



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ELZON CÉZAR BEZERRA JÚNIOR

ESTIMATIVAS DE REGULARIDADE EM PROBLEMAS NÃO  
LINEARES DEGENERADOS

FORTALEZA

2021

ELZON CÉZAR BEZERRA JÚNIOR

ESTIMATIVAS DE REGULARIDADE EM PROBLEMAS NÃO LINEARES  
DEGENERADOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Gleydson Chaves Ricarte

Coorientador: Prof. Dr. João Vitor da Silva.

FORTALEZA

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca Universitária  
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- B469e Bezerra Júnior, Elzon César.  
Estimativas de regularidade em problemas não lineares degenerados / Elzon César Bezerra Júnior. –  
2021.  
82 f. : il.
- Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-graduação em  
Engenharia Civil, Fortaleza, 2021.  
Orientação: Prof. Dr. Gleydson Chaves Ricarte.  
Coorientação: Prof. Dr. João Vítor da Silva .
1. Equações Diferenciais Parciais . 2. Análise de EDP's não lineares. 3. Equações Duplamente  
Degeneradas. I. Título.

CDD 600

---

ELZON CÉZAR BEZERRA JÚNIOR

ESTIMATIVAS DE REGULARIDADE EM PROBLEMAS NÃO LINEARES  
DEGENERADOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Análise.

Aprovada em: 20/08/2021.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Gleydson Chaves Ricarte (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. João Vitor da Silva  
Universidade Estadual de Campinas (Unicamp)

---

Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Giane Casari Rampasso  
Universidade Estadual de Campinas (Unicamp)

---

Prof. Dr. Rafayel Teymurazyan  
Universidade de Coimbra.

Dedico este trabalho aos meus pais, César e Cléa e ao meu irmão Marcos Paulo.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente a minha família. Meus pais, Cléa e César e ao meu irmão Marcos Paulo pelo amor e dedicação perante todo a minha caminhada como ser humano e profissional.

Aos meus poucos e preciosos amigos, a Victor Calabria pela parceria tão longeva e auspiciosa fisicamente ou em pensamento no trabalho e na vida, ao estimado André Couto pela amizade também de longa data, onde posso desfrutar de forma genuína o sentimento de desfrutar a vida por outras lentes que não as da matemática. Não haveria de olvidar Ricardo Bessa, pelo acolhimento, apoio e claro pela sua amizade que me é preciosa. Por último, mas não menos importante ao amigo Leonel Brum, que acompanhou uma porcentagem considerável da minha trajetória pessoal e profissional e sempre me impulsionou a acreditar no meu potencial.

Ao meu companheiro Sidney Coutinho, pela compreensão, zelo e amor por mim e pela nossa vida em comum, tornando assim esta jornada menos intensa e cheia de significado.

Cabe aqui todo o meu agradecimento também aos membros da minha banca, em especial aos meus orientadores Gleydson Chaves Ricarte e João Vitor da Silva, que de um modo leve e comprometido me fizeram reconhecer a minha capacidade, levando assim esse período tão laborioso com grande carinho para os desafios ulteriores, outros professores e colegas foram importantes e se fazem necessários neste texto, quanto aos professores destaco Antonio Caminha, Darlan Girão (*in memoriam*), que para mim foram professores inesquecíveis e guardo com muito zelo as suas lições.

Quanto aos colegas cito Victor Gomes e Silvio Farias pelo companheirismo e apoio ao longo dos desafios que passamos juntos, a Mateus Gondim pelas conversas tão profícuas sobre a natureza das coisas olhando a vida e a matemática de uma perspectiva mais compassiva, a Elisafã Braga e José Erivamberto por conversas e companheirismo gozado no depto de Matemática, sobre o nosso métier e sobre a vida. A Andréa Dantas e Jessyca Soares, pela atenção e zelo no intento de melhor amparar nas demandas do programa e claro a todos os funcionários que compõe à UFC. Por fim, o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal Superior–Brasil(CAPES)–Código de Financiamento 001.

“ Sinto que a morte me tem constantemente em suas garras. Não importa o que eu faça, ela está presente em toda parte.” (MONTAIGNE)

## RESUMO

Na primeira parte deste trabalho obtemos estimativas de regularidade ótima e melhorada para uma classe de equações parabólicas não homogêneas com degenerescência dupla, que estendem as generalizações naturais da equação do calor, a saber, o  $p$ -Laplaciano e a equação dos meios porosos. A parte final é devotada ao estudo não-variacional de modelos elípticos não lineares via um método de perturbação singular.

**Palavras-chave:** escalonamento intrínseco; análise tangencial; problema de perturbação singular.

## ABSTRACT

In the first part of this work we obtain an optimal and improved regularity score for a class of inhomogeneous parabolic equations with double degeneracy, which extend the natural generalizations of the heat equation, the saber, the  $p$ -laplacian and the porous media equation. The final part is devoted to the non-variational study of nonlinear elliptical models via the singular perturbation method.

**Keywords:** intrinsic scaling. tangential analysis. perturbation singular problem.

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\Omega$	é um conjunto aberto, limitado e conexo do $\mathbb{R}^N$ ;
$\Omega' \Subset \Omega$	significa que $\Omega$ contém $\overline{\Omega'}$ e o último se trata de um conjunto compacto;
$\text{Sym}(N)$	é o conjunto das matrizes simétricas de ordem $N$ com entradas reais;
$\varepsilon \ll 1$	significa que $\varepsilon$ é suficientemente pequeno ( $\varepsilon \gg 1$ é suficientemente grande);
$ S $	representa a medida $N$ -dimensional de Lebesgue do conjunto $S$ ;
$\mathcal{H}^{n-1}$	indica a medida $(N - 1)$ dimensional de Hausdorff;
$B_r(x_0)$	é a bola centrada em $x_0 \in \mathbb{R}^n$ de raio $r$ ;
$\psi \otimes \psi$	é a matriz $(\psi_i \psi_j)_{i,j}$ ;
$u^+$	é a parte positiva da função $u$ definida como $\max\{u, 0\}$ ;
$u^-$	é a parte negativa da função $u$ definida como $\max\{-u, 0\}$ ;
$\nabla u$	é o vetor gradiente $(\frac{\partial u}{\partial x_i})_i$ ;
$D^2u$	é a matriz hessiana $(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j})_{i,j}$ .

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	11
2	EDPS PARABÓLICAS DUPLAMENTE DEGENERADAS . .	18
2.1	Introdução ao estudo da regularidade ótima . . . . .	18
2.2	Preliminares: Hipóteses estruturais, geometria intrínseca e resultados de regularidade . . . . .	18
2.3	Resultado Principal . . . . .	31
2.4	Estimativas ótimas via processo iterativo . . . . .	35
2.5	Aplicações . . . . .	44
2.5.1	Um lema do tipo Liouville . . . . .	44
2.5.2	Estimativas assintóticas para problemas “próximos” a equação do calor . . . . .	46
2.6	Comentários finais e outros problemas relacionados . . . . .	49
3	PROBLEMA SINGULARMENTE PERTURBADO . . . . .	51
3.1	Hipóteses principais . . . . .	51
3.2	Enunciado dos resultados principais . . . . .	53
3.3	Resultados auxiliares no estudo do caso singularmente perturbado . . . . .	57
3.4	Estimativas de regularidade Lipschitz . . . . .	60
3.5	Não degenerescência geométrica . . . . .	63
3.6	Crescimento Linear . . . . .	66
3.7	Algumas aplicações da regularidade Lipschitz e da não degenerescência geométrica . . . . .	67
3.8	Uma desigualdade do tipo Harnack . . . . .	69
3.9	Porosidade das $\epsilon$ -superfícies de nível . . . . .	70
3.10	Estimativas da medida de Hausdorff . . . . .	71
3.11	Cenário limite quando $\epsilon \rightarrow 0$ . . . . .	77
3.12	Estimativas para a medida de Hausdorff na fronteira livre . . .	79
3.13	Comentários finais: Uma abordagem sobre a condição de fronteira livre . . . . .	80
4	CONCLUSÃO . . . . .	82
	REFERÊNCIAS . . . . .	83
	APÊNDICE A - EXCERTOS DA TEORIA DE EDPs ELÍPTICAS NÃO LINEARES . . . . .	93

## 1 INTRODUÇÃO

Esta tese é composta por duas partes que estudam problemas afins quanto a sua natureza duplamente degenerada. A primeira parte do trabalho é devotada ao estudo da regularidade  $C^{\alpha, \frac{\alpha}{\theta}}$  ótima e melhorada para soluções fracas e limitadas, cujo prótipo é dado em forma divergente (com estrutura, a ser apresentada *a posteriori*)

$$u_t - \operatorname{div} \mathcal{A}(x, t, u, \nabla u) = f(x, t) \quad \text{em } \Omega_T$$

onde o termo fonte  $f$  pertence a um espaço de Lebesgue com norma mista e  $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$  onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto e limitado e  $T > 0$ .

$$u_t - \operatorname{div}(m|u|^{m-1}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(x, t) \quad \text{em } \Omega_T, \quad (1.1)$$

e

$$u_t - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} \left\{ m|u|^{m-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\} = f(x, t) \quad \text{em } \Omega_T. \quad (1.2)$$

para  $m \geq 1$  e  $p \geq 2$ .

É digno de nota os casos  $m = 1$  ( $p > 2$ ) e  $p = 2$  ( $m > 1$ ), que representam respectivamente a o  $p$ -laplaciano de evolução e a equação dos meios porosos. Além disso, não deveríamos esquecer que (1.2) também generaliza a equação do calor ao considerarmos  $m = 1$  e  $p = 2$ . Em suma, nossa abordagem é estável quando  $m \rightarrow 1^+$  e  $p \rightarrow 2^+$ , que permite-nos incluir os casos limítrofes  $m = 1$  e/ou  $p = 2$ .

Além do interesse inerentemente matemático, este estudo se faz necessário, por exemplo, na análise da filtração turbulenta de um gás ou um fluido em um meio poroso, análise de imagens e problemas sobre lençóis freáticos (veja (1), (68), (70)).

Uma característica intrínseca quanto ao modelo (1.2) é sua lei de degenerescência dirigida por uma dupla não-linearidade, cujo “módulo de elipticidade”, i.e,  $|u|^{m-1}|\nabla u|^{p-2}$ , colapsa ao longo dos pontos onde a solução zera e dos pontos singulares da mesma, nomeadamente

$$\mathcal{L}(u) := \{u = 0\} \quad \text{e} \quad \mathcal{S}(u) := \{|\nabla u| = 0\}.$$

Além do mais, a presença de tal tipo de lei de degenerescência sugere o uso de escalonamento intrínseco e técnicas tangenciais de caráter geométrico adaptadas ao nosso contexto. Por essa razão, iremos considerar novos aspectos no argumento original apresentado, por exemplo, em (3) e (29), no cenário das equações de evolução do tipo  $p$ -Laplaciano e (8) para o modelo correspondente duplamente degenerado.

Durante esse capítulo, serão procuradas informações quantitativas para soluções fracas que dependem apenas de parâmetros universais do problema, ou seja, quantidades

que dependem somente dos parâmetros  $m$  e  $p$ , da dimensão, de estimativas a priori para o modelo homogêneo, e limitantes inicialmente dados para o campo  $\mathcal{A}$ . É válido destacar a importância desse tipo de informação, que desempenha um papel decisivo em diversos contextos matemáticos: análise de blow-ups, análise relacionada em problemas geométricos e de fronteira livre, análise de comportamento assintótico de certas soluções, e para estabelecer resultados do tipo Liouville, para mencionar alguns exemplos (cf. (40) e (102)).

Particularmente, nos estamos interessados em estimativas de regularidade Hölder para soluções localmente limitadas como em (1.2). É válido destacar, que os insights que foram primordiais para dirigir os resultados expostos a seguir, foram inspirados em técnicas de teoria de regularidade para equações não lineares e problemas de fronteira livre (cf. (100), (102) e (110)).

Até o presente trabalho, foi desenvolvida uma linha sucessória que data do início dos anos 90. A existência de soluções foi provada por Sturm em (104), a limitação das soluções foi encontrada por Andreucci em seu trabalho (4), a Hölder regularidade para soluções limitadas foi assinada Porzio e Vespi em (91) e a desigualdade de Harnack explorada por Fornaro e Sosio em (58).

Vale ressaltar que as contribuições dadas nessa parte do trabalho se estendem (no que diz respeito ao cenário  $C^{0,\alpha}$ ), bem como melhoram, em certa medida, os resultados seminais anteriores de Araújo et al [(5), Teorema 6], Araújo [(8), Teorema 1.1], Diehl [(53), Teorema 2.5] e Teixeira-Urbano [(101), Teorema 3.4] fazendo uso de técnicas de escalonamento intrínseco e uma abordagem tangencial geométrica ajustada ao nosso cenário duplamente não-linear de forma unificada.

Em resumo, na primeira parte da tese será derivado um expoente ótimo e melhorado, em alguns cenários, nomeadamente:

$$\alpha := \min \left\{ \max \left\{ \frac{\alpha_{\text{Hom}}^- p}{p_m + \alpha_{\text{Hom}}(m + p - 3)}, \frac{2\alpha_{\text{Hom}}^-(p - 1)}{p_m(m + p - 2)} \right\}, \frac{(pq - n)r - pq}{q[(r - 1)(m + p - 2) + 1]} \right\},$$

onde  $\alpha_{\text{Hom}} \in (0, 1]$  é o expoente Hölder ótimo para o problema homogêneo com coeficientes constantes e  $\iota^-$  significa que podemos escolher qualquer valor  $s \in (0, \iota)$ , e

$$p_m := \begin{cases} 2 & \text{se } m = 1 \\ p & \text{se } m > 1. \end{cases}$$

Serão levadas em conta, hipóteses estruturais sobre a serem apresentadas *a posteriori* e as condições de compatibilidade

$$\frac{1}{r} + \frac{n}{pq} < 1 < \frac{2}{r} + \frac{n}{q},$$

que implicam (devido a extensão escolhida para os parâmetros) condições de “compati-

bilidades fortes”

$$\frac{1}{r} + \frac{n}{pq} < 1 \quad \text{e} \quad \frac{3}{r} + m \left(1 - \frac{1}{r}\right) + \frac{n}{q} > 2 \quad (\text{para } q, r > 1).$$

Assim, como o advento desse expoente ótimo e melhorado generalizamos e unificamos (em certos cenários) resultados já existentes na literatura como atesta a seguinte tabela,

Equação Modelo	Condições de Compatibilidade	Regularidade Hölder ótima	Referências
$u_t - \Delta u = f$	$1 < \frac{n}{q} + \frac{2}{r} < 2$	$\alpha = 2 - \left(\frac{2}{r} + \frac{n}{q}\right)$	(34) e (78)
$u_t - \Delta u^m = f$	$\frac{1}{r} + \frac{n}{2q} < 1$	$\alpha = \min \left\{ \frac{\alpha_{\text{Hom}}^-}{m}, \frac{[(2q-n)r-2q]}{q[mr-(m-1)]} \right\}$	(5)
$u_t - \Delta u^m = f$	$\frac{1}{r} + \frac{n}{2q} < 1$	$\alpha = \min \left\{ \frac{2\alpha_{\text{Hom}}^-}{2+(m-1)\alpha_{\text{Hom}}^-}, \frac{(2q-n)r-2q}{q[mr-(m-1)]} \right\}$	(53)
$u_t - \Delta_p u = f$	$\frac{n}{q} + \frac{2}{r} < 1 < \frac{1}{r} + \frac{n}{pq}$	$\alpha = \frac{(pq-n)r-pq}{q[(p-1)r-(p-2)]}$	(103)
$u_t - \text{div}(m u ^{m-1} \nabla u ^{p-2}\nabla u) = f$	$\frac{1}{r} + \frac{n}{pq} < 1$ e $\frac{3}{r} + \frac{n}{q} > 2$	$\alpha = \min \left\{ \frac{\alpha_{\text{Hom}}^-(p-1)}{m+p-2}, \frac{(pq-n)r-pq}{q[(r-1)(m+p-2)+1]} \right\}$	(8)

Por fim, como consequência desse achado, serão derivados duas aplicações são elas: uma lema do tipo Liouville e um resultado de aproximação assintótica; no primeiro mostraremos que uma solução inteira para o modelo homogêneo associado a (1.2) com uma taxa de crescimento adequada deve ser constante, na última aplicação será mostrado que se  $p$  e  $m$  estão próximos de 2 e 1 respectivamente e  $f$  tem integrabilidade adequada, as soluções de (1.2) estão próximas de funções calóricas.

Na segunda parte é feito um estudo não variacional de modelos elípticos não lineares por meio de perturbação singular, assim como na primeira parte da tese, a classe de modelos goza de dupla degenerescência.

O protótipo dessa classe é dado da seguinte forma, fixado um  $\varepsilon > 0$ , desejamos encontrar uma função não negativa  $u^\varepsilon$  solução da viscosidade para

$$\begin{cases} \mathcal{H}(x, \nabla u^\varepsilon)F(x, D^2 u^\varepsilon) = \zeta_\varepsilon(x, u^\varepsilon) & \text{in } \Omega \\ u^\varepsilon(x) = g(x) & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (P_\varepsilon)$$

em um domínio limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , onde  $0 \leq g \in C^0(\partial\Omega)$ , e  $F$  é um operador de segunda ordem, totalmente não linear e uniformemente elíptico. O foco do estudo se concentra nos modelos de reação-difusão com compartimento singular  $O(\varepsilon^{-1})$  próximo das  $\varepsilon$ -camadas, ou seja,  $\{u^\varepsilon \sim \varepsilon\}$ , a assinatura desse processo de difusão é o seu caráter não homogêneo sendo assim anisotrópico e diferentemente do primeiro modelo colapsa apenas no gradiente, mas de forma não homogênea.

Os esforços dessa parte da tese se destinam a mostrar que sobre hipóteses apropriadas, para  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , a família de soluções  $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  de  $(P_\varepsilon)$  são aproximações assintóticas da solução  $u_0$  de um problema não linear de fronteira livre de uma fase, que surge naturalmente na formulação de problemas de propagação de chamas e teoria de combustão, a saber: Dado  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um domínio limitado e suave e funções  $0 \leq f, g \in C(\bar{\Omega})$  and  $0 < Q \in C^0(\bar{\Omega})$ , desejamos encontrar uma “hipersuperfície”  $\Gamma_0 := \partial\Omega' \subset \Omega$  tal que o

problema de Bernoulli de uma fase (veja, (98, Capítulo 4))

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L} u(x) = f(x) \quad \text{in } \Omega \setminus \Omega' \\ u(x) = g(x) \quad \text{on } \partial\Omega \\ u(x) = 0 \quad \text{on } \Omega' \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \mathcal{Q}(x) \quad \text{on } \Gamma_0 \quad (\text{em um sentido adequado}) \end{array} \right. \quad (1.3)$$

admita uma solução não negativa para um operador elíptico de segunda ordem  $\mathcal{L}$  (na forma divergente ou não) com estrutura adequada. Como veremos, além de descobrir os candidatos naturais a resolver (1.3), a hipersuperfície deve ser escolhida como  $\Gamma_0 = \partial\{u > 0\}$ .

A técnica de perturbação singular tem dentre seus proventos o estudo de problemas de minimização descontínuos na teoria dos pontos críticos de funcionais não lineares, onde o monumental trabalho (2) de Alt-Caffarelli marca a gênese da teoria que se presta a analisar problemas da forma

$$\min_{\substack{H_0^1(\Omega) \\ v|_{\partial\Omega}=g}} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla v|^2 + \mathcal{Q}(x) \chi_{\{v>0\}} \right) dx. \quad (1.4)$$

com hipóteses adequadas  $g \geq 0$  e  $\mathcal{Q} > 0$ . Que tem equação de Euler-Lagrange

$$\Delta u_0 = \mathcal{Q}(x) \delta_0(u_0) \quad \text{em } \Omega \quad (1.5)$$

em um sentido distribucional apropriado. Assim, os minimizadores de (A.2) são obtidos como limite uniforme quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  do problema

$$\Delta u^\varepsilon(x) = \mathcal{Q}^2(x) \beta_\varepsilon(u^\varepsilon) \quad \text{em } \Omega \quad (\text{para } \beta_\varepsilon \sim \varepsilon^{-1} \chi_{(0,\varepsilon)}).$$

o que justifica o estado da arte do estudo corrente, como uma generalização de (1.5)

É pertinente traçar os desenvolvimentos dessa técnica de perturbação singular que tem como ímpeto os problemas não lineares de uma fase e sua conexão intrínseca com o problemas de combustão bem como o problemas de propagação de chamas (ver configuração estacionária).

Precisamente, eles aparecem na descrição de chamas laminares como um limite assintótico para a formulação não linear de modelos de ativação de alta energia com termos de fonte (cf. (22), (28), (73), (80) e (112)). Em uma estrutura geral, tais modelos correspondem ao limite de  $\varepsilon \rightarrow 0$  em  $(P_\varepsilon)$ , ou seja, um problema de fronteira livre não homogêneo de uma fase, onde a reação-difusão é conduzida por um operador duplamente degenerado (cf. (7), (90) e (94)):

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{G}(x, \nabla u, D^2 u) = f(x) \quad \text{em } \{u > 0\}, \quad (\text{para } f \in C^0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)) \\ u(x) \geq 0 \quad \text{em } \Omega \\ \mathcal{H}(x, |\nabla u(x)|) \leq \mathcal{T}(x) \quad \text{em } \partial\{u > 0\}, \quad (\text{para } 0 < \mathcal{T} \in C^0(\overline{\Omega})) \\ u(x) = g(x) \quad \text{em } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (\text{I-FBP-NH})$$

A condição que H impõe em  $u$  é comumente referida como *condição de fronteira livre*.

O desenvolvimento matemático desses problemas regularizadores forneceu importantes avanços científicos na teoria de reservada aos problemas de fronteira livre. Historicamente, seus estudos datam do trabalho pioneiro de Berestycki-Caffarelli-Nirenberg (12), o cenário elíptico linear foi endereçado (cf. (99) para análise de EDPS elípticas da teoria de propagação de chamas via tratamento variacional) que analisou uma equação do tipo traço com termo de transporte dotada de coeficientes  $C^1$

$$\text{tr}(A(x)D^2u(x)) + \langle b(x), Du(x) \rangle + c(x)u(x) = \beta_\varepsilon(u).$$

Antes de apresentar os avanços recentes no cenário totalmente não linear, devemos citar algumas contribuições fundamentais de vários autores sobre problemas de perturbação singular homogêneo/não homogêneo (uma e duas fases e sua contraparte parabólica), bem como problemas variacionais com estrutura uniformemente elíptica e degenerada, veja (23), (24), (28), (73), (81), (82), (85), (89), (88) e (90) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{div}(A(x)\nabla u^\varepsilon) = \Gamma(x)\beta_\varepsilon(u^\varepsilon) & \text{Operador uniformemente elíptico} \\ \text{div}(|\nabla u^\varepsilon|^{p-2}\nabla u^\varepsilon) = \beta_\varepsilon(u^\varepsilon) + f_\varepsilon(x) & \text{p-Laplaciano} \\ \text{div}\left(\frac{g(|\nabla u^\varepsilon|)}{|\nabla u^\varepsilon|}\nabla u^\varepsilon\right) = \beta_\varepsilon(u^\varepsilon) & \text{g-Laplaciano em espaços de Orlicz-Sobolev} \\ \text{div}(|\nabla u^\varepsilon|^{p_\varepsilon(x)-2}\nabla u^\varepsilon) = \beta_\varepsilon(u^\varepsilon) + f_\varepsilon(x) & \text{p(x)-Laplaciano} \\ u_\varepsilon \geq 0 & \text{em } \Omega \\ \Delta u^\varepsilon = \beta_\varepsilon(u^\varepsilon) + f_\varepsilon(x) & \text{Problema de duas fases para o Laplaciano} \\ \Delta u^\varepsilon - u_t^\varepsilon = \beta_\varepsilon(u^\varepsilon) + f_\varepsilon(x) & \text{Problema calórico de duas fases} \\ \text{div}(|\nabla u^\varepsilon|^{p-2}\nabla u^\varepsilon) = \beta_\varepsilon(u^\varepsilon) & \text{Problema de duas fases para o p-Laplaciano} \end{array} \right.$$

Coube a Teixeira em (97) iniciar a investigação no nicho das EDP's elípticas totalmente não lineares singularmente perturbadas como

$$F(x, D^2u^\varepsilon) = \beta_\varepsilon(u^\varepsilon) \quad \text{in } \Omega \quad \text{com } u^\varepsilon \geq 0, \quad (1.6)$$

onde  $\beta_\varepsilon(u^\varepsilon) \rightarrow \delta_0$  (medida delta de Dirac). O autor prova a regularidade Lipschitz ótima para soluções de (1.6), assim como a compacidade  $H^1$  para operadores do tipo Bellman.

Ricarte e Teixeira, finalizaram a análise iniciada em (97). Com efeito, eles provaram, dentre outras propriedades analíticas e geométricas, que a condição de fronteira livre é dirigida por um novo operador, nomeadamente  $F^*$ , *o perfil de recessão*, que surge via

um argumento de blow-up ao longo da família de equações elípticas geradas pelo operador original  $F$  (ao leitor interessado recomenda-se (95) para a contraparte parabólica desses estudos).

Na sequência, Silva e Ricarte em (92, Teorema 1.3) obtém as estimativas de regularidade Lipschitz global para

$$\begin{cases} F(x, \nabla u^\varepsilon, D^2 u^\varepsilon) = \beta_\varepsilon(u^\varepsilon) & \text{em } \Omega \\ u^\varepsilon(x) \geq 0 & \text{em } \Omega \\ u^\varepsilon(x) = g(x) & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

e (90) desenvolveu uma abordagem para (1.6) com um termo não homogêneo como (3.6). Finalmente, em (7), Araújo, Ricarte e Teixeira provam resultados similares de existência, regularidade ótima e geométrica para uma classe de problemas de fronteira-livre elípticos, totalmente não lineares, anisotrópicos e degenerados (com (A0)-(A1), (3.4) e (3.5) em vigor) como segue

$$|\nabla u^\varepsilon|^p F(D^2 u^\varepsilon) = \zeta_\varepsilon(x, u^\varepsilon) \quad \text{em } \Omega \quad \text{com } p \geq 0 \text{ e } u^\varepsilon \geq 0.$$

Por fim, cabe pontuar os avanços recentes e tratar das origens e motivações que regem a classe de operadores do nosso estudo, com efeito, uma das características principais do caso modelo

$$u \mapsto [|\nabla u|^p + \mathbf{a}(x)|\nabla u|^q] \Delta u \quad (\text{com(3.2) em uso}) \quad (1.7)$$

é a sua transição entre duas taxas distintas de degenerescência, que depende dos valores da função moduladora  $\mathbf{a}(\cdot)$ .

Por essa razão, o processo de difusão apresenta uma assinatura elíptica não uniforme e dupla degenerescência, que mistura duas diferentes potências de operadores do tipo  $p$ -Laplaciano na forma não-divergente (cf. (6), (16), (17), (18), (19) e (64)). Tal protótipo em (1.7) pode ser entendido como uma extensão não-variacional de certos tipos de integral do cálculo das variações com condições de  $(p, q)$ -crescimento como segue

$$(W_0^{1,p}(\Omega) + g, L^m(\Omega)) \ni (w, f) \mapsto \min \int_{\Omega} \left( \frac{1}{p} |\nabla w|^p + \frac{\mathbf{a}(x)}{q} |\nabla w|^q - fw \right) dx, \quad (\mathbf{DPF})$$

onde  $\mathbf{a} \in C^{0,\alpha}(\Omega, [0, \infty))$ , para algum  $0 < \alpha \leq 1 < p \leq q < \infty$  and  $m \in (N, \infty]$ .

Finalmente, cabe observar que mimizantes de  $(\mathbf{DPF})$  exibem elipticidade não uniforme e duplamente degenerada em um caso modelo com um tipo de  $(p, q)$ -estrutura:

$$\operatorname{div}(\mathcal{A}(x, \nabla u) \nabla u) = f(x) \quad \text{em } \Omega, \quad \text{onde } \mathcal{A}(x, \xi) := |\xi|^{p-2} + \mathbf{a}(x)|\xi|^{q-2}.$$

Para trabalhos relacionados recomenda-se (10), (44), (45), (46), (47) e (87).

Agora, voltemos a modelos não-variacionais como (1.7). Com relação a estimativas de regularidade para modelos com degenerescência não-homogênea, o ponto inicial foi dado por De Filippis no seu manuscrito (43), onde a regularidade  $C_{\text{loc}}^{1,\alpha}$  – para soluções no sentido de viscosidade

$$[|\nabla u|^p + \mathbf{a}(x)|\nabla u|^q] F(D^2u) = f \in L^\infty(\Omega), \quad (\text{com (A0)-(A1) e (3.2) em vigor})$$

foi obtido, para alguma  $\alpha \in (0, 1)$  dependendo de parâmetros universais. Na sequência, da Silva e Ricarte em (38) estabelecem estimativas ótimas para o gradiente de modelos dirigidos por (3.7), bem como um número de aplicações dessas estimativas em fronteira livre geométrica e EDP's elípticas não lineares(cf. (41) e (35)).

## 2 EDPS PARABÓLICAS DUPLAMENTE DEGENERADAS

### 2.1 Introdução ao estudo da regularidade ótima

Este capítulo tem como referência o trabalho (31), seu objetivo é derivar estimativas  $C_{loc}^{\alpha, \frac{\alpha}{\theta}}$  para soluções fracas e limitadas de uma classe de equações parabólicas duplamente degeneradas, cujo protótipo na forma divergente é dado por:

$$u_t - \operatorname{div}(\mathcal{A}(x, t, u, \nabla u)) = f(x, t) \quad \text{in } \Omega_T := \Omega \times (0, T) \quad (2.1)$$

com estrutura, a ser apresentada *a posteriori*, o termo fonte  $f$  pertence a um espaço de Lebesgue com norma mista e  $\Omega_T := \Omega \times (0, T)$ , com  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  aberto e limitado e  $T > 0$ . O caso modelo para o estudo é dado pelo  $(m, p)$ -Laplaciano:

$$u_t - \operatorname{div}(m|u|^{m-1}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(x, t) \quad \text{in } \Omega_T := \Omega \times (0, T). \quad (2.2)$$

Esse estudo visa estender a literatura de equações degeneradas parabólicas, para além dos modelos já conhecidos, recuperando estes últimos como casos particulares, a saber, para  $m = 1$  em 2.1, têm-se o  $p$ -laplaciano de evolução, agora o caso  $p = 2$  encontra a equação de um meio poroso, finalmente usando as duas condições *limítrofes* anteriores, ou seja,  $p = 2$  e  $m = 1$ , temos o operador do calor.

Ao contrário dos casos recuperados por 2.1, o caso modelo possui uma lei de degenerescência dupla, colapsando ao longo do nível 0 da solução  $u$  e dos pontos singulares do gradiente desta, ou seja:

$$\mathcal{Z}(u) := \{u = 0\} \quad \text{and} \quad \mathcal{S}(u) := \{|\nabla u| = 0\}.$$

o que notoriamente irá influenciar o desenvolvimento das estimativas, por exemplo, parte da análise que derivam as estimativas Hölder acontecem em uma vizinhança de  $\mathcal{Z}(u)$ .

Finalmente cabe ressaltar que as estimativas Hölder para soluções localmente limitadas obtidas terão caráter ótimo e melhorado. O referencial teórico para este estudo é guiado pela união das técnicas de escalonamento intrínseco e uma abordagem de análise tangencial no espírito dos trabalhos já presentes na literatura.

### 2.2 Preliminares: Hipóteses estruturais, geometria intrínseca e resultados de regularidade

Nesta seção serão dadas as hipóteses que governam a estrutura da classe de operadores duplamente degenerados desse trabalho e a geometria, dada pelos cilindros parabólicos, onde se procederá a análise para o expoente Hölder, dito ótimo e melhorado, ao final o resultado principal é enunciado.

Seja  $\mathcal{A} : \Omega_T \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  e  $f : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$ , no que segue  $m \geq 1$  e  $p \geq 2$ :

(P1) [**Elipcticidade Degenerada**]. Existe uma constante positiva  $C_1$  tal que para quase todo  $(x, t) \in \Omega_T$ , vale:

$$\langle \mathcal{A}(x, t, u, \nabla u), \nabla u \rangle \geq C_1 \Phi(|u|) |\nabla u|^p.$$

(P2) [**Condição de Crescimento**]. Existe uma constante positiva  $C_2$  tal que para quase todo  $(x, t) \in \Omega_T$ , vale

$$|\mathcal{A}(x, t, u, \nabla u)| \leq C_2 \Phi(|u|) |\nabla u|^{p-1}$$

onde  $\Phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  é uma função contínua, que satisfaz

$$\gamma_1 s^{m-1} \leq \Phi(s) \leq \gamma_2 s^{m-1}, \forall s \in [0, \sigma_0]$$

e

$$\psi_1 \leq \Phi(s) \leq \psi_2, \forall s \in (\sigma_0, \infty)$$

para constantes positivas  $\gamma_1 \leq \gamma_2$ ,  $\psi_1 \leq \psi_2$  que podem depender de cotas locais ou globais para o supremo da solução.

(P3) [**Oscilação dos Coeficientes**] Existe um módulo de continuidade  $\omega_{\mathcal{A}} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  e uma constante universal  $C_{\mathcal{A}} > 0$  tal que

$$\begin{aligned} \Theta_{\mathcal{A}}(x, t, x_0, t_0) &:= \sup_{\xi \neq 0, s \neq 0} \frac{|\mathcal{A}(x, t, s, \xi) - \mathcal{A}(x_0, t_0, s, \xi)|}{|s|^{m-1} |\xi|^p} \\ &\leq C_{\mathcal{A}} \cdot \omega_{\mathcal{A}}(|(x, t) - (x_0, t_0)|) \end{aligned}$$

(P4) [**Integrabilidade do termo fonte**] O termo fonte  $f \in L^{q,r}(\Omega_T) = L^r(0, T; L^q(\Omega))$ , i.e., em um espaço de Lebesgue com norma mista, (cf. (11)), que é um espaço de Banach com a seguinte norma:

$$\|f\|_{L^{q,r}(\Omega_T)} := \left( \int_0^T \left( \int_{\Omega} |f(x, t)|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} dt \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Ademais, serão assumidas as seguintes condições “fracas de compatibilidade”:

$$\frac{1}{r} + \frac{n}{pq} < 1 < \frac{2}{r} + \frac{n}{q}, \quad (\text{W-CC})$$

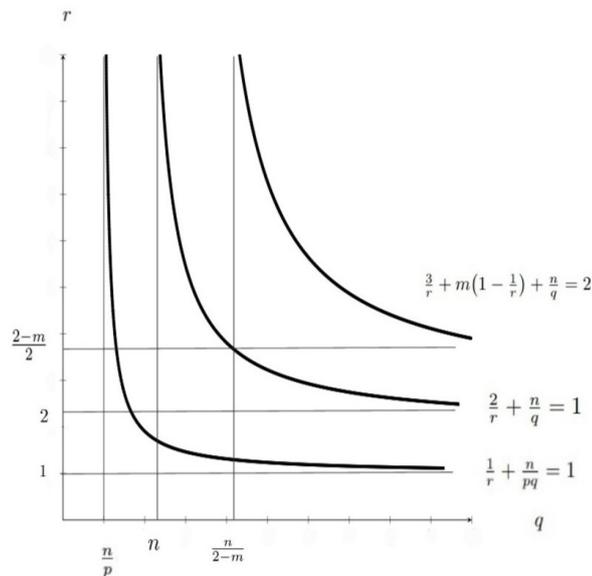
que implica (devido a extensão escolhida para os parâmetros) condições de “compatibil-

idades fortes” (basta somar  $m(1 - 1/r)$  em  $2/r + n/q > 1$ )

$$\frac{1}{r} + \frac{n}{pq} < 1 \quad \text{e} \quad \frac{3}{r} + m \left(1 - \frac{1}{r}\right) + \frac{n}{q} > 2 \quad (\text{para } q, r > 1). \quad (\text{S-CC})$$

Abaixo, segue uma ilustração das regiões  $W - CC$  e  $S - CC$ :

Figura 1: Regiões W-CC e S-CC.



Fonte: elaborada pelo autor.

Antes de enunciar os resultados auxiliares, se faz necessário fixar a geometria onde as estimativas Hölder serão processadas. Serão considerados os cilindros parabólicos :

$$Q_{\rho}^{-}(x_0, t_0) = B_{\rho}(x_0) \times (t_0 - \rho^{\theta}, t_0],$$

onde  $\theta > 0$  é o *fator de escala temporal intrínseco* dado por

$$\theta := p - \alpha(m + p - 3) = p - \alpha(m + p - 2) \cdot \left(1 - \frac{1}{m + p - 2}\right), \quad (2.3)$$

e  $\alpha > 0$  é o expoente Hölder ótimo dado por (sharp). Ademais, observe que

$$1 + \frac{p - 1}{p + m - 2} \leq \theta \leq p \quad \text{para qualquer } p \geq 2 \quad \text{e} \quad m \geq 1.$$

Por fim, seguem as ferramentas para o desenvolvimento do processo iterativo que seguirá com o objetivo de derivar o expoente ótimo e melhorado da classe de operadores regida pelo  $(m, p)$ -Laplaciano.

**Definição 2.1.** Uma função localmente limitada é uma solução de 2.1 em  $\Omega \times (0, T]$ , se  $u \in C_{loc}((0, T; L^2(\Omega)))$  e  $\Phi^{\frac{1}{p}}(|u|)|\nabla u| \in L^p_{loc}(\Omega_T)$  para cada conjunto compacto  $K \subset \Omega$ , cada  $[t_1, t_2] \in (0, T]$  e para  $\psi \in H^1_{loc}(0, T; L^2(K)) \cap L^p_{loc}(0, T; W^{1,p}(K))$  vale:

$$\int_K u\psi dx \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \int_K \left[ -u \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathcal{A}(x, t, u, \nabla u) \cdot \nabla \psi \right] dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_K f\psi dx dt.$$

Acontece que quando soluções da equação existem, no que diz respeito a sua regularidade temporal pode-se exigir pouco, aliás, em geral  $u_t$  tem sentido apenas como distribuição. De posse disso, se faz necessário uma formulação equivalente para soluções fracas que contemplem a natureza das soluções do  $(m, p)$ -Laplaciano, e assim surge uma nova ferramenta: a média de Steklov de uma função  $v \in L^1(\Omega_T)$ , definida, para  $0 < h < T$ , como

$$u_h := \begin{cases} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(\cdot, \tau) d\tau, & \text{se } t \in (0, T-h], \\ 0, & \text{se } t \in (T-h, T] \end{cases}$$

Por meio da definição da média de Steklov, temos agora em mãos a seguinte definição para solução fraca:

**Definição 2.2.** Uma função localmente limitada é solução fraca de (2.1) se  $u \in C_{loc}(0, T; L^2(\Omega))$  e, para cada compacto  $K \subset \Omega$  e para cada  $0 < t < T-h$ ,

$$\int_{K \times \{t\}} \{(u_h)_t \psi + (\mathcal{A}(x, t, u, \nabla u))_h \cdot \nabla \psi\} dx = \int_{K \times \{t\}} f_h \psi dx \quad (2.4)$$

para toda  $\psi \in W_0^{1,p}(K)$ .

O próximo passo se dá em obter estimativas integrais dos níveis da solução que medem o comportamento da função próximo ao infimo e ao supremo no interior de cilindros apropriados.

