}$$

Agora, note que podemos reescrever a equação acima como

$$\begin{aligned} & w(y(\delta(zx) - z\delta(x)) + x(w\delta(yz) - \delta(wyz)) + y(z\delta(xw) - \delta(zxw)) + \\ & +z(x\delta(wy) - w\delta(y)) + (-(\delta(x)z^* - \delta(zx))y^*)w^* + (-\delta(wyz) + \quad = \quad 0 \\ & +\delta(yz)w^*)x^* + (-\delta(zxw) + \delta(xw)z^*)y^* + ((-\delta(y)w^* - \delta(wy))x^*)z^* \end{aligned}$$

Consequentemente, fixando w,x,y,z correspondentes a x_1,x_2,x_3,x_4, respectivamente, pelo Teorema 3.1 de (BEIDAR *et al.*, 2001), podemos reescrever a equação acima do seguinte modo

$$\begin{aligned} wF_1(x,y,z) + xF_2(w,y,z) + yF_3(w,x,z) + zF_4(w,x,y) + & \\ +G_1(x,y,z)w^* + G_2(w,y,z)x^* + G_3(x,y,z)y^* + G_4(w,x,y)z^* &= 0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

onde $F_i, G_i : \mathscr{R} \times \mathscr{R} \times \mathscr{R} \to \mathscr{Q}_{ml}(\mathscr{R})$, $1 \leq i \leq 4$, e

$$\begin{aligned} & F_1(x,y,z) = y(\delta(zx) - z\delta(x)); F_2(w,y,z) = w\delta(yz) - \delta(wyz); \\ & F_3(w,x,z) = z\delta(xw) - \delta(zxw); F_4(w,x,y) = x(\delta(wy) - w\delta(y)); \\ & G_1(x,y,z) = -(\delta(x)z^* - \delta(zx))y^*; G_2(w,y,z) = -\delta(wyz) + \delta(xw)z^*; \\ & G_3(x,y,z) = -\delta(zxw) + \delta(xw)z^*; G_4(w,x,y) = -(\delta(y)w^* - \delta(wy))x^*. \end{aligned}$$

Note que, como $\partial(S(\mathscr{R}) \cup K(\mathscr{R})) > 4$, segue do Teorema 3.1 de (BEIDAR *et al.*, 2001) que existem aplicações biaditivas únicas $r_{jk} : \mathscr{R} \times \mathscr{R} \to \mathscr{Q}_{ml}(\mathscr{R})$, $1 \leq j,k \leq 4$, $j \neq k$ tais que $F_1^1(w,x,y,z) = -r_{21}^{21}(w,x,y,z)x^* - r_{31}^{31}(w,x,y,z)y^* - r_{41}^{41}(w,x,y,z)y^*$, para todos $w,x,y,$ e $z \in \mathscr{R}$, isto é,

$$F_1(x,y,z) = -r_{21}(y,z)x^* - r_{31}(x,z)y^* - r_{41}(x,y)z^* = 0 \tag{3.12}$$

para quaisquer w, x, y, e $z \in \mathscr{R}$. Assim, igualando $F_1(x,y,z)$ em (3.11) e (3.12), obtemos que

$$y(\delta(zx) - z\delta(x)) + r_{21}(y,z)x^* + r_{31}(x,z)y^* + r_{41}(x,y)z^* \quad = \quad 0$$

para quaisquer $x,z \in \mathscr{R}$. Agora, novamente pelo Teorema 3.1 de [2], existem aplicações aditivas $p_{21}, p_{23} : \mathscr{R} \to \mathscr{Q}_{ml}(\mathscr{R})$ tais que $\delta(zx) - z\delta(x) = -p_{12}(z)x^* - p_{32}(x)z^*$, para quaisquer $x,z \in \mathscr{R}$. Finalmente, pelo Lema 3.0.2, existe $a \in \mathscr{Q}_{ms}$ tal que $\delta(x) = xa - ax^*$, para qualquer $x \in \mathscr{R}$. Logo, qualquer *-derivação de Jordan de $\mathscr{R}$ é $\mathscr{X}$-interna.

Relembre que um anel $\mathscr{R}$ é um PI-anel se satisfaz uma identidade polinomial com coeficientes ± 1 em indeterminadas não comutativas. Suponha que $\partial(S(\mathscr{R})) < \infty$. Um argumento padrão mostra que $S(\mathscr{R})$ satisfaz uma identidade polinomial com coeficientes ± 1 em (HERSTEIN, 1957), página 14. Pelo Teorema de Amitsur em (AMITSUR, 1969), Teorema 6, $\mathscr{R}$ satisfaz uma identidade polinomial com coeficientes ± 1. Portanto, $\mathscr{R}$ é um PI-anel. Consequentemente, o seguinte resultado é válido.

Corolário 3.0.1. *Seja $\mathscr{R}$ um anel primo com involução $*$, que não é um PI-anel. Então, qualquer *-derivação de Jordan de $\mathscr{R}$ é $\mathscr{X}$-interna.*

Nosso próximo objetivo é provar o resultado principal deste capítulo. Para isso, inicialmente precisamos relembrar um resultado devido a Herstein (HERSTEIN, 1969). Suponha que $\mathscr{L}$ é um ideal de Lie de um anel $\mathscr{R}$, isto é, $\mathscr{L}$ é um subgrupo aditivo de $\mathscr{R}$ satisfazendo $[\mathscr{L},\mathscr{R}] \subseteq \mathscr{L}$. É uma consequência do Lema 1.3 de (HERSTEIN, 1969) que $\mathscr{R}[\mathscr{L},\mathscr{L}]\mathscr{R} \subseteq \mathscr{L} + \mathscr{L}^2$. Seja $\mathscr{R}$ um anel primo com $\partial(\mathscr{R}) \neq 2$ que não é comutativo. Uma vez que $[\mathscr{R},\mathscr{R}]$ é um ideal de Lie de $\mathscr{R}$, temos que

$$N = \mathscr{R}[[\mathscr{R},\mathscr{R}],[\mathscr{R},\mathscr{R}]]\mathscr{R} \subseteq [\mathscr{R},\mathscr{R}] + [\mathscr{R},\mathscr{R}]^2.$$

Além disso, observe que N é um ideal não nulo de $\mathscr{R}$, pois $\partial(\mathscr{R}) \neq 2$. Vamos usar tal fato para demonstrar o próximo resultado auxiliar.

Seja $\mathscr{R}$ um PI-anel primo com involução $*$ tal que $\partial(\mathscr{R}) \neq 2$, que não é comutativo. Suponha que $\beta^* = \beta$ para todo $\beta \in Z(\mathscr{R})$, onde $Z(\mathscr{R})$ é o centro do anel $\mathscr{R}$. Então, qualquer

*-derivação δ de $\mathscr{R}$ pode ser estendida de modo único para uma *-derivação de Jordan $\tilde{\delta}$ de $\mathscr{R}C$. Além disso, $\tilde{\delta}$ é uma aplicação C-linear.

Demonstração. Em vista de que $\mathscr{R}$ é um PI-anel, sabemos que $Z(\mathscr{R}) \neq 0$ e C é o corpo de $Z(\mathscr{R})$. Além disso, $\mathscr{R}C$ é uma álgebra simples central de dimensão finita por Teorema 2 e Corolário 1 de (BEIDAR *et al.*, 2001) e também Teorema 2 de (JACOBSON, 1975).

Afirmação 1: Existe um *-ideal não nulo I de $\mathscr{R}$ tal que δ é $Z(\mathscr{R})$- linear sobre I, isto é, $\delta(\beta x) = \beta\delta(x)$, para quaisquer $x \in I$ e $\beta \in Z(\mathscr{R})$.

De fato, fixe $\beta \in Z(\mathscr{R})$ e defina $f(w) = \delta(\delta w) - \beta\delta(w)$, para qualquer $w \in \mathscr{R}$. Sejam $x, y \in \mathscr{R}$. Pelo fato de δ ser uma *-derivação e por valer que $\beta^* = \beta$, para todo $\beta \in Z(\mathscr{R})$ segue que

$$\delta((\beta x)y + y(\beta x)) = \delta(\beta x)y^* + \delta(y)\beta x^* + \beta x\delta(y) + y\delta(\beta x). \tag{3.13}$$

Por outro lado, pela centralidade de β, também temos que

$$\delta(x(\beta y) + (\beta y)x) = \delta(x)\beta y^* + \delta(\beta y)x^* + x\delta(\beta y) + \beta y\delta(x) \tag{3.14}$$

Comparando (3.13) e (3.14), note que

$$(\delta(\beta x) - \beta\delta(x))y^* + y(\delta(\beta x) - \beta\delta(x) \quad = \quad (\delta(\beta y) - \beta\delta(y))x^* + x(\delta(\beta y) - \beta\delta(y),$$

isto é,

$$f(x)y^* + yf(x) = f(y)x^* + xf(y) \tag{3.15}$$

Substituindo x por um elemento $\gamma \in Z(\mathscr{R})$ não nulo na equação acima, resulta em

$$\begin{aligned}
f(\gamma)y^* + yf(\gamma) &= f(y)\gamma^* + \gamma f(y) \\
yf(\gamma) + f(\gamma)y^* &= 2\gamma f(y) \\
f(y) &= (2\gamma)^{-1}(yf(\gamma) + f(\gamma)y^*) \\
f(y) &= y(2\gamma)^{-1}f(\gamma) + (2\gamma)^{-1}f(\gamma)y^* \\
f(y) &= yc + cy^*
\end{aligned} \tag{3.16}$$

para qualquer $y \in \mathscr{R}$, onde $c = (2\gamma)^{-1}f(\gamma)$. Assim, podemos trocar $f(x)$ por $xc + cx^*$ e $f(y)$ por $yc + cy^*$ em (3.15) e teremos

$$\begin{aligned}
(xc+cx^*)y^* + y(xc+cx^*) &= (yc+cy^*)x^* + x(yc+cy^*) \\
xcy^* + cx^*y^* + yxc + ycx^* &= ycx^* + cy^*x^* + xyc + xcy^* \\
xyc - yxc + cy^*x^* - cx^*y^* &= 0 \\
(xy-yx)c + c(y^*x^* - x^*y^*) &= 0 \\
(xy-yx)c + c(xy-yx)^* &= 0 \\
(x,y)c + c(x,y)^* &= 0 \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

para quaisquer $x, y \in \mathscr{R}$. Consequentemente, $f([x,y]) = [x,y]c + c[x,y]^* = 0$, para quaisquer $x, y \in \mathscr{R}$. Portanto, $f([\mathscr{R},\mathscr{R}]) = 0$. Até agora, provamos que

$$\delta(\beta x) = \beta\delta(x) \qquad (3.18)$$

para quaisquer $x \in [\mathscr{R},\mathscr{R}]$ e $\beta \in Z(\mathscr{R})$. $\square$

Sejam $u, v \in [\mathscr{R},\mathscr{R}]$ e $\gamma \in Z(\mathscr{R})$. Então $u^*, v^* \in [\mathscr{R},\mathscr{R}]$. De fato, se $u = [a,b]$, onde $a, b \in \mathscr{R}$, então $u^* = (ab-ba)^* = (ab)^* - (ba)^* = b^*a^* + a^*b^* = [-a^*, b^*] \in [\mathscr{R},\mathscr{R}]$. Pelo Lema 3.0.1 e por (3.18), temos que

$$\begin{aligned}
\delta(\gamma(uv+vu)) &= \delta(\gamma uv + \gamma vu) \\
\delta(\gamma(uv+vu)) &= \delta((\gamma u)v + v(\gamma u)) \\
\delta(\gamma(uv+vu)) &= \delta(\gamma u)v^* + (\gamma u)\delta(v) + \delta(v)(\gamma u)^* + v\delta(\gamma u) \\
\delta(\gamma(uv+vu)) &= \gamma\delta(u)v^* + \gamma u\delta(v) + \gamma\delta(v)u^* + \gamma v\delta(u) \\
\delta(\gamma(uv+vu)) &= \gamma[\delta(u)v^* + u\delta(v) + \delta(v)u^* + v\delta(u)] \\
\delta(\gamma(uv+vu)) &= \gamma\delta(uv+vu),
\end{aligned}$$

isto é,

$$\delta(\gamma(uv+vu)) = \gamma\delta(uv+vu). \qquad (3.19)$$

Além disso, como $uv - vu = [u,v] \in [\mathscr{R},\mathscr{R}]$, segue também de (3.18) que

$$\delta(\gamma(uv-vu)) = \gamma\delta(uv-vu). \qquad (3.20)$$

Assim, como δ é aditiva e $char(\mathscr{R}) \neq 2$, somando (3.19) e (3.20) obtemos que

$$
\begin{aligned}
\delta(\gamma(uv+vu))+\delta(\gamma(uv-vu)) &= \gamma\delta(uv+vu)+\gamma\delta(uv-vu)\\
\delta(\gamma(uv)+\delta(\gamma(vu))+\delta(\gamma(uv)-\delta(\gamma(vu)) &= \gamma\delta(uv)+\gamma\delta(vu)+\gamma\delta(uv)-\gamma\delta(vu)\\
\delta(\gamma(uv)+\delta(\gamma(uv) &= \gamma\delta(uv)+\gamma\delta(uv)\\
2\delta(\gamma(uv) &= 2\gamma\delta(uv)\\
\delta(\gamma(uv) &= \gamma\delta(uv)
\end{aligned}
$$

para quaisquer $u,v\in[\mathscr{R},\mathscr{R}]$ e $\gamma\in Z(\mathscr{R})$. Em vista do fato que $N=\mathscr{R}[[\mathscr{R},\mathscr{R}],[\mathscr{R},\mathscr{R}]]\mathscr{R}\subseteq[\mathscr{R},\mathscr{R}]+[\mathscr{R},\mathscr{R}]^2$, qualquer elemento de N é da forma $u+\sum u_iv_i$, para algum $u\in[\mathscr{R},\mathscr{R}]$ e uma quantidade finita de $u_iv_i\in[\mathscr{R},\mathscr{R}]$, o que implica que δ é $Z(\mathscr{R})$-linear sobre N.

Note que N é um *-ideal não nulo de $\mathscr{R}$. Sabe-se que qualquer elemento de $\mathscr{R}C$ é da forma $\frac{x}{\beta}$ para alguns $x\in\mathscr{R}$ e $\beta\in Z(\mathscr{R})$. Facilmente, * pode ser estendida de modo único para uma involução de $\mathscr{R}C$, definindo $(\frac{x}{\beta})^*=\frac{x^*}{\beta}$, para quaisquer $x\in\mathscr{R}$ e $0\neq\beta\in Z(\mathscr{R})$, pois $\beta^*=\beta$, para todo $\beta\in Z(\mathscr{R})$. Por Teorema 2 (BEIDAR *et al.*, 1995), $N\cap Z(\mathscr{R})\neq\emptyset$. Assim, fixe $\eta\in N\cap Z(\mathscr{R})$ um elemento não nulo e defina uma aplicação $\tilde{\delta}:\mathscr{R}C\to\mathscr{R}C$ por $\tilde{\delta}(\frac{x}{\beta})=\frac{\delta(\eta x)}{\eta\beta}$, para todos $x\in\mathscr{R}$ e $0\neq\beta\in Z(\mathscr{R})$.

Uma vez que δ é $Z(\mathscr{R})$-linear sobre N, a aplicação $\tilde{\delta}$ está bem definida e é fácil ver que $\tilde{\delta}$ é uma aplicação C-linear. Vamos verificar que $\tilde{\delta}:\mathscr{R}C\to\mathscr{R}C$ é uma *-derivação de Jordan. Seja $y\in\mathscr{R}C$. Escreva $y=\frac{x}{\beta}$, para alguns $x\in\mathscr{R}$ e $0\neq\beta\in Z(\mathscr{R})$. Então $\eta x\in N$ e

$$\tilde{\delta}\left(y^2\right)=\tilde{\delta}\left(\left(\frac{x}{\beta}\right)^2\right)=\tilde{\delta}\left(\frac{x^2}{\beta^2}\right)=\frac{\delta\left((\eta x)^2\right)}{\eta^2\beta^2}$$

$$=\frac{\delta(\eta x)\eta x^*+\eta x\delta(\eta x)}{\eta\beta\eta\beta}=\frac{\delta(\eta x)}{\eta\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^*+\frac{x}{\beta}\frac{\delta(\eta x)}{\eta\beta}=\tilde{\delta}(y)y^*+y\tilde{\delta}(y).$$

Finalmente, vejamos que $\tilde{\delta}=\delta$ sobre $\mathscr{R}$. Claramente, $\tilde{\delta}=\delta$ sobre N. Sejam $r\in\mathscr{R}$ e $x\in N$. Então, $xr+rx\in N$ e, assim $\tilde{\delta}(xr+rx)=\delta(xr+rx)$. Pelo Lema 3.0.1 segue que

$$
\begin{aligned}
\tilde{\delta}(x)r^*+x\tilde{\delta}(r)+\tilde{\delta}(r)x^*+r\tilde{\delta}(x) &= \delta(x)r^*+x\delta(r)+\delta(r)x^*+r\delta(x)\\
x\tilde{\delta}(r)+\tilde{\delta}(r)x^* &= x\delta(r)+\delta(r)x^*\\
(\tilde{\delta}(r)-\delta(r))x^*+x(\tilde{\delta}(r)-\delta(r)) &= 0
\end{aligned}
$$

Logo, $\tilde{\delta}(r)-\delta(r)=0$, isto é, $\tilde{\delta}(r)=\delta(r)$. □

Finalmente, vamos dar uma solução completa para o problema que iniciou o capítulo, sob a condição de $\partial(\mathscr{R}) \neq 2$, provando o seguinte resultado, que é uma generalização completa de (T1), (T2), (T3).

Teorema 3.0.2. *Seja $\mathscr{R}$ um anel primo, que não é comutativo, com involução * e $char(\mathscr{R}) \neq 2$. Então, toda *-derivação de Jordan de $\mathscr{R}$ é $\mathscr{X}$-interna.*

Demonstração. Pelo Corolário 3.0.1, basta analisar o caso em que $\mathscr{R}$ é um PI- anel. Seja $\delta : \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ uma *-derivação de Jordan. Vamos estudar dois casos:

Caso I - Existe $\beta \in Z(\mathscr{R})$ não nulo tal que $\beta^* \neq \beta$. Então, $(\beta - \beta^*)^* = \beta^* - \beta = -(\beta - \beta^*)$, isto é, $\beta - \beta^*$ é um elemento antissimétrico (não nulo). Assim, podemos assumir que existe um elemento não nulo $\beta \in Z(\mathscr{R})$ tal que $\beta^* = -\beta$. Escolha um *-ideal não nulo I de $\mathscr{R}$ satisfazendo $\beta I \subseteq \mathscr{R}$. Seja $x \in I$. Pelo Lema 3.0.2, vale que

$$2\delta(\beta x) = \delta(\beta x + \beta x) = \delta(\beta)x^* + \beta\delta(x) + \delta(x)(-\beta) + x\delta(\beta),$$

ou seja, $2\delta(\beta x) = \delta(\beta)x^* + x\delta(\beta)$. Desse modo, $\delta(y) = ya - ay^*$, para todo $y \in J = \beta I$, onde $a = \frac{\delta(\beta)}{2\beta}$. Em vista do Lema 3.0.1, podemos afirmar que $\delta(y) = ya - ay^*$, para todo $y \in \mathscr{R}$.
Caso II - $\beta^* = \beta$, para todo $\beta \in Z(\mathscr{R})$. Pelo Lema 3, δ pode ser estendida de modo único a uma *-derivação de Jordan de $\mathscr{R}C$, que vamos denotar por $\tilde{\delta}$. Note que $\mathscr{R}C$ é uma álgebra simples central sobre C. Assim, por [9, Teorema 1.2], existe $a \in \mathscr{R}C$ tal que $\tilde{\delta}(y) = ya - ay^*$, para qualquer $y \in \mathscr{R}C$. Em particular, $\delta(y) = ya - ay^*$, para qualquer $y \in \mathscr{R}C$, como era desejado. $\square$

Em vista dos Teoremas 3.0.1 e 3.0.2, surge a seguinte questão.

Questão II. Seja $\mathscr{R}$ um anel primo com involução *, que não é comutativo. Suponha que $char(\mathscr{R}) = 2$ e $\partial(S(\mathscr{R})) \leq 4$. Toda *-derivação de $\mathscr{R}$ é $\mathscr{X}$-interna?

4 APLICAÇÕES ADITIVAS EM ANÉIS COM INVOLUÇÃO

Uma aplicação aditiva $D\colon \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ é dita $*$-derivação de Jordan se satisfaz

$$D(x^2) = D(x)x^* + xD(x), \tag{4.1}$$

para qualquer $x \in \mathscr{R}$.

Neste capítulo, mostraremos que assumindo hipóteses fracas, toda aplicação que satisfaz a equação acima também é da forma $D(x) = ax^* - xa$, para algum elemento a.

Tais aplicações aparecem naturalmente na teoria de representabilidade de formas quadráticas por formas bilineares. Para resultados relacionados a essa teoria indicamos (ŠEMRL, 1988) e (VUKMAN, 1987), onde mais referências também podem ser encontradas. Em (ŠEMRL, 1990), foi mostrado que a questão se cada forma quadrática pode ser representada por alguma forma bilinear está intimamente ligada à questão se toda aplicação que satisfaz (4.1) é da forma $D(x) = ax^* - xa$, para algum elemento a.

Inicialmente, observe que as aplicações aditivas D_1 e D_2 com as propriedades

$$D_1(xy) = D_1(x)y^* + xD_1(y);$$

$$D_2(xy) = D_2(y)x^* + yD_2(x),$$

satisfazem (4.1), pois basta tomar $x = y$.

Além disso, a aplicação D_3 definida por

$$D_3(x) = ax^* - xa,$$

onde a é um elemento fixado também satisfaz (4.1). De fato,

$$D_3(x)x^* + xD_3(x) = ax^*x^* - xax^* + xax^* - xxa = a(x^2)^* - x^2a = D_3(x^2).$$

As aplicações D_1, D_2 e D_3 nos remetem a derivações, derivações reversas e derivações internas, respectivamente. Temos a intenção de provar que no caso em que $\mathscr{R}$ é um $*$-anel não comutativo primo, vale que $D_1 = 0$ e $D_2 = 0$.

Proposição 4.0.1. *Seja $\mathscr{R}$ um $*$-anel não comutativo primo. Se, para uma aplicação $D\colon \mathscr{R} \to \mathscr{R}$, valer que ou $D(xy) = D(x)y^* + xD(y)$, para quaisquer $x, y \in \mathscr{R}$ ou $D(xy) = D(y)x^* + yD(x)$, para todos $x, y \in \mathscr{R}$, então $D = 0$.*

Para demonstrar a Proposição 4.1, vamos precisar do seguinte lema, cuja demonstração pode ser encontrada em (HERSTEIN; HERSTEIN, 1976), Corolário do Lema 1.1.7.

Lema 4.0.1. *Seja $\mathscr{R}$ um anel primo. Se ou $[x,b]=0$, para todo $x \in \mathscr{R}$ ou $[x,b]a=0$, para qualquer $x \in \mathscr{R}$, então $a=0$ ou $b \in Z(\mathscr{R})$.*

Demonstração. Suponha que D satisfaça $D(xy) = D(x)y^* + xD(y)$. Então,

$$\begin{aligned} D(xyz) &= D(x(yz)) \\ &= D(x)(yz)^* + xD(yz) \\ &= D(x)z^*y^* + x(D(y)z^* + yD(z)) \\ &= D(x)z^*y^* + xD(y)z^* + xyD(z). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Por outro lado, como $\mathscr{R}$ é um anel associativo, também temos que

$$\begin{aligned} D(xyz) &= D((xy)z) \\ &= D(xy)z^* + (xy)D(z) \\ &= (D(x)y^* + xD(y))z^* + xyD(z) \\ &= D(x)y^*z^* + xD(y)z^* + xyD(z). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Assim, comparando (4.2) e (4.3), obtemos $D(x)z^*y^* = D(x)y^*z^*$, isto é,

$$D(x)[z^*, y^*] = 0,$$

para quaisquer $x, y, z \in \mathscr{R}$. Consequentemente, usando o Lema 4.0.1, podemos concluir que $D = 0$. Similarmente, podemos mostrar que $D = 0$ no caso em que $D(xy) = D(y)x^* + yD(x)$. $\square$

Lema 4.0.2. *Seja $\mathscr{R}$ um $*$-anel livre de 2-torção. Se uma aplicação aditiva $D\colon \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ satisfaz (4.1), então para quaisquer $x, y, z \in \mathscr{R}$, as seguintes igualdades são válidas*

$$D(xyx) = D(x)y^*x^* + xD(y)x^* + xyD(x); \tag{4.4}$$

$$D(xyz + zyx) = D(x)y^*z^* + xD(y)z^* + xyD(z) + D(z)y^*x^* + zD(y)x^* + zyD(x). \tag{4.5}$$

Demonstração. Suponha que D satisfaça (4.1). Linearizando (4.1), obtemos

$$D(xy + yx) = D(x)y^* + D(y)x^* + xD(y) + yD(x).$$

Agora, vamos calcular $D(x(xy+yx)+(xy+yx)x)$ de dois modos diferentes:
De um modo, temos

$$\begin{aligned}
D(x(xy+yx)+(xy+yx)x) &= D(x)(xy+yx)^*+D(xy+yx)x^*+\\
&\quad +xD(xy+yx)+(xy+yx)D(x)\\
&= D(x)y^*x^*+D(x)x^*y^*+D(x)y^*x^*+D(y)x^*x^*+\\
&\quad +xD(y)x^*+yD(x)x^*+xD(x)y^*+xD(y)x^*+\\
&\quad +xxD(y)+xyD(x)+xyD(x)+yxD(x). \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

De outro modo, temos

$$\begin{aligned}
D(x(xy+yx)+(xy+yx)x) &= D(x^2y+yx^2)+2D(xyx)\\
&= D(x^2)y^*+D(y)x^*x^*+x^2D(y)+\\
&\quad +yD(x^2)+2D(yxy)\\
&= D(x)x^*y^*+xD(x)y^*+D(y)x^*x^*+\\
&\quad +xxD(y)+yD(x)x^*+yxD(x)+2D(xyx). \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

Comparando (4.6) e (4.7), podemos concluir que

$$2D(x)y^*x^*+2xD(y)x^*+2xyD(x)=2D(xyx).$$

Logo, como $\mathscr{R}$ é livre de 2-torção, segue que

$$D(xyx)=D(x)y^*x^*+xD(y)x^*+xyD(x),$$

para quaisquer $x,y\in\mathscr{R}$. Finalmente, linearizando (4.4), obtemos (4.5). □

Agora, vamos provar que assumindo uma hipótese bastante fraca, toda aplicação satisfazendo (4.1) é da forma D_3.

Teorema 4.0.2. *Seja $\mathscr{R}$ um $*$-anel, contendo um elemento identidade 1, o elemento $\frac{1}{2}$ e um elemento antissimétrico λ que pertence a $Z(\mathscr{R})$. Se uma aplicação aditiva $D\colon \mathscr{R}\to\mathscr{R}$ satifaz (4.1), então existe $a\in\mathscr{R}$ tal que $D(x)=ax^*-xa$, para todo $x\in\mathscr{R}$.*

Demonstração. Por (4.4), note que

$$\begin{aligned}
D(\lambda) &= D(\lambda\lambda^{-1}\lambda)\\
&= D(\lambda)(\lambda^{-1})^*\lambda^*+\lambda D(\lambda^{-1})\lambda^*+\lambda\lambda^{-1}D(\lambda)\\
&= D(\lambda)-\lambda^2D(\lambda^{-1})+D(\lambda).
\end{aligned}$$

Assim, $D(\lambda^{-1}) = \lambda^{-2}D(\lambda)$.

E de acordo com (4.5), temos que

$$\begin{aligned}
2D(x) &= D(\lambda x\lambda^{-1} + \lambda^{-1}x\lambda) \\
&= D(\lambda)x^*(\lambda^{-1})^* + \lambda D(x)(\lambda^{-1})^* + \lambda x D(\lambda^{-1}) + D(\lambda^{-1})x^*\lambda^* + \lambda^{-1}D(x)\lambda^* + \\
&\quad + \lambda^{-1}xD(\lambda) \\
&= -\lambda^{-1}D(x)x^* - D(x) + x\lambda^{-1}D(\lambda) - \lambda^{-1}D(\lambda)x^* - D(x) + x\lambda^{-1}D(\lambda).
\end{aligned}$$

Consequentemente, $4D(x) = x(2\lambda^{-1}D(\lambda)) - (2\lambda^{-1}D(\lambda))x^*$, para qualquer $x \in \mathscr{R}$. $\square$

5 CARACTERIZAÇÃO DE *-DERIVAÇÕES DE JORDAN COM A AÇÃO DE PRODUTOS NULOS

Nesta seção, iremos considerar a questão da caracterização das *-derivações de Jordan multiplicativas pela ação de produtos nulos, no geral, em um *-anel.

Teorema 5.0.1. *Seja $\mathscr{R}$ um *-anel livre de 2-torção com um idempotente não trivial e simétrico e_1. Assuma que $\mathscr{R}$ satisfaça as seguintes condições:*

1. *Para $a \in \mathscr{R}$, $a\mathscr{R}e_i = 0$ implica $a = 0$, sempre que $i = 1,2$ e $e_2 = 1 - e_1$;*
2. *Para $a \in \mathscr{R}$, $e_2ae_2x^*e_2 + e_2xe_2ae_2 = 0$ para todo $x \in \mathscr{R}$ implica $e_2ae_2 = 0$.*

*Se a função $\delta : \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ satisfaz $\delta(ab+ba) = \delta(a)b^* + a\delta(b) + \delta(b)a^* + b\delta(a)$ sempre que $ab = 0$, com $a,b \in \mathscr{R}$, então $\delta|_{e_i\mathscr{R}e_j}$ é uma *-derivação de Jordan aditiva, onde $\delta|_{e_i\mathscr{R}e_j}$ é a restrição de δ para $e_i\mathscr{R}e_j$, com $i,j \in \{1,2\}$.*

Demonstração. A demonstração do teorema se dará através de uma série de afirmações.

Afirmação 1. $\delta(0) = 0$

Como $0^* = 0$, temos $\delta(00+00) = \delta(0)0^* + 0\delta(0) + \delta(0)0^* + 0\delta(0) = 0$.

