UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

CENTRO DE CIÊNCIAS

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

PAULO VITOR DA SILVA SANTIAGO

OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA: SITUAÇÕES DIDÁTICAS OLÍMPICAS NO ENSINO DE GEOMETRIA PLANA

FORTALEZA

2021

PAULO VITOR DA SILVA SANTIAGO

OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA: SITUAÇÕES DIDÁTICAS OLÍMPICAS NO ENSINO DE GEOMETRIA PLANA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (ENCIMA) da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.
Linha de Pesquisa: Tecnologias Digitais no Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.

FORTALEZA

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S226o Santiago, Paulo Vitor da Silva.
Olimpíada Internacional de Matemática : Situações Didáticas Olímpicas no Ensino de Geometria Plana / Paulo Vitor da Silva Santiago. – 2021.
160 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Fortaleza, 2021.
Orientação: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.

1. Olimpíada Internacional de Matemática. 2. Engenharia Didática. 3. Teoria das Situações Didáticas. 4. Situações Didáticas Olímpicas. 5. GeoGebra. I. Título.

CDD 372

PAULO VITOR DA SILVA SANTIAGO

OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA:
SITUAÇÕES DIDÁTICAS OLÍMPICAS NO ENSINO DE GEOMETRIA PLANA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (ENCIMA) da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática. Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Tecnologias Digitais no Ensino de Ciências e Matemática.

Aprovada em: 25/05/2021.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves (Orientador)
Instituto Federal do Ceará (IFCE)

____

Profa. Dra. Maria José Costa dos Santos
Universidade Federal do Ceará (UFC)

____

Prof. Dr. Daniel Brandão Menezes
Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA

A Deus.

Aos meus pais, Civaldo e Elda *(In memoriam)*.

AGRADECIMENTOS

A Deus, minha força, por me permitir superar todas as dificuldades da vida, por me iluminar e abençoar em todos os momentos da minha caminhada profissional. ESPERANÇA, Senhor!

À minha querida mãe Elda Maria (in memoriam), por todo amor que dedicou a mim, pela serenidade e sabedoria que sempre me transmitiu.

À minha querida esposa Lara Nogueira, minha amiga, que sempre vive e compartilha comigo todas as etapas da nossa vida, dividi todas as fases boas e ruins, mas viagens, trabalhos e estudos, ao longo desse processo. Sua companhia foi/é essencial, meu amor!

À minha filha Pâmela Raquelly, por ser uma criança encantadora e por compartilharmos muitos momentos de alegrias e brincadeiras.

Ao corpo docente do ENCIMA por sua qualidade no ensino e organização, de forma especial ao Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves meu orientador.

Ao Prof. Dr. Paulo César Cavalcante de Oliveira por compartilhar seus conhecimentos na área de Ensino em Matemática e por sua coorientação.

A esta universidade, seu corpo docente, direção e administração que oportunizaram a janela que hoje vislumbro um horizonte superior, eivado pelo acendrada confiança no mérito e ética aqui presentes.

Ao diretor e coordenador da escola EEM João de Araújo Carneiro, pelos conselhos e apoio.

Aos meus irmãos e pai por todo o apoio moral e a todos os familiares pelos direcionamentos filosóficos.

As professoras Profa. Dra. Maria José Costa dos Santos e a Profa. Dra. Silvany Bastos Santiago, pelas valiosas contribuições na banca da qualificação e defesa.

Aos meus amigos de turma do mestrado: Gutierrez, Toinho, Alberto e Beatriz e aos demais mestrando da área de Matemática do ENCIMA da turma 2019.1, os quais conheci ao longo do Mestrado, mas sempre se mostraram disponíveis para trocar experiências.

A todos que de forma direta ou indireta contribuíram e me ajudaram nesse difícil caminho.

A todos que não mencionei, mas que de forma direta ou indireta contribuíram para a realização desse sonho. MUITO OBRIGADO!

“A educação tem raízes amargas, mas os seus frutos são doces.” (ARISTÓTELES)

RESUMO

Este trabalho apresenta uma proposta didática baseada na utilização de Problemas Olímpicos, em específico, da Olimpíada Internacional de Matemática, de maneira complementar, com a Teoria das Situação Didáticas para o ensino de geometria plana. Dessa forma, tem como objetivo principal investigar se as Situações Didáticas Olímpicas trabalham os processos do ensino de geometria plana com o auxílio do *software* GeoGebra em um contexto da sala de aula com questões internacionais de matemática. A investigação foi alinhada à metodologia de pesquisa da Engenharia Didática, com o uso do *software* GeoGebra para auxiliar na formação de professores e preparação olímpica de estudantes. A fase de Experimentação ocorreu em uma escola estadual do Ceará e foi organizada em quatro encontros, com uma equipe de estudo formada por oito estudantes treinadores de olimpíadas. Primeiro, foram realizadas a descrição e aplicação das três Situações Didáticas Olímpicas, pela plataforma virtual de web conferência, de forma remota, além do aplicativo de mensagens instantâneas, que auxiliou nas resoluções, pelos alunos, e nas elaborações, pelo pesquisador, junto ao *software* GeoGebra, que vem ao encontro das novas estratégias dos processos de ensino e de aprendizagem dos conteúdos de geometria, álgebra, cálculo e estatística, permitindo aos interessados a possibilidade de explorar, conjecturar, investigar tais conteúdos na construção do conhecimento matemático da Situação Olímpica. Os dados foram coletados de forma remota, visualizando o desempenho dos alunos em preparação, registrados pela escrita, fotos e áudios, com base nas quatro etapas propostas na Teoria das Situações Didáticas: Ação, Formulação, Validação e Institucionalização, validando internamente pelo confronto das fases da Engenharia Didática, que são Análise Preliminar ou Prévia, Concepção e Análise *a priori*, Experimentação, Análise a *posteriori* e Validação (interna). Foram analisadas algumas dissertações do repositório do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional com os tópicos incentro e circuncentro aplicados em competições olímpicas. Nessa situação, foi identificado que há poucas pesquisas que utilizam problemas olímpicos com uso do GeoGebra. Por fim, tem-se o Produto Educacional constituído pelos dados colhidos por meio desta pesquisa, o qual inclui cinco situações didáticas que foram elaboradas, exploram o conceito de geometria e foram mediadas por um aplicativo *Suíte GeoGebra Calculadora* e um site com vídeos e sugestões de aplicação para o professor do ensino médio.