**Teorema 2.1.** Seja  $u$  uma solução fraca da equação (2.1). Então existe uma constante  $\gamma = \gamma(C_0, C_1, n, K \times [t_1, t_1], \|\varphi\|_{L^{q,r}}(\Omega_T))$ , tal que para cada cilindro  $\Omega_T$  e cada  $k$  nível :

$$\sup_{t_1 < t < t_2} \int_K (u - k)_{\pm}^2 \xi^p(x, t) dx + C \int_{t_1}^{t_2} \int_K \Phi(|u|) |\nabla (u - k)_{\pm}|^p \xi^p dx dt \leq \\ C \int_{t_1}^{t_2} \int_K (u - k)_{\pm}^2 \xi^{p-1} |\xi_t| dx dt + C \|f\|_{L^{q,r}}^2$$

**Prova.** Seja  $k > 0$  e  $\xi \in W^{1,p}(K)$ , tomando  $\psi = (u_h - k)_{\pm} \xi^p$  como uma função teste

para a equação (2.1), para  $t \in (t_1, t_2]$  arbitrário, temos:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^t \int_K (u_h)_t (u_h - k)_\pm \xi^p dx ds + \int_{t_1}^t \int_K (\mathcal{A}(x, t, u, \nabla u))_h \cdot \nabla((u_h - k)_\pm) \cdot \xi^p dx ds \\ & + p \int_{t_1}^t \int_K (\mathcal{A}(x, t, u, \nabla u))_h \cdot \nabla \xi (u - k)_\pm \xi^{p-1} dx ds = \int_{t_1}^t \int_K f_h (u_h - k)_\pm \xi^p dx ds. \end{aligned}$$

Integrando por partes a primeira parcela do lado esquerdo da identidade, e passando o limite com  $h \rightarrow 0$  :

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^t \int_K (u_h)_t (u_h - k)_\pm \xi^p dx ds = \frac{1}{2} \int_{t_1}^t \int_K \partial_t (u_h - k)_\pm^2 \xi^p dx ds \\ & \int_{t_1}^t \int_K (u_h)_t (u_h - k)_\pm \xi^p dx ds \rightarrow \frac{1}{2} \int_K (u - k)_\pm^2 \xi^p(x, t) dx - \frac{1}{2} \int_K (u - k)_\pm^2 \xi^p(x, t_1) dx - \\ & \quad - \frac{p}{2} \int_{t_1}^t \int_K (u - k)_\pm^2 \xi^{p-1} \xi_t dx ds \\ & \int_{t_1}^t \int_K u_t (u - k)_\pm \xi^p dx ds \geq \frac{1}{2} \int_K (u - k)_\pm^2 \xi(x, t) dx - \frac{1}{2} \int_K (u - k)_\pm^2 \xi^p(x, t_1) dx \\ & \quad - \frac{p}{2} \int_{t_1}^t \int_K (u - k)_\pm^2 \xi^{p-1} |\xi_t| dx ds. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Agora, para a segunda integral do lado esquerdo:

$$\int_{t_1}^t \int_K (\mathcal{A}(x, t, u, \nabla u))_h \cdot \nabla((u_h - k)_\pm) \cdot \xi^p dx ds \rightarrow \int_{t_1}^t \int_K \mathcal{A}(x, t, u, \nabla u) \cdot \nabla((u - k)_\pm) \cdot \xi^p dx ds$$

com efeito,  $\nabla(u - k)_\pm = \pm \nabla u \cdot 1_{\{(u-k)_\pm > 0\}}$  em quase todo ponto, e segundo a propriedade (P2):

$$\mathcal{A}(x, t, u, \nabla u) \cdot \nabla u \geq C_0 \Phi(|u|) |\nabla u|^p.$$

assim, obtém-se

$$\int_{t_1}^t \int_K (\mathcal{A}(x, t, u, \nabla u)) \cdot \nabla((u - k)_\pm) \cdot \xi^p dx ds \geq C_0 \int_{t_1}^t \int_K \Phi(|u|) |\nabla(u - k)_\pm|^p \xi^p dx ds. \quad (2.6)$$

Similarmente, para a terceira integral do lado esquerdo, quando  $h \rightarrow 0$ ,

$$p \int_{t_1}^t \int_K (\mathcal{A}(x, t, u, \nabla u))_h \cdot \nabla \xi \xi^{p-1} (u - k)_\pm dx ds \rightarrow p \int_{t_1}^t \int_K \mathcal{A}(x, t, u, \nabla u) \cdot \nabla \xi \cdot \xi^{p-1} (u - k)_\pm dx ds.$$

Agora, novamente por (P2):

$$|\mathcal{A}(x, t, u, \nabla u)| \leq C_1 \Phi(|u|) |\nabla u|^{p-1}$$

e se valendo da desigualdade de Young, obtemos:

$$\begin{aligned} & p \int_{t_1}^t \int_K \mathcal{A}(x, t, u, \nabla u) \cdot \nabla \xi \cdot \xi^{p-1} (u - k)_\pm \\ & \leq p C_1 \int_{t_1}^t \int_K \Phi(|u|) |\nabla(u - k)_\pm|^{p-1} (u - k)_\pm \xi^{p-1} |\nabla \xi| dx ds \\ & \leq p C_1 \int_{t_1}^t \int_K \Phi(|u|) |\nabla(u - k)_\pm|^{p-1} (u - k)_\pm \xi^{p-1} |\nabla \xi| dx ds \\ & \leq p C_1 \left( \frac{p-1}{p} \right) \int_{t_1}^t \int_K \Phi(|u|) |\nabla(u - k)_\pm|^p \xi^p dx ds \\ & \quad + p C_1 \frac{1}{p} \int_{t_1}^t \int_K \Phi(|u|) (u - k)_\pm^p |\nabla \xi|^p dx ds \end{aligned}$$

finalmente,

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^t \int_K \mathcal{A}(x, t, u, \nabla u) \cdot \nabla \xi \cdot \xi^{p-1} (u - k)_\pm dx ds & \leq p C_1 \left( \frac{p-1}{p} \right) \int_{t_1}^t \int_K \Phi(|u|) |\nabla(u - k)_\pm|^p \xi^p dx ds + \\ & p C_1 \frac{1}{p} \int_{t_1}^t \int_K \Phi(|u|) (u - k)_\pm^p |\nabla \xi|^p dx ds. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Para o termo de menor ordem, ou seja, o lado direito da equação, temos pela desigualdade de Hölder para  $j = q$  e  $l = \frac{q}{q-1}$

$$\begin{aligned}
& \int_K f_h(u_h - k)_\pm \xi^p dx = \\
& \leq \| (u_h - k)_\pm \xi^p \|_{\frac{q}{q-1}} \| f_h \|_q \\
& \leq C(q, q, K) \left( \int_K (u_h - k)_\pm^2 \xi^p dx \right)^{\frac{1}{2}} \| f_h \|_q
\end{aligned}$$

passando o limite  $h \rightarrow 0$  e usando a propriedade estrutural (P3), obtem-se:

$$\int_K f(u - k)_\pm \xi^p dx \leq C(q, K) \left( \int_K (u - k)_\pm^2 \xi^p dx \right)^{\frac{1}{2}} \| f \|_q$$

integrando em  $s$ :

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^t \int_K f(u - k)_\pm \xi^p dx ds \leq C(q, K) |t - t_1|^{\frac{r-1}{r}} \left( \int_K (u - k)_\pm^2 \xi^p dx \right)^{\frac{1}{2}} \| f \|_{L^{q,r}} \\
& \leq \frac{1}{2} \sup_{t_1 < s < t} \int_K (u - k)^2 \xi^p dx + C(t_1, t, K, q, r) \| f \|_{L^{q,r}}^2
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Relembrando que

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^t \int_K (u_h)_t (u_h - k)_\pm \xi^p dx ds = - \int_{t_1}^t \int_K (\mathcal{A}(x, t, u, \nabla u))_h \cdot \nabla ((u_h - k)_\pm) \cdot \xi^p dx ds \\
& - p \int_{t_1}^t \int_K (\mathcal{A}(x, t, u, \nabla u))_h \cdot \nabla \xi (u - k)_\pm \xi^{p-1} dx ds - \int_{t_1}^t \int_K f_h (u_h - k)_\pm \xi^p dx ds.
\end{aligned}$$

Finalmente, usando as estimativas (2.5), (2.6), (2.7) e (2.8), segue que:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_K (u - k)_\pm^2 \xi(x, t) dx - \frac{1}{2} \int_K (u - k)_\pm^2 \xi^p(x, t_1) dx - \frac{p}{2} \int_{t_1}^t \int_K (u - k)_\pm^2 \xi^{p-1} |\xi_t| dx ds \leq \\
& - C_0 \int_{t_1}^t \int_K \Phi(|u|) |\nabla (u - k)_\pm|^p \xi^p dx ds + p C_1 \left( \frac{p-1}{p} \right) \int_{t_1}^t \int_K \Phi(|u|) |\nabla (u - k)_\pm|^p \xi^p dx ds + \\
& + p C_1 \frac{1}{p} \int_{t_1}^t \int_K \Phi(|u|) (u - k)_\pm^p |D\xi|^p dx ds + \leq \frac{1}{2} \sup_{t_1 < s < t} \int_K (u - k)^2 \xi^p dx + C(t_1, t, K, q, r) \| f \|_{L^{q,r}}^2.
\end{aligned}$$

Organizando os termos

$$\begin{aligned}
& \int_K (u - k)_\pm^2 \xi(x, t) dx + 2(C_0 - C_1(p - 1)) \int_{t_1}^t \int_K \Phi(|u|) |\nabla(u - k)_\pm|^p \xi^p dx ds \leq \\
& p \int_{t_1}^t \int_K (u - k)_\pm^2 \xi^{p-1} |\xi_t| dx ds + 2C_1 \int_{t_1}^t \int_K \Phi(|u|) (u - k)_\pm^p |D\xi|^p dx ds + \\
& + \int_K (u - k)_\pm^2 \xi^p(x, t_1) dx + \leq \frac{1}{2} \sup_{t_1 < s < t} \int_K (u - k)^2 \xi^p dx + C(t_1, t, K, q, r) \|f\|_{L^{q,r}}^2
\end{aligned}$$

Tomando o supremo para  $t \in (t_1, t_2]$  o resultado segue

$$\begin{aligned}
& \sup_{t_1 < t < t_2} \int_K (u - k)_\pm^2 \xi(x, t) dx + \int_{t_1}^{t_2} \int_K \Phi(|u|) |\nabla(u - k)_\pm|^p \xi^p dx dt \leq \\
& C \int_{t_1}^{t_2} \int_K (u - k)^2 \xi^{p-1} |\xi_t| dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_K \Phi(|u|) (u - k)_\pm^p |D\xi|^p dx dt \\
& + C \|f\|_{L^{q,r}}^2
\end{aligned}$$

□

Como consequência da estimativa de energia temos uma desigualdade do tipo Caccioppoli:

**Proposição 2.1 (Estimativa do tipo Caccioppoli).** *Seja  $K \times [t_1, t_2] \subset \Omega \times (0, T]$ . Se  $u$  é uma solução fraca de (2.1), então existe uma constante  $C > 0$ , dependendo somente de  $n, p$  and  $K \times [t_1, t_2]$  tal que*

$$\begin{aligned}
& \sup_{t_1 < t < t_2} \int_K u^2 \xi^p dx + \int_{t_1}^{t_2} \int_K \Phi(|u|) |\nabla u|^p \xi^p dx dt \\
& \leq C \int_{t_1}^{t_2} \int_K u^2 \xi^{p-1} |\xi_t| dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_K \Phi(|u|) |u|^p |D\xi|^p dx dt + C \|f\|_{L^{q,r}}^2.
\end{aligned}$$

para cada  $\xi \in C_0^\infty(K \times (t_1, t_2); [0, 1])$

**Prova.** Segue nas linhas da prova anterior considerando o nível  $k = 0$ . □

**Observação:** Cabe ressaltar a importância da Proposição anterior como meio para se desenvolver a análise tangencial do nosso problema que será feita, *a posteriori*, em outras palavras, poderemos conectar o nosso problema a outro que goza de regularidade superior via um argumento de compacidade que é provento da desigualdade do

tipo Caccioppoli obtida anteriormente e assim obter por vias de um processo iterativo as estimativas Hölder desejadas.

Na sequência, seguem resultados de regularidade para EDP's duplamente degeneradas como na equação. Tais estimativas podem ser encontradas em (66), (67), (68), (69), (70), (91) e (111):

**Teorema 2.2.** *Seja  $u$  uma solução fraca localmente limitada da equação (2.1). Suponha que (P1)-(P4) e W-CC valem. Então,  $u$  é localmente Hölder contínua in  $\Omega_T$ , e para cada subconjunto compacto  $K \subset \Omega_T$ , existem constantes  $\gamma > 1$  e  $\alpha_0 \in (0, 1)$  tal que*

$$|u(x_1, t_1) - u(x_2, t_2)| \leq \gamma \cdot \left( |x_1 - x_2|^{\alpha_0} + \|u\|_{L^\infty(K)}^{\frac{m-1}{p}} |t_1 - t_2|^{\frac{\alpha_0}{pm}} \right)$$

para cada  $(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in K$ .

Agora, se faz necessário evocar a regularidade ótima para equações do tipo  $p$ -laplaciano de evolução

$$\mathcal{Q}_p u := u_t - \operatorname{div}(\mathbf{a}(x, t)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(x, t) \quad \text{em } \Omega_T \quad \text{para } p \geq 2, \quad (2.9)$$

cujos coeficientes são contínuos e satisfazem

$$0 \leq L_0 \leq \mathbf{a}(x, t) \leq L_1 < \infty \quad \text{em } \Omega_T. \quad (2.10)$$

Ademais,  $f \in L^{q,r}(\Omega_T)$  satisfaz W-CC. Nessa direção, seguem as estimativas ótimas para esse tipo de equação (2.9).

**Teorema 2.3.** *Seja  $u$  uma solução limitada de (2.9). Suponha ainda que as condições W-CC and (2.10) são válidas. Então,  $u$  é localmente  $C^{0,\hat{\alpha}}$  na variável espacial e  $C^{0,\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\theta}}}$  na variável temporal, onde*

$$\hat{\alpha} := \frac{(pq - n)r - pq}{q[(p - 1)r - (p - 2)]} \quad \text{e} \quad \hat{\theta} := 2\hat{\alpha} + (1 - \hat{\alpha})p.$$

O último passo para a construção do conjunto de ferramentas para a análise tangencial e conseqüentemente do processo iterativo é o lema de  $(m, p)$ -aproximação, este por sua vez pode ser visto como um caminho entre dois pontos, cada ponto é uma classe de equações, no nosso caso vamos usar a desigualdade de Caccioppoli e conecta a classe de operadores desse trabalho a uma função  $(m, p)$ -calórica ganhando assim regularidade para o nosso problema em um domínio menor do que o ambiente posto para o estudo. A ideia da prova será por contradição.

**Lema 2.1 ((m, p)-Aproximação).** *Se  $u$  é uma solução fraca da equação (2.1) em  $Q_1^-$  com  $\|u\|_{L^\infty(Q_1^-)} \leq 1$ , então  $\forall \varepsilon > 0$  existe  $\delta = \delta(p, n, m, \varepsilon) > 0$  para o qual satisfaz a*

seguinte propriedade: sempre que

$$\max \left\{ \|f\|_{L^{q,r}(Q_1^-)}, \sup_{0 < \rho \leq \rho_0} \sup_{(y,\tau),(x,t) \in Q_\rho} \Theta_{\mathcal{A}}(y, \tau, x, t) \right\} \leq \delta_\varepsilon$$

existe uma função  $(m, p)$ -calórica  $\phi : Q_{\frac{1}{2}}^- \rightarrow \mathbb{R}$ , i.e.,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \operatorname{div}(\mathcal{A}(\phi, \nabla \phi)) = 0 \quad \text{in } Q_{\frac{1}{2}}^-, \quad (2.11)$$

com  $\mathcal{A}$  satisfazendo (P1)-(P3) com  $C_1 = C_2, \gamma_1 = \gamma_2, \psi_2 = \psi_2$  e  $\omega \equiv 0$  tal que

$$\|u - \phi\|_{L^\infty(Q_{\frac{1}{2}}^-)} < \varepsilon. \quad (2.12)$$

**Prova.** Suponha por contradição, que o lema não seja válido. Então, para algum  $\delta_0 > 0$ , devem existir seqüências

$$(u_j)_j \in C_{loc}^0(0, -1; L_{loc}^2(\Omega)), \quad \text{com } |u_j| \Phi(|u_j|)^{\frac{1}{p}} \in L_{loc}^p(0, -1; W^{1,p}(B_1)),$$

$(\mathcal{A}_j)_j$  satisfazendo (P1)-(P4) e  $(f_j)_j \in L^{q,r}(Q_1^-)$ , interligadas por

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} - \operatorname{div} \mathcal{A}_j(x, t, u_j, \nabla u_j) = f_j(x, t) \quad \text{em } Q_1^- \quad (2.13)$$

com

$$\|u_j\|_{L^\infty(Q_1^-)} \leq 1 \quad \text{e} \quad \max \left\{ \|f_j\|_{L^{q,r}(Q_1^-)}, \Theta_{\mathcal{A}_j}(y, \tau, x, t) \right\} \leq \frac{1}{j} \quad (2.14)$$

para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Entretanto, para qualquer solução fraca  $\phi$  de (2.11) temos

$$\|u_j - \phi\|_{L^\infty(Q_{\frac{1}{2}}^-)} > \delta_0 \quad \text{para todo } j. \quad (2.15)$$

Agora, seja a função cutoff  $\xi \in C_0^\infty(Q_1^-)$ , tal que  $0 \leq \xi \leq 1$ , com  $\xi = 1$  em  $Q_{\frac{1}{2}}$  e  $\xi = 0$  em  $\partial_p Q_1^-$ . Assim, uma vez que  $u_j$  é uma solução da equação (2.13), a estimativa de Caccioppoli (Proposição 2.1) assegura, com a ajuda de (2.14), que

$$\sup_{-1 < t < 0} \int_{B_1} u_j^2 \xi^p dx + \int_{-1}^0 \int_{B_1} \Phi(|u_j|) |\nabla u_j|^p \xi^p dx dt \leq \bar{C}. \quad (2.16)$$

Com efeito, pela Proposição anterior

$$\sup_{t_1 < t < t_2} \int_K u^2 \xi dx + \int_{t_1}^{t_2} \int_K \Phi(|u|) |\nabla u|^p \xi^p dx dt$$

$$\leq C \int_{t_1}^{t_2} \int_K u^2 \xi^{p-1} |\xi_t| dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_K \Phi(|u|) |u|^p |\nabla \xi|^p dx dt + C \|f\|_{L^{q,r}}^2.$$

Nomeando as integrais do lado direito da desigualdade como:

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \int_K u^2 \xi^{p-1} |\xi_t| dx dt$$

$$\mathcal{D} = \int_{t_1}^{t_2} \int_K \Phi(|u|) |u|^p |\nabla \xi|^p dx dt$$

temos,

$$\mathcal{S} \leq \int_{-\frac{1}{2} B_{\frac{1}{2}}}^{-1} \int |\xi_t| dx dt = c(n, \xi) < \infty \quad (2.17)$$

em face da escolha da função cutoff e da magnitude da norma  $\|u\|_\infty$ . Quanto a  $\mathcal{D}$ , temos:

$$\mathcal{D} \leq \gamma_1 \int_{-1}^0 \int_{B_1} |D\xi|^p dx dt = c(\gamma_1, p, \xi) < \infty \quad (2.18)$$

levando em conta a condição estrutural para  $\Phi$ , a hipótese sobre a norma  $\|u\|_\infty$  (usada novamente) e o grau de liberdade dos parâmetros  $m$  e  $p$ . Assim, usando (3.15), (3.16) e a hipótese sobre a norma  $L^{q,r}$  do termo fonte da equação segue a identidade (2.16).

De agora em diante, seja  $v_j = F(|u_j|)$ , onde  $F$  é uma primitiva de  $\Phi^{\frac{1}{p}}$ , então

$$|\nabla v_j|^p = \Phi(|u_j|) |\nabla u_j|^p.$$

e assim

$$\|\nabla v_j\|_{L^p(Q_{\frac{1}{2}}^-)}^p = \int_{-2^\theta B_1}^0 \int_{B_1} |\nabla v_j|^p dx dt \leq \int_{-1}^0 \int_{B_1} \Phi(|u_j|) |\nabla u_j|^p dx dt \leq \bar{C}$$

Desse modo, módulo subsequência,

$$\nabla v_j \rightharpoonup \Xi \quad \text{fracamente em } L^p(Q_{\frac{1}{2}}^-). \quad (2.19)$$

Além disso, pelo teorema 2.2, a sequência  $(u_j)_j$  é equicontínua e por (2.14) é

equilimitada, então pelo teorema de Arzelá-Ascoli, a menos de uma subsequência,

$$u_j \rightarrow u_\infty \quad \text{uniformemente em} \quad Q_{\frac{1}{2}}^-. \quad (2.20)$$

Por fim, podemos identificar por meio das equações (2.19) e (2.20) e da unicidade do limite na topologia fraca que  $\Xi = \nabla v$ , uma vez que temos convergência pontual

$$v_j = F(|u_j|) \rightarrow F(u_\infty) := v.$$

Finalmente, passando o limite em (2.13), concluimos que  $u_\infty$  satisfaz (2.11), que fornece uma contradição perante (2.15) para  $j \gg 1$ . □

**Observação 2.1 (Normalização e “ regime de ajustamento de magnitude pequena”).** *É possível normalizar a solução  $u$  definida em  $Q_1$ , de modo que a função resultante satisfaça as condições do lema 2.1. Mais precisamente, para um  $\delta > 0$  e  $s > 0$  fixado, existem constantes positivas  $\mu = \mu(\delta, s, \|u\|_{L^\infty}, \|f\|_{L^{q,r}})$  tal que a função*

$$v_\mu(x, t) := \mu^s u(\mu^s x, \mu^\tau t),$$

satisfaça as condições do lema 2.1, onde  $\tau := s(m-1) + 2s(p-1) > 0$ ,

$$0 < \mu \leq \min \left\{ 1, \frac{1}{\sqrt[s]{\|u\|_{L^\infty(Q_1^-)}}}, \sqrt[\kappa]{\frac{\delta}{\|f\|_{L^{q,r}(Q_1^-)} + 1}}, \sqrt[\Pi]{\frac{\delta}{\omega_{\mathcal{A}}^{-1}\left(\frac{\delta}{C_{\mathcal{A}}+1}\right)}} \right\},$$

$$\begin{aligned} \kappa &:= s[2(p-1) + m] - \left( \frac{sn}{q} + \frac{(2p-1)s + s(m-1)}{r} \right) + s \\ &= s(m+p-2) \left[ \left(1 - \frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r(m+p-2)} \right] + sp \left[ 1 - \left( \frac{n}{pq} + \frac{1}{r} \right) \right] + s \end{aligned}$$

é uma constante positiva que é herança da condição de integrabilidade W-CC e

$$\Pi := 2s(2p+m-2) > 0, \quad \text{uma vez que} \quad m \geq 1 \quad \text{e} \quad p \geq 2.$$

Com efeito, a função  $v_\mu$  satisfaz no sentido fraco a seguinte equação:

$$(v_\mu)_t - \operatorname{div}(\mathcal{A}_\mu(x, t, v_\mu, \nabla v_\mu)) = f_\mu(x, t)$$

onde

$$\begin{cases} \mathcal{A}_\mu(x, t, r, \xi) &:= \mu^{s(m-1)+2s(p-1)} \mathcal{A}(\mu^s x, \mu^\tau t, \mu^{-s} r, \mu^{-2s} \xi) \\ f_k(x, t) &:= \mu^{s[2(p-1)+m]+s} f(\mu^s x, \mu^\tau t). \end{cases}$$

que é válida desde que  $\tau = s(m - 1) + 2s(p - 1)$ .

Dito isso, tomando:

$$0 < \mu \leq \frac{1}{\sqrt[s]{\|u\|_{L^\infty(Q_1^-)}}} \quad (2.21)$$

podemos contar com a limitação essencial de  $u$  em  $Q_1^-$  e sua norma é no máximo 1. Voltando a atenção ao termo fonte, calculamos a sua norma no espaço de Lebesgue misto:

$$\begin{aligned} \|f_\mu\|_{L^{q,r}(Q_1)}^r &= \int_{-1}^0 \left( \int_{B_1} |f_\mu(x, t)|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} dt \\ &= \int_{-1}^0 \left( \int_{B_1} \mu^{s[2(p-1)+m]+s} |f(\mu x, \mu^\tau t)|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} dt \\ &= \mu^{s+s[2(p-1)+m]-\frac{sn}{q}} \int_{-1}^0 \left( \int_{B_\mu} |f(y, \mu^\tau t)|^q dz \right)^{\frac{r}{q}} dt \\ &= \mu^{s+s[2(p-1)+m]-\frac{sn}{q}-\frac{\mu}{r}} \int_{-\mu^{-\theta}}^0 \left( \int_{B_\mu} |f(y, \mu^{\tau-\theta} t)|^q dz \right)^{\frac{r}{q}} dt \\ &= \mu^{s+s[2(p-1)+m]-\frac{sn}{q}-\frac{\mu}{r}} \|f\|_{L^{q,r}(Q_\mu)} \end{aligned}$$

resta mostrar que

$$\kappa := s[2(p-1) + m] - \left[ \frac{sn}{q} + \frac{\tau}{r} \right] + s > 0$$

Ora,

$$\kappa = sp \left[ 1 - \left( \frac{n}{pq} + \frac{1}{r} \right) \right] + s(m + p - 2) \left[ 1 - \frac{1}{r} + \frac{1}{r(m + p - 2)} \right] + s$$

que é estritamente positivo, segundo (W-CC) e o grau de liberdade para  $r$ . Assim, tomando:

$$0 < \mu \leq \sqrt[\kappa]{\frac{\delta}{\|f\|_{L^{q,r}(Q_1^-)} + 1}} \quad (2.22)$$

garantimos que o termo fonte  $f$  tem norma no espaço de Lebesgue misto de expoentes  $q, r$  no máximo  $\delta$ . Por fim, para garantir o controle da oscilação pela mesma cota superior obtida para o termo fonte, usamos (P3) e a definição de  $\Theta_{A_\mu}$ , para obter:

$$\begin{aligned}
& \sup_{0 < \rho \leq \rho_0} \sup_{(x,t),(x_0,t_0) \in Q_\rho} \Theta_{\mathcal{A}_\mu}(x,t,x_0,t_0) \leq \\
& \mu^{2s(m+2p-2)} \sup_{0 < \rho \leq \rho_0} \sup_{(x,t),(x_0,t_0) \in Q_\rho} \Theta_{\mathcal{A}}(\mu^s x, \mu^\tau t, \mu^s x_0, \mu^\tau t_0) \leq \\
& \leq \mu^{2s(m+2p-2)} C_{\mathcal{A}} \omega_{\mathcal{A}}(|(\mu^s x, \mu^\tau) - (\mu^s x_0, \mu^\tau t_0)|) \\
& \mu^{2s(m+2p-2)} (C_{\mathcal{A}} + 1) \omega_{\mathcal{A}}(|(\mu^s x, \mu^\tau) - (\mu^s x_0, \mu^\tau t_0)|) \leq \delta
\end{aligned}$$

desde que:

$$0 < \mu \leq \sqrt[\Pi]{\frac{\delta}{\omega_{\mathcal{A}}^{-1}\left(\frac{\delta}{C_{\mathcal{A}}+1}\right)}} \quad (2.23)$$

Assim, segue de (2.21), (2.22) e (2.23) que o "regime de ajustamento de magnitude pequena" para o lema de  $(m,p)$ -aproximação é válido desde que:

$$0 < \mu \leq \min \left\{ 1, \frac{1}{\sqrt[s]{\|u\|_{L^\infty(Q_1^-)}}}, \sqrt[\kappa]{\frac{\delta}{\|f\|_{L^{q,r}(Q_1^-)} + 1}}, \sqrt[\Pi]{\frac{\delta}{\omega_{\mathcal{A}}^{-1}\left(\frac{\delta}{C_{\mathcal{A}}+1}\right)}} \right\},$$

na função  $v_\mu$ .

### 2.3 Resultado Principal

Ao longo dessa seção será enunciado o principal resultado desse capítulo (com prova adiada para a seção seguinte) além de um panorama geral sobre as implicações desse fato para além das notas desse texto, apresentando os cenários onde de fato a estimativa pode ser vista como melhorada e ótima diante dos resultados já encontrados na literatura.

Mais precisamente, será derivado o expoente ótimo e melhorado em certos cenários sobre regularidade ótima de integrabilidade dadas por (W-CC) e respectivamente (S-CC)) para a Hölder regularidade das soluções fracas da equação (2.1) sobre as condições (P1)-(P4). Mais precisamente será encontrado

$$\alpha := \min \left\{ \max \left\{ \frac{\alpha_{\text{Hom}}^- p}{p_m + \alpha_{\text{Hom}}(m+p-3)}, \frac{2\alpha_{\text{Hom}}^-(p-1)}{p_m(m+p-2)} \right\}, \frac{(pq-n)r-pq}{q[(r-1)(m+p-2)+1]} \right\}, \quad (\text{sharp})$$

onde  $\alpha_{\text{Hom}} \in (0, 1]$  é o expoente Hölder ótimo para o problema homogêneo com coeficientes constantes e  $\iota^-$  significa que podemos escolher qualquer valor  $s \in (0, \iota)$ , e

$$p_m := \begin{cases} 2 & \text{se } m = 1 \\ p & \text{se } m > 1. \end{cases} \quad (p_m)$$

Levando em conta as definições anteriores, segue o resultado principal desse capítulo:

**Teorema 2.4.** *Seja  $u$  uma solução fraca e limitada da equação (2.1) em  $Q_1^-$  e suponha que (P1)-(P4) estão em vigor. Então,  $u \in C_{loc}^{\alpha, \frac{\alpha}{\theta}}(Q_1^-)$  (no sentido parabólico), i.e., existe uma constante  $M_0(\text{universal}) > 0$  tal que*

$$[u]_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{\theta}}(Q_{\frac{1}{2}}^-)} \leq M_0 \cdot \left[ \|u\|_{L^\infty(Q_1^-)} + \|f\|_{L^{q,r}(Q_1^-)} \right],$$

onde  $\alpha \in (0, 1)$  é definido por (sharp),  $\theta$  é dado por (2.3), e

$$[u]_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{\theta}}(Q_{\frac{1}{2}}^-)} := \sup_{0 < \rho \leq \rho_0} \left( \inf_{(x_0, t_0) \in Q_{\rho_0}^-} \frac{\|u - u(x_0, t_0)\|_{L^\infty(Q_{\rho_0}^-(x_0, t_0) \cap Q_{\frac{1}{2}}^-)}}{\rho_0^\alpha} \right).$$

**Observação 2.2.** *O teorema 2.4 assegura a  $\alpha$ -Hölder continuidade, em face da seção 4. Com efeito, será visto na última parte da tese que os espaços de Hölder quando equipados da métrica parabólica são idênticos aos espaços de Campanato.*

Atente que

$$M_\sharp < \alpha_{\text{Hom}} \quad \text{para qualquer } p > 2 \quad \text{e } m > 1, \quad (2.24)$$

onde

$$M_\sharp := \max \left\{ \frac{\alpha_{\text{Hom}}^- p}{p_m + \alpha_{\text{Hom}}(m + p - 3)}, \frac{2\alpha_{\text{Hom}}^-(p - 1)}{p_m(m + p - 2)} \right\}.$$

Ademais, cabe ressaltar que, em vista de (S-CC), podemos escrever (sharp) como segue

$$\frac{(pq - n)r - pq}{q[(r - 1)(m + p - 2) + 1]} = \frac{p \left[ 1 - \left( \frac{n}{pq} + \frac{1}{r} \right) \right]}{p \left[ 1 - \left( \frac{n}{pq} + \frac{1}{r} \right) \right] + \left\{ \left[ \frac{3}{r} + m \left( 1 - \frac{1}{r} \right) + \frac{n}{q} \right] - 2 \right\}} \in (0, 1).$$

O caráter ótimo das estimativas deve ser entendido como segue:

$$\begin{cases} \text{Se } M_\sharp \leq \frac{(pq - n)r - pq}{q[(r - 1)(m + p - 2) + 1]} & \text{então } u \in C_{loc}^{\alpha, \frac{\alpha}{\theta}} & \text{para qualquer } \alpha < M_\sharp; \\ \text{Se } M_\sharp > \frac{(pq - n)r - pq}{q[(r - 1)(m + p - 2) + 1]} & \text{então } u \in C_{loc}^{\alpha, \frac{\alpha}{\theta}} & \text{para } \alpha = \frac{(pq - n)r - pq}{q[(r - 1)(m + p - 2) + 1]}. \end{cases}$$

Quanto ao expoente  $\alpha_{\text{Hom}}$  ótimo, a função de Barenblatt

$$\mathcal{B}_{m,p}(x, t) := \begin{cases} \frac{1}{t^{\lambda_0}} \left[ 1 - b(m, n, p) \left( \frac{|x|}{t^{\frac{1}{\lambda_0}}} \right)^{\frac{p}{p-1}} \right]_+^{\frac{p-1}{m+p-3}} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

é a solução fundamental da equação

$$u_t - \operatorname{div}(m|u|^{m-1}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0,$$

onde

$$\lambda_0 = n(m+p-3) \quad \text{e} \quad b(m, n, p) = \frac{p-1}{p} \frac{m+p-3}{(m+p-2)\lambda_0^{\frac{1}{p-1}}}.$$

Um expoente Hölder ótimo sugerido por ((67, p. 2012) e (70, Observação 3.4)) deve ser

$$\alpha_{\text{Hom}} = \min \left\{ 1, \frac{p-1}{m+p-3} \right\}. \quad (2.25)$$

Quando o termo fonte é essencialmente limitado

$$\alpha \rightarrow \min \left\{ M_{\sharp}, \frac{p}{m+p-2} \right\}$$

Além disso,  $\frac{p}{m+p-2} \geq \frac{p-1}{m+p-3}$  se, e somente se  $m \geq 2$ .

Nesse contexto, usando (2.24) and (2.25) conclui-se que

$$0 < \alpha \leq \frac{p-1}{m+p-3} \quad q = r = \infty \quad \text{para qualquer } p > 2 \text{ e } m \geq 2.$$

Para finalizar essa seção serão mostrados os cenários que o resultado obtido por Araújo (8, Teorema 1.1) dentre outros, de fato, é melhorado. Para tanto devemos ter,

$$\frac{2(p-1)}{p_m(m+p-2)} \leq \frac{p-1}{m+p-2} \quad \text{para qualquer } p \geq 2 \text{ e } m \geq 1 \quad (2.26)$$

então, devemos impor (para  $m > 1$ ) a seguinte condição algébrica:

$$\frac{\alpha_{\text{Hom}}^- p}{p + \alpha_{\text{Hom}}^-(m+p-3)} \geq \frac{\alpha_{\text{Hom}}^-(p-1)}{m+p-2} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_{\text{Hom}} \leq \frac{m-1}{p-1} \cdot \frac{p}{p+m-3}. \quad (2.27)$$

tal condição surge quando comparado os coeficientes obtidos por Araújo e (sharp) usando (2.26).

Assim, analisamos os seguintes cenários:

- (1) Por exemplo, para  $m = 1$ , que não está incluído em (2.27), onde  $\alpha_{\text{Hom}} = 1$  e  $p_m = 2$  em (sharp). Temos

$$\alpha = \frac{(pq-n)r-pq}{q[(p-1)r-(p-2)]},$$

o que concorda com as estimativas ótimas de Teixeira-Urbano em (101, Teorema 3.4).

(2) Se  $p = 2$  então a equação (2.27) permanece verdadeira para qualquer  $m > 1$ . Em particular, as estimativas de regularidade do recente resultado em (53, Teorema 2.5) (veja também (5, Teorema 6)).

(3) Se  $\frac{m-1}{p-1} \cdot \frac{p}{p+m-3} \geq 1$ , então (2.27) é válida trivialmente. Tal condição implica

$$m \geq p \left[ (p-1) \left( 1 - \frac{3}{p} \right) + 1 \right].$$

(4) Por outro lado, se  $\frac{m-1}{p-1} \cdot \frac{p}{p+m-3} < 1$  em (2.27), então podemos comparar com o resultado esperado (e conjecturado) como limitante superior ótimo em (2.25) (para  $m \geq 2$ ). Assim,

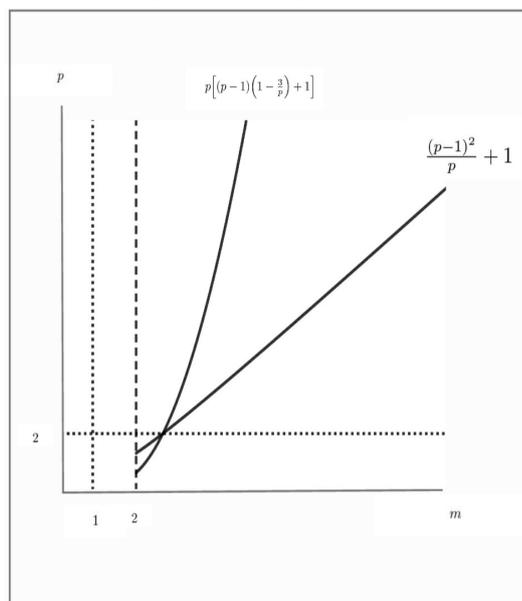
$$\frac{p-1}{m+p-3} \leq \frac{m-1}{p-1} \cdot \frac{p}{p+m-3}$$

se e somente se

$$\max \left\{ 2, \frac{(p-1)^2}{p} + 1 \right\} \leq m < p \left[ (p-1) \left( 1 - \frac{3}{p} \right) + 1 \right].$$

Desse modo, temos os cenários, que fornecem condições necessárias que melhoram a Hölder regularidade, unificando e extendendo os resultados já presentes na literatura. Abaixo, segue as regiões citadas nos itens anteriores:

Figura 2: Região  $\mathcal{I}_{m,p}$ .



Fonte: elaborada pelo autor.

Na sequência segue a região onde as estimativas são melhoradas:

$$\mathcal{I}_{m,p} := \{(m, p) \in (1, \infty) \times [2, \infty) : (2.27) \text{ é válida}\}. \quad (2.28)$$

Com efeito, diante de (2), (3) e (possivelmente (4)), o que garante que  $\mathcal{I}_{m,p} \neq \emptyset$ .

## 2.4 Estimativas ótimas via processo iterativo

O processo iterativo que se inicia a partir de agora consiste em prover o expoente ótimo sharp para a equação 2.1, com auxílio de 2.1. Veremos que há o controle da oscilação nos cilindros parabólicos, desde que a imagem da solução no centro da base dos cilindros tenha magnitude controlada.

Vale ressaltar que a escolha do processo iterativo não é arbitrária, com efeito, em face da dupla degenerescência, não podemos usar a caracterização de Hölder continuidade de Campanato-Da Prato. Ora, não se sabe, *a priori*, se

$$u_k(x, t) := \frac{u(\rho^k x + x_0, \rho^{k\theta} t + t_0) - \mathbf{c}_k}{\rho^{k\alpha}},$$

para  $\mathbf{c}_k \in \mathbb{N}$ , uma sequência de constantes, é solução de (2.1), uma vez que

$$u \mapsto \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(m|u|^{m-1}|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$$

não é invariante por translações por constante.

A seguir, o primeiro passo do processo indutivo.

**Lema 2.2.** *Existem  $\varepsilon > 0$  e  $\lambda \in (0, \frac{1}{4}]$  ambos dependendo somente de parâmetros universais  $m, n, p$  e  $\alpha$ , tal que se*

$$\max \{ \|f\|_{L^{q,r}(Q_1)}, \Theta_{\mathcal{A}}(y, \tau, x, t) \} < \varepsilon$$

e  $u$  é uma solução fraca de (2.1) em  $Q_1^-$ , com  $\|u\|_{L^\infty(Q_1^-)} \leq 1$ , então

$$\|u\|_{L^\infty(Q_{\lambda}^-)} \leq \lambda^\alpha \quad \text{desde que} \quad |u(0,0)| \leq \frac{\lambda^\alpha}{4}.$$

**Prova.** Fixado um  $\delta \in (0, 1)$  a ser escolhido *a posteriori* o lema de  $(m, p)$ -aproximação 2.1 garante que existe  $\varepsilon > 0$  pequeno o suficiente e uma solução fraca  $\phi$  de (2.11) tal que

$$\|u - \phi\|_{L^\infty(Q_{\frac{1}{2}}^-)} \leq \delta$$

Seguem de (67) e (91) que  $\phi \in C_{\text{loc}}^{\alpha_{\text{Hom}}, \frac{\alpha_{\text{Hom}}}{pm}}(Q_1^-)$  para um expoente Hölder

$0 < \alpha_{\text{Hom}} \leq 1$  e  $p_m$  como em  $(p_m)$ . Em particular, no cilindro  $\theta$ -parabólico vale

$$|\phi(x, t) - \phi(y, s)| \leq \gamma \left( |x - y|^{\alpha_{\text{Hom}}} + \|u\|_{L^\infty(Q_{\frac{1}{2}}^-)}^{\frac{m-1}{p}} \sqrt[p_m]{|t - s|^{\alpha_{\text{Hom}}}} \right) \quad \forall (x, t), (y, s) \in Q_{\frac{1}{2}}^-.$$

Escolhendo  $\lambda \in (0, \frac{1}{4}]$  temos  $Q_\lambda^- \subset B_{\frac{1}{2}} \times (-\frac{1}{2\theta}, 0] = Q_{\frac{1}{2}}^-$ .

Assim, para  $m > 1$  (e (2.28) em uso) afirmamos que  $\phi$  satisfaz

$$\sup_{(x,t) \in Q_\lambda} |\phi(x, t) - \phi(0, 0)| \leq C\lambda^{\frac{\theta\alpha_{\text{Hom}}}{p}} \quad (\text{resp. } \dots \leq C\lambda \text{ se } m = 1)$$

para  $\lambda \ll 1$ , a ser escolhido, e  $C > 1$ . Por outro lado, para qualquer  $m \geq 1$  e  $p \geq 2$  segue

$$\sup_{(x,t) \in Q_\lambda} |\phi(x, t) - \phi(0, 0)| \leq C\lambda^{\frac{2\alpha_{\text{Hom}}(p-1)}{p_m(p+m-2)}}.$$

De fato, para  $(x, t) \in Q_\lambda^-$  e  $m > 1$  (e (2.28) em uso) temos

$$\begin{aligned} |\phi(x, t) - \phi(0, 0)| &\leq |\phi(x, t) - \phi(0, t)| + |\phi(0, t) - \phi(0, 0)| \\ &\leq k_1|x - 0|^{\alpha_{\text{Hom}}} + k_2|t - 0|^{\frac{\alpha_{\text{Hom}}}{p}} \\ &\leq k_1\lambda^{\alpha_{\text{Hom}}} + k_2\lambda^{\frac{\theta\alpha_{\text{Hom}}}{p}} \\ &\leq \max\{k_1, k_2\}\lambda^{\frac{\theta\alpha_{\text{Hom}}}{p}}, \quad (\text{resp. } \leq \max\{k_1, k_2\}\lambda \text{ se } m = 1), \end{aligned}$$

onde foi usado que para  $m > 1$  vale  $\theta \leq p$ , que implica  $\alpha_{\text{Hom}} \geq \frac{\theta\alpha_{\text{Hom}}}{p}$  (resp. para  $m = 1$ , segue que  $\alpha_{\text{Hom}} = 1$  and  $2 \leq \theta \leq p$ , implicando em  $1 \leq \frac{\theta}{2}$ ). Por outro lado, para qualquer  $m \geq 1$  e  $p \geq 2$  uma vez que

$$\theta \geq 1 + \frac{p-1}{p+m-2} \geq \frac{2(p-1)}{p+m-2}$$

obtemos

$$\begin{aligned} |\phi(x, t) - \phi(0, 0)| &\leq |\phi(x, t) - \phi(0, t)| + |\phi(0, t) - \phi(0, 0)| \\ &\leq k_1|x - 0|^{\alpha_{\text{Hom}}} + k_2|t - 0|^{\frac{\alpha_{\text{Hom}}}{p}} \\ &\leq k_1\lambda^{\alpha_{\text{Hom}}} + k_2\lambda^{\frac{\theta\alpha_{\text{Hom}}}{p}} \\ &\leq k_1\lambda^{\frac{\alpha_{\text{Hom}}(p-1)}{p+m-2}} + k_2\lambda^{\frac{2\alpha_{\text{Hom}}(p-1)}{p_m(p+m-2)}} \\ &\leq \max\{k_1, k_2\}\lambda^{\frac{2\alpha_{\text{Hom}}(p-1)}{p_m(p+m-2)}}, \end{aligned}$$

Assim, para  $m > 1$  (e (2.28) em uso) podemos obter a estimativa usando o lema de  $\delta$ -aproximação (Lemma 2.1) resultando

$$\begin{aligned} \sup_{Q_\lambda^-} |u| &\leq \sup_{Q_{\frac{1}{2}}^-} |u - \phi| + \sup_{Q_\lambda^-} |\phi(x, t) - \phi(0, 0)| + |u(0, 0) - \phi(0, 0)| + |u(0, 0)| \\ &\leq 2\delta + C\lambda^{\frac{\theta\alpha_{\text{Hom}}}{p}} + \frac{\lambda^\alpha}{4} \quad (\text{resp. } \leq 2\delta + C\lambda + \frac{\lambda^\alpha}{4} \text{ se } m = 1). \end{aligned}$$

Para qualquer  $m \geq 1$  e  $p \geq 2$  temos

$$\begin{aligned} \sup_{Q_\lambda^-} |u| &\leq \sup_{Q_{\frac{1}{2}}^-} |u - \phi| + \sup_{Q_\lambda^-} |\phi(x, t) - \phi(0, 0)| + |u(0, 0) - \phi(0, 0)| + |u(0, 0)| \\ &\leq 2\delta + C\lambda^{\frac{2\alpha_{\text{Hom}}(p-1)}{p_m(m+p-2)}} + \frac{\lambda^\alpha}{4}. \end{aligned}$$

Finalmente, tomando

$$\lambda \in \left( 0, \min \left\{ \frac{1}{4}, \left( \frac{1}{4C} \right)^{\frac{p}{\theta_{\text{Hom}} - p\alpha}} \right\} \right] \quad \text{e} \quad \delta \in \left( 0, \frac{\lambda^\alpha}{4} \right] \quad \text{para } m > 1,$$

(e (2.28) em uso)

$$\text{resp. } \lambda \in \left( 0, \min \left\{ \frac{1}{4}, \left( \frac{1}{4C} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \right\} \right] \quad \text{e} \quad \delta \in \left( 0, \frac{\lambda^\alpha}{4} \right] \quad \text{para } m = 1,$$

Para qualquer  $m \geq 1$  e  $p \geq 2$  temos

$$\lambda \in \left( 0, \min \left\{ \frac{1}{4}, \left( \frac{1}{4C} \right)^{\frac{p_m(m+p-2)}{2\alpha_{\text{Hom}}(p-1) - \alpha p_m(m+p-2)}} \right\} \right] \quad \text{e} \quad \delta \in \left( 0, \frac{\lambda^\alpha}{4} \right],$$

e finalmente juntando todas as desigualdades anteriores obtemos a desigualdade desejada  $\square$

**Observação 2.3.** *É importante ressaltar que devemos impor*

$$\theta_{\text{Hom}} - p\alpha > 0 \quad (\text{resp. } 2\alpha_{\text{Hom}}(p-1) - \alpha p_m(m+p-2) > 0).$$

Ademais, invocando a definição de  $\theta$  em (2.3), temos que para  $m > 1$  (e (2.28) em vigor)

$$\alpha \in \left( 0, \frac{p\alpha_{\text{Hom}}}{p + \alpha_{\text{Hom}}(m+p-3)} \right) \quad (\text{resp. } \alpha \in (0, 1) \text{ para } m = 1),$$

Por outro lado, para qualquer  $m \geq 1$  e  $p \geq 2$  temos

$$\alpha \in \left( 0, \frac{2\alpha_{\text{Hom}}(p-1)}{p_m(m+p-2)} \right).$$

Em ambos os casos, uma vez que  $\alpha_{\text{Hom}} = 1$  e  $p_m = 2$  quando  $m = 1$ , podemos reescrever tais condições de maneira unificada

$$\alpha \in \left( 0, \max \left\{ \frac{p\alpha_{\text{Hom}}}{p_m + \alpha_{\text{Hom}}(m+p-3)}, \frac{2\alpha_{\text{Hom}}(p-1)}{p_m(m+p-2)} \right\} \right),$$

onde  $p_m$  é dado por  $(p_m)$ .