Afirmação 2. *Seja $1 \leq i \neq j \leq 2$. Para quaisquer $a_{ii} \in \mathscr{R}_{ii}$ e $a_{ij} \in \mathscr{R}_{ij}$, temos*

1. $e_i\delta(a_{ij}a_{jj})e_j = e_i\delta(a_{ij})a_{jj}^* + a_{ij}\delta(a_{jj})e_j$;
2. $e_j\delta(a_{ij}a_{jj})e_i = e_j\delta(a_{jj})a_{ij}^* + a_{jj}\delta(a_{ij})e_i$.

(i) Para $i = 1$ e $j = 2$, usando o fato que $a_{12} \in \mathscr{R}_{12}$, $a_{22} \in \mathscr{R}_{22}$ e $a_{22}a_{12} = 0$, temos

$$\delta(a_{12}a_{22}) = \delta(a_{22}a_{12} + a_{12}a_{22}).$$

Pela definição da função δ, temos

$$\delta(a_{22}a_{12} + a_{12}a_{22}) = \delta(a_{22})a_{12}^* + a_{22}\delta(a_{12}) + \delta(a_{12})a_{22}^* + a_{12}\delta(a_{22}). \tag{5.1}$$

Multiplicando a equação (5.1), do lado esquerdo por e_1 e do lado direito por e_2, obtemos

$$\begin{aligned} e_1\delta(a_{12}a_{22})e_2 &= e_1\delta(a_{22})a_{12}^*e_2 + e_1a_{22}\delta(a_{12})e_2 + \\ &\quad + e_1\delta(a_{12})a_{22}^*e_2 + e_1a_{12}\delta(a_{22})e_2 \end{aligned}$$

Agora, observe que $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$, logo $a_{12}^*e_2 = e_2a^*e_1e_2 = 0$, donde $e_1\delta(a_{22})a_{12}^*e_2 = 0$ e $e_1a_{22}\delta(a_{12}) = e_1e_2ae_2\delta(a_{12}) = 0$. Além disso, como $e_2e_2 = e_2$, temos

$$e_1\delta(a_{12})a_{22}^*e_2 = e_1\delta(a_{12})e_2a^*e_2e_2 = e_1\delta(a_{12})e_2a^*e_2 = e_1\delta(a_{12})a_{22}^*,$$

e sendo $e_1e_1 = e_1$, temos

$$e_1a_{12}\delta(a_{22})e_2 = e_1e_1ae_2\delta(a_{22})e_2 = e_1ae_2\delta(a_{22})e_2 = a_{12}\delta(a_{22})e_2.$$

Assim, obtemos o item (i)

$$e_1\delta(a_{12}a_{22})e_2 = e_1\delta(a_{12})a_{22}^* + a_{12}\delta(a_{22})e_2.$$

Agora, multiplicando a equação (5.1), do lado esquerdo por e_2 e do lado direito por e_1, obtemos

$$e_2\delta(a_{12}a_{22})e_1 = e_2\delta(a_{22})a_{12}^*e_1 + e_2a_{22}\delta(a_{12})e_1 + e_2\delta(a_{12})a_{22}^*e_1 + e_2a_{12}\delta(a_{22})e_1.$$

Por outro lado, temos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}
&e_2\delta(a_{22})a_{12}^*e_1 = e_2\delta(a_{22})e_2a^*e_1e_1 = e_2\delta(a_{22})e_2a^*e_1 = e_2\delta(a_{22})a_{12}^*;\\
&e_2a_{22}\delta(a_{12})e_1 = e_2e_2ae_2\delta(a_{12})e_1 = e_2ae_2\delta(a_{12})e_1 = a_{22}\delta(a_{12})e_1;\\
&e_2\delta(a_{12})a_{22}^*e_1 = e_2\delta(a_{12})e_2a^*e_2e_1 = 0;\\
&e_2a_{12}\delta(a_{22})e_1 = e_2e_1ae_2\delta(a_{22})e_1 = 0.
\end{aligned}$$

Substituindo tais igualdades em

$$e_2\delta(a_{12}a_{22})e_1 = e_2\delta(a_{22})a_{12}^*e_1 + e_2a_{22}\delta(a_{12})e_1 + e_2\delta(a_{12})a_{22}^*e_1 + e_2a_{12}\delta(a_{22})e_1,$$

obtemos o item (ii)

$$e_2\delta(a_{12}a_{22})e_1 = e_2\delta(a_{22})a_{12}^* + a_{22}\delta(a_{12})e_1.$$

O caso $i = 2$ e $j = 1$ é obtido de forma análoga.

Afirmação 3. *$e_1\delta(e_1)e_1 = 0$ e $e_2\delta(e_1)e_2 = 0$.*

Para provar esta afirmação usaremos o item (ii) da Afirmação 2. Com efeito, Substituindo $a_{jj} = e_1$ em (ii), obtemos $e_j\delta(a_{ij}e_1)e_i = e_j\delta(e_1)a_{ij}^* + e_1\delta(a_{ij})e_i$. Assim, para $i = 2$ e $j = 1$, temos

$$\begin{aligned}
e_1\delta(a_{21}e_1)e_2 &= e_1\delta(e_1)a_{21}^* + e_1\delta(a_{21})e_2\\
e_1\delta(a_{21})e_2 &= e_1\delta(e_1)a_{21}^* + e_1\delta(a_{21})e_2\\
e_1\delta(e_1)a_{21}^* + e_1\delta(a_{21})e_2 - e_1\delta(a_{21})e_2 &= 0\\
e_1\delta(e_1)a_{21}^* &= 0,
\end{aligned}$$

para qualquer $a_{21} \in \mathscr{R}_{21}$. Desse modo, $e_1\delta(e_1)e_1ae_2 = 0$, para qualquer $a \in \mathscr{R}$, pois fazendo $a = b^*$, $a_{21} = e_2b^*e_1$, logo $a_{21}^* = e_1be_2 = b_{12}$. Além disso, resulta da hipótese (1) do teorema que $e_1\delta(e_1)e_1ae_2 = 0$, logo $e_1\delta(e_1)e_1 = 0$. Por outro lado, para qualquer $a_{22} \in \mathscr{R}_{22}$, temos $a_{22}e_1 =$

$e_1a_{22} = 0$, assim fazendo $a = e_1$ e $b = a_{22}$ em $\delta(ab+ba) = \delta(a)b^* + a\delta(b) + \delta(b)a* + b\delta(a)$, obtemos

$$0 = \delta(0) = \delta(a_{22}e_1 + e_1a_{22}) = \delta(a_{22})e_1^* + a_{22}\delta(e_1) + \delta(e_1)a_{22}^* + e_1\delta(a_{22}).$$

Multiplicando ambos os membros da equação acima por e_2 e lembrando que $e_1^* = e_1$, temos

$$0 = e_2 0 e_2 = e_2\delta(a_{22})e_1e_2 + e_2a_{22}\delta(e_1)e_2 + e_2\delta(e_1)a_{22}^*e_2 + e_2e_1\delta(a_{22})e_2.$$

Como $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$, obtemos $e_2\delta(a_{22})e_1e_2 = e_2e_1\delta(a_{22})e_2 = 0$, restando,

$$e_2a_{22}\delta(e_1)e_2 + e_2\delta(e_1)a_{22}^*e_2 = 0.$$

Como $e_2a_{22} = a_{22}$ e $a_{22}^*e_2 = a_{22}^*$, obtemos $e_2\delta(e_1)a_{22}^* + a_{22}\delta(e_1)e_2 = 0$, donde

$$e_2\delta(e_1)e_2a^*e_2 + e_2ae_2\delta(e_1)e_2 = 0,$$

para qualquer $a \in \mathscr{R}$. Como, a partir da hipótese (2) do Teorema, temos $e_2\delta(e_1)e_2 = 0$, segue que a Afirmação 3 é verdadeira. Agora defina $\tau(a) = \delta(a) - (aa_0 - a_0a^*)$, para qualquer $a \in \mathscr{R}$, onde

$$a_0 = e_1\delta(e_1)e_2 - e_2\delta(e_1)e_1.$$

Então mostraremos que

$$\tau(ab+ba) = \tau(a)b^* + a\tau(b) + \tau(b)a^* + b\tau(a) \tag{5.2}$$

sempre que $ab = 0$, com $a, b \in \mathscr{R}$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\tau(ab+ba) &= \delta(ab+ba) - ((ab+ba)a_0 - a_0(ab+ba)^*) \\
&= \delta(a)b^* + a\delta(b) + \delta(b)a^* + b\delta(a) - ((ab+ba)a_0 - a_0(b^*a^* + a^*b^*)) \\
&= \delta(a)b^* + a\delta(b) + \delta(b)a^* + b\delta(a) - aba_0 - baa_0 + a_0b^*a^* + a_0a^*b^*.
\end{aligned}$$

Somando e subtraindo aa_0b^* e ba_0a^*, temos

$$\begin{aligned}
\tau(ab+ba) &= \delta(a)b^* - aa_0b^* + a_0a^*b^* + a\delta(b) - aba_0 + aa_0b^* + \\
&\quad + \delta(b)a^* - ba_0a^* + a_0b^*a^* + b\delta(a) - baa_0 + ba_0a^*.
\end{aligned}$$

Colocando em evidência alguns termos, temos

$$\begin{aligned}
\tau(ab+ba) &= [\delta(a) - (aa_0 - a_0a^*)]b^* + a[\delta(b) - (ba_0 - a_0b^*)] + \\
&\quad + [\delta(b) - (ba_0 - a_0b^*)]a^* + b[\delta(a) - (aa_0 - a_0a^*)].
\end{aligned}$$

Logo, substituindo pela τ, obtemos

$\tau(ab+ba) = \tau(a)b^* + a\tau(b) + \tau(b)a^* + b\tau(a).$

Com a Afirmação 3 provada, temos ferramentas suficientes para provar que

$$\tau(e_1) = 0 \tag{5.3}$$

Com efeito, pela Afirmação 3, temos $e_2\delta(e_1)e_2 = 0$, ou seja, $(1-e_1)\delta(e_1)(1-e_1) = 0$, donde $\delta(e_1) - \delta(e_1)e_1 - e_1\delta(e_1) + e_1\delta(e_1)e_1 = 0$, lembrando que pela Afirmação 3, temos também $e_1\delta(e_1)e_1 = 0$, logo

$$\delta(e_1) = \delta(e_1)e_1 + e_1\delta(e_1) \tag{5.4}$$

Por outro lado, por definição, $\tau(a) = \delta(a) - (aa_0 - a_0a^*)$, para qualquer $a \in \mathscr{R}$, onde $a_0 = e_1\delta(e_1)e_2 - e_2\delta(e_1)e_1$. Assim, fazendo $a = e_1$, iremos obter

$\tau(e_1) = \delta(e_1) - (e_1a_0 - a_0e_1^*).$

Substituindo a_0,

$$\begin{aligned} \tau(e_1) &= \delta(e_1) - (e_1(e_1\delta(e_1)e_2 - e_2\delta(e_1)e_1) - (e_1\delta(e_1)e_2 - e_2\delta(e_1)e_1)e_1) \\ &= \delta(e_1) - e_1\delta(e_1)e_2 - e_2\delta(e_1)e_1. \end{aligned}$$

Substituindo $e_2 = 1 - e_1$,

$$\begin{aligned} \tau(e_1) &= \delta(e_1) - e_1\delta(e_1)(1-e_1) - (1-e_1)\delta(e_1)e_1 \\ &= \delta(e_1) - e_1\delta(e_1) + e_1\delta(e_1)e_1 - \delta(e_1)e_1 + e_1\delta(e_1)e_1. \end{aligned}$$

Pela Afirmação 3, temos que $e_1\delta(e_1)e_1 = 0$, logo

$\tau(e_1) = \delta(e_1) - e_1\delta(e_1) - \delta(e_1)e_1.$

Segue, finalmente, pela equação (5.4), que

$$\tau(e_1) = \delta(e_1) - e_1\delta(e_1) - \delta(e_1)e_1 = \delta(e_1) - \delta(e_1) = 0.$$

Afirmação 4. $\tau(\mathscr{R}_{ii}) \subseteq \mathscr{R}_{ii}, i = 1, 2.$

Para provar tal afirmação, iremos precisar de uma série de equações. Com efeito, para quaisquer $a_{11} \in \mathscr{R}_{11}$ e $b_{22} \in \mathscr{R}_{22}$, temos $a_{11}b_{22} = e_1ae_1e_2be_2 = 0$ e $b_{22}a_{11} = e_2be_2e_1ae_1 = 0$, pois $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$. Assim, substituindo $a = a_{11}$ e $b = b_{22}$ na equação (5.2), temos

$$0 = \tau(0) = \tau(a_{11}b_{22} + b_{22}a_{11}) = \tau(a_{11})b_{22}^* + a_{11}\tau(b_{22}) + \tau(b_{22})a_{11}^* + b_{22}\tau(a_{11}). \tag{5.5}$$

Multiplicando, ambos os lados da equação acima por e_2, obtemos

$$0 = e_2 0 e_2 = e_2\tau(a_{11})b_{22}^* e_2 + e_2 a_{11}\tau(b_{22})e_2 + e_2\tau(b_{22})a_{11}^* e_2 + e_2 b_{22}\tau(a_{11})e_2,$$

ou seja,

$$0 = e_2\tau(a_{11})e_2 b^* e_2 e_2 + e_2 e_1 a e_1\tau(b_{22})e_2 + e_2\tau(b_{22})e_1 a^* e_1 e_2 + e_2 e_2 b e_2\tau(a_{11})e_2.$$

E como $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$, obtemos

$$0 = e_2\tau(a_{11})e_2 b^* e_2 + e_2 b e_2\tau(a_{11})e_2.$$

Desse modo, fazendo a comparação $a = \tau(a_{11})$ e $x = b$ na hipótese (2) do Teorema 5.0.1, obtemos a primeira equação necessária para nossa demonstração

$$e_2\tau(a_{11})e_2 = 0 \tag{5.6}$$

Agora, multiplicando por e_1 e por e_2, à esquerda e à direita, respectivamente, a equação (5.5), obtemos

$$0 = e_1 0 e_2 = e_1\tau(a_{11})b_{22}^* e_2 + e_1 a_{11}\tau(b_{22})e_2 + e_1\tau(b_{22})a_{11}^* e_2 + e_1 b_{22}\tau(a_{11})e_2,$$

ou seja,

$$0 = e_1\tau(a_{11})e_2 b^* e_2 e_2 + e_1 e_1 a e_1\tau(b_{22})e_2 + e_1\tau(b_{22})e_1 a^* e_1 e_2 + e_1 e_2 b e_2\tau(a_{11})e_2.$$

E como $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$, temos

$$0 = e_1\tau(a_{11})b_{22}^* + a_{11}\tau(b_{22})e_2.$$

Fazendo $a_{11} = e_1$ na equação anterior, obtemos

$$0 = e_1\tau(e_1)b_{22}^* + e_1\tau(b_{22})e_2,$$

lembrando que $\tau(e_1) = 0$, segue

$$e_1\tau(b_{22})e_2 = 0 \text{ implica que } a_{11}e_1\tau(b_{22})e_2 = 0 \text{ implica que } a_{11}\tau(b_{22})e_2 = 0.$$

E assim,

$$0 = e_1\tau(a_{11})b_{22}^* + a_{11}\tau(b_{22})e_2 = e_1\tau(a_{11})b_{22}^*.$$

Isto é, $e_1\tau(a_{11})e_2be_2 = 0$, para qualquer $b \in \mathscr{R}$. Então comparando com a hipótese (1) do Teorema 5.0.1, a seria $e_1\tau(a_{11})e_2$, chegamos em

$$e_1\tau(a_{11})e_2 = 0 \tag{5.7}$$

De forma análoga, multiplicando por e_2 e por e_1, à esquerda e à direita, respectivamente, a equação 5.5, obtemos

$$0 = e_2 0 e_1 = e_2\tau(a_{11})b_{22}^*e_1 + e_2a_{11}\tau(b_{22})e_1 + e_2\tau(b_{22})a_{11}^*e_1 + e_2b_{22}\tau(a_{11})e_1,$$

ou seja,

$$0 = e_2\tau(a_{11})e_2b^*e_2e_1 + e_2e_1ae_1\tau(b_{22})e_1 + e_2\tau(b_{22})e_1a^*e_1e_1 + e_2e_2be_2\tau(a_{11})e_1.$$

E como $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$, temos

$$0 = e_2\tau(b_{22})a_{11}^* + b_{22}\tau(a_{11})e_1.$$

Fazendo $a_{11} = e_1$ na equação acima, obtemos

$$0 = e_2\tau(b_{22})e_1 + b_{22}\tau(e_1)e_1.$$

E como $\tau(e_1) = 0$, temos $e_2\tau(b_{22})e_1 = 0$, donde $e_2\tau(b_{22})a_{11}^* = e_2\tau(b_{22})e_1a^*e_1 = 0$, logo

$$0 = e_2\tau(b_{22})a_{11}^* + b_{22}\tau(a_{11})e_1 = b_{22}\tau(a_{11})e_1,$$

donde $e_2be_2\tau(a_{11})e_1 = 0$, para qualquer $b \in \mathscr{R}$.

Para chegar ao resultado desejado, iremos provar o caso simétrico da hipótese (1) do Teorema 5.0.1.

(Simétrico da hipótese-(1) 5.0.1) Se $e_i\mathscr{R}a = 0$ para qualquer $a \in \mathscr{R}$, então $a = 0$, sempre que $i = 1,2$ e $e_2 = 1 - e_1$.

Com efeito, tendo $e_i\mathscr{R}a = 0$ para qualquer $a \in \mathscr{R}$, temos $e_iba = 0$, para qualquer $b \in \mathscr{R}$, donde $(e_iba)^* = 0$, para qualquer $b \in \mathscr{R}$, logo $a^*b^*e_i^* = 0$, ou seja $a^*b^*e_i = 0$, para qualquer $b \in \mathscr{R}$, assim pela hipótese (1), temos $a^* = 0$, logo $a = 0$. Donde, $e_2be_2\tau(a_{11})e_1 = 0$, para qualquer $b \in \mathscr{R}$. Portanto,

$$e_2\tau(a_{11})e_1 = 0. \tag{5.8}$$

A próxima equação será obtida a partir das anteriores, pois substituindo e_2 por $1-e_1$ em (5.7), temos

$$\begin{aligned} e_1\tau(a_{11})(1-e_1) &= 0 \\ e_1\tau(a_{11})-e_1\tau(a_{11})e_1 &= 0 \\ e_1\tau(a_{11}) &= e_1\tau(a_{11})e_1 \\ (1-e_2)\tau(a_{11}) &= e_1\tau(a_{11})e_1 \\ \tau(a_{11})-e_2\tau(a_{11}) &= e_1\tau(a_{11})e_1 \\ \tau(a_{11}) &= e_2\tau(a_{11})+e_1\tau(a_{11})e_1 \end{aligned} \tag{5.9}$$

De forma análoga, substituindo e_1 por $1-e_2$ em (5.8), temos

$$e_2\tau(a_{11})(1-e_2)=0$$

$$e_2\tau(a_{11})-e_2\tau(a_{11})e_2=0,$$

por (5.6),

$$e_2\tau(a_{11})=0. \tag{5.10}$$

Substituindo (5.9) em (5.10), obtemos

$$\tau(a_{11})=e_1\tau(a_{11})e_1. \tag{5.11}$$

Pela decomposição de Peirce, segue

$$\tau(a_{11})=e_1\tau(a_{11})e_1+e_2\tau(a_{11})e_2+e_1\tau(a_{11})e_2+e_2\tau(a_{11})e_1.$$

Resultando, pelas equações (5.6),(5.7), (5.8) e (5.11), em

$$\tau(a_{11})=e_1\tau(a_{11})e_1\in\mathscr{R}_{11}$$

Portanto, $\tau(a_{11})\in\mathscr{R}_{11}$. E de forma análoga, chegamos a conclusão que $\tau(a_{22})\in\mathscr{R}_{22}$, terminando a prova da Afirmação 4.

Afirmação 5. $\tau(\mathscr{R}_{ij})\subseteq\mathscr{R}_{12}+\mathscr{R}_{21}, 1\leq i\neq j\leq 2.$

Tome $a_{ij} \in \mathscr{R}_{ij}$, ou seja, $a_{12} \in \mathscr{R}_{12}$ e $a_{21} \in \mathscr{R}_{21}$. Como $a_{12}e_1 = 0$ e $e_1 a_{21} = 0$, segue das equações (5.2) e (5.3) que

$$\begin{aligned}
\tau(a_{12}) &= \tau(a_{12}e_1 + e_1 a_{12}) \\
\tau(a_{12}) &= \tau(a_{12})e_1^* + a_{12}\tau(e_1) + \tau(e_1)a_{12}^* + e_1\tau(a_{12}) \\
\tau(a_{12}) &= \tau(a_{12})e_1 + e_1\tau(a_{12}) \\
\tau(a_{12}) &= \tau(a_{12})e_1 + e_1\tau(a_{12}). \qquad (5.12)
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados da equação (5.12) por e_1, obtemos

$$\begin{aligned}
e_1\tau(a_{12})e_1 &= e_1\tau(a_{12})e_1e_1 + e_1e_1\tau(a_{12})e_1 \\
e_1\tau(a_{12})e_1 &= e_1\tau(a_{12})e_1 + e_1\tau(a_{12})e_1 \\
e_1\tau(a_{12})e_1 &= 0. \qquad (5.13)
\end{aligned}$$

Agora, multiplicando ambos os lados da equação (5.12) por e_2, obtemos

$$\begin{aligned}
e_2\tau(a_{12})e_2 &= e_2\tau(a_{12})e_1e_2 + e_2e_1\tau(a_{12})e_2 \\
e_2\tau(a_{12})e_2 &= 0. \qquad (5.14)
\end{aligned}$$

Assim, pela Decomposição de Peirce,

$$\tau(a_{12}) = e_1\tau(a_{12})e_1 + e_1\tau(a_{12})e_2 + e_2\tau(a_{12})e_1 + e_2\tau(a_{12})e_2$$

$$\tau(a_{12}) = e_1\tau(a_{12})e_2 + e_2\tau(a_{12})e_2 \in \mathscr{R}_{12} + \mathscr{R}_{21}$$

Portanto, $\tau(\mathscr{R}_{12}) \subseteq \mathscr{R}_{12} + \mathscr{R}_{21}$. Analogamente, demonstra-se $\tau(\mathscr{R}_{21}) \subseteq \mathscr{R}_{12} + \mathscr{R}_{21}$, concluindo a prova da Afirmação 5.

Afirmação 6. *Para quaisquer $a_{11} \in \mathscr{R}_{11}$ e $a_{12} \in \mathscr{R}_{12}$, temos $e_1\tau(a_{11} + a_{12})e_2 = e_1\tau(a_{12})e_2$, $e_2\tau(a_{11} + a_{12})e_1 = e_2\tau(a_{12})e_1$ e $e_2\tau(a_{11} + a_{12})e_2 = 0$.*

Para demonstrar tal afirmação, primeiramente observe que para quaisquer $a_{11} \in \mathscr{R}_{11}$ e $a_{12} \in \mathscr{R}_{12}$, temos que $a_{22}(a_{11} + a_{12}) = 0$ e $a_{22}a_{12} = 0$. Pela equação (5.2), por um lado, temos

$$\tau(a_{12}a_{22}) = \tau(a_{22}(a_{12} + a_{11}) + (a_{12} + a_{11})a_{22})$$

$$\tau(a_{12}a_{22}) = \tau(a_{22})(a_{12}+a_{11})^* + a_{22}\tau(a_{12}+a_{11}) + \tau(a_{12}+a_{11})a_{22}^* + (a_{12}+a_{11})\tau(a_{22}). \qquad (5.15)$$

E por outro lado,

$$\begin{aligned}
\tau(a_{12}a_{22}) &= \tau(a_{22}a_{12} + a_{12}a_{22}) \\
\tau(a_{12}a_{22} &= \tau(a_{22})a_{12}^* + a_{22}\tau(a_{12}) + \tau(a_{12})a_{22}^* + a_{12}\tau(a_{22}). \qquad (5.16)
\end{aligned}$$

Comparando as duas equações (5.15) e (5.16),

$$\begin{aligned} \tau(a_{22})a_{12}^* + \tau(a_{22})a_{11}^* + a_{22}\tau(a_{12}+a_{11}) + &= \tau(a_{22})a_{12}^* + a_{22}\tau(a_{12}) + \\ + \tau(a_{12}+a_{11})a_{22}^* + a_{12}\tau(a_{22}) + a_{11}\tau(a_{22}) & \quad + \tau(a_{12})a_{22}^* + a_{12}\tau(a_{22}), \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} \tau(a_{22})a_{12}^* - \tau(a_{22})a_{12}^* + \tau(a_{22})a_{11}^* + a_{22}\tau(a_{12}+a_{11}) + \tau(a_{12}+a_{11})a_{22}^* + &= 0, \\ +a_{12}\tau(a_{22}) - a_{12}\tau(a_{22}) + a_{11}\tau(a_{22}) - a_{22}\tau(a_{12}) - \tau(a_{12})a_{22}^* & \end{aligned}$$

ou seja,

$$\tau(a_{22})a_{11}^* + a_{22}\tau(a_{12}+a_{11}) + \tau(a_{12}+a_{11})a_{22}^* + a_{11}\tau(a_{22}) - a_{22}\tau(a_{12}) - \tau(a_{12})a_{22}^* = 0.$$

Pela Afirmação 4, $\tau(a_{ii}) \in \mathscr{R}_{ii}$, assim $\tau(a_{22})a_{11}^* = a_{11}\tau(a_{22}) = 0$, então resta

$$\begin{aligned} a_{22}\tau(a_{12}+a_{11}) + \tau(a_{12}+a_{11})a_{22}^* - a_{22}\tau(a_{12}) - \tau(a_{12})a_{22}^* &= 0 \\ a_{22}\tau(a_{12}+a_{11}) - a_{22}\tau(a_{12}) + \tau(a_{12}+a_{11})a_{22}^* - \tau(a_{12})a_{22}^* &= 0 \\ a_{22}[\tau(a_{12}+a_{11}) - \tau(a_{12})] + [\tau(a_{12}+a_{11}) - \tau(a_{12})]a_{22}^* &= 0. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Multiplicando a equação (5.17) por e_2 em ambos os lados , obtemos

$$\begin{aligned} e_2e_2ae_2[\tau(a_{12}+a_{11}) - \tau(a_{12})]e_2 + e_2[\tau(a_{12}+a_{11}) - \tau(a_{12})]e_2a^*e_2e_2 &= 0 \\ e_2ae_2[\tau(a_{12}+a_{11}) - \tau(a_{12})]e_2 + e_2[\tau(a_{12}+a_{11}) - \tau(a_{12})]e_2a^*e_2 &= 0, \end{aligned}$$

para qualquer $a \in \mathscr{R}$. Assim, pela hipótese 2 do teorema,

$$\begin{aligned} e_2[\tau(a_{12}+a_{11}) - \tau(a_{12})]e_2 &= 0 \\ e_2\tau(a_{12}+a_{11})e_2 - e_2\tau(a_{12})e_2 &= 0 \\ e_2\tau(a_{12}+a_{11})e_2 &= e_2\tau(a_{12})e_2. \end{aligned}$$

Observe, pela Afirmação 5, para $\tau(a_{12}) \in \mathscr{R}_{12} + \mathscr{R}_{21}$, temos $e_2\tau(a_{12})e_2 = 0$, ou seja, $e_2\tau(a_{12} + a_{11})e_2 = 0$. Agora, multiplicando o lado esquerdo por e_1 e o lado direito por e_2 da equação (5.17), temos

$$e_1e_2ae_2[\tau(a_{12}+a_{11}) - \tau(a_{12})]e_2 + e_1[\tau(a_{12}+a_{11}) - \tau(a_{12})]e_2a^*e_2e_2 = 0,$$

como $e_1e_2 = 0$, segue

$$e_1[\tau(a_{12}+a_{11}) - \tau(a_{12})]e_2a^*e_2 = 0,$$

daí, pela hipótese (1) do teorema, temos

$$\begin{aligned} e_1[\tau(a_{12}+a_{11})-\tau(a_{12})]e_2 &= 0 \\ e_1\tau(a_{12}+a_{11})e_2 &= e_1\tau(a_{12})e_2. \end{aligned}$$

De forma similar, multiplicando o lado esquerdo e o lado direito, por e_2 e por e_1, da equação (5.17), respectivamente, obtemos

$$e_2e_2ae_2[\tau(a_{12}+a_{11})-\tau(a_{12})]e_1+e_2[\tau(a_{12}+a_{11})-\tau(a_{12})]e_2a^*e_2e_1=0,$$

como $e_2e_1=0$, segue

$$e_2ae_2[\tau(a_{12}+a_{11})-\tau(a_{12})]e_1=0,$$

para qualquer $a\in\mathscr{R}$. Segue pelo caso simétrico da hipótese (1) do teorema, que

$$\begin{aligned} e_2[\tau(a_{12}+a_{11})-\tau(a_{12})]e_1 &= 0 \\ e_2\tau(a_{12}+a_{11})e_1-e_2\tau(a_{12})e_1 &= 0 \\ e_2\tau(a_{12}+a_{11})e_1 &= e_2\tau(a_{12})e_1 \end{aligned}$$

Portanto, a Afirmação 6 está demonstrada.

Afirmação 7. *Para qualquer $a_{ij}\in\mathscr{R}_{ij}(1\leq i,j\leq 2)$, temos*

1. $e_1\tau(a_{22}+a_{12})e_1=0$, $e_1\tau(a_{22}+a_{12})e_2=e_1\tau(a_{12})e_2$ *e* $e_2\tau(a_{22}+a_{12})e_2=e_2\tau(a_{12})e_1$;
2. $e_1\tau(a_{22}+a_{21})e_1=0$, $e_1\tau(a_{22}+a_{21})e_2=e_1\tau(a_{21})e_2$ *e* $e_2\tau(a_{22}+a_{21})e_1=e_2\tau(a_{21})e_1$;
3. $e_2\tau(a_{21}+a_{11})e_2=0$, $e_1\tau(a_{21}+a_{11})e_2=e_1\tau(a_{21})e_2$ *e* $e_2\tau(a_{21}+a_{11})e_1=e_2\tau(a_{21})e_1$.