Palavras-chave: Olimpíada Internacional de Matemática; Engenharia Didática; Teoria das Situações Didáticas; Situações Didáticas Olímpicas; GeoGebra.

ABSTRACT

This paper presents a didactic proposal based on the use of Olympic Problems, specifically the International Mathematical Olympiad, in a complementary way, with the Didactic Situation Theory for the teaching of plane geometry. Thus, its main objective is to investigate whether the Olympic Didactic Situations work the processes of plane geometry teaching with the help of GeoGebra software in a classroom context with international mathematics issues. The investigation was aligned to the Didactic Engineering research methodology, with the use of GeoGebra software to aid in teacher training and student Olympic preparation. The Experimentation phase took place in a state school in Ceará and was organized in four meetings, with a study team formed by eight student Olympiad coaches. First, the description and application of the three Olympic Teaching Situations were performed, by the web conference virtual platform, remotely, besides the instant messaging application, which helped in the resolutions, by the students, and in the elaborations, by the researcher, with the GeoGebra software, which meets the new strategies of the teaching and learning processes of the geometry, algebra, calculus and statistics contents, allowing the interested parties the possibility of exploring, conjecturing, investigating such contents in the construction of the mathematical knowledge of the Olympic Situation. Data were collected remotely, viewing the students' performance in preparation, recorded by writing, photos and audios, based on the four stages proposed in the Theory of Didactic Situations: Action, Formulation, Validation and Institutionalization, validating internally by confronting the phases of Didactic Engineering, which are Preliminary or Prior Analysis, Design and a priori Analysis, Experimentation, a posteriori Analysis and (internal) Validation. We analyzed some dissertations from the repository of the Professional Masters in Mathematics in National Network with the topics incenter and circumcenter applied in Olympic competitions. In this situation, it was identified that there is little research that uses Olympic problems using GeoGebra. Finally, there is the Educational Product constituted by the data collected through this research, which includes five teaching situations that were elaborated, explore the concept of geometry and were mediated by a GeoGebra Calculator Suite application and a website with videos and application suggestions for the high school teacher.

Keywords: International Mathematical Olympiad; Didactic Engineering; Theory of Didactical Situations; Olympic Didactical Situations; GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

APMO	Asian Pacific Mathematics Olympiad
APSD	Análise Prévia da Situação Didática
APVSD	Análise à Posteriori e Validação da Situação Didática
BNCC	Base Nacional Curricular Comum
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CAPSD	Concepção e Análise a Priori da Situação Didática
CIIM	Competição Ibero-Americana Interuniversitária de Matemática
CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
COM	Clube Olímpico de Matemática
DM	Didática da Matemática
ED	Engenharia Didática
EEM	Escola de Ensino Médio
EGMO	European Girls' Mathematical Olympiad
ENCIMA	Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática
ESD	Experimentação da Situação Didática
EUA	Estados Unidos da América
GEEM	Grupo de Estudo do Ensino da Matemática
IGO	Olimpíada Iraniana de Geometria
IMC	Competição Internacional de Matemática para Estudantes Universitários
IME	Instituto Militar de Engenharia
IMO	Olimpíada Internacional de Matemática
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
IREM	Institutos de Pesquisa em Ensino de Matemática (sigla em francês)
MCTIC	Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações
MEC	Ministério da Educação
MRM	Mestres Romenos de Matemática
OBM	Olimpíada Brasileira de Matemática
OBMU	Olimpíadas Matemática Universitária
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
OCM	Olimpíada Cearense de Matemática

OEMG	Olimpíada Europeia de Matemática para Garotas
OIM	Olimpíada Ibero-americana de Matemática
OIMU	Olimpíada Ibero-americana de Matemática Universitária
OMAPA	Olimpíada de Matemática do Cone Sul
OMAP	Olimpíada Matemática Ásia-Pacífico
OMCPLP	Olimpíada de Matemática da Comunidade dos Países de Língua Portuguesa
OMESP	Olimpíada de Matemática do Estado de São Paulo
OMIME	Olimpíadas Internas de Matemática
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PE	Produto Educacional
PIC	Programa de Iniciação Científica Jr
PICME	Programa de Iniciação Científica e Mestrado
PNE	Plano Nacional de Educação
PO	Problemas Olímpicos
POTI	Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
RMM	Romanian Master in Mathematics
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
SD	Situações Didáticas
SDO	Situação Didática Olímpica
SEDUC	Secretária de Educação do Estado
SPAECE	Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Estado do Ceará
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
TSD	Teoria das Situações Didáticas
UFC	Universidade Federal do Ceará
UNAM	Universidade Nacional Autónoma de México

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Na presente pesquisa, é apresentado um campo formativo de trabalho envolvendo olimpíadas de matemática para o professor da educação básica acerca da competência profissional em sala de aula, incentivando os estudantes na busca do ensino e aprendizagem na matemática. Essas competições olímpicas propõem aos estudantes uma melhoria em seus resultados e o aprimoramento na disciplina ao mesmo tempo que aperfeiçoa as habilidades do professor de matemática. Essas motivações acontecem de encontro com professor, aluno e o saber, seguindo uma sequência didática a partir das situações-problema envolvendo um recurso tecnológico e questões relativas ao conteúdo de geometria plana.

Diante das várias oportunidades de incentivar o raciocínio matemático, tem-se as olimpíadas de matemática realizadas em diversas escalas (mundial, nacional, regional, municipal). Essas competições acontecem a cada ano e surgiram primeiramente com o objetivo de escolher os melhores estudantes em matemática para investir na sua jornada escolar e possivelmente contribuir para o progresso científico-tecnológico do seu país de origem. Uma dessas olimpíadas, que mais se destaca atualmente no Brasil, é a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)[1], que tem como objetivo principal incentivar novos alunos no estudo da matemática, além de buscar jovens talentos. As questões-problema que compõem a prova olímpica estão relacionadas com o dia a dia dos alunos, fazendo-lhes raciocinar na sua rotina diária ao resolvê-los e, de modo conjunto, ver a aplicação da matemática na vida das pessoas.