Com o intuito de obter um controle preciso da influência da magnitude  $|u(0, 0)|$ , as soluções serão iteradas (usando o lema 2.2) nos  $\lambda$ - cilindros parabólicos.

**Lema 2.3.** *Suponha que as hipóteses do lema sejam válidas. Então,*

$$\|u\|_{L^\infty(Q_{\lambda^k}^-)} \leq \lambda^{\alpha k} \quad \text{desde que} \quad |u(0, 0)| \leq \frac{\lambda^{\alpha k}}{4} \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}. \quad (2.29)$$

**Prova.** A prova segue por indução. O caso  $k = 1$  é precisamente o lema anterior 2.2. Suponha agora que (2.29) seja válido para todos os valores  $j = 1, 2, \dots, k$ . Para concluir a prova checamos a validade da implicação para  $j = k + 1$ . Para isso, defina  $v_k : Q_1^- \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$v_k(x, t) := \frac{u(\lambda^k x, \lambda^{k\theta} t)}{\lambda^{k\alpha}}.$$

A função  $v_k$  é uma solução fraca de

$$\frac{\partial v_k}{\partial t} - \operatorname{div}(\mathcal{A}_k(x, t, v_k, \nabla v_k)) = f_k(x, t) \quad \text{em } Q_1^-,$$

onde

$$\begin{cases} \mathcal{A}_k(x, t, s, \xi) & := \lambda^{-k\alpha(m+p-2)+k(p-1)} \mathcal{A}(\lambda^k x, \lambda^{k\theta} t, \lambda^{k\alpha} s, \lambda^{(\alpha-1)k} \xi) \\ f_k(x, t) & := \lambda^{-k\alpha(m+p-2)+k(p-1)+k} f(\lambda^k x, \lambda^{k\theta} t). \end{cases}$$

A sequência de campos  $\mathcal{A}_k$  pertence a classe que satisfaz (P1)-(P2). Com efeito,

$$\begin{cases} \langle \mathcal{A}_k(x, t, s, \xi), \xi \rangle \geq C_1 \Gamma(|s|) |\xi|^p \\ |\mathcal{A}_k(x, t, s, \xi)| \leq C_2 \Gamma(|s|) |\xi|^{p-1}. \end{cases}$$

onde

$$\Gamma(|s|) = \lambda^{-k\alpha(m-1)} \Phi(|s|)$$

Ademais, a hipótese de indução implica que

$$\|v_k\|_{L^\infty(Q_1^-)} \leq 1 \quad \text{e} \quad |v_k(0, 0)| = \frac{|u(0, 0)|}{\lambda^{k\alpha}} \leq \frac{\lambda^{(k+1)\alpha}}{4\lambda^{k\alpha}} = \frac{\lambda^\alpha}{4}.$$

O termo fonte tem norma mista estimada como

$$\begin{aligned}
\|f_k\|_{L^{q,r}(Q_1)}^r &= \int_{-1}^0 \left( \int_{B_1} |f_k(x,t)|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} dt \\
&= \int_{-1}^0 \left( \int_{B_1} \lambda^{(-k\alpha(m+p-2)+k(p-1)+k)q} |f(\lambda^k x, \lambda^{k\theta} t)|^q dx \right)^{\frac{r}{q}} dt \\
&= \int_{-1}^0 \left( \int_{B_{\lambda^k}} \lambda^{[(-k\alpha(m+p-2)+k(p-1)+k)q-nq]} |f(z, \lambda^{k\theta} t)|^q dz \right)^{\frac{r}{q}} dt \\
&= \lambda^{[(-k\alpha(m+p-2)+k(p-1)+k)q-nq]\frac{r}{q}} \cdot \lambda^{-k\theta} \int_{-\lambda^{k\theta}}^0 \left( \int_{B_{\lambda^k}} |f(z, \tau)|^q dz \right)^{\frac{r}{q}} d\tau
\end{aligned}$$

Assim,

$$\|f_k\|_{L^{q,r}(Q_1^-)}^r \leq \lambda^{[(-k\alpha(m+p-2)+k(p-1)+k)q-nk]\frac{r}{q}-k\theta} \|f\|_{L^{q,r}(Q_{\lambda^k}^-)}^r.$$

Agora, observe que

$$[(-k\alpha(m+p-2)+k(p-1)+k)q-nk]\frac{r}{q}-k\theta \geq 0 \iff \alpha \leq \frac{r(pq-n)-pq}{q[(m+p-2)r-(m+p-3)]}.$$

Disto, como  $\lambda \in (0, \frac{1}{4}]$ , segue que

$$\|f_k\|_{L^{q,r}(Q_1^-)} \leq \|f\|_{L^{q,r}(Q_{\lambda^k}^-)} \leq \|f\|_{L^{q,r}(Q_1^-)} \leq \delta.$$

Finalmente,

$$\sup_{0 < \rho \leq \rho_0} \sup_{(y,\tau),(x,t) \in Q_\rho} \Theta_{\mathcal{A}_k}(y, \tau, x, t) \leq \sup_{0 < \rho \leq \rho_0} \sup_{(y,\tau),(x,t) \in Q_{\rho^k}} \Theta_{\mathcal{A}}(y, \tau, x, t) \leq \delta$$

Assim,  $v_k$  recai nas hipóteses do lema 2.2. De onde segue pela hipótese de indução,

$$\|v_k\|_{L^\infty(Q_\lambda^-)} \leq \lambda^\alpha \implies \|u\|_{L^\infty(Q_{\lambda^{k+1}}^-)} \leq \lambda^{\alpha(k+1)},$$

□

Antes da prova do teorema principal, resta garantir que o controle imposto para a oscilação nas proposições anteriores não é restritivo e funciona para raios pequenos.

**Proposição 2.2.** *Seja  $u$  uma solução fraca e limitada da equação (2.1) em  $Q_1^-$  e  $\lambda$  como no lema 2.2. Então, para  $\rho \in (0, \lambda)$  e  $C > 0$  uma constante universal, temos*

$$\|u\|_{L^\infty(Q_\rho^-)} \leq C\rho^\alpha \quad \text{desde que} \quad |u(0,0)| \leq \frac{\rho^\alpha}{4}.$$

**Prova.** Inicialmente, definimos a função auxiliar  $\zeta : Q_1^- \rightarrow \mathbb{R}$  given by

$$\zeta(x, t) := \xi u(\xi^a x, \xi^{m+p-3+pa} t)$$

com constantes  $a > 0$  e  $\xi > 0$  a serem determinadas *a posteriori*.

A função  $\zeta$  satisfaz no sentido fraco

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \operatorname{div}(\hat{\mathcal{A}}(x, t, \zeta, \nabla \zeta)) = \hat{f}(x, t) \quad \text{in} \quad Q_1^-,$$

onde

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{A}}(x, t, s, \varsigma) & := \xi^{(1+a)(p-1)+(m-1)} \mathcal{A}(\xi^a x, \xi^{m+p-3+pa} t, \xi^{-1} s, \xi^{-(1+a)} \varsigma) \\ \hat{f}(x, t) & := \xi^{(1+a)(p-1)+(m-1)+a} f(\xi^a x, \xi^{m+p-3+pa} t) \end{cases}$$

Agora,

$$\|\hat{f}\|_{L^{q,r}(Q_1^-)}^r \leq \xi^{[(p-1)(1+a)+m-1+a]q-na] \frac{r}{q} - (m+p-3+pa)} \|f\|_{L^{q,r}(Q_1)}^r,$$

onde  $a > 0$  é escolhido tal que

$$[(p-1)(1+a) + m - 1 + a]q - na] \frac{r}{q} - (m + p - 3 + pa) > 0,$$

escolha possível graças as condições de compatibilidade (W-CC)

$$a < \frac{q[(m+p-2)(r-1) + 1]}{pq(r-1) - nr}.$$

Além disso, tomando  $\xi \ll 1$ , recaímos no regime de ajustamento exigido em 2.29, i.e.,

$$\|\zeta\|_{L^\infty(Q_1^-)} \leq 1 \quad \text{e} \quad \max \left\{ \|\hat{f}\|_{L^{q,r}(Q_1^-)}, \Theta_{\hat{\mathcal{A}}}(y, \tau, x, t) \right\} \leq \varepsilon.$$

Assim, dado  $\rho \in (0, \lambda)$ , existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que

$$\lambda^{k+1} < \rho \leq \lambda^k.$$

mas, uma vez que

$$|u(0, 0)| \leq \frac{\rho^\alpha}{4} \leq \frac{\lambda^{k\alpha}}{4}$$

segue pelo teorema 2.29 que

$$\|u\|_{L^\infty(Q_{\lambda^k}^-)} \leq \lambda^{k\alpha}.$$

De onde resulta

$$\|u\|_{L^\infty(Q_\rho^-)} \leq \|u\|_{L^\infty(Q_{\lambda^k}^-)} \leq \lambda^{k\alpha} \leq \left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^\alpha = C\rho^\alpha.$$

□

**Prova do teorema 2.4.** É suficiente mostrar que existe uma constante  $M_0(\text{universal}) > 0$  tal que

$$\|u - u(0, 0)\|_{L^\infty(Q_\rho^-)} \leq M_0 \rho^\alpha. \quad (2.30)$$

De fato, pela continuidade de  $u$ , a imagem  $u(0, 0)$  existe, e assim podemos definir

$$\mu := (4|u(0, 0)|)^{1/\alpha} \geq 0. \quad (2.31)$$

Agora, considere  $\rho \in (0, \lambda)$ . Desse modo a análise ocorrerá em três casos independentes:

(1) Se  $\rho \in [\mu, \lambda)$ :

Nesse caso

$$|u(0, 0)| = \frac{\mu^\alpha}{4} \leq \frac{\rho^\alpha}{4}.$$

Assim, pela proposição 2.2 temos

$$\sup_{Q_\rho^-} |u(x, t) - u(0, 0)| \leq C\rho^\beta + |u(0, 0)| \leq \left(C + \frac{1}{4}\right)\rho^\alpha. \quad (2.32)$$

(2) Se  $\rho \in (0, \mu)$ :

Para  $(x, t) \in Q_{\frac{1}{\mu}}^-$ , definimos

$$w(x, t) := \frac{u(\mu x, \mu^\theta t)}{\mu^\alpha}.$$

Atente que  $|w(0, 0)| = \frac{1}{4}$ . Além disso,  $w$  satisfaz no sentido fraco

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \operatorname{div}(\mathcal{A}_\mu(x, t, w, \nabla w)) = f_\mu(x, t) \quad \text{em} \quad Q_{\frac{1}{\mu}}^-,$$

onde

$$\begin{cases} \mathcal{A}_\mu(x, t, s, \varsigma) & := \mu^{-[\alpha(m-1)+(\alpha-1)(p-1)]} \mathcal{A}(\mu x, \mu^\theta t, \mu^\alpha s, \mu^{\alpha-1} \varsigma) \\ f_\mu(x, t) & := \mu^{-[\alpha(m-1)+(\alpha-1)(p-1)]+1} f(\mu x, \mu^\theta t). \end{cases}$$

Assim, mais uma vez pela proposição 2.2 aplicada a  $u$ , segue que

$$\|w\|_{L^\infty(Q_{\frac{1}{\mu}}^-)} = \frac{1}{\mu^\alpha} \|u\|_{L^\infty(Q_\mu^-)} \leq \frac{C\mu^\alpha}{\mu^\alpha} = C, \quad (2.33)$$

pois  $|u(0, 0)| = \frac{\mu^\alpha}{4}$ . De posse da última estimativa, juntando com a regularidade  $C_{\text{loc}}^{0,\alpha}$  obtida em 2.2, garante-se a existência de um raio  $\rho_0 > 0$ , dependendo de parâmetros universais, tais que

$$|w(x, t)| \geq \frac{1}{8} \quad \text{para todo} \quad (x, t) \in Q_{\rho_0}^-.$$

De fato, da estimativa  $\alpha_0$ -Hölder (Teorema 2.2) obtem-se em  $Q_{\rho_0}^-$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} &= |w(0, 0)| \\
&\leq |w(x_m, t_m) - w(0, 0)| + |w(x_m, t_m)| \\
&\leq \gamma \cdot \left( |x_m|^{\alpha_0} + |t_m|^{\frac{\alpha_0}{p_m}} \right) + |w(x_m, t_m)| \\
&\leq \gamma \cdot \left( \rho_0^{\alpha_0} + \rho_0^{\frac{\alpha_0 \theta}{p_m}} \right) + \frac{1}{8} \\
&\leq 2\gamma \rho_0^{\frac{\alpha_0 \theta}{p_m}} + \frac{1}{8},
\end{aligned}$$

onde  $(x_m, t_m) \in Q_{\rho_0}^-$  é um ponto onde  $w$  atinge o seu mínimo. Assim,

$$\rho_0 \geq \left( \frac{1}{16\gamma} \right)^{\frac{p_m}{\alpha_0 \theta}}. \quad (2.34)$$

Com isso  $w$  satisfaz no sentido fraco

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \operatorname{div}(\mathbf{a}_0(x, t)|\nabla w|^{p-2}\nabla w) = f(x, t) \quad \text{em } Q_{\rho_0}^-,$$

onde  $f \in L^{q,r}(Q_1^-)$  (com (W-CC) em vigor) e  $(x, t) \mapsto \mathbf{a}_0(x, t) = \mathbf{a}_0(x, t, w)$  é uma função contínua. Ademais,

$$0 < C_1 \gamma_1 \left( \frac{1}{8} \right)^{m-1} \leq \mathbf{a}_0(x, t, w) \leq C_2 \gamma_2 \|w\|_{L^\infty(Q_1^-)}^{m-1} < \infty$$

para constantes positivas  $C_1, C_2, \gamma_1$  e  $\gamma_2$  provenientes das propriedades (P1)-(P2). Com efeito, temos que pela propriedade (P1):

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{a}_0(x, t, w)|\nabla w|^{p-2}\nabla w, \nabla w \rangle &\geq C_1 |\nabla w|^p \Phi(|w|) \\
\mathbf{a}_0(x, t, w)|\nabla w|^p &\geq C_1 |\nabla w|^p \gamma_1 |w|^{m-1} \\
\mathbf{a}_0(x, t, w) &\geq C_1 \gamma_1 \left( \frac{1}{8} \right)^{m-1}
\end{aligned}$$

agora usando a propriedade (P2):

$$\begin{aligned}
|\mathbf{a}_0(x, t, w)|\nabla w|^{p-2}\nabla w| &\leq C_2 \Phi(|w|)|\nabla w|^{p-1} \\
\mathbf{a}_0(x, t, w) &\leq C_2 \gamma_2 \|w\|_{L^\infty(Q_1^-)}^{m-1}.
\end{aligned}$$

Em outras palavras, podemos tratar o problema original (à luz das considerações anteriores), como uma equação do tipo  $p$ -laplaciano.

Assim, pelo teorema 2.10,  $w \in C^{\hat{\alpha}, \frac{\hat{\alpha}}{\theta}}(Q_{\rho_0}^-)$ , com

$$\hat{\alpha} = \frac{(pq - n)r - pq}{q[(p-1)r - (p-2)]} \geq \frac{(pq - n)r - pq}{q[(r-1)(m+p-2) + 1]}.$$

Adicionalmente, é válido

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &\geq \min \left\{ \max \left\{ \frac{\alpha_{\text{Hom}}^- p}{p_m + \alpha_{\text{Hom}}^-(m+p-3)}, \frac{2\alpha_{\text{Hom}}^-(p-1)}{p_m(m+p-2)} \right\}, \frac{(pq-n)r-pq}{q[(p-1)r-(p-2)]} \right\} \\ &\geq \min \left\{ \max \left\{ \frac{\alpha_{\text{Hom}}^- p}{p_m + \alpha_{\text{Hom}}^-(m+p-3)}, \frac{2\alpha_{\text{Hom}}^-(p-1)}{p_m(m+p-2)} \right\}, \frac{(pq-n)r-pq}{q[(r-1)(m+p-2)+1]} \right\} \\ &= \alpha.\end{aligned}$$

Pelo teorema 2.10 conseguimos uma constante  $K_0(\text{universal}) > 0$

$$\|w - w(0, 0)\|_{L^\infty(Q_\rho^-)} \leq K_0 \rho^{\hat{\alpha}} \quad \forall 0 < \rho < \frac{\rho_0}{2}.$$

Agora, uma vez que  $\alpha \leq \hat{\alpha}$ , podemos concluir

$$\sup_{(x,t) \in Q_{\mu\rho}^-} |u(x, t) - u(0, 0)| \leq K_0 (\mu\rho)^\alpha, \quad \text{para qualquer } 0 < \mu\rho < \mu \frac{\rho_0}{2}.$$

Assim,

$$\sup_{(x,t) \in Q_\rho^-} |u(x, t) - u(0, 0)| \leq K_0 \rho^\alpha, \quad \text{para qualquer } 0 < \rho < \mu \frac{\rho_0}{2}. \quad (2.35)$$

(3) Se  $\rho \in [\mu \frac{\rho_0}{2}, \mu)$ :

Nesse caso, obtemos (usando o item (1) e (2.34))

$$\begin{aligned}\sup_{(x,t) \in Q_\rho^-} |u(x, t) - u(0, 0)| &\leq \sup_{(x,t) \in Q_\mu} |u(x, t) - u(0, 0)| \\ &\leq \left(C + \frac{1}{4}\right) \mu^\alpha \\ &\leq \left(C + \frac{1}{4}\right) \left(\frac{2\rho}{\rho_0}\right)^\alpha \\ &\leq \left(C + \frac{1}{4}\right) 2^\alpha (16\gamma)^{\frac{pm\alpha}{\alpha_0\theta}} \rho^\alpha.\end{aligned} \quad (2.36)$$

Assim, tomando

$$M_0 := \max \left\{ C + \frac{1}{4}, K_0, \left(C + \frac{1}{4}\right) 2^\alpha (16\gamma)^{\frac{pm\alpha}{\alpha_0\theta}} \right\} = \max \left\{ K_0, \left(C + \frac{1}{4}\right) 2^\alpha (16\gamma)^{\frac{pm\alpha}{\alpha_0\theta}} \right\}$$

e combinando (2.32), (2.35) e (2.36), obtemos (2.30), para qualquer  $\rho \in (0, \lambda)$ .

Finalmente, um argumento standard de recobrimento garante a estimativa desejada em qualquer sub-domínio compactamente contido, ou seja

$$[u]_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{\theta}}(Q_{\frac{1}{2}}^-)} \leq M_0(\text{universal}),$$

o que completa a prova.  $\square$

## 2.5 Aplicações

### 2.5.1 Um lema do tipo Liouville

Como aplicação do teorema principal 2.4, resulta um teorema tipo Liouville, que afirma que uma solução fraca e inteira da equação parabólica duplamente degenerada

$$u_t - \operatorname{div}(m|u|^{m-1}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0$$

deve ser constante desde que  $|u(x, t)| = O(\|(x, t)\|^\chi)$  para uma semi-norma apropriada e um expoente  $\chi > 0$  a serem definidos *a posteriori*.

Antes da prova, seguem as notações necessárias : Dado  $\beta \in (0, \alpha)$ , onde  $\alpha \in (0, 1)$  é o expoente ótimo de regularidade definido em (sharp). Agora, assim como antes, definimos o escalonamento para a variável temporal como:

$$\theta(\beta) = p(1 - \beta) + \beta(3 - m). \quad (2.37)$$

Para tal  $\theta(\beta)$ , consideramos os cilindros intrínsecos parabólicos:

$$\mathcal{C}_\tau^{\theta(\beta)} := \left( -\frac{1}{2}\tau^{\theta(\beta)}, \frac{1}{2}\tau^{\theta(\beta)} \right) \times B_\tau(0)$$

e a norma intrínseca:

$$\|(x, t)\|_{\theta(\beta)} := |t|^{1/\theta(\beta)} + |x|.$$

A seguir o resultado para a versão duplamente degenerada encontrado em (102, Teorema 1), que seguirá as mesmas linhas da prova.

**Teorema 2.5.** *Seja  $u$  uma solução inteira da equação*

$$\mathcal{Q}_{m,p} = u_t - \operatorname{div}(m|u|^{m-1}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

*Suponha que, para algum  $0 < \beta < 1$ , vale*

$$u(x, t) = O(\|(x, t)\|_{\theta(\beta)}^\beta) \quad \text{quando } \|(x, t)\|_{\theta(\beta)} \rightarrow \infty. \quad (2.38)$$

*Então,  $u$  é constante.*

**Prova.** Fixe um  $\beta < \alpha < 1$  (para  $\alpha$  como em (sharp)) e um número  $R \gg 1$  grande, e defina  $\mathcal{C}_1^{\theta(\beta)} \equiv \mathcal{C}_1$  a função

$$\mathcal{S}_R(x, t) := \frac{u(Rx, R^{\theta(\beta)}t)}{R^\beta}$$

Inicialmente, iremos mostrar que

$$\|\mathcal{S}_R\|_{L^\infty(\mathcal{C}_1)} \leq C \quad \text{para } R \gg 1. \quad (2.39)$$

Com efeito, seja  $(x_R, t_R) \in \bar{\mathcal{C}}_1$  um ponto onde  $\mathcal{S}$  atinge o seu máximo, isto é

$$\|\mathcal{S}_R\|_{L^\infty(\mathcal{C}_1)} = |\mathcal{S}_R(x_R, t_R)| = \left| \frac{u(Rx_R, R^{\theta(\beta)}t_R)}{R^\beta} \right|$$

Agora, atente que

$$\|(Rx_R, R^{\theta(\beta)}t_R)\|_{\theta(\beta)}^\beta \leq (2R)^\beta.$$

assim,

$$\frac{1}{2^\beta} \|\mathcal{S}_R\|_{L^\infty(\mathcal{C}_1)} = \left| \frac{u(Rx_R, R^{\theta(\beta)}t_R)}{(2R)^\beta} \right| \leq \frac{|u(Rx_R, R^{\theta(\beta)}t_R)|}{\|(Rx_R, R^{\theta(\beta)}t_R)\|_{\theta(\beta)}^\beta}. \quad (2.40)$$

A partir de agora tomamos o limite em (6.4) quando  $R \rightarrow \infty$ , e analisamos dois casos:

1. Se  $\|(Rx_R, R^{\theta(\beta)}t_R)\|_{\theta(\beta)} \rightarrow \infty$

Nesse caso, o lado direito em (2.40) é limitado, usando a hipótese (2.38). O que confirma a afirmação acima.

2. Se  $\|(Rx_R, R^{\theta(\beta)}t_R)\|_{\theta(\beta)}$  permanece limitado

Então, uma vez que  $u$  é contínua, em conjuntos compactos

$$\left| \frac{u(Rx_R, R^{\theta(\beta)}t_R)}{(2R)^\beta} \right| \leq \frac{C}{(2R)^\beta} \rightarrow 0$$

e mais uma vez (2.39) é válida.

Agora, observe que:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{S}_R}{\partial t}(x, t) = R^{\theta(\beta)-\beta} \frac{\partial u}{\partial t}(Rx, R^{\theta(\beta)}t) \\ \Delta_{m,p} \mathcal{S}_R(x, t) = R^{[p(1-\beta)+\beta(1-m)+\beta]} (\Delta_{m,p} u)(Rx, R^{\theta(\beta)}t). \end{cases}$$

Logo,

$$\frac{\partial \mathcal{S}_R}{\partial t} - \operatorname{div}(|\mathcal{S}_R|^{m-1} |\nabla \mathcal{S}_R|^{p-2} \nabla \mathcal{S}_R) = 0 \quad \text{em } \mathcal{C}_1. \quad (2.41)$$

Agora, para  $\beta < \alpha < 1$  e seu correspondente  $\theta(\alpha)$ , afirmamos que, pela definição em (2.37),  $\beta \mapsto \theta(\beta)$  é uma função decrescente, então  $\theta_\alpha < \theta_\beta$ . Portanto, pelo teorema 2.4, obtemos

$$|\mathcal{S}_R(x, t) - \mathcal{S}_R(0, 0)| \leq C \cdot \left( |t|^{1/\theta(\alpha)} + |x| \right)^\alpha \quad \forall (x, t) \in \mathcal{C}_{\frac{1}{2}}^{\theta(\alpha)} \quad (2.42)$$

Usando a definição da função  $\mathcal{S}_R$  e escalonando-a em  $Q_{\frac{1}{2}}^{\theta(\alpha)}$

$$\begin{aligned}
\sup_{C_{\frac{R}{2}}^{\theta(\alpha)}} \frac{|u(x,t)-u(0,0)|}{(|t|^{1/\theta(\alpha)}+|x|)^\alpha} &= \sup_{C_{\frac{1}{2}}^{\theta(\alpha)}} \frac{|u(Rx,R^{\theta(\alpha)}t)-u(0,0)|}{R^\alpha(|t|^{1/\theta(\alpha)}+|x|)^\alpha} \\
&= R^{\beta-\alpha} \sup_{C_{\frac{1}{2}}^{\theta(\alpha)}} \frac{|\mathcal{S}_R(x,R^{-\theta(\beta)+\theta(\alpha)}t)-\mathcal{S}_R(0,0)|}{(|t|^{1/\theta(\alpha)}+|x|)^\alpha} \\
&\leq R^{\beta-\alpha} \sup_{C_{\frac{1}{2}}^{\theta(\alpha)}} \frac{|\mathcal{S}_R(x,R^{-\theta(\beta)+\theta(\alpha)}t)-\mathcal{S}_R(0,0)|}{(|R^{-\theta(\beta)+\theta(\alpha)}t|^{1/\theta(\alpha)}+|x|)^\alpha} \\
&= o(1) \quad \text{quando } R \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

usando (2.42), uma vez que foi tomado  $R \gg 1$  grande o suficiente, pode-se assegurar que  $R^{\theta(\alpha)-\theta(\beta)} < 1$ . Finalmente, segue que  $u \equiv u(0,0)$  em todo  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ .  $\square$

### 2.5.2 Estimativas assintóticas para problemas “próximos” a equação do calor

Nessa última seção será provado que soluções fracas de

$$u_t - \operatorname{div}(m|u|^{m-1}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(x,t) \quad \text{em } Q_1^-, \quad (2.43)$$

se tornam “assintoticamente suaves” enquanto o caso modelo “estiver” próximo (em uma maneira apropriada a ser esclarecida em breve) a equação homogênea do calor  $\mathcal{H}u = u_t - \Delta u = 0$ . Para isso, será usada a estratégia (que pode ser encontrada em (105)) que consiste em considerar o seguinte parâmetro:

$$\beta := \frac{m-1}{p-1} \quad \text{para } m \geq 1 \quad \text{e } p \geq 2. \quad (2.44)$$

Com ajuda de (2.44) e da regra da cadeia podemos reescrever a equação (2.43) como

$$u_t - \Psi(m,p,\beta)\operatorname{div}(|\nabla u^{\beta+1}|^{p-2}\nabla u^{\beta+1}) = f(x,t) \quad \text{em } Q_1^-, \quad (2.45)$$

onde  $\Psi(m,p,\beta) = m\left(\frac{1}{\beta+1}\right)^{p-1}$ .

A partir de agora, será considerado a formulação acima (2.45) para o nosso caso modelo. Além do mais a constante  $\Psi$  é estável quando os parâmetros  $m$  e  $p$  estão próximos aos da equação do calor, i.e.,

$$\Psi(m,p,\beta) \rightarrow 1 \quad \text{quando } p \rightarrow 2^+ \quad \text{e } m \rightarrow 1^+.$$

Na sequência, será derivado um mecanismo chave que fornece um link entre a teoria de regularidade estudada aqui e a do operador homogêneo do calor.

**Lema 2.4 (Lema da aproximação calórica).** *Dado  $\delta > 0$ , existe  $\epsilon > 0$  e  $\epsilon^* > 0$ , dependendo somente de  $n$  e  $\delta$ , tal que se  $u$  é solução fraca de (2.45) com  $\|u\|_{L^\infty(Q_1^-)} \leq 1$ ,*

e

$$\max\{|p-2|, |m-1|\} < \epsilon \quad e \quad \|f\|_{L^{q,r}(Q_1^-)} \leq \epsilon^*,$$

então podemos encontrar  $w$  satisfazendo

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = 0 & \text{em } Q_{\frac{1}{2}}^- \\ w = u & \text{em } \partial_p Q_{\frac{1}{2}}^- \end{cases} \quad (2.46)$$

tal que

$$\sup_{Q_{\frac{1}{2}}^-} |w - u| \leq \delta.$$

**Prova.** Suponha para efeito de contradição que a tese do lema não se confirma. Isso significa que deve existir um  $\delta_0 > 0$  e seqüências

$$\begin{cases} (p_j)_j, (m_j)_j, (u_j)_j, \text{ e } (f_j)_j \\ (\beta_j) := \frac{m_j-1}{p_j-1} \\ \Psi(m_j, p_j, \beta_j) := m_j \left( \frac{1}{\beta_j+1} \right)^{p_j-1} \\ v_j := u_j^{\beta_j+1}, \end{cases}$$

tal que

$$(*) \begin{cases} (u_j)_t - \Psi(m_j, p_j, \beta_j) \operatorname{div}(|\nabla v_j|^{p_j-2} \nabla v_j) = f_j & \text{em } Q_1^- \\ \|u_j\|_{L^\infty(Q_1^-)} \leq 1 \\ \|f_j\|_{L^{q,r}(Q_1^-)} < \frac{1}{j} \\ |p_j - 2|, |m_j - 1| < \frac{1}{j}. \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = 0 & \text{em } Q_{\frac{1}{2}}^- \\ w = u & \text{em } \partial_p Q_{\frac{1}{2}}^-. \end{cases} \quad (2.47)$$

Entretanto,

$$\sup_{Q_{\frac{1}{2}}^-} |u_j - w| > \delta_0 \quad \text{para cada } j \in \mathbb{N}. \quad (2.48)$$

Inicialmente, é válido que

$$p_j \rightarrow 2, m_j \rightarrow 1 \quad \text{e} \quad \beta_j \rightarrow 1 \quad \text{quando} \quad j \rightarrow \infty. \quad (2.49)$$

Agora, como na prova do lema de aproximação 2.1, módulo subsequência,

$$u_j \rightarrow u_\infty \quad \text{em} \quad Q_{\frac{1}{2}}^-. \quad (2.50)$$

Ademais, em vista de (2.49) e (2.50), e mais uma vez argumentando como na prova do lema de aproximação 2.1 podemos invocar o resultado de estabilidade, como em (74), a fim de passar o limite na equação satisfeita por  $u_j$  para concluir que  $u_\infty$  é uma solução fraca de

$$\mathfrak{h}_t - \Delta \mathfrak{h} = 0 \quad \text{em} \quad Q_{\frac{1}{2}}^-.$$

O que é uma contradição segundo (2.48) para  $j$  suficientemente grande (2.48).  $\square$

A regularidade assintótica obtida com os parâmetros próximos ao caso linear é motivo do último teorema.

**Teorema 2.6.** *Seja  $u$  uma solução limitada de (2.43), onde  $f \in L^{q,r}(Q_1^-)$  e*

$$\frac{1}{r} + \frac{n}{pq} < 1 \quad \text{e} \quad \frac{3}{r} + m \left(1 - \frac{1}{r}\right) + \frac{n}{q} \leq 2$$

*estão em vigor. Dado,  $\alpha \in (0, 1)$ , existe um  $\varepsilon_0 > 0$  tal que se  $\max\{m - 1, p - 2\} < \varepsilon_0$ , então qualquer solução de (2.43) pertence à  $C^{\alpha, \frac{\alpha}{\theta}}$  (no sentido parabólico). Além disso, existe uma constante  $M_0(\text{universal}) > 0$  tal que*

$$[u]_{C^{\alpha, \frac{\alpha}{\theta}}(Q_{\frac{1}{2}}^-)} \leq M_0 \cdot \left[ \|u\|_{L^\infty(Q_1^-)} + \|f\|_{L^{q,r}(Q_1^-)} \right].$$

*Quantitativamente, tal estimativa é testemunha que  $u \in C^{1^-, \frac{1}{2}^-}(Q_{\frac{1}{2}}^-)$ .*

**Prova.** Com ajuda do lema de aproximação calórica, i.e. lema 2.4, e fazendo uso das estimativas de regularidade  $C_{\text{loc}}^{1, \frac{1}{2}}$  para perfis calóricos  $\mathfrak{h}_t - \Delta \mathfrak{h} = 0$  (see (56, Ch.2, §3)), pode-se proceder similarmente como na prova do teorema 2.4. Por essa razão, omite-se os detalhes.  $\square$

## 2.6 Comentários finais e outros problemas relacionados

A última seção se presta a apresentar uma família de operadores onde os resultados apresentados ao longo do estudo são aplicáveis.

**Exemplo 1.** *Um exemplo típico de operadores que satisfazem as hipóteses (P1)-(P3), e que podem ser aplicados os resultados do nosso estudo é dado por*

$$(\Omega_T, \mathbb{R}, \mathbb{R}^N) \ni (x, t, s, \xi) \mapsto \mathcal{A}(x, t, s, \xi) = \mathbf{a}(x, t)|s|^{m-1}|\xi|^{p-2}\xi, \quad \text{for } m \geq 1, p \geq 2,$$

onde  $\mathbf{a}$  é uma função limitada longe da origem e do infinito satisfazendo

$$|\mathbf{a}(z) - \mathbf{a}(z_0)| \leq \omega(|z - z_0|)$$

para um módulo de continuidade  $\omega : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ . Pelo menos, no caso  $\mathbf{a} = \text{const.}$  se reduz ao bem conhecido operador  $(m, p)$ -Laplaciano.

Em conclusão, como consequência dos nossos resultados, é possível agora discutir questões sobre a regularidade para soluções fracas não-negativas e limitadas de problemas não lineares duplamente degenerados (um tipo de equação de Trudinger sublinear  $k \leq \min\{p - 1, 1\}$ ) como segue

$$(u^k)_t - \text{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f(x, t) \quad \text{in } \Omega_T, \quad \text{for } p > 2 \quad \text{and } k \in (0, 1). \quad (2.51)$$

Tal equação exibe uma característica interessante: ela é singular no tempo, uma vez que  $u^{k-1}$  explode nos pontos onde  $\{u = 0\}$ , e é degenerada no espaço, uma vez que o módulo de elipticidade, a saber,  $|Du|^{p-2}$ , colapsa nos pontos onde  $\{|Du| = 0\}$ . Neste cenário, fornecemos mais uma contribuição para o estudo de tal classe de EDP's, que modelam a filtração turbulenta de fluidos não-newtonianos através de um meio poroso, ver (50) para um manuscrito esclarecedor sobre este tópico, e (61), e (54) e (79) para resultados de regularidade relacionados para o problema homogêneo e a equação de Trudinger.

Com efeito, equações como (2.51) são equivalentes àsquelas como (2.1) desde que soluções fracas estejam estritamente distantes de zero. Na verdade, realizando a mudança  $v = u^k$ , a equação (2.51) se torna

$$v_t - \text{div} \left( \frac{1}{k^{p-1}} v^{\frac{(1-k)(p-1)}{k}} |\nabla v|^{p-2} \nabla v \right) = f(x, t) \quad \text{em } \Omega_T.$$

Nessa configuração, temos  $m = \frac{(1-k)(p-1)}{k} + 1 \geq 1$  para  $p > 2$  e  $0 < k < 1$ . Assim, nós podemos acessar a regularidade ótima/melhorada disponível no teorema (2.4), deste modo estabelecendo os correspondentes de (2.51). Precisamente, soluções fracas de

(2.51) são  $C_{\text{loc}}^{\alpha, \frac{\alpha}{\theta}}(\Omega_T)$ , onde

$$\alpha := \min \left\{ \max \left\{ \frac{kp\alpha_{\text{Hom}}^-}{kp_m + \alpha_{\text{Hom}}(p-1-k)}, \frac{2k\alpha_{\text{Hom}}^-}{p_m} \right\}, \frac{k[(pq-n)r-pq]}{q[(r-1)(p-1)+k]} \right\}$$

e

$$\theta := p - \alpha \left( \frac{p-1}{k} \right) \cdot \left( 1 - \frac{k}{p-1} \right),$$

onde  $\alpha_{\text{Hom}} > 0$  foram avaliadas recentemente em (61, Teorema 2.3).

Finalmente, como no Teorema 2.6 as estimativas prévias são estáveis quando o parâmetro  $k \rightarrow 1^-$ , assim podemos recuperar as estimativas ótimas para o  $p$ -laplaciano de evolução discutidas em (101, Teorema 3.4).

### 3 PROBLEMA SINGULARMENTE PERTURBADO

A parte final desse trabalho tem como referência principal o trabalho (30) e destina-se ao estudo local e ótimo das estimativas geométricas Lipschitz ótimas de soluções de uma fase para problemas singularmente perturbados com degenerescência não-homogênea. Mais precisamente: fixado um parâmetro  $\varepsilon \in (0, 1)$ , aspira-se  $u^\varepsilon \geq 0$  solução de viscosidade para

$$\begin{cases} \mathcal{H}(x, \nabla u^\varepsilon)F(x, D^2 u^\varepsilon) = \zeta_\varepsilon(x, u^\varepsilon) & \text{em } \Omega \\ u^\varepsilon(x) = g(x) & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (P_\varepsilon)$$

em um aberto limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , onde  $0 \leq g \in C^0(\partial\Omega)$ , e  $F$  um operador de segunda ordem, totalmente não linear e uniformemente elíptico.

O processo de difusão é assumido como anisotrópico, ou seja, a difusão assume propriedades diferentes em direções distintas. Ademais a degenerescência do modelo é dupla e não-homogênea, colapsando quando  $|\nabla u^\varepsilon| \sim 0$ . Por fim, o termo fonte tem comportamento singular da ordem  $O(\varepsilon^{-1})$  próximo o nível  $\varepsilon$  da solução.

Em suma, sob condições apropriadas, vamos mostrar que para  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , a família de soluções  $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  para  $(P_\varepsilon)$  são aproximações assintóticas de uma solução de uma fase  $u_0$  para um problema não linear e não homogêneo de fronteira livre.

#### 3.1 Hipóteses principais

Aqui seguem as hipóteses estruturais assumidas para o presente capítulo:

(A0) **(Continuidade e Condição de Normalização)**

$$\text{Fixado } \Omega \ni x \mapsto F(x, \cdot) \in C^0(\text{Sym}(N)) \quad \text{e} \quad F(\cdot, O_{N \times N}) = 0.$$

(A1) **(Elipticidade Uniforme)** Para qualquer par de matrizes  $X, Y \in \text{Sym}(N)$

$$\mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^-(X - Y) \leq F(x, X) - F(x, Y) \leq \mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^+(X - Y)$$

onde  $\mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^\pm$  são os *operadores extremais de Pucci* dados por

$$\mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^-(X) := \lambda \sum_{e_i > 0} e_i(X) + \Lambda \sum_{e_i < 0} e_i(X) \quad \text{e} \quad \mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^+(X) := \Lambda \sum_{e_i > 0} e_i(X) + \lambda \sum_{e_i < 0} e_i(X)$$

para *constantes de elipticidade*  $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$ , onde  $\{e_i(X)\}_i$  são autovalores de  $X$ .