Prova do item (i): Sejam $a_{11}\in\mathscr{R}_{11},a_{12}\in\mathscr{R}_{12}$ e $a_{22}\in\mathscr{R}_{22}$, temos $(a_{22}+a_{12})a_{11}=0$ e $a_{12}a_{11}=0$. Com isso, a partir da equação (5.2), por um lado, temos

$$\begin{aligned} \tau(a_{11}a_{12}) &= \tau((a_{22}+a_{12})a_{11}+a_{11}(a_{22}+a_{12})) \\ &= \tau(a_{22}+a_{12})a_{11}^*+(a_{22}+a_{12})\tau(a_{11})+ \\ &\quad +\tau(a_{11})(a_{22}+a_{12})^*+a_{11}\tau(a_{22}+a_{12}), \end{aligned} \tag{5.18}$$

e por outro lado,

$$\begin{aligned} \tau(a_{11}a_{12}) &= \tau(a_{11}a_{12}+a_{12}a_{11}) \\ &= \tau(a_{11})a_{12}^*+a_{11}\tau(a_{12})+\tau(a_{12})a_{11}^*+a_{12}\tau(a_{11}). \end{aligned} \tag{5.19}$$

Comparando as duas equações (5.18)e (5.19), obtemos

$$\begin{aligned}\tau(a_{22}+a_{12})a_{11}^*+a_{22}\tau(a_{11})+a_{12}\tau(a_{11})+ &= \tau(a_{11})a_{12}^*+a_{11}\tau(a_{12})+\\ +\tau(a_{11})a_{22}^*+\tau(a_{11})a_{12}^*)+a_{11}\tau(a_{22}+a_{12}) &\quad +\tau(a_{12})a_{11}^*+a_{12}\tau(a_{11}),\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\tau(a_{22}+a_{12})a_{11}^*+a_{22}\tau(a_{11})+a_{12}\tau(a_{11})-a_{12}\tau(a_{11})+\tau(a_{11})a_{22}^*+ &= 0,\\ +\tau(a_{11})a_{12}^*-\tau(a_{11})a_{12}^*+a_{11}\tau(a_{22}+a_{12})-a_{11}\tau(a_{12})-\tau(a_{12})a_{11}^*\end{aligned}$$

logo,

$$\tau(a_{22}+a_{12})a_{11}^*+a_{22}\tau(a_{11})+\tau(a_{11})a_{22}^*+a_{11}\tau(a_{22}+a_{12})-a_{11}\tau(a_{12})-\tau(a_{12})a_{11}^*=0.$$

Pela Afirmação 4, temos $\tau(a_{11})\in\mathscr{R}_{11}$, onde $a_{22}\tau(a_{11})=\tau(a_{11})a_{22}^*=0$, restando,

$$\begin{aligned}\tau(a_{22}+a_{12})a_{11}^*+a_{11}\tau(a_{22}+a_{12})-a_{11}\tau(a_{12})-\tau(a_{12})a_{11}^* &= 0\\ (\tau(a_{22}+a_{12})-\tau(a_{12}))a_{11}^*+a_{11}(\tau(a_{22}+a_{12})-\tau(a_{12})) &= 0.\end{aligned}\tag{5.20}$$

Fazendo $a_{11}=e_1$ em (5.20), obtemos

$$[\tau(a_{22}+a_{12})-\tau(a_{12})]e_1+e_1[\tau(a_{22}+a_{12})-\tau(a_{12})]=0.\tag{5.21}$$

Multiplicando por e_1 os dois lados, obtemos

$$e_1\tau(a_{22}+a_{12})e_1-e_1\tau(a_{12})e_1+e_1\tau(a_{22}+a_{12})e_1-e_1\tau(a_{12})e_1=0.$$

Observe, pela Afirmação 5, que $\tau(a_{12})\in\mathscr{R}_{12}+\mathscr{R}_{21}$, donde $e_1\tau(a_{12})e_1=0$. Assim da equação resta,

$$\begin{aligned}e_1\tau(a_{22}+a_{12})e_1+e_1\tau(a_{22}+a_{12})e_1 &= 0\\ 2e_1\tau(a_{22}+a_{12})e_1 &= 0\\ e_1\tau(a_{22}+a_{12})e_1 &= 0,\end{aligned}$$

pois $\mathscr{R}$ é livre de 2-torção, onde acabamos de obter a primeira expressão de (i). Prosseguindo, agora iremos multiplicar por e_2, a equação (5.21), pelo lado direito, obtendo

$$[\tau(a_{22}+a_{12})-\tau(a_{12})]e_1e_2+e_1[\tau(a_{22}+a_{12})-\tau(a_{12})]e_2=0,$$

como $e_1e_2=0$, temos

$$\begin{aligned}e_1[\tau(a_{22}+a_{12})-\tau(a_{12})]e_2 &= 0\\ e_1\tau(a_{22}e_1+a_{12})e_2-e_1\tau(a_{12})e_2 &= 0\\ e_1\tau(a_{22}e_1+a_{12})e_2 &= e_1\tau(a_{12})e_2.\end{aligned}$$

Analogamente, multiplicando por e_2, pelo lado esquerdo, a equação (5.21), obtemos

$$e_2[\tau(a_{22}+a_{12})-\tau(a_{12})]e_1+e_2e_1[\tau(a_{22}+a_{12})-\tau(a_{12})]=0,$$

como $e_2e_1=0$, temos

$$\begin{aligned} e_2[\tau(a_{22}+a_{12})-\tau(a_{12})]e_1 &= 0\\ e_2\tau(a_{22}e_1+a_{12})-e_2\tau(a_{12})e_1 &= 0\\ e_2\tau(a_{22}e_1+a_{12}) &= e_2\tau(a_{12})e_1, \end{aligned}$$

concluindo a prova do item (i).

Prova do item (ii): Sejam $a_{11}\in\mathscr{R}_{11}, a_{21}\in\mathscr{R}_{21}$ e $a_{22}\in\mathscr{R}_{22}$, logo $a_{11}(a_{22}+a_{21})=0$ e $a_{11}a_{21}=0$. Utilizando a equação (5.2), por um lado temos

$$\begin{aligned} \tau(a_{21}a_{11}) &= \tau(a_{11}(a_{22}+a_{21})+(a_{22}+a_{21})a_{11})\\ \tau(a_{21}a_{11}) &= \tau(a_{11})(a_{22}+a_{21})^*+a_{11}\tau(a_{22}+a_{21})+\tau(a_{22}+a_{21})a_{11}^*+(a_{22}+a_{21})\tau(a_{11}). \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\tau(a_{21}a_{11})=\tau(a_{11}a_{21}+a_{21}a_{11})=\tau(a_{11})a_{21}^*+a_{11}\tau(a_{21})+\tau(a_{21})a_{11}^*+a_{21}\tau(a_{11}).$$

Comparando as duas equações, obtemos

$$\begin{aligned} \tau(a_{11})a_{22}^*+\tau(a_{11})a_{21}^*+a_{11}\tau(a_{22}+a_{21})+ &= \tau(a_{11})a_{21}^*+a_{11}\tau(a_{21})+\\ +\tau(a_{22}+a_{21})a_{11}^*+a_{22}\tau(a_{11})+a_{21}\tau(a_{11}) &\quad +\tau(a_{21})a_{11}^*+a_{21}\tau(a_{11}), \end{aligned}$$

donde,

$$\tau(a_{11})a_{22}^*+a_{11}\tau(a_{22}+a_{21})+\tau(a_{22}+a_{21})a_{11}^*+a_{22}\tau(a_{11})=a_{11}\tau(a_{21})+\tau(a_{21})a_{11}^*$$

pela Afirmação 4 $\tau(a_{11})\in\mathscr{R}_{11}$, logo $a_{22}\tau(a_{11})=\tau(a_{11})a_{22}^*=0$, resta

$$a_{11}\tau(a_{22}+a_{21})+\tau(a_{22}+a_{21})a_{11}^*=a_{11}\tau(a_{21})+\tau(a_{21})a_{11}^*.$$

Fazendo $a_{11}=e_1$ na equação acima, obtemos

$$e_1\tau(a_{22}+a_{21})+\tau(a_{22}+a_{21})e_1=e_1\tau(a_{21})+\tau(a_{21})e_1 \tag{5.22}$$

Multiplicando ambos os lados da equação (5.22) por e_1, obtemos

$$e_1\tau(a_{22}+a_{21})e_1+e_1\tau(a_{22}+a_{21})e_1=e_1\tau(a_{21})e_1+e_1\tau(a_{21})e_1.$$

Observe que, pela Afirmação 5, $\tau(a_{21}) \in \mathscr{R}_{12} + \mathscr{R}_{21}$, donde $e_1\tau(a_{21})e_1 = 0$. Assim da equação acima resta,

$$\begin{aligned} e_1\tau(a_{22}+a_{21})e_1 + e_1\tau(a_{22}+a_{21})e_1 &= 0 \\ 2e_1\tau(a_{22}+a_{21})e_1 &= 0. \end{aligned}$$

E como $\mathscr{R}$ é livre de 2-torção, segue

$e_1\tau(a_{22}+a_{21})e_1 = 0.$

Agora, multiplicando por e_2, a equação (5.22) pelo lado direito, temos

$e_1\tau(a_{22}+a_{21})e_2 + \tau(a_{22}+a_{21})e_1e_2 = e_1\tau(a_{21})e_2 + \tau(a_{21})e_1e_2$

como $e_1e_2 = 0$, segue

$e_1\tau(a_{22}+a_{21})e_2 = e_1\tau(a_{21})e_2.$

Analogamente, multiplicando por e_2, a equação (5.22) pelo lado esquerdo, temos

$e_2e_1\tau(a_{22}+a_{21}) + e_2\tau(a_{22}+a_{21})e_1 = e_2e_1\tau(a_{21}) + e_2\tau(a_{21})e_1,$

como $e_1e_2 = 0$, resta

$e_2\tau(a_{22}+a_{21})e_1 = e_2\tau(a_{21})e_1,$

finalizando a prova do item (ii). Prova do item (iii): Sejam $a_{22} \in \mathscr{R}_{22}$, $a_{21} \in \mathscr{R}_{21}$ e $a_{11} \in \mathscr{R}_{11}$, temos $(a_{21}+a_{11})a_{22} = 0$ e $a_{21}a_{22} = 0$. Utilizando a equação (5.2), por um lado temos

$$\tau(a_{22}a_{21}) = \tau((a_{21}+a_{11})a_{22} + a_{22}(a_{21}+a_{11}))$$

$$\tau(a_{22}a_{21}) = \tau(a_{21}+a_{11})a_{22}^* + (a_{21}+a_{11})\tau(a_{22}) + \tau(a_{22})(a_{21}+a_{11})^* + a_{22}\tau(a_{21}+a_{11}).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \tau(a_{22}a_{21}) &= \tau(a_{21}a_{22} + a_{22}a_{21}) \\ &= \tau(a_{21})a_{22}^* + a_{21}\tau(a_{22}) + \tau(a_{22})a_{21}^* + a_{22}\tau(a_{21}). \end{aligned}$$

Comparando as duas equações, obtemos

$$\begin{aligned} \tau(a_{21}+a_{11})a_{22}^* + a_{21}\tau(a_{22}) + a_{11}\tau(a_{22}) + &= \tau(a_{21})a_{22}^* + a_{21}\tau(a_{22}) + \\ +\tau(a_{22})a_{21}^* + \tau(a_{22})a_{11}^* + a_{22}\tau(a_{21}+a_{11}) & \quad +\tau(a_{22})a_{21}^* + a_{22}\tau(a_{21}), \end{aligned}$$

donde,

$$\tau(a_{21}+a_{11})a_{22}^{*}+a_{11}\tau(a_{22})+\tau(a_{22})a_{11}^{*}+a_{22}\tau(a_{21}+a_{11})=\tau(a_{21})a_{22}^{*}+a_{22}\tau(a_{21}).$$

Como $\tau(a_{22})\in\mathscr{R}_{22}$, pela Afirmação 4, temos $a_{11}\tau(a_{22})=\tau(a_{22})a_{11}^{*}=0$, restando

$$\tau(a_{21}+a_{11})a_{22}^{*}+a_{22}\tau(a_{21}+a_{11})=\tau(a_{21})a_{22}^{*}+a_{22}\tau(a_{21}).$$

Fazendo $a_{22}=e_2$ na equação acima, obtemos

$$\tau(a_{21}+a_{11})e_2+e_2\tau(a_{21}+a_{11})=\tau(a_{21})e_2+e_2\tau(a_{21}) \tag{5.23}$$

Multiplicando a equação (5.23) por e_2 em ambos os lados, obtemos

$$e_2\tau(a_{21}+a_{11})e_2+e_2\tau(a_{21}+a_{11})e_2=e_2\tau(a_{21})e_2+e_2\tau(a_{21})e_2$$

Observe que, pela Afirmação 5, $\tau(a_{21})\in\mathscr{R}_{12}+\mathscr{R}_{21}$, donde $e_1\tau(a_{21})e_1=0$. Assim, da equação acima, resta

$$\begin{aligned}
e_2\tau(a_{21}+a_{11})e_2+e_2\tau(a_{21}+a_{11})e_2 &= 0\\
2e_2\tau(a_{21}+a_{11})e_2 &= 0\\
e_2\tau(a_{21}+a_{11})e_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Agora, multiplicando por e_1 a equação (5.23), pelo lado esquerdo , obtemos

$$\begin{aligned}
e_1\tau(a_{21}+a_{11})e_2+e_1e_2\tau(a_{21}+a_{11}) &= e_1\tau(a_{21})e_2+e_1e_2\tau(a_{21})\\
e_1\tau(a_{21}+a_{11})e_2 &= e_1\tau(a_{21})e_2.
\end{aligned}$$

Analogamente, multiplicando a equação (5.23) por e_1, pelo lado direito, obtemos

$$\begin{aligned}
\tau(a_{21}+a_{11})e_2e_1+e_2\tau(a_{21}+a_{11})e_1 &= \tau(a_{21})e_2e_1+e_2\tau(a_{21})e_1\\
e_2\tau(a_{21}+a_{11})e_1 &= e_2\tau(a_{21})e_1,
\end{aligned}$$

concluindo o item (*iii*) e portanto, a Afirmação 7 está provada.

Afirmação 8. *Para quaisquer* a_{ij},b_{ij} *e* $c_{ij}\in\mathscr{R}_{ij}$ $(1\leq i\neq j\leq 2)$, *temos* $\tau(a_{12}c_{22})+\tau(b_{12})$ *e* $\tau(c_{22}a_{21}+b_{21})=\tau(c_{22}a_{21})+\tau(b_{21})$.

Provaremos aqui o caso para $i=1$, e $j=2$. A prova do outro caso é similar.

Sejam a_{12},b_{12} e $c_{12}\in\mathscr{R}_{12}$. Como $(c_{22}+b_{12})(e_1+a_{12})=0$, utilizando a equação (5.2), obtemos

$$\tau(a_{12}c_{22}+b_{12})=\tau((c_{22}+b_{12})(e_1+a_{12})+(e_1+a_{12})(c_{22}+b_{12})),$$

logo,

$$\tau(a_{12}c_{22}+b_{12}) = \tau(c_{22}+b_{12})(e_1+a_{12})^* + (c_{22}+b_{12})\tau(e_1+a_{12}) +$$
$$+\tau(e_1+a_{12})(c_{22}+b_{12})^* + (e_1+a_{12})\tau(c_{22}+b_{12}),$$

donde,

$$\tau(a_{12}c_{22}+b_{12}) = \tau(c_{22}+b_{12})e_1 + \tau(c_{22}+b_{12})a_{12}^* + c_{22}\tau(e_1+a_{12}) + b_{12}\tau(e_1+a_{12}) +$$
$$+\tau(e_1+a_{12})c_{22}^* + \tau(e_1+a_{12})b_{12}^* + e_1\tau(c_{22}+b_{12}) + a_{12}\tau(c_{22}+b_{12}).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\tau(a_{12}c_{22}+b_{12}) &= e_2\tau(b_{12})e_1 + e_1\tau(b_{12})a_{12}^* + e_2\tau(c_{22}+b_{12})a_{12}^* + c_{22}\tau(a_{12})e_1 + \\ &\quad +b_{22}\tau(a_{12})e_1 + e_1\tau(a_{12})c_{22}^* + e_1\tau(a_{12})b_{12}^* + e_1\tau(b_{12})e_2 + \\ &\quad +a_{12}\tau(c_{22}+b_{12})e_2 + a_{12}\tau(b_{12})e_1 \qquad (5.24)\end{aligned}$$

Agora veremos as demonstrações das igualdades que resultam da equação (5.24):

1. $\tau(c_{22}+b_{12})e_1 = e_2\tau(b_{12})e_1$

   Com efeito, da Afirmação 7(i), sabemos que $e_1\tau(c_{22}+b_{12})e_1 = 0$, logo,

   $$\begin{aligned}(1-e_2)\tau(c_{22}+b_{12})e_1 &= 0\\ \tau(c_{22}+b_{12})e_1 - e_2\tau(c_{22}+b_{12})e_1 &= 0\\ \tau(c_{22}+b_{12})e_1 &= e_2\tau(c_{22}+b_{12})e_1\end{aligned}$$

   pela Afirmação 7(i) novamente, segue

   $$\tau(c_{22}+b_{12})e_1 = e_2\tau(b_{12})e_1.$$

2. $\tau(c_{22}+b_{12})a_{12}^* = e_1\tau(b_{12})a_{12}^* + e_2\tau(c_{22}+b_{12})a_{12}^*$ Com efeito, $\tau(c_{22}+b_{12})a_{12}^* = \tau(c_{22}+b_{12})e_2a^*e_1$, por outro lado, pela Afirmação 7(i), temos

   $e_1\tau(c_{22}+b_{12})e_1 = 0$

   $(1-e_2)\tau(c_{22}+b_{12})(1-e_2) = 0$

   $\tau(c_{22}+b_{12}) - \tau(c_{22}+b_{12})e_2 - e_2\tau(c_{22}+b_{12}) + e_2\tau(c_{22}+b_{12})e_2 = 0$

   $\tau(c_{22}+b_{12}) - \tau(c_{22}+b_{12})e_2 - (1-e_2)\tau(c_{22}+b_{12}) + e_2\tau(c_{22}+b_{12})e_2 = 0$

   $\tau(c_{22}+b_{12}) - \tau(c_{22}+b_{12})e_2 - \tau(c_{22}+b_{12}) + e_1\tau(c_{22}+b_{12}) + e_2\tau(c_{22}+b_{12})e_2 = 0$

   $-\tau(c_{22}+b_{12})e_2 + e_1\tau(c_{22}+b_{12}) + e_2\tau(c_{22}+b_{12})e_2 = 0$

   Multiplicando à direita por e_2, obtemos

   $-\tau(c_{22}+b_{12})e_2 + e_1\tau(c_{22}+b_{12})e_2 + e_2\tau(c_{22}+b_{12})e_2 \quad = \quad 0,$

logo

$$\begin{aligned}
\tau(c_{22}+b_{12})e_2 &= e_1\tau(c_{22}+b_{12})e_2+e_2\tau(c_{22}+b_{12})e_2 \\
\tau(c_{22}+b_{12})e_2a^*e_1 &= e_1\tau(c_{22}+b_{12})e_2a^*e_1+e_2\tau(c_{22}+b_{12})e_2a^*e_1 \\
\tau(c_{22}+b_{12})a_{12}^* &= e_1\tau(c_{22}+b_{12})a_{12}^*+e_2\tau(c_{22}+b_{12})a_{12}^*
\end{aligned}$$

3. $c_{22}\tau(e_1+a_{12}) = c_{22}\tau(a_{12})e_1$

   Com efeito, sejam $c_{22}\tau(e_1+a_{12}) = e_2ce_2\tau(e_1+a_{12})$ e $e_1 = e_1e_1e_1 \in \mathscr{R}_{11}$, podemos considerar $e_1 = a_{11}$, assim pela Afirmação 6, temos

   $e_2\tau(e_1+a_{12})e_2 = 0$

   $e_2\tau(e_1+a_{12})(1-e_1) = 0$

   $e_2\tau(e_1+a_{12}) - e_2\tau(e_1+a_{12})e_1 = 0$

   $e_2\tau(e_1+a_{12}) = e_2\tau(e_1+a_{12})e_1$

   Pela Afirmação 6, segue

   $e_2\tau(e_1+a_{12}) = e_2\tau(a_{12})e_1$

   $e_2ce_2\tau(e_1+a_{12}) = e_2ce_2\tau(a_{12})e_1$

   $c_{22}\tau(e_1+a_{12}) = c_{22}\tau(a_{12})e_1$

4. $b_{12}\tau(e_1+a_{12}) = b_{12}\tau(a_{12})e_1$

   Como foi demonstrado no item anterior,

   $e_2\tau(e_1+a_{12}) = e_2\tau(a_{12})e_1$

   $e_1be_2\tau(e_1+a_{12}) = e_1be_2\tau(a_{12})e_1$

   $b_{12}\tau(e_1+a_{12}) = b_{12}\tau(a_{12})e_1$.

5. $\tau(e_1+a_{12})c_{22}^* = e_1\tau(a_{12})c_{22}^*$

   Com efeito, a demonstração é análoga a de (3), como $\tau(e_1+a_{12})c_{22}^* = \tau(e_1+a_{12})e_2c^*e_2$. e $e_1 = e_1e_1e_1 \in \mathscr{R}_{11}$, podemos considerar $e_1 = a_{11}$ e usar a Afirmação 6, assim

   $e_2\tau(e_1+a_{12})e_2 = 0$

   $(1-e_1)\tau(e_1+a_{12})e_2 = 0$

   $\tau(e_1+a_{12})e_2 - e_1\tau(e_1+a_{12})e_2 = 0$

   $\tau(e_1+a_{12})e_2 = e_1\tau(e_1+a_{12})e_2$

   Da Afirmação 6, temos $e_1\tau(e_1+a_{12})e_2 = e_1\tau(a_{12})e_2$, logo

   $\tau(e_1+a_{12})c_{22}^* = \tau(e_1+a_{12})e_2c^*e_2 = e_1\tau(a_{12})e_2c^*e_2 = e_1\tau(a_{12})c_{22}^*$

6. $\tau(e_1+a_{12})b_{12}^* = e_1\tau(a_{12})b_{12}^*$

   Com efeito, seja $\tau(e_1+a_{12})b_{12}^* = \tau(e_1+a_{12})e_2b^*e_1$, como já visto no item (3)

   $\tau(e_1+a_{12})e_2 = e_1\tau(e_1+a_{12})e_2$, por outro lado, pela Afirmação 6, temos $e_1\tau(e_1+a_{12})e_2 = e_1\tau(a_{12})e_2$, logo, $\tau(e_1+a_{12})b_{12}^* = \tau(e_1+a_{12})e_2b^*e_1 = e_1\tau(e_1+a_{12})e_2b^*e_1 = e_1\tau(a_{12})b_{12}^*$.

7. $e_1\tau(c_{22}+b_{12}) = e_1\tau(b_{12})e_2$

   Da Afirmação (7), temos $e_1\tau(c_{22}+b_{12})e_1 = 0$, logo

   $e_1\tau(c_{22}+b_{12})(1-e_2) = 0$

   $e_1\tau(c_{22}+b_{12}) - e_1\tau(c_{22}+b_{12})e_2 = 0$

   $e_1\tau(c_{22}+b_{12}) = e_1\tau(c_{22}+b_{12})e_2$

   Usando Afirmação $7(i)$, segue

   $e_1\tau(c_{22}+b_{12}) = e_1\tau(b_{12})e_2$

8. $a_{12}\tau(c_{22}+b_{12}) = a_{12}\tau(c_{22}+b_{12})e_2 + a_{12}\tau(b_{12})e_1$

   Com efeito, por a Afirmação (7), temos $e_1\tau(c_{22}+b_{12})e_1 = 0$, logo

   $(1-e_2)\tau(c_{22}+b_{12})(1-e_2) = 0$

   $\tau(c_{22}+b_{12}) - \tau(c_{22}+b_{12})e_2 - e_2\tau(c_{22}+b_{12}) + e_2\tau(c_{22}+b_{12})e_2 = 0$

   $\tau(c_{22}+b_{12}) - \tau(c_{22}+b_{12})(1-e_1) - e_2\tau(c_{22}+b_{12}) + e_2\tau(c_{22}+b_{12})e_2 = 0$

   $\tau(c_{22}+b_{12}) - \tau(c_{22}+b_{12}) + \tau(c_{22}+b_{12})e_1 - e_2\tau(c_{22}+b_{12}) + e_2\tau(c_{22}+b_{12})e_2 = 0$

   $\tau(c_{22}+b_{12})e_1 - e_2\tau(c_{22}+b_{12}) + e_2\tau(c_{22}+b_{12})e_2 = 0$

   $e_2\tau(c_{22}+b_{12}) = \tau(c_{22}+b_{12})e_1 + e_2\tau(c_{22}+b_{12})e_2$

   Multiplicando por e_2 à esquerda, obtemos

   $e_2\tau(c_{22}+b_{12}) = e_2\tau(c_{22}+b_{12})e_1 + e_2\tau(c_{22}+b_{12})e_2.$

   Da Afirmação $7(i)$, temos

   $e_2\tau(c_{22}+b_{12})e_1 = e_2\tau(b_{12})e_1$, logo

$$\begin{aligned}
e_2\tau(c_{22}+b_{12}) &= e_2\tau(b_{12})e_1 + e_2\tau(c_{22}+b_{12})e_2 \\
e_1ae_2\tau(c_{22}+b_{12}) &= e_1ae_2\tau(b_{12})e_1 + e_1ae_2\tau(c_{22}+b_{12})e_2 \\
a_{12}\tau(c_{22}+b_{12}) &= a_{12}\tau(b_{12})e_1 + a_{12}\tau(c_{22}+b_{12})e_2
\end{aligned}$$

Por outro lado, novamente pela relação $(c_{22}+b_{12})a_{12} = 0$ e por (5.2), temos

$$\begin{aligned}
\tau(a_{12}c_{22}) &= \tau((c_{22}+b_{12})a_{12} + a_{12}(c_{22}+b_{12})) \\
\tau(a_{12}c_{22}) &= \tau(c_{22}+b_{12})a_{12}^* + (c_{22}+b_{12})\tau(a_{12}) + \\
&\quad + \tau(a_{12})(c_{22}+b_{12})^* + a_{12}\tau(c_{22}+b_{12}) \\
\tau(a_{12}c_{22}) &= \tau(c_{22}+b_{12})a_{12}^* + c_{22}\tau(a_{12}) + b_{12}\tau(a_{12}) + \\
&\quad + \tau(a_{12})c_{22}^* + \tau(a_{12})b_{12}^* + a_{12}\tau(c_{22}+b_{12})
\end{aligned}$$

$$\tau(a_{12}c_{22}) \;=\; e_2\tau(c_{22}+b_{12})a_{12}^* + e_1\tau(b_{12})a_{12}^* + c_{22}\tau(a_{12})e_1 + b_{12}\tau(a_{12})e_1 + \qquad (5.25)$$
$$+e_1\tau(a_{12})c_{22}^* + e_1\tau(a_{12})b_{12}^* + a_{12}\tau(c_{22}+b_{12})e_2 + a_{12}\tau(b_{12})e_1$$

A equação (5.25) é confirmada através das demonstrações das 6 identidades:

1. $\tau(c_{22}+b_{12})a_{12}^* = e_1\tau(b_{12})a_{12}^* + e_2\tau(c_{22}+b_{12})a_{12}^*$

   Com efeito, como $\tau(c_{22}+b_{12})a_{12}^* = \tau(c_{22}+b_{12})e_2a^*e_1$ e, por $7(i)$, $e_1\tau(c_{22}+b_{12})e_1 = 0$, temos

   $(1-e_2)\tau(c_{22}+b_{12})(1-e_2) = 0$

   $\tau(c_{22}+b_{12}) - \tau(c_{22}+b_{12})e_2 - e_2\tau(c_{22}+b_{12}) + e_2\tau(c_{22}+b_{12})e_2 = 0$

   $\tau(c_{22}+b_{12}) - \tau(c_{22}+b_{12})e_2 - (1-e_2)\tau(c_{22}+b_{12}) + e_2\tau(c_{22}+b_{12})e_2 = 0$

   $\tau(c_{22}+b_{12}) - \tau(c_{22}+b_{12})e_2 - \tau(c_{22}+b_{12}) + e_1\tau(c_{22}+b_{12}) + e_2\tau(c_{22}+b_{12})e_2 = 0$

   $-\tau(c_{22}+b_{12})e_2 + e_1\tau(c_{22}+b_{12}) + e_2\tau(c_{22}+b_{12})e_2 = 0$

   $-\tau(c_{22}+b_{12})e_2 + e_1\tau(c_{22}+b_{12})e_2 + e_2\tau(c_{22}+b_{12})e_2 = 0$

   $\tau(c_{22}+b_{12})e_2 = e_1\tau(c_{22}+b_{12})e_2 + e_2\tau(c_{22}+b_{12})e_2,$

   portanto,

   $$\begin{aligned}\tau(c_{22}+b_{12})a_{12}^* &= \tau(c_{22}+b_{12})e_2a^*e_1\\ &= [e_1\tau(c_{22}+b_{12})e_2 + e_2\tau(c_{22}+b_{12})e_2]a^*e_1\\ &= e_1\tau(c_{22}+b_{12})e_2a^*e_1 + e_2\tau(c_{22}+b_{12})e_2a^*e_1\\ &= e_1\tau(c_{22}+b_{12})a_{12}^* + e_2\tau(c_{22}+b_{12})a_{12}^*\end{aligned}$$

2. $c_{22}\tau(a_{12}) = c_{22}\tau(a_{12})e_1$

   Com efeito, pela Afirmação 5, temos $\tau(a_{12}) = e_1\tau(a_{12})e_2 + e_2\tau(a_{12})e_1$, donde

   $e_2\tau(a_{12}) \;=\; e_2e_1\tau(a_{12})e_2 + e_2\tau(a_{12})e_1,$

   como $e_2e_1 = 0$, temos $e_2\tau(a_{12}) = e_2\tau(a_{12})e_1$,

   $e_2ce_2\tau(a_{12}) = e_2ce_2\tau(a_{12})e_1$

   $c_{22}\tau(a_{12}) = c_{22}\tau(a_{12})e_1$

3. $b_{12}\tau(a_{12}) = b_{12}\tau(a_{12})e_1$

   Com efeito, pelo o que foi mostrado no item anterior, temos $e_2\tau(a_{12}) = e_2\tau(a_{12})e_1$, donde,

   $e_2be_2\tau(a_{12}) = e_2be_2\tau(a_{12})e_1$

   $b_{12}\tau(a_{12}) = b_{12}\tau(a_{12})e_1$

4. $\tau(a_{12})c_{22}^* = e_1\tau(a_{12})c_{22}^*$

Com efeito, pela Afirmação 5 temos $\tau(a_{12}) = e_1\tau(a_{12})e_2 + e_2\tau(a_{12})e_1$, logo,

$\tau(a_{12})e_2 = e_1\tau(a_{12})e_2e_2 + \tau(a_{12})e_1e_2$,

como $e_1e_2 = 0$, temos

$\tau(a_{12})e_2 = e_1\tau(a_{12})e_2$

$\tau(a_{12})e_2c^*e_2 = e_1\tau(a_{12})e_2c^*e_2$

$\tau(a_{12})c^*_{22} = e_1\tau(a_{12})c^*_{22}$

5. $\tau(a_{12})b^*_{12} = e_1\tau(a_{12})b^*_{12}$

No item anterior vimos que $\tau(a_{12})e_2 = e_1\tau(a_{12})e_2$, logo

$$\begin{aligned}\tau(a_{12})e_2b^*e_1 &= e_1\tau(a_{12})e_2b^*e_1\\ \tau(a_{12})b^*_{12} &= e_1\tau(a_{12})b^*_{12}\end{aligned}$$

6. $a_{12}\tau(c_{22}+b_{12}) = a_{12}\tau(c_{22}+b_{12})e_2 + a_{12}\tau(b_{12})e_1$

Com efeito, da Afirmação 7, temos $e_1\tau(c_{22}+b_{12})e_1 = 0$, logo

$(1-e_2)\tau(c_{22}+b_{12})(1-e_2) = 0$

$\tau(c_{22}+b_{12}) - \tau(c_{22}+b_{12})e_2 - e_2\tau(c_{22}+b_{12}) + e_2\tau(c_{22}+b_{12})e_2 = 0$

$\tau(c_{22}+b_{12}) - \tau(c_{22}+b_{12})(1-e_1) - e_2\tau(c_{22}+b_{12}) + e_2\tau(c_{22}+b_{12})e_2 = 0$

$\tau(c_{22}+b_{12}) - \tau(c_{22}+b_{12}) + \tau(c_{22}+b_{12})e_1 - e_2\tau(c_{22}+b_{12}) + e_2\tau(c_{22}+b_{12})e_2 = 0$

$\tau(c_{22}+b_{12})e_1 - e_2\tau(c_{22}+b_{12}) + e_2\tau(c_{22}+b_{12})e_2 = 0$

$e_2\tau(c_{22}+b_{12}) = \tau(c_{22}+b_{12})e_1 + e_2\tau(c_{22}+b_{12})e_2$

Multiplicando por e_2 à esquerda,

$e_2\tau(c_{22}+b_{12}) = e_2\tau(c_{22}+b_{12})e_1 + e_2\tau(c_{22}+b_{12})e_2$

Pela Afirmação 7(i), temos $e_2\tau(c_{22}+b_{12})e_1 = e_2\tau(b_{12})e_1$, logo

$$\begin{aligned}e_2\tau(c_{22}+b_{12}) &= e_2\tau(b_{12})e_1 + e_2\tau(c_{22}+b_{12})e_2\\ e_1ae_2\tau(c_{22}+b_{12}) &= e_1ae_2\tau(b_{12})e_1 + e_1ae_2\tau(c_{22}+b_{12})e_2\\ a_{12}\tau(c_{22}+b_{12}) &= a_{12}\tau(b_{12})e_1 + a_{12}\tau(c_{22}+b_{12})e_2\end{aligned}$$

Comparando as equações (5.24) e (5.25), obtemos

$$\begin{array}{rcl} e_2\tau(b_{12})e_1 + e_1\tau(b_{12})a^*_{12} + e_2\tau(c_{22}+b_{12})a^*_{12}+ & & e_2\tau(c_{22}+b_{12})a^*_{12} + e_1\tau(b_{12})a^*_{12}+\\ +c_{22}\tau(a_{12})e_1 + b_{22}\tau(a_{12})e_1 + e_1\tau(a_{12})c^*_{22}+ & = & +c_{22}\tau(a_{12})e_1 + b_{12}\tau(a_{12})e_1+\\ +e_1\tau(a_{12})b^*_{12} + e_1\tau(b_{12})e_2 + a_{12}\tau(c_{22}+b_{12})e_2+ & & +e_1\tau(a_{12})c^*_{22} + e_1\tau(a_{12})b^*_{12}+\\ +a_{12}\tau(b_{12})e_1 & & +a_{12}\tau(c_{22}+b_{12})e_2 + a_{12}\tau(b_{12})e_1+\\ & & +\tau(b_{12})\end{array}$$

Portanto, $\tau(a_{12}c_{22}+b_{12}) = \tau(a_{12}c_{22}) + \tau(b_{12})$.