Com estudo nessa concepção, pode-se levar em conta a situação atual de muitos professores, profissionais na área do ensino e, por conseguinte, as suas inúmeras dificuldades em sala de aula. Esta dissertação objetiva transformar o ensino da geometria plana interessante, buscando alguns conceitos e teoremas clássicos abordados no ensino básico brasileiro, possibilitando contribuições aos professores e alunos, em especial no tocante ao conteúdo de Incentro e Circuncentro, exigido com frequência nas olimpíadas de matemática nacionais e internacionais. Contudo, o processo de aprendizado nas competições de matemática tem uma ampliação enorme nas olimpíadas e, consequentemente, na maneira de pensar na resolução das questões que as compõem.

Segundo Mendes (2009, p. 21), “[...] se constitui de uma linguagem revestida por elementos significantes que procuram expressar os significados evidenciados a cada relação

---

[1] Disponível em: http://www.obmep.org.br/

que ao estruturamos para comunicar nossas ideias". No entanto, essas olimpíadas em geral intensificam o ensino e reconhecem quais são os alunos que têm habilidade na problematização de questões junto à celeridade no raciocínio matemático.

Na conjuntura de problemas olímpicos, isso não evita a regra, então é relevante divulgar a ciência para contribuir com o ensino e aprendizado. Conforme Barbosa (2005), o projeto de Olimpíadas surgiu para oferecer várias vantagens adicionais no sistema de avaliação, como a qualidade do ensino e da aprendizagem da escola, de um processo de competição saudável e a elevação da autoestima de professores, alunos e da comunidade escolar.

Durante o trajeto de busca pelo saber em sala de aula, os estudantes que se destacam nas avaliações internas e alguns interessados em competições têm uma preparação para as olimpíadas de matemática durante seus estudos na escola, uma vez que eles observam as descrições matemáticas como uma dificuldade na resolução de Problemas Olímpicos (PO). Ademais, com intuito de elevar o nível de conhecimento matemático, investiga-se as avaliações internas da escola e a lista de aprovados na disciplina de matemática tem causado impacto de motivação por parte dos alunos na preparação para olimpíadas de matemática.

Contudo, os professores precisam usar de materiais que proporcionem um avanço no aprendizado, de maneira a descomplicar a aula olímpica, preparando materiais de apoio com aporte da plataforma dos Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI)[2], simulados e livro didático para olimpíadas. Por essa razão, acontece a realização de uma metodologia de ensino para uso em âmbito olímpico escolar, sendo aplicada em aulas específicas de preparação ou aulas convencionais, ajudando no incentivo com outros trabalhos em outras áreas nas atividades interdisciplinares.

Nos últimos sessenta e um anos (1959 a 2020), aconteceu uma grande evolução no número de participantes nas Olimpíadas Internacionais de Matemática, isso, graças à Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM)[3], a qual coordena a participação brasileira nas Olímpiadas Internacionais de Matemática. Porém, é essencial manter a curiosidade dos alunos e prepará-los para que tenham chances de enfrentar tais dificuldades de raciocínio matemático.

Conforme Bagatini (2010, p.11), é necessário trabalhar com os educandos de forma a destacar a resolução de questões para auxiliar e dar sentido à aprendizagem matemática, bem como é importante que "ele consiga resolver uma grande quantidade de problemas de forma correta", pois, durante a preparação, eles podem "desenvolver a habilidade lógica e criativa, de forma a obter organização de pensamento e de trabalho" (BAGATINI, 2011, p.11). Diante

[2] Disponível em: https://poti.impa.br/
[3] Disponível em: https://www.obm.org.br/

disso, é uma competência para o professor conduzir o aluno a acreditar-se como autor de sua própria experiência.

Nesse sentido, ao citar as Olimpíadas de Matemática aplicada às ferramentas digitais, origina-se consequentemente um pensar na resolução das questões que as compõem. Para um estudante se destacar nessas competições, é de fundamental importância que ele consiga resolver várias questões de forma correta. Segundo Polya (1997, p. 3), o professor “[...] deveria estabelecer a classe certa de problemas para os seus alunos: não muito difíceis, nem fáceis demais, naturais e interessantes, que desafiem a curiosidade, adequados ao seu conhecimento”. Afinal, é preciso ensinar matemática conhecendo a forma e como os alunos aprendem no cotidiano.

Recentemente, tem-se uma visão de preocupação com o ensino da matemática e suas implicações no progresso da sociedade. Agora, o homem presencia a evolução e uso cada vez mais frequente das tecnologias computacionais. Kenski (2012, p. 38) ressalta que:

> As novas TICs não são apenas meros suportes tecnológicos. Elas têm suas próprias lógicas, suas linguagens e processos particulares de comunicar-se com as habilidades perceptivas, emocionais, cognitivas, intuitivas e comunicativas das pessoas, apresentando-se como um modelo novo de gerar, dominar e disseminar os conhecimentos.

Na definição dos chamados objetivos de aprendizagem como “conhecimentos fundamentais, aos quais todo(a) estudante brasileiro deve ter acesso para que seus Direitos de Aprendizagem e do Desenvolvimento sejam assegurados” (BRASIL, 2015, p. 13). A partir dessa premissa, o documento dispõe de uma organização fixada em cada uma das etapas da educação básica, considerando as áreas já estabelecidas nas resoluções curriculares em vigor (Ciências da Natureza e Matemática). Destaca-se também os princípios norteadores desses objetivos que o texto da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) mostra em relação à matemática. Cabe observar-lhe o duplo papel de desempenho na organização curricular: constitui-se como componente curricular e como área de conhecimento, aspecto esse inserido no documento da BNCC:

> As áreas e componentes curriculares se articulam para promover a apropriação por crianças, jovens e adultos de diferentes linguagens e interpretar fenômenos e processos naturais, sociais e culturais, para enfrentar problemas práticos, para argumentar e tomar decisões, individual e coletivamente (BRASIL, 2015, p. 12).

Nesse aspecto, destaca-se a relevância do conhecimento matemático como linguagem que, em interação com outros conhecimentos, aumenta a compreensão do ser humano em relação ao mundo físico e social, vertente que permite a resolução de situações-problema com as mudanças da realidade. Ao se falar da matemática enquanto componente curricular, o documento BNCC apresenta sua ordenação em cinco eixos: geometria, grandezas e medidas, estatística e probabilidade, números e operações, álgebra e funções.