Para obter as estimativas Lipschitz, devemos exigir um certo tipo de hipótese sobre os coeficientes da equação:

(A2) ( $\omega$ -**continuidade dos coeficientes**) Existe um módulo (uniforme) de continuidade  $\omega : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  e uma constante  $C_F > 0$  tal que

$$\Omega \ni x, x_0 \mapsto \Theta_F(x, x_0) := \sup_{\substack{X \in \text{Sym}(N) \\ X \neq 0}} \frac{|F(x, X) - F(x_0, X)|}{\|X\|} \leq C_F \omega(|x - x_0|),$$

que mede a oscilação dos coeficientes de  $F$  ao redor de  $x_0$ . Finalmente, definimos

$$\|F\|_{C^\omega(\Omega)} := \inf \left\{ C_F > 0 : \frac{\Theta_F(x, x_0)}{\omega(|x - x_0|)} \leq C_F, \quad \forall x, x_0 \in \Omega, \quad x \neq x_0 \right\}.$$

Agora, cabe ressaltar que as propriedades de difusão do modelo ( $P_\epsilon$ ) degeneram ao longo de um conjunto de pontos singulares desconhecido *a priori* onde pode-se contar com a existência de soluções:

$$\mathcal{S}_0(u, \Omega') := \{x \in \Omega' \subseteq \Omega : |\nabla u(x)| = 0\}.$$

Contudo a definição acima não leva em conta a natureza das soluções, uma vez que como dito anteriormente não sabemos ainda quando existem, e neste caso, como se comportam, daí o uso do termo *desconhecido* no parágrafo anterior. Por essa razão, iremos destacar que  $\mathcal{H} : \Omega \times \mathbb{R}^N \rightarrow [0, \infty)$  se comporta como

$$L_1 \cdot \mathcal{K}_{p,q,a}(x, |\xi|) \leq \mathcal{H}(x, \xi) \leq L_2 \cdot \mathcal{K}_{p,q,a}(x, |\xi|) \quad (3.1)$$

para constantes  $0 < L_1 \leq L_2 < \infty$ , onde

$$\mathcal{K}_{p,q,a}(x, |\xi|) := |\xi|^p + \mathbf{a}(x)|\xi|^q, \quad \text{para } (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^N. \quad (\mathbf{N-HDeg})$$

Além do mais, para a degenerescência não-homogênea (**N-HDeg**), considera-se que os expoentes  $p, q$  e a função moduladora  $\mathbf{a}(\cdot)$  satisfazem

$$0 < p \leq q < \infty \quad \text{e} \quad \mathbf{a} \in C^0(\Omega, [0, \infty)). \quad (3.2)$$

Grosseiramente falando,  $\mathcal{H}$  satisfaz condições de crescimento distintas na origem e no infinito:

$$\lim_{|\xi| \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{H}(x, \xi)}{|\xi|^p(1 + \mathbf{a}(x))} \in (0, \infty) \quad \text{e} \quad \lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{H}(x, \xi)}{|\xi|^q(1 + \mathbf{a}(x))} \in [0, \infty)$$

Ademais, (para  $p \neq q$ )

$$\lim_{|\xi| \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{H}(x, \xi)}{|\xi|^q} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{H}(x_0, \xi)}{|\xi|^p} = \begin{cases} \text{finito} & \text{se } \mathbf{a}(x_0) = 0 \\ +\infty & \text{se } \mathbf{a}(x_0) > 0. \end{cases}$$

Finalmente sobre o campo  $\mathcal{H}$  temos que existe uma constante universal  $C_{\mathbf{a}}$  e um módulo de continuidade  $\omega_{\mathbf{a}} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  tal que:

$$|\mathcal{H}(x, \xi) - \mathcal{H}(y, \xi)| \leq C_{\mathbf{a}} \omega_{\mathbf{a}}(|x - y|) |\xi|^q \quad (3.3)$$

Por sua vez, o termo de reação, isto é,  $\zeta_{\epsilon} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , representa a perturbação singular do modelo. Para fins da nossa análise, o comportamento singular analisado é da ordem  $O\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$  ao longo das camadas do nível  $\epsilon > 0$ , isto é,  $\{u_{\epsilon} \sim \epsilon\}$ . Assim, lidamos com termos de reação satisfazendo

$$\mathcal{B}_0 \leq \zeta_{\epsilon}(x, t) \leq \frac{\mathcal{A}}{\epsilon} \chi_{(0, \epsilon)}(t) + \mathcal{B}, \quad \forall (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (3.4)$$

para constantes não-negativas  $\mathcal{A}, \mathcal{B}_0, \mathcal{B} \geq 0$ . Atente que  $\zeta_{\epsilon} \equiv 0$  satisfaz (3.4). No entanto, podemos impor a seguinte condição de não-degenerescência para assegurar que o termo de reação é genuinamente singular:

$$\mathcal{J} := \inf_{\Omega \times [t_0, T_0]} \epsilon \zeta_{\epsilon}(x, \epsilon t) > 0, \quad (3.5)$$

para quaisquer constantes  $0 \leq t_0 < T_0 < \infty$ , onde  $\mathcal{J}$  não depende de  $\epsilon$ . Intuitivamente, (3.5) assegura que o termo singular se comporta como  $\sim \frac{1}{\epsilon} \chi_{(0, \epsilon)}$  mais um termo não-negativo que permanece controlado uniformemente. De fato, um exemplo coberto por essa análise são termos de reação construídos como um múltiplo de uma aproximação da identidade mais uma função uniformemente limitada

$$\zeta_{\epsilon}(x, t) := \mathcal{Q}(x) \frac{1}{\epsilon} \zeta\left(\frac{t}{\epsilon}\right) + f_{\epsilon}(x). \quad (3.6)$$

Para tais aproximações,  $0 < \mathcal{Q} \in C^0(\overline{\Omega})$ ,  $0 \leq \zeta \in C^{\infty}(\mathbb{R})$  com  $\text{supp } \zeta = [0, 1]$ , e  $f_{\epsilon}$  é uma função não-negativa limitada longe do infinito. Finalmente, observe que o termo de reação (3.6) deve satisfazer (3.4) e (3.5) com  $\mathcal{A} = \|\mathcal{Q}\|_{L^{\infty}(\Omega)} \|\zeta\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}_+)}$ ,  $\mathcal{B}_0 = \inf_{\Omega} f_{\epsilon}(x)$  e  $\mathcal{B} = \|f_{\epsilon}\|_{L^{\infty}(\Omega)}$ .

### 3.2 Enunciado dos resultados principais

A fim de formular os resultados principais, se faz necessário introduzir algumas definições. Como ponto de partida segue a definição de solução no sentido da viscosidade de

$$\mathcal{G}(x, \nabla u, D^2 u) = f(x, u(x)) \quad (3.7)$$

onde  $\mathcal{G}(x, \nabla u, D^2u) := \mathcal{H}(x, \nabla u)F(x, D^2u)$ .

Sejam duas funções contínuas  $\bar{u}$  e  $\bar{v}$  definidas em um aberto  $A \subset \Omega$ . Para  $x_0 \in A$ , dizemos que  $\bar{v}$  *toca*  $\bar{u}$  por cima (baixo) de  $x_0$  em  $A$  sempre que:

$$\begin{aligned} \bar{u}(x) &\leq \bar{v}(x) \quad (\text{resp.} \quad \bar{v}(x) \leq \bar{u}(x)) \quad \forall x \in A \\ \bar{u}(x_0) &= \bar{v}(x_0) \end{aligned}$$

**Definição 3.1 (Solução no sentido da viscosidade).** *Uma função  $u \in C(\Omega)$  é chamada subsolução (supersolução) de viscosidade de*

$$\mathcal{G}(x, \nabla u(x), D^2u(x)) = f(x, u(x)) \quad \text{em } \Omega,$$

*se sempre que  $\phi$  parabolóide toca  $u$  por cima (por baixo) em  $x_0 \in \Omega$  se cumpre*

$$\mathcal{G}(x, \nabla \phi(x_0), D^2\phi(x_0)) \geq f(x_0, \phi(x_0)) \quad (\text{resp.} \leq f(x_0, \phi(x_0))).$$

*Finalmente, uma função  $u$  é uma solução de viscosidade quando é simultaneamente sub e supersolução.*

A fim de provar algumas propriedades geométricas chaves de soluções, é fundamental adotar uma noção mais apropriada de solução no sentido da viscosidade. Na verdade,  $(P_\epsilon)$  não tem um princípio de comparação, portanto, as afirmações de unicidade podem não ser verdadeiras. Portanto, faremos uma escolha particular de soluções. Por esta razão, a *abordagem de supersolução mínima* ocorre em nossos estudos por meio das *soluções do tipo Perron*.

**Definição 3.2 (Solução de Perron).** *Fixada uma subsolução de viscosidade  $u_\star$ , e uma supersolução de viscosidade  $u^\star$  para  $(P_\epsilon)$ , obedecendo  $u_\star \leq u^\star$ , em  $\Omega$ , a solução de Perron  $u^\epsilon$  é dada por*

$$u^\epsilon(x) = \inf \{w(x); w \text{ é uma supersolução para } (P_\epsilon), \text{ e } u_\star \leq w \leq u^\star\}. \quad (3.8)$$

*Cabe ressaltar que para cada  $\epsilon > 0$  fixado, a existência de soluções de Perron segue pelo método de sub-supersoluções encontrado, por exemplo, em (27, Teorema 4.1). Assim, a partir de agora,  $u^\epsilon$  será uma solução de Perron para  $(P_\epsilon)$ , construída como em (3.8).*

No primeiro resultado é estabelecido a existência de soluções de Perron para  $(P_\epsilon)$  levando em consideração a geometria do ambiente da equação, cuja prova se encontra no apêndice desse trabalho, mais precisamente

**Teorema 3.1 (Existência de soluções de Perron).** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado e com fronteira  $C^2$  e seja  $0 \leq g \in C(\partial\Omega)$  um dado de fronteira. Então, para cada  $\epsilon > 0$  existe uma solução de viscosidade não-negativa  $u^\epsilon \in C(\bar{\Omega})$  para  $(P_\epsilon)$ .*

O próximo resultado garante a estimativa uniforme para o gradiente, esta por sua vez garante a compacidade local na topologia da convergência uniforme.

**Teorema 3.2 (Estimativa Lipschitz ótima).** *Seja  $\{u^\epsilon\}_{\epsilon>0}$  uma solução de  $(P_\epsilon)$ . Dado  $\Omega' \Subset \Omega$ , existe uma constante  $C_0$  dependendo da dimensão, das constantes de elipticidade e  $\Omega'$ , mas independente de  $\epsilon > 0$ , tal que*

$$\|\nabla u^\epsilon\|_{L^\infty(\Omega')} \leq C_0.$$

*Adicionalmente, se  $\{u^\epsilon\}_{\epsilon>0}$  é uma família uniformemente limitada<sup>i</sup>, então ela é pré-compacta na topologia Lipschitz.*

**Observação 3.1.** *Note que a estimativa uniforme para o gradiente não estão confinada ao nicho das soluções de Perron, isto é, o resultado vale para quaisquer soluções de viscosidade de  $P_\epsilon$ .*

A regularidade Lipschitz ótima será derivada usando um instrumento essencial, nomeadamente, as estimativas  $C_{\text{loc}}^{1,\alpha}$  encontradas em (38). Outras peças importantes são versões da desigualdade de Harnack e um lema do tipo Hopf não homogêneo notoriamente adaptados para o caso duplamente degenerado, veja, no apêndice A para mais detalhes.

A partir de agora, fixaremos a distância de um ponto do conjunto de não-coincidência  $x_0 \in \Omega \cap \{u^\epsilon > 0\}$  até a fronteira de transição aproximada  $\{u^\epsilon \leq \epsilon\}$ , por

$$d_\epsilon(x_0) := \text{dist}(x_0, \{u^\epsilon \leq \epsilon\}).$$

A seguir, será provado, que no interior  $\{u^\epsilon > \epsilon\}$ , as soluções crescem de maneira linear longe das  $\epsilon$ -superfícies de nível.

**Teorema 3.3 (Crescimento linear).** *Seja  $\{u^\epsilon\}_{\epsilon>0}$  uma solução de Perron de  $(P_\epsilon)$ . Existe  $c$  (parâmetros universais)  $> 0$  tal que, para  $x_0 \in \{u^\epsilon > \epsilon\}$  e  $0 < \epsilon \ll d_\epsilon(x_0) \ll 1$ , vale*

$$u^\epsilon(x_0) \geq c \cdot d_\epsilon(x_0).$$

A prova para o crescimento linear consiste na construção de uma função barreira apropriada junto com a minimilidade das soluções de Perron.

Essa ideia foi inicialmente introduzida por Ricarte nos manuscritos (7) e (94) para o cenário totalmente não linear.

Do ponto de vista da fronteira livre é importante destacar que as soluções de viscosidade de  $(P_\epsilon)$  desenvolvem duas “fronteiras livres distintas”: a primeira é o conjunto dos pontos singulares  $\mathcal{S}_0(u^\epsilon, \Omega')$  de soluções que existem, e a segunda  $\Gamma_\epsilon = \{u^\epsilon \sim \epsilon\}$  ( $\epsilon$  – superfícies de nível). Uma das dificuldades nesse estudo consiste em mostrar que essas duas fronteiras livres não se intersectam em medida. Na verdade, vamos obter um

---

<sup>i</sup>O limitante que assegura essa afirmação será universal, i.e., dependerá apenas dos dados do problema. Com efeito, essa afirmação é obtida via a aplicação da estimativa ABP adaptada para o nosso contexto.

controle superior/inferior uniforme de  $u^\varepsilon$  em termos de  $\text{dist}(\cdot, \Gamma_\varepsilon)$ :

$$\text{dist}(x_0, \Gamma_\varepsilon) \lesssim u^\varepsilon(x_0) \lesssim \text{dist}(x_0, \Gamma_\varepsilon).$$

Agora, provaremos que as soluções de Perron são fortemente não-degeneradas próximo das  $\varepsilon$ -superfícies de nível. Em suma, o máximo de  $u^\varepsilon$  na fronteira da bola  $B_\rho(x_0)$ , centrada em  $\{u^\varepsilon > \varepsilon\}$ , é da ordem de  $\rho$ .

**Teorema 3.4 (Não-degenerescência forte).** *Dado  $\Omega' \Subset \Omega$ , existe uma constante  $c(\text{universal}) > 0$  tal que, para  $x_0 \in \{u^\varepsilon > \varepsilon\}$ ,  $\varepsilon \ll \rho \ll 1$ , deve valer*

$$c \cdot \rho \leq \sup_{B_\rho(x_0)} u^\varepsilon(x) \leq c^{-1} \cdot (\rho + u^\varepsilon(x_0)).$$

Como consequência do teorema 3.2 temos o seguinte resultado:

**Teorema 3.5 (Cenário Limite).** *Seja  $u^\varepsilon$  uma solução de  $(P_\varepsilon)$ , então para qualquer sequência  $\varepsilon_k \rightarrow 0^+$  existe uma subsequência  $\varepsilon_{k_j} \rightarrow 0^+$  e  $u_0 \in C_{\text{loc}}^{0,1}(\Omega)$  tal que*

- (1)  $u^{\varepsilon_{k_j}} \rightarrow u_0$  localmente uniformemente em  $\Omega$ ;
- (2)  $u_0 \in [0, K_0]$  em  $\bar{\Omega}$  para alguma constante  $K_0(\text{universal}) > 0$  (independente de  $\varepsilon$ );
- (3)  $\mathcal{G}(x, \nabla u_0, D^2 u_0) = f_0(x)$  em  $\{u_0 > 0\}$ , com  $0 \leq f_0 \in L^\infty(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ .

A partir de agora, introduzimos a notação, dado um conjunto  $\mathcal{O} \subset \Omega$ :

$$\mathfrak{F}(u_0, \mathcal{O}) := \partial\{u_0 > 0\} \cap \mathcal{O}.$$

**Teorema 3.6 (Comportamento assintótico próximo da fronteira livre).** *Seja  $\Omega' \Subset \Omega$ . Fixe  $x_0 \in \{u_0 > 0\} \cap \Omega'$  tal que  $\text{dist}(x_0, \mathfrak{F}(u_0, \Omega')) \leq \frac{1}{2} \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ . Então existe uma constante  $C > 0$  independente de  $\varepsilon$  tal que*

$$C^{-1} \cdot \text{dist}(x_0, \mathfrak{F}(u_0, \Omega')) \leq u_0(x_0) \leq C \cdot \text{dist}(x_0, \mathfrak{F}(u_0, \Omega')). \quad (3.9)$$

Finalmente, provaremos que a fronteira livre limite  $\mathfrak{F}(u_0, \Omega')$  tem medida  $\mathcal{H}^{N-1}$ -Hausdorff finita. Para este fim, restringimos a análise a uma classe de operadores satisfazendo uma propriedade assintótica de concavidade, que aparecerá precisamente na seção 3.10.

**Teorema 3.7 (Estimativas de Hausdorff).** *Dado  $\Omega' \Subset \Omega$ , existe uma constante positiva  $C(\Omega', \text{parâmetros universais})$  tal que, para  $x_0 \in \mathfrak{F}(u_0, \Omega')$ ,*

$$\mathcal{H}^{N-1}(\mathfrak{F}(u_0, \Omega') \cap B_\rho(x_0)) \leq C \cdot \rho^{N-1}.$$

*Adicionalmente, existe uma constante positiva  $C_1(\Omega', \text{parâmetros universais})$ , tal que para  $\rho \ll 1$  e  $x_0 \in \mathfrak{F}(u_0, \Omega')$ , seja válido*

$$C_1^{-1} \cdot \rho^{N-1} \leq \mathcal{H}^{N-1}(\mathfrak{F}_{red}(u_0, \Omega') \cap B_\rho(x_0)) \leq C_1 \cdot \rho^{N-1}$$

onde  $\mathfrak{F}_{red}(u_0, \Omega') := \partial_{red}\{u_0 > 0\} \cap \Omega'$  é a fronteira reduzida de transição <sup>ii</sup> Em particular,

$$\mathcal{H}^{N-1}(\mathfrak{F}(u_0, \Omega') \setminus \mathfrak{F}_{red}(u_0, \Omega')) = 0.$$

Em conclusão, vale a pena destacar que as descobertas aqui citadas não estão confinadas no âmbito não-variacional, resultados anteriores como (7), (90), (94) e (97), e até certo ponto (28), (55), (85), (88), (89) e (99), dizem respeito a modelos degenerados e variacionais usando diferentes abordagens e técnicas ajustadas ao âmbito dos modelos não lineares com degenerescência não-homogênea. Ademais, eles são novos até mesmo para o modelo :

$$[|\nabla u^\epsilon|^p + \mathbf{a}(x)|\nabla u^\epsilon|^q] \Delta u^\epsilon = \mathcal{Q}(x) \frac{1}{\epsilon} \zeta \left( \frac{u^\epsilon}{\epsilon} \right) + f_\epsilon(x) \text{ (com (3.2) e (3.6) em vigor).}$$

Por fim, é importante ressaltar que esse estudo, se desenvolveu criando ferramentas auxiliares essenciais que, de acordo com o conhecimento científico vigente, não estavam disponíveis na literatura atual para as equações modelo. Assim, eles podem ter seus próprios interesses matemáticos. Entre estes, deve-se citar, desigualdades de Harnack e sua versão fraca, o princípio do Máximo Local, Hölder regularidade, estimativa de ABP e resultados do tipo Hopf não homogêneo, apenas para citar alguns (ver, apêndice para mais detalhes ).

### 3.3 Resultados auxiliares no estudo do caso singularmente perturbado

Na sequência, serão enunciadas ferramentas essenciais para o estudo do caso singularmente perturbado para o problema  $P_\epsilon$ , em tese, estimativas vindas de (38, Teorema 1.1) e (43).

**Teorema 3.8 (Estimativa- $C_{loc}^{1,\alpha}$ ).** *Seja  $F$  um operador satisfazendo (A0)-(A2). Suponha ainda que as hipóteses (3.1) e (3.2) são consideradas. Seja  $u$  uma solução de viscosidade limitada para*

$$\mathcal{G}(x, \nabla u, D^2 u) = f(x, u) \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}).$$

Então,  $u \in C_{loc}^{1,\alpha}(\Omega)$ . Além disso, a seguinte estimativa permanece válida

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}(\Omega')} \leq C \cdot \left( \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + 1 + \|f\|_{L^\infty(\Omega \times \mathbb{R})}^{\frac{1}{p+1}} \right)$$

para uma constante universal  $\alpha \in (0, 1)$  e  $C > 0$ .

<sup>ii</sup>A fronteira reduzida, i.e.  $\partial_{red}\{u_0 > 0\}$  é um subconjunto de  $\partial\{u_0 > 0\}$  onde existe, no sentido teórico da medida, o vetor normal, veja o trabalho (57) para um estudo relativo a teoria geométrica da medida.

**Observação 3.2.** Na sequência, serão recordadas estimativas a serem usadas durante esse capítulo. Precisamente, se  $u$  é uma solução de viscosidade não-negativa de

$$\mathcal{G}(x, \nabla u, D^2 u) = f \in C^0(\Omega) \quad (3.10)$$

e as hipóteses (A0)-(A2), (3.1) e (3.2) valem. Então

(1) **Desigualdade de Harnack:** Se  $f \in L^m(B_1) \cap C^0(B_1)$  com  $m > N$ , então

$$\sup_{B_{1/2}} u(x) \leq C(N, \lambda, \Lambda, p, q, L_1) \cdot \left\{ \inf_{B_{1/2}} u(x) + \max \left\{ \left\| \frac{f}{1 + \mathbf{a}} \right\|_{L^\infty(B_1)}^{\frac{1}{p+1}}, \left\| \frac{f}{1 + \mathbf{a}} \right\|_{L^\infty(B_1)}^{\frac{1}{q+1}} \right\} \right\}.$$

(2) **Estimativas gradiente:** Se  $f \in L^\infty(B_1)$ , então,  $u \in C_{loc}^{1,\alpha}(B_1)$  e

$$|\nabla u(0)| \leq C(N, \lambda, \Lambda, p, \alpha, L_1, L_2, \|F\|_{C^\omega}, \|\mathbf{a}\|_{L^\infty}) \cdot \left( \|u\|_{L^\infty(B_1)} + 1 + \|f\|_{L^\infty(B_1)}^{\frac{1}{p+1}} \right)$$

Agora, segue uma ferramenta útil para comparação de soluções . Para esse propósito, são assumidas as seguintes hipóteses :

1) Existe uma função contínua  $\widehat{\omega} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  com  $\widehat{\omega}(0) = 0$ , tal que se  $X, Y \in \text{Sym}(N)$  e  $\zeta \in (0, \infty)$  satisfazem

$$-\zeta \begin{pmatrix} \text{Id}_N & 0 \\ 0 & \text{Id}_N \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \leq 4\zeta \begin{pmatrix} \text{Id}_N & -\text{Id}_N \\ -\text{Id}_N & \text{Id}_N \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

e  $\text{I}_N$  é matriz identidade em  $\mathbb{R}^N$ , então para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^N$ ,

$$\mathcal{G}(x, \zeta(x-y), X) - \mathcal{G}(y, \zeta(x-y), -Y) \leq \widehat{\omega}(\zeta|x-y|^2) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N, x \neq y. \quad (3.12)$$

2)  $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \geq \beta > -1, (\lambda, \Lambda) \in (\mathbb{R}^+)^2, \quad \forall (x, p, M, N) \in \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^N)^* \times \text{Sym}^2, N \geq 0$

$$|p|^\beta \lambda \text{tr}(N) \leq \mathcal{G}(x, p, M+N) - \mathcal{G}(x, p, M) \leq c(L_2, \|a\|_\infty) (|p|^\alpha + |p|^\beta) \Lambda \text{tr}(N) \quad (3.13)$$

É válido ressaltar que a condição 2) acima não é necessária quando  $\mathcal{G}$  não depende da variável  $x$ . Nesse contexto, as condições (A0) e (A1) são suficientes para o nosso propósito (cf. (27)).

A prova do princípio de comparação é deixada para o apêndice, mais precisamente em 4.

**Lema 3.1 (Princípio de Comparação).** Assuma que as hipóteses (A0)-(A1), (3.1), (3.2), 3.12 e 3.13 estejam em uso. Seja  $f \in C^0(\overline{\Omega})$  e  $h$  uma função contínua e crescente

satisfazendo  $h(0) = 0$ . Suponha que  $u_1$  e  $u_2$  são respectivamente uma supersolução de viscosidade e uma subsolução de viscosidade de

$$\mathcal{G}(x, \nabla w, D^2 w) = h(w) + f(x) \quad \text{em } \Omega.$$

Se  $u_1 \geq u_2$  em  $\partial\Omega$ , então  $u_1 \geq u_2$  em  $\Omega$ .

Além disso, se  $h$  é não-decrescente (em particular se  $h \equiv 0$ ), o resultado permanece válido se  $u_1$  é uma supersolução estrita ou vice versa se  $u_2$  é uma subsolução estrita.

Finalmente, segue a estimativa de ABP para o caso estudado nesse trabalho (cf. (42) e (72)).

**Teorema 3.9 (Estimativa Alexandroff-Bakelman-Pucci).** *Assuma que as hipóteses (A0)-(A2) estão em vigor. Então, existe  $C = C(N, \lambda, p, q, \text{diam}(\Omega)) > 0$  tal que para qualquer  $u \in C^0(\bar{\Omega})$  subsolução de viscosidade (resp. supersolução) de (3.10) em  $\{x \in \Omega : u(x) > 0\}$  (resp.  $\{x \in \Omega : u(x) < 0\}$ ), satisfaz*

$$\sup_{\Omega} u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u^+(x) + C \cdot \text{diam}(\Omega) \max \left\{ \left\| \frac{f^-}{1 + \mathbf{a}} \right\|_{L^N(\Gamma^+(u^+))}^{\frac{1}{p+1}}, \left\| \frac{f^-}{1 + \mathbf{a}} \right\|_{L^N(\Gamma^+(u^+))}^{\frac{1}{q+1}} \right\},$$

$$\left( \text{resp. } \sup_{\Omega} u^-(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u^-(x) + C \cdot \text{diam}(\Omega) \max \left\{ \left\| \frac{f^+}{1 + \mathbf{a}} \right\|_{L^N(\Gamma^+(u^-))}^{\frac{1}{p+1}}, \left\| \frac{f^+}{1 + \mathbf{a}} \right\|_{L^N(\Gamma^+(u^-))}^{\frac{1}{q+1}} \right\} \right)$$

onde  $\Gamma^+(u) := \{x \in \Omega : \exists \xi \in \mathbb{R}^N \text{ tal que } u(y) \leq u(x) + \langle \xi, y - x \rangle \forall y \in \Omega\}$ .

Para finalizar essa seção cabe comentar como construir soluções de viscosidade. A ideia é obter uma solução de Perron, a menor supersolução. O método considerado é obtido adaptando o famigerado método de subsoluções e supersoluções da teoria de viscosidade. Considerado um dado de fronteira regular  $g$ , um par de subsolução e supersolução podem ser obtidos resolvendo

$$\mathcal{G}(x, \nabla \underline{u}^\varepsilon, D^2 \underline{u}^\varepsilon) = \sup_{\Omega \times [0, +\infty)} \zeta_\varepsilon(x, t) \quad \text{e} \quad \mathcal{G}(x, \nabla \bar{u}^\varepsilon, D^2 \bar{u}^\varepsilon) = \inf_{\Omega \times [0, +\infty)} \zeta_\varepsilon(x, t) \quad (3.14)$$

satisfazendo  $\underline{u}^\varepsilon = \bar{u}^\varepsilon = g$  em  $\partial\Omega$ . A existência dessas soluções para (3.14) provém das ideias que podem ser encontradas em (15, Proposições 2 e 3).

Finalmente, fixado uma par de um subsolução e uma supersolução da equação  $(P_\varepsilon)$  o procedimento a seguir fornece a existência das soluções de Perron, que tem a sua confirmação assegurada em 4:

**Teorema 3.10.** *Seja  $\mathcal{G}$  um operador elíptico totalmente não linear satisfazendo (A0)-(A2), (3.1) e (3.2), e  $h \in C^{0,1}(\Omega \times [0, \infty))$  uma função Lipschitz limitada em  $\mathbb{R}^N$ . Suponha*

que a equação

$$\mathcal{G}(x, \nabla u, D^2 u) = h(x, u)$$

admita  $u_*, u^* \in C^0(\bar{\Omega})$  subsolução e supersolução, respectivamente, tal que  $u_* \leq u^*$  em  $\Omega$  e  $u_* = u^* = g \in C^0(\partial\Omega)$ . Defina o conjunto de funções

$$\mathcal{S} := \{w \in C(\bar{\Omega}); u_* \leq w \leq u^* \text{ e } w \text{ supersolução de } \mathcal{G}(x, \nabla u, D^2 u) = h(x, u)\}.$$

Então,

$$v(x) := \inf_{w \in \mathcal{S}} w(x)$$

é uma solução de viscosidade de

$$\begin{cases} \mathcal{G}(x, \nabla u, D^2 u) = h(x, u) & \text{em } \Omega \\ u(x) = g(x) & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

### 3.4 Estimativas de regularidade Lipschitz

Nessa seção, serão derivadas estimativas uniformes com respeito a  $\varepsilon$ , que em particular fornecem compacidade na topologia da convergência uniforme. Em vista dos resultados provados na seção 3.5, a estimativa encontrada será ótima. Antes de iniciar a prova da estimativa Lipschitz, precisamos assegurar um controle uniforme para as soluções não-negativas de  $(P_\varepsilon)$ , que é derivada da estimativa de Alexandroff-Bakelman-Pucci (veja, Teorema A.5).

**Lema 3.2.** *Seja  $u^\varepsilon$  uma solução não-negativa de viscosidade para  $(P_\varepsilon)$ . Então, existe uma constante  $C(\text{universal}) > 0$  tal que*

$$\|u^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + C \cdot \text{diam}(\Omega) \max \left\{ \left\| \frac{\mathcal{B}_0}{1 + \mathfrak{a}} \right\|_{L^N(\Omega)}^{\frac{1}{p+1}}, \left\| \frac{\mathcal{B}_0}{1 + \mathfrak{a}} \right\|_{L^N(\Omega)}^{\frac{1}{q+1}} \right\}.$$

**Prova.** Defina  $v^\varepsilon(x) := u^\varepsilon(x) - \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$ . Agora, observe que

$$\mathcal{G}(x, \nabla v^\varepsilon, D^2 v^\varepsilon) \geq \mathcal{B}_0 \quad \text{em } \Omega$$

no sentido de viscosidade. Ademais  $v^\varepsilon \leq 0$  em  $\partial\Omega$ . Assim, a estimativa de Aleksandrov-Bakelman-Pucci (Teorema A.5) fornece a estimativa desejada.  $\square$

**Prova do teorema 3.2.** Inicialmente, será analisado a região de transição  $\{0 \leq u^\varepsilon \leq \varepsilon\} \cap \Omega'$ . Assim, para  $\varepsilon \leq \min \{1, \frac{1}{2} \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)\}$ , fixe  $x_0 \in \{0 \leq u^\varepsilon \leq \varepsilon\} \cap \Omega'$  e considera-se a função escalonada

$$v(x) := \frac{1}{\varepsilon} u^\varepsilon(x_0 + \varepsilon x) \quad \text{in } B_1.$$

A função  $v$  satisfaz no sentido da viscosidade

$$\mathcal{G}_{x_0, \varepsilon}(x, \nabla v(x), D^2 v(x)) = \varepsilon \zeta(x_0 + \varepsilon x, u^\varepsilon(x_0 + \varepsilon x)) \quad \text{em } B_1,$$

onde (veja a equação (3.7))

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{x_0, \varepsilon}(x, X) := \varepsilon F(x_0 + \varepsilon x, \frac{1}{\varepsilon} X) \\ \mathcal{H}_{x_0, \varepsilon}(x, \xi) := \mathcal{H}(x_0 + \varepsilon x, \xi) \\ \mathbf{a}_{x_0, \varepsilon}(x) := \mathbf{a}(x_0 + \varepsilon x) \\ f_{x_0, \varepsilon}(x) := \varepsilon \zeta(x_0 + \varepsilon x, u^\varepsilon(x_0 + \varepsilon x)). \end{array} \right.$$

Com efeito, se  $P$  é um parabolóide que toca  $u^\varepsilon$  por cima em  $x$ , para  $x \in B_1$ , então segue pela definição de subsolução de viscosidade:

$$\mathcal{H}(x, \nabla P(x)F(x, D^2 P(x))) \geq \zeta(x, P(x))$$

Desse modo tomando  $\phi(x) = \varepsilon^{-1} P(\frac{x-x_0}{\varepsilon})$ , temos que  $\phi$  é um parabolóide que toca  $v$  por cima em  $x_0 + \varepsilon x$ , ademais se cumpre neste ponto

$$\mathcal{G}_{x_0, \varepsilon}(x, \nabla \phi(x), D^2 \phi(x)) = \varepsilon \zeta(x_0 + \varepsilon x, u^\varepsilon(x_0 + \varepsilon x)) \quad \text{em } B_1.$$

O caso para supersolução se promete análogo, assim  $v$  é de fato solução de viscosidade da EDP acima.

Agora, segue pelas hipóteses estruturais (3.4) que

$$0 \leq f_{x_0, \varepsilon}(x) \leq \mathcal{A} + \mathcal{B} := C_\star.$$

Ademais, as hipóteses (A0)-(A2) e (3.1) e (3.2) são verificadas para  $F_{x_0, \varepsilon}$ ,  $\mathcal{H}_{x_0, \varepsilon}$  e  $\mathbf{a}_{x_0, \varepsilon}$  (com as mesmas constantes universais). Assim, de posse da estimativa de regularidade  $C_{\text{loc}}^{1, \alpha}$  (veja, teorema 3.8 e da observação 3.2 (Item (2))), temos

$$|\nabla v(0)| \leq C \cdot \left\{ \|v\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{2}})} + 1 + C_\star^{\frac{1}{p+1}} \right\} \quad (\text{para uma constante } C(\text{universal}) > 0). \quad (3.15)$$

Adicionalmente, uma vez que  $v(0) = \frac{1}{\varepsilon} u^\varepsilon(x_0) \leq 1$ , pela desigualdade de Harnack (Teorema A.3) obtêm-se

$$\|v\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{2}})} \leq C_0(N, \lambda, \Lambda, L_1, \mathbf{a}, p, q, C_\star) \quad (\text{para algum } C_0 > 0 \text{ independente de } \varepsilon). \quad (3.16)$$

Finalmente, combinando (3.15) e (3.16) resulta

$$|\nabla u^\epsilon(x_0)| = |\nabla v(0)| \leq C_1, \quad (\text{para algum } C_1 > 0 \text{ independente de } \epsilon). \quad (3.17)$$

Agora, a análise se volta para a região complementar do passo inicial, ou seja, a região  $\{u^\epsilon > \epsilon\} \cap \Omega'$ . Para esse fim, seja

$$\Gamma_\epsilon := \{x \in \Omega'; u^\epsilon(x) = \epsilon\},$$

e fixe um ponto  $\hat{x}_0 \in \{u^\epsilon > \epsilon\} \cap \Omega'$ . Agora, calculando a distância  $\hat{x}_0$  até  $\Gamma_\epsilon$  e nomeando o achado como  $r_0 := \text{dist}(\hat{x}_0, \Gamma_\epsilon)$ . Define-se a função renormalizada  $v_{\hat{x}_0, r_0} : B_1 \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$v_{\hat{x}_0, r_0}(x) := \frac{u^\epsilon(\hat{x}_0 + r_0x) - \epsilon}{r_0}.$$

Com efeito  $v_{\hat{x}_0, r_0}$  satisfaz no sentido da viscosidade

$$\mathcal{G}_{\hat{x}_0, r_0}(x, \nabla v_{\hat{x}_0, r_0}(x), D^2 v_{\hat{x}_0, r_0}(x)) = r_0 \zeta_\epsilon(\hat{x}_0 + r_0x, u^\epsilon(\hat{x}_0 + r_0x)), \quad (3.18)$$

como acima

$$\begin{cases} F_{\hat{x}_0, r_0}(x, X) & := r_0 F\left(\hat{x}_0 + r_0x, \frac{1}{r_0}X\right) \\ \mathcal{H}_{\hat{x}_0, r_0}(x, \xi) & := \mathcal{H}(\hat{x}_0 + r_0x, \xi) \\ \mathbf{a}_{\hat{x}_0, r_0}(x) & := \mathbf{a}(\hat{x}_0 + r_0x) \\ f_{\hat{x}_0, r_0}(x) & := r_0 \zeta(\hat{x}_0 + r_0x, u^\epsilon(\hat{x}_0 + r_0x)) \end{cases}$$

por construção,  $u^\epsilon(\hat{x}_0 + r_0x) > \epsilon \forall x \in B_1$ . Particularmente,

$$v_{\hat{x}_0, r_0}(x) \geq 0 \quad \text{para cada } x \in B_1. \quad (3.19)$$

Assim, segue pela hipótese (3.4) que

$$\|f_{\hat{x}_0, r_0}\|_{L^\infty(B_1)} \leq C_2(\mathcal{B}, \text{diam}(\Omega')).$$

Fazendo uso da estimativa de regularidade  $C_{\text{loc}}^{1, \alpha}$  (veja, Teorema 3.8 e a Observação 3.2 (Item (2))), conclui-se

$$|\nabla u^\epsilon(\hat{x}_0)| = |\nabla v_{\hat{x}_0, r_0}(0)| \leq C \cdot \left( \frac{1}{r_0} \|u^\epsilon - \epsilon\|_{L^\infty\left(B_{\frac{r_0}{2}}(\hat{x}_0)\right)} + 1 + C_2^{\frac{1}{p+1}} \right). \quad (3.20)$$

Resta garantir o controle uniforme para o termo  $\frac{1}{r_0} \|u^\epsilon - \epsilon\|_{L^\infty\left(B_{\frac{r_0}{2}}(\hat{x}_0)\right)}$ . Para esse propósito, seja  $z_0 \in \Gamma_\epsilon$  um ponto que realiza a distância, i.e.,  $r_0 = |\hat{x}_0 - z_0|$ . Agora, usando a esti-

mativa Lipschitz provado para pontos em  $\{0 \leq u^\epsilon \leq \epsilon\} \cap \Omega'$ , ou seja, (3.17), vale

$$|\nabla u^\epsilon(z_0)| \leq C_0.$$

Assim,

$$\frac{\partial v_{\hat{x}_0, r_0}}{\partial \nu}(y_0) \leq |\nabla u^\epsilon(z_0)| \leq C_0 \quad \text{com} \quad v_{\hat{x}_0, r_0}(y_0) = 0 \quad \text{e} \quad y_0 := \frac{z_0 - \hat{x}_0}{r_0}. \quad (3.21)$$

Agora, por (3.18), (3.19) e (3.21) pode-se aplicar o lema A.1 e concluir que existe uma constante universal  $c(\text{universal}) > 0$  tal que

$$v_{\hat{x}_0, r_0}(0) \leq c. \quad (3.22)$$

Além disso, pela desigualdade de Harnack (veja, Teorema A.3) obtemos (usando (3.22))

$$\frac{1}{r_0} \|u^\epsilon - \epsilon\|_{L^\infty(B_{\frac{r_0}{2}}(\hat{x}_0))} = \sup_{B_{\frac{1}{2}}(0)} v_{\hat{x}_0, r_0}(x) \leq C_0(N, \lambda, \Lambda, p, q, L_1, \mathbf{a}, c, \mathcal{B}, \text{diam}(\Omega'))$$

o que finaliza a prova do teorema.  $\square$

**Observação 3.3.** *É importante observar que  $\epsilon > 0$  fixado, soluções no sentido da viscosidade  $u^\epsilon$  são de fato  $C_{loc}^{1,\alpha}(\Omega)$ . Particularmente, quando  $F$  é côncavo/convexo, segue por (38, Corolário 1.1) que  $u^\epsilon \in C_{loc}^{1, \frac{1}{p+1}}(\Omega)$ . Nesse ponto, por um lado, para qualquer  $0 < \varsigma \ll 1$  pequeno, próximo das  $\epsilon$ -camadas, segue*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \|\nabla u^\epsilon\|_{C^{0,\varsigma}(\Omega')} = +\infty.$$

*Por outro lado, o teorema 3.2 assegura que a norma Lipschitz de  $u^\epsilon$  permanece uniformemente controlada (independente de  $\epsilon$ ). Nesse ponto de vista, as estimativas obtidas são ótimas.*

### 3.5 Não degenerescência geométrica

Como explicado anteriormente na introdução, uma das principais complexidades em lidar com modelos singularmente perturbados com degenerescência não-homogênea é evitar que soluções degenerem ao longo de suas superfícies de transição. Por esse motivo, um artifício decisivo para a superação de tal obstáculo será a implementação de uma estimativa geométrica de não-degenerescência.

Nesta seção, mostramos que as soluções crescem de forma linear fora das superfícies de nível  $\epsilon$ , isto é, dentro de  $\{u^\epsilon > \epsilon\}$ . Em particular, isso implica que *em medida*

as duas fronteiras livres não se cruzam. A prova deve ser baseada na construção de uma função de barreira apropriada. Para este fim, consideramos modelos elípticos com degenerescência não-homogênea, se valendo das hipóteses (3.1) e (3.2).

$$\mathcal{H}(x, \nabla w) \mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^+(D^2 w) = \zeta(x, w) \quad \text{em } \mathbb{R}^N. \quad (3.23)$$

onde o termo de reação satisfaz a hipótese de não-degenerescência (cf. (3.5)):

$$\mathcal{J}^* := \inf_{\mathbb{R}^N \times [t_0, T_0]} \zeta(x, t) > 0, \quad (3.24)$$

**Proposição 3.1 (Barreira).** *Seja  $0 < t_0 < T_0 < 1$  fixado. Para uma constante  $A_0(\text{universal}) > 0$  a ser escolhida a posteriori, existe um perfil radialmente simétrico  $\Theta_L: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo:*

- (1)  $\Theta_L \in C_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ ;
- (2)  $t_0 \leq \Theta_L(x) \leq T_0$ ;
- (3)  $\Theta_L$  é uma supersolução para (3.23);
- (4) Para algum  $\kappa_0(\text{universal}) > 0$

$$\Theta_L(x) \geq \kappa_0 \cdot 4L \quad \text{para } |x| \geq 4L, \quad \text{onde } L \geq L_0 := \sqrt{\frac{T_0 - t_0}{A_0}}. \quad (3.25)$$

**Prova.** Para um  $\widehat{\alpha}(\text{universal}) > 0$  a ser escolhido (*a posteriori*) define-se

$$\Theta_L(x) := \begin{cases} t_0 & \text{para } 0 \leq |x| < L; \\ A_0 (|x| - L)^2 + t_0 & \text{para } L \leq |x| < L + \sqrt{\frac{T_0 - t_0}{A_0}}; \\ \psi(L) - \phi(L)|x|^{-\alpha} & \text{para } |x| \geq L + \sqrt{\frac{T_0 - t_0}{A_0}} \end{cases} \quad (3.26)$$

onde

$$\begin{cases} \phi(L) := \frac{2}{\alpha} \sqrt{(T_0 - t_0)A_0} \left( L + \sqrt{\frac{T_0 - t_0}{A_0}} \right)^{1+\widehat{\alpha}} \\ \psi(L) := T_0 + \phi(L) \left( L + \sqrt{\frac{T_0 - t_0}{A_0}} \right)^{-\widehat{\alpha}} \end{cases} \quad (3.27)$$

É fácil verificar que  $\Theta_L \in C_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ . Com isso, podemos computar as derivadas de ordem 2 de  $\Theta_L$  q.t.p. Além disso, pela definição de  $\Theta_L$ , temos  $t_0 \leq \Theta_L(x) \leq T_0$ .

Na sequência, será verificado que  $\Theta_L$  satisfaz (pontualmente) (3.23) contanto que se escolham os parâmetros apropriados para  $\alpha, A_0 > 0$ .

Com efeito, para  $0 \leq |x| < L$  tal desigualdade é claramente satisfeita (devido a (3.24)).