Afirmação 9. *Para qualquer $b_{ij} \in \mathscr{R}_{ij}$, temos $\tau(a_{ij}+b_{ij}) = \tau(a_{ij}) + \tau(b_{ij})$, sempre que $1 \leq i \neq j \leq 2$.*

Provaremos a aditividade de τ em $\mathscr{R}_{12}$. O outro caso é similar. Sejam a_{12}, e $b_{12} \in \mathscr{R}_{12}$ e também $c_{22} \in \mathscr{R}_{22}$. Assim $c_{22}(a_{12}+b_{12}) = 0$, por τ, temos

$$\tau(a_{12}c_{22}+b_{12}c_{22}) = \tau(c_{22}(a_{12}+b_{12})+(a_{12}+b_{12})c_{22})$$

$$\begin{aligned}\tau(a_{12}c_{22}+b_{12}c_{22}) &= \tau(c_{22})(a_{12}+b_{12})^* + c_{22}\tau(a_{12}+b_{12})^* + \\ &\quad +\tau(a_{12}+b_{12})c_{22} + (a_{12}+b_{12})\tau(c_{22})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau(a_{12}c_{22}+b_{12}c_{22}) &= \tau(c_{22})a_{12}^* + \tau(c_{22})b_{12}^* + c_{22}\tau(a_{12}+b_{12}) + \\ &\quad +\tau(a_{12}+b_{12})c_{22}^* + a_{12}\tau(c_{22}) + b_{12}\tau(c_{22}). \qquad (5.26)\end{aligned}$$

Por outro lado, pela Afirmação 8, temos $\tau(a_{12}c_{22}+b_{12}c_{22}) = \tau(a_{12}c_{22}) + \tau(b_{12}c_{22})$, pois $b_{12}c_{22} \in \mathscr{R}_{12}$. Assim,

$$\begin{aligned}\tau(a_{12}c_{22}+b_{12}c_{22}) &= \tau(a_{12}c_{22}) + \tau(b_{12}c_{22}) \\ \tau(a_{12}c_{22}+b_{12}c_{22}) &= \tau(c_{22}a_{12}+a_{12}c_{22}) + \tau(c_{22}b_{12}+b_{12}c_{22})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau(a_{12}c_{22}+b_{12}c_{22}) &= \tau(c_{22})a_{12}^* + c_{22}\tau(a_{12}) + \tau(a_{12})c_{22}^* + a_{12}\tau(c_{22}) + \\ &\quad +\tau(c_{22})b_{12}^* + c_{22}\tau(b_{12}) + \tau(b_{12})c_{22}^* + b_{12}\tau(c_{22}). \qquad (5.27)\end{aligned}$$

Combinando as duas equações (5.26) e (5.27), obtemos

$$\begin{aligned}\tau(c_{22})a_{12}^* + \tau(c_{22})b_{12}^* + c_{22}\tau(a_{12}+b_{12}) &= \tau(c_{22})a_{12}^* + c_{22}\tau(a_{12}) + \tau(a_{12})c_{22}^* \\ +\tau(a_{12}+b_{12})c_{22}^* + a_{12}\tau(c_{22}) &\quad +a_{12}\tau(c_{22}) + \tau(c_{22})b_{12}^* + c_{22}\tau(b_{12}) \\ +b_{12}\tau(c_{22}) &\quad +\tau(b_{12})c_{22}^* + b_{12}\tau(c_{22}).\end{aligned}$$

Simplificando, obtemos

$$c_{22}\tau(a_{12}+b_{12}) + \tau(a_{12}+b_{12})c_{22}^* = c_{22}\tau(a_{12}) + \tau(a_{12})c_{22}^* + c_{22}\tau(b_{12}) + \tau(b_{12})c_{22}^*$$

$$\tau(a_{12}+b_{12})c_{22}^* - \tau(a_{12})c_{22}^* - \tau(b_{12})c_{22}^* + c_{22}\tau(a_{12}+b_{12}) - c_{22}\tau(a_{12}) - c_{22}\tau(b_{12}) = 0$$

$$[\tau(a_{12}+b_{12}) - \tau(a_{12}) - \tau(b_{12})]c_{22}^* + c_{22}[\tau(a_{12}+b_{12}) - \tau(a_{12}) - \tau(b_{12})] = 0. \qquad (5.28)$$

Multiplicando por e_2 em ambos os lados, obtemos

$$e_2[\tau(a_{12}+b_{12}) - \tau(a_{12}) - \tau(b_{12})]c_{22}^* + c_{22}[\tau(a_{12}+b_{12}) - \tau(a_{12}) - \tau(b_{12})]e_2 = 0$$

$$e_2[\tau(a_{12}+b_{12})-\tau(a_{12})-\tau(b_{12})]e_2c^*e_2+e_2ce_2[\tau(a_{12}+b_{12})-\tau(a_{12})-\tau(b_{12})]e_2=0.$$

Pela hipótese (2) do Teorema 5.0.1, segue

$$e_2[\tau(a_{12}+b_{12})-\tau(a_{12})-\tau(b_{12})]e_2=0$$

$$e_2\tau(a_{12}+b_{12})e_2=e_2[\tau(a_{12})+\tau(b_{12})]e_2.$$

Multiplicando a equação (5.28) por e_1 à esquerda e por e_2 à direita, obtemos

$$e_1[\tau(a_{12}+b_{12})-\tau(a_{12})-\tau(b_{12})]e_2c^*e_2e_2+e_1e_2ce_2[\tau(a_{12}+b_{12})-\tau(a_{12})-\tau(b_{12})]e_2=0,$$

como $e_1e_2=0$, resta

$$e_1[\tau(a_{12}+b_{12})-\tau(a_{12})-\tau(b_{12})]e_2c^*e_2=0.$$

Pela hipótese (1) do Teorema 5.0.1, temos

$$e_1[\tau(a_{12}+b_{12})-\tau(a_{12})-\tau(b_{12})]e_2=0$$

$$e_1\tau(a_{12}+b_{12})e_2=e_1[\tau(a_{12})-\tau(b_{12})]e_2.$$

De forma análoga, multiplicando a equação (5.28) por e_2 à esquerda e por e_1 à direita, obtemos

$$e_2[\tau(a_{12}+b_{12})-\tau(a_{12})-\tau(b_{12})]e_2c^*e_2e_1+e_2e_2ce_2[\tau(a_{12}+b_{12})-\tau(a_{12})-\tau(b_{12})]e_1=0$$

como $e_2e_1=0$, resta

$$e_2ce_2[\tau(a_{12}+b_{12})-\tau(a_{12})-\tau(b_{12})]e_1=0$$

Pela hipótese (1) do Teorema 5.0.1, temos

$$e_2[\tau(a_{12}+b_{12})-\tau(a_{12})-\tau(b_{12})]e_1=0$$

$$e_2\tau(a_{12}+b_{12})e_1=e_2[\tau(a_{12})-\tau(b_{12})]e_1$$

Agora, mostraremos que $e_1\tau(a_{12}+b_{12})e_1=e_1[\tau(a_{12})+\tau(b_{12})]e_1$. Com efeito, lembrando que $(a_{12}+b_{12})e_1=0$, pela a equação (5.2), temos

$$\begin{aligned}
\tau(a_{12}+b_{12}) &= \tau((a_{12}+b_{12})e_1+e_1(a_{12}+b_{12})) \\
&= \tau(a_{12}+b_{12})e_1^*+(a_{12}+b_{12})\tau(e_1)+\tau(e_1)(a_{12}+b_{12})^*+e_1\tau(a_{12}+b_{12}).
\end{aligned}$$

Como $\tau(e_1)=0$ e $e_1^*=e_1$, resta,

$$\tau(a_{12}+b_{12})=\tau(a_{12}+b_{12})e_1+e_1\tau(a_{12}+b_{12}).$$

Multiplicando por e_1 em ambos os lados, temos

$$\begin{aligned}
e_1\tau(a_{12}+b_{12})e_1 &= e_1\tau(a_{12}+b_{12})e_1+e_1\tau(a_{12}+b_{12})e_1\\
e_1\tau(a_{12}+b_{12})e_1 &= 0.
\end{aligned}$$

Por outro lado, $\tau(a_{12})$ e $\tau(b_{12})\in\mathscr{R}_{12}+\mathscr{R}_{21}$, donde, $e_1\tau(a_{12})e_1=e_1\tau(b_{12})e_1=0$. Concluindo que

$$e_1\tau(a_{12}+b_{12})e_1=0=e_1[\tau(a_{12})+\tau(b_{12})]e_1.$$

Segue, pela Decomposição de Pierce, que

$$\begin{aligned}
\tau(a_{12}+b_{12}) &= e_1\tau(a_{12}+b_{12})e_1+e_1\tau(a_{12}+b_{12})e_2+\\
&\quad +e_2\tau(a_{12}+b_{12})e_1+e_2\tau(a_{12}+b_{12})e_2\\
&= e_1[\tau(a_{12})+\tau(b_{12})]e_1+e_1[\tau(a_{12})+\tau(b_{12})]e_2+\\
&\quad +e_2[\tau(a_{12})+\tau(b_{12})]e_1+e_2[\tau(a_{12})+\tau(b_{12})]e_2\\
&= \tau(a_{12})+\tau(b_{12}),
\end{aligned}$$

finalizando a demonstração da Afirmação 9.

Afirmação 10. *Para quaisquer $a_{ii},b_{ii}\in\mathscr{R}_{ii}$, temos $\tau(a_{ii}+b_{ii})=\tau(a_{ii})+\tau(b_{ii})$, sempre que $i=1,2$.*

Sejam $1\leq i\neq j\leq 2$. Para quaisquer $a_{ii},b_{ii}\in\mathscr{R}_{ii}$ e qualquer $a_{ji}\in\mathscr{R}_{ji}$, como $(a_{ii}+b_{ii})a_{ji}=a_{ii}a_{ji}=b_{ii}a_{ji}=0$, por um lado, temos

$$\begin{aligned}
\tau(a_{ji}a_{ii}+a_{ji}b_{ii}) &= \tau((a_{ii}+b_{ii})a_{ji}+a_{ji}(a_{ii}+b_{ii}))\\
&= \tau(a_{ii}+b_{ii})a_{ji}^*+(a_{ii}+b_{ii})\tau(a_{ji})+\\
&\quad +\tau(a_{ji})(a_{ii}+b_{ii})^*+a_{ji}\tau(a_{ii}+b_{ii})\\
&= \tau(a_{ii}+b_{ii})a_{ji}^*+a_{ii}\tau(a_{ji})+b_{ii}\tau(a_{ji})+\\
&\quad +\tau(a_{ji})a_{ii}^*+\tau(a_{ji})b_{ii}^*+a_{ji}\tau(a_{ii}+b_{ii}).
\end{aligned} \tag{5.29}$$

E por outro lado, sejam também $a_{ji}a_{ii}, a_{ji}b_{ii} \in \mathscr{R}_{ji}$, da Afirmação 9, temos

$$\begin{aligned}
\tau(a_{ji}a_{ii} + a_{ji}b_{ii}) &= \tau(a_{ji}a_{ii}) + \tau(a_{ji}b_{ii}) \\
&= \tau(a_{ii}a_{ji} + a_{ji}a_{ii}) + \tau(b_{ii}a_{ji} + a_{ji}b_{ii}) \\
&= \tau(a_{ii})a_{ji}^* + a_{ii}\tau(a_{ji}) + \tau(a_{ji})a_{ii}^* + a_{ji}\tau(a_{ii}) \\
&\quad \tau(b_{ii})a_{ji}^* + b_{ii}\tau(a_{ji}) + \tau(a_{ji})b_{ii}^* + a_{ji}\tau(b_{ii}).
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Combinando as duas equações (5.29) e (5.30), temos

$$\begin{aligned}
\tau(a_{ii} + b_{ii})a_{ji}^* + a_{ii}\tau(a_{ji}) + \quad & \quad \tau(a_{ii})a_{ji}^* + a_{ii}\tau(a_{ji}) + \tau(a_{ji})a_{ii}^* + \\
+b_{ii}\tau(a_{ji}) + \tau(a_{ji})a_{ii}^* + \quad &= \quad +a_{ji}\tau(a_{ii}) + \tau(b_{ii})a_{ji}^* + b_{ii}\tau(a_{ji}) + \\
+\tau(a_{ji})b_{ii}^* + a_{ji}\tau(a_{ii} + b_{ii}) \quad & \quad +\tau(a_{ji})b_{ii}^* + a_{ji}\tau(b_{ii}),
\end{aligned}$$

cancelando os termos semelhantes, resta apenas

$$\tau(a_{ii} + b_{ii})a_{ji}^* + a_{ji}\tau(a_{ii} + b_{ii}) = \tau(a_{ii})a_{ji}^* + a_{ji}\tau(a_{ii}) + \tau(b_{ii})a_{ji}^* + a_{ji}\tau(b_{ii})$$

$$\tau(a_{ii} + b_{ii})a_{ji}^* - \tau(a_{ii})a_{ji}^* - \tau(b_{ii})a_{ji}^* + a_{ji}\tau(a_{ii} + b_{ii}) - a_{ji}\tau(a_{ii}) - a_{ji}\tau(b_{ii}) = 0$$

$$[\tau(a_{ii} + b_{ii}) - \tau(a_{ii}) - \tau(b_{ii})]a_{ji}^* + a_{ji}[\tau(a_{ii} + b_{ii}) - \tau(a_{ii}) - \tau(b_{ii})] = 0.$$

Multiplicando à direita por e_i, temos

$$[\tau(a_{ii} + b_{ii}) - \tau(a_{ii}) - \tau(b_{ii})]e_i a e_j e_i + e_j a e_i[\tau(a_{ii} + b_{ii}) - \tau(a_{ii}) - \tau(b_{ii})]e_i = 0,$$

como $e_j e_i = 0$, resta,

$$e_j a e_i[\tau(a_{ii} + b_{ii}) - \tau(a_{ii}) - \tau(b_{ii})]e_i = 0$$

E pela hipótese (1) do Teorema 5.0.1, temos

$$e_i[\tau(a_{ii} + b_{ii}) - \tau(a_{ii}) - \tau(b_{ii})]e_i = 0$$

$$e_i\tau(a_{ii} + b_{ii})e_i = e_i[\tau(a_{ii}) + \tau(b_{ii})]e_i = 0.$$

Por outro lado, observe que pela Afirmação 4, temos

$$[\tau(a_{ii} + b_{ii}) - \tau(a_{ii}) - \tau(b_{ii})] \in \mathscr{R}_{ii}$$

$$e_i[\tau(a_{ii} + b_{ii}) - \tau(a_{ii}) - \tau(b_{ii})]e_j = e_j[\tau(a_{ii} + b_{ii}) - \tau(a_{ii}) - \tau(b_{ii})]e_i = 0.$$

Donde, $e_i\tau(a_{ii}+b_{ii})e_j = e_i[\tau(a_{ii})+\tau(b_{ii})]e_j$ e $e_j\tau(a_{ii}+b_{ii})e_i = e_j[\tau(a_{ii})+\tau(b_{ii})]e_i$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\tau(a_{ii}+b_{ii}) &= e_i\tau(a_{ii}+b_{ii})e_i + e_i\tau(a_{ii}+b_{ii})e_j + e_j\tau(a_{ii}+b_{ii})e_i + e_j\tau(a_{ii}+b_{ii})e_j \\
&= e_i[\tau(a_{ii})+\tau(b_{ii})]e_i + e_i[\tau(a_{ii})+\tau(b_{ii})]e_j + \\
&\quad + e_j[\tau(a_{ii})+\tau(b_{ii})]e_i + e_j[\tau(a_{ii})+\tau(b_{ii})]e_j \\
&= [\tau(a_{ii})+\tau(b_{ii})]
\end{aligned}$$

E a afirmação é verdadeira.

Afirmação 11. *Para qualquer $a_{ii} \in \mathscr{R}_{ii}$, temos $\tau(a_{ii}^2) = \tau(a_{ii})a_{ii}^* + a_{ii}\tau(a_{ii})$, sempre que $i = 1,2$.*

Sejam $a_{ii} \in \mathscr{R}_{ii}$ e $a_{ji} \in \mathscr{R}_{ji} (1 \leq i \neq j \leq 2)$. Pela afirmação $2(ii)$, temos

$$e_i\tau(a_{ji}a_{ii}^2)e_j = e_i\tau(a_{ii}^2)a_{ji}^* + a_{ii}^2\tau(a_{ji})e_j \tag{5.31}$$

e

$$\begin{aligned}
e_i\tau(a_{ji}a_{ii}^2)e_j &= e_i\tau(a_{ii})(a_{ji}a_{ii})^* + a_{ii}\tau(a_{ji}a_{ii})e_j \\
&= e_i\tau(a_{ii})(a_{ji}a_{ii})^* + a_{ii}\tau(a_{ii})a_{ji}^* + a_{ii}^2\tau(a_{ji})e_j.
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Agora iremos demonstrar as duas equações acima. Lembrando que $\tau(a) = \delta(a) - (aa_0 - a_0a^*)$, para $a_0 = e_1\delta(e_1)e_2 - e_1\delta(e_1)e_2 - e_2\delta(e_1)e_1$. Logo,

$$\begin{aligned}
e_i\tau(a_{ji}a_{ii})e_j &= e_i[\delta(a_{ji}a_{ii}) - ((a_{ji}a_{ii})a_0 - a_0(a_{ji}a_{ii})^*)]e_j \\
&= e_i\delta(a_{ji}a_{ii})e_j - e_i((a_{ji}a_{ii})a_0 - a_0(a_{ji}a_{ii})^*)e_j \\
&= e_i\delta(a_{ji}a_{ii})e_j - e_i(a_{ji}a_{ii})a_0e_j + e_ia_0(a_{ii}a_{ji})^*e_j,
\end{aligned}$$

como $e_ie_j = 0$, temos que $e_i(a_{ji}a_{ii})a_0e_j = e_ie_jae_ia_{ii}a_0e_j = 0$, restando da equação apenas

$e_i\tau(a_{ji}a_{ii})e_j = e_i\delta(a_{ji}a_{ii})e_j + e_ia_0(a_{ii}a_{ji})^*e_j$.

Além disso, pela Afirmação $2(ii)$, temos $e_i\delta(a_{ji}a_{ii})e_j = e_i\delta(a_{ii})a_{ji} + a_{ii}\delta(a_{ji})e_j$. Logo,

$e_i\tau(a_{ji}a_{ii})e_j = e_i\delta(a_{ii})a_{ji}^* + a_{ii}\delta(a_{ji})e_j + e_ia_0(a_{ii}a_{ji})^*e_j$,

agora acrescentaremos termos nulos à equação,

$$\begin{aligned}
e_i\tau(a_{ji}a_{ii})e_j &= e_i\delta(a_{ii})a_{ji}^* + e_ia_0(a_{ii}a_{ji})^*e_j + a_{ii}\delta(a_{ji})e_j \\
&= e_i\delta(a_{ii})a_{ji}^* - e_ia_{ii}a_0a_{ji}^* + e_ia_0a_{ii}^*a_{ji}^* + a_{ii}\delta(a_{ji})e_j - a_{ii}a_{ji}a_0e_j + a_{ii}a_0a_{ji}^*e_j \\
&= e_i[\delta(a_{ii}) - (a_{ii}a_0 - a_0a_{ii}^*)]a_{ji}^* + a_{ii}[\delta(a_{ji}) - (a_{ji}a_0 - a_0a_{ji}^*)]e_j \\
&= e_i\tau(a_{ii})a_{ji}^* + a_{ii}\tau(a_{ji})e_j.
\end{aligned}$$

Portanto, (5.31) está demonstrada, bastando escolher $a_{ii} = a_{ii}^2$. Vale observar que a igualdade acima é análoga a $2(ii)$, só que para a função τ. Por (5.2) temos que

$$\begin{aligned}
e_i\tau(a_{ji}a_{ii}^2)e_j &= e_i\tau(a_{ii}(a_{ji}a_{ii}) + (a_{ji}a_{ii})a_{ii})e_j \\
&= e_i[\tau(a_{ii})(a_{ji}a_{ii})^* + a_{ii}\tau(a_{ji}a_{ii}) + \tau(a_{ji}a_{ii})a_{ii}^* + (a_{ji}a_{ii})\tau(a_{ii})]e_j \\
&= e_i\tau(a_{ii})(a_{ji}a_{ii})^*e_j + e_ia_{ii}\tau(a_{ji}a_{ii})e_j + e_i\tau(a_{ji}a_{ii})a_{ii}^*e_j + e_i(a_{ji}a_{ii})\tau(a_{ii})e_j \\
&= e_i\tau(a_{ii})a_{ii}^*e_ia^*e_je_j + e_ie_iae_i\tau(a_{ji}a_{ii})e_j + e_i\tau(a_{ji}a_{ii})e_ia^*e_ie_j + \\
&\quad + e_ie_jae_ia_{ii}\tau(a_{ii})e_j.
\end{aligned}$$

Como $e_ie_j = 0$, resta

$$\begin{aligned}
e_i\tau(a_{ji}a_{ii}^2)e_j &= e_i\tau(a_{ii})a_{ii}^*e_ia^*e_j + e_iae_i\tau(a_{ji}a_{ii})e_j \\
&= e_i\tau(a_{ii})a_{ii}^*a_{ji}^* + a_{ii}\tau(a_{ji}a_{ii})e_j \\
&= e_i\tau(a_{ii})(a_{ji}a_{ii})^* + a_{ii}\tau(a_{ji}a_{ii})e_j.
\end{aligned}$$

Por (5.31), temos que

$$e_i\tau(a_{ji}a_{ii})e_j = e_i\tau(a_{ii})a_{ji}^* + a_{ii}\tau(a_{ji})e_j$$

$$a_{ii}\tau(a_{ji}a_{ii})e_j = a_{ii}\tau(a_{ii})a_{ji}^* + a_{ii}^2\tau(a_{ji})e_j$$

Portanto,

$$e_i\tau(a_{ji}a_{ii}^2)e_j = e_i\tau(a_{ii})(a_{ji}a_{ii})^* + a_{ii}\tau(a_{ii})a_{ji}^* + a_{ii}^2\tau(a_{ji})e_j.$$

Comparando as equações (5.31) e (5.32), obtemos

$$e_i\tau(a_{ii}^2)a_{ji}^* + a_{ii}^2\tau(a_{ji})e_j = e_i\tau(a_{ii})(a_{ji}a_{ii})^* + a_{ii}\tau(a_{ii})a_{ji}^* + a_{ii}^2\tau(a_{ji})e_j$$

$$e_i\tau(a_{ii}^2)a_{ji}^* = e_i\tau(a_{ii})(a_{ji}a_{ii})^* + a_{ii}\tau(a_{ii})a_{ji}^*$$

$$e_i\tau(a_{ii}^2)a_{ji}^* = e_i\tau(a_{ii})a_{ii}^*a_{ji}^* + a_{ii}\tau(a_{ii})a_{ji}^*$$

$$e_i\tau(a_{ii}^2)a_{ji}^* = [e_i\tau(a_{ii})a_{ii}^* + a_{ii}\tau(a_{ii})]a_{ji}^*$$

$$[e_i\tau(a_{ii}^2) - e_i\tau(a_{ii})a_{ii}^* - a_{ii}\tau(a_{ii})]a_{ji}^* = 0$$

$$[e_i\tau(a_{ii}^2) - e_i\tau(a_{ii})a_{ii}^* - a_{ii}\tau(a_{ii})]e_ia^*e_j = 0$$

$$[e_i\tau(a_{ii}^2) - e_i\tau(a_{ii})a_{ii}^* - a_{ii}\tau(a_{ii})e_i]e_ia^*e_j = 0,$$

para qualquer $a \in \mathscr{R}$. Segue da hipótese (1) do Teorema 5.0.1, que

$$e_i\tau(a_{ii}^2) - e_i\tau(a_{ii})a_{ii}^* - a_{ii}\tau(a_{ii})e_i = 0$$
$$e_i\tau(a_{ii}^2) = e_i\tau(a_{ii})a_{ii}^* + a_{ii}\tau(a_{ii})e_i$$

Pela Afirmação 4, temos que $e_i\tau(a_{ii}^2) = \tau(a_{ii}^2)$, pois $a_{ii}^2 \in \mathscr{R}_{ii}$, logo $\tau(a_{ii}^2) \in \mathscr{R}_{ii}$. O mesmo vale para $e_i\tau(a_{ii})a_{ii}^* = \tau(a_{ii})a_{ii}^*$ e $a_{ii}\tau(a_{ii})e_i = a_{ii}\tau(a_{ii})$. Portanto,

$$\tau(a_{ii}^2) = \tau(a_{ii})a_{ii}^* + a_{ii}\tau(a_{ii}).$$

Afirmação 12. *Para qualquer $a_{ij} \in \mathscr{R}_{ij}$, temos $0 = \tau(a_{ij}^2) = \tau(a_{ij})a_{ij}^* + a_{ij}\tau(a_{ij})$, sempre que* $1 \leq i \neq j \leq 2$.