Relacionando que o texto do documento tem uma concepção crítica em relação ao conhecimento matemático aplicado nas escolas do ensino básico, pode-se, com isto, afirmar que “a Matemática assume um papel fundamental para o pleno acesso dos sujeitos à cidadania”. (BRASIL, 2015, p. 127). Essa organização prepara o modo usualmente apresentado nos planos anuais das escolas e nos livros didáticos do ensino fundamental e médio.

Nesse sentido, a prática pedagógica escolar é relevante, pois possibilita a percepção do processo de ensino e aprendizagem. Assim como ocorre em outras escolas públicas municipais do estado do Ceará, voltadas para os resultados das avaliações externas e internas dos governos estadual e federal — SPAECE[4] e Prova Brasil[5], respectivamente. Ocorre uma supremacia das disciplinas de português e matemática sobre as outras que constituem o currículo escolar. Rígido e sério, esse currículo permite que a matemática mostre resultados positivos de destaque na escola. Há aqui uma crença de que essa “disciplina” possa formar, transformar pessoas e apresentar os resultados específicos e determinados pelo ensino escolar.

Conforme a BNCC, o desenvolvimento de competências e habilidades relacionadas ao uso crítico e responsável das tecnologias digitais se destaca na competência geral 5:

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (BRASIL, 2018, p. 9).

Entretanto, essas competências vão de encontro com a possibilidade de utilizar *softwares* que ofereçam um serviço mais direto, como forma de auxiliar os sujeitos na construção dos conhecimentos e num enfoque mais instrucionista ou aqueles que recomendam a construção do conhecimento com uma abordagem construcionista. Então, é possível alterar o ensino de matemática entre essas duas formas de abordagens (instrucionista e construcionista), utilizando alguns recursos tecnológicos disponíveis na aplicação, especialmente, o *software* GeoGebra, que se apresenta um amplo suporte nesta pesquisa.

---

[4] Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Estado do Ceará. Disponível em http:// www.spaece.caed ufjf.net/.

[5] A Prova Brasil e o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (Saeb) são avaliações para diagnóstico, em larga escala, desenvolvidas pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep/MEC). Têm o objetivo de avaliar a qualidade do ensino oferecido pelo sistema educacional brasileiro a partir de testes padronizados e questionários socioeconômicos. Disponível em http://portal.mec.gov.br/prova-brasil.

Para tanto, o leitor encontra no decorrer do texto ainda, em notas de rodapé, um breve relato dos instrumentos e avaliações externas citados que contribuirão para entender o momento em que esses instrumentos surgiram e qual a sua importância atual.

1.1 Justificativa da Pesquisa e Objetivos

Diante do exposto e considerando a temática nas produções acadêmicas voltadas para esse contexto vindo de encontro aos conteúdos de geometria plana, são destacadas as dissertações do repositório do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), as pesquisas realizadas com seguinte tema "Olimpíadas de Matemática", tendo apenas trabalhos de 2013 até o ano de 2020.

Nessa interpretação, segue a conveniência da aplicação de novas práticas de ensino que sejam capazes de trabalhar, de forma mais fundamentada, o raciocínio matemático usado para a resolução de situações-problema e exercícios matemáticos, fortalecendo nos alunos a competência de mobilizar os conhecimentos (conceitos e procedimento), valores e atitudes para os diversos conteúdos em matemática.

Perante essa situação real, no sentido de colaborar com a preparação de olimpíadas internacionais de matemática, o autor complementa com essa produção, de modo que professores e alunos possam utilizar no ensino da geometria plana a respeito de POs intitulado de Situação Didática Olímpica (SDO), de Alves (2020), uma tendência da literatura recente, entretanto, fundamenta-se na Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau (2008) pesquisador pioneiro da Didática da Matemática e na Engenharia Didática (ED) de Michèle Artigue (1996) desenvolvida no Instituto de Investigação do Ensino de Matemática (IREM) ao final da década de 1960, na França, metodologia de pesquisa, como maneira de aprimorar o processo ensino e aprendizagem dessa disciplina e, provavelmente, como componente incentivador para todos aqueles que procuram melhorar seus conhecimentos visando à preparação para torneios de matemática no ensino médio e superior.

A problemática nesta pesquisa apresenta da seguinte maneira: como as Situações Didáticas Olímpicas com suporte do uso do software GeoGebra, podem ser apresentadas como uma proposta para aprendizagem de geometria plana no contexto da sala de aula, com questões da Olimpíada Internacional de Matemática?

Dessa forma, o presente trabalho tem como objetivo geral da referida pesquisa: analisar uma proposta de investigação usando Situações Didáticas Olímpicas, com o auxílio do *software* GeoGebra para o ensino de geometria plana nos pressupostos de olimpíadas internacionais de matemática, alinha a metodologia de pesquisa ED e as fases da TSD na formação de professores e preparação olímpica dos estudantes.

Para alcançar tal objetivo geral, os seguintes objetivos específicos foram traçados:

a) Analisar a Engenharia Didática clássica no objeto de estudo, na construção, na aplicação e nas análises das resoluções obtidas na pesquisa;
b) Estruturar Situações Didáticas Olímpicas para o ensino de geometria plana e aplicá-las em ambientes de aprendizagem, tendo como estruturação as etapas da Teoria das Situações Didáticas;
c) Apresentar a contribuição do *software* GeoGebra na estruturação dos Problemas Olímpicos aplicados aos estudantes do ensino médio;

De acordo com o que Tietze (1994, p. 44) afirma, as "declarações como alunos aprenderá a realizar provas matemáticas ou o aluno deverá adquirir qualificações na aplicação da matemática pode significar uma grande variedade de objetivos". Entende-se que um aluno desenvolve habilidades matemáticas na formação escolar, sendo que o professor tem o papel de encaminhar questões desafiadoras para resolver PO em sala de aula e, para isso, utiliza os mais variados conceitos matemáticos aprendidos ao longo de sua vivência.