Na região anular  $L \leq |x| < L + \sqrt{\frac{T_0 - t_0}{A_0}}$ , obtemos

$$\begin{cases} |\nabla\Theta_L(x)| &= 2A_0(|x| - L) \\ &\leq 2\sqrt{A_0(T_0 - t_0)} \\ D^2\Theta_L(x) &= 2A_0 \left[ \left( \frac{1}{|x|^2} - \frac{(|x| - L)}{|x|^3} \right) x \otimes x + \frac{(|x| - L)}{|x|} \text{Id}_N \right] \\ &\leq 4A_0 \cdot \text{Id}_N. \end{cases}$$

Usando (3.1) e (3.2) têm-se que

$$\mathcal{H}(x, \nabla\Theta_L(x)) \cdot \mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^+(D^2\Theta_L(x)) \leq 4A_0 N \Lambda L_2 \left[ \left( 2\sqrt{A_0(T_0 - t_0)} \right)^p + \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \left( 2\sqrt{A_0(T_0 - t_0)} \right)^q \right].$$

Agora, graças a hipótese (3.24) se consegue escolher  $A_0$  tal que

$$A_0 \leq \max \left\{ \left( C(\mathcal{J}^*, N, L_2, \Lambda, T_0 - t_0, p, q) \right)^{\frac{2}{p+2}}, \left( C(\mathcal{J}^*, N, L_2, \Lambda, T_0 - t_0, p, q) \right)^{\frac{2}{q+2}} \right\}$$

onde

$$C(\mathcal{J}^*, N, L_2, \Lambda, T_0 - t_0, p, q) = \frac{\mathcal{J}^*}{4N L_2 \left[ (2\sqrt{(T_0 - t_0)})^p + \|a\|_{L^\infty(\Omega)} (2\sqrt{(T_0 - t_0)})^q \right]}$$

Com essa escolha em mãos, resulta a seguinte desigualdade

$$\mathcal{H}(x, \nabla\Theta_L(x)) \cdot \mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^+(D^2\Theta_L(x)) \leq \mathcal{J}^*.$$

Assim, usando o item (2) conclui-se

$$\mathcal{H}(x, \nabla\Theta_L(x)) \cdot \mathcal{M}^+(D^2\Theta_L(x)) \leq \mathcal{J}^* \leq \zeta(x, \Theta_L(x)).$$

Finalmente, resta a última região a ser analisada  $|x| \geq L + \sqrt{\frac{T_0 - t_0}{A_0}}$ . Com efeito

$$D^2\Theta_L(x) = \hat{\alpha}\phi(L)|x|^{-(\hat{\alpha}+2)} \left( -\frac{(\alpha + 2)}{|x|^2} x \otimes x + \text{Id}_N \right).$$

Logo,

$$\mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^+(D^2\Theta_L(x)) \leq \alpha\phi(L)|x|^{-(\hat{\alpha}+2)} [-(\hat{\alpha} + 2)\lambda + (N - 1)\Lambda].$$

Desse modo, selecionando  $\alpha \in \left[ (N - 1)\frac{\Lambda}{\lambda} - 1, \infty \right)$ , se obtém (usando (3.24) e  $\mathcal{H}(x, \xi) \geq 0$ )

$$\mathcal{H}(x, \nabla\Theta_L(x)) \cdot \mathcal{M}^+(D^2\Theta_L(x)) \leq 0 \leq \zeta(x, \Theta_L(x)),$$

que garante que  $\Theta_L$  satisfaz (3.23) como desejado.

Para finalizar a análise, resta garantir que  $\Theta_L$  satisfaz (3.25). Nesse ponto, graças a (3.27) (segunda sentença) vale

$$|x| \geq 4L \geq 2(L + L_0) = 2 \left( \frac{\phi(L)}{\psi(L) - T_0} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Agora, para  $\alpha > 0$

$$\Theta_L(x) = \psi(L) - \phi(L)|x|^{-\hat{\alpha}} \geq \psi(L) - \frac{1}{2^\alpha}(\psi(L) - T_0) > \frac{1}{2^\alpha}(\psi(L) - T_0).$$

Por fim, usando (3.27)

$$\Theta_L(x) \geq \kappa_0 \cdot 4L \quad \text{para} \quad \kappa_0 := \frac{\hat{\alpha}^{-1}}{2^{\hat{\alpha}+1}} \sqrt{A_0(T_0 - t_0)}.$$

□

### 3.6 Crescimento Linear

A fim de obter cotas superiores para o crescimento das soluções de  $(P_\epsilon)$  no interior do conjunto  $\{u^\epsilon > \epsilon\}$ , será necessário adotar como estratégia versões escalonadas da barreira  $\Theta_L$  apresentada na subseção anterior.

**Prova do Teorema 3.3.** Sem perda de generalidade, podemos supor  $0 \in \{u^\epsilon > \epsilon\}$ , ora, caso contrário, o resultado seria trivial. Agora, seja  $\eta := \frac{d_\epsilon(0)}{2}$  e considere o termo de reação

$$\zeta(z, t) := \begin{cases} \epsilon \zeta_\epsilon(\epsilon x, \epsilon t), & \text{se } \epsilon x \in \Omega \\ \mathcal{I}^* & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Dada a barreira construída anteriormente  $\Theta_L$ , têm-se uma nova versão escalonada

$$\Theta_\epsilon(x) := \epsilon \cdot \Theta_{\frac{\eta}{4\epsilon}} \left( \frac{x}{\epsilon} \right).$$

A seguir, será verificado que  $\Theta_\epsilon$  satisfaz

$$\mathcal{G}(x, \nabla \Theta_\epsilon(x), D^2 \Theta_\epsilon(x)) \leq \zeta_\epsilon(x, \Theta_\epsilon(x)).$$

además, por (3.25) e (3.26) segue que para  $4L_0\epsilon \ll \eta$ ,

$$\Theta_\epsilon(0) = t_0 \cdot \epsilon \quad \text{e} \quad \Theta_\epsilon(x) \geq \kappa_0 \cdot \eta \quad \text{em} \quad \partial B_\eta. \quad (3.28)$$

Agora, segue que existe  $z_0 \in \partial B_\eta$  com a seguinte propriedade

$$\Theta_\epsilon(z_0) \leq u^\epsilon(z_0), \quad (3.29)$$

de fato, se valesse o contrário  $\Theta_\epsilon > u^\epsilon$  em todo ponto de  $\partial B_\eta$ , então

$$v^\epsilon(x) := \min\{\Theta_\epsilon(x), u^\epsilon(x)\}$$

deve ser uma supersolução de  $(P_\epsilon)$ . Entretanto,  $v^\epsilon$  é estritamente menor que  $u^\epsilon$ , que contradiz a minimalidade de  $u^\epsilon$ . Assim, por (3.28) e (3.29), pode-se concluir a sequência de desigualdades

$$\sup_{\overline{B_\eta}} u^\epsilon(x) \geq u^\epsilon(z_0) > \Theta_\epsilon(z_0) \geq \kappa_0 \cdot \eta. \quad (3.30)$$

além do mais,  $u^\epsilon$  resolve no sentido de viscosidade

$$\mathcal{B}_0 \leq \mathcal{G}(x, \nabla u^\epsilon, D^2 u^\epsilon) \leq \mathcal{B} \quad \text{em } B_{2\eta}.$$

Assim, pela desigualdade de Harnack (veja, Teorema A.3 e Observação A.1), se obtém

$$\sup_{B_\eta} u^\epsilon \leq C(N, \lambda, \Lambda, q, L_1) \cdot \left( u^\epsilon(0) + \max \left\{ (2\eta)^{\frac{p+2}{p+1}} \mathcal{B}^{\frac{1}{p+1}}, (2\eta)^{\frac{q+2}{q+1}} \mathcal{B}^{\frac{1}{q+1}} \right\} \right).$$

Agora, por (3.30),

$$u^\epsilon(0) \geq \left( C^{-1} \kappa_0 - 2^{\frac{q+2}{q+1}} \max \left\{ \mathcal{B}^{\frac{1}{p+1}} \eta^{\frac{1}{p+1}}, \mathcal{B}^{\frac{1}{q+1}} \eta^{\frac{1}{q+1}} \right\} \right) \eta.$$

finalmente, tomando

$$0 < \eta < \min \left\{ \mathcal{B} \cdot \left( C^{-1} \kappa_0 2^{-\frac{q+2}{q+1}} \right)^{p+1}, \mathcal{B} \cdot \left( C^{-1} \kappa_0 2^{-\frac{q+2}{q+1}} \right)^{q+1}, \frac{\text{diam}(\Omega)}{4} \right\},$$

se tem

$$u^\epsilon(0) \geq c \cdot \eta.$$

para alguma constante universal  $0 < c(\text{universal}) < C^{-1} \kappa_0$ .  $\square$

### 3.7 Algumas aplicações da regularidade Lipschitz e da não degenerescência geométrica

Nessa seção, algumas implicações importantes do controle ótimo das soluções serão discutidas. Como uma consequência da regularidade Lipschitz, isto é, do teorema 3.2, e do crescimento linear, ou seja, teorema 3.3, é garantido o controle completo de  $u^\epsilon$  em termos de  $d_\epsilon(x_0)$ .

**Corolário 3.1.** *Dado  $\Omega' \Subset \Omega$ , existe uma constante  $C(\Omega', \text{parâmetros universais}) > 0$  tal que para  $x_0 \in \{u^\epsilon > \epsilon\} \cap \Omega'$  e  $0 < \epsilon \leq \frac{1}{2}d_\epsilon(x_0)$ , vale*

$$C^{-1}d_\epsilon(x_0) \leq u^\epsilon(x_0) \leq C d_\epsilon(x_0).$$

**Prova.** Tome  $z_0 \in \partial\{u^\epsilon > \epsilon\}$ , tal que  $|z_0 - x_0| = d_\epsilon(x_0)$ . Assim, segue do teorema 3.2,

$$u^\epsilon(x_0) \leq C_0 d_\epsilon(x_0) + u^\epsilon(z_0) \leq (C_0 + 1) d_\epsilon(x_0),$$

A primeira desigualdade é precisamente a afirmação do teorema 3.3. □

O próximo passo é provar que soluções de Perron são fortemente não-degeneradas próximo das  $\epsilon$ -camadas. Isso significa que  $\sup_{B_r(x_0)} u^\epsilon$  (para  $x_0 \in \{u^\epsilon > \epsilon\} \cap \Omega'$ ) é comparável com  $r$ . Tal informação é uma importante peça para descrever o comportamento da taxa de crescimento de  $u^\epsilon$  longe das  $\epsilon$ -superfícies. A prova é em certo sentido, um escólio do teorema 3.3.

**Prova do Teorema 3.4.** Inicialmente, a estimativa superior segue diretamente da Lipschitz regularidade (Teorema 3.2). Agora, como no teorema 3.3, seja  $\Theta_\epsilon(x) = \epsilon \Theta_{\frac{\rho}{4\epsilon}}(\frac{x}{\epsilon})$ . Assim,

$$u^\epsilon(z_0) > \Theta_\epsilon(z_0),$$

para algum ponto  $z_0 \in \partial B_\rho(x_0)$ . Finalmente, segue que

$$\sup_{\overline{B_\rho(x_0)}} u^\epsilon(x) \geq u^\epsilon(z_0) > \Theta_\epsilon(z_0) \geq \kappa_0 \cdot \rho.$$

□

Finalmente, existe uma porção de  $B_\rho(x_0)$  com volume na ordem  $\sim \rho^N$  dentro de  $\{u^\epsilon > \epsilon\}$ .

**Corolário 3.2. (*Densidade uniforme positiva*)** *Dado  $x_0 \in \{u^\epsilon > \epsilon\} \cap \Omega'$ ,  $\epsilon \ll \rho$  e  $\rho \ll 1$  suficientemente pequeno (de maneira universal), existe uma constante  $0 < c_0(\text{universal}) < 1$  tal que*

$$|B_\rho(x_0) \cap \{u^\epsilon > \epsilon\}| \geq c_0 \cdot |B_\rho(x_0)|.$$

**Prova.** Pela não-degenerescência forte (Teorema 3.4) sabe-se que existe  $y_0 \in B_\rho(x_0)$  tal que

$$u^\epsilon(y_0) \geq c_0 \rho.$$

Pela Lipschitz regularidade (Teorema 3.2), para  $z_0 \in B_{\kappa\rho}(y_0)$ , têm-se

$$u^\epsilon(z_0) - C\kappa\rho \geq u^\epsilon(y_0).$$

Assim, pelas estimativas anteriores, é possível escolher  $0 < \kappa \ll 1$  pequeno (de maneira universal) tal que

$$z \in B_{\kappa\rho}(y_0) \cap B_\rho(x_0) \quad \text{e} \quad u^\epsilon(z) > \epsilon.$$

Assim, conclui-se a demonstração, ora, temos

$$|B_\rho(x_0) \cap \{u^\epsilon > \epsilon\}| \geq |B_\rho(x_0) \cap B_{\kappa\rho}(y_0)| = c_0 |B_\rho(x_0)|,$$

para alguma constante  $0 < c_0(\text{universal}) \ll 1$ . □

**Corolário 3.3.** *Dado  $x_0 \in \{u^\epsilon > \epsilon\} \cap \Omega'$ ,  $\epsilon \ll \rho$  e  $\rho \ll 1$  pequeno o suficiente (de maneira universal), então*

$$\frac{1}{\rho} \int_{B_\rho(x_0)} u^\epsilon(x) dx \geq c$$

para uma constante  $c(\text{universal}) > 0$  também dependendo de  $\epsilon$ .

**Prova.** Como no corolário 3.2, existe uma constante  $0 < \kappa(\text{universal}) \ll 1$ , tal que

$$\int_{B_\rho(x_0)} u^\epsilon(x) dx \geq C_N \int_{B_\rho(x_0) \cap B_{\kappa\rho}(y_0)} u^\epsilon(x) dx \geq c\rho$$

para uma constante  $0 < c(\text{universal}) \ll 1$  e algum  $y_0 \in \{u^\epsilon > \epsilon\} \cap \Omega'$ . □

### 3.8 Uma desigualdade do tipo Harnack

Para soluções de  $(P_\epsilon)$  uma desigualdade de Harnack clássica é válida para bolas que tocam a fronteira livre ao longo das  $\epsilon$ -superfícies de, isto é,  $\partial\{u^\epsilon > \epsilon\} \cap \Omega'$ .

**Teorema 3.11.** *Seja  $u^\epsilon$  uma solução de  $(P_\epsilon)$ . Seja também  $x_0 \in \{u^\epsilon > \epsilon\}$  e  $\epsilon \leq d := d_\epsilon(x_0)$ . Então,*

$$\sup_{B_{\frac{d}{2}}(x_0)} u^\epsilon(x) \leq C \inf_{B_{\frac{d}{2}}(x_0)} u^\epsilon(x)$$

para uma constante  $C(\text{universal}) > 0$  independente de  $\epsilon$ .

**Prova.** Sejam  $z_1, z_2 \in \overline{B_{\frac{d}{2}}(x_0)}$  pontos tais que

$$\inf_{B_{\frac{d}{2}}(x_0)} u^\epsilon(x) = u^\epsilon(z_1) \quad \text{e} \quad \sup_{B_{\frac{d}{2}}(x_0)} u^\epsilon(x) = u^\epsilon(z_2).$$

Uma vez que  $d_\epsilon(z_1) \geq \frac{d}{2}$ , pelo corolário 3.1

$$u^\epsilon(z_1) \geq C_1 d, \tag{3.31}$$

além do mais, pela não-degenerescência 3.4

$$u^\varepsilon(z_2) \leq C_2 \left( \frac{d}{2} + u^\varepsilon(x_0) \right). \quad (3.32)$$

Agora, tomando  $y_0 \in \partial\{u^\varepsilon > \varepsilon\}$  tal que  $d = |x_0 - y_0|$  e  $z \in \overline{B_d(y_0)} \cap \{u^\varepsilon > \varepsilon\}$ , segue pelo corolário 3.1 e pelo teorema 3.4

$$u^\varepsilon(x_0) \leq \sup_{B_d(z)} u^\varepsilon \leq C_2(d + u^\varepsilon(z)) \leq C_3 d. \quad (3.33)$$

Combinando (3.31), (3.32) e (3.33), segue o resultado

$$\sup_{B_{\frac{d}{2}}(x_0)} u^\varepsilon(x) \leq C \inf_{B_{\frac{d}{2}}(x_0)} u^\varepsilon(x).$$

□

### 3.9 Porosidade das $\varepsilon$ -superfícies de nível

Como consequência da taxa de crescimento e da não-degenerescência (Teoremas 3.2 e 3.3), segue a porosidade das superfícies de nível.

**Definição 3.3 (Conjunto Poroso).** *Um conjunto  $S \subset \mathbb{R}^N$  é denominado poroso com porosidade  $\delta > 0$ , se  $\exists R > 0$  tal que*

$$\forall x \in S, \forall r \in (0, R), \exists y \in \mathbb{R}^N \text{ tal que } B_{\delta r}(y) \subset B_r(x) \setminus S.$$

Um conjunto poroso de porosidade  $\delta$  tem dimensão de Hausdorff não excedendo a  $N - c\delta^N$ , onde  $c = c(N) > 0$  é uma constante dimensional. Particularmente, um conjunto poroso tem medida de Lebesgue zero (veja, (113)).

**Teorema 3.12 (Porosidade).** *Seja  $u^\varepsilon$  uma solução de  $(P_\varepsilon)$ . Então, os conjuntos de nível  $\partial\{u^\varepsilon > \varepsilon\} \cap \Omega'$  são porosos com constante de porosidade independente de  $\varepsilon$ .*

**Prova.** Seja  $R > 0$  e  $x_0 \in \Omega' \Subset \Omega$  tal que  $\overline{B_{4R}(x_0)} \subset \Omega$ .

**Afirmção:** O conjunto  $\partial\{u^\varepsilon > \varepsilon\} \cap B_R(x_0)$  é poroso.

Seja  $x \in \partial\{u^\varepsilon > \varepsilon\} \cap B_R(x_0)$  fixado. Para cada  $r \in (0, R)$  vale  $\overline{B_r(x)} \subset B_{2R}(x_0) \subset \Omega$ . Agora, seja  $y \in \partial B_r(x)$  tal que  $u^\varepsilon(y) = \sup_{\partial B_r(x)} u^\varepsilon(x)$ . Pela não-degenerescência forte (Teorema 3.4)

$$u^\varepsilon(y) \geq cr. \quad (3.34)$$

Por outro lado, (veja, Teorema 3.2) próximo da fronteira livre

$$u^\varepsilon(y) \leq Cd_\varepsilon(y), \quad (3.35)$$

onde  $d_\varepsilon(y)$  é a distância de  $y$  para o conjunto  $\overline{B_{2R}(x_0)} \cap \Gamma_\varepsilon$ . Agora, por (3.34) e (3.35)

vale

$$d_\varepsilon(y) \geq \delta r \quad (3.36)$$

para uma constante positiva  $\delta \in (0, 1)$ .

Agora seja  $y^* \in [x, y]$  (segmento de linha reta unindo os pontos  $x$  e  $y$ ) tal que  $|y - y^*| = \frac{\delta r}{2}$ . Assim, vale a inclusão

$$B_{\frac{\delta}{2}r}(y^*) \subset B_{\delta r}(y) \cap B_r(x). \quad (3.37)$$

Com efeito, para cada  $z \in B_{\frac{\delta}{2}r}(y^*)$

$$|z - y| \leq |z - y^*| + |y - y^*| < \frac{\delta r}{2} + \frac{\delta r}{2} = \delta r,$$

e

$$|z - x| \leq |z - y^*| + (|x - y| - |y^* - y|) < \frac{\delta r}{2} + \left(r - \frac{\delta r}{2}\right) = r,$$

então (3.37) segue.

Agora, por (3.36)  $B_{\delta r}(y) \subset B_{d_\varepsilon(y)}(y) \subset \{u^\varepsilon > \varepsilon\}$ , então

$$B_{\delta r}(y) \cap B_r(x) \subset \{u^\varepsilon > \varepsilon\},$$

que fornece junto com (3.37) o seguinte

$$B_{\frac{\delta}{2}r}(y^*) \subset B_{\delta r}(y) \cap B_r(x) \subset B_r(x) \setminus \partial\{u_\varepsilon > \varepsilon\} \subset B_r(x) \setminus (\partial\{u^\varepsilon > \varepsilon\} \cap B_R(x_0)),$$

finalizando assim a prova. □

### 3.10 Estimativas da medida de Hausdorff

Nesta seção, estabelecemos a estimativa da medida de Hausdorff das superfícies de nível aproximadas. Uma condição necessária para o estudo de tal estimativa é impor a não-degenerescência da propagação do termo de reação até a camada de transição. Doravante, na condição (3.5), devemos tomar  $t_0 = 0$ , ou seja,

$$\mathcal{J} := \inf_{\Omega \times [0, T_0]} \varepsilon \zeta_\varepsilon(x, \varepsilon t) > 0$$

para algum  $T_0 > 0$  a ser definido. Uma condição no infinito para o operador  $F$  também é necessária na análise sobre as estimativas de Hausdorff, que serão discutidas em breve.

O próximo resultado afirma que, em medida, a Hessiana de uma solução de aproximante explode perto da camada de transição quando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . A prova segue as mesmas linhas que (7, Proposição 6.1) e (93, Proposição 5.1). Por esse motivo, vamos omiti-la aqui.

**Proposição 3.2.** *Fixe  $\Omega' \Subset \Omega$ ,  $C \gg 1$  e  $\rho < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ . Existe  $\epsilon_0 > 0$  tal que, para  $\epsilon \leq \epsilon_0$  vale*

$$\int_{B_\rho(x_\epsilon)} (\zeta_\epsilon(x, u^\epsilon) - C) dx \geq 0 \quad \text{para qualquer } x_\epsilon \in \partial\{u^\epsilon > \epsilon\} \cap \Omega'. \quad (3.38)$$

Matematicamente, a proposição 3.2 implica que próximo à camada de transição, o operador  $F$  é avaliado em matrizes muito grandes. Tal *insight* motiva a seguinte condição estrutural assintótica sobre a não linearidade:

**Definição 3.4 (Concavidade assintótica).** *Um operador uniformemente elíptico  $F : \Omega \times \text{Sym}(N) \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz a  $C_F$ -propriedade de concavidade assintótica (resp. propriedade de convexidade assintótica) se existe  $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}_{\lambda, \Lambda}$  e uma função contínua não-negativa  $C_F^* : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$F(x, X) \leq \text{tr}(\mathfrak{A}(x) \cdot X) + C_F^*(x) \quad (\text{resp. } F(x, X) \geq \dots), \quad (\mathbf{ACP})$$

para todo  $(x, X) \in \Omega \times \text{Sym}(N)$ , onde

$$\mathcal{A}_{\lambda, \Lambda} := \{\mathfrak{A} \in \text{Sym}(N); \lambda Id_N \leq \mathfrak{A} \leq \Lambda Id_N\}.$$

É digno de menção que a condição **(ACP)** é mais fraca que a concavidade (resp. convexidade) (que é requerida por exemplo na teoria de regularidade  $C_{\text{loc}}^{2, \alpha}$  de Evans e Krylov). De fato, significa uma espécie de condição de concavidade (resp. convexidade) no infinito de  $\text{Sym}(N)$  para  $F$ . Além do mais, a hipótese de concavidade (resp. convexidade) é obtida precisamente quando  $C_F = 0$ . Do ponto de vista geométrico, tal condição significa que para cada  $x \in \Omega$  fixado, existe um hiperplano que decompõe  $\mathbb{R} \times \text{Sym}(N)$  em dois semi-espacos tais que o gráfico de  $F(x, \cdot)$  está sempre abaixo de tal hiperplano (veja (7), (93), (94) para algumas motivações e outros detalhes). Por sua vez, se  $F$  satisfaz **(ACP)**, então o seu operador recessão é um operador côncavo (resp. convexo), em outras palavras

$$\begin{aligned} F^*(x, X) &:= \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \tau F\left(x, \frac{1}{\tau} X\right) \leq \lim_{\tau \rightarrow 0^+} [\text{tr}(\mathfrak{A}(x) \cdot X) + \tau C_F^*(x)] \\ &= \text{tr}(\mathfrak{A}(x) \cdot X) \quad (\text{resp. } \geq \text{tr}(\mathfrak{A}(x) \cdot X)). \end{aligned}$$

**Exemplo 2.** *Seja  $F : \text{Sym}(N) \rightarrow \mathbb{R}$  um operador  $C^1$  uniformemente elíptico. Então, seu perfil de recessão  $F^*$  deve ser entendido como um “operador limitante” para uma escala natural em  $F$ . Para efeito de ilustração, para um número de operadores, é possível verificar a existência de tal limite*

$$\mathfrak{A}_{ij} := \lim_{\|X\| \rightarrow \infty} \frac{\partial F}{\partial X_{ij}}(X).$$

Em tal contexto segue que  $F^*(X) = \text{tr}(\mathfrak{A}_{ij}X)$ . Um exemplo é uma classe de operadores do tipo Hessiano:

$$F_m(e_1(D^2u), \dots, e_N(D^2u)) := \sum_{j=1}^N \sqrt[m]{1 + e_j(D^2u)^m} - N,$$

onde  $m \in \mathbb{N}$  é um número ímpar. Nesse cenário,

$$F^*(X) = \sum_{j=1}^N e_j(X) \quad (\text{o Operador Laplaciano}).$$

Por fim, recomenda-se ao leitor (37, Exemplo 2.4), (38, Seção 6.2), (35, Exemplo 3.6) e (36, Exemplo 5) para um número de outros exemplos ilustrativos.

Recentemente, estimativas de regularidade melhoradas para soluções de viscosidade de equações *Assintoticamente Côncavas* foram provadas em (96) (veja também (37) para resultados de regularidade global). Enfatizamos também que tais operadores desempenham um papel essencial no estabelecimento da finitude de medida de Hausdorff  $(N - 1)$  – *dimensional* em vários problemas de fronteira livre totalmente não lineares singularmente perturbados, cuja Hessiana das soluções explode através da transição de fase. Por esse motivo, a condição de fronteira livre limitante é regida por  $F^*$  em vez de  $F$  (consulte (94) para um exemplo ilustrativo).

Finalmente, doravante nesta seção, assumimos que o operador governante  $F$  tem a propriedade assintoticamente côncava (**ACP**).

**Observação 3.4.** *Observe que se  $u^\epsilon$  é uma solução de Perron de  $(P_\epsilon)$ , então no sentido de viscosidade vale*

$$F(x, D^2u^\epsilon) = \zeta_\epsilon(x, u^\epsilon) \cdot \mathcal{H}(x, \nabla u^\epsilon)^{-1} \quad \text{em } \{u^\epsilon > \epsilon\} \cap \Omega',$$

para qualquer,  $\Omega' \Subset \Omega$ . Com efeito, podemos encontrar um parabolóide  $P$  tocando  $u^\epsilon$  por baixo em um ponto  $x_0 \in \{u^\epsilon > \epsilon\} \cap \Omega'$  e, em face da regularidade Lipschitz, que garante a limitação uniforme do gradiente de  $P$ , temos:

$$F(x_0, D^2P(x_0)) \leq \zeta_\epsilon(x_0, P(x_0)) \cdot \mathcal{H}(x_0, \nabla P(x_0))^{-1}.$$

Novamente, usando que  $u^\epsilon$  é solução minimal, esta perde para a uma sub-solução  $u_\star$  de  $P_\epsilon$ , que por sua vez tem um parabolóide  $\phi$  tocando  $u_\star$  por baixo, por exemplo, em um ponto  $x_1 \in \{u^\epsilon > \epsilon\} \cap \Omega'$ , ademais vale a seguinte desigualdade pontual:

$$F(x_1, D^2\phi(x_1)) \geq \zeta_\epsilon(x_1, \phi(x_1)) \cdot \mathcal{H}(x_1, \nabla\phi(x_1))^{-1}.$$

Daí, considera-se  $\psi(x) = \phi(x + x_1 - x_0) - \phi(x_1) + P(x_0)$ , este por sua vez

é um parabolóide que toca por cima  $u^\epsilon$  no ponto  $x_0$ , além do que,  $\nabla\psi(x_0) = \nabla\phi(x_1)$  e  $D^2\psi(x_0) = D^2P(x_1)$ , logo:

$$F_{x_0}(x_0, D^2\psi(x_0)) \geq \zeta_\epsilon(x_1, \phi(x_1)) \cdot \mathcal{H}(x_0, \nabla\psi(x_0))^{-1}$$

onde  $F_{x_0}(x, M) = F(x + x_1 - x_0, M)$  que notoriamente tem as mesmas constantes de elipticidade de  $F$ .

Agora, pela regularidade Lipschitz (Teorema 3.2) e **(N-HDeg)**, têm-se

$$F(x, D^2u^\epsilon) = \zeta_\epsilon(x, u^\epsilon) \mathcal{H}(x, \nabla u^\epsilon)^{-1} \geq \zeta_\epsilon(x, u^\epsilon) L_2^{-1} (C_0^p + \|\mathbf{a}\|_{L^\infty(\Omega)} C_0^q)^{-1}.$$

Usando a condição **ACP**

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho(x_\epsilon)} \mathfrak{A}_{ij}(x) D_{ij}u^\epsilon(x) dx &\geq \int_{B_\rho(x_\epsilon)} [\zeta_\epsilon(x, u^\epsilon) \mathcal{H}(x, \nabla u^\epsilon)^{-1} - C_F(x)] dx \\ &\geq C_{p,q}^{-1} \int_{B_\rho(x_\epsilon)} [\zeta_\epsilon(x, u^\epsilon) - \|C_F\|_{L^\infty(\Omega)} C_{p,q}] dx \\ &> 0, \end{aligned}$$

onde  $C_{p,q} := L_2(C_0^p + \|\mathbf{a}\|_{L^\infty(\Omega)} C_0^q)$  e foi usada a proposição 3.2.

No próximo resultado, a observação 3.4 permite adaptar certos argumentos avaliáveis no contexto dos operadores elípticos lineares (cf. (2)). Nesse ponto, a prova é seguida usando as mesmas ideias encontradas em (7, Lema 6.3) e (94, Lema 4.1).

**Lema 3.3.** *Existe uma constante  $C(\Omega', \text{parâmetros universais}) > 0$  tal que, para cada  $x_\epsilon \in \partial\{u^\epsilon > \epsilon\} \cap \Omega'$  e  $\rho \ll 1$ , vale*

$$\int_{B_\rho(x_\epsilon) \cap \{\epsilon \leq u^\epsilon < \mu\}} |\nabla u^\epsilon|^2 dx \leq C\mu\rho^{N-1}.$$

Agora, serão lembradas algumas definições e resultados auxiliares para o desenvolvimento das estimativas geométricas.

**Definição 3.5** ( $\delta$ -densidade). *Dado um conjunto aberto  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ , dizemos que  $\mathcal{O}$  tem a propriedade de  $\delta$ -densidade  $\Omega$  para  $0 < \delta < 1$ , se existe  $\tau > 0$  tal que*

$$|B_\delta(x) \cap \mathcal{O}| \geq \tau \cdot |B_\delta(x)|.$$

**Definição 3.6** ( $\delta$ -vizinhança de um conjunto). *Dado um conjunto mensurável  $S \subset \mathbb{R}^N$  e uma constante positiva  $\delta > 0$ , define-se:*

$$\mathcal{N}_\delta(S) := \{x \in \mathbb{R}^N \mid \text{dist}(x, S) < \delta\},$$

a  $\delta$ -vizinhança de  $S$  em  $\mathbb{R}^N$ .

Agora estabeleceremos a noção de medida de Hausdorff

**Definição 3.7. ( $\mathcal{H}^j$ -medida de Hausdorff)** Seja  $r_0 > 0$  dado,  $0 < \delta < r_0$  fixado, e seja  $S \subset \mathbb{R}^N$  um conjunto de Borel. Para um  $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , definimos a  $(\delta, j)$ -contéudo de Hausdorff como

$$\mathcal{H}_\delta^j(S) := \inf \left\{ \sum_i r_i^j; S \subset \bigcup_i B_{r_i}(x_i) \text{ tal quer } r_i \leq \delta \right\}$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as coberturas  $\{B_{r_i}(x_i)\}_i$  de  $S$ . Assim, a  $\mathcal{H}^j$  medida de Hausdorff de  $S$  é definida como

$$\mathcal{H}^j(S) := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^j(S).$$

Antes de estabelecer limites uniformes da medida  $\mathcal{H}^{N-1}$  de Hausdorff das superfícies de nível  $\partial\{u^\epsilon > \epsilon\}$ , vamos relembrar um resultado clássico de teoria da medida.

**Lema 3.4 (Propriedade de densidade).** Dado um conjunto aberto  $\mathcal{O} \Subset \Omega$ , vale:

- (1) Se existe um  $\delta$  tal que  $\mathcal{O}$  tem a propriedade de  $\delta$ -densidade, então existe uma constante  $C = C(\tau, N)$ , onde:

$$|\mathcal{N}_\delta(\partial\mathcal{O}) \cap B_\rho(x)| \leq \frac{1}{2^{N\tau}} |\mathcal{N}_\delta(\partial\mathcal{O}) \cap B_\rho(x) \cap \mathcal{O}| + C\delta\rho^{N-1}$$

com  $x \in \partial\mathcal{O} \cap \Omega$  e  $\delta \ll \rho$ .

- (2) Se  $\mathcal{O}$  tem a propriedade de densidade uniforme ao longo de  $\mathcal{O}$ , então  $|\partial A \cap \Omega| = 0$ .

**Prova.** Propriedade (1) segue por um argumento de recobrimento enquanto (2) é uma consequência do Teorema da Diferenciação de Lebesgue (veja, (57)).  $\square$

Agora, uma estimativa da medida  $N$ -dimensional para as  $\epsilon$ -camadas é obtida, estimativas estas que são uniformes com respeito a  $\epsilon$ . A prova segue as mesmas linhas como em (7, Lema 6.5).

**Lema 3.5.** Fixado  $\Omega' \Subset \Omega$ , existe uma constante  $C^*(\Omega', \text{parâmetros universais}) > 0$ , tal que se  $C^*\mu \leq 2\rho \ll \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$  então, para  $\mu, \epsilon > 0$  pequeno suficiente, com  $3C_1\epsilon < \mu \ll \rho$ , se cumpre

$$|\{C_1\epsilon < u^\epsilon < \mu\} \cap B_\rho(x_\epsilon)| \leq C^*\mu\rho^{N-1},$$

onde  $x_\epsilon \in \partial\{u^\epsilon > \epsilon\} \cap \Omega'$ , com  $d_\epsilon(x_\epsilon) \ll \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$  e  $C_1 > 1$ .

Finalmente, em vista de todas as ferramentas apresentadas é chegada a hora de estabelecer a estimativa para a medida de Hausdorff  $(N - 1)$ -dimensional para os conjuntos de nível aproximados (uniforme com respeito ao parâmetro  $\epsilon$ ).

**Teorema 3.13.** Fixado  $\Omega' \Subset \Omega$ , existe uma constante  $C^*(\Omega', \text{parâmetros universais}) > 0$ , tal que

$$|\mathcal{N}_\mu(\{C_1\epsilon < u^\epsilon\}) \cap B_\rho(x_\epsilon)| \leq C\mu\rho^{N-1},$$

para  $C_1 > 1$ ,  $x_\epsilon \in \partial\{C_1\epsilon < u^\epsilon\} \cap \Omega'$ ,  $d_\epsilon(x_\epsilon) \ll \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$  e  $C_1\epsilon \ll \rho$ . Em particular,

$$\mathcal{H}^{N-1}(\{u^\epsilon = C_1\epsilon\} \cap B_\rho(x_0)) \leq C \cdot \rho^{N-1}, \quad (3.39)$$

para constantes  $C, C_1 > 0$  independentes de  $\epsilon$ .

**Prova.** Pela regularidade Lipschitz (Teorema 3.2), para  $z \in \partial\{C_1\epsilon < u^\epsilon\}$  e  $y \in \mathcal{N}_\delta(\partial\{C_1\epsilon < u^\epsilon\}) \cap B_\rho(x_\epsilon) \cap \{C_1\epsilon < u^\epsilon\}$ , obtêm-se

$$u^\epsilon(y) \leq u^\epsilon(z) + C|z - y| \leq \mu + C\delta \leq \kappa\mu,$$

para  $\mu = C\delta$  e  $\kappa(\text{universal}) > 0$ . Assim, a inclusão abaixo segue

$$\mathcal{N}_\delta(\partial\{C_1\epsilon < u^\epsilon\}) \cap B_\rho(x_\epsilon) \cap \{C_1\epsilon < u^\epsilon\} \subset \{C_1\epsilon < u^\epsilon < \kappa\mu\} \cap B_\rho(x_\epsilon). \quad (3.40)$$

Por outro lado, pelo corolário 3.2 e tomando  $\delta$  como acima se verifica a seguinte estimativa

$$|B_\delta(x) \cap \{u^\epsilon > C_1\epsilon\}| \geq c \cdot |B_\delta(x)| \quad \text{para } x \in \partial\{u^\epsilon > \epsilon\}.$$

Assim, o conjunto  $\partial\{u^\epsilon > C_1\epsilon\}$  tem a propriedade de  $\delta$ -densidade. Assim, o lema 3.4 assegura a existência de uma constante universal  $M(\text{universal}) > 0$  tal que

$$|\mathcal{N}_\delta(\partial\{C_1\epsilon < u^\epsilon\}) \cap B_\rho(x_\epsilon)| \leq C_2 |\mathcal{N}_\delta(\partial\{C_1\epsilon < u^\epsilon\}) \cap B_\rho(x_\epsilon) \cap \{C_1\epsilon < u^\epsilon\}| + M\delta\rho^{N-1}.$$

Agora, aplicando (3.40), segue a estimativa

$$|\mathcal{N}_\delta(\partial\{C_1\epsilon < u^\epsilon\}) \cap B_\rho(x_\epsilon)| \leq C_2 |\{C_1\epsilon < u^\epsilon < \kappa\mu\} \cap B_\rho(x_\epsilon)| + M\delta\rho^{N-1},$$

para alguma constante  $C_2(\text{universal}) > 0$ . Finalmente, para  $\mu \ll \rho$ , o lema 3.5 garante que

$$|\mathcal{N}_\delta(\partial\{C_1\epsilon < u^\epsilon\}) \cap B_\rho(x_\epsilon)| \leq C\delta\rho^{N-1} \quad \text{para algum } C > 0.$$

A fim de concluir a demonstração, toma-se uma cobertura  $\partial\{C_1\epsilon < u^\epsilon\} \cap B_\rho(x_\epsilon)$  por bolas  $\{B_j\}_j$  centradas em pontos ao longo de  $\partial\{C_1\epsilon < u^\epsilon\} \cap B_\rho(x_\epsilon)$  com raio  $\mu \ll 1$ . Assim, segue a inclusão

$$\bigcup_j B_j \subset \mathcal{N}_\mu(\{C_1\epsilon < u^\epsilon\}) \cap B_{\rho+\mu}(x_\epsilon).$$

Finalmente, existem constantes universais  $C_3, C_4 > 0$ , tais que

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{N-1}(\partial\{C_1\epsilon < u^\epsilon\} \cap B_\rho(x_\epsilon)) &\leq C_3 \sum_j \mathcal{L}^{N-1}(\partial B_j) \\
&= \frac{C_3}{\mu} \sum_j |B_j| \\
&\leq \frac{C_4}{\mu} |\mathcal{N}_\mu(\{C_1\epsilon < u^\epsilon\}) \cap B_{\rho+\mu}(x_\epsilon)| \\
&\leq C_4 C(\rho + \mu)^{N-1} \\
&= C_4 C \rho^{N-1} + o(1).
\end{aligned}$$

Tomando  $\mu \rightarrow 0^+$ , segue a tese do teorema.  $\square$

### 3.11 Cenário limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$

A partir de agora serão estabelecidas propriedades geométricas e teóricas no sentido da teoria da medida para o perfil limite  $\lim_{j \rightarrow \infty} u^{\epsilon_{k_j}}(x)$ , onde  $\epsilon_{k_j} \rightarrow 0$  é uma subsequência. Com efeito, pela regularidade Lipschitz a família  $\{u^{\epsilon_k}\}$  é pré-compacta na topologia  $C_{loc}^{0,1}(\Omega)$ . Assim, módulo subsequência, existe uma função  $u_0$ , obtida como limite uniforme  $u^{\epsilon_{k_j}}$ , quando  $\epsilon_{k_j} \rightarrow 0$ .

A partir de agora, será usado a seguinte notação para se referir a  $u_0$ :

$$u_0(x) := \lim_{j \rightarrow \infty} u^{\epsilon_{k_j}}(x).$$

Além do mais, a função limite verifica

- (1)  $u_0 \in [0, K_0]$  in  $\overline{\Omega}$  para alguma constante  $K_0(\text{universal}) > 0$  (independente de  $\varepsilon$ );
- (2)  $u_0 \in C_{loc}^{0,1}(\Omega)$ ;
- (3)  $\mathcal{G}(x, \nabla u_0, D^2 u_0) = f_0(x)$  em  $\{u_0 > 0\}$ , com  $0 \leq f_0 \in L^\infty(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ .

Observe que combinando o item (3) com a estimativa de regularidade obtida em (38, Teorema 1.1), segue que  $u_0 \in C_{loc}^{1,\alpha}(\{u_0 > 0\})$ . Apesar disso, tal estimativa degenera quando se aproxima de  $\mathfrak{F}(u_0, \Omega')$ . No entanto, pelo item (2), o gradiente permanece controlado, mesmo quando  $\text{dist}(x_0, \mathfrak{F}(u_0, \Omega')) \rightarrow 0$ .

Na sequência, será mostrado que para cada  $z_0 \in \mathfrak{F}(u_0, \Omega')$ , existe um cone com vértice  $z_0$  que confina o gráfico do perfil limite.

**Prova do teorema 3.6.** Inicialmente, a estimativa superior segue da regularidade Lipschitz local  $u_0$ . Agora, pelo corolário 3.1, existe  $y_\epsilon \in \{0 \leq u^\epsilon \leq \epsilon\} \cap \Omega'$  com  $d_\epsilon(x_0) = |x_0 - y_\epsilon|$  tal que

$$u^\epsilon(x_0) \geq c \cdot d_\epsilon(x) = c |x_0 - y_\epsilon|,$$

para uma constante  $c(\text{universal}) > 0$ . Assim, módulo subsequência,  $y_\epsilon \rightarrow y_0 \in \{u = 0\}$  e daí

$$u(x_0) \geq c|x_0 - y_0| \geq c \operatorname{dist}(x_0, \mathfrak{F}(u_0, \Omega')).$$

□

**Teorema 3.14.** *Dado  $\Omega' \Subset \Omega$ , existem constantes positivas  $C_0$  e  $r_0$ , tais que*

$$C_0^{-1}r \leq \sup_{B_r(x_0)} u_0(x) \leq C_0(r + u_0(x_0))$$

para qualquer  $x_0 \in \overline{\{u_0 > 0\}} \cap \Omega'$  com  $\operatorname{dist}(x_0, \partial\{u_0 > 0\}) \leq \frac{1}{2}\operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega')$  e  $r \leq r_0$ .