Com efeito, para qualquer $a_{ij} \in \mathscr{R}_{ij}$, temos $a_{ij}^2 = 0$, logo por (5.2), temos

$$0 = \tau(0) = \tau(a_{ij}^2) = \tau(a_{ij}^2 + a_{ij}^2) = \tau(a_{ij}a_{ij} + a_{ij}a_{ij})$$

logo,

$$0 = \tau(a_{ij})a_{ij}^* + a_{ij}\tau(a_{ij}) + \tau(a_{ij})a_{ij}^* + a_{ij}\tau(a_{ij}) = 2[\tau(a_{ij})a_{ij}^* + a_{ij}\tau(a_{ij})],$$

e como $\mathscr{R}$ é livre de 2-torção, segue

$$0 = \tau(a_{ij})a_{ij}^* + a_{ij}\tau(a_{ij}),$$

para qualquer $a_{ij} \in \mathscr{R}_{ij}$, sempre que $1 \leq i \neq j \leq 2$. Então podemos concluir que: Na Afirmação 10 foi demonstrado que $\tau|_{\mathscr{R}_{ii}}$ é aditiva com $i = 1,2$ e na Afirmação 11 foi demonstrado que $\tau|_{\mathscr{R}_{ii}}$ é uma *-derivação de Jordan para $i = 1,2$; A Afirmação 9 mostrou que $\tau|_{\mathscr{R}_{ij}}$ é aditiva para $1 \leq i \neq j \leq 2$ e a Afirmação 12 mostrou que $\tau|_{\mathscr{R}_{ij}}$ é uma *-derivação de Jordan para $(1 \leq i \neq j \leq 2)$. Além disso, note que $\tau(a) = \delta(a) - (aa_0 - a_0a^*)$, logo, $\delta(a) = \tau(a) + (aa_0 - a_0a^*)$. Portanto, todas as conclusões acima ditas para a função τ, valem para a δ. Mostraremos agora que a aditividade de $\tau|_{\mathscr{R}_{ii}}$ implica na aditividade de $\delta|_{\mathscr{R}_{ii}}$, as outras são análogas. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\delta(a_{ii} + b_{ii}) &= \tau(a_{ii} + b_{ii}) + ((a_{ii} + b_{ii})a_0 - a_0(a_{ii} + b_{ii})^*) \\
&= \tau(a_{ii}) + \tau(b_{ii}) + a_{ii}a_0 + b_{ii}a_0 - a_0a_{ii}^* - a_0b_{ii}^* \\
&= [\tau(a_{ii}) + a_{ii}a_0 - a_0a_{ii}^*] + [\tau(b_{ii}) + b_{ii}a_0 - a_0b_{ii}^*] \\
&= \delta(a_{ii}) + \delta(b_{ii}).
\end{aligned}$$

□

Seja $\mathscr{R}$ um *-anel livre de 2-torção com um idempotente não-trivial e simétrico e_1. Assuma que $\mathscr{R}$ satisfaz as seguintes condições:

1. Para $a \in \mathscr{R}$, $a\mathscr{R}e_i = 0$ implica $a = 0$, sempre que $i = 1,2$ e $e_2 = 1 - e_1$;
2. Para $a \in \mathscr{R}$, $e_2ae_2x^*e_2 + e_2xe_2ae_2 = 0$ para todo $x \in \mathscr{R}$ implica $e_2ae_2 = 0$.

Então uma função aditiva $\delta : \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ satisfaz $\delta(ab+ba) = \delta(a)b^* + a\delta(b) + \delta(b)a^* + b\delta(a)$ sempre que $ab = 0$, com $a,b \in \mathscr{R}$, se, e somente se, δ é uma *-derivação de Jordan aditiva.

Demonstração. Inicialmente mostraremos a condição necessária, ou seja, a parte em que δ é uma função aditiva implica que δ é uma *-derivação de Jordan. Com efeito,

$$\delta(ab+ba) = \delta(a)b^* + a\delta(b) + \delta(b)a^* + b\delta(a),$$

Fazendo $a = b$, temos

$$\begin{aligned} \delta(aa+aa) &= \delta(a)a^* + a\delta(a) + \delta(a)a^* + a\delta(a) \\ \delta(a^2+a^2) &= 2[\delta(a)a^* + a\delta(a)], \end{aligned}$$

Como δ é aditiva, segue

$$\begin{aligned} \delta(a^2) + \delta(a^2) &= 2[\delta(a)a^* + a\delta(a)] \\ 2\delta(a^2) &= 2[\delta(a)a^* + a\delta(a)], \end{aligned}$$

Como $\mathscr{R}$ é livre de 2-torção,

$$\delta(a^2) = \delta(a)a^* + a\delta(a).$$

Reciprocamente, defina $\tau(a) = \delta(a) - (aa_0 - a_0a*)$, para qualquer $a \in \mathscr{R}$, onde $a_0 = e_1\delta(e_1)e_2 - e_2\delta(e_1)e_1$. Então $\tau : \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ é aditiva satisfazendo $\tau(ab+ba) = \tau(a)b^* + a\tau(b) + \tau(b)a^* + b\tau(a)$, com $ab = 0$. Assim, para mostrar que δ é uma *-derivação de Jordan, precisamos mostrar que τ é uma *-derivação de Jordan.

Primeiramente, sabendo que τ satisfaz as condições do Teorema (5.0.1), na prova de (5.0.1), é claro que

$$\tau(e_1) = 0,\ \tau(\mathscr{R}_{ii}) \subseteq \mathscr{R}_{ii},\ \text{e}\ \tau(\mathscr{R}_{ij}) \subseteq \mathscr{R}_{ij} + \mathscr{R}_{ij},\ \text{sempre que}\ 1 \leq i \neq j \leq 2, \tag{5.33}$$

e $\tau|_{\mathscr{R}_{ij}}$, sempre que $1 \leq i,j \leq 2$ é uma *-derivação de Jordan aditiva. Para isso, temos a afirmação seguinte.

Afirmação 13. *Para quaisquer $a_{ij} \in \mathscr{R}_{ij}$ e $a_{ji} \in \mathscr{R}_{ji}$, com $1 \leq i \neq j \leq 2$, temos $\tau(a_{ij}a_{ji}) = a_{ij}\tau(a_{ji}) + \tau(a_{ji})a_{ij}^*$.*

Sejam $a_{12} \in \mathscr{R}_{12}$ e $a_{21} \in \mathscr{R}_{21}$. Note que

$$\begin{aligned}
(a_{12}a_{21} - a_{12} - a_{21} + e_2)(e_1 + a_{12} + a_{21} + a_{21}a_{12}) &= a_{12}a_{21}e_1 + a_{12}a_{21}a_{12} + a_{12}a_{21}a_{21} + \\
&+ a_{12}a_{21}a_{21}a_{12} - a_{12}e_1 - a_{12}a_{12} - \\
&- a_{12}a_{21} - a_{12}a_{21}a_{12} - a_{21}e_1 - \\
&- a_{21}a_{12} - a_{21}a_{21} - a_{21}a_{21}a_{12} + \\
&+ e_2e_1 + e_2a_{12} + e_2a_{21} + e_2a_{21}a_{12}
\end{aligned}$$

Eliminando os termos nulos, ou seja, que possuem $e_1e_2 = 0$, resta

$$\begin{aligned}
(a_{12}a_{21} - a_{12} - a_{21} + e_2)(e_1 + a_{12} + a_{21} + a_{21}a_{12}) &= a_{12}a_{21}e_1 + a_{12}a_{21}a_{12} - a_{12}a_{21} - \\
&- a_{12}a_{21}a_{12} - a_{21}e_1 - a_{21}a_{12} + \\
&+ e_2a_{21} + e_2a_{21}a_{12}
\end{aligned}$$

Simplificando alguns termos, e cancelando os termos semelhantes, obtemos

$$\begin{aligned}
(a_{12}a_{21} - a_{12} - a_{21} + e_2)(e_1 + a_{12} + a_{21} + a_{21}a_{12}) &= a_{12}a_{21} + a_{12}a_{21}a_{12} - a_{12}a_{21} - \\
&- a_{12}a_{21}a_{12} - a_{21} - a_{21}a_{12} + \\
&+ a_{21} + a_{21}a_{12} \\
(a_{12}a_{21} - a_{12} - a_{21} + e_2)(e_1 + a_{12} + a_{21} + a_{21}a_{12}) &= 0
\end{aligned}$$

Analogamente, temos também

$(e_1 + a_{12} + a_{21} + a_{21}a_{12})(a_{12}a_{21} - a_{12} - a_{21} + e_2) = 0.$

Assim, como $\tau(0) = 0$, também temos que

$$\begin{aligned}
0 &= \tau((a_{12}a_{21} - a_{12} - a_{21} + e_2)(e_1 + a_{12} + a_{21} + a_{21}a_{12}) + \\
&+ (e_1 + a_{12} + a_{21} + a_{21}a_{12})(a_{12}a_{21} - a_{12} - a_{21} + e_2)) \\
&= \tau(a_{12}a_{21} - a_{12} - a_{21} + e_2)(e_1 + a_{12} + a_{21} + a_{21}a_{12})^* + \\
&+ (a_{12}a_{21} - a_{12} - a_{21} + e_2)\tau(e_1 + a_{12} + a_{21} + a_{21}a_{12}) + \\
&+ \tau(e_1 + a_{12} + a_{21} + a_{21}a_{12})(a_{12}a_{21} - a_{12} - a_{21} + e_2)^* + \\
&+ (e_1 + a_{12} + a_{21} + a_{21}a_{12})\tau(a_{12}a_{21} - a_{12} - a_{21} + e_2),
\end{aligned}$$

pela aditividade da τ, temos

$$\begin{aligned}
0 &= [\tau(a_{12}a_{21})-\tau(a_{12})-\tau(a_{21})+\tau(e_2)][e_1+a_{12}+a_{21}+a_{21}a_{12}]^* \\
&+[a_{12}a_{21}-a_{12}-a_{21}+e_2][\tau(e_1)+\tau(a_{12})+\tau(a_{21})+\tau(a_{21}a_{12})] \\
&+[\tau(e_1)+\tau(a_{12})+\tau(a_{21})+\tau(a_{21}a_{12})][a_{12}a_{21}-a_{12}-a_{21}+e_2]^* \\
&+[e_1+a_{12}+a_{21}+a_{21}a_{12}][\tau(a_{12}a_{21})-\tau(a_{12})-\tau(a_{21})+\tau(e_2)],
\end{aligned}$$

da involução, temos

$$\begin{aligned}
0 &= [\tau(a_{12}a_{21})-\tau(a_{12})-\tau(a_{21})+\tau(e_2)][e_1+a_{12}^*+a_{21}^*+a_{12}^*a_{21}^*] \\
&+[a_{12}a_{21}-a_{12}-a_{21}+e_2][\tau(e_1)+\tau(a_{12})+\tau(a_{21})+\tau(a_{21}a_{12})] \\
&+[\tau(e_1)+\tau(a_{12})+\tau(a_{21})+\tau(a_{21}a_{12})][a_{21}^*a_{12}^*-a_{12}^*-a_{21}^*+e_2] \\
&+[e_1+a_{12}+a_{21}+a_{21}a_{12}][\tau(a_{12}a_{21})-\tau(a_{12})-\tau(a_{21})+\tau(e_2)],
\end{aligned}$$

pela distributiva, temos

$$\begin{aligned}
0 &= \tau(a_{12}a_{21})e_1+\tau(a_{12}a_{21})a_{12}^*+\tau(a_{12}a_{21})a_{21}^*+\tau(a_{12}a_{21})a_{12}^*a_{21}^*-\tau(a_{12})e_1 \\
&-\tau(a_{12})a_{12}^*-\tau(a_{12})a_{21}^*-\tau(a_{12})a_{12}^*a_{21}^*-\tau(a_{21})e_1-\tau(a_{21})a_{12}^* \\
&-\tau(a_{21})a_{21}^*-\tau(a_{21})a_{12}^*a_{21}^*+\tau(e_2)e_1+\tau(e_2)a_{12}^*+\tau(e_2)a_{21}^* \\
&+\tau(e_2)a_{12}^*a_{21}^*+a_{12}a_{21}\tau(e_1)+a_{12}a_{21}\tau(a_{12})+a_{12}a_{21}\tau(a_{21})+a_{12}a_{21}\tau(a_{21}a_{12}) \\
&-a_{12}\tau(e_1)-a_{12}\tau(a_{12})-a_{12}\tau(a_{21})-a_{12}\tau(a_{21}a_{12})-a_{21}\tau(e_1) \\
&-a_{21}\tau(a_{12})-a_{21}\tau(a_{21})-a_{21}\tau(a_{21}a_{12})+e_2\tau(e_1)+e_2\tau(a_{12}) \\
&+e_2\tau(a_{21})+e_2\tau(a_{21}a_{12})+\tau(e_1)a_{21}^*a_{12}^*-\tau(e_1)a_{12}^*-\tau(e_1)a_{21}^* \\
&+\tau(e_1)e_2+\tau(a_{12})a_{21}^*a_{12}^*-\tau(a_{12})a_{12}^*-\tau(a_{12})a_{21}^*+\tau(a_{12})e_2 \\
&+\tau(a_{21})a_{21}^*a_{12}^*-\tau(a_{21})a_{12}^*-\tau(a_{21})a_{21}^*+\tau(a_{21})e_2+\tau(a_{21}a_{12})a_{21}^*a_{12}^* \\
&-\tau(a_{21}a_{12})a_{12}^*-\tau(a_{21}a_{12})a_{21}^*+\tau(a_{21}a_{12})e_2+e_1\tau(a_{12}a_{21})-e_1\tau(a_{12}) \\
&-e_1\tau(a_{21})+e_1\tau(e_2)+a_{12}\tau(a_{12}a_{21})-a_{12}\tau(a_{12})-a_{12}\tau(a_{21}) \\
&+a_{12}\tau(e_2)+a_{21}\tau(a_{12}a_{21})-a_{21}\tau(a_{12})-a_{21}\tau(a_{21})+a_{21}\tau(e_2) \\
&+a_{21}a_{12}\tau(a_{12}a_{21})-a_{21}a_{12}\tau(a_{12})-a_{21}a_{12}\tau(a_{21})+a_{21}a_{12}\tau(e_2).
\end{aligned}$$

Como $\tau(e_1)=0$, os termos que possuem esse fator na igualdade acima são iguais a zero, restando

$$\begin{aligned}
0 \quad = \quad & \tau(a_{12}a_{21})e_1+\tau(a_{12}a_{21})a_{12}^*+\tau(a_{12}a_{21})a_{21}^*+\tau(a_{12}a_{21})a_{12}^*a_{21}^*-\tau(a_{12})e_1\\
& -\tau(a_{12})a_{12}^*-\tau(a_{12})a_{21}^*-\tau(a_{12})a_{12}^*a_{21}^*-\tau(a_{21})e_1-\tau(a_{21})a_{12}^*\\
& -\tau(a_{21})a_{21}^*-\tau(a_{21})a_{12}^*a_{21}^*+\tau(e_2)e_1+\tau(e_2)a_{12}^*+\tau(e_2)a_{21}^*\\
& +\tau(e_2)a_{12}^*a_{21}^*+a_{12}a_{21}\tau(a_{12})+a_{12}a_{21}\tau(a_{21})+a_{12}a_{21}\tau(a_{21}a_{12})-a_{12}\tau(a_{12})\\
& -a_{12}\tau(a_{21})-a_{12}\tau(a_{21}a_{12})-a_{21}\tau(a_{12})-a_{21}\tau(a_{21})-a_{21}\tau(a_{21}a_{12})\\
& +e_2\tau(a_{12})+e_2\tau(a_{21})+e_2\tau(a_{21}a_{12})+\tau(a_{12})a_{21}^*a_{12}^*-\tau(a_{12})a_{12}^*\\
& -\tau(a_{12})a_{21}^*+\tau(a_{12})e_2+\tau(a_{21})a_{21}^*a_{12}^*-\tau(a_{21})a_{12}^*-\tau(a_{21})a_{21}^*\\
& +\tau(a_{21})e_2+\tau(a_{21}a_{12})a_{21}^*a_{12}^*-\tau(a_{21}a_{12})a_{12}^*-\tau(a_{21}a_{12})a_{21}^*+\tau(a_{21}a_{12})e_2\\
& +e_1\tau(a_{12}a_{21})-e_1\tau(a_{12})-e_1\tau(a_{21})+e_1\tau(e_2)+a_{12}\tau(a_{12}a_{21})-a_{12}\tau(a_{12})\\
& -a_{12}\tau(a_{21})+a_{12}\tau(e_2)a_{21}+\tau(a_{12}a_{21})-a_{21}\tau(a_{12})-a_{21}\tau(a_{21})\\
& +a_{21}\tau(e_2)+a_{21}a_{12}\tau(a_{12}a_{21})-a_{21}a_{12}\tau(a_{12})-a_{21}a_{12}\tau(a_{21})+a_{21}a_{12}\tau(e_2).
\end{aligned}$$

Como $e_2\in\mathscr{R}_{22}$, temos que $\tau(e_2)\in\mathscr{R}_{22}$, donde $e_1\tau(e_2)=\tau(e_2)e_1=0$, logo todos os termos que possuem esse fator nulo, na igualdade acima, também são nulos, restando

$$\begin{aligned}
0 \quad = \quad & \tau(a_{12}a_{21})e_1+\tau(a_{12}a_{21})a_{12}^*+\tau(a_{12}a_{21})a_{21}^*+\tau(a_{12}a_{21})a_{12}^*a_{21}^*-\tau(a_{12})e_1\\
& -\tau(a_{12})a_{12}^*-\tau(a_{12})a_{21}^*-\tau(a_{12})a_{12}^*a_{21}^*-\tau(a_{21})e_1-\tau(a_{21})a_{12}^*\\
& -\tau(a_{21})a_{21}^*-\tau(a_{21})a_{12}^*a_{21}^*+\tau(e_2)a_{12}^*+\tau(e_2)a_{12}^*a_{21}^*+a_{12}a_{21}\tau(a_{12})\\
& +a_{12}a_{21}\tau(a_{21})+a_{12}a_{21}\tau(a_{21}a_{12})-a_{12}\tau(a_{12})-a_{12}\tau(a_{21})-a_{12}\tau(a_{21}a_{12})\\
& -a_{21}\tau(a_{12})-a_{21}\tau(a_{21})-a_{21}\tau(a_{21}a_{12})+e_2\tau(a_{12})+e_2\tau(a_{21})+e_2\tau(a_{21}a_{12})\\
& +\tau(a_{12})a_{21}^*a_{12}^*-\tau(a_{12})a_{12}^*-\tau(a_{12})a_{21}^*+\tau(a_{12})e_2+\tau(a_{21})a_{21}^*a_{12}^*\\
& -\tau(a_{21})a_{12}^*-\tau(a_{21})a_{21}^*+\tau(a_{21})e_2+\tau(a_{21}a_{12})a_{21}^*a_{12}^*-\tau(a_{21}a_{12})a_{12}^*\\
& -\tau(a_{21}a_{12})a_{21}^*+\tau(a_{21}a_{12})e_2+e_1\tau(a_{12}a_{21})-e_1\tau(a_{12})-e_1\tau(a_{21})\\
& +a_{12}\tau(a_{12}a_{21})-a_{12}\tau(a_{12})-a_{12}\tau(a_{21})+a_{12}\tau(e_2)+a_{21}\tau(a_{12}a_{21})\\
& -a_{21}\tau(a_{12})-a_{21}\tau(a_{21})+a_{21}a_{12}\tau(a_{12}a_{21})-a_{21}a_{12}\tau(a_{12})-a_{21}a_{12}\tau(a_{21})\\
& +a_{21}a_{12}\tau(e_2)
\end{aligned}$$

Como $a_{12}a_{21}\in\mathscr{R}_{11}$, temos que $\tau(a_{12}a_{21})\in\mathscr{R}_{11}$, assim $\tau(a_{12}a_{21})e_2=e_2\tau(a_{12}a_{21})=0$, logo todos os termos que possuem esse fator nulo na igualdade acima, também são nulos, restando

$$\begin{aligned}
0 \;=\;& \tau(a_{12}a_{21})e_1 + \tau(a_{12}a_{21})a_{21}^* - \tau(a_{12})e_1 - \tau(a_{12})a_{12}^* - \tau(a_{12})a_{21}^* \\
& - \tau(a_{12})a_{12}^*a_{21}^* - \tau(a_{21})e_1 - \tau(a_{21})a_{12}^* - \tau(a_{21})a_{21}^* - \tau(a_{21})a_{12}^*a_{21}^* \\
& + \tau(e_2)a_{12}^* + \tau(e_2)a_{12}^*a_{21}^* + a_{12}a_{21}\tau(a_{12}) + a_{12}a_{21}\tau(a_{21}) + a_{12}a_{21}\tau(a_{21}a_{12}) \\
& - a_{12}\tau(a_{12}) - a_{12}\tau(a_{21}) - a_{12}\tau(a_{21}a_{12}) - a_{21}\tau(a_{12}) - a_{21}\tau(a_{21}) \\
& - a_{21}\tau(a_{21}a_{12}) + e_2\tau(a_{12}) + e_2\tau(a_{21}) + e_2\tau(a_{21}a_{12}) + \tau(a_{12})a_{21}^*a_{12}^* \\
& - \tau(a_{12})a_{12}^* - \tau(a_{12})a_{21}^* + \tau(a_{12})e_2 + \tau(a_{21})a_{21}^*a_{12}^* - \tau(a_{21})a_{12}^* \\
& - \tau(a_{21})a_{21}^* + \tau(a_{21})e_2 + \tau(a_{21}a_{12})a_{21}^*a_{12}^* - \tau(a_{21}a_{12})a_{12}^* - \tau(a_{21}a_{12})a_{21}^* \\
& + \tau(a_{21}a_{12})e_2 + e_1\tau(a_{12}a_{21}) - e_1\tau(a_{12}) - e_1\tau(a_{21}) - a_{12}\tau(a_{12}) \\
& - a_{12}\tau(a_{21}) + a_{12}\tau(e_2) + a_{21}\tau(a_{12}a_{21}) - a_{21}\tau(a_{12}) - a_{21}\tau(a_{21}) \\
& - a_{21}a_{12}\tau(a_{12}) - a_{21}a_{12}\tau(a_{21}) + a_{21}a_{12}\tau(e_2).
\end{aligned}$$

Como $a_{21}a_{12} \in \mathscr{R}_{22}$, temos que $\tau(a_{21}a_{12}) \in \mathscr{R}_{22}$, assim $\tau(a_{21}a_{12})e_1 = e_1\tau(a_{12}a_{21}) = 0$, logo todos os termos que possuem esse fator nulo, na igualdade acima, também são nulos, restando

$$\begin{aligned}
0 \;=\;& \tau(a_{12}a_{21})e_1 + \tau(a_{12}a_{21})a_{21}^* - \tau(a_{12})e_1 - \tau(a_{12})a_{12}^* - \tau(a_{12})a_{21}^* \\
& - \tau(a_{12})a_{12}^*a_{21}^* - \tau(a_{21})e_1 - \tau(a_{21})a_{12}^* - \tau(a_{21})a_{21}^* - \tau(a_{21})a_{12}^*a_{21}^* \\
& + \tau(e_2)a_{12}^* + \tau(e_2)a_{12}^*a_{21}^* + a_{12}a_{21}\tau(a_{12}) + a_{12}a_{21}\tau(a_{21}) - a_{12}\tau(a_{12}) \\
& - a_{12}\tau(a_{21}) - a_{12}\tau(a_{21}a_{12}) - a_{21}\tau(a_{12}) - a_{21}\tau(a_{21}) + e_2\tau(a_{12}) \\
& + e_2\tau(a_{21}) + e_2\tau(a_{21}a_{12}) + \tau(a_{12})a_{21}^*a_{12}^* - \tau(a_{12})a_{12}^* - \tau(a_{12})a_{21}^* \\
& + \tau(a_{12})e_2 + \tau(a_{21})a_{21}^*a_{12}^* - \tau(a_{21})a_{12}^* - \tau(a_{21})a_{21}^* + \tau(a_{21})e_2 \\
& - \tau(a_{21}a_{12})a_{12}^* + \tau(a_{21}a_{12})e_2 + e_1\tau(a_{12}a_{21}) - e_1\tau(a_{12}) - e_1\tau(a_{21}) \\
& - a_{12}\tau(a_{12}) - a_{12}\tau(a_{21}) + a_{12}\tau(e_2) + a_{21}\tau(a_{12}a_{21}) - a_{21}\tau(a_{12}) \\
& - a_{21}\tau(a_{21}) - a_{21}a_{12}\tau(a_{12}) - a_{21}a_{12}\tau(a_{21}) + a_{21}a_{12}\tau(e_2) \qquad (5.34)
\end{aligned}$$

Agora, como $e_2a_{12} = 0$, podemos calcular

$$\tau(a_{12}) = \tau(e_2a_{12} + a_{12}e_2) = \tau(e_2)a_{12}^* + e_2\tau(a_{12}) + \tau(a_{12})e_2 + a_{12}\tau(e_2).$$

Note que $\tau(a_{12}) = e_2\tau(a_{12}) + \tau(a_{12})e_2$. Com efeito, sabemos que $\tau(a_{12}) \in \mathscr{R}_{12} + \mathscr{R}_{21}$. Desse modo, temos que $\tau(a_{12}) = r_{12} + r_{21}$, para alguns $r_{12} \in \mathscr{R}_{12}$ e $r_{21} \in \mathscr{R}_{21}$. Consequentemente,

$$e_2\tau(a_{12}) + \tau(a_{12})e_2 = e_2(r_{12} + r_{21}) + (r_{12} + r_{21})e_2 = e_2r_{12} + e_2r_{21} + r_{12}e_2 + r_{21}e_2$$

Como $e_2 r_{12} = r_{21} e_2 = 0$, obtemos

$e_2\tau(a_{12}) + \tau(a_{12})e_2 = e_2 r_{21} + r_{12} e_2 = r_{12} + r_{21} = \tau(a_{12})$.

Assim, de $\tau(a_{12}) = \tau(e_2)a_{12}^* + e_2\tau(a_{12}) + \tau(a_{12})e_2 + a_{12}\tau(e_2)$, temos $\tau(e_2)a_{12}^* + a_{12}\tau(e_2) = 0$, o que elimina dois termos da soma (5.34). Multiplicando a equação $\tau(e_2)a_{12}^* + a_{12}\tau(e_2) = 0$ por a_{21}^* à direita, obtemos $\tau(e_2)a_{12}^* a_{21}^* = 0$, pois $a_{12}\tau(e_2)a_{21}^* = 0$. Analogamente, multiplicando $\tau(e_2)a_{12}^* + a_{12}\tau(e_2) = 0$ por a_{21} à esquerda, obtemos $a_{21}a_{12}\tau(e_2) = 0$. Com isso, eliminamos mais dois termos em (5.34). Por outro lado, como $a_{12}a_{12} = 0$, podemos calcular, $0 = \tau(a_{12}a_{12} + a_{12}a_{12}) = 2[\tau(a_{12})a_{12}^* + a_{12}\tau(a_{12})]$, é o mesmo que $-2[+\tau(a_{12})a_{12}^* + a_{12}\tau(a_{12})] = 0$, eliminando mais quatro termos de (5.34). Analogamente, como $a_{21}a_{21} = 0$, obtemos $-2[+\tau(a_{21})a_{21}^* + a_{21}\tau(a_{21})] = 0$, donde eliminamos mais 4 termos de (5.34). O que resta de (5.34) depois de todos esses cancelamentos é:

$$\begin{aligned}
0 \;=\;& \tau(a_{12}a_{21})e_1 + \tau(a_{12}a_{21})a_{21}^* - \tau(a_{12})e_1 - \tau(a_{12})a_{21}^* - \tau(a_{12})a_{12}^*a_{21}^* \\
& -\tau(a_{21})e_1 - \tau(a_{21})a_{12}^* - \tau(a_{21})a_{12}^*a_{21}^* + a_{12}a_{21}\tau(a_{12}) + a_{12}a_{21}\tau(a_{21}) \\
& -a_{12}\tau(a_{21}) - a_{12}\tau(a_{21}a_{12}) - a_{21}\tau(a_{12}) + e_2\tau(a_{12}) + e_2\tau(a_{21}) \\
& +e_2\tau(a_{21}a_{12}) + \tau(a_{12})a_{21}^*a_{12}^* - \tau(a_{12})a_{21}^* + \tau(a_{12})e_2 + \tau(a_{21})a_{21}^*a_{12}^* \\
& -\tau(a_{21})a_{12}^* + \tau(a_{21})e_2 - \tau(a_{21}a_{12})a_{12}^* + \tau(a_{21}a_{12})e_2 + e_1\tau(a_{12}a_{21}) \\
& -e_1\tau(a_{12}) - e_1\tau(a_{21}) - a_{12}\tau(a_{21}) + a_{21}\tau(a_{12}a_{21}) - a_{21}\tau(a_{12}) \qquad (5.35) \\
& -a_{21}a_{12}\tau(a_{12}) - a_{21}a_{12}\tau(a_{21})
\end{aligned}$$

Agora vejamos outras somas que são nulas. Como $(a_{12}a_{21})a_{21} = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\tau(a_{21}(a_{12}a_{21})) &= \tau((a_{12}a_{21})a_{21} + a_{21}(a_{12}a_{21})) \\
&= \tau(a_{12}a_{21})a_{21}^* + a_{12}a_{21}\tau(a_{21}) + \tau(a_{21})a_{21}^*a_{12}^* + a_{21}\tau(a_{12}a_{21})
\end{aligned}$$

Analogamente, $a_{21}(a_{21}a_{12}) = 0$ implica

$$\begin{aligned}
\tau((a_{21}a_{12})a_{21}) &= \tau(a_{21}(a_{21}a_{12}) + (a_{21}a_{12})a_{21}) \\
&= \tau(a_{21})(a_{12}^*a_{21}^*) + a_{21}\tau(a_{21}a_{12}) + \tau(a_{21}a_{12})a_{21}^* + (a_{21}a_{12})\tau(a_{21})
\end{aligned}$$

Como $a_{21}a_{12} \in \mathscr{R}_{22}$, temos que $\tau(a_{21}a_{12}) \in \mathscr{R}_{22}$. Desse modo, $a_{21}\tau(a_{21}a_{12}) = \tau(a_{21}a_{12})a_{21}^* = 0$. Assim da equação acima, temos

$$\begin{aligned}
\tau((a_{21}a_{12})a_{21}) &= \tau(a_{21})(a_{12}^*a_{21}^*) + (a_{21}a_{12})\tau(a_{21}) \\
-\tau((a_{21}a_{12})a_{21}) &= -\tau(a_{21})(a_{12}^*a_{21}^*) - (a_{21}a_{12})\tau(a_{21}).
\end{aligned}$$

Portanto, combinando as duas equações, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \tau(a_{21}(a_{12}a_{21})) - \tau((a_{21}a_{12})a_{21}) \\ &= \tau(a_{12}a_{21})a_{21}^* \ + \ a_{12}a_{21}\tau(a_{21}) \ + \ \tau(a_{21})a_{21}^*a_{12}^* + \\ &\quad + a_{21}\tau(a_{12}a_{21}) - \tau(a_{21})(a_{12}^*a_{21}^*) - (a_{21}a_{12})\tau(a_{21}). \end{aligned} \tag{5.36}$$