Diante dessas inquietações trazidas no empenho de resoluções de questões olímpicas, o que foi aumentando e tornando-se impressionante, à medida que o estudante percebe que, quanto mais problemas resolvidos, maior será o seu conhecimento para elaboração de estratégias dos próximos problemas e, assim sendo, as suas chances de acertos aumentam. Para Tietze (1994, pág. 43):

> O argumento frequentemente usado para justificar a matemática na escola ", matemática treina o pensamento lógico ", não é apenas nebuloso em sua semântica, mas também com base em uma hipótese de transferência que não resiste a um exame mais detalhado. A ideia de começar com conceitos muito gerais (por exemplo, um conceito geral variável) facilitará o processo de aprendizagem, revela uma aprendizagem implícita teoria que carece de sanção científica. Essa teoria implícita da aprendizagem influenciou desenvolvimento curricular, especialmente em álgebra e aumentou a aprendizagem dificuldades neste assunto, o que é bastante difícil.

Embora a geometria plana faça parte do conteúdo estudado na educação básica brasileira, dificilmente o assunto de incentro e circuncentro é explicado no pré-universitário. Conforme Alves (2015, p. 1), os "[...] teoremas, ao longo do ensino médio, são citados para os alunos e não são demonstrados, por exemplo, as cevianas notáveis em triângulos que são apresentados e nem sequer é comentado sobre teorema de Ceva [...]". Em alguns casos, os professores precisam realizar revisões com os estudantes para se adentrar nesse assunto: aqueles que se preparam para às olimpíadas e competições matemáticas. Como a metodologia de pesquisa está estruturada pela ED, em suas duas primeiras etapas correspondem as análises preliminares e análise *a priori* seguindo das demais etapas posteriores intituladas em experimentação e análises a *posteriori* (validação).

Tratando-se das áreas matemáticas prescritas nas competições, a geometria é um assunto sempre presente na educação e pouco trabalhado em seus problemas difíceis de uma forma simples, sem a utilização de cálculos extensos, mas que pouco é citado em livros didáticos escolares. De acordo com Silva (2014), a atenção dispensada às demonstrações matemáticas geométricas ainda é pouco comentada nos livros didáticos da educação básica do Brasil, sendo a priorização no emprego de fórmulas a serem memorizadas. Verificando as várias olimpíadas internacionais de matemática, o autor verificou que o conteúdo de Incentro e Circuncentro tem sido, conveniente, bastante requerido, seja diretamente ou indiretamente pelos seus elaboradores, nas questões apresentadas.

A etapa experimental ocorreu com uma equipe de estudos olímpicos, contando com oito participantes, nomeados como P1 a P8 para proteger suas identidades, realizada em uma escola estadual na zona rural, localizada na região do Sertão Central do estado do Ceará. Além disso, esses participam também do Programa POTI como alunos treinadores de olimpíadas e nesse processo foram aplicadas SDOs na perspectiva da TSD, que teve como aporte o instrumento tecnológico, auxiliando durante as construções e resoluções, o *software* GeoGebra. Os dados coletados foram firmados em todos os participantes por ter 50% a 75% de participação nas aulas remotas.

Esse instrumento tecnológico, denominado GeoGebra, possibilitou aos estudantes uma melhor visualização, deixando a construção e utilização maleáveis, na perspectiva de um conhecimento que antes estagnado (Avaliações da IMO), como também nas observações de conceitos de geometria plana introduzidos (teorema proposto), “[...] outro aspecto que é pouco discutido na literatura diz respeito à elaboração e produção de problemas matemáticos, visando a indispensável promoção da pesquisa do aluno” (ALVES, 2019, p. 97).

O encontro ocorreu de forma remota pelo intermédio da plataforma de videoconferência *online*, selecionada devido à suspensão das aulas nas escolas e universidades em razão da pandemia mundial do Covid-19 e, de modo consequente, ser um dos formatos de ensino e aprendizagem escolhidos pela Secretária de Educação do Estado (SEDUC) para a escola. Os dados foram coletados por meio da função de *Print Screen* da tela do computador/notebook, registro de imagens por câmera de celular, áudios e desenhos alinhados aos cálculos dos sujeitos. A separação dos dados seguiu cada etapa da TSD, analisando os processos dos alunos e objetivando a validação pelo confronto das duas fases didáticas da ED.

Buscou-se, ao longo deste trabalho, apresentar todo o texto, enunciados e demonstrações de forma clara e de simples entendimento, evitando, às vezes, do preceito teórico, com fins de proporcionar uma simples clareza do tema para professores e estudantes da educação básica, elaborando assim um produto educacional de apoio didático para o ensino voltado à preparação das olimpíadas de matemática nacionais e internacionais. É importante ressaltar que as figuras aplicadas para auxiliar as demonstrações dos lemas, teoremas e deduções, bem como dos resultados das questões, foram desenvolvidas pelo autor com o auxílio da matemática dinâmica e do *software* GeoGebra[6].

Assim, o presente trabalho se divide em oito capítulos e se justifica na lógica de mostrar a importância do conteúdo Incentro e Circuncentro e suas aplicações na geometria plana, em exclusivo, na preparação de jovens estudantes para as novas olimpíadas de matemática, levando uma diferença desafiadora e motivadora para os docentes e discentes brasileiros, motivando à vontade pela matemática.

Neste primeiro capítulo, descreve-se uma introdução ao estudo destacando a justificativa e a problemática, mostrando uma abordagem acerca do ensino de geometria plana, especificamente em relação às olimpíadas de matemática e o conteúdo “Incentro e Circuncentro”. Na introdução, aparecem também as ideias de PO e SDO, que são utilizadas na pesquisa, e descreve-se a respeito do *software* GeoGebra, que foi utilizado na construção das SDOs. Além disso, são expostos alguns questionamentos para serem relatados no decorrer da pesquisa, bem como suas suposições. O objetivo geral e os específicos são elaborados e comentados brevemente acerca das metodologias de pesquisas utilizadas no ensino de matemática.

No segundo capítulo, é apresentado um breve histórico das Olimpíadas Internacionais de Matemática das quais o Brasil participa e as Olimpíadas de Matemática no Brasil, como a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), Olimpíada Brasileira de Matemática de Escolas Públicas (OBMEP) e a Canguru Brasil de Matemática, destacando também Olimpíada Cearense de Matemática (OCM). Nesse processo, passando os objetivos e colaborações no cenário do ensino e aprendizagem de matemática.