**Prova.** Tais estimativas são consequência da passagem do limite quando  $\epsilon \rightarrow 0$  no teorema 3.4. □

O próximo resultado assegura que o conjunto  $\{u_0 > 0\}$  é o limite, na distância de Hausdorff, de  $\{u^\epsilon > \epsilon\}$  quando  $\epsilon \rightarrow 0$ .

**Teorema 3.15.** *Dado  $C_1 > 1$ , as inclusões seguintes*

$$\{u_0 > 0\} \cap \Omega' \subset \mathcal{N}_\delta(\{u^{\epsilon_k} > C_1\epsilon_k\}) \cap \Omega' \quad e \quad \{u^{\epsilon_k} > C_1\epsilon_k\} \cap \Omega' \subset \mathcal{N}_\delta(\{u_0 > 0\}) \cap \Omega',$$

valem para  $\delta \ll 1$  e  $\epsilon_k \ll \delta$ .

**Prova.** Será provado apenas a primeira inclusão, uma vez que a segunda é obtida similarmente. Para efeito de contradição, suponha que exista uma subsequência  $\epsilon_k \rightarrow 0$  e pontos  $x_k \in \{u_0 > 0\} \cap \Omega'$  tais que

$$\operatorname{dist}(x_k, \{u^{\epsilon_k} > C_1\epsilon_k\}) > \delta. \tag{3.41}$$

Pelo teorema 3.14, e tomando  $k \gg 1$ , temos

$$u^{\epsilon_k}(y_k) = \sup_{B_{\frac{\delta}{2}}(x_k)} u^{\epsilon_k}(x) \geq \frac{1}{2} \cdot \sup_{B_{\frac{\delta}{2}}(x_k)} u_0(x_k) \geq c\frac{\delta}{2} \geq C_1\epsilon_k$$

para algum  $y_k \in \overline{B_{\frac{\delta}{2}}(x_k)} \cap \{u^{\epsilon_k} > C_1\epsilon_k\}$ , o que contradiz (3.41). □

**Teorema 3.16.** *Dado um subdomínio  $\Omega' \Subset \Omega$ , existe uma constante  $C(\text{universal}) > 0$  e  $\rho_0(\Omega', \text{parâmetros universais}) > 0$  tal que, para qualquer  $x_0 \in \mathfrak{F}(u_0, \Omega')$  e  $\rho \leq \rho_0$ , vale*

$$C^{-1} \leq \frac{1}{\rho} \int_{\partial B_\rho(x_0)} u_0(x) d\mathcal{H}^{N-1} \leq C. \tag{3.42}$$

**Prova.** Pela regularidade Lipschitz, a estimativa superior é facilmente obtida. Agora, para a prova da outra desigualdade, seja  $z_\epsilon \in \partial\{u_\epsilon > 0\} \cap \Omega'$ , satisfazendo

$$|z_\epsilon - x_0| = \operatorname{dist}(x_0, \partial\{u_\epsilon > 0\}).$$

Agora, pelo teorema 3.15,  $z_\epsilon \rightarrow x_0$ . Assim, passando o limite quando  $\epsilon_k \rightarrow 0$  na tese do corolário 3.3 segue o resultado.  $\square$

**Observação 3.5.** *Levando em conta a condição (3.42), podemos dizer que  $u_0$  é localmente uniformemente não-degenerada em  $\mathfrak{F}(u_0, \Omega')$ . Finalmente, em certo âmbito, tal propriedade é um outro meio de dizer  $u_0$  goza da Lipschitz regularidade e da não-degenerescência.*

Agora, veremos que  $\{u_0 > 0\}$  tem densidade uniforme positiva ao longo de  $\mathfrak{F}(u_0, \Omega')$ .

**Teorema 3.17.** *Dado  $\Omega' \Subset \Omega$ , existe uma constante  $c_0(\text{universal}) > 0$ , tal que for  $x_0 \in \mathfrak{F}(u_0, \Omega')$  vale*

$$|B_\rho(x_0) \cap \{u_0 > 0\}| \geq c_0 |B_\rho(x_0)|, \quad (3.43)$$

para  $\rho \ll 1$ . Particularmente,  $|\mathfrak{F}(u_0, \Omega')| = 0$ .

**Prova.** A estimativa (3.43) segue como na prova do corolário 3.2. Para a conclusão da prova basta usar o teorema da diferenciação de Lebesgue e um argumento de recobrimento (um resultado do tipo Besicovitch–Vitali, veja (57) para detalhes).  $\square$

### 3.12 Estimativas para a medida de Hausdorff na fronteira livre

Finalmente, é chegada a hora de estabelecer a medida de Hausdorff para a fronteira livre limite.

**Prova do teorema 3.7.** Pelo teorema 3.15, para  $k \gg 1$  suficientemente grande, temos

$$\mathcal{N}_\delta(\mathfrak{F}(u_0, \Omega')) \cap B_\rho(x_0) \subset \mathcal{N}_{4\delta}(\partial\{u^{\epsilon_k} > C_1 \epsilon_k\}) \cap B_{2\rho}(x_0).$$

Assumindo que,  $\epsilon_k \ll \delta \ll \rho \ll \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ , as hipóteses do teorema 3.13 são verificadas, implicando assim a seguinte estimativa para a  $\delta$ -vizinhança,

$$|\mathcal{N}_\delta(\mathfrak{F}(u_0, \Omega')) \cap B_\rho(x_0)| \leq C \cdot \delta \rho^{N-1}.$$

Agora, seja  $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  uma cobertura de  $\mathfrak{F}(u_0, \Omega') \cap B_\rho(x_0)$  por bolas com raio  $\delta > 0$  e centradas em pontos da fronteira livre  $\mathfrak{F}(u_0, \Omega') \cap B_\rho(x_0)$ . Assim,

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j \subset \mathcal{N}_\delta(\mathfrak{F}(u_0, \Omega')) \cap B_{\rho+\delta}(x_0).$$

O que implica que existe uma constante  $\overline{C}(\text{universal}) > 0$  tal que

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_\delta^{N-1}(\mathfrak{F}(u_0, \Omega') \cap B_\rho(x_0)) &\leq \overline{C} \sum_j \mathcal{L}^{N-1}(\partial B_j) \\
&= N \frac{\overline{C}}{\delta} \sum_j |B_j| \\
&\leq N \frac{\overline{C}}{\delta} |\mathcal{N}_\delta(\mathfrak{F}(u_0, \Omega')) \cap B_{\rho+\delta}(x_0)| \\
&\leq C(N)(\rho + \delta)^{N-1} \\
&= C(N)\rho^{N-1} + o(\delta).
\end{aligned}$$

Finalmente, tomando  $\delta \rightarrow 0^+$  segue a tese do teorema. □

Como consequência do último teorema 3.7 segue que  $\mathfrak{F}(u_0, \Omega')$  tem perímetro localmente finito (veja, (57) para uma precisa definição). Além do mais, a fronteira reduzida, i.e.  $\mathfrak{F}_{\text{red}}(u_0, \Omega') := \partial_{\text{red}}\{u_0 > 0\} \cap \Omega'$  tem uma medida  $\mathcal{H}^{N-1}$  total no sentido que

$$\mathcal{H}^{N-1}(\mathfrak{F}(u_0, \Omega') \setminus \mathfrak{F}_{\text{red}}(u_0, \Omega')) = 0,$$

Recomendamos para o leitor (7, Teorema 6.7) para uma prova detalhada. Particularmente, a fronteira livre limite tem um vetor normal exterior para quase todo ponto- $\mathcal{H}^{N-1}$  em  $\mathfrak{F}_{\text{red}}(u_0, \Omega')$  (veja, (57)).

### 3.13 Comentários finais: Uma abordagem sobre a condição de fronteira livre

No caso particular que provém da teoria de propagação homogênea de chamas:

$$\zeta_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon} \zeta\left(\frac{t}{\epsilon}\right),$$

onde  $\zeta$  é uma função contínua suportada em  $[0, 1]$ , então a função limite satisfaz

$$F(x, D^2u) = 0 \quad \text{in} \quad \{u > 0\},$$

em vista do lema de corte, encontrado em (64, Lema 6) e em 4 adaptado para o cenário duplamente não homogêneo. Neste caso, mesmo que a degenerescência do gradiente não esteja mais presente na equação limite, ela deixa sua *signature* no comportamento linear esperado ao longo da fronteira limite de transição.

Por fim vamos analisar perfis unidimensionais, i.e., a configuração limite da equação

$$(|u_x^\epsilon|^p + \kappa |u_x^\epsilon|^q) \cdot u_{xx}^\epsilon = \zeta_\epsilon(u^\epsilon) \quad \text{para} \quad \kappa > 0. \quad (3.44)$$

Multiplicando a equação acima por  $u_x^\epsilon dx$ , resulta a seguinte igualdade diferencial:

$$(|u_x^\epsilon|^p u_x^\epsilon + \kappa |u_x^\epsilon|^q u_x^\epsilon) \cdot (u_{xx}^\epsilon dx) = \zeta_\epsilon(u^\epsilon) \cdot u_x^\epsilon dx. \quad (3.45)$$

Entretanto,

$$\zeta_\epsilon(u^\epsilon) \cdot u_x^\epsilon dx = \frac{d}{dx} \mathfrak{Z}_\epsilon(u^\epsilon),$$

onde

$$\mathfrak{Z}_\epsilon(x) := \int_0^{\frac{x}{\epsilon}} \zeta(s) ds \rightarrow \int_0^1 \zeta(s) ds \quad \text{as } \epsilon \rightarrow 0^+.$$

Considerando a mudança de variável

$$u_x^\epsilon(x) = w(x) \quad \implies \quad u_{xx}^\epsilon dx = dw,$$

então podemos escrever

$$\int (|u_x^\epsilon|^p u_x^\epsilon + \kappa |u_x^\epsilon|^q u_x^\epsilon) \cdot u_{xx}^\epsilon dx = \int (|w|^p + \kappa |w|^q) w dw.$$

Assim, computando as primitivas em (3.45) e fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$ , obtemos a função limite  $u$  que satisfaz

$$\frac{1}{p+2} |u'(x_0)|^{p+2} + \frac{\kappa}{q+2} |u'(x_0)|^{q+2} = \int_0^1 \zeta(s) ds.$$

Assim,

$$|u'(x_0)| \leq \min \left\{ \sqrt[p+2]{(p+2) \int_0^1 \zeta(s) ds}, \sqrt[q+2]{\left(\frac{q+2}{\kappa}\right) \int_0^1 \zeta(s) ds} \right\}.$$

Particularmente, tomando  $p = 0 = \kappa$ , é recuperada condição de fronteira da teoria clássica na teoria de propagação de chama isotrópica, veja (12).

## 4 CONCLUSÃO

Durante o percurso dessa tese foi assegurado a diversidade de meios para estudar a regularidade de problemas com dupla degenerescência. Na primeira parte do trabalho se fez uso da técnica da análise tangencial e do escalonamento intrínseco como meios de obter um expoente Hölder explícito, ótimo e melhorado e sua aplicabilidade a equações da classe que regem o problema em estudo. Na última parte, foi desenvolvido a técnica de perturbação singular que proveu, por exemplo, a regularidade ótima de um problema de fronteira-livre do tipo Bernoulli, por meio de aproximações da soluções e para um problema com degenerescência não homogênea via o método de perturbação singular juntamente com ferramentas de regularidade em teoria de EDPs elípticas totalmente não lineares.

## REFERÊNCIAS

- 1 ACERBI, E.; MINGIONE, G.; SEREGIN, G.A. Regularity results for parabolic systems relates to a class of non-Newtonian fluids. **Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire**, v.21, n.1, p.25-60, 2004.
- 2 ALT, H.W.; CAFFARELLI, L.A. Existence and regularity for a minimum problem with free boundary. **J. Reine Angew. Math.**, v.325, p.105-144, 1981.
- 3 AMARAL, M.; SILVA, J.V.; RICARTE, G.C.; TEYMURAZYAN, R. Sharp regularity estimates for quasilinear evolution equations. **Israel J. Math.**, v.231, n.1, p.25-45, 2019.
- 4 ANDREUCCI, D.,  $L_{loc}^\infty$ -estimates for local solutions of degenerate parabolic equations, **SIAM J. Math. Anal.**, v.22, n.1, p. 138-145, 1991.
- 5 ARAÚJO, D.J.; MAIA, A.F.; URBANO, J.M. Sharp regularity for the inhomogeneous porous medium equation. **J. Anal. Math.**, v.140, n.2, p.395-407, 2020.
- 6 ARAÚJO, D.J.; RICARTE, G.C.; TEIXEIRA, E.V. Geometric gradient estimates for solutions to degenerate elliptic equations. **Calc. Var. Partial Differential Equations**, v.53, p.605-625, 2015.
- 7 ARAÚJO, D.J.; RICARTE, G.C.; TEIXEIRA, E.V. Singularly perturbed equations of degenerate type. **Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire**, v.34, n.3, p.655-678, 2017.
- 8 ARAÚJO, J.G. Sharp regularity for the degenerate doubly nonlinear parabolic equation. **J. Differential Equations**, v.269, n.12, p. 10558-10570, 2020.
- 9 ARONSON, D.G.; CAFFARELLI, L.A. Optimal regularity for one dimensional porous medium flow, **Rev. Mat. Iberoamericana**, v.2, p.357-366, 1986.
- 10 BARONI, P.; COLOMBO, M.; MINGIONE, G. Regularity for general functionals with double phase. **Calc. Var. Partial Differential Equations**, v.57, n.2, 1-48 p., 2018.
- 11 BENEDEK, A.; PANZONE, R. The space  $L^p$ , with mixed norm. **Duke Math.** v.28, p.301-324, 1961.
- 12 BERESTYCKI, H.; CAFFARELLI, L.A.; NIRENBERG, L. Uniform estimates for regularization of free boundary problems. **Analysis and partial differential equations**. New York: Dekker, 1990. (Lecture notes in pure and applied mathematics, v.122). p.567-619.

- 13 BIRINDELLI I.; DEMENGEL, F. Comparison principle and Liouville type results for singular fully nonlinear operators. **Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.**, ser.6, t.13, n.2, p.261-287, 2004.
- 14 BIRINDELLI I.; DEMENGEL, F. Eigenvalue, maximum principle and regularity for fully non linear homogeneous operators. **Commun. Pure Appl. Anal.**, v.6, n.2, p. 335-366, 2007.
- 15 BIRINDELLI I.; DEMENGEL, F. The Dirichlet problem for singular fully nonlinear operators. **Discrete Contin. Dyn. Syst.**, p.110-121, 2007. Suplemento.
- 16 BIRINDELLI I.; DEMENGEL, F. Regularity for radial solutions of degenerate fully nonlinear equations. **Nonlinear Anal.**, 75, n.17, p.6237-6249, 2012.
- 17 BIRINDELLI I.; DEMENGEL, F.  $C^{1,\beta}$  regularity for Dirichlet problems associated to fully nonlinear degenerate elliptic equations. **ESAIM Control Optim. Calc. Var.**, v.20, n.4, p.1009-1024, 2014.
- 18 BIRINDELLI I.; DEMENGEL, F. Hölder regularity of the gradient for solutions of fully nonlinear equations with sub linear first order term. **Geometric methods in PDE's**. Cham: Springer, 2015. (Springer INdAM Ser., 13). p.257-268.
- 19 BIRINDELLI I.; DEMENGEL, F.; LEONI, F.  $C^{1,\gamma}$  regularity for singular or degenerate fully nonlinear equations and applications. **Nonlinear Differ. Equ. Appl.**, v.26, n.5, paper n.40, p. 1-13, 2019.
- 20 BÖGELEIN, V.; DIZAAR, F.; MINGIONE, G., **The regularity of general parabolic systems with degenerate diffusions**. Providence, RI: American Mathematical Society, 2013. (Memoirs of the American Mathematical Society, v.1041). ISBN: 978-0-8218-8975-6.
- 21 BONAFEDE, S.; SKRYPNIK, I.I. On Hölder continuity of solutions of doubly nonlinear parabolic equations with weight. **Ukrain. Mat. Zh.**, v.51, n.7, p.890-903, 1999. Reimpresso em: *Ukrainian Math.*, v.51, n.7, p. 996-1012, 1999.
- 22 CAFFARELLI L.A.; LEDERMAN, C.; WOLANSKI, N. Singular limit and homogenization for flame propagation in periodic excitable media. **Arch. Ration. Mech. Anal.**, v.172, n.2, p. 153-190, 2004.
- 23 CAFFARELLI L.A.; LEDERMAN, C.; WOLANSKI, N., Uniform estimates and limits for a two phase parabolic singular perturbation problem. **Indiana Univ. Math.J.**, v.46, n.2, p.453-489, 1997.

- 24 CAFFARELLI L.A.; LEDERMAN, C.; WOLANSKI, N., Pointwise and viscosity solutions for the limit of a two phase parabolic singular perturbation problem. **Indiana Univ. Math. J.**, v.46, n.3, p. 719-740, 1997.
- 25 CAFFARELLI, Luis A.; CABRÉ, Xavier. **Fully nonlinear elliptic equations**, v. 43 of American Mathematical Society Colloquium Publications. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995, vi+104 p
- 26 CAFFARELLI, L.; SALSA, S. **A geometric approach to free boundary problems**. Providence, RI: American Mathematical Society, 2005.x, 270 p. (Graduate Studies in Mathematics, 68). ISBN: 0-8218-3784-2.
- 27 CRANDALL, M.G.; ISHII, H.; LIONS, P-L. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. **Bull. Amer. Math. Soc.**, v.27, n.1, p. 1-67, 1992.
- 28 DANIELLI, D.; PETROSYAN, A.; SHAHGHOIAN, H. A singular perturbation problem for the  $p$ -Laplace operator. **Indiana Univ. Math. J.**, v.52, p.457-476, 2003.
- 29 SILVA, J.V. Geometric  $C^{1+\alpha}$  regularity estimates for nonlinear evolution models. **Nonlinear Anal.**, v.184, p.95-115, 2019.
- 30 SILVA, J.V; JÚNIOR E.C.; RICARTE G.C. **Fully nonlinear singularly equations with non-homogeneous degeneracy**.ar-Xiv.org,[Ithaca, N.Y.Y], 2020. Disponível arXiv:2101.08664. Acesso em: 17/04/2020. Aceito na Rev. Mat. Iberoamericana.
- 31 SILVA, J.V; JÚNIOR E.C.; RICARTE G.C. **Sharp and improved regularity for a class of doubly degenerate parabolic PDES**. ar-Xiv.org,[Ithaca, N.Y.Y], 2020. Disponível arXiv:2103.08797. Acesso em: 17/04/2020.
- 32 SILVA, J.V; RAMPASSO G.C; JÚNIOR E.C.; RICARTE G.C.**Global regularity for a class of fully nonlinear PDES with unbalanced degeneracy**.ar-Xiv.org,[Ithaca, N.Y.Y], 2020. Disponível arXiv:2108.08343. Acesso em: 17/04/2020.
- 33 SILVA, J.V.; SALORT, A.M. Sharp regularity estimates for quasi-linear elliptic dead core problems and applications. **Calc. Var. Partial Differential Equations**. v.57, n.3, p.1-24, 2018.
- 34 SILVA, J.V.; TEIXEIRA, E.V. Sharp regularity estimates for second order fully nonlinear parabolic equations. **Math. Ann.**, v.369, n.3, p. 1623-1648, 2017.
- 35 SILVA, J.V.; VIVAS,H. The obstacle problem for a class of degenerate fully nonlinear operators. **Rev. Mat. Iberoam.**, v. 37, n. 5, p. 1991-2020, 2021.

- 36 SILVA, J.V.; VIVAS, H. Sharp regularity for degenerate obstacle type problems: a geometric approach, **Discrete & Continuous Dynamical Systems**, v.41, n.3, p.359-1385.
- 37 SILVA, J.V.; RICARTE, G.C. An asymptotic treatment for non-convex fully nonlinear elliptic equations: Global Sobolev and BMO type estimates. **Comm. Contemp. Math.**, 21, n.7, p. 1-28, 2019.
- 38 SILVA, J.V.; RICARTE, G.C. Geometric gradient estimates for fully nonlinear models with non-homogeneous degeneracy and applications. **Calc. Var. Partial Differential Equations Calc. Var.** v.59, n.5, p. 1-35, 2020.
- 39 SILVA, J.V.; ROSSI, J.D.; SALORT, A.M. Regularity properties for  $p$ -dead core problems and their asymptotic limit as  $p \rightarrow \infty$ . **J. Lond. Math. Soc.**, v.99, n.1, p.69-96, 2019.
- 40 SILVA, J.V.; OCHOA, P.; SILVA, A. Regularity for degenerate evolution equations with strong absorption. **J. Differential Equations**, v.264, n.12, p. 7279-7293, 2018.
- 41 SILVA, J.V.; LEITÃO JÚNIOR, R.A.; RICARTE G.C. Geometric regularity estimates for fully nonlinear elliptic equations with free boundaries. **Mathematische Nachrichten**, no.1, v.294, p.38-55, 2020.
- 42 DÁVILA, G.; FELMER,P; QUAAS, A. Alexandroff-Bakelman-Pucci estimate for singular or degenerate fully nonlinear elliptic equations. **Comptes Rendus. Math.**, v.347, n.19, p. 1165-1168, 2009.
- 43 FILIPPIS, C. Regularity for solutions of fully nonlinear elliptic equations with nonhomogeneous degeneracy. **Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics**, v.151, n. 1, p. 110-132.
- 44 FILIPPIS, C.; MINGIONE, G. Manifold Constrained Non-uniformly Elliptic Problems. **The Journal of Geometric Analysis**, v.30, n.2, p. 1661-1723, 2020.
- 45 FILIPPIS, C.; MINGIONE, On the Regularity of Minima of Non-autonomous functionals. **The Journal of Geometric Analysis**, v.30, n.2, p. 1584-1626, 2020.
- 46 FILIPPIS, C.; MINGIONE, Lipschitz bounds and nonautonomous integrals. **arXiv.org**,[Ithaca, N.Y.Y], 2020. Disponível arXiv:2007.07469. Acesso em: 17/04/2020.
- 47 FILIPPIS, C.; OH, J. Regularity for multi-phase variational problems. **J. Differential Equations**, v.267, n.3, p. 1631-1670, 2019. (2019), no. 3, 1631–1670.

- 48 DE JESUS, David João Brandlight. **Campanato Spaces and applications in Partial Differential Equations**. 2028. 56 p. Dissertação (mestrado)- Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra, Coimbra, 2018.
- 49 SILVA, D.; FERRARI, F.; SALSA, S. Free boundary regularity for fully nonlinear non-homogeneous two-phase problems. **J. Math. Pures Appl.** v.103, n.3, p. 658-694, 2015.
- 50 DIAZ, J.I.; THÉLIN, F. de. On a nonlinear parabolic problem arising in some models related to turbulent flows. **SIAM J. Math. Anal.**, v.25, n.4, p. 1085-1111, 1994.
- 51 DIBENEDETTO, E. **Degenerate parabolic equations**. New York: Springer-Verlag, 1993, xvi, 387 p.(Universitext). ISBN: 0-387-94020-0.
- 52 DIBENEDETTO, E.; URBANO, J.M.; VESPRI, V. Current issues on singular and degenerate evolution equations. In: DAFERMOS, C.M.; FEIREISL, E.(ed.) **Handbook differential equations: evolutionary equations, vol.I**. Amsterdam: North-Holland, 2004. p.169-286.
- 53 DIEHL N.M.L. Improved regularity for the inhomogeneous porous medium equation. **J. Math. Anal. Appl.**, v.494, n.1, p. 1-8, 2021.
- 54 DIEHL N.M.L.; URBANO, J.M. Sharp Hölder regularity for the inhomogeneous Trudinger's equation. **Nonlinearity**, v.33, n.12, p. 7054-7066, 2020.
- 55 PRAZERES, D.; TEIXEIRA, E.V. Cavity problems in discontinuous media. **Calc. Var. Partial Differential Equations**, v.55, n. 1, p. 1-15, 2016.
- 56 EVANS L.C. **Partial differential equations**. 2nd ed. Providence, RI: American Mathematical Society, 2010, xxii, 749 p. (Graduate Studies in Mathematics, 19). ISBN: 978-0-8218-4974-3.
- 57 EVANS, L.C.; GARIEPY, R.F. **Measure theory and fine properties of functions**. Boca Raton, FL: CRC Press, 1992. viii, 268 p. (Studies in Advanced Mathematics). ISBN: 0-8493-7157-0.
- 58 FORNARO, S.; SOSIO, M. Intrinsic Harnack estimates for some doubly nonlinear degenerate parabolic equations. **Adv. Differential Equations**, v.13, n. 1-2, p. 139-168, 2008.
- 59 FORNARO, S.; SOSIO, M.; VESPRI,V.  $L^r_{loc} - L^\infty_{loc}$  estimates and expansion of positivity for a class of doubly non linear singular parabolic equations. **Discrete Contin. Dyn. Syst. - S**: v. 7, n. 4, p. 737-760, 2014.

- 60 GIANAZZA, U.; SILJANDER, J. Sharp regularity for weak solutions to the porous medium equation. **ar-Xiv.org**, [Ithaca, N.Y.], 2016. Disponível em: arXiv:1607.06924v1. Acesso em: 25/05/1990.
- 61 HENRIQUES, E.; LALEOGLU, R. Local Hölder continuity for some doubly nonlinear parabolic equations in measure spaces. **Nonlinear Anal.**, v. 79, n. 3, p. 156-175, 2013.
- 62 HOLMES, M.H. **Introduction to Perturbation Methods**. 2nd ed. New York: Springer, 2013. xviii, 436 p. (Texts in Applied Mathematics, 20). ISBN: 978-1-4614-5476-2; 978-1-4614-5477-9 34-01
- 63 IMBERT, C. Alexandroff-Bakelman-Pucci estimate and Harnack inequality for degenerate/singular fully non-linear elliptic equations. **J. Differential Equations**, v. 250, n. 3, p. 1553-1574, 2011.
- 64 IMBERT, C.; SILVESTRE, L.  $C^{1,\alpha}$  regularity of solutions of some degenerate fully non-linear elliptic equations. **Adv. Math.** v. 233, p. 196-206, 2013.
- 65 IMBERT, C.; SILVESTRE, L., Estimates on elliptic equations that hold only where the gradient is large. **J. Eur. Math. Soc.**, v. 18, n.6, p. 1321-1338, 2013.
- 66 IVANOV, A.V, Uniform Hölder estimates for generalized solutions of quasilinear parabolic equations that admit double degeneration. **Algebra i Analiz**, v.3, n.2, p. 39-179, 1991. Republicado em St. Petersburg Mathematical Journal, v.3, n.2, p. 363-403, 1992.
- 67 IVANOV, A.V, The classes  $\mathcal{B}_{m,1}$  and Hölder continuity for doubly degenerate parabolic equations. **J Math Sci.**, v. 75, p. 2011-2027, 1995.
- 68 IVANOV, A.V. Regularity for doubly nonlinear parabolic equations. *In*: KULISH, P.P.; POPOV, V.N. (ed.). **Questions of quantum field theory and statistical physics**: part 12. St. Petersburg: POMI, 1994. (Zap. Nauchnn. Sem. POMI, v.209). p.37-59. Republicado em J. Math. Sci., New York, v. 83, n. 1, 22-37, 1997.
- 69 IVANOV, A.V. Hölder estimates for a natural class of equations of fast diffusion type. *In*: OSKOLKOV, A.P.; SIMONOVA, V.N.(ed.). **Computational Methods and algorithms**: part XI. St. Petersburg: POMI, 1995. (Zap.Nauchnn. Sem. POMI, v.229). p. 29-62. Republicado em J. Math. Sci., New York, v. 89, n. 6, 1607-1630, 1998.
- 70 IVANOV, A.V. The regularity theory for (M,L)-Laplacian parabolic equation. *In* IVANOV, A.V.; URAL'TSEVA, N.N (ed.). *In*: LADYZHENSKAYA, O.A. **Boundary-value problems of mathematical physics and related problems of function theory**: part. 27. St. Petersburg: POMI, 1997. (Zap.Nauchnn. Sem. POMI, v.243). p. 87-110. Republicado em J. Math. Sci., New York, v. 99, n. 5, 854-869, 2000.

- 71 IVANOV, A.V.; JÄGER. Existence and uniqueness of a regular solution of Cauchy-Dirichlet problem for equation of turbulent filtration. *In: IVANOV, A.V.; URAL'TSEVA, N.N (ed.). Boundary-value problems of mathematical physics and related problems of function theory.* part. 29. St. Petersburg: POMI, 1997. (Zap.Nauchnn. Sem. POMI, v.249). p.153-198. Republicado em *J. Math. Sci.*, New York, v. 101, n. 5, 3472-3502, 2000.
- 72 JUNGES MIOTTO, The Aleksandrov-Bakelman-Pucci estimates for singular fully nonlinear operators. **Commun. Contemp. Math.**, v. 12, n. 4, p. 607-627, 2010.
- 73 KARAKHANYAN, A. Regularity for the two phase singular perturbation problems. **ar-Xiv.org**, [Ithaca, N.Y.], 2029. Disponível em: [arXiv:1910.06997](https://arxiv.org/abs/1910.06997). Acesso em: 12/02/2020.
- 74 KINNUNEN J.; PARVIAINEN, M. Stability for degenerate parabolic equations. **Adv. Calc. Var.** v. 3. n. 1, p. 29-48, 2010.
- 75 KRYLOV, N.V. Boundedly inhomogeneous elliptic and parabolic equations. **Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.** v. 46, n. 3, p. 487-523, 1982.
- 76 KRYLOV, N.V. Boundedly inhomogeneous elliptic and parabolic equations in a domain. **Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.**, v. 47, n. 1, p. 75-108, 1983.
- 77 KUUSI, T.; MINGIONE, G. The Wolff gradient bound for degenerate parabolic equations. **J. Eur. Math. Soc.**, v.16, n. 4, p. 835-892, 2014.
- 78 KRYLOV, N.V. **Lectures on elliptic and parabolic equations in Sobolev spaces.** Providence, RI: American Mathematical Society, 2008. xvii, 357 p. (Graduate Studies in Mathematics, 96). ISBN: 978-0-8218-4684-1.
- 79 KUUSI, T.; SILJANDER, J; URBANO, J.M. Local Hölder continuity for doubly nonlinear parabolic equations. **Indiana Univ. Math. J.**, v. 61, n. 1, p. 399-430, 2012.
- 80 LEDERMAN, C.; VÁZQUEZ, J.L.; WOLANSKI, N. Uniqueness of solution to a free boundary problem from combustion. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 353, n. 2, p. 655-692, 2001.
- 81 LEDERMAN, c.; WOLANSKI, N. Viscosity solutions and regularity of the free boundary for the limit of an elliptic two phase singular perturbation problem. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, ser. 4, n. 2, p. 253-288, 1998.
- 82 LEDERMAN, c.; WOLANSKI, N. A two phase elliptic singular perturbation problem with a forcing term. **J. Math. Pures Appl.**, v. 86, n.6, p. 552-589, 2006.

- 83 LEDERMAN, c.; WOLANSKI, N. A local monotonicity formula for an inhomogeneous singular perturbation problem and applications. *Ann. Mat. Pura Appl.*, v. 187, n. 2, p. 197-220, 2008.
- 84 LEDERMAN, c.; WOLANSKI, N. A local monotonicity formula for an inhomogeneous singular perturbation problem and applications: part II. **Ann. Mat. Pura Appl.**, v. 189, n. 1, p. 25-46, 2010.
- 85 LEDERMAN, c.; WOLANSKI, N. An inhomogeneous singular perturbation problem for the  $p(x)$ -Laplacian. **Nonlinear Anal.**, v. 138, p. 300-325, 2016.
- 86 LIONS, P-L.; ISHII. Viscosity Solutions of Fully Nonlinear Second-Order Elliptic Partial Differential Equations. **Journal of Differential Equations**, v. 83, p. 26-78, 1990.
- 87 LIU, W.; DAI, G. Existence and multiplicity results for double phase problem. **J. Differential Equations**, v. 265, n. 9, p. 4311-4334, 2018.
- 88 MARTÍNEZ, S.; WOLANSKI, N. A singular perturbation problem for a quasi-linear operator satisfying the natural growth condition of Lieberman. *SIAM J. Math. Anal.*, v. 41, n. 1, p. 318-359, 2009.
- 89 MOREIRA, D.; TEIXEIRA, E.V. A singular perturbation free boundary problem for elliptic equations in divergence form. **Calc. Var. Partial Differential Equations**, v. 29, n. 2, p. 161-190, 2007.
- 90 MOREIRA, D.; WANG, L. Singular perturbation method for inhomogeneous nonlinear free boundary problems. **Calc. Var. Partial Differential Equations**, v. 49, p. 1237-1261, 2014.
- 91 PORZIO, M.M.; VESPRI, V. Hölder estimates for local solutions of some doubly nonlinear degenerate parabolic equations. **J. Differential Equations** **103**, v. 103, n. 1, p. 146-178, 1993.
- 92 RICARTE, G.C.; SILVA. Regularity up to the boundary for singularly perturbed fully nonlinear elliptic equations. **Interfaces and Free Bound**, v. 17, p. 317-322, 2015.
- 93 RICARTE, G.C.; SILVA.; TEYMURAZYAN, R. Cavity type problems ruled by infinity Laplacian operator. **J. Differential Equations**, v. 262, n. 3, p. 2135-2157, 2017.
- 94 RICARTE, G.C.; TEIXEIRA E.V. Fully nonlinear singularly perturbed equations and asymptotic free boundaries. **J. Funct. Anal.**, v. 261, n. 6, p. 1264-1673, 2011.

- 95 RICARTE, G.C.; TEYMURAZYAN, R.; URBANO, J.M. Singularly perturbed fully nonlinear parabolic problems and their asymptotic free boundaries. **Rev. Mat. Iberoam.**, v. 35, n. 5, p. 1535-1558, 2019.
- 96 SILVESTRE, L.; TEIXEIRA E.V. Regularity estimates for fully non linear elliptic equations which are asymptotically convex. *In*: CARVALHO, A.N. et al. (ed). **Contributions to nonlinear elliptic equations and systems**, Cham: Birkhäuser, 2015 (Progress in nonlinear differential equations Appl., 86).p. 425-438.
- 97 TEIXEIRA E.V. Optimal regularity of viscosity solutions of fully nonlinear singular equations and their limiting free boundary problems. **Mat. Contemp.**, v. 30, p. 217-237, 2006.
- 98 TEIXEIRA E.V. **Elliptic regularity and free boundary problems: an introduction**. Rio de Janeiro: IMPA Mathematical Publications, 2007. 205 p. ISBN: 978-85-244-0252-4.
- 99 TEIXEIRA E.V. A variational treatment for elliptic equations of the flame propagation type: regularity of the free boundary. **Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire**, v. 25, p. 633-658, 2008.
- 100 TEIXEIRA E.V. Geometric regularity estimates for elliptic equations. **Mathematical Congress of the Americas**. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2016. (Contemp. Math., 656). p. 185-201.
- 101 TEIXEIRA E.V.; URBANO, J.M. A geometric tangential approach to sharp regularity for degenerate evolution equations. **Anal. PDE**, v. 7, p. 733-744, 2014.
- 102 TEIXEIRA E.V.; URBANO, J.M. An intrinsic Liouville theorem for degenerate parabolic equations. **Arch. Math. (Basel)**, v. 102, n. 5, p. 483-487, 2014.
- 103 TEIXEIRA E.V.; URBANO, J.M. **Geometric tangential analysis and sharp regularity for degenerate PDEs**. A ser publicado em Harnack Inequalities and nonlinear operators: proceedings of the INdAM to celebrate the 70th birthday of Emanuele DiBenedetto. Springer INdAM Series.
- 104 STURM, S. Existence of weak solutions of doubly nonlinear parabolic equations. **J. Math. Anal. Appl.** v. 455, p. 842-863, 2017.
- 105 STURM, S. Existence of very weak solutions of doubly nonlinear parabolic equations with measure data. **Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.** v. 42, n. 2, p. 931-962, 2017.
- 106 STURM, S. Pointwise estimates via parabolic potentials for a class of doubly nonlinear parabolic equations with measure data. **Manuscripta Math.** v. 157, n. 3-4, p. 295-322, 2018.

- 107 SURNACHĚV, M.D. Regularity of solutions of parabolic equations with a double nonlinearity and a weight. **Trans. Moscow Math. Soc.**, p. 259-280, 2014.
- 108 TRUDINGER N.S. Fully nonlinear, uniformly elliptic equations under natural structure conditions. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 278, n.2, p. 751-769, 1983.
- 109 TRUDINGER N.S. Regularity of solutions of fully nonlinear elliptic equations. **Boll. Un. Mat. Ital.**, v. 6, n. 3, p. 421-430, 1984.
- 110 URBANO J.M. **The method of intrinsic scaling**: a systematic approach to regularity for degenerate and singular PDEs. Berlin: Springer-Verlag, 2008. x, 150 p. (Lecture Notes in Mathematics, 1930). ISBN: 978-3-540-75931-7.
- 111 VESPRI, V. On the local behaviour of solutions of a certain class of doubly nonlinear parabolic equations. **Manuscripta Math.** v. 75, n. 1, p. 65-80, 1992.
- 112 WEISS, G.S. A singular limit arising in combustion theory: fine properties of the free boundary. **Calc. Var. Partial Differential Equations**, v. 17, n. 3, p. 311-340, 2003.
- 113 ZAJICEK, L. Porosity and  $\sigma$ -porosity. **Real Anal. Exchange**, v. 13, p. 314-350, 1987-1988.

## APÊNDICE A - EXCERTOS DA TEORIA DE EDPs ELÍPTICAS NÃO LINEARES

### DESIGUALDADE DE HARNACK

Neste apêndice são dados resultados fundamentais da teoria elíptica, nomeadamente a desigualdade de Harnack fraca, princípio do máximo, desigualdade ABP, princípio da comparação, existência de soluções minimais e finalmente o lema do corte. As duas primeiras são essenciais para derivar a desigualdade de Harnack (resp. regularidade Hölder local) para soluções de viscosidade.

**Teorema A.1 (Desigualdade de Harnack Fraca, (63, Teorema 2)).** *Seja  $u$  uma função contínua não-negativa tal que*

$$F_0(x, \nabla u, D^2 u) \leq 0 \quad \text{em} \quad B_1$$

*no sentido de viscosidade. Assuma que  $F_0$  é uniformemente elíptico na variável  $X$  (veja, condição A1) e  $F_0 \in C^0(B_1 \times (\mathbb{R}^N \setminus B_{M_F}) \times \text{Sym}(N))$  para algum  $M_F \geq 0$ . Assuma ainda que*

$$|\xi| \geq M_F \quad \text{e} \quad F_0(x, \xi, X) \leq 0 \quad \implies \quad \mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^-(X) - \sigma(x)|\xi| - f_0(x) \leq 0 \quad (\text{A.1})$$

*para funções contínuas  $f_0$  e  $\sigma$  em  $B_1$ . Então, para qualquer  $q_1 > N$*

$$\|u\|_{L^{p_0}(B_{\frac{1}{4}})} \leq C \cdot \left\{ \inf_{B_{\frac{1}{2}}} u + \max \{M_F, \|f_0\|_{L^N(B_1)}\} \right\}$$

*para algum  $p_0 > 0$  (universal) e uma constante  $C > 0$  dependendo de  $N, q_1, \lambda, \Lambda$  e  $\|\sigma\|_{L^{q_1}(B_1)}$ .*

**Teorema A.2 (Princípio do Máximo Local, (63, Teorema 3)).** *Seja  $u$  uma função contínua satisfazendo*

$$F_0(x, \nabla u, D^2 u) \geq 0 \quad \text{em} \quad B_1$$

*no sentido de viscosidade. Assuma que  $F_0$  é uniformemente elíptico na variável  $X$  e  $F_0 \in C^0(B_1 \times (\mathbb{R}^N \setminus B_{M_F}) \times \text{Sym}(N))$  para algum  $M_F \geq 0$ . Assuma ainda que*

$$|\xi| \geq M_F \quad \text{e} \quad F_0(x, \xi, X) \geq 0 \quad \implies \quad \mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^+(X) + \sigma(x)|\xi| + f_0(x) \geq 0 \quad (\text{A.2})$$

*para funções contínuas  $f_0$  and  $\sigma$  in  $B_1$ . Então, para qualquer  $p_1 > 0$  e  $q_1 > N$*

$$\sup_{B_{\frac{1}{4}}} u \leq C \cdot \left\{ \|u^+\|_{L^{p_1}(B_{\frac{1}{2}})} + \max \{M_F, \|f_0\|_{L^N(B_1)}\} \right\}$$

onde  $C > 0$  é uma constante que depende de  $N, q_1, \lambda, \Lambda, \|\sigma\|_{L^{q_1}(B_1)}$  e  $p_1$ .

Deve-se lembrar que os resultados provados no manuscrito de Imbert (63) seguem a estratégia do caso uniformemente elíptico (25) [Seção 4.2]. Tal estratégia é baseada no chamado  $L^\varepsilon$ -Lema, que estabelece um decaimento polinomial para a medida dos super-níveis de uma solução não-negativa para o operador de Pucci extremal  $\mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^+$ :

$$|(\{x \in B_1 : u(x) > t\} \cap B_1)| \leq \frac{C}{t^\varepsilon}. \quad (\text{A.3})$$

Infelizmente, o manuscrito de Imbert tem uma lacuna na prova de (A.3). Tal erro foi recentemente resolvido em um trabalho conjunto com Silvestre, veja (65), onde uma  $L^\varepsilon$ -estimativa apropriada foi abordada. Na verdade, sua prova vale para “Operadores de Pucci extremais com gradientes grandes” definido, para um  $\tau$  fixado, por:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}_{\lambda,\Lambda}^+(D^2u, \nabla u) &:= \begin{cases} \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^+(D^2u) + \Lambda|\nabla u| & \text{se } |\nabla u| \geq \tau \\ +\infty & \text{caso contrário} \end{cases} \\ \widetilde{\mathcal{M}}_{\lambda,\Lambda}^-(D^2u, \nabla u) &:= \begin{cases} \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^-(D^2u) - \Lambda|\nabla u| & \text{se } |\nabla u| \geq \tau \\ -\infty & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

A  $L^\varepsilon$ -estimativa foi provada como válida sempre que  $\tau \leq \varepsilon_0$  universal (veja, (65, Teorema 5.1)). Além disso, observe que a condição de elipticidade  $\widetilde{\mathcal{M}}_{\lambda,\Lambda}^-$  é consistente com (A.1) se tomamos  $\sigma(x) \equiv \Lambda$ . Precisamente, se (A.1) é válido e  $u$  é uma supersolução para  $F_0$ , então é também uma supersolução para  $\widetilde{\mathcal{M}}_{\lambda,\Lambda}^-$  com lado direito  $f_0$ . Um raciocínio análogo é válido para  $\widetilde{\mathcal{M}}_{\lambda,\Lambda}^+$  e (A.2).