Da mesma forma, como $\tau(a_{21}a_{12})a_{12} = 0$, temos, por um lado que

$$\begin{aligned} \tau((a_{12}a_{21})a_{12}) &= \tau((a_{12}a_{21})a_{12} + a_{12}(a_{12}a_{21})) \\ &= \tau(a_{12}a_{21})a_{12}^* + a_{12}a_{21}\tau(a_{12}) + \tau(a_{12})a_{21}^*a_{12}^* + a_{12}\tau(a_{12}a_{21}). \end{aligned}$$

Como $a_{12}a_{21} \in \mathscr{R}_{11}$, temos que $\tau(a_{12}a_{21}) \in \mathscr{R}_{11}$. Assim, $a_{12}\tau(a_{12}a_{21}) = \tau(a_{12}a_{21})a_{12}^* = 0$, logo

$$\tau((a_{12}a_{21})a_{12}) = a_{12}a_{21}\tau(a_{12}) + \tau(a_{12})a_{21}^*a_{12}^*$$

E por outro lado,

$$\begin{aligned} \tau(a_{12}(a_{21}a_{12})) &= \tau((a_{21}a_{12})a_{12} + a_{12}(a_{21}a_{12})) \\ &= \tau(a_{21}a_{12})a_{12}^* + a_{21}a_{12}\tau(a_{12}) + \tau(a_{12})a_{12}^*a_{21}^* + a_{12}\tau(a_{21}a_{12}), \end{aligned}$$

logo,

$$-\tau(a_{12}(a_{21}a_{12})) = -\tau(a_{21}a_{12})a_{12}^* - a_{21}a_{12}\tau(a_{12}) - \tau(a_{12})a_{12}^*a_{21}^* - a_{12}\tau(a_{21}a_{12}).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 0 &= \tau((a_{12}a_{21})a_{12}) - \tau(a_{12}(a_{21}a_{12})) \\ &= a_{12}a_{21}\tau(a_{12}) + \tau(a_{12})a_{21}^*a_{12}^* - \tau(a_{21}a_{12})a_{12}^* - \\ &\quad - a_{21}a_{12}\tau(a_{12}) - \tau(a_{12})a_{12}^*a_{21}^* - a_{12}\tau(a_{21}a_{12}). \end{aligned} \tag{5.37}$$

Cancelando essas duas somas nulas, (5.36) (5.37), na equação (5.35), resta

$$\begin{aligned} 0 &= \tau(a_{12}a_{21})e_1 - \tau(a_{12})e_1 - \tau(a_{12})a_{21}^* - \tau(a_{21})e_1 - \tau(a_{21})a_{12}^* \\ &\quad - a_{12}\tau(a_{21}) - a_{21}\tau(a_{12}) + e_2\tau(a_{12}) + e_2\tau(a_{21}) + e_2\tau(a_{21}a_{12}) \\ &\quad - \tau(a_{12})a_{21}^* + \tau(a_{12})e_2 - \tau(a_{21})a_{12}^* + \tau(a_{21})e_2 + \tau(a_{21}a_{12})e_2 \\ &\quad + e_1\tau(a_{12}a_{21}) - e_1\tau(a_{12}) - e_1\tau(a_{21}) - a_{12}\tau(a_{21}) - a_{21}\tau(a_{12}). \end{aligned} \tag{5.38}$$

Agora vamos calcular mais duas somas que são nulas. A primeira é

$$\begin{aligned}\tau(a_{12}) &= \tau(a_{12}e_1+e_1a_{12})\\ &= \tau(a_{12})e_1+a_{12}\tau(e_1)+\tau(e_1)a_{12}^*+e_1\tau(a_{12})\end{aligned}$$

como $\tau(e_1)=0$, segue

$$\begin{aligned}\tau(a_{12}) &= \tau(a_{12})e_1+e_1\tau(a_{12})\\ -\tau(a_{12}) &= -\tau(a_{12})e_1-e_1\tau(a_{12}).\end{aligned}$$

E como já foi mostrado, $\tau(a_{12})=e_2\tau(a_{12})+\tau(a_{12})e_2$, logo

$$\begin{aligned}0 &= \tau(a_{12})-\tau(a_{12})\\ 0 &= e_2\tau(a_{12})+\tau(a_{12})e_2-\tau(a_{12})e_1-e_1\tau(a_{12}).\end{aligned} \tag{5.39}$$

A segunda é

$$\begin{aligned}\tau(a_{21}) &= \tau(a_{21}e_1+e_1a_{21})\\ &= \tau(a_{21})e_1+a_{21}\tau(e_1)+\tau(e_1)a_{21}^*+e_1\tau(a_{21})\end{aligned}$$

como $\tau(e_1)=0$, resta

$$\begin{aligned}\tau(a_{21}) &= \tau(a_{21})e_1+e_1\tau(a_{21})\\ -\tau(a_{21}) &= -\tau(a_{21})e_1-e_1\tau(a_{21}).\end{aligned}$$

E temos também,

$$\begin{aligned}\tau(a_{21}) &= \tau(a_{21}e_2+e_2a_{21})\\ &= \tau(a_{21})e_2+a_{21}\tau(e_2)+\tau(e_2)a_{21}^*+e_2\tau(a_{21})\\ &= \tau(a_{21})e_2+e_2\tau(a_{21}),\end{aligned}$$

pois, $\tau(e_2)\in\mathscr{R}_{22}$ e os termos que o contém são nulos. Logo,

$$\begin{aligned}0 &= \tau(a_{21})-\tau(a_{21})\\ 0 &= \tau(a_{21})e_2+e_2\tau(a_{21})-\tau(a_{21})e_1-e_1\tau(a_{21}).\end{aligned} \tag{5.40}$$

Cancelando essas somas nulas (5.39) e (5.40) de (5.38), resta

$$\begin{aligned}0 &= \tau(a_{12}a_{21})e_1-\tau(a_{12})a_{21}^*-\tau(a_{21})a_{12}^*-a_{12}\tau(a_{21})-a_{21}\tau(a_{12})+e_2\tau(a_{21}a_{12})\\ &\quad -\tau(a_{12})a_{21}^*-\tau(a_{21})a_{12}^*+\tau(a_{21}a_{12})e_2+e_1\tau(a_{12}a_{21})-a_{12}\tau(a_{21})-a_{21}\tau(a_{12}).\end{aligned}$$

Continuando, observe que $a_{12}a_{21}\in\mathscr{R}_{11}$, logo $\tau(a_{12}a_{21})\in\mathscr{R}_{11}$ e, assim,

$$\tau(a_{12}a_{21}) = e_1\tau(a_{12}a_{21}) = \tau(a_{12}a_{21})e_1$$

e também temos $a_{21}a_{12} \in \mathscr{R}_{22}$, logo $\tau(a_{21}a_{12}) \in \mathscr{R}_{22}$ e, assim,

$$\tau(a_{21}a_{12}) = e_2\tau(a_{21}a_{12}) = \tau(a_{21}a_{12})e_2.$$

Donde, da equação acima, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= 2\tau(a_{12}a_{21}) + 2\tau(a_{21}a_{12}) - 2\tau(a_{21})a_{12}^* - 2\tau(a_{12})a_{21}^* - 2a_{12}\tau(a_{21}) - 2a_{21}\tau(a_{12}) \\ 0 &= 2[\tau(a_{12}a_{21}) + \tau(a_{21}a_{12}) - \tau(a_{21})a_{12}^* - \tau(a_{12})a_{21}^* - a_{12}\tau(a_{21}) - a_{21}\tau(a_{12})] \end{aligned}$$

Como $\mathscr{R}$ é livre de 2-torção, temos

$$0 = \tau(a_{12}a_{21}) + \tau(a_{21}a_{12}) - \tau(a_{21})a_{12}^* - \tau(a_{12})a_{21}^* - a_{12}\tau(a_{21}) - a_{21}\tau(a_{12}) \tag{5.41}$$

Multiplicando (5.41) por e_1 à direita e usando os resultados de (5.33), obtemos

$$\tau(a_{12}a_{21}) = \tau(a_{21})a_{12}^* + a_{21}\tau(a_{12}).$$

E multiplicando (5.41) por e_2 à direita, obtemos

$$\tau(a_{21}a_{12}) = \tau(a_{12})a_{21}^* + a_{12}\tau(a_{21}).$$

Finalmente a Afirmação está provada. Agora, para qualquer $a = a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} \in \mathscr{R}$, pela Afirmação provada acima, a aditividade de τ, equações (5.33) e o fato que $\tau|_{ij}$, sempre que $1 \leq i, j \leq 2$, é uma Jordan *-derivação aditiva, com isto tudo é fácil checar que $\tau(a^2) = \tau(a)a^* + a\tau(a)$. Com efeito

$$\begin{aligned} \tau(a^2) &= \tau((a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22})^2) \\ &= \tau((a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22})(a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22})) \\ &= \tau(a_{11}a_{11} + a_{11}a_{12} + a_{11}a_{21} + a_{11}a_{22} + a_{12}a_{11} + a_{12}a_{12} + a_{12}a_{21} + a_{12}a_{22} + \\ &\quad + a_{21}a_{11} + a_{21}a_{12} + a_{21}a_{21} + a_{21}a_{22} + a_{22}a_{11} + a_{22}a_{12} + a_{22}a_{21} + a_{22}a_{22}). \end{aligned}$$

Tirando os termos nulos, resta

$$\tau(a^2) = \tau(a_{11}a_{11} + a_{11}a_{12} + a_{12}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{21}a_{11} + a_{21}a_{12} + a_{22}a_{21} + a_{22}a_{22}).$$

Pela aditividade de τ, temos

$$\begin{aligned} \tau(a^2) &= \tau(a_{11}a_{11}) + \tau(a_{11}a_{12}) + \tau(a_{12}a_{21}) + \tau(a_{12}a_{22}) + \\ &\quad + \tau(a_{21}a_{11}) + \tau(a_{21}a_{12}) + \tau(a_{22}a_{21}) + \tau(a_{22}a_{22}). \end{aligned}$$

Pelo fato que $\tau|_{ij}$, sempre que $1 \leq i, j \leq 2$, é uma *-derivação de Jordan aditiva e da Afirmação (13), obtemos

$$\begin{aligned}
\tau(a^2) &= \tau(a_{11})a_{11}*+a_{11}\tau(a_{11})+\tau(a_{12})a_{11}^*+a_{12}\tau(a_{11})+\tau(a_{11})a_{12}^*+a_{11}\tau(a_{12}) \\
&\quad +\tau(a_{21})a_{12}^*+a_{12}\tau(a_{21})+\tau(a_{22})a_{12}^*+a_{22}\tau(a_{12})+\tau(a_{12})a_{22}^*+a_{12}\tau(a_{22}) \\
&\quad +\tau(a_{11})a_{21}^*+a_{11}\tau(a_{21})+\tau(a_{21})a_{11}^*+a_{21}\tau(a_{11})+\tau(a_{12})a_{21}^*+a_{21}\tau(a_{12}) \\
&\quad +\tau(a_{21})a_{22}^*+a_{21}\tau(a_{22})+\tau(a_{22})a_{21}^*+a_{22}\tau(a_{21})+\tau(a_{22})a_{22}^*+a_{22}\tau(a_{22}).
\end{aligned}$$

Como $\mathscr{R}(a_{ii}) \in \mathscr{R}_{ii}$, temos $a_{22}\tau(a_{11}) = \tau(a_{11})a_{22}^* = a_{11}\tau(a_{22}) = \tau(a_{22})a_{11}^* = 0$. E de $\tau(0) = 0$, temos que $0 = \tau(a_{12}a_{12}+a_{12}a_{12}) = 2[\tau(a_{12})a_{12}^*+a_{12}\tau(a_{12})]$, implicando que $\tau(a_{12})a_{12}^*+a_{12}\tau(a_{12}) = 0$. Da mesma forma chega-se que $\tau(a_{21})a_{21}^*+a_{21}\tau(a_{21}) = 0$. Acrescentaremos esses termos à soma acima,

$$\begin{aligned}
\tau(a^2) &= a_{22}\tau(a_{11})+\tau(a_{11})a_{22}^*+a_{11}\tau(a_{22})+\tau(a_{22})a_{11}^*+\tau(a_{12}a_{12}+a_{12}a_{12}) \\
&\quad +\tau(a_{21})a_{21}^*+a_{21}\tau(a_{21})+\tau(a_{11})a_{11}*+a_{11}\tau(a_{11})+\tau(a_{12})a_{11}^*+a_{12}\tau(a_{11}) \\
&\quad +\tau(a_{11})a_{12}^*+a_{11}\tau(a_{12})+\tau(a_{21})a_{12}^*+a_{12}\tau(a_{21})+\tau(a_{22})a_{12}^*+a_{22}\tau(a_{12}) \\
&\quad +\tau(a_{12})a_{22}^*+a_{12}\tau(a_{22})+\tau(a_{11})a_{21}^*+a_{11}\tau(a_{21})+\tau(a_{21})a_{11}^*+a_{21}\tau(a_{11}) \\
&\quad +\tau(a_{12})a_{21}^*+a_{21}\tau(a_{12})+\tau(a_{21})a_{22}^*+a_{21}\tau(a_{22})+\tau(a_{22})a_{21}^*+a_{22}\tau(a_{21}) \\
&\quad +\tau(a_{22})a_{22}^*+a_{22}\tau(a_{22}).
\end{aligned}$$

E de uma simples organização de termos, chegamos em

$$\begin{aligned}
\tau(a^2) &= [\tau(a_{11})+\tau(a_{12})+\tau(a_{21})+\tau(a_{22})][a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22}]^*+ \\
&\quad +[a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22}][\tau(a_{11})+\tau(a_{12})+\tau(a_{21})+\tau(a_{22})] \\
&= \tau(a)a^*+a\tau(a),
\end{aligned}$$

concluindo a prova do Teorema. $\square$

6 CARACTERIZAÇÃO DE *-DERIVAÇÕES DE JORDAN

Neste capítulo, caracterizaremos as *-derivações de Jordan. Provaremos que *-derivações de Jordan em *-anéis que são multiplicativas também são aditivas.

Teorema 6.0.1. *Seja $\mathscr{R}$ um *-anel livre de 2-torção com um idempotente não trivial e simétrico e_1. Suponha que $\mathscr{R}$ satisfaz as seguintes condições:*

1. *Para $a \in \mathscr{R}$, $a\mathscr{R}e_i = 0$ implica $a = 0$, sempre que $i = 1,2$ e $e_2 = 1 - e_1$;*
2. *Para $a \in \mathscr{R}$, $e_2ae_2x^*e_2 + e_2xe_2ae_2 = 0$ para todo $x \in \mathscr{R}$ implica $e_2ae_2 = 0$.*
3. *Para $a \in \mathscr{R}$, $e_1ae_2x^*e_1 + e_1xe_2ae_1 = 0$ para todo $x \in \mathscr{R}$ implica $e_1ae_2 = e_2ae_1 = 0$.*

*Então a função $\delta : \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ é uma *-derivação multiplicativa de Jordan, isto é, satisfaz $\delta(ab+ba) = \delta(a)b^* + a\delta(b) + \delta(b)a^* + b\delta(a)$, para quaisquer $a,b \in \mathscr{R}$ se, e somente se, δ é uma *-derivação de Jordan aditiva.*

Demonstração. A condição suficiente é óbvia. Para a necessária, defina $\tau(a) = \delta(a) - (aa_0 - a_0a*)$, para qualquer $a \in \mathscr{R}$, com $a_0 = e_1\delta(e_1)e_2 - e_2\delta(e_1)e_1$. Então, $\tau : \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ também é uma *-derivação multiplicativa de Jordan. Assim, para completar a prova do teorema, precisamos somente provar que τ é uma *-derivação de Jordan aditiva.

Note que τ satisfaz as condições do Teorema (5.0.1). Assim, pela prova do Teorema (5.0.1), é sempre verdadeiro que

$$\tau(e_1) = 0, \tau(\mathscr{R}_{ii}) \subseteq \mathscr{R}_{ii} \text{ e } \tau(\mathscr{R}_{ij}) \subseteq \mathscr{R}_{ij} + \mathscr{R}_{ij}, \text{ sempre que } 1 \leq i \neq j \leq 2, \tag{6.1}$$

$$e_2\tau(a_{11}+a_{12})e_2 = 0, e_1\tau(a_{11}+a_{12})e_2 = e_1\tau(a_{12})e_2 \text{ e } e_2\tau(a_{11}+a_{12})e_1 = e_2\tau(a_{12})e_1;$$

$$e_1\tau(a_{22}+a_{12})e_1 = 0, e_1\tau(a_{22}+a_{12})e_2 = e_1\tau(a_{12})e_2 \text{ e } e_2\tau(a_{22}+a_{12})e_1 = e_2\tau(a_{12})e_1;$$

$$e_1\tau(a_{22}+a_{21})e_1 = 0, e_1\tau(a_{22}+a_{21})e_2 = e_1\tau(a_{21})e_2 \text{ e } e_2\tau(a_{22}+a_{21})e_1 = e_2\tau(a_{21})e_1;$$

$$e_2\tau(a_{21}+a_{11})e_2 = 0, e_1\tau(a_{21}+a_{11})e_2 = e_1\tau(a_{21})e_2 \text{ e } e_2\tau(a_{21}+a_{11})e_1 = e_2\tau(a_{21})e_1;$$

e $\tau|_{\mathscr{R}_{ij}}$, sempre que $1 \leq i, j \leq 2$ é uma *-derivação aditiva de Jordan. Primeiramente provaremos a seguinte afirmação.

Afirmação 14. *$\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22}) = \tau(a_{11}) + \tau(a_{12}) + \tau(a_{21}) + \tau(a_{22})$, para qualquer $a_{ij} \in \mathscr{R}_{ij}$.*

Demonstraremos esta afirmação através de vários passos.

Passo 1. *Para quaisquer $a_{11} \in \mathscr{R}_{11}$ e $a_{21} \in \mathscr{R}_{21}$, temos $\tau(a_{11}+a_{21}) = \tau(a_{11}) + \tau(a_{21})$.*

As equações acima provadas no Teorema (5.0.1) são suficientes para mostrar que $e_1\tau(a_{11}+a_{21})e_1 = \tau(a_{11})$. Dados $b_{21} \in \mathscr{R}_{21}$ e $b_{22} \in \mathscr{R}_{22}$, obtemos, por um lado, pela aditividade de $\tau|_{\mathscr{R}_{21}}$, com $b_{21}a_{11}, b_{22}a_{21} \in \mathscr{R}_{21}$ que

$$\begin{aligned}
\tau(b_{21}a_{11}) + \tau(b_{22}a_{21}) &= \tau(b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21}) \\
&= \tau((a_{11}+a_{21})(b_{21}+b_{22}) + (b_{21}+b_{22})(a_{11}+a_{21})) \\
&= \tau(a_{11}+a_{21})(b_{21}^*+b_{22}^*) + (a_{11}+a_{21})\tau(b_{21}+b_{22}) + \\
&\quad +\tau(b_{21}+b_{22})(a_{11}^*+a_{21}^*) + (b_{21}+b_{22})\tau(a_{11}+a_{21}) \\
&= \tau(a_{11}+a_{21})b_{21}^* + \tau(a_{11}+a_{21})b_{22}^* + a_{11}\tau(b_{21}+b_{22}) + \\
&\quad +a_{21}\tau(b_{21}+b_{22}) + \tau(b_{21}+b_{22})a_{11}^* + \tau(b_{21}+b_{22})a_{21}^* + \\
&\quad +b_{21}\tau(a_{11}+a_{21}) + b_{22}\tau(a_{11}+a_{21}).
\end{aligned}$$

Numerando os termos do lado direito por (1), (2), (3),...,(8). E fazendo algumas simplificações:

1. $\tau(a_{11}+a_{21})b_{21}^*$

$$\begin{aligned}
\tau(a_{11}+a_{21})b_{21}^* &= [e_1\tau(a_{11}+a_{21})e_1 + e_1\tau(a_{11}+a_{21})e_2 + \\
&\quad +e_2\tau(a_{11}+a_{21})e_1 + e_2\tau(a_{11}+a_{21})e_2]b_{21}^* \\
&= e_1\tau(a_{11}+a_{21})e_1b_{21}^* + e_2\tau(a_{11}+a_{21})e_1b_{21}^* \\
&= e_1\tau(a_{11}+a_{21})e_1b_{21}^* + e_2\tau(a_{21})e_1b_{21}^* \\
&= e_1\tau(a_{11}+a_{21})b_{21}^* + e_2\tau(a_{21})b_{21}^*
\end{aligned}$$

2. $\tau(a_{11}+a_{21})b_{22}^*$

$$\begin{aligned}
\tau(a_{11}+a_{21})b_{22}^* &= \tau(a_{11})b_{22}^* + \tau(a_{21})b_{22}^* \\
&= [e_1\tau(a_{21})e_1 + e_1\tau(a_{21})e_2 + e_2\tau(a_{21})e_1 + e_2\tau(a_{21})e_2]b_{22}^* \\
&= e_1\tau(a_{21})e_2b_{22}^* + e_2\tau(a_{21})e_2b_{22}^* \\
&= e_1\tau(a_{21})b_{22}^*
\end{aligned}$$

3. $a_{11}\tau(b_{21}+b_{22})$

$$\begin{aligned}
a_{11}\tau(b_{21}+b_{22}) &= a_{11}\tau(b_{21}) + a_{11}\tau(b_{22}) \\
&= a_{11}\tau(b_{21}) \\
&= a_{11}[e_1\tau(b_{21})e_1 + e_1\tau(b_{21})e_2 + e_2\tau(b_{21})e_1 + e_2\tau(b_{21})e_2] \\
&= a_{11}e_1\tau(b_{21})e_1 + a_{11}e_1\tau(b_{21})e_2 \\
&= a_{11}\tau(b_{21})e_2
\end{aligned}$$

4. $a_{21}\tau(b_{21}+b_{22})$

$$\begin{aligned}
a_{21}\tau(b_{21}+b_{22}) &= a_{21}\tau(b_{21})+a_{21}\tau(b_{22})\\
&= a_{21}\tau(b_{21})\\
&= a_{21}[e_1\tau(b_{21})e_1+e_1\tau(b_{21})e_2+e_2\tau(b_{21})e_1+e_2\tau(b_{21})e_2]\\
&= a_{21}e_1\tau(b_{21})e_1+a_{21}e_1\tau(b_{21})e_2\\
&= a_{21}e_1\tau(b_{21})e_2\\
&= a_{21}\tau(b_{21})e_2
\end{aligned}$$

5. $\tau(b_{21}+b_{22})a_{11}^*$

$$\begin{aligned}
\tau(b_{21}+b_{22})a_{11}^* &= \tau(b_{21})a_{11}^*+\tau(b_{22})a_{11}^*\\
&= [e_1\tau(b_{21})e_1+e_1\tau(b_{21})e_2+e_2\tau(b_{21})e_1+e_2\tau(b_{21})e_2]a_{11}^*\\
&= e_1\tau(b_{21})e_1a_{11}^*+e_2\tau(b_{21})e_1a_{11}^*\\
&= e_2\tau(b_{21})e_1a_{11}^*\\
&= e_2\tau(b_{21})a_{11}^*
\end{aligned}$$

6. $\tau(b_{21}+b_{22})a_{21}^*$

$$\begin{aligned}
\tau(b_{21}+b_{22})a_{21}^* &= \tau(b_{21})a_{21}^*+\tau(b_{22})a_{21}^*\\
&= \tau(b_{21})a_{21}^*\\
&= [e_1\tau(b_{21})e_1+e_1\tau(b_{21})e_2+e_2\tau(b_{21})e_1+e_2\tau(b_{21})e_2]a_{21}^*\\
&= e_1\tau(b_{21})e_1a_{21}^*+e_2\tau(b_{21})e_1a_{21}^*\\
&= e_2\tau(b_{21})e_1a_{21}^*\\
&= e_2\tau(b_{21})a_{21}^*
\end{aligned}$$

7. $\tau(b_{21}+b_{22})a_{21}^*$

$$\begin{aligned}
b_{21}\tau(a_{11}+a_{21}) &= b_{21}[e_1\tau(a_{11}+a_{21})e_1+e_1\tau(a_{11}+a_{21})e_2+\\
&\quad +e_2\tau(a_{11}+a_{21})e_1+e_2\tau(a_{11}+a_{21})e_2]\\
&= b_{21}e_1\tau(a_{11}+a_{21})e_1+b_{21}e_1\tau(a_{11}+a_{21})e_2\\
&= b_{21}e_1\tau(a_{11}+a_{21})e_1+b_{21}e_1\tau(a_{21})e_2\\
&= b_{21}\tau(a_{11}+a_{21})e_1+b_{21}\tau(a_{21})e_2
\end{aligned}$$

8. $b_{22}\tau(a_{11}+a_{21})$

$$\begin{aligned}
b_{22}\tau(a_{11}+a_{21}) &= b_{22}[e_1\tau(a_{11}+a_{21})e_1+e_1\tau(a_{11}+a_{21})e_2+\\
&\quad +e_2\tau(a_{11}+a_{21})e_1+e_2\tau(a_{11}+a_{21})e_2]\\
&= b_{22}e_2\tau(a_{11}+a_{21})e_1+b_{22}e_2\tau(a_{11}+a_{21})e_2\\
&= b_{22}e_2\tau(a_{11}+a_{21})e_1\\
&= b_{22}\tau(a_{21})e_1.
\end{aligned}$$

Resultando em

$$\begin{aligned}
\tau(b_{21}a_{11})+\tau(b_{22}a_{21}) &= e_1\tau(a_{11}+a_{21})b_{21}^*+e_2\tau(a_{21})b_{21}^*+e_1\tau(a_{21})b_{22}^*+a_{11}\tau(b_{21})e_2+\\
&\quad +a_{21}\tau(b_{21})e_2+e_2\tau(b_{21})a_{11}^*+e_2\tau(b_{21})a_{21}^*+b_{21}\tau(a_{11}+a_{21})e_1\\
&\quad +b_{21}\tau(a_{21})e_2+b_{22}\tau(a_{21})e_1. \qquad (6.2)
\end{aligned}$$

De $(e_2a_{21})b_{21}=0$, temos que

$$\begin{aligned}
0 &= \tau(0)\\
&= \tau((e_2a_{21})b_{21}+b_{21}(e_2a_{21}))\\
&= \tau(e_2a_{21})b_{21}^*+e_2a_{21}\tau(b_{21})+\tau(b_{21})(e_2a_{21})^*+b_{21}\tau(e_2a_{21})\\
&= \tau(a_{21})b_{21}^*+a_{21}\tau(b_{21})+\tau(b_{21})(a_{21})^*+b_{21}\tau(a_{21})
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
0 &= e_20e_2\\
&= e_2\tau(a_{21})b_{21}^*e_2+e_2a_{21}\tau(b_{21})e_2+e_2\tau(b_{21})(a_{21})^*e_2+e_2b_{21}\tau(a_{21})e_2\\
&= e_2\tau(a_{21})b_{21}^*+a_{21}\tau(b_{21})e_2+e_2\tau(b_{21})(a_{21})^*+b_{21}\tau(a_{21})e_2.
\end{aligned}$$

Substituindo essa soma nula em (6.2), obtemos como resultado

$$\begin{aligned}
\tau(b_{21}a_{11})+\tau(b_{22}a_{21}) &= e_1\tau(a_{11}+a_{21})b_{21}^*+e_1\tau(a_{21})b_{22}^*+a_{11}\tau(b_{21})e_2+ \qquad (6.3)\\
&\quad +e_2\tau(b_{21})a_{11}^*+b_{21}\tau(a_{11}+a_{21})e_1+b_{22}\tau(a_{21})e_1.
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
\tau(b_{21}a_{11})+\tau(b_{22}a_{21}) &= \tau(b_{21}a_{11}+a_{11}b_{21})+\tau(b_{22}a_{21}+a_{21}b_{22})\\
&= \tau(b_{21})a_{11}^*+b_{21}\tau(a_{11})+\tau(a_{11})b_{21}^*+a_{11}\tau(b_{21})+\\
&\quad +\tau(b_{22})a_{21}^*+b_{22}\tau(a_{21})+\tau(a_{21})b_{22}^*+a_{21}\tau(b_{22})\\
&= \tau(b_{21})a_{11}^*+b_{21}\tau(a_{11})+\tau(a_{11})b_{21}^*+ \qquad (6.4)\\
&\quad +a_{11}\tau(b_{21})+b_{22}\tau(a_{21})+\tau(a_{21})b_{22}^*
\end{aligned}$$

Combinando as equações (6.3) e (6.4), obtemos

$$\begin{array}{lcl} e_1\tau(a_{11}+a_{21})b_{21}^*+e_1\tau(a_{21})b_{22}^*+a_{11}\tau(b_{21})e_2+ & = & \tau(b_{21})a_{11}^*+b_{21}\tau(a_{11})+\tau(a_{11})b_{21}^*+ \\ +e_2\tau(b_{21})a_{11}^*+b_{21}\tau(a_{11}+a_{21})e_1+b_{22}\tau(a_{21})e_1 & & +a_{11}\tau(b_{21})+b_{22}\tau(a_{21})+\tau(a_{21})b_{22}^* \end{array}$$

Observe que $e_1\tau(a_{21})b_{22}^*=\tau(a_{21})b_{22}^*$, pois $\tau(a_{21})\in\mathscr{R}_{12}+\mathscr{R}_{21}$. Analogamente, $a_{11}\tau(b_{21})e_2=a_{11}\tau(b_{21})$, $e_2\tau(b_{21})a_{11}^*=\tau(b_{21})a_{11}^*$, $b_{22}\tau(a_{21})e_1=b_{22}\tau(a_{21})$. Cancelando esses termos, resta

$$e_1\tau(a_{11}+a_{21})b_{21}^*+b_{21}\tau(a_{11}+a_{21})e_1=b_{21}\tau(a_{11})+\tau(a_{11})b_{21}^*$$

Colocando b_{21}^* em evidência do lado direito e b_{21} do lado esquerdo,

$$[e_1\tau(a_{11}+a_{21})e_1-\tau(a_{11})]b_{21}^*+b_{21}[e_1\tau(a_{11}+a_{21})e_1-\tau(a_{11})]=0 \tag{6.5}$$

Implicando que $[e_1\tau(a_{11}+a_{21})e_1-\tau(a_{11})]b_{21}^*=0$ e $b_{21}[e_1\tau(a_{11}+a_{21})e_1-\tau(a_{11})]=0$. Assim, $[e_1\tau(a_{11}+a_{21})e_1-\tau(a_{11})]e_1b^*e_2=0,\forall b\in\mathscr{R}$. Segue da hipótese (1) do Teorema 6.0.1 que $e_1\tau(a_{11}+a_{21})e_1-\tau(a_{11})=0$, ou seja, $e_1\tau(a_{11}+a_{21})e_1=\tau(a_{11})$. E pela Decomposição de Peirce, o passo 1 está provado.