No terceiro capítulo, foram apresentados os processos metodológicos das situações didáticas e detalhadas as convicções da TSD e suas etapas (ação, formulação, validação e

---

[6] Criado por Markus Hohenwarter, o GeoGebra é um programa gratuito multiplataforma de matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática do nível básico ao universitário. O programa reúne recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente (BORTOLOSSI; RESENDE; PESCO, 2015).

institucionalização), SDO conectados a TSD e os PO, histórico do *software* GeoGebra, programa fundamental na transposição didática, e seu vínculo com a didática matemática. Concluindo o capítulo, será exposta a metodologia de pesquisa que é a ED e suas fases (análises prévias, concepção e análise a *priori*, experimentação, análise a *posteriori* e validação).

No quarto capítulo, acontece a primeira etapa da ED, análise prévia, na qual é realizada uma análise de livros didáticos para olimpíadas de matemática, como também das dissertações no repositório do PROFMAT.

No quinto capítulo, é realizada a segunda etapa, concepção e análise a *priori*, a qual disponibiliza a identificação das variáveis didáticas, assim como na estrutura desta dissertação, a descrição e soluções criadas pelo autor para três SDO selecionadas da IMO sobre Incentro e Circuncentro, requerido em olimpíadas internacionais, nas quais a participação de estudantes foram bastante gratificantes, como maneira de aplicar o argumento desenvolvido na fundamentação teórica da TSD.

No sexto capítulo, apresentou-se a etapa de Experimentação, na qual se descrevem o *lócus* da pesquisa, os participantes olímpicos e os processos utilizados na coleta de dados.

No capítulo sétimo, são descritas a Análise *Posteriori* e Validação (interna) em confronto com a Análise a *priori*, com a finalidade de atingir os objetivos e possibilidades elencados neste trabalho, além disso, foi verificada, a partir dos alunos a oportunibilidade das SDO resolvidas por eles e sua observação/análise quanto ao conhecimento adquirido.

No oitavo capitulo, há as considerações finais da pesquisa, enfatizando seus principais pontos, a bibliografia (referências) consultada para a sua realização e sete apêndices com as atividades desenvolvidas, o *link* e *QR Code* das atividades de pesquisa, o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), respostas do questionário aplicado aos participantes, dissertações do repositório do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) sobre o assunto “olimpíadas” e um manual de comandos básicos com algumas situações-problema encontrados na pesquisa, que poderão auxiliar os professores e alunos em relação ao tema.

Por fim, continuando esse roteiro, apresenta-se no capítulo seguinte um produto educacional, composto por um *e-book*, que contém situações didáticas envolvendo o tema geometria com o auxílio do aplicativo do *Suíte Calculadora GeoGebra*, e um site com todas as SDO da dissertação alinhadas aos seus respectivos *QR Code* como complemento do produto educacional, fruto desta pesquisa.

A seguir, será abordado o contexto da pesquisa, o qual são descritas as olimpíadas nacionais e internacionais em que o Brasil participa com suas equipes olímpicas de estudantes.

2 DESCRIÇÃO DE VÁRIAS COMPETIÇÕES DE MATEMÁTICA

A palavra “olimpíada” deriva da antiga tradição grega dos Jogos Olímpicos. Aproximadamente, em 2.500 a.C. acontecia um torneio esportivo na cidade de Olímpia, que tinha como objetivo principal, a homenagem aos deuses, em especial Zeus. Contudo, o termo “olimpíada” começou a ser utilizado no ano de 776 a.C., depois de um compromisso selado entre governantes importantes das cidades-estados gregas para a oficialização da existência dos jogos olímpicos e registro do nome dos vencedores. Com destaque, tem-se que as “olimpíadas para a Grécia era tamanha que após o acordo selado entre os dirigentes das cidades-estados, durante a realização dos jogos era decretada uma trégua nas guerras e até mesmo a Guerra do Peloponeso foi paralisada para a realização dos jogos” (GUZMÁN, 1992, p. 19).

Por volta do século XVI, algumas pesquisas indicavam que existia desafios por meio de torneios de conhecimento. De acordo com Maciel (2009, p. 2), havia “os desafios nos quais importantes matemáticos empenhavam sua reputação, razoáveis quantias em dinheiro e, até mesmo, suas cátedras em importantes universidades italianas”. Eventualmente essas competições aconteciam na forma de treinos, em que o vencedor era aquele que resolvesse o maior número de questões-problema.

As primeiras competições olímpicas foram realizadas na cidade de Bucareste, na Romênia. No ano de 1885, houve um desses torneios ao qual participaram setenta estudantes de uma escola primária da região. No ano de 1894, na Hungria, aconteceu a primeira Olimpíada de Matemática para estudantes do último ano da escola secundária[7].

Essa forma de torneio se ampliou pelo Leste Europeu e pela União Soviética. Esse processo resultou na estruturação da “primeira Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) em 1959, na Romênia, destinada aos alunos correspondentes ao Ensino Médio brasileiro” (ALVES, 2010, p. 44). Desde aquela época, “a Olimpíada é organizada anualmente, com exceção do ano de 1980, no qual a Olimpíada foi cancelada devido a conflitos internos na Mongólia”. (TURNER, 1985, p. 332).

2.1 Olimpíada Internacional de Matemática

Atualmente, são mais de cem países dos cinco continentes junto ao Conselho da Olimpíada Internacional de Matemática garantindo que a competição ocorra a cada ano e que