Nesse ponto, uma vez derivado a  $L^\varepsilon$ -estimativa, a prova do teorema A.1 é exatamente como em (63) que é, por sua vez, uma modificação do caso uniformemente elíptico em (25) [Teorema 4.8, a]. Quanto ao teorema A.2, este também segue de (A.3) assumindo inicialmente que a norma  $L^\varepsilon$  de  $u^+$  é pequena e obtendo um resultado geral por interpolação. De fato, a baixa magnitude da norma  $L^\varepsilon$  facilmente implica (A.3) que por sua vez indica que  $u$  é limitada (veja em (63)[Seção 7.2]).

Observe que a nossa classe de operadores se encaixa nesse cenário, definindo

$$F_0(x, \nabla v, D^2v) := \mathcal{H}(x, \nabla v)F(x, D^2v) - f(x)$$

e

$$f_0(x) := \frac{L_1^{-1}f^+(x)}{\varepsilon_0^p + \mathbf{a}(x)\varepsilon_0^q} \quad \text{para } \varepsilon_0 > 0 \text{ adequado.}$$

Com efeito, temos que sempre que

$$\mathcal{H}(x, \nabla v)F(x, D^2v) \leq f(x) \quad \text{in } B_1$$

no sentido de viscosidade, então a condição de elipticidade de  $F$ , nomeadamente (A1), assegura que

$$\mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^-(D^2v) \leq F(x, D^2v) \leq \frac{f(x)}{\mathcal{H}(x, \nabla v)} \leq \frac{f^+(x)}{\mathcal{H}(x, \nabla v)}$$

sempre que  $|\nabla v| \geq M_F = \varepsilon_0 > 0$  de modo que

$$\mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^-(D^2v) - \Lambda|\nabla v| - f_0(x) \leq \left( \frac{1}{\mathcal{H}(x, \nabla v)} - \frac{L_1^{-1}}{\varepsilon_0^p + \mathbf{a}(x)\varepsilon_0^q} \right) f^+(x) \leq 0.$$

Relembre que as constantes obtidas em (65) são monótonas com respeito a  $\tau$  e limitadas longe de zero e infinito, então obtemos uma estimativa uniforme como em (A.3) para supersoluções de  $\mathcal{G}[v] := \mathcal{H}(x, \nabla v)F(x, D^2v)$ .

Assim, em tal situação (relembre que  $\sigma(x) \equiv \Lambda$ ) pelo Teorema A.1:

$$\|v\|_{L^{p_0}(B_{\frac{1}{4}})} \leq C \cdot \left\{ \inf_{B_{\frac{1}{2}}} v + \varepsilon_0 + \|f_0\|_{L^N(B_1)} \right\} \leq \Xi_0, \quad (\text{A.4})$$

onde

$$\Xi_0 := \begin{cases} C \cdot \left\{ \inf_{B_{\frac{1}{2}}} v + \min \left\{ 1, \left[ (q+1) \sqrt[N]{|B_1|} L_1^{-1} \left\| \frac{f^+}{1+\mathbf{a}} \right\|_{L^\infty(B_1)} \right]^{\frac{1}{q+1}} \right\} \right\} & \text{se } \varepsilon_0 \in (0, 1] \\ C \cdot \left\{ \inf_{B_{\frac{1}{2}}} v + \min \left\{ 1, \left[ (p+1) \sqrt[N]{|B_1|} L_1^{-1} \left\| \frac{f^+}{1+\mathbf{a}} \right\|_{L^\infty(B_1)} \right]^{\frac{1}{p+1}} \right\} \right\} & \text{se } \varepsilon_0 \in (1, \infty). \end{cases}$$

Observe que acima foi usado que a função

$$(0, \infty) \ni t \mapsto \mathfrak{h}(t) = t + \frac{1}{t^s} \left( \sqrt[N]{|B_1|} L_1^{-1} \left\| \frac{f^+}{1+\mathbf{a}} \right\|_{L^\infty(B_1)} \right)$$

é otimizada (i.e. sua menor cota superior) quando  $t^* = \left( s \sqrt[N]{|B_1|} L_1^{-1} \left\| \frac{f^+}{1+\mathbf{a}} \right\|_{L^\infty(B_1)} \right)^{\frac{1}{s+1}}$  para  $s \in (0, \infty)$ .

Em conclusão, em qualquer caso, obtemos ( $0 < p \leq q < \infty$ )

$$\|v\|_{L^{p_0}(B_{\frac{1}{4}})} \leq C \cdot \left\{ \inf_{B_{\frac{1}{2}}} v + (q+1)^{\frac{1}{q+1}} \Pi_{p,q}^{f^+, \mathbf{a}} \right\}$$

onde

$$\Pi_{p,q}^{f^+, \mathbf{a}} := \max \left\{ \left[ \sqrt[N]{|B_1|} L_1^{-1} \left\| \frac{f^+}{1+\mathbf{a}} \right\|_{L^\infty(B_1)} \right]^{\frac{1}{p+1}}, \left[ \sqrt[N]{|B_1|} L_1^{-1} \left\| \frac{f^+}{1+\mathbf{a}} \right\|_{L^\infty(B_1)} \right]^{\frac{1}{q+1}} \right\}.$$

Similarmente, pelo Teorema A.2, se

$$\mathcal{H}(x, \nabla v)F(x, D^2v) \geq f(x) \quad \text{in } B_1$$

no sentido de viscosidade então novamente temos

$$\mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^+(D^2v) \geq F(x, D^2v) \geq \frac{f(x)}{\mathcal{H}(x, \nabla v)} \geq -\frac{f^-(x)}{\mathcal{H}(x, \nabla v)} \quad \text{sempre que } \varepsilon_0 = M_F \leq |\nabla u|,$$

e podemos definir, similarmente como acima,  $f_0(x) := \frac{L_1^{-1}f^-(x)}{\varepsilon_0^p + \mathbf{a}(x)\varepsilon_0^p}$  para obter

$$\mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^+(D^2v) + \Lambda|\nabla v| + f_0(x) \geq \left( \frac{L_1^{-1}}{\varepsilon_0^p + \mathbf{a}(x)\varepsilon_0^p} - \frac{1}{\mathcal{H}(x, \nabla v)} \right) f^-(x) \geq 0.$$

Assim, em tal configuração temos pelo teorema A.2:

$$\begin{aligned} \sup_{B_{\frac{1}{2}}} v &\leq \|u^+\|_{L^{p_1}(B_1)} + \varepsilon_0 + \|f_0\|_{L^N(B_1)} \\ &\leq \Xi_1, \end{aligned} \tag{A.5}$$

onde, como acima, podemos estimar

$$\Xi_1 := \begin{cases} C \cdot \left\{ \|v^+\|_{L^{p_1}(B_1)} + \min \left\{ 1, \left[ (q+1) \sqrt[q]{|B_1|} L_1^{-1} \left\| \frac{f^-}{1+\mathbf{a}} \right\|_{L^\infty(B_1)} \right]^{\frac{1}{q+1}} \right\} \right\} & \text{se } \varepsilon_0 \in (0, 1] \\ C \cdot \left\{ \|v^+\|_{L^{p_1}(B_1)} + \min \left\{ 1, \left[ (p+1) \sqrt[p]{|B_1|} L_1^{-1} \left\| \frac{f^-}{1+\mathbf{a}} \right\|_{L^\infty(B_1)} \right]^{\frac{1}{p+1}} \right\} \right\} & \text{se } \varepsilon_0 \in (1, \infty). \end{cases}$$

Assim, em qualquer cenário (uma vez que  $0 < p \leq q < \infty$ )

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} v \leq C \cdot \left\{ \|v^+\|_{L^{p_1}(B_1)} + (q+1)^{\frac{1}{q+1}} \Pi_{p,q}^{f^-, \mathbf{a}} \right\}$$

finalizando desse modo a análise.

Finalmente, combinando (A.4) e (A.5) obtemos a seguinte desigualdade de Harnack para soluções de viscosidade:

**Teorema A.3 (Desigualdade de Harnack).** *Seja  $u$  uma solução de viscosidade não-negativa para*

$$F_0(x, \nabla v, D^2v) = 0 \quad \text{em } B_1.$$

Então,

$$\sup_{B_{\frac{1}{2}}} u(x) \leq C \cdot \left\{ \inf_{B_{\frac{1}{2}}} u(x) + (q+1)^{\frac{1}{q+1}} \Pi_{p,q}^{f, \mathbf{a}} \right\},$$

onde  $C > 0$  depende somente de  $N, \lambda$  e  $\Lambda$ .

**Observação A.1 (Desigualdade de Harnack - versão escalonada).** *Para nossos propósitos, será útil obter uma versão da desigualdade de Harnack escalada. De fato, seja*

$v$  uma solução não-negativa de viscosidade para

$$\mathcal{G}(x, \nabla v, D^2 v) = f(x) \quad \text{em } B_r \quad \text{para um } r \in (0, \infty) \quad \text{fixado}$$

onde (A0)-(A2), (3.1) e (3.2) estão em vigor. Então,

$$\sup_{B_{\frac{r}{2}}} v(x) \leq C \cdot \left\{ \inf_{B_{\frac{r}{2}}} v(x) + (q+1)^{\frac{1}{q+1}} \max \left\{ r^{\frac{p+2}{p+1}}, r^{\frac{q+2}{p+1}} \right\} \Pi_{p,q}^{f,\mathfrak{a}} \right\},$$

onde  $C(N, \lambda, \Lambda) > 0$ .

Finalmente, pela desigualdade de Harnack (Teorema A.3) e fazendo uso de argumentos como em (25) [Proposição 4.10], o seguinte resultado de regularidade Hölder local interior é válido (cf. (43) [Teorema 2]).

**Teorema A.4 (Estimativa Hölder Local).** *Seja  $u$  uma solução de viscosidade para*

$$F_0(x, \nabla v, D^2 v) = 0 \quad \text{em } B_1.$$

onde  $f$  é uma função contínua e limitada. Então,  $u \in C_{loc}^{0,\beta}(B_1)$  para algum  $\beta \in (0, 1)$  universal. Além disso,

$$\|u\|_{C^{0,\beta}(\overline{B_{\frac{1}{2}}})} \leq C \cdot \left\{ \|u\|_{L^\infty(B_1)} + (q+1)^{\frac{1}{q+1}} \Pi_{p,q}^f \right\},$$

onde  $C > 0$  depende somente de  $N, \lambda$  e  $\Lambda$ .

### Uma estimativa do tipo Alexandroff-Bakelman-Pucci

Na sequência, será derivada uma estimativa ABP adaptada ao contexto dos modelos totalmente não lineares com degenerescência não-homogênea (cf. (42, Teorema 1) e (72, Teorema 1.1)). Tal estimativa é essencial para obter cotas universais para solução de viscosidade em termos dos dados do problema.

**Teorema A.5 (Estimativa de Alexandroff-Bakelman-Pucci).** *Assuma que as hipóteses (A0)-(A2) sejam válidas. Então, existe  $C = C(N, \lambda, p, q, \text{diam}(\Omega)) > 0$  tal que qualquer  $u \in C^0(\overline{\Omega})$  subsolução (resp. supersolução) de viscosidade de (3.10) em  $\{x \in \Omega : u(x) > 0\}$  (resp.  $\{x \in \Omega : u(x) < 0\}$ ), satisfaz*

$$\sup_{\Omega} u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u^+(x) + C \cdot \text{diam}(\Omega) \max \left\{ \left\| \frac{f^-}{1 + \mathfrak{a}} \right\|_{L^N(\Gamma^+(u^+))}^{\frac{1}{p+1}}, \left\| \frac{f^-}{1 + \mathfrak{a}} \right\|_{L^N(\Gamma^+(u^+))}^{\frac{1}{q+1}} \right\},$$

$$\left( \text{resp. } \sup_{\Omega} u^-(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u^-(x) + C \cdot \text{diam}(\Omega) \max \left\{ \left\| \frac{f^+}{1 + \mathfrak{a}} \right\|_{L^N(\Gamma^+(u^-))}^{\frac{1}{p+1}}, \left\| \frac{f^+}{1 + \mathfrak{a}} \right\|_{L^N(\Gamma^+(u^-))}^{\frac{1}{q+1}} \right\} \right)$$

onde

$$\Gamma^+(u) := \{x \in \Omega : \exists \xi \in \mathbb{R}^N \text{ tal que } u(y) \leq u(x) + \langle \xi, y - x \rangle \forall y \in \Omega\}.$$

Particularmente, vale

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + C \cdot \text{diam}(\Omega) \max \left\{ \left\| \frac{f}{1 + \mathbf{a}} \right\|_{L^N(\Omega)}^{\frac{1}{p+1}}, \left\| \frac{f}{1 + \mathbf{a}} \right\|_{L^N(\Omega)}^{\frac{1}{q+1}} \right\}.$$

**Prova.** É suficiente provar a primeira estimativa, a segunda segue de maneira semelhante. Inicialmente, mostraremos que a nossa sequência de operadores se encaixa na estrutura de (63, Teorema 1). Para esse propósito, como anteriormente consideramos

$$F_0(x, \xi, X) := \mathcal{H}(x, \xi)F(x, X) - f(x) \quad \text{e} \quad f_0(x) := \frac{L_1^{-1} f^+(x)}{\varepsilon_0^p + \mathbf{a}(x)\varepsilon_0^q} \quad \text{fixado} \quad \varepsilon_0 \in (0, \infty).$$

Agora, se temos (no sentido de viscosidade)

$$\mathcal{H}(x, \nabla u)F(x, D^2u) \leq f(x) \quad \text{em} \quad B_1,$$

então de posse da condição (A1) e supondo  $|\nabla v| \geq M_F = \varepsilon_0 > 0$  segue que

$$\mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^-(D^2u) \leq F(x, D^2u) \leq \frac{f^+(x)}{\mathcal{H}(x, \nabla u)}.$$

Consequentemente,

$$\mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^-(D^2u) - \Lambda|\nabla u| - f_0(x) \leq \left( \frac{1}{\mathcal{H}(x, \nabla u)} - \frac{L_1^{-1}}{\varepsilon_0^p + \mathbf{a}(x)\varepsilon_0^q} \right) f^+(x) \leq 0.$$

Assim,  $u$  é uma supersolução de viscosidade de um problema uniformemente elíptico com gradiente “grande”. Pela estimativa ABP em (63, Teorema 1) obtemos

$$\sup_{\Omega} u^-(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u^-(x) + C \cdot \text{diam}(\Omega) \left( \varepsilon_0 + \|f_0\|_{L^N(\Gamma^+(u^-))} \right). \quad (\text{A.6})$$

Agora, a análise se divide em dois casos: Inicialmente, se  $\varepsilon_0 \in (0, 1]$ , então

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega} u^-(x) &\leq \sup_{\partial\Omega} u^-(x) + C \cdot \text{diam}(\Omega) \left( \varepsilon_0 + L_1^{-1} \frac{1}{\varepsilon_0^q} \left\| \frac{f^-}{1 + \mathbf{a}} \right\|_{L^N(\Gamma^+(u^-))} \right) \\ &\leq \sup_{\partial\Omega} u^-(x) + C \cdot \text{diam}(\Omega) \min \left\{ 1, \left( (q+1)L_1^{-1} \left\| \frac{f^-}{1 + \mathbf{a}} \right\|_{L^N(\Gamma^+(u^-))} \right)^{\frac{1}{q+1}} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Por outro lado, se  $\epsilon_0 \in (1, \infty)$  então

$$\sup_{\Omega} u^{-}(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u^{-}(x) + C \cdot \text{diam}(\Omega) \min \left\{ 1, \left( (p+1)L_1^{-1} \left\| \frac{f^{-}}{1+\mathbf{a}} \right\|_{L^N(\Gamma^{+}(u^{-}))} \right)^{\frac{1}{p+1}} \right\}. \quad (\text{A.8})$$

Assim, combinando as desigualdades (A.7) e (A.8) conclui-se que

$$\sup_{\Omega} u^{-}(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u^{-}(x) + C(\text{diam}(\Omega), p, q, L_1, \Lambda) \max \left\{ \left\| \frac{f^{-}}{1+\mathbf{a}} \right\|_{L^N(\Gamma^{+}(u^{-}))}^{\frac{1}{p+1}}, \left\| \frac{f^{-}}{1+\mathbf{a}} \right\|_{L^N(\Gamma^{+}(u^{-}))}^{\frac{1}{q+1}} \right\}.$$

□

### Um resultado do tipo Hopf não homogêneo

Uma ferramenta fundamental para provar estimativas Lipschitz uniformes de soluções, vem à tona. Será derivada uma versão quantitativa do Lema de Hopf no cenário não homogêneo para problemas totalmente não lineares com degenerescência não-homogênea. (cf. (92, Lema 2.10) para o caso uniformemente elíptico e homogêneo).

**Lema A.1 (Lema do tipo Hopf não homogêneo).** *Suponha que as hipóteses (A0)-(A1) e (3.1) estão em vigor. Seja  $u$  uma solução positiva de viscosidade para*

$$\mathcal{G}(x, \nabla u, D^2 u) = f(x) \quad \text{em } B_R(z_0)$$

onde  $f \in L^\infty(B_R(z_0))$ . Assuma ainda que para algum  $x_0 \in \partial B_R(z_0)$ ,

$$u(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \leq \mathfrak{S},$$

onde  $\nu$  é a direção normal interior em  $x_0$ . Então, para qualquer  $r \in (0, 1)$ , existe uma constante  $C_0(\text{universal}) > 0$  tal que

$$\sup_{B_{\frac{rR}{2}}(z_0)} u(x) \leq C_0 R \cdot \left\{ \mathfrak{S} + \max \left\{ (r^{p+2} R)^{\frac{1}{p+1}}, (r^{p+2} R)^{\frac{1}{q+1}} \right\} \Pi_{p,q}^{f, r^{p-q}\mathbf{a}(z_0+rRx)} \right\}.$$

**Prova.** Inicialmente, é suficiente considerar a função escalada  $v_{z_0, R} : B_1 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$v_{z_0, R}(x) := \frac{u(z_0 + rRx)}{R},$$

para  $r \in (0, 1)$  a ser determinado *a posteriori*.

Com efeito,  $v_{z_0, R}$  é uma solução de viscosidade não-negativa de

$$\mathcal{H}_{z_0, R}(y, \nabla v_{z_0, R}) F_{z_0, R}(x, D^2 v_{z_0, R}) = f_{z_0, R}(x) \quad \text{em } B_1$$

onde

$$\begin{cases} F_{z_0,R}(x, X) & := r^2 RF(z_0 + rRx, \frac{1}{r^2R}X) \\ \mathcal{H}_{z_0,R}(x, \xi) & := r^p \mathcal{H}(z_0 + rRx, \frac{1}{r}\xi) \\ \mathbf{a}_{z_0,R}(x) & := r^{p-q} \mathbf{a}(z_0 + rRx) \\ f_{z_0,R}(x) & := r^{p+2} Rf(z_0 + rRx). \end{cases}$$

Além disso,  $F_{z_0,R}$ ,  $\mathcal{H}_{z_0,R}$  e  $\mathbf{a}_{z_0,R}$  satisfazem as hipóteses estruturais (A0)-(A2), (3.1) e (3.2).

Agora, seja  $\mathcal{A}_{\frac{1}{2},1} := B_1 \setminus B_{\frac{1}{2}}$  e defina  $\Phi : \overline{\mathcal{A}_{\frac{1}{2},1}} \rightarrow \mathbb{R}_+$  uma função barreira dada por

$$\Phi(x) = \mu \left( e^{-\delta|x|^2} - e^{-\delta} \right)$$

onde  $\mu, \delta > 0$  será escolhido *a posteriori*. O gradiente e a hessiana de  $\Phi$  in  $\mathcal{A}_{\frac{1}{2},1}$  são

$$\nabla \Phi(x) = -2\mu\delta x e^{-\delta|x|^2} \quad \text{e} \quad D^2\Phi(x) = 2\mu\delta e^{-\delta|x|^2} (2\delta x \otimes x - \text{Id}_N).$$

Agora, iremos mostrar que tal barreira é uma solução no sentido da viscosidade para

$$\mathcal{H}_{z_0,R}(x, \nabla \Phi) F_{z_0,R}(x, D^2\Phi) > f_{z_0,R}(x) \quad \text{em} \quad \mathcal{A}_{\frac{1}{2},1} \quad (\text{A.9})$$

desde que ajustemos apropriadamente os valores de  $\mu, \delta > 0$  e  $r > 0$ .

Para esse propósito, observe que para  $\delta > \frac{\Lambda(N-1)}{2\lambda}$ , a função  $\Phi$  é convexa e decrescente na região anular  $\mathcal{A}_{\frac{1}{2},1}$ . Assim,

$$\mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^-(D^2\Phi(x)) = 2\mu\delta e^{-\delta|x|^2} [2\delta\lambda - \Lambda(N-1)] \geq 2\mu\delta e^{-\delta} [2\delta\lambda - \Lambda(N-1)] \quad \text{em} \quad \mathcal{A}_{\frac{1}{2},1}.$$

Na sequência, obtemos usando a sentença acima, (A1) e (3.1)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{z_0,R}(x, \nabla \Phi) F(x, D^2\Phi) & \geq \mathcal{H}_{z_0,R}(x, \nabla \Phi) \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^-(D^2\Phi(x)) \\ & \geq 2\mu\delta e^{-\delta} (r^2 RL_1) [2\delta\lambda - \Lambda(N-1)] (\delta^p \mu^p e^{-\delta p} + \delta^q \mu^q e^{-\delta q} \mathbf{a}_{z_0,r}(x)) \\ & > r^{p+2} R \|f\|_{L^\infty(\mathcal{A}_{\frac{rR}{2}, rR})}, \end{aligned}$$

que permanece verdadeira desde que escolhamos  $r \ll 1$  pequeno o suficiente, fixando  $\mu$  e escolhendo  $\delta > 0$ .

Com efeito, tomando  $\mu := (e^{-\delta/4} - e^{-\delta})^{-1} \cdot \inf_{\partial B_{\frac{1}{2}}} v_{z_0,R}(x) > 0$  segue que

$$\Phi(x) \leq v_{z_0,R}(x) \quad \text{em} \quad \partial \mathcal{A}_{\frac{1}{2},1}.$$

Assim, pelo princípio da comparação (veja, Lema 3.1)

$$\Phi(x) \leq v_{z_0,R}(x) \quad \text{em} \quad \mathcal{A}_{\frac{1}{2},1}. \quad (\text{A.10})$$

Agora, escolhemos  $y_0 := \frac{x_0 - z_0}{rR}$ , levando em conta (A.10) e a hipótese  $u(x_0) = 0$ , obtemos com respeito a derivada na direção  $\nu$  em  $x_0$  o seguinte

$$\mu\delta e^{-\delta} \leq \frac{\partial\Phi(y_0)}{\partial\nu} \leq \frac{\partial v_{z_0,R}(y_0)}{\partial\nu} \leq \mathfrak{S}. \quad (\text{A.11})$$

Desse modo,

$$\inf_{\partial B_{\frac{1}{2}}} v_{z_0,R}(x) \leq \mathfrak{S}\delta^{-1} \left( e^{-\frac{3}{4}\delta} - 1 \right).$$

Por outro lado, pela desigualdade de Harnack (veja, Teorema A.3) segue que

$$\begin{aligned} \sup_{B_{\frac{1}{2}}} v_{z_0,R}(x) &\leq C \cdot \left\{ \inf_{B_{\frac{1}{2}}} v_{z_0,R} + (q+1)^{\frac{1}{q+1}} \max \left\{ (r^{p+2}R)^{\frac{1}{p+1}}, (r^{p+2}R)^{\frac{1}{q+1}} \right\} \Pi_{p,q}^{f,\alpha_{z_0},R} \right\} \\ &\leq C \cdot \left\{ \inf_{\partial B_{\frac{1}{2}}} v_{z_0,R} + (q+1)^{\frac{1}{q+1}} \max \left\{ (r^{p+2}R)^{\frac{1}{p+1}}, (r^{p+2}R)^{\frac{1}{q+1}} \right\} \Pi_{p,q}^{f,\alpha_{z_0},R} \right\} \\ &\leq C_0 \cdot \left\{ \mathfrak{S} + \max \left\{ (r^{p+2}R)^{\frac{1}{p+1}}, (r^{p+2}R)^{\frac{1}{q+1}} \right\} \Pi_{p,q}^{f,\alpha_{z_0},R} \right\} \end{aligned}$$

e agora usando a definição de  $v_{z_0,R}$  concluímos que

$$\sup_{B_{\frac{rR}{2}}(z_0)} u(x) \leq C_0 R \cdot \left\{ \mathfrak{S} + \max \left\{ (r^{p+2}R)^{\frac{1}{p+1}}, (r^{p+2}R)^{\frac{1}{q+1}} \right\} \Pi_{p,q}^{f,\alpha_{z_0},R} \right\}.$$

□

### Prova do princípio da comparação

A partir de agora segue a prova do lema 3.1, antes disso se faz necessário um comentário a respeito da técnica utilizada. A ideia basicamente segue negando a tese do lema e acoplando duas desigualdades de viscosidade que são fruto do famigerado lema de Ishii-Lions, finda-se a prova usando propriedades intrínsecas do operador  $F$  e da função  $f$ .

Como consequência do princípio de comparação, será derivada a existência da menor supersolução. Inicialmente, cabe ressaltar que o operador  $\mathcal{G}(x, \xi, M) = \mathcal{H}(x, \xi)F(x, M)$ , satisfaz (3.12) e (3.13), ora, seja  $D = D_{x,y,\zeta,X,Y} := \mathcal{G}(x, \zeta(x-y), X) - \mathcal{G}(y, \zeta(x-y), -Y)$ , com  $X, Y \in \text{Sym}(N)$  e  $\zeta \in (0, \infty)$  satisfazendo (3.11) :

$$\begin{aligned}
D &= \mathcal{H}(x, \zeta(x-y))F(x, X) - \mathcal{H}(y, \zeta(x-y))F(y, -Y) \\
&\leq \mathcal{H}(x, \zeta(x-y)) \left( \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^+(X+Y) + C_F \omega(|x-y|) \|Y\| \right) \\
&\quad + [\mathcal{H}(x, \zeta(x-y)) - \mathcal{H}(y, \zeta(x-y))] F(y, -Y) \\
&\leq \mathcal{H}(x, \zeta(x-y)) \left( \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^+(X+Y) + C_F \omega(|x-y|) \|Y\| \right) \\
&\quad + (c_a \omega_a(|x-y|) |\zeta(x-y)|^q) F(y, -Y) \\
&\leq L_2 \mathcal{K}_{p,q,a}(x, |\zeta(x-y)|) \left( \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^+(X+Y) + C_F \omega(|x-y|) \|Y\| \right) \\
&\quad + (c_a \omega_a(|x-y|) |\zeta(x-y)|^q) F(y, -Y) \\
&\leq L_2 \mathcal{K}_{p,q,a}(x, |\zeta(x-y)|) \left( \lambda \text{tr}(X+Y) + C_F \omega(|x-y|) \|Y\| \right) \\
&\quad + (c_a \omega_a(|x-y|) |\zeta(x-y)|^q) \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^+(-Y) \\
&\leq c_a \omega_a(|x-y|) |\zeta| |x-y|^2 |\text{diam}(\Omega)^{q-2} |\zeta|^{q-1} \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^-(-Y) \\
&\quad + |\zeta| |x-y|^2 \min \left\{ \text{diam}(\Omega)^{q-2} |\zeta|^{q-1}, \text{diam}(\Omega)^{p-2} |\zeta|^{p-1} \right\}.
\end{aligned}$$

Em outras palavras,

$$D \leq \widehat{\omega}(\zeta |x-y|^2)$$

onde

$$\begin{aligned}
\widehat{\omega}(t) &:= c_a \omega_a(t/\zeta) t |\text{diam}(\Omega)^{q-2} |\zeta|^{q-1} \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^-(-Y) \\
&\quad + t \cdot \min \left\{ \text{diam}(\Omega)^{q-2} |\zeta|^{q-1}, \text{diam}(\Omega)^{p-2} |\zeta|^{p-1} \right\}
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Note que usamos a continuidade dos coeficientes do operador  $F$ , propriedades  $(A_2)$ , e mais usamos que a matriz  $Y$  dada por ser tomada como não-identicamente nula, pois caso contrário, (3.10) já seria válida, sem falar na desigualdade matricial dada por  $X$  e  $Y$ . Por fim, note que quando  $\zeta |x-y|^2 \rightarrow 0$ , temos que  $D \leq o(1)$ .

Agora, para  $M, N \in \text{Sym}(N)$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$  e  $\xi \in \mathbb{R}^N$ , segue que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(x, \xi, M + N) - \mathcal{G}(x, \xi, M) &\leq \mathcal{H}(x, \xi) \mathcal{M}_{\lambda, \Lambda}^+(N) \\
&\leq \mathcal{H}(x, \xi) \Lambda \text{tr}(N) \\
&\leq L_1 \mathcal{K}(x, |\xi|) \Lambda \text{tr}(N) \\
&\leq L_1 \max\{1, \|a\|_\infty\} (|\xi|^p + |\xi|^q) \Lambda \text{tr}(N).
\end{aligned}$$

Por fim, definimos respectivamente o superjato e o semijato de uma função contínua:

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}^{2,+}u(\bar{x}) &= \{(p, X) \in \mathbb{R}^N \times \text{Sym}(N), u(x) \leq u(\bar{x}) + \langle p, x - \bar{x} \rangle \\
&\quad + \frac{1}{2} \langle X(x - \bar{x}), x - \bar{x} \rangle + o(|x - \bar{x}|^2)\}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}^{2,-}u(\bar{x}) &= \{(p, X) \in \mathbb{R}^N \times \text{Sym}(N), u(x) \geq u(\bar{x}) + \langle p, x - \bar{x} \rangle \\
&\quad + \frac{1}{2} \langle X(x - \bar{x}), x - \bar{x} \rangle + o(|x - \bar{x}|^2)\}.
\end{aligned}$$

*Prova do lema 3.1 (Princípio de Comparação).* Por contradição, supomos que seja falsa a tese do teorema. Assim, seja:

$$M_0 := \max_{x \in \bar{\Omega}} (u_1 - u_2)(x) > 0. \quad (\text{A.13})$$

Para  $j \in \mathbb{N}$  e para algum  $q > \max\left(2, \frac{q+2}{q+1}\right)$ , considere

$$\psi_j(x, y) := u_1(x) - u_2(y) - \frac{j|x - y|^q}{q}. \quad (\text{A.14})$$

Suponha que  $(x_j, y_j)$  é um ponto de máximo para  $\psi_j$ . Extraíndo uma subsequência ainda denotada por  $(x_j, y_j)$ , temos

$$(x_j, y_j) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}).$$

Ademais,

$$\psi_j(x_j, y_j) \geq \psi_j(x_j, x_j)$$

o que implica  $j|x_j - y_j| \leq C$ , assim  $\bar{x} = \bar{y}$  e mais,  $j|x_j - y_j| \rightarrow 0$ . Por outro lado,

$$\begin{aligned}
& u_1(\bar{x}) - u_2(\bar{x}) \\
& \geq \limsup [u_1(x_j) - u_2(y_j)] \\
& \geq \limsup \psi_j(x_j, \cdot) \\
& \geq \limsup \sup_{\Omega} \psi_j(x, x) \\
& \geq \sup_{\Omega} (u_1 - u_2)(x) > 0
\end{aligned}$$

Pela condição de fronteira,  $\bar{x} \in \Omega$  e o máximo de  $u_1 - u_2$  é atingido nesse ponto. Agora, segundo a afirmação provada no teorema 2.9 de (13) temos que para  $j$  suficientemente grande existe  $(x_j, y_j)$  como acima com  $x_j \neq y_j$ . Dito isso, a função  $\psi_j$  tem máximo local em  $(x_j, y_j)$ , como  $x_j \neq y_j$ . Assim, existem matrizes simétricas  $X_j, Y_j$  tais que:

$$(j|x_j - y_j|^{q-2}(x_j - y_j), X_j) \in \mathcal{J}^{2,+}u_1(x_j) \quad (\text{A.15})$$

$$(j|x_j - y_j|^{q-2}(x_j - y_j), -Y_j) \in \mathcal{J}^{2,-}u_2(y_j) \quad (\text{A.16})$$

Ademais, vale a seguinte desigualdade matricial:

$$-4jk_j \begin{pmatrix} \text{Id}_N & 0 \\ 0 & \text{Id}_N \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X_j & 0 \\ 0 & Y_j \end{pmatrix} \leq 3jk_j \begin{pmatrix} \text{Id}_N & -\text{Id}_N \\ -\text{Id}_N & \text{Id}_N \end{pmatrix},$$

onde  $k_j = 2^{q-3}q(q-1)|x_j - y_j|^{q-2}$ .

Para finalizar, seja  $\varepsilon$  dado, supondo inicialmente  $h$  crescente. Uma vez que  $(u - v)(\bar{x}) := m$ , podemos tomar  $j$  suficientemente grande tal que:

$$h(u_1(x_j)) - h(u_2(y_j)) \geq \varepsilon, \quad \widehat{\omega}(j|x_j - y_j|^q) \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad e \quad \omega_f(|x_j - y_j|) \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad (\text{A.17})$$

onde  $\widehat{\omega}$  é definido em (A.12) e  $\omega_f$  é o módulo de continuidade da função  $f$ .

Agora, usando (A.15), (A.16) e (3.12), segue que:

$$\begin{aligned}
& 0 \leq \mathcal{G}(x_j, j|x_j - y_j|^{q-2}(x_j - y_j), X_j) - h(u_1(x_j)) - f(x_j) \\
& \leq \mathcal{G}(x_j, j|x_j - y_j|^{q-2}(x_j - y_j), X_j) - h(u_2(y_j)) - f(x_j) - \varepsilon \\
& \leq \mathcal{G}(y_j, j|x_j - y_j|^{q-2}(x_j - y_j), -Y_j) - h(u_2(y_j)) + \widehat{\omega}(j|x_j - y_j|^q) + f(x_j) - \varepsilon \\
& \leq [\mathcal{G}(y_j, j|x_j - y_j|^{q-2}(x_j - y_j), -Y_j) - h(u_2(y_j)) - f(y_j)] + \\
& \quad \widehat{\omega}(j|x_j - y_j|^q) + \omega_f(|x_j - y_j|) - \varepsilon \\
& \leq \frac{\varepsilon}{4} - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{4} = -\frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

que é uma contradição.

Agora se  $h$  é não-decrescente seja  $\varepsilon$  tal que:

$$\mathcal{G}(x, \nabla u_2, D^2 u_2) - h(u_2(x)) - f(x) \leq -\varepsilon$$

tomando  $j$  suficientemente grande tal que:

$$\widehat{\omega}(j|x_j - y_j|^q) \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad e \quad \omega_f(|x_j - y_j|) \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

Agora, usando (A.15), (A.16), (3.12), (3.13) e o não-decrescimento de  $h$  segue

que:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathcal{G}(x_j, j|x_j - y_j|^{q-2}(x_j - y_j), X_j) - h(u_1(x_j)) - f(x_j) \\ &\leq \mathcal{G}(x_j, j|x_j - y_j|^{q-2}(x_j - y_j), X_j) - h(u_2(y_j)) - f(x_j) \\ &\leq \mathcal{G}(y_j, j|x_j - y_j|^{q-2}(x_j - y_j), -Y_j) - h(u_2(y_j)) - f(x_j) + \widehat{\omega}(j|x_j - y_j|^q) \\ &\leq [\mathcal{G}(y_j, j|x_j - y_j|^{q-2}(x_j - y_j), -Y_j) - h(u_2(y_j)) - f(y_j)] - \\ &\quad (f(x_j) - f(y_j)) + \widehat{\omega}(j|x_j - y_j|^q) \\ &\leq -\varepsilon + \omega_f(|x_j - y_j|) + \widehat{\omega}(j|x_j - y_j|^q) \\ &\leq -\frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

o que nos dá uma contradição, e assim o teorema está provado.

□

## EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES MINIMAIS

Uma vez que foi usado o conceito de solução minimal no estudo do caso singularmente perturbado para o problema de degenerescência não-homogênea, seguem nas linhas seguintes a justificativa para existência das soluções minimais.

A prova é baseada nas propriedades intrínsecas de um problema de Dirichlet, a ser apresentado, *a posteriori*, tais propriedades quanto ao operador, a monotonia de soluções e a existência de um módulo de continuidade universal garantirão a construção das soluções de Perron que garantiram, por exemplo, a regularidade Lipschitz no caso do problema singularmente perturbado.

É necessário recordar o teorema da função implícita que garante a existência de uma bola  $B = B_R(0) \subset \mathbb{R}^N$ , e  $E' \subset B'_R(0) \subset \mathbb{R}^{N-1}$  e  $s \in C^2(E')$ , tal que  $s(0) = 0$ ,  $\nabla s(0) = 0$  e, para  $x = (x', x_N)$ ,

$$\Omega \cap B \subset \{x_N > s(x'), x' \in D'\}, \text{ e } \partial B \cap B = \{x_N = s(x')\}$$

No que segue, seja  $\mu > 0$ , tal que  $|Dg| < \mu/2$  e  $g(x, z) = \mu z - h(x, z)$ , para  $f \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$ , defina o seguinte operador:

$$G_f[u] = G_f(D^2u, Du, u, x) = \mathcal{G}(D^2u, Du, x) - \mu u + f(x). \quad (\text{A.18})$$

Com efeito,  $G_f$  satisfaz as hipóteses do princípio de comparação, ou seja, é um operador uniformemente elíptico, goza de  $\omega$ -continuidade dos coeficientes, dentre outras já citadas que permitem a aplicação do lema 3.1. Preparado o terreno, segue o resultado principal dessa seção:

**Teorema A.6.** *Sejam  $\mu, f$  e  $G_f$  como acima,  $g$  lipschitz, o problema de Dirichlet:*

$$\begin{cases} G_f[u] = G_f(x, u, Du, D^2u) = 0 \text{ em } \Omega \\ u = g \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

*tem solução  $u \in C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$ , com constante Hölder dependendo de  $(\lambda, \Lambda, N, p, q, |a|_\infty, Lipg)$ .*

A prova do teorema acima, exige o lema a seguir, que garante que a solução do problema de Dirichlet (A.19) é  $C^{1,\beta_0}$  em  $B \cap \{x_N = s(x')\}$  com um erro que depende da distância até os pontos da hipersuperfície  $\{x_N = s(x')\}$ .

**Lema A.2.** *Seja  $\varphi \in C^{1,\alpha_0}$ , uma função  $s$  como acima. Se  $d$  é a distância até a hipersuperfície  $\{x_N = s(x')\}$ . então, para todo  $r < 1$  e para todo  $\gamma < 1$ , existe  $\delta_0$  dependendo de  $\lambda, \Lambda, q, r$  e  $Lip\varphi$ , tal que para todo  $\delta < \delta_0$ , se  $u$  é solução de*

$$\begin{cases} G_f[u] = G_f(x, u, Du, D^2u) = 0 \text{ em } \Omega \\ u = g \text{ em } \partial\Omega \end{cases}$$

tal que  $\text{osc} u \leq 1$  então satisfaz:

$$|u(x', x_N) - g| \leq \frac{2}{\delta} \frac{d(y)}{1 + d^\gamma(y)} \text{ em } B_r(0) \cap \{x_N > a(x')\}.$$

**Prova.** Serão analisados dois casos: quando  $g \equiv 0$  e o caso quando  $g$  não é identicamente nula. No primeiro caso, pela estimativa ABP (Teorema 3.9) podemos supor que  $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$ , uma vez que pela hipótese o dado de fronteira é nulo e podemos considerar  $f$  com uma normal pequena (smallness regime).