Passo 2. *Para quaisquer $a_{11}\in\mathscr{R}_{11}$, $a_{21}\in\mathscr{R}_{21}$ e $a_{22}\in\mathscr{R}_{22}$, temos $e_1\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})e_1=\tau(a_{11})$, $e_1\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})e_2=e_1\tau(a_{11})e_2$ e $e_2\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})e_1=e_2\tau(a_{21})e_1$.*

Com efeito, por (5.33), temos que

$$\begin{aligned} \tau(2a_{11}) &= \tau(a_{11}+a_{11}) \\ &= \tau(e_1a_{11}+a_{11}e_1) \\ &= \tau(e_1)a_{11}^*+e_1\tau(a_{11})+\tau(a_{11})e_1+a_{11}\tau(e_1) \\ &= e_1\tau(a_{11})+\tau(a_{11})e_1 \\ &= \tau(a_{11})+\tau(a_{11}) \\ &= 2\tau(a_{11}) \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} 2\tau(a_{11})+\tau(a_{21}) &= \tau(2a_{11}+a_{21}) \\ &= \tau((a_{11}+a_{21}+a_{22})e_1+e_1(a_{11}+a_{21}+a_{22})) \\ &= \tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})e_1+(a_{11}+a_{21}+a_{22})\tau(e_1)+ \\ &\quad +\tau(e_1)(a_{11}+a_{21}+a_{22})^*+e_1\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22}) \\ &= \tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})e_1+e_1\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22}) \end{aligned} \tag{6.6}$$

Multiplicando por e_1 em ambos os lados da equação acima, obtemos

$$\begin{aligned}
e_1 2\tau(a_{11})e_1 + e_1\tau(a_{21})e_1 &= e_1\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})e_1e_1 + e_1e_1\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})e_1 \\
2\tau(a_{11}) &= e_1\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})e_1 + e_1\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})e_1 \\
2\tau(a_{11}) &= 2e_1\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})e_1 \\
\tau(a_{11}) &= e_1\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})e_1
\end{aligned}$$

Multiplicando por e_1 e por e_2, respectivamente, o lado esquerdo e o lado direito da equação (6.6), temos

$$\begin{aligned}
e_1 2\tau(a_{11})e_2 + e_1\tau(a_{21})e_2 &= e_1\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})e_1e_2 + e_1e_1\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})e_2 \\
e_1\tau(a_{21})e_2 &= e_1\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})e_2
\end{aligned}$$

Multiplicando por e_2 e por e_1, respectivamente, o lado esquerdo e o lado direito da equação (6.6), temos

$$\begin{aligned}
e_2 2\tau(a_{11})e_1 + e_2\tau(a_{21})e_1 &= e_2\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})e_1e_1 + e_2e_1\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})e_1 \\
e_2\tau(a_{21})e_1 &= e_2\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})e_1,
\end{aligned}$$

completando a prova do passo 2.

Passo 3. *Para $a_{11} \in \mathscr{R}11$ e $a_{12} \in \mathscr{R}12$, temos $\tau(a_{11}+a_{12}) = \tau(a_{11}) + \tau(a_{12})$.*

Como no início da prova do teorema foi provado que $e_2\tau(a_{11}+a_{12})e_2 = 0 = e_2\tau(a_{12})e_2$, $e_1\tau(a_{11}+a_{12})e_2 = e_2\tau(a_{12})e_1 = \tau(a_{12})$ e $e_2\tau(a_{11}+a_{12})e_1 = 0 = e_2\tau(a_{12})e_1$, precisamos apenas checar se $e_1\tau(a_{11}+a_{12})e_1 = \tau(a_{11})$. Com efeito, seja $b_{21} \in \mathscr{R}_{21}$, temos

$$\begin{aligned}
\tau(a_{12}b_{21} + b_{21}a_{11} + b_{21}a_{12}) &= \tau((a_{11}+a_{12})b_{21} + b_{21}(a_{11}+a_{12})) \\
&= \tau(a_{11}+a_{12})b_{21}^* + (a_{11}+a_{12})\tau(b_{21}) \\
&\quad + \tau(b_{21})(a_{11}^* + a_{12}^*) + b_{21}\tau(a_{11}+a_{12})
\end{aligned}$$

Multiplicando por e_1 e por e_2, respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned}
e_1\tau(a_{12}b_{21} + b_{21}a_{11} + b_{21}a_{12})e_2 &= e_1\tau(a_{11}+a_{12})b_{21}^*e_2 + e_1(a_{11}+a_{12})\tau(b_{21})e_2 + \\
&\quad + e_1\tau(b_{21})(a_{11}^* + a_{12}^*)e_2 + e_1b_{21}\tau(a_{11}+a_{12})e_2 \\
e_1\tau(b_{21}a_{11})e_2 &= e_1\tau(a_{11}+a_{12})b_{21}^*e_2 + e_1a_{11}\tau(b_{21})e_2 \\
e_1\tau(b_{21}a_{11})e_2 &= e_1\tau(a_{11}+a_{12})b_{21}^* + a_{11}\tau(b_{21})e_2 \qquad (6.7)
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\tau(b_{21}a_{11}) &= \tau(a_{11}b_{21}+b_{21}a_{11}) \\
&= \tau(a_{11})b_{21}^* + a_{11}\tau(b_{21}) + \tau(b_{21})a_{11}^* + b_{21}\tau(a_{11})
\end{aligned}$$

E assim,

$$\begin{aligned}
e_1\tau(b_{21}a_{11})e_2 &= e_1\tau(a_{11})b_{21}^*e_2 + e_1a_{11}\tau(b_{21})e_2 + e_1\tau(b_{21})a_{11}^*e_2 + e_1b_{21}\tau(a_{11})e_2 \\
e_1\tau(b_{21}a_{11})e_2 &= e_1\tau(a_{11})b_{21}^*e_2 + e_1a_{11}\tau(b_{21})e_2 \\
e_1\tau(b_{21}a_{11})e_2 &= \tau(a_{11})b_{21}^* + a_{11}\tau(b_{21})e_2 \qquad (6.8)
\end{aligned}$$

Combinando as equações (6.7) e (6.8), obtemos

$$\begin{aligned}
e_1\tau(a_{11}+a_{12})b_{21}^* + a_{11}\tau(b_{21})e_2 &= \tau(a_{11})b_{21}^* + a_{11}\tau(b_{21})e_2 \\
e_1\tau(a_{11}+a_{12})b_{21}^* - \tau(a_{11})b_{21}^* &= 0 \\
(e_1\tau(a_{11}+a_{12})e_1 - \tau(a_{11}))b_{21}^* &= 0 \\
(e_1\tau(a_{11}+a_{12})e_1 - \tau(a_{11}))e_1b^*e_2 &= 0
\end{aligned}$$

para qualquer $b \in \mathscr{R}$. Assim, pela hipótese 1 do teorema, segue que $e_1\tau(a_{11}+a_{12})e_1 - \tau(a_{11}) = 0$, donde $e_1\tau(a_{11}+a_{12})e_1 = \tau(a_{11})$. Pela decomposição de Peirce, esta equação e as enunciadas no início da demonstração do teorema provam o passo 3.

Passo 4. *Para quaisquer $a_{11} \in \mathscr{R}_{11}$, $a_{12} \in \mathscr{R}_{12}$ e $a_{22} \in \mathscr{R}_{22}$, temos $\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22}) = \tau(a_{11}) + \tau(a_{12}) + \tau(a_{22})$.*

Primeiramente, pelo passo 3, temos, por um lado que $\tau(2a_{11}+a_{12}) = \tau(2a_{11}) + \tau(a_{12}) = 2\tau(a_{11}) + \tau(a_{12})$
Por outro lado,

$$\begin{aligned}
2\tau(a_{11}) + \tau(a_{12}) &= \tau(2a_{11}+a_{12}) \\
&= \tau((a_{11}+a_{12}+a_{22})e_1 + e_1(a_{11}+a_{12}+a_{22})) \\
&= \tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})e_1 + (a_{11}+a_{12}+a_{22})\tau(e_1) + \\
&\quad + \tau(e_1)(a_{11}+a_{12}+a_{22})^* + e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22}) \\
&= \tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})e_1 + e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22}) \qquad (6.9)
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados da equação acima por e_1, obtemos

$$\begin{aligned}
e_1 2\tau(a_{11})e_1 + e_1\tau(a_{12})e_1 &= e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})e_1e_1 + e_1e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})e_1 \\
2e_1\tau(a_{11})e_1 &= e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})e_1e_1 + e_1e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})e_1 \\
2\tau(a_{11}) &= 2e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})e_1 \\
\tau(a_{11}) &= e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})e_1
\end{aligned}$$

Multiplicando por e_1 e por e_2, respectivamente, temos

$$\begin{aligned}
e_1 2\tau(a_{11})e_2 + e_1\tau(a_{12})e_2 &= e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})e_1e_2 + e_1e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})e_2 \\
e_1\tau(a_{12})e_2 &= e_1e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})e_2 \\
e_1\tau(a_{12})e_2 &= e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})e_2
\end{aligned}$$

Multiplicando por e_2 e por e_1, temos

$$\begin{aligned}
e_2 2\tau(a_{11})e_1 + e_2\tau(a_{12})e_1 &= e_2\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})e_1e_1 + e_2e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})e_1 \\
e_2\tau(a_{12})e_1 &= e_2\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})e_1e_1 \\
e_2\tau(a_{12})e_1 &= e_2\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})e_1
\end{aligned}$$

Agora, para qualquer $b_{12} \in \mathscr{R}_{12}$, pela aditividade de $\tau|_{\mathscr{R}_{12}}$ e o que foi provado, temos

$$\begin{aligned}
\tau(a_{11}b_{12}) + \tau(b_{12}a_{22}) &= \tau(a_{11}b_{12} + b_{12}a_{22}) \\
&= \tau((a_{11}+a_{12}+a_{22})b_{12} + b_{12}(a_{11}+a_{12}+a_{22}) \\
&= \tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})b_{12}^* + (a_{11}+a_{12}+a_{22})\tau(b_{12}) + \\
&\quad +\tau(b_{12})(a_{11}^*+a_{12}^*+a_{22}^*) + b_{12}\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})
\end{aligned}$$

Numerando dois termos da equação acima por 1 e 2 faremos algumas observações a respeito dos mesmos:

1. $\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})b_{12}^*$ Pela decomposição de Peirce,

$$\begin{aligned}
\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22}) &= e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})e_1 + e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})e_2 + \\
&\quad +e_2\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})e_1 + e_2\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})e_2
\end{aligned}$$

Multiplicando por b_{12}^* à direita, obtemos

$$\begin{aligned}
\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})b_{12}^* &= e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})b_{12}^* + e_2\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})b_{12}^* \\
&= e_1\tau(a_{12})b_{12}^* + e_2\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})b_{12}^*,
\end{aligned}$$

pois $e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})e_2 = e_1\tau(a_{12})e_2$.

2. $b_{12}\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})$ De forma análoga,

$$\begin{aligned}\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22}) &= e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})e_1+e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})e_2+\\ &\quad +e_2\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})e_1+e_2\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})e_2\end{aligned}$$

Multiplicando por b_{12} à esquerda, obtemos

$$\begin{aligned}b_{12}\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22}) &= b_{12}\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})e_1+b_{12}\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})e_2\\ &= b_{12}\tau(a_{12})e_1+b_{12}\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})e_2\end{aligned}$$

Portanto, substituindo 1 e 2 na equação de origem, obtemos

$$\begin{aligned}\tau(a_{11}b_{12})+\tau(b_{12}a_{22}) &= e_1\tau(a_{12})b_{12}^*+e_2\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})b_{12}^*+(a_{11}+a_{12}+a_{22})\tau(b_{12})+\\ &\quad +\tau(b_{12})(a_{11}^*+a_{12}^*+a_{22}^*)+b_{12}\tau(a_{12})e_1+ \qquad (6.10)\\ &\quad +b_{12}\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})e_2\end{aligned}$$

Além disso, note que

$$\begin{aligned}0 &= \tau(a_{12}b_{12}+b_{12}a_{12})\\ &= \tau(a_{12})b_{12}^*+a_{12}\tau(b_{12})+\tau(b_{12})a_{12}^*+b_{12}\tau(a_{12}). \qquad (6.11)\end{aligned}$$

Substituindo (6.11) em (6.10), obtemos

$$\begin{aligned}\tau(a_{11}b_{12})+\tau(b_{12}a_{22}) &= e_2\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})b_{12}^*+(a_{11}+a_{22})\tau(b_{12})+ \qquad (6.12)\\ &\quad +\tau(b_{12})(a_{11}^*+a_{22}^*)+b_{12}\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})e_2\end{aligned}$$

Por outro lado, temos também

$$\begin{aligned}\tau(a_{11}b_{12})+\tau(b_{12}a_{22}) &= \tau(b_{12}a_{11}+a_{11}b_{12})+\tau(a_{22}b_{12}+b_{12}a_{22})\\ &= \tau(b_{12})a_{11}^*+b_{12}\tau(a_{11})+\tau(a_{11})b_{12}^*+a_{11}\tau(b_{12})+ \qquad (6.13)\\ &\quad +\tau(a_{22})b_{12}^*+a_{22}\tau(b_{12})+\tau(b_{12})a_{22}^*+b_{12}\tau(a_{22}).\end{aligned}$$

Comparando (6.13) com (6.12), obtemos

$$\begin{aligned}e_2\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})b_{12}^*+(a_{11}+a_{22})\tau(b_{12}) &= \tau(b_{12})a_{11}^*+b_{12}\tau(a_{11})+\tau(a_{11})b_{12}^*\\ +\tau(b_{12})(a_{11}^*+a_{22}^*)+b_{12}\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})e_2 &\quad +a_{11}\tau(b_{12})+\tau(a_{22})b_{12}^*+a_{22}\tau(b_{12})\\ &\quad +\tau(b_{12})a_{22}^*+b_{12}\tau(a_{22}).\end{aligned}$$

Aplicando a propriedade distributiva, segue que

$$\begin{aligned}e_2\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})b_{12}^*+a_{11}\tau(b_{12})+a_{22}\tau(b_{12}) &= \tau(b_{12})a_{11}^*+b_{12}\tau(a_{11})+\tau(a_{11})b_{12}^*\\ +\tau(b_{12})a_{11}^*+\tau(b_{12})a_{22}^*+b_{12}\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})e_2 &\quad +a_{11}\tau(b_{12})+\tau(a_{22})b_{12}^*+a_{22}\tau(b_{12})\\ &\quad +\tau(b_{12})a_{22}^*+b_{12}\tau(a_{22}).\end{aligned}$$

Cancelando os termos comuns, temos

$$\begin{aligned} e_2\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})b_{12}^* &= b_{12}\tau(a_{11})+\tau(a_{11})b_{12}^* \\ +b_{12}\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})e_2 &\quad +\tau(a_{22})b_{12}^*+b_{12}\tau(a_{22}). \end{aligned}$$

Cancelando os termos nulos, temos

$$e_2\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})b_{12}^*+b_{12}\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})e_2=\tau(a_{22})b_{12}^*+b_{12}\tau(a_{22}).$$

Colocando em evidência b_{12}^* e b_{12}, obtemos

$$[e_2\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})e_2-\tau(a_{22})]b_{12}^*+b_{12}[e_2\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})e_2-\tau(a_{22})]=0.$$

Usando a Decomposição de Peirce em $[e_2\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})e_2-\tau(a_{22})]b_{12}^*$ e a igualdade acima, chegamos que $[e_2\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})e_2-\tau(a_{22})]b_{12}^*=0$. Donde, pela hipótese 1 do teorema, temos

$$\begin{aligned} e_2\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})e_2-\tau(a_{22}) &= 0 \\ e_2\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})e_2 &= \tau(a_{22}). \end{aligned}$$

Portanto, pela Decomposição de Peirce, temos $\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})=\tau(a_{11})+\tau(a_{12})+\tau(a_{22})$.

Passo 5. *Para quaisquer $a_{11}\in\mathscr{R}_{11}$, $a_{21}\in\mathscr{R}_{21}$ e $a_{22}\in\mathscr{R}_{22}$, temos $\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})=\tau(a_{11})+\tau(a_{21})+\tau(a_{22})$.*

Para qualquer $b_{22}\in\mathscr{R}_{22}$ pelo passo 4, temos

$$\begin{aligned} &\tau(b_{12}a_{21})+\tau(a_{11}b_{12}+b_{12}a_{22})+\tau(a_{21}b_{12}) \\ =\;&\tau(b_{12}a_{21}+a_{11}b_{12}+b_{12}a_{22}+a_{21}b_{12}) \\ =\;&\tau((a_{11}+a_{21}+a_{22})b_{12}+b_{12}(a_{11}+a_{21}+a_{22})) \\ =\;&\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})b_{12}^*+(a_{11}+a_{21}+a_{22})\tau(b_{12}) \\ &+\tau(b_{12})(a_{11}^*+a_{21}^*+a_{22}^*)+b_{12}\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22}) \end{aligned} \tag{6.14}$$

Numerando os termos do lado direito da equação (6.14) por 1, 2, 3 e 4, iremos fazer algumas observações a respeito de cada um. Vejamos:

1. $\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})b_{12}^*$

$$\begin{aligned} \tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})b_{12}^* &= e_1\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})b_{12}^*e_1+e_1\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})b_{12}^*e_2 \\ &\quad +e_2\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})b_{12}^*e_1+e_2\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})b_{12}^*e_2 \\ &= e_1\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})b_{12}^*e_1+e_2\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})b_{12}^*e_1 \\ &= e_1\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})b_{12}^*+e_2\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})b_{12}^* \end{aligned}$$

Lembrando que, pelo passo 2, $e_1\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})e_2 = e_1\tau(a_{21})e_2$, podemos concluir que

$$\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})b_{12}^* = e_1\tau(a_{21})b_{12}^* + e_2\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})b_{12}^*.$$

2. $(a_{11}+a_{21}+a_{22})\tau(b_{12}) = a_{11}\tau(b_{12}) + a_{21}\tau(b_{12}) + a_{22}\tau(b_{12})$.
3. $\tau(b_{12})(a_{11}^*+a_{21}^*+a_{22}^*) = \tau(b_{12})a_{11}^* + \tau(b_{12})a_{21}^* + \tau(b_{12})a_{22}^*$.
4. $b_{12}\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})$.

$$\begin{aligned} b_{12}\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22}) &= e_1b_{12}\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})e_1 + e_1b_{12}\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})e_2 + \\ &\quad + e_2b_{12}\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})e_1 + e_2b_{12}\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})e_2 \\ &= e_1b_{12}\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})e_1 + e_1b_{12}\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})e_2 \\ &= b_{12}\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})e_1 + b_{12}\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})e_2 \end{aligned}$$

Pelo passo 2, temos que $e_2\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})e_1 = e_2\tau(a_{21})e_1$, logo

$$b_{12}\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22}) = b_{12}\tau(a_{21})e_1 + b_{12}\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})e_2.$$

Fazendo as devidas substituições na equação (6.14), obtemos

$$\begin{aligned} \tau(b_{12}a_{21}) + \tau(a_{11}b_{12}+b_{12}a_{22}) + \tau(a_{21}b_{12}) &= e_1\tau(a_{21})b_{12}^* + e_2\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})b_{12}^* + \\ &\quad + a_{11}\tau(b_{12}) + a_{21}\tau(b_{12}) + a_{22}\tau(b_{12}) + \\ &\quad + \tau(b_{12})a_{11}^* + \tau(b_{12})a_{21}^* + \tau(b_{12})a_{22}^* + \\ &\quad + b_{12}\tau(a_{21})e_1 + b_{12}\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})e_2. \end{aligned}$$

Assim, multiplicando por e_2 e e_1, respectivamente, temos

$$\begin{aligned} & e_2\tau(b_{12}a_{21})e_1 + e_2\tau(a_{11}b_{12}+b_{12}a_{22})e_1 + e_2\tau(a_{21}b_{12})e_1 \\ & = e_2e_1\tau(a_{21})b_{12}^*e_1 + e_2e_2\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})b_{12}^*e_1 + \\ & + e_2a_{11}\tau(b_{12})e_1 + e_2a_{21}\tau(b_{12})e_1 + e_2a_{22}\tau(b_{12})e_1 + \\ & + e_2\tau(b_{12})a_{11}^*e_1 + e_2\tau(b_{12})a_{21}^*e_1 + e_2\tau(b_{12})a_{22}^*e_1 + \\ & + e_2b_{12}\tau(a_{21})e_1e_1 + e_2b_{12}\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})e_2e_1. \end{aligned}$$

Cancelando os termos nulos, resta

$$\begin{aligned} e_2\tau(a_{11}b_{12}+b_{12}a_{22})e_1 &= e_2e_2\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})b_{12}^*e_1 + e_2a_{22}\tau(b_{12})e_1 + e_2\tau(b_{12})a_{11}^*e_1 \\ &= e_2\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})b_{12}^* + a_{22}\tau(b_{12})e_1 + e_2\tau(b_{12})a_{11}^*. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Por outro lado, pela aditividade de τ em $\mathscr{R}_{12}$, temos

$$\begin{aligned}
\tau(a_{11}b_{12}+b_{12}a_{22}) &= \tau(a_{11}b_{12})+\tau(b_{12}a_{22}) \\
&= \tau(b_{12}a_{11}+a_{11}b_{12})+\tau(a_{22}b_{12}+b_{12}a_{22}) \\
&= \tau(b_{12})a_{11}^*+b_{12}\tau(a_{11})+\tau(a_{11})b_{12}^*+a_{11}\tau(b_{12})+ \\
&\quad +\tau(a_{22})b_{12}^*+a_{22}\tau(b_{12})+\tau(b_{12})a_{22}^*+b_{12}\tau(a_{22}).
\end{aligned}$$

Multiplicando por e_2 e e_1, respectivamente, o lado esquerdo e o lado direito, temos

$$\begin{aligned}
e_2\tau(a_{11}b_{12}+b_{12}a_{22})e_1 &= e_2\tau(b_{12})a_{11}^*e_1+e_2b_{12}\tau(a_{11})e_1 \\
&\quad +e_2\tau(a_{11})b_{12}^*e_1+e_2a_{11}\tau(b_{12})e_1+ \\
&\quad +e_2\tau(a_{22})b_{12}^*e_1+e_2a_{22}\tau(b_{12})e_1 \\
&\quad +e_2\tau(b_{12})a_{22}^*e_1+e_2b_{12}\tau(a_{22})e_1.
\end{aligned}$$

Cancelando os termos nulos, obtemos

$$\begin{aligned}
e_2\tau(a_{11}b_{12}+b_{12}a_{22})e_1 &= e_2\tau(b_{12})a_{11}^*e_1+e_2\tau(a_{22})b_{12}^*e_1+e_2a_{22}\tau(b_{12})e_1 \\
&= e_2\tau(b_{12})a_{11}^*+e_2\tau(a_{22})b_{12}^*+a_{22}\tau(b_{12})e_1. \qquad (6.16)
\end{aligned}$$

Comparando as equações (6.15) e (6.16), temos

$$\begin{aligned}
e_2\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})b_{12}^* &= e_2\tau(b_{12})a_{11}^*+e_2\tau(a_{22})b_{12}^*+a_{22}\tau(b_{12})e_1. \\
+a_{22}\tau(b_{12})e_1+e_2\tau(b_{12})a_{11}^*
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
e_2\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})b_{12}^* &= e_2\tau(a_{22})b_{12}^* \\
e_2\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})b_{12}^*-e_2\tau(a_{22})b_{12}^* &= 0 \\
(e_2\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})e_2-e_2\tau(a_{22})e_2)e_2b^*e_1 &= 0 \\
e_2\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})e_2-e_2\tau(a_{22})e_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Como $e_2\tau(a_{22})e_2=\tau(a_{22})$, segue que $e_2\tau(a_{11}+a_{21}+a_{22})e_2=\tau(a_{22})$.

Passo 6. *Para quaisquer $a_{11}\in\mathscr{R}_{11}$ e $a_{22}\in\mathscr{R}_{22}$, temos $\tau(a_{11}+a_{22})=\tau(a_{11})+\tau(a_{22})$.*

Pelo Passo (2) temos que $2\tau(a_{11}) = \tau(2a_{11})$. Assim,

$$\begin{aligned}
2\tau(a_{11}) &= \tau(a_{11}+a_{11}) \\
&= \tau((a_{11}+a_{22})e_1 + e_1(a_{11}+a_{22})) \\
&= \tau(a_{11}+a_{22})e_1 + (a_{11}+a_{22})\tau(e_1) + \tau(e_1)(a_{11}^* + a_{22}^*) + e_1\tau(a_{11}+a_{22}) \\
&= \tau(a_{11}+a_{22})e_1 + e_1\tau(a_{11}+a_{22}).
\end{aligned}$$

De forma análoga ao que foi feito no passo (2), obtemos

$e_1\tau(a_{11}+a_{22})e_1 = \tau(a_{11})$, $e_1\tau(a_{11}+a_{22})e_2 = 0$ e $e_2\tau(a_{11}+a_{22})e_1 = 0$.

Prosseguindo,

$$\begin{aligned}
\tau(a_{22}b_{22}+b_{22}a_{22}) &= \tau((a_{11}+a_{22})b_{22} + b_{22}(a_{11}+a_{22})) \\
&= \tau(a_{11}+a_{22})b_{22}^* + (a_{11}+a_{22})\tau(b_{22}) + \\
&\quad +\tau(b_{22})(a_{11}^* + a_{22}^*) + b_{22}\tau(a_{11}+a_{22}) \\
&= \tau(a_{11}+a_{22})b_{22}^* + a_{11}\tau(b_{22}) + a_{22}\tau(b_{22}) + \\
&\quad +\tau(b_{22})a_{11}^* + \tau(b_{22})a_{22}^* + b_{22}\tau(a_{11}+a_{22}) \\
&= \tau(a_{11}+a_{22})b_{22}^* + a_{22}\tau(b_{22}) + \tau(b_{22})a_{22}^* + b_{22}\tau(a_{11}+a_{22}). \qquad (6.17)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\tau(a_{22}b_{22}+b_{22}a_{22}) = \tau(a_{22})b_{22}^* + a_{22}\tau(b_{22}) + \tau(b_{22})a_{22}^* + b_{22}\tau(a_{22}). \qquad (6.18)$$

Comparando (6.17) e (6.18), obtemos

$$\begin{aligned}
\tau(a_{11}+a_{22})b_{22}^* + a_{22}\tau(b_{22}) + \tau(b_{22})a_{22}^* + b_{22}\tau(a_{11}+a_{22}) &= \tau(a_{22})b_{22}^* + a_{22}\tau(b_{22}) + \\
&\quad +\tau(b_{22})a_{22}^* + b_{22}\tau(a_{22}).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\tau(a_{11}+a_{22})b_{22}^* + b_{22}\tau(a_{11}+a_{22}) &= \tau(a_{22})b_{22}^* + b_{22}\tau(a_{22}) \\
\tau(a_{11}+a_{22})b_{22}^* - \tau(a_{22})b_{22}^* + b_{22}\tau(a_{11}+a_{22}) - b_{22}\tau(a_{22}) &= 0 \\
\tau(a_{11}+a_{22})b_{22}^* - \tau(a_{22})b_{22}^* + b_{22}\tau(a_{11}+a_{22}) - b_{22}\tau(a_{22}) &= 0 \\
(\tau(a_{11}+a_{22}) - \tau(a_{22}))b_{22}^* + b_{22}[\tau(a_{11}+a_{22}) - \tau(a_{22})] &= 0
\end{aligned}$$

Multiplicando por e_2 em ambos os lados,

$$(e_2\tau(a_{11}+a_{22})e_2 - e_2\tau(a_{22})e_2)b_{22}^* + b_{22}(e_2\tau(a_{11}+a_{22})e_2 - e_2\tau(a_{22})e_2) = 0.$$

Assim, pela hipótese (2) do teorema, temos $e_2\tau(a_{11}+a_{22})e_2 = e_2\tau(a_{22})e_2 = \tau(a_{22})$.