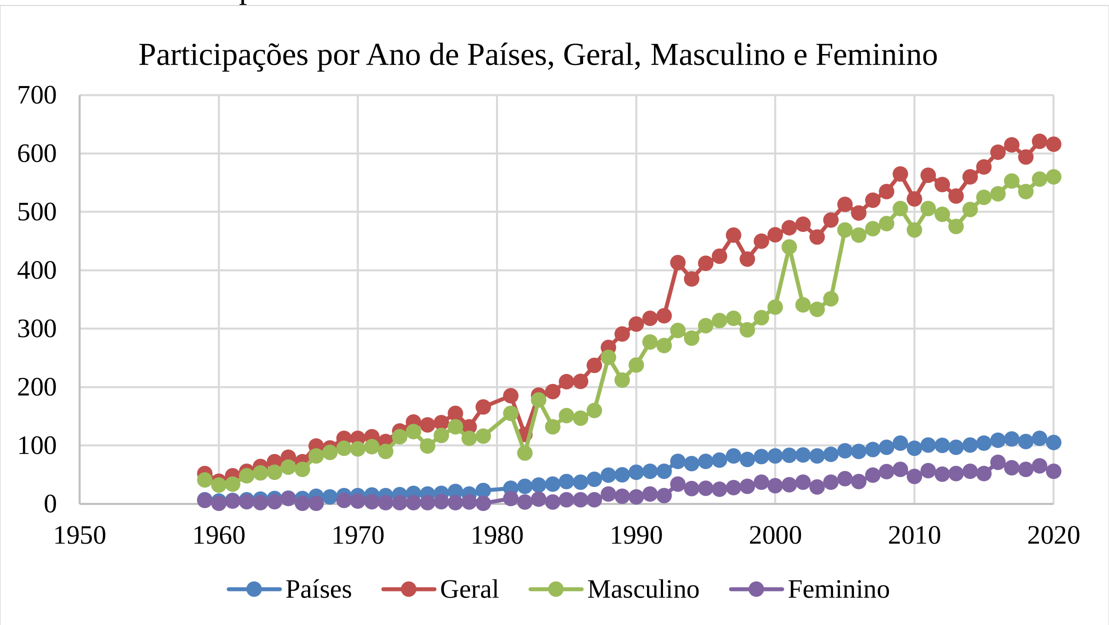
[7] A escola secundária da Hungria corresponde ao Ensino Médio brasileiro.

cada país anfitrião observe os regulamentos e tradições da IMO. A Olimpíada Internacional de Matemática tem como objetivos descobrir, estimular e desafiar os discentes habilidosos na disciplina em questão. Dessa maneira, o objetivo é o de assegurar os laços de amizade internacional entre matemáticos de todos os países participantes, gerar oportunidades para formação de programas de intercâmbio e divulgar universalmente a matemática. De acordo com Kenderov *et al.* (2011, p. 58), conforme citado por Alves (2021, p. 119):

> O estilo das Olimpíadas Internacionais de Matemática (OIM) está sujeito e restrito a determinadas regras formais, que regulam cada aspecto da competição: participação, seleção minuciosa de problemas, acesso ao conteúdo das soluções, distribuição de medalhas e muitos outros detalhes essenciais.

Na visualização do Gráfico 1, é possível ver o progresso por ano do número de países participantes no geral e dos competidores masculinos e femininos.

Gráfico 1 - Proporção dos países participantes anual e seus representantes masculinos e femininos da Olimpíada Internacional de Matemática. Dados retirados do *site*[8] da IMO



Fonte: Informações extraída da IMO (2020).

Os representantes da delegação de um país são constituídos por seis competidores com menos de vinte anos e que não tenham feito curso no ensino superior, um docente líder e um docente vice-líder. O docente vice-líder cuida dos estudantes participantes e substitui o líder caso seja necessário em algum eventual momento da olimpíada.

[8] Informações disponíveis em <http://www.imoofficial.org/organizers.aspx>. Acesso em: 18 nov. 2020.

Cada delegação, menos o país-sede da olimpíada, pode enviar questões para formar a base de dados inicial (LongList, LL) da IMO. Somente o docente líder pode enviar propostas seguindo um protocolo seguro. Os mesmos problemas não podem ter sido usados em outras competições anteriores, nem publicados e devem abranger vários tópicos de matemática pré-universitária. Nos últimos anos, os problemas aparecem classificados em quatro áreas: geometria, teoria dos números, álgebra e combinatória.

O Comitê de Seleção é criado pelo país-sede da competição para formar uma lista menor (ShortList, SL) dos problemas da LL. Os docentes líderes recebem, no primeiro dia, a SL da reunião de docentes líderes. Assim, fica concluído que, até a próxima IMO, a SL será mantida confidencial. A competição acontece em dois dias diferentes, três questões são cobradas a cada dia com quatro horas e meia de duração para realizar. Cada questão vale 7 pontos e o grau de dificuldade segue a ordem crescente P1 < P4 < P2 < P5 < P3 < P6 de notas atribuídas. Como os professores líderes conhecem os problemas da prova com antecedência, eles são mantidos separados dos competidores até o término do segundo dia de provas.

2.2 Olimpíada de Maio

É uma competição organizada pela Federação Ibero-americana de Competições de Matemática, sua primeira edição aconteceu no ano de 1995, sendo realizada para jovens alunos, disputada em dois níveis (Nível 1: alunos com, no máximo, 13 anos até 31/dez do ano da prova e Nível 2: alunos com, no máximo, 15 anos até 31/dez do ano da prova), por países da América Latina, Espanha e Portugal. No Brasil, a Olimpíada de Maio é aplicada apenas àqueles alunos que tenham sido premiados na OBM com medalhas de ouro, prata, bronze e menções honrosas ou tenham sido selecionados pelo coordenador regional. A competição também é implementada por outros países da América Latina, Espanha e Portugal. As provas dos alunos selecionados são enviadas para a comissão organizadora na Argentina, onde é dada a classificação final por país, descrição retirada do *site*[9] da OBM (2019).

2.3 Olimpíada Ibero-americana de Matemática

É uma competição internacional da qual participam os países da América Latina, Espanha e Portugal, representados por equipes de até quatro estudantes que não tenham feito

[9] Informações disponíveis em <https://www.obm.org.br/olimpiada-de-maio/>. Acesso em: 10 dez. 2019.

18 anos de idade em 31 de dezembro do ano imediatamente anterior à celebração da Olimpíada e que não tenham participado anteriormente em duas Olimpíada Ibero-americana de Matemática (OIM). De acordo com a OBM (2019), os objetivos principais do evento “são de fortalecer e estimular o estudo de Matemática, contribuir para o desenvolvimento científico da comunidade ibero-americana, detectar jovens talentos nesta ciência e incentivar a troca de experiências entre os países participantes”.

Desde 1985, o Brasil tem participado dessa olimpíada, com os melhores resultados entre os países participantes, tendo recebido cinquenta medalhas de ouro, trinta e seis de prata e onze de bronze. Em 1994, o país foi sede da OIM e, na Bolívia, no mês de outubro de 2012, aconteceu sua 27ª edição, na qual os participantes brasileiros tiveram um resultado importante, conseguindo o primeiro lugar geral.

2.4 Olimpíada de Matemática do Cone Sul

A Olimpíada de Matemática do Cone Sul é uma competição internacional da qual participam os países da porção meridional da América do Sul, representados por equipes de quatro estudantes que não tenham feito 16 anos de idade em 31 de dezembro do ano imediatamente anterior à celebração da Olimpíada, descrição retirada do *site*[10] da OBM (2019). Essa olimpíada tem como propósito, a oportunidade para os jovens participantes demonstrarem seus conhecimentos em matemática, além de proporcionar a troca de ideias e fortalecer os contatos interculturais entre estudantes do ensino básico de diversos países latino-americanos.

A realização das provas acontece individualmente, em dois dias consecutivos. Os integrantes de cada país têm quatro horas e meia, em cada dia de prova, para responder três problemas de matemática, propostos pelos países participantes e selecionados por um júri internacional. As questões problemas englobam os seguintes tópicos, como álgebra, teoria dos números, geometria e combinatória. Para os participantes, a entrega de medalhas de ouro, prata, bronze e menções honrosas é feita conforme percentuais mínimos de acertos.

O processo seletivo no Brasil tem a participação de todos os alunos medalhistas (Níveis 2 e 3) e menções honrosas (Nível 3) da OBM do ano imediatamente anterior. Porém, cabem recursos à comissão organizadora para participar da seletiva, seguindo as normas do torneio. Assim, no final do processo de correção dos testes de seleção, o conjunto formado pelos 15 primeiros alunos do processo de seleção da Cone Sul poderá pedir revisão de suas notas.

---

[10] Informações disponíveis em <https://www.obm.org.br/olimpiada-de-matematica-do-cone-sul/>. Acesso em: 10 dez. 2019.

2.5 Olimpíada Ibero-americana de Matemática Universitária

O participante não deve possuir título universitário a nível de graduação ou equivalente e deve estar matriculado em uma universidade como estudante de graduação. É recomendado que os alunos que desejam realizar a prova tenham participado previamente da OBM-Nível Universitário, dados extraídos do *site*[11] da OBM (2019).

2.6 Competição Internacional de Matemática para Universitários

A *International Mathematics Competition for University Students* (IMC), conhecida como Competição Internacional de Matemática para Estudantes Universitários, é um torneio destinado a estudantes de graduação e que conta atualmente com a participação de mais de 80 instituições/universidades, entre as quais pode-se citar as principais instituições de ensino do mundo como, por exemplo, Cambridge, École Polytechnique, Instituto Max Planck, Instituto *Technion*, MIT, Oxford, Universidade Complutense de Madri e Universidade de Moscou.

No Brasil, a comitiva da OBM seleciona os estudantes universitários que tenham sido premiados na Olimpíada Brasileira de Matemática com medalhas de ouro, prata ou bronze. Cabe a cada instituição de ensino a decisão de patrocinar esses estudantes ou inclusive selecionar outros estudantes para participar da competição como seus representantes. Neste último caso, a instituição deverá providenciar também um líder, que será responsável pela participação e correção das provas desses alunos durante o evento, descrição extraída do *site*[12] da OBM (2019).

2.7 Mestres Romenos de Matemática

A Olimpíada *Romanian Master in Mathematics* (RMM) realizou sua primeira edição em 2008 e tem como objetivos principais desafiar e incentivar alunos e escolas com estudantes de capacidade metal significativa acima da média em matemática, além de promover relações de amizade e trocas de experiências interculturais entre alunos e professores. Em 2010, o Brasil participou pela primeira vez da RMM, olimpíada que convoca apenas os melhores

[11] Informações disponíveis em <https://www.obm.org.br/olimpiada-ibero-americana-de-matematica-universitaria/>. Acesso em: 10 dez. 2019.
[12] Informações disponíveis em <https://www.obm.org.br/international-mathematical-competition-for-university-students/>. Acesso em: 10 dez. 2019.

países do mundo em competições internacionais do gênero. A *Romanian Master of Mathematics* (RMM) é organizada desde 2007 pela Escola Nacional de Informática “Tudor Vianu”, em colaboração com a Sociedade Cientíca Romena de Matemática e o Ministério de Educação Investigação e Juventude, dados extraídos do *site*[13] da OBM (2019).

A participação de cada equipe dos países convocados é composta por quatro estudantes (que não se matricularam formalmente em uma universidade ou em outra instituição pós-secundária equivalente de ensino). No Brasil, a seleção dos participantes do time brasileiro olímpico é realizada na base dos resultados na OBM, ou seja, os quatro mais bem colocados na Olimpíada Brasileira de Matemática representarão o Brasil na competição da RMM.

Os participantes seguem para Bucareste - Romênia, local em quem acontece a prova e, assim como na IMO, tem duração de quatro horas e meia e consiste em três questões-problema. Existe dois tipos de premiações: individuais e de equipe. Serão premiadas as três melhores equipes que tiverem maiores somas de pontuação dos integrantes e serão distribuídas medalhas de ouro, prata e bronze, individualmente, para as melhores pontuações individuais na razão 1:2:3.

2.8 Competição Ibero-Americana Interuniversitária de Matemática

A Competição Ibero-americana Interuniversitária de Matemática (CIIM) tem como objetivo incentivar o estudo da matemática e a excelência acadêmica na comunidade universitária ibero-americana, proporcionando o desenvolvimento das capacidades científicas entre os estudantes através da motivação e da competitividade internacional, contribuindo assim para o crescimento acadêmico, social, cultural e econômico dos países participantes.

Esse concurso reúne os alunos de cursos de graduação universitária que lidem com conceitos básicos da teoria dos números, geometria, análise combinatória, cálculo diferencial e integral e álgebra, agrupados em um único nível.

Todos os países ibero-americanos podem participar enviando uma equipe por universidade ou por país. As equipes terão um máximo de quatro estudantes e um líder. Os participantes não devem possuir título universitário a nível de graduação (ou equivalente) e

[13] Informações disponíveis em <https://www.obm.org.br/romanian