Quanto ao resto da prova, é suficiente analisar o conjunto  $\Omega_\delta := \{y \in \Omega : d(y) < \delta\}$ , i,a vez que a região complementar segue do fato de que  $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$  combinado com a estimativa Hölder local (A.4)

$$\|u\|_{C^{0,\alpha'}(\Omega')} \leq C(\text{universal}, \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)) \left( \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \max \left\{ \left\| \frac{f}{1+a} \right\|_{L^{p_{\min}(\Omega)}}^{\frac{1}{p_{\min}+1}}, \left\| \frac{f}{1+a} \right\|_{L^{q_{\max}(\Omega)}}^{\frac{1}{q_{\max}+1}} \right\} \right).$$

Inicialmente seja  $\delta < \eta$ , tal que  $d(y) < \eta$ , sabe-se que a função distância é  $C^2$ , ademais  $|D^2d| \leq K$ . No que segue, devemos construir uma supersolução  $v$  tal que:

$$G_f[v] < 0 \text{ em } B \cap \{x_N > s(x'), d(y) < \delta\}. \quad (\text{A.20})$$

A candidata é definida como:

$$v(y) = \begin{cases} \frac{2}{\delta} \frac{d(y)}{1+d^\gamma(y)} & \text{em } |y| < r \\ \frac{2}{\delta} \frac{d(y)}{1+d^\gamma(y)} + \frac{1}{(1-r)^3} (|y| - r)^3 & \text{em } |y| \geq r \end{cases}$$

A condição de fronteira é válida, ou seja,

$$v \geq u \text{ em } \partial(B \cap \{x_N = s(x'), d(y) < \delta\})$$

Agora, a fim de verificar que  $v$  é supersolução de (A.20), temos inicialmente:

$$Dv = \begin{cases} \frac{2}{\delta} \frac{1+(1-\gamma)d^\gamma}{(1+d^\gamma)^2} Dd & \text{em } |y| < r \\ \frac{2}{\delta} \frac{1+(1-\gamma)d^\gamma}{(1+d^\gamma)^2} Dd + \frac{y}{|y|} \frac{1}{(1-r)^2} (|y| - r)^2 & \text{em } |y| \geq r \end{cases}$$

este gradiente é não-degenerado, isto é,  $|Dv| \geq (4\delta)^{-1}$ , para  $\delta \leq (1-r)/12$ . Como  $v$  é de classe  $C^2$  por construção, além disso:

$$\begin{aligned} D^2v &= - \left( \frac{2\gamma d^{\gamma-1}}{\delta} \right) \frac{(1+\gamma) + (1-\gamma)d^\gamma}{(1+d^\gamma)^3} Dd \otimes Dd + \frac{2}{\delta} \frac{1+(1-\gamma)d^\gamma}{(1+d^\gamma)^2} D^2d \\ &+ \frac{3(|y|-r)}{(1-r)^3} \left\{ \left( \text{Id}_n - \frac{y \otimes y}{|y|^2} \right) \frac{(|y|-r)}{|y|} + 2 \frac{y \otimes y}{|y|^2} \right\}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^+(D^2v) &\leq \left\{ \frac{-2\gamma\lambda d^{\gamma-1} (1+\gamma)+(1-\gamma)d^\gamma}{\delta} + \frac{2N\Lambda K}{\delta} \frac{1+(1-\gamma)d^\gamma}{(1+d^\gamma)^2} + \frac{6\Lambda N}{(1-r)^2} \right\} \\ &\leq \left\{ - (2\gamma\delta^{\gamma-2}\lambda) \frac{(1+\gamma)}{(1+\delta^\gamma)^3} + \frac{2}{\delta} NK\Lambda + \frac{6N\Lambda}{(1-r)^2} \right\} \end{aligned}$$

Usando agora a definição de  $G_f$ , temos a seguinte sequência de desigualdades:

$$\begin{aligned} G_f[v] &= \mathcal{G}(D^2v, Dv, x) - \mu v + f \\ &\leq \mathcal{H}(x, Dv)F(x, D^2v) - v + f(x) \\ &\leq L_1\mathcal{K}_{p,q,a}(x, |Dv|)\mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^+(D^2v) - \mu v + f(x). \end{aligned}$$

Para que se cumpra (A.20), aspiramos a seguinte desigualdade:

$$L_1\mathcal{K}_{p,q,a}(x, |Dv|)\mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^+(D^2v) - \mu v + f(x) < -\|f\|_\infty$$

que se cumpre precisamente quando para  $\delta < \min((1-r)/12, \eta)$  :

$$(2\gamma\delta^{\gamma-2}\lambda) \frac{(1+\gamma)}{(1+\delta^\gamma)^3} > \frac{2}{\delta} NC_1\Lambda + \frac{N\Lambda}{(1-r)^2} + \frac{\|f\|_\infty}{2L_1 \min \left\{ \left(\frac{1}{4\delta}\right)^p, \left(\frac{1}{4\delta}\right)^q \right\}}$$

e  $\mu$  é escolhido de tal forma que  $\mu \geq -\frac{\|f\|_\infty}{w} + \frac{f}{w}$ . Segue então do princípio de comparação que  $u \leq w$  em  $B \cap \{x_N > s(x'), d(y) < \delta\}$ . Para finalizar o caso onde  $g \equiv 0$ , substituímos  $v$  por  $-v$  nos cálculos anteriores e restringimos a análise ao ambiente  $B_r \cap \{x_N > s(x')\}$ . Para o caso onde  $g \neq 0$ , seja  $\pi$  solução de

$$\begin{cases} \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^+(D^2\pi) = 0 \text{ em } B \cap \{x_N > s(x')\} \\ \pi = g \text{ em } B \cap \{x_N = s(x')\}. \end{cases}$$

Com efeito,  $\pi \in C^{1,\beta_0}(B \cap \{x_N \geq s(x')\}) \cap C^2(B \cap \{x_N \geq s(x')\})$ , a função  $\pi$  também pode ser escolhida de modo que  $\|\pi\|_\infty \leq \|g\|_\infty \leq 1$ ,  $\|D\pi\|_\infty \leq c\|Dg\|_\infty$ , para alguma constante que depende de  $\lambda, \Lambda, N, \Omega$ . Agora, seja:

$$v(y) = \begin{cases} \frac{13}{\delta} \frac{d(y)}{1+d^\gamma(y)} + \pi(y) & \text{em } |y| < r \\ \frac{13}{\delta} \frac{d(y)}{1+d^\gamma(y)} + \frac{1}{(1-r)^3} (|y| - r)^3 + \pi(y) & \text{em } |y| \geq r. \end{cases}$$

Assim como no caso anterior, onde  $g \equiv 0$ , temos:

$$v \geq u \quad \partial(B \cap \{x_N > s(x')\} \cap \{d(y) < \delta\})$$

e para  $\delta$  suficientemente pequeno, temos que  $v$  também satisfaz (A.20), pois bem, obtemos

assim a cota superior o caso  $g \neq 0$ , para a cota inferior, repetimos a conta feita trocando  $v$  por  $2\pi - v$  e assim o resultado segue.  $\square$

**Prova. (Prova do teorema A.6)** Seja  $r_1 \in (r, 1/2)$ . Sem perda de generalidade, podemos supor que  $\text{osc}u \leq 1$ . Seja  $x_0 \in B_r \cap \{x_N > s(x')\}$  e  $\Xi$  definido como

$$\Xi(x, y) = u(x) - u(y) - M|x - y|^\gamma - L(|x - x_0|^2 + |y - x_0|^2). \quad (\text{A.21})$$

Vamos mostrar que para  $L$  e  $M$  independentes de  $x_0$ , grandes o suficiente vale:

$$\Xi(x, y) \leq 0 \quad \text{em} \quad (B_{r_1} \cap \{x_N > s(x')\})^2. \quad (\text{A.22})$$

Isso implica que  $u$  é  $\gamma$ -Hölder contínua em  $B_{r_1} \cap \{x_N > s(x')\}$ , quando  $x = x_0$  e fazendo este variar, com efeito, se  $\Xi(x, y) \leq 0$  e  $x = x_0$

$$\begin{aligned} u(x_0) - u(y) - M|x_0 - y|^\gamma - L|y - x_0|^2 &\leq 0 \\ u(x_0) - u(y) &\leq M|x_0 - y|^\gamma + L|y - x_0|^2 \\ u(x_0) - u(y) &\leq \max\{L, M\}|x_0 - y|^\gamma. \end{aligned}$$

Uma vez que  $|y - x_0| \leq r_1 + r < 1$ . Trocando  $x_0$  por  $y$ , segue a cota inferior, e assim está assegurada a validade da afirmação que  $u$  é  $\gamma$ -Hölder contínua. Dito isso, para mostrar (A.22) nos pontos onde  $x_N = s(x')$ , usamos o lema A.2, que garante que existe  $K_0$  tal que para  $x \in B_{r_1} \cap \{x_N > s(x')\}$ ,

$$|u(x) - g(x')| \leq K_0 d(x, \partial\Omega).$$

Então, uma vez que  $|x' - y'| \leq |x - y|$ , temos:

$$\begin{aligned} |u(x', x_N) - u(y', s(y'))| &\leq |u(x', x_N) - u(x', s(x'))| + |u(x', s(x')) - u(y', s(y'))| \\ &\leq K_0 d(x, \partial\Omega) + \text{Lip}_g |x' - y'| \\ &\leq K_0 |x - (y', s(y'))| + \text{Lip}_g |x - (y', s(y'))| \end{aligned}$$

assim, se  $M$  é suficientemente grande tal que supera  $K_0 + \text{Lip}_g$ , temos que:

$$\begin{aligned} \Xi(x, y) &\leq |u(x) - u(y)| - M|x - y|^\gamma - L(|x - x_0|^2 + |y - x_0|^2) \\ &\leq (K_0 + \text{Lip}_g)|x - y| - M|x - y|^\gamma - L(|x - x_0|^2 + |y - x_0|^2) \\ &\leq M(|x - y| - |x - y|^\gamma) - L(|x - x_0|^2 + |y - x_0|^2) \leq 0. \end{aligned}$$

De onde obtemos a tese

$$\Xi(x, y) \leq 0 \quad \text{em} \quad (B_{r_1} \cap \{x_N = s(x')\})^2.$$

No restante da fronteira, ou seja,  $\{|y| = 1\} \cap \{d(y) < \delta\}$  e  $B \cap \{x_N = s(x')\}$ , escolhemos  $L > \frac{4}{(r_1 - r)^2}$  e recordamos que  $\text{osc} u \leq 1$ . Por fim, escolhemos  $L$  suficientemente grande e  $M$  tal que

$$M > C \|f\|_\infty |a - b|^{2-\gamma} \Gamma^{-1}$$

onde  $\Gamma$  será definido posteriormente em (A.28).

Vamos supor por contradição que  $\Xi(x, y) > 0$  para algum  $(x, y) \in (B_{r_1} \cap \{x_N > s(x')\})^2$ , então existe  $(\hat{a}, \hat{b})$  tal que:

$$\Xi(\hat{a}, \hat{b}) = \sup_{B_{r_1}} (\Xi(x, y)) > 0. \quad (\text{A.23})$$

É válido não olvidar que  $\hat{a} \neq \hat{b}$ , pois caso contrário o resultado é trivial, a escolha de  $L$  assegura que  $\hat{a}, \hat{b} \in B_{\frac{r_1+r}{2}} \cap \{x_N > s(x')\}$ . Desse modo, o lema de Ishii-Lions (veja [(27), Teorema 3.2]) é testemunha que para todo  $\varepsilon > 0$  dependendo da norma de  $D^2(M|x - y|^\gamma)$ , existem matrizes simétricas  $X, Y \in \text{Sym}(n)$  tais que:

$$(\gamma M(\hat{a} - \hat{b})|\hat{a} - \hat{b}|^{\gamma-2} + 2L(\hat{a} - x_0), X) \in \overline{\mathcal{J}^{2,+}u}(\hat{a}) \quad (\text{A.24})$$

$$(\gamma M(\hat{a} - \hat{b})|\hat{a} - \hat{b}|^{\gamma-2} - 2L(\hat{b} - x_0), -Y) \in \overline{\mathcal{J}^{2,-}u}(\hat{b}) \quad (\text{A.25})$$

com

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} Q & -Q \\ -Q & Q \end{pmatrix} + (2L + \varepsilon) \begin{pmatrix} \text{Id}_N & 0 \\ 0 & \text{Id}_N \end{pmatrix}, \quad (\text{A.26})$$

A partir de agora, seja  $a_x = \gamma M(\hat{a} - \hat{b})|\hat{a} - \hat{b}|^{\gamma-2} + 2L(\hat{a} - x_0)$  e  $b_y = \gamma M(\hat{a} - \hat{b})|$

$$2\gamma M|\hat{a} - \hat{b}|^{\gamma-1} \geq |a_x|, |b_y| \geq \frac{1}{2}\gamma|\hat{a} - \hat{b}|^{\gamma-1} \quad (\text{A.27})$$

Agora, usando (A.24) e (A.25), a elipticidade uniforme, a continuidade dos coeficientes de  $F$ , (A.27), as estimativas superiores para as normas  $\|X + Y\|$ ,  $\|X\|$  e  $\|Y\|$  que podem ser encontradas em [(13), Proposição 2.3] e finalmente (A.28):

$$|\mathcal{H}(\hat{a}, a_x) - \mathcal{H}(\hat{b}, b_y)| \leq \Gamma(p, q, \gamma, |\hat{a} - \hat{b}|, L_2, L_1, \|a\|_\infty, p, q) \quad (\text{A.28})$$

onde

$$\begin{aligned} \Gamma &:= c_{p,q,a}(2\gamma M|\widehat{a} - \widehat{b}|^{\gamma-1})^{p+1}\omega_{p,q,a}(|\widehat{a} - \widehat{b}|) \\ &\quad + c(\|a\|_{\infty}, L_2, L_1) \max \left\{ (2\gamma M|\widehat{a} - \widehat{b}|^{\gamma-1})^p, (2\gamma M|\widehat{a} - \widehat{b}|^{\gamma-1})^q \right\}. \end{aligned}$$

Resulta, a seguinte sequência de desigualdades

$$\begin{aligned} f(\widehat{b}) &\leq \mathcal{H}(\widehat{b}, b_y)F(\widehat{b}, -Y) \\ &\leq (\mathcal{H}(\widehat{a}, a_x) + \Gamma)F(\widehat{b}, -Y) \\ &\leq \mathcal{H}(\widehat{a}, a_x)F(\widehat{b}, -Y) - \Gamma\mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^-(Y) \\ &\leq \left( F(\widehat{a}, X) + \|X\|C_F\omega(|\widehat{a} - \widehat{b}|) - \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^-(X + Y) \right) \mathcal{H}(\widehat{a}, a_x) - \Gamma\mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^-(Y) \\ &\leq f(\widehat{a}) + \mathcal{H}(\widehat{a}, a_x) \left( C_F\|X\|\omega(|\widehat{a} - \widehat{b}|) - \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^-(X + Y) \right) - \Gamma\mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^-(Y) \\ &\leq f(\widehat{a}) + \mathcal{H}(\widehat{a}, a_x) \left( C_F\|X\|\omega(|\widehat{a} - \widehat{b}|) - \lambda CM|\widehat{a} - \widehat{b}|^{\gamma-2} \right) - CM\Gamma|\widehat{a} - \widehat{b}|^{\gamma-2} \\ &\leq f(\widehat{a}) - CM\Gamma|\widehat{a} - \widehat{b}|^{\gamma-2} \end{aligned}$$

que é falso, tão logo  $L$  e  $M$  forem grandes o suficiente. □

**Prova.** (Prova do teorema 3.10) Seja  $\mu > 0$  tal que  $|Dh| < \mu/2$  e  $\tilde{h}(x, z) = \mu z - h(x, z)$ , para  $f \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$ , com isso, seja:

$$G_f[u] = G_f(x, u, Du, D^2u) = \mathcal{G}(x, Du, D^2) - \mu u + f(x).$$

Com efeito,  $G_f$  satisfaz o princípio da comparação, logo, pelo teorema anterior garantimos que:

$$\begin{cases} G_f[u] = 0 \text{ em } \Omega \\ u = g \text{ em } \partial\Omega \end{cases}$$

tem solução  $\gamma$ -Hölder contínua até bordo de  $\Omega$ . A partir de agora, seja  $u_0 = u_\star$  e  $u_{k+1}$  a única solução do problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} G_{f_k}[u] = 0 \text{ em } \Omega \\ u = g \text{ em } \partial\Omega \end{cases}$$

onde  $f_k = \tilde{h}(x, u_k(x))$ . A seguir veremos que é fruto do princípio da comparação a seguinte sequência de desigualdades

$$u_\star = u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_k \leq u_{k+1} \leq \dots \leq u^\star.$$

Para isso, observe inicialmente que:

$$G_{f_0}[u] = \mathcal{G}(x, Du, D^2u) - \tilde{h}(x, u) + \tilde{h}(x, u_0) - h(x, u) \quad (\text{A.29})$$

$$G_{f_k}[u] = G_{f_{k-1}}[u] + \tilde{h}(x, u_k) - \tilde{h}(x, u_{k-1}) \quad (\text{A.30})$$

$$G^*[u] = G_{f_k}[u] + \tilde{h}(x, u^*) - h(x, u_k), \quad k \geq 0 \quad (\text{A.31})$$

assim, pela definição de  $u_1$ , temos que,  $G_{f_0}[u] = 0 \leq G_{f_0}[u_0]$  e  $u_1 = u_0 = g$ , logo pelo princípio da comparação segue que  $u_0 \leq u_1$ . Supondo indutivamente que  $u_{k-1} \leq u_k$  em  $\Omega$ , temos que como  $\tilde{h}$  é crescente, decorre que:

$$G_{f_k}[u_{k+1}] = G_{f_{k-1}}[u_k] + \tilde{h}(x, u_k) - \tilde{h}(x, u_{k-1}) \geq 0.$$

Portanto aplicando novamente o princípio da comparação segue  $u_k \leq u_{k+1}$  em  $\Omega$ . Agora, atente que  $u_1 \leq u^*$ , ora:

$$G^*[u_1] = G_{f_0}[u_1] + \tilde{h}(x, u^*) - \tilde{h}(x, u_0) \geq 0$$

logo,  $G^*[u_1] \geq 0 \geq G^*[u^*]$ . Por sim, se  $u_k \leq u^*$  em  $\Omega$ ,  $G^*[u_{k+1}] \geq 0 \geq G^*[u^*]$  no sentido de viscosidade, daí  $u_{k+1} \leq u^*$ .

Diante da análise anterior, conclui-se que a sequência  $(u_k)$  é equilimitada e equicontínua, assim, o teorema de Ascoli-Arzelà garante que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x) = u_\infty. \quad (\text{A.32})$$

Agora, de (17.15), segue que existe uma constante  $C = C(\mu, \|u^*\|_\infty, \|u_\star\|_\infty)$  tal que

$$|\mathcal{G}(x, Du_k, D^2u_k)| \leq C \quad \forall k \geq 1. \quad (\text{A.33})$$

Ora, por definição:

$$\begin{aligned} G_{f_k}[u_k] &= \mathcal{G}(x, Du_k, D^2u_k) - \mu u_k + \tilde{h}(x, u_k) \\ &= G_{f_{k-1}}[u_k] + \tilde{h}(x, u_k) - \tilde{h}(x, u_{k-1}) \\ \mathcal{G}(x, Du_k, D^2u_k) - \mu u_k &= -\tilde{h}(x, u_{k-1}) \\ \mathcal{G}(x, Du_k, D^2u_k) &= \mu u_k + \mu u_{k-1} + h(x, u_{k-1}) \end{aligned}$$

o que valida a estimativa (A.33) e com esta em vigor, segue localmente a convergência uniforme (se não é assegurado a convergência como dita, passamos a uma subsequência):

$$G_{f_k} \rightarrow G. \quad (\text{A.34})$$

Em outras palavras,  $u_\infty$  é solução de viscosidade de

$$\mathcal{G}(x, Du, D^2u) = h(x, u).$$

Por fim, vejamos que  $u_\infty$  é a supersolução entre  $u_*$  e  $u^\infty$ , que como anteriormente se resumirá a uma aplicação do princípio de comparação. Seja  $w \in \mathcal{S}$ , então:

$$G_{f_k}[u] = \mathcal{G}(x, Du, D^2) - \tilde{h}(x, w) + \tilde{h}(x, u_k) - h(x, w).$$

Se  $k = 0$ , segue que  $G_{f_0}[u_1] = 0 \geq G_{f_0}[w]$  no sentido de viscosidade, assim, por comparação segue que  $w \geq u_1$ . Agora, como  $G_{f_k}[u_{k+1}] = 0 \geq G_{f_k}[w]$ , segue

$$w \geq u_k \quad (\text{A.35})$$

tomando  $k \rightarrow \infty$  (16.20), se confirma então que:

$$u_\infty(x) = \inf_{w \in \mathcal{S}} w.$$

□

### Lema do Corte

Com o intuito de assegurar a validade do lema do corte, usado nos comentários finais que visaram oferecer aplicações do estudo do problema singularmente perturbado, segue a prova abaixo:

**Lema A.3.** *Se  $u$  é solução de viscosidade de*

$$\mathcal{H}(x, Du)F(x, D^2u) = 0 \quad \text{em } B_1 \quad (\text{A.36})$$

*então  $u$  é solução de viscosidade de*

$$F(x, D^2u) = 0. \quad (\text{A.37})$$

**Prova.** Vamos provar apenas o caso em que  $u$  é supersolução, uma vez que o caso para subsolução promete ser análogo. Para isso, considere uma função teste  $\phi$  tocando  $u$  por baixo em  $x \in B_1$ . Por simplicidade, supomos  $x = 0$ .

Pode-se supor também, sem perda de generalidade, que  $u(0) = \phi(0) = 0$  ( em face do argumento que  $v := u - u(0)$  também é solução de (A.36)), além disso,  $\phi < u$  em  $B_r \setminus \{0\}$  para algum  $r > 0$ , por fim, vamos considerar  $\phi$  quadrático, ou seja:

$$\phi(x) = \frac{1}{2}x \cdot A \cdot x + b \cdot x \quad (\text{A.38})$$

Se  $b \neq 0$ , então da hipótese, ou seja

$$\mathcal{H}(0, b)F(0, A) \geq 0 \quad \text{implica} \quad F(0, A) \geq 0.$$

Para o caso complementar, ou seja, se  $b = 0$ , suponha por contradição, a negação da hipótese, ou seja,  $F(0, A) < 0$ . Levando em conta que  $F$  é uniformemente elíptico, temos que ou  $A$  é uma matriz estritamente negativa o que nos conduz a um absurdo, à luz da informação que  $b = 0$ , pode ocorrer também que  $A$  tenha pelo menos um autovalor positivo.

Seja  $\mathcal{S}$  a soma direta dos subespaços que gozam de autovalores positivos e  $P_{\mathcal{S}}$  a projeção ortogonal em  $\mathcal{S}$ . Iremos considerar a seguinte função

$$\Psi(x) = \psi(x) + |P_{\mathcal{S}}x| \quad (\text{A.39})$$

é uma função teste. Inicialmente, é válido notar que uma vez que  $u$  domina  $\phi$  em  $B_r$ , então  $u - \Psi$  atinge mínimo em  $x_0 \in \overline{B}_r$  no interior da bola para  $\epsilon$  suficientemente pequeno. Devemos agora verificar se há esperança de derivar duas vezes na vizinhança de  $x_0$ , para isso, note inicialmente que  $P_{\mathcal{S}}x_0 \neq 0$ .

Com efeito, se isso fosse falso, considere o fato que

$$|P_S| = \max_{|e|=1} e.P_S \quad (\text{A.40})$$

e com isso, temos que a função teste  $\phi + \epsilon e.P_S x$  toca  $u$  por baixo em  $x_0$  para todo  $e \in \mathbb{R}^N$  com  $|e| = 1$ , assim pela hipótese assegurada em (A.36), temos:

$$\mathcal{H}(Ax_0 + \epsilon P_S e)F(x_0, A) \geq 0 \quad (\text{A.41})$$

contudo escolhemos  $e$  tal que:

$$D\phi(x_0) + eP_S e \neq 0$$

de onde o resulta o absurdo que:

$$F(x_0, A) \geq 0$$

Portanto,  $P_S x_0 \neq 0$  e assim  $\Psi$  é uma função-teste genuína, ou seja, é suave em uma vizinhança de  $x_0$ , desse modo usando novamente (A.36) e o fato que  $x \rightarrow |P_S|$  é convexa, temos:

$$\mathcal{H}(x_0, Ax_0 + \epsilon e_0)F(x_0, A + \epsilon D^2 P_S) \geq 0$$

onde  $e_0 = P_S x_0 . |P_S x_0|^{-1}$ . Por fim, como  $Ax_0 + \epsilon e_0 \neq 0$ , vale

$$F(x_0, A) \geq F(x_0, A + \epsilon P_S) \geq 0$$

É válido destacar que acima, foi fortemente usado que  $D^2 P_S \geq 0$ , por ser convexa como dito anteriormente. Assim, mais uma vez temos uma contradição e portanto está provado o lema do corte.  $\square$

## ESPAÇOS $\mathcal{L}^{p,\mu}(\Omega, \psi)$

### Definições Básicas

Considere a métrica  $\psi$  definida em  $\mathbb{R}^N$ , para  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $\rho > 0$ , seja  $B(x, \rho)$  a bola aberta de centro  $x$  e raio  $\rho$ , de acordo com a métrica  $\psi$ . A partir de agora, assumiremos duas propriedades que fazem a topologia induzida por essa métrica ser equivalente a euclidiana e além do mais  $\psi$  seja contínua em todo o  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ , são elas:

- (1)  $B(0, \rho)$  é convexa,  $\forall \rho > 0$ ;
- (2) existem números positivos  $C_1, C_2$  e  $m \geq n$  tais que:

$$C_1 \rho^n \leq |B(0, \rho)| \leq C_2 \rho^m \quad (\text{A.42})$$

Seja  $\Omega_{x,\rho} = \Omega \cap B(x, \rho)$ , com isso assumimos que a medida de Lebesgue desse conjunto é pelo menos a medida de Lebesgue de  $B(x, \rho)$ , isto é:

$$|\Omega_{x,\rho}| \geq \mathcal{A} |B(x, \rho)|, \forall x \in \Omega, \quad 0 < \rho \leq \rho_0 \quad (\text{A.43})$$

para algum  $\mathcal{A} > 0$ .

A seguir, segue a definição dos espaços de Hölder com a métrica  $\psi$ .

**Definição A.1.** (*Espaços de Hölder*) O espaço das funções Hölder contínuas com expoente  $\alpha$  sobre  $\bar{\Omega}$  com respeito a  $\psi$ , denotado por  $C^{0,\alpha}(\Omega, \psi)$ , equipado com a seguinte norma:

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \psi)} &:= \sup_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)| + \sup_{x, y \in \bar{\Omega}} \frac{|u(x) - u(y)|}{\psi^\alpha(x, y)} \\ &= \sup_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)| + [u]_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \psi)}. \end{aligned}$$

**Definição A.2.** (*Espaços de Campanato*) Seja  $\mathcal{L}^{p,\mu}(\Omega, \psi)$ , com  $p \geq 1, \mu > 0$ , o espaço das funções  $u \in L^p(\Omega)$  tais que:

$$[u]_{\mathcal{L}^{p,\mu}(\Omega, \psi)} = \left( \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ \rho \in (0, d(\Omega)]}} |\Omega_{x_0, \rho}|^{-\mu} \int_{\Omega_{x_0, \rho}} |u(x) - u_{x_0, \rho}|^q dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \infty$$

onde  $u_{x_0, \rho}$  é a média integral de  $u$  sobre  $\Omega_{x_0, \rho}$ .

Com efeito,  $(\mathcal{L}^{p,\mu}(\Omega, \psi), \|u\|_{\mathcal{L}^{p,\mu}(\Omega, \psi)})$  é um espaço de Banach.

### Propriedades iniciais

Os próximos resultados ajudam a entender o comportamento da média  $u_{x_0, \rho}$  quando  $\rho \rightarrow 0$ .

**Lema A.4.** *Considere  $u \in \mathcal{L}^{p, \mu}(\Omega, \psi)$ ,  $p \geq 1$ ,  $\mu \geq 0$ , e seja  $\sigma \in (0, \rho)$ . Então, existe uma constante  $\mathcal{C}_1 > 0$  tal que, para quase todo  $x \in \bar{\Omega}$ , vale*

$$|u_{x_0, \rho} - u_{x_0, \sigma}| \leq \mathcal{C}_1 \left( \frac{\rho^{\mu m} - \sigma^{\mu m}}{\sigma^m} \right) [u]_{\mathcal{L}^{p, \mu}(\Omega, \psi)}.$$

**Prova.** Seja  $\sigma \in (0, \rho)$  e  $x_0 \in \bar{\Omega}$  arbitrário. A partir de agora, afirmamos que:

$$|u_{x_0, \rho} - u_{x_0, \sigma}|^p \leq 2^p (|u(x) - u_{x_0, \rho}|^p + |u(x) - u_{x_0, \sigma}|^p) \quad \text{para q.t.p } x \in \Omega_{x_0, \sigma}.$$

Integrando sobre  $\Omega_{x_0, \sigma}$ , e levando em conta que  $\Omega_{x_0, \sigma} \subset \Omega_{x_0, \rho}$ , além de (A.42) e (A.43) temos:

$$\begin{aligned} |u_{x_0, \rho} - u_{x_0, \sigma}|^p &\leq 2^p |\Omega_{x_0, \sigma}|^{-1} \left( \int_{\Omega_{x_0, \rho}} |u(x) - u_{x_0, \rho}|^p dx + \int_{\Omega_{x_0, \sigma}} |u(x) - u_{x_0, \sigma}|^p dx \right) \\ &\leq \frac{2^p}{\mathcal{C}_1 \sigma^m \mathcal{A}} \left( \int_{\Omega_{x_0, \rho}} |u(x) - u_{x_0, \rho}|^p dx + \int_{\Omega_{x_0, \rho}} |u(x) - u_{x_0, \sigma}|^p dx \right) \\ &= \frac{2^p}{\mathcal{C}_1 \sigma^m \mathcal{A}} \left( |\Omega_{x_0, \rho}|^\mu |\Omega_{x_0, \rho}|^{-\mu} \int_{\Omega_{x_0, \rho}} |u(x) - u_{x_0, \rho}|^p dx \right. \\ &\quad \left. + |\Omega_{x_0, \rho}|^\mu |\Omega_{x_0, \rho}|^{-\mu} \int_{\Omega_{x_0, \sigma}} |u(x) - u_{x_0, \sigma}|^p dx \right) \\ &\leq \frac{2^p \mathcal{C}_2^\mu (\rho^{\mu m} + \sigma^{\mu m})}{\mathcal{A} \mathcal{C}_1 \sigma^m} [u]_{\mathcal{L}^{p, \mu}(\Omega, \psi)}^p \end{aligned}$$

tomando a raiz  $p$ -ésima na desigualdade, segue o resultado. □

**Lema A.5.** *Seja  $u \in \mathcal{L}^{p, \mu}(\Omega, \psi)$ ,  $p \geq 1$ ,  $\mu \geq 0$  e  $h$  um inteiro positivo. Então existe uma constante  $\mathcal{C}_2$  tal que, para quase todo  $x \in \bar{\Omega}$  e  $\rho \in (0, d)$ , vale:*

$$|u_{x_0, \rho} - u_{x_0, 2^{-h}\rho}| \leq \mathcal{C}_2 \rho^\alpha (1 - 2^{-\alpha h}) [u]_{\mathcal{L}^{p, \mu}(\Omega, \psi)}$$

onde  $\alpha = \frac{m}{q}(\mu - 1)$ .

**Prova.** Aplicando o lema anterior com  $\sigma = \frac{\rho}{2}$ , segue que:

$$|u_{x_0, \rho} - u_{x_0, \frac{\rho}{2}}|^p \leq \frac{2^p \mathcal{C}_2^\mu (\rho^{\mu m} + (\rho/2)^{\mu m})}{\mathcal{A} \mathcal{C}_1 (\rho/2)^m} [u]_{\mathcal{L}^{p, \mu}(\Omega, \psi)}^p.$$

Como

$$\frac{(\rho^{\mu m} + (\rho/2)^{\mu m})}{(\rho/2)^m} = \rho^{p\alpha} 2^{-p\alpha} (1 + 2^{\alpha m})$$

vale

$$|u_{x_0, \rho} - u_{x_0, \frac{\rho}{2}}| \leq 2 \left( \frac{C_2^\mu}{\mathcal{A}C_1} \right)^{\frac{1}{p}} \rho^\alpha 2^{-\alpha} (1 + 2^{\alpha m})^{\frac{1}{p}} [u]_{\mathcal{L}^{p, \mu}(\Omega, \psi)} = K(u) \rho^\alpha.$$

Assim, pela desigualdade triangular, segue:

$$\begin{aligned} |u_{x_0, \rho} - u_{x_0, 2^{-h}\rho}| &\leq \sum_{j=i}^h |u_{x_0, 2^{1-j}\rho} - u_{x_0, 2^{-j}\rho}| \\ &\leq \sum_{j=i}^h 2 \left( \frac{C_2^\mu}{\mathcal{A}C_1} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \frac{2^{(1-j)\rho}}{2} \right)^\alpha (1 + 2^{\alpha m})^{\frac{1}{p}} [u]_{\mathcal{L}^{p, \mu}(\Omega, \psi)} \\ &= K(u) \rho^\alpha \sum_{j=i}^h 2^{\alpha(1-j)} \leq K_2(u) \frac{1 - 2^{-\alpha h}}{1 - 2^{-\alpha}} \rho^\alpha \end{aligned}$$

onde  $K_2(u) = \frac{K(u)}{1 - 2^{-\alpha}}$ .

□

**Lema A.6.** *Seja  $u \in \mathcal{L}^{1, \mu}(\Omega, \psi)$ , com  $\mu > 1$ . Então, para quase todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$ , existe é finito o limite*

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} u_{x_0, \rho} := \tilde{u}(x_0)$$

e satisfaz

$$|u_{x_0, \rho} - \tilde{u}(x_0)| \leq \mathcal{C}_3 \rho^{m(\mu-1)} [u]_{\mathcal{L}^{(1, \mu)}(\Omega, \psi)}$$

onde  $\mathcal{C}_3$  é independente de  $x_0$ .

**Prova.** Uma vez que toda sequência de Cauchy é convergente, a ideia é provar inicialmente que  $\{u_{x_0, 2^{-h}\rho}\}_h$  é uma sequência de Cauchy. Assim, considere  $j, s \in \mathbb{N}$  e assumamos, sem perda de generalidade, que  $j < s$ . Então, para  $\rho_0 = 2^{-j}\rho$ ,

$$\begin{aligned} |u_{x_0, 2^{-j}\rho} - u_{x_0, 2^{-s}\rho}| &= |u_{x_0, \rho_0} - u_{x_0, 2^{j-s}\rho_0}| \\ &\leq \frac{K(u)}{1 - 2^{-\alpha}} \rho_0^{-\alpha} (1 - 2^{\alpha(j-s)}) \\ &\leq \frac{K(u)}{1 - 2^{-\alpha}} \rho^\alpha 2^{-j\alpha} \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

onde foi levado em conta a desigualdade obtida no lema anterior.

Desse modo  $\{u_{x_0, 2^{-h}\rho}\}_h$  é uma sequência de Cauchy para cada  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e cada  $\rho \in (0, d)$ . Agora fixado  $\rho$ , vamos mostrar que o limite

$$\lim_{h \rightarrow \infty} u_{x,2^{-h}\rho} = \tilde{u}(x)$$

é independente de  $\rho$ . Seja  $\sigma \in (0, d)$ , sem perda de generalidade, seja  $\sigma < \rho$ . Então, vamos mostrar que:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} |u_{x,2^{-h}\rho} - u_{x,2^{-h}\sigma}| = 0.$$

Pelo lema A.4, temos:

$$\begin{aligned} |u_{x_0,2^{-h}\rho} - u_{x_0,2^{-h}\sigma}| &\leq \mathcal{C}_1 \left( \frac{(2^{-h}\rho)^{\mu m} + (2^{-h}\sigma)^{\mu m}}{(2^{-h}\sigma)^{\mu m}} \right) [u]_{\mathcal{L}^{(1,\mu)}(\Omega,\psi)} \\ &= \mathcal{C}_1 \left( \frac{\rho^{\mu m} + \sigma^{\mu m}}{\sigma^{\mu m}} \right) (2^{-h})^{m(\mu-1)} [u]_{\mathcal{L}^{(1,\mu)}(\Omega,\psi)} \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Assim,  $\tilde{u}$  é independente da escolha de  $\rho$  e

$$\tilde{u}(x) = \lim_{\rho \rightarrow 0} u_{x_0,\rho}.$$

Finalmente, a última parte da tese segue como aplicação direta do lema 2.  $\square$

**Lema A.7.** *Seja  $u \in \mathcal{L}^{(1,\mu)}(\Omega, \psi)$ ,  $\mu > 1$ ,  $a, b \in \overline{\Omega}$  e  $\rho = 2\psi(a, b)$ . Então existe uma constante  $\mathcal{C}_4 > 0$  tal que:*

$$|u_{x,\rho} - u_{y,\rho}| \leq \mathcal{C}_4 \rho^{m(\mu-1)} [u]_{\mathcal{L}^{(1,\mu)}(\Omega,\psi)}.$$

**Prova.** Fixe  $a, b \in \overline{\Omega}$  e considere  $\rho = 2\psi(x, y)$ . Uma vez que  $\Omega_{x,\rho/2} \subset \Omega_{x,\rho} \cup \Omega_{y,\rho}$  e para quase todo  $z \in \Omega_{x,\rho/2}$

$$|u_{x,\rho} - u_{y,\rho}| \leq |u(z) - u_{x,\rho}| + |u(z) - u_{y,\rho}|.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_{x,\rho/2}} |u_{x,\rho} - u_{y,\rho}| dz &\leq \int_{\Omega_{x,\rho}} |u(z) - u_{x,\rho}| dz + \int_{\Omega_{y,\rho}} |u(z) - u_{y,\rho}| dz \\
&= |\Omega_{x,\rho}|^\mu |\Omega_{x,\rho}|^{-\mu} \int_{\Omega_{x,\rho}} |u(z) - u_{x,\rho}| dz + |\Omega_{y,\rho}|^\mu |\Omega_{y,\rho}|^{-\mu} \int_{\Omega_{y,\rho}} |u(z) - u_{y,\rho}| dz \\
&\leq \rho^{m(\mu-1)} \rho^m [u]_{\mathcal{L}^{(1,\mu)}(\Omega,\psi)} + \rho^{m(\mu-1)} \rho^m [u]_{\mathcal{L}^{(1,\mu)}(\Omega,\psi)} \\
&= \rho^{m(\mu-1)} (2\psi(a,b))^m [u]_{\mathcal{L}^{(1,\mu)}(\Omega,\psi)} + \rho^{m(\mu-1)} (\psi(a,b))^m [u]_{\mathcal{L}^{(1,\mu)}(\Omega,\psi)} \\
&\leq \rho^{m(\mu-1)} (2\text{diam}\Omega)^m [u]_{\mathcal{L}^{(1,\mu)}(\Omega,\psi)} + \rho^{m(\mu-1)} (2\text{diam}\Omega)^m [u]_{\mathcal{L}^{(1,\mu)}(\Omega,\psi)} \\
&= \mathcal{C}_4 \rho^{m(\mu-1)} [u]_{\mathcal{L}^{(1,\mu)}(\Omega,\psi)}
\end{aligned}$$

□

**Relação entre  $\mathcal{L}^{(p,\mu)}(\Omega, \psi)$  e  $C^{0,\alpha}(\Omega, \psi)$**

**Teorema A.7.** *Seja  $\Omega$  satisfazendo (A.43) e  $p \geq 1$ . Se  $\mu > 1$ , então:*

$$C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \psi) \cong \mathcal{L}^{(p,\mu)}(\Omega, \psi)$$

com  $\alpha = \frac{m}{p}(\mu - 1)$

**Prova.** Seja  $u \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}, \psi)$ ,  $x_0 \in \bar{\Omega}$ ,  $\rho > 0$ . Então, levando em conta a propriedade da métrica  $\psi$  e (A.43):

$$\begin{aligned}
|\Omega_{x_0,\rho}|^{-\mu} \int_{\Omega_{x_0,\rho}} |u(x) - u_{x_0,\rho}|^p dx &= \frac{1}{|\Omega_{x_0,\rho}|^p} \int_{\Omega_{x_0,\rho}} \left| \int_{\Omega_{x_0,\rho}} (u(x) - u(y)) \right|^p dx \\
&\leq |\Omega_{x_0,\rho}|^{-\mu} \frac{1}{|\Omega_{x_0,\rho}|^p} \int_{\Omega_{x_0,\rho}} \left[ \int_{\Omega_{x_0,\rho}} |u(x) - u(y)| \right]^p dx \\
&\leq |\Omega_{x_0,\rho}|^{-\mu} \frac{1}{|\Omega_{x_0,\rho}|^p} \int_{\Omega_{x_0,\rho}} \left[ \int_{\Omega_{x_0,\rho}} K \psi^\alpha(x,y) \right]^p dx \\
&\leq |\Omega_{x_0,\rho}|^{1-\mu} K^p 2^{\alpha q} \rho^{\alpha p} \\
&\leq (K^p 2^{\alpha q}) \mathcal{A}^{1-\mu} |B(x_0, \rho)|^{1-\mu} \rho^{m(\mu-1)} \\
&\leq (K^p 2^{\alpha q}) \mathcal{A}^{1-\mu} C_1^{1-\mu} \rho^{m(1-\mu)} \rho^{m(\mu-1)} \\
&= (\mathcal{A} C_1)^{1-\mu}.
\end{aligned}$$

Tomando o supremo na desigualdade acima em  $x_0 \in \bar{\Omega}$ ,  $\rho > 0$ , concluímos que de fato  $u$  é uma habitante do espaço de Campanato com expoente  $(p, \mu)$  no domínio  $\Omega$  com a métrica  $\psi$ .

Para a inclusão contrária, é suficiente considerar o caso  $p = 1$ , com efeito, se  $u \in \mathcal{L}^{(p,\mu)}(\Omega, \psi)$ , então pela desigualdade de Hölder:

$$\begin{aligned}
|\Omega_{x_0, \rho}|^{-(1+\frac{\mu-1}{p})} \int_{\Omega_{x_0, \rho}} |u(x) - u_{x_0, \rho}| dx &\leq \left( \int_{\Omega_{x_0, \rho}} |u(x) - u_{x_0, \rho}| dx \right)^{\frac{1}{p}} |\Omega_{x_0, \rho}|^{1-\frac{1}{p}} |\Omega_{x_0, \rho}|^{(1+\frac{\mu-1}{p})} \\
&= (|\Omega_{x_0, \rho}|^{-\mu} \int_{x_0, \rho} |u(x) - u_{x_0, \rho}|^q)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

tomando o supremo, segue que:

$$\mathcal{L}^{(p, \mu)}(\Omega, \psi) \subset \mathcal{L}^{(p, 1+\frac{1}{p}(\mu-1))}(\Omega, \psi).$$

Feito isso, seja  $u \in \mathcal{L}^{(1, \mu)}(\Omega, \psi)$ . Inicialmente seja  $\tilde{u}$  como no lema A.6, é fato que esta função é Hölder contínua com expoente  $\alpha$ , ora, para  $x, y \in \overline{\Omega}$  e  $\rho = \psi(a, b)$ . Vale, pela desigualdade triangular:

$$|\tilde{u}(a) - \tilde{u}(b)| \leq |\tilde{u}(a) - u_{x, \rho}| + |\tilde{u}(b) - u_{y, \rho}|.$$

Pelos lemas A.6 e A.7, segue que:

$$\begin{aligned}
|\tilde{u}(a) - \tilde{u}(b)| &\leq (2\mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_4)[u]_{\mathcal{L}^{(1, \mu)}(\Omega, \psi)} \rho^{m(\mu-1)} \\
&= 2^{m(\mu-1)}(2\mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_4)[u]_{\mathcal{L}^{(1, \mu)}(\Omega, \psi)} (\psi(a, b))^{m(\mu-1)}.
\end{aligned}$$

Para o que segue, a ideia é mostrar que  $\tilde{u} = u$  em quase todo ponto, para isso, vamos mostrar que  $u_{x, \rho}$  converge em  $L^1(\Omega)$  para  $u$ , quando  $\rho \rightarrow 0$ . Isso implicaria em particular, que existe uma subsequência de  $\{u_{x, \rho}\}_\rho$  que convergente em quase todo ponto.

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |u(x) - u_{x, \rho}| dx &= \frac{1}{|\Omega_{x, \rho}|} \int_{\Omega} \left| \int_{\Omega_{x, \rho}} (u(x) - u(t)) dt \right| dx \\
&\leq \frac{1}{\mathcal{A}|B(0, \rho)|} \int_{\Omega} \int_{\Omega_{x, \rho}} |u(x) - u(t)| dt dx \\
&\leq \frac{1}{\mathcal{A}|B(0, \rho)|} \int_{B(0, \rho)} \int_{\Omega} |u(x) - u(x+t)| dt dx \rightarrow 0 \quad (|t| \rightarrow 0).
\end{aligned}$$

Uma vez que a topologia induzida da métrica  $\psi$  é equivalente e a euclidiana, isso é equivalente a  $\psi(0, t) \rightarrow 0$ , ou seja,  $\rho \rightarrow 0$ , ademais foi usado acima a densidade das funções contínuas em  $L^1(\Omega)$ . Finalmente, pelo lema (A.6),  $u_{x, \rho}$  converge uniformemente para  $\tilde{u}$  em quase todo ponto em  $\overline{\Omega}$ , logo, da unicidade do limite segue que  $u = \tilde{u}$  em quase todo ponto, e assim  $u$  é de fato Hölder contínua com o expoente  $\alpha$ .  $\square$