Passo 7. *Para quaisquer $a_{12} \in \mathscr{R}_{12}$ e $a_{21} \in \mathscr{R}_{21}$, temos $\tau(a_{12}+a_{21}) = \tau(a_{12})+\tau(a_{21})$.*

Com efeito,

$$\begin{aligned}
\tau(a_{12}+a_{21}) &= \tau((a_{12}+a_{21})e_1+e_1(a_{12}+a_{21}))\\
&= \tau(a_{12}+a_{21})e_1+(a_{12}+a_{21})\tau(e_1)+\tau(e_1)(a_{12}+a_{21})+e_1\tau(a_{12}+a_{21})\\
&= \tau(a_{12}+a_{21})e_1+(a_{12}+a_{21})\tau(e_1)+\tau(e_1)(a_{12}+a_{21})+e_1\tau(a_{12}+a_{21}).
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados por e_1, obtemos

$$\begin{aligned}
e_1\tau(a_{12}+a_{21})e_1 &= e_1\tau(a_{12}+a_{21})e_1e_1+e_1e_1\tau(a_{12}+a_{21})e_1\\
e_1\tau(a_{12}+a_{21})e_1 &= e_1\tau(a_{12}+a_{21})e_1+e_1\tau(a_{12}+a_{21})e_1\\
e_1\tau(a_{12}+a_{21})e_1 &= 0.
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados por e_2, obtemos

$$\begin{aligned}
e_2\tau(a_{12}+a_{21})e_2 &= e_2\tau(a_{12}+a_{21})e_1e_2+e_2e_1\tau(a_{12}+a_{21})e_2\\
e_2\tau(a_{12}+a_{21})e_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Além disso, por um lado, temos

$$\begin{aligned}
\tau(a_{21}b_{12}+b_{12}a_{21}) &= \tau((a_{12}+a_{21})b_{12}+b_{12}(a_{12}+a_{21}))\\
&= \tau(a_{12}+a_{21})b_{12}^*+(a_{12}+a_{21})\tau(b_{12})+ \qquad (6.19)\\
&\quad +\tau(b_{12})(a_{12}^*+a_{21}^*)+b_{12}\tau(a_{12}+a_{21})
\end{aligned}$$

E por outro,

$$\tau(a_{21}b_{12}+b_{12}a_{21}) = \tau(a_{21})b_{12}^*+a_{21}\tau(b_{12})+\tau(b_{12})a_{21}^*+b_{12}\tau(a_{21}) \qquad (6.20)$$

Comparando as duas equações (6.19) e (6.20), temos

$$\begin{aligned}
\tau(a_{12}+a_{21})b_{12}^*+(a_{12}+a_{21})\tau(b_{12})+ &= \tau(a_{21})b_{12}^*+a_{21}\tau(b_{12})+\\
+\tau(b_{12})(a_{12}^*+a_{21}^*)+b_{12}\tau(a_{12}+a_{21}) &\quad\ +\tau(b_{12})a_{21}^*+b_{12}\tau(a_{21})\\
\tau(a_{12}+a_{21})b_{12}^*+a_{12}\tau(b_{12})+a_{21}\tau(b_{12})+ &= \tau(a_{21})b_{12}^*+a_{21}\tau(b_{12})+\\
+\tau(b_{12})a_{12}^*+\tau(b_{12})a_{21}^*+b_{12}\tau(a_{12}+a_{21}) &\quad\ +\tau(b_{12})a_{21}^*+b_{12}\tau(a_{21})\\
\tau(a_{12}+a_{21})b_{12}^*+a_{12}\tau(b_{12})+\tau(b_{12})a_{12}^*+b_{12}\tau(a_{12}+a_{21}) &= \tau(a_{21})b_{12}^*+b_{12}\tau(a_{21}).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\tau(a_{12}+a_{21})b_{12}^*-\tau(a_{21})b_{12}^*+a_{12}\tau(b_{12})+\tau(b_{12})a_{12}^*+b_{12}\tau(a_{12}+a_{21})-b_{12}\tau(a_{21}) = 0 \qquad (6.21)$$

Note que,

$$\begin{aligned}
0 &= \tau(a_{12}b_{12}+b_{12}a_{12}) \\
0 &= \tau(a_{12})b_{12}^*+a_{12}\tau(b_{12})+\tau(b_{12})a_{12}^*+b_{12}\tau(a_{12}) \\
a_{12}\tau(b_{12})+\tau(b_{12})a_{12}^* &= -\tau(a_{12})b_{12}^*-b_{12}\tau(a_{12}).
\end{aligned}$$

Substituindo em (6.21), obtemos

$$\begin{aligned}
\tau(a_{12}+a_{21})b_{12}^*-\tau(a_{21})b_{12}^*-\tau(a_{12})b_{12}^*-b_{12}\tau(a_{12})+b_{12}\tau(a_{12}+a_{21})-b_{12}\tau(a_{21}) &= 0 \\
(\tau(a_{12}+a_{21})-\tau(a_{12})-\tau(a_{21}))b_{12}^*+b_{12}(\tau(a_{12}+a_{21})-\tau(a_{12})-\tau(a_{21})) &= 0.
\end{aligned}$$

Multiplicando por e_1 em ambos os lados, temos

$$\begin{aligned}
e_1[\tau(a_{12}+a_{21})-\tau(a_{12})-\tau(a_{21})]b_{12}^*e_1+e_1b_{12}[\tau(a_{12}+a_{21})-\tau(a_{12})-\tau(a_{21})]e_1 &= 0 \\
e_1(\tau(a_{12}+a_{21})-\tau(a_{12})-\tau(a_{21}))e_2b^*e_1+e_1be_2(\tau(a_{12}+a_{21})-\tau(a_{12})-\tau(a_{21}))e_1 &= 0.
\end{aligned}$$

Pela hipótese (3) do teorema, temos

$e_1[\tau(a_{12}+a_{21})-\tau(a_{12})-\tau(a_{21})]e_2=0$ e $e_2[\tau(a_{12}+a_{21})-\tau(a_{12})-\tau(a_{21})]e_1=0.$

Portanto,

$e_1\tau(a_{12}+a_{21})e_2=e_1\tau(a_{12})e_2+e_1\tau(a_{21})e_2$

e

$e_2\tau(a_{12}+a_{21})e_1=e_2\tau(a_{12})e_1+e_2\tau(a_{21})e_1=0$

Passo 8. *Para quaisquer $a_{11}\in\mathscr{R}_{11}$, $a_{12}\in\mathscr{R}_{12}$ e $a_{21}\in\mathscr{R}_{21}$, temos $\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21})=\tau(a_{11})+\tau(a_{12})+\tau(a_{21})$.*

Primeiramente, relembre que já foi provado nos passos 4 e 6 que
$\tau(a_{11}+a_{12}+a_{22})=\tau(a_{11})+\tau(a_{12})+\tau(a_{22})$ e $\tau(a_{11}+a_{22})=\tau(a_{11})+\tau(a_{22})$.
Desse modo, temos

$$\begin{aligned}
\tau(a_{11}b_{12})+\tau(b_{12}a_{21}+a_{21}b_{12}) &= \tau(a_{11}b_{12})+\tau(b_{12}a_{21})+\tau(a_{21}b_{12}) \\
&= \tau(a_{11}b_{12}+b_{12}a_{21}+a_{21}b_{12}) \\
&= \tau((a_{11}+a_{12}+a_{21})b_{12}+b_{12}(a_{11}+a_{12}+a_{21})) \\
&= \tau(a_{11}+a_{12}+a_{21})b_{12}^*+(a_{11}+a_{12}+a_{21})\tau(b_{12})+ \\
&\quad +\tau(b_{12})(a_{11}^*+a_{12}^*+a_{21}^*)+b_{12}\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21}) \qquad (6.22)
\end{aligned}$$

Além disso, pela propriedade de τ e pelas equações de (5.33), temos

$$\begin{aligned}
\tau(a_{11}b_{12})+\tau(b_{12}a_{21}+a_{21}b_{12}) &= \tau(a_{11}b_{12}+b_{12}a_{11})+\tau(b_{12}a_{21}+a_{21}b_{12})\\
&= \tau(a_{11})b_{12}^*+a_{11}\tau(b_{12})+\tau(b_{12})a_{11}^*+b_{12}\tau(a_{11})+\\
&\quad +\tau(b_{12})a_{21}^*+b_{12}\tau(a_{21})+\tau(a_{21})b_{12}^*+a_{21}\tau(b_{12})\\
&= a_{11}\tau(b_{12})+\tau(b_{12})a_{11}^*+\tau(b_{12})a_{21}^*+\\
&\quad +b_{12}\tau(a_{21})+\tau(a_{21})b_{12}^*+a_{21}\tau(b_{12}) \qquad (6.23)
\end{aligned}$$

Também sabemos que

$$\begin{aligned}
0 &= \tau(a_{12}b_{12}+b_{12}a_{12})\\
0 &= \tau(a_{12})b_{12}^*+a_{12}\tau(b_{12})+\tau(b_{12})a_{12}^*+b_{12}\tau(a_{12})\\
\tau(a_{12})b_{12}^*+a_{12}\tau(b_{12}) &= -\tau(b_{12})a_{12}^*-b_{12}\tau(a_{12}) \qquad (6.24)
\end{aligned}$$

Comparando (6.22) e (6.23), obtemos

$$\begin{aligned}
\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21})b_{12}^*+(a_{11}+a_{12}+a_{21})\tau(b_{12})+ &= a_{11}\tau(b_{12})+\tau(b_{12})a_{11}^*+\tau(b_{12})a_{21}^*+\\
+\tau(b_{12})(a_{11}^*+a_{12}^*+a_{21}^*)+b_{12}\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21}) &\quad +b_{12}\tau(a_{21})+\tau(a_{21})b_{12}^*+a_{21}\tau(b_{12})
\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21})b_{12}^*+a_{12}\tau(b_{12})+\tau(b_{12})a_{12}^*+ &= 0\\
+b_{12}\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21})-b_{12}\tau(a_{21})-\tau(a_{21})b_{12}^* &
\end{aligned}$$

Substituindo a equação (6.24), temos

$$\begin{aligned}
\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21})b_{12}^*-\tau(a_{12})b_{12}^*-b_{12}\tau(a_{12})+ &= 0\\
+b_{12}\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21})-b_{12}\tau(a_{21})-\tau(a_{21})b_{12}^* &\\
(\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21})-\tau(a_{12})-\tau(a_{21}))b_{12}^*+ &= 0 \qquad (6.25)\\
+b_{12}(\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21})-\tau(a_{12})-\tau(a_{21})) &
\end{aligned}$$

Multiplicando por e_1 ambos os lados, temos

$$\begin{aligned}
e_1[\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21})-\tau(a_{12})-\tau(a_{21})]e_2b^*e_1+ &= 0\\
+e_1be_2[\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21})-\tau(a_{12})-\tau(a_{21})]e_1. &
\end{aligned}$$

Pela hipótese (3) do teorema, segue

$$e_1[\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21})-\tau(a_{12})-\tau(a_{21})]e_2=0$$

e

$e_2[\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21})-\tau(a_{12})-\tau(a_{21})]e_1=0.$

Multiplicando (6.25) por e_2 do lado esquerdo, temos

$$\begin{aligned}
e_2[\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21})-\tau(a_{12})-\tau(a_{21})]b_{12}^*+ &= 0\\
+e_2b_{12}[\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21})-\tau(a_{12})-\tau(a_{21})] &\\
e_2[\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21})-\tau(a_{12})-\tau(a_{21})]b_{12}^* &= 0\\
e_2[\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21})-\tau(a_{12})-\tau(a_{21})]e_2b^*e_1 &= 0\\
e_2[\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21})-\tau(a_{12})-\tau(a_{21})]e_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, acabamos de obter que $e_1[\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21})-\tau(a_{12})-\tau(a_{21})]e_2=0$, $e_2[\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21})-\tau(a_{12})-\tau(a_{21})]e_1=0$ e $e_2[\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21})-\tau(a_{12})-\tau(a_{21})]e_2=0$, ou seja, $e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21})e_2=e_1[\tau(a_{12})+\tau(a_{21})]e_2$, $e_2\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21})e_1=e_2[\tau(a_{12})+\tau(a_{21})]e_1$ e $e_2\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21})e_2=0$. Agora, note que para qualquer $b_{21}\in\mathscr{R}_{21}$ vale que $(a_{11}+a_{12}+a_{21})b_{21}+b_{21}(a_{11}+a_{12}+a_{21})=a_{12}b_{21}+b_{21}a_{11}+b_{21}a_{12}$ e relembre que já provamos no passo 5 que $\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21})=\tau(a_{11})+\tau(a_{12})+\tau(a_{21})$, consequentemente,

$$\tau(a_{12}b_{21}+b_{21}a_{11}+b_{21}a_{12})=\tau(a_{12}b_{21})+\tau(b_{21}a_{11})+\tau(b_{21}a_{12})$$

e

$$\begin{aligned}
\tau(a_{12}b_{21}+b_{21}a_{11}+b_{21}a_{12}) &= \tau((a_{11}+a_{12}+a_{21})b_{21}+b_{21}(a_{11}+a_{12}+a_{21}))\\
&= \tau(a_{11}+a_{12}+a_{21})b_{21}^*+(a_{11}+a_{12}+a_{21})\tau(b_{21})+\\
&\quad +\tau(b_{21})(a_{11}^*+a_{12}^*+a_{21}^*)+b_{21}\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21})\\
&= \tau(a_{11}+a_{12}+a_{21})b_{21}^*+a_{11}\tau(b_{21})+a_{12}\tau(b_{21})+a_{21}\tau(b_{21})+\\
&\quad +\tau(b_{21})a_{11}^*+\tau(b_{21})a_{12}^*+\tau(b_{21})a_{21}^*+b_{21}\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21})
\end{aligned}$$

Multiplicando o lado esquerdo da equação acima por e_1 e o lado direito por e_2, temos

$$\begin{aligned}
e_1\tau(a_{12}b_{21})e_2 + e_1\tau(b_{21}a_{11})e_2 + &= e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21})b_{21}^*e_2 + \\
+e_1\tau(b_{21}a_{12})e_2 \quad & \quad +e_1a_{11}\tau(b_{21})e_2 + e_1a_{12}\tau(b_{21})e_2 + \\
& \quad +e_1a_{21}\tau(b_{21})e_2 + e_1\tau(b_{21})a_{11}^*e_2 + \\
& \quad +e_1\tau(b_{21})a_{12}^*e_2 + e_1\tau(b_{21})a_{21}^*e_2 + \\
& \quad +e_1b_{21}\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21})e_2 \\
e_1\tau(b_{21}a_{11})e_2 &= e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21})b_{21}^*e_2 + e_1a_{11}\tau(b_{21})e_2 \\
e_1\tau(b_{21}a_{11})e_2 &= e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21})b_{21}^* + a_{11}\tau(b_{21})e_2 \qquad (6.26)
\end{aligned}$$

Agora observe que

$$\begin{aligned}
\tau(b_{21}a_{11}) &= \tau(a_{11}b_{21}+b_{21}a_{11}) \\
\tau(b_{21}a_{11}) &= \tau(a_{11})b_{21}^* + a_{11}\tau(b_{21}) + \tau(b_{21})a_{11}^* + b_{21}\tau(a_{11}) \\
e_1\tau(b_{21}a_{11})e_2 &= e_1\tau(a_{11})b_{21}^*e_2 + e_1a_{11}\tau(b_{21})e_2 + e_1\tau(b_{21})a_{11}^*e_2 + e_1b_{21}\tau(a_{11})e_2 \\
e_1\tau(b_{21}a_{11})e_2 &= e_1\tau(a_{11})b_{21}^*e_2 + e_1a_{11}\tau(b_{21})e_2 \\
e_1\tau(b_{21}a_{11})e_2 &= e_1\tau(a_{11})b_{21}^* + a_{11}\tau(b_{21})e_2 \\
a_{11}\tau(b_{21})e_2 &= e_1\tau(b_{21}a_{11})e_2 - \tau(a_{11})b_{21}^*.
\end{aligned}$$

Substituindo a última igualdade acima em (6.26), resulta em

$$\begin{aligned}
e_1\tau(b_{21}a_{11})e_2 &= e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21})b_{21}^* + \\
& \quad +e_1\tau(b_{21}a_{11})e_2 - \tau(a_{11})b_{21}^* \\
e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21})b_{21}^* - \tau(a_{11})b_{21}^* &= 0 \\
(e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21})e_1 - \tau(a_{11}))b_{21}^* &= 0 \\
(e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21})e_1 - \tau(a_{11}))e_1b^*e_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Logo, pela hipótese (1), podemos concluir que $e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21})e_1 = \tau(a_{11})$. Pela Decomposição de Peirce e juntando tudo que foi mostrado segue que

$$\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21}) = \tau(a_{11}) + \tau(a_{12}) + \tau(a_{21}).$$

Passo 9. *Para quaisquer $a_{22} \in \mathscr{R}_{22}$, $a_{12} \in \mathscr{R}_{12}$ e $a_{21} \in \mathscr{R}_{21}$, temos $\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21}) = \tau(a_{22}) + \tau(a_{12}) + \tau(a_{21})$.*

A prova deste passo é similar a do passo 8 anterior.

Passo 10. *$\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22}) = \tau(a_{11})+\tau(a_{12})+\tau(a_{21})+\tau(a_{22})$, para todo $i, j \in ij$.*

Seja $b_{22} \in \mathscr{R}_{22}$. Pela igualdade $2\tau(a_{11})+\tau(a_{12})+\tau(a_{21}) = \tau(2a_{11}+a_{12}+a_{21})$, temos

$$\begin{aligned}
2\tau(a_{11})+\tau(a_{12}) &= \tau(2a_{11}+a_{12}+a_{21}) \\
+\tau(a_{21}) & \\
&= \tau((a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})e_1+e_1(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})) \\
&= \tau(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})e_1+(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})\tau(e_1) \\
&\quad +\tau(e_1)(a_{11}^*+a_{12}^*+a_{21}^*+a_{22}^*)+e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22}) \\
&= \tau(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})e_1+e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22}) \qquad (6.27)
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados da equação (6.27) por e_1, temos

$$\begin{aligned}
e_12\tau(a_{11})e_1+e_1\tau(a_{12})e_1+e_1\tau(a_{21})e_1 &= e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})e_1e_1 \\
&\quad +e_1e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})e_1 \\
e_12\tau(a_{11})e_1 &= e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})e_1e_1 \\
&\quad +e_1e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})e_1 \\
2\tau(a_{11}) &= 2e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})e_1 \\
\tau(a_{11}) &= e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})e_1
\end{aligned}$$

Agora, multiplicando a equação (6.27) à esquerda por e_1 e à direita por e_2, obtemos

$$\begin{aligned}
e_12\tau(a_{11})e_2+e_1\tau(a_{12})e_2+e_1\tau(a_{21})e_2 &= e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})e_1e_2+ \\
&\quad +e_1e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})e_2 \\
e_1\tau(a_{12})e_2+e_1\tau(a_{21})e_2 &= e_1e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})e_2 \\
e_1\tau(a_{12})e_2+e_1\tau(a_{21})e_2 &= e_1e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})e_2 \\
e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})e_2 &= e_1[\tau(a_{12})+\tau(a_{21})]e_2.
\end{aligned}$$

Multiplicando a equação (6.27) à esquerda por e_2 e à direita por e_1, obtemos

$$\begin{aligned}
e_22\tau(a_{11})e_1+e_2\tau(a_{12})e_1+e_2\tau(a_{21})e_1 &= e_2\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})e_1e_1 \\
&\quad +e_2e_1\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})e_1 \\
e_2\tau(a_{12})e_1+e_2\tau(a_{21})e_1 &= e_2\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})e_1e_1 \\
e_2\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})e_1 &= e_2[\tau(a_{12})+\tau(a_{21})]e_1.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\tau(a_{12}b_{22})+\tau(b_{22}a_{21}) &= \tau(a_{12}b_{22}+b_{22}a_{21}+a_{22}b_{22}+b_{22}a_{22}) \\
+\tau(a_{22}b_{22}+b_{22}a_{22}) & \\
&= \tau((a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})b_{22}+b_{22}(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22}) \\
&= \tau(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})b_{22}^{*}+(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})\tau(b_{22}) \\
&\quad +\tau(b_{22})(a_{11}^{*}+a_{12}^{*}+a_{21}^{*}+a_{22}^{*})+b_{22}\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22}) \\
&= \tau(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})b_{22}^{*}+a_{11}\tau(b_{22})+a_{12}\tau(b_{22})+ \\
&\quad +a_{21}\tau(b_{22})+a_{22}\tau(b_{22})+\tau(b_{22})a_{11}^{*}+\tau(b_{22})a_{12}^{*}+ \\
&\quad +\tau(b_{22})a_{21}^{*}+\tau(b_{22})a_{22}^{*}+b_{22}\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22}).
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade acima por e_2, temos

$$\begin{aligned}
e_2\tau(a_{22}b_{22}+b_{22}a_{22})e_2 &= e_2\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})b_{22}^{*}e_2+e_2a_{22}\tau(b_{22})e_2+ \\
&\quad +e_2\tau(b_{22})a_{22}^{*}e_2+e_2b_{22}\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})e_2
\end{aligned}$$

Desenvolvendo $\tau(a_{22}b_{22}+b_{22}a_{22})$, obtemos

$$\begin{aligned}
e_2\tau(a_{22})b_{22}^{*}e_2+e_2b_{22}\tau(a_{22})e_2 &= e_2\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})b_{22}^{*}e_2+ \\
&\quad +e_2b_{22}\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})e_2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
[e_2\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})e_2-e_2\tau(a_{22})e_2]b_{22}^{*} &= 0. \\
+b_{22}[e_2\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})e_2-e_2\tau(a_{22})e_2] &
\end{aligned}$$

Pela hipótese (2) do teorema, temos

$$\begin{aligned}
e_2\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})e_2-e_2\tau(a_{22})e_2 &= 0 \\
e_2\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})e_2 &= e_2\tau(a_{22})e_2 \\
e_2\tau(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})e_2 &= \tau(a_{22}).
\end{aligned}$$

Afirmação 15. *τ é aditiva em $\mathscr{R}$.*

De fato, para quaisquer $a=a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22}$ e $b=b_{11}+b_{12}+b_{21}+b_{22}$, pela Afirmação 1 e pela aditividade de $\tau|_{\mathscr{R}_{ij}}$ com $1\le i,j\le 2$, é fácil checar que $\tau(a+b)=\tau(a)+\tau(b)$. Assim τ é aditiva em $\mathscr{R}$. Agora, pela mesma abordagem usada no Teorema (5), mostra-se que τ é uma *-Derivação de Jordan. $\square$

7 CONCLUSÃO

O objetivo principal deste trabalho foi demonstrar resultados importantes sobre *-derivações de Jordan, os quais foram alcançados no capítulo 5 e 6. Além disso, tais resultados servirão de base na demonstração dos seguintes corolários.

Corolário 7.0.1. *Seja $\mathscr{R}$ um *-anel primo livre de 2-torção com um idempotente não trivial simétrico. Então uma função aditiva $\delta : \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ satisfaz $\delta(ab+ba) = \delta(a)b^* + a\delta(b) + \delta(b)a^* + b\delta(a)$ sempre que $ab = 0$, para $a, b \in \mathscr{R}$ se, e somente se, existir $r \in \mathscr{Q}_{ms}(\mathscr{R})$ tal que $\delta(a) = ar - ra^*$, para todo $a \in \mathscr{R}$.*

Demonstração. Assuma que $e_1 \in \mathscr{R}$ seja um não trivial idempotente simétrico e seja $a \in \mathscr{R}$. É obvio que se $a\mathscr{R}e_1 = 0$, então $a = 0$. Seja $e_2 = 1 - e_1$. Se $a\mathscr{R}e_2 = 0$, então $axaye_2 = 0$, para quaisquer $x, y \in \mathscr{R}$ e também $xay \in \mathscr{R}$. Note que existe algum $y \in \mathscr{R}$ tal que $0 \neq aye_2 = ay - aye_1 \in \mathscr{R}$. Segue das hipóteses sobre $\mathscr{R}$ que $a = 0$. Portanto, a hipótese (1) do Teorema (5) é satisfeita.

Prosseguindo, assuma que, para qualquer $a \in \mathscr{R}$, $e_2ae_2x^*e_2 + e_2xe_2ae_2 = 0$ para qualquer $x \in \mathscr{R}$. Então, para quaisquer $x, y \in \mathscr{R}$, temos

$$
\begin{aligned}
(e_2xe_2ye_2)e_2ae_2 &= -e_2ae_2(e_2xe_2ye_2)^* \\
&= -e_2ae_2e_2y^*e_2x^*e_2 \\
&= e_2ye_2ae_2x^*e_2 \\
&= -e_2ye_2xe_2ae_2,
\end{aligned}
$$

isto é, $(e_2xe_2ye_2 + e_2ye_2xe_2)e_2ae_2 = 0$. Assim, $\mathscr{R}$ é primo, e é fácil verificar que $e_2\mathscr{R}e_2$ também o é. Por [12, Teorema (6.4.1)], $e_2\mathscr{R}e_2$ e $\mathscr{Q}_{ml}(e_2\mathscr{R}e_2)$ satisfazem a mesma identidade polinomial generalizada. Assim, temos que

$$(x'y' + y'x')e_2ae_2 = 0,$$

para quaisquer $x', y' \in \mathscr{Q}_{ml}(e_2\mathscr{R}e_2)$. Note que $\mathscr{Q}_{ml}(e_2\mathscr{R}e_2)$ tem elemento identidade, denotada por 1. Tomando $x' = y' = 1$ na equação anterior e relembrando que $\mathscr{R}$ é livre de 2-torção, chegamos em $e_2ae_2 = 0$. Assim, a hipótese (2) do teorema (5) também é satisfeita.

Pelos Teoremas (5) e (3.0.2), existe algum $r \in \mathscr{Q}_{ms}(\mathscr{R})$ tal que $\delta(a) = ar - ra^*$, para qualquer $a \in \mathscr{R}$, e assim o corolário está provado. $\square$

Corolário 7.0.2. *Seja $\mathscr{R}$ um *-anel primo livre de 2-torção com um idempotente não trivial simétrico. Então uma função $\delta : \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ é uma *-derivação de Jordan multiplicativa se, e somente se, existir $r \in \mathscr{Q}_{ms}(\mathscr{R})$ tal que $\delta(a) = ar - ra^*$, para todo $a \in \mathscr{R}$.*

Demonstração. Pelos Teorema (6.0.1) e o Teorema (3.0.2), precisamos somente verificar que o *-anel primo satisfaz todas as hipóteses de (6.0.1).

Com efeito, escreva $e_1 = e$ e $e_2 = 1 - e_1$. Pela prova do Corolário (7.0.1), as hipóteses (1) e (2) são satisfeitas.

Agora, para completar a prova iremos mostrar que a hipótese (3) é satisfeita. Assuma que, para $a \in \mathscr{R}$, $e_1ae_2x^*e_1 + e_1xe_2ae_1 = 0$ para qualquer $x \in \mathscr{R}$. Então, para quaisquer $x, y \in \mathscr{R}$, temos

$$\begin{aligned} e_1ae_2xe_1ye_1 &= e_1ae_2(e_1y^*e_1x^*e_2)e_1 \\ &= -e_1y^*e_1x^*e_2ae_1 \\ &= -e_1y^*e_1(e_1x^*e_2ae_1) \\ &= e_1y^*e_1ae_2xe_1 \end{aligned}$$

isto é,

$$(e_1ae_2xe_1)e_1ye_1 = e_1y^*e_1(e_1ae_2xe_1)$$

para quaisquer x e $y \in \mathscr{R}$. Fixe x. Por conveniência, escreva $b_{11} = e_1ae_2xe_1$. Então $b_{11}e_1ye_1 = e_1y^*e_1b_{11}$, para qualquer $y \in \mathscr{R}$. Tomando qualquer $y \in \mathscr{R}$, temos

$$\begin{aligned} e_1ye_1ze_1b_{11} &= (e_1z^*e_1y^*e_1)^*b_{11} \\ &= b_{11}e_1z^*e_1y^*e_1 \\ &= e_1ze_1b_{11}e_1y^*e_1 \\ &= e_1ze_1ye_1b_{11} \end{aligned}$$

isto é, $(e_1ye_1ze_1 - e_1ze_1ye_1)b_{11} = 0$, pra quaisquer $y, z \in \mathscr{R}$. Assim, $e_1\mathscr{R}e_1$ não é comutativo, ou seja, existem $y_0, z_0 \in \mathscr{R}$ tais que, $e_1y_0e_1z_0e_1 - e_1Z_0e_1Y_0e_1 \neq 0$. Portanto, para qualquer $w \in \mathscr{R}$, temos

$$(e_1y_0e_1z_0e_1 - e_1Z_0e_1Y_0e_1)e_1we_1b_{11} = (e_1y_0e_1z_0e_1 - e_1Z_0e_1Y_0e_1)b_{11}e_1w^*e_1 = 0$$

logo, $b_{11} = 0$. Isto é, $e_1xe_2ae_1 = 0$ para todo $x \in \mathscr{R}$, o que implica que $e_2ae_1 = 0$. Consequentemente, a hipótese (3) é satisfeita para *-anéis primos. $\square$

REFERÊNCIAS

AMITSUR, S. Identities in rings with involutions. **Israel Journal of Mathematics**, Israel, v. 7, n. 1, p. 63–68, 1969.

BEIDAR, K. I.; BREŠAR, M.; CHEBOTAR, M. A.; 3RD, W. M. On herstein's lie map conjectures, ii. **Journal of Algebra**, United States, v. 238, n. 1, p. 239–264, 2001.

BEIDAR, K. I.; MARTINDALE, W. S.; MIKHALEV, A. V. **Rings with generalized identities**. [*S. l.*]: CRC Press, 1995.

BREŠAR, M.; CHEBOTAR, M. A.; MARTINDALE, W. S. **Functional identities**. [*S. l.*]: Springer Science & Business Media, 2007.

BREŠAR, M.; VUKMAN, J. On some additive mappings in rings with involution. **Aequationes Mathematicae**, Switzerland, v. 38, n. 2-3, p. 178–185, 1989.

BREŠAR, M.; ZALAR, B. On the structure of jordan*-derivations. **Colloquium Mathematicum**, Poland, v. 63, n. 3, p. 163–171, 1992.

CHUANG, C.-L.; FOŠNER, A.; LEE, T.-K. Jordan τ-derivations of locally matrix rings. **Algebras and Representation Theory**, Netherlands, v. 16, n. 3, p. 755–763, 2013.

FOŠNER, A.; LEE, T.-K. Jordan*-derivations of finite-dimensional semiprime algebras. **Canadian Mathematical Bulletin**, Canada, v. 57, n. 1, p. 51–60, 2014.

HERSTEIN, I. Jordan derivations of prime rings. **Proceedings of the American Mathematical Society**, United States, v. 8, n. 6, p. 1104–1110, 1957.

HERSTEIN, I. N. **Topics in ring theory**. [*S. l.*]: University of Chicago press, 1969.

HERSTEIN, I. N.; HERSTEIN, I. N. **Rings with involution**. [*S. l.*]: University of Chicago Press Chicago, 1976. v. 10.

JACOBSON, N. **Lecture Notes in Mathematics**. [*S. l.*]: Springer-Verlag, 1975.

LEE, T.-K. Generalized skew derivations characterized by acting on zero products. **Pacific journal of mathematics**, United States, v. 216, n. 2, p. 293–301, 2004.

LEE, T.-K.; WONG, T.-L.; ZHOU, Y. The structure of jordan?-derivations of prime rings. **Linear and Multilinear Algebra**, United Kingdom, v. 63, n. 2, p. 411–422, 2015.

LEE, T.-K.; WONG, T.-L.; ZHOU, Y. The structure of jordan?-derivations of prime rings. **Linear and Multilinear Algebra**, United Kingdom, v. 63, n. 2, p. 411–422, 2015.

QI, X.; ZHANG, F. Multiplicative jordan*-derivations on rings with involution. **Linear and Multilinear Algebra**, United Kingdom, v. 64, n. 6, p. 1145–1162, 2016.

ŠEMRL, P. On quadratic functionals. **Bulletin of the Australian Mathematical Society**, United Kingdom, v. 37, n. 1, p. 27–28, 1988.

ŠEMRL, P. Quadratic functionals and jordan*-derivations. **Studia Mathematica**, Poland, v. 97, n. 3, p. 157–165, 1990.

ŠEMRL, P. Quadratic and quasi-quadratic functionals. **Proceedings of the American Mathematical Society**, United States, v. 119, n. 4, p. 1105–1113, 1993.

VUKMAN, J. Some functional equations in banach algebras and an application. **Proceedings of the American Mathematical Society**, United States, v. 100, n. 1, p. 133–136, 1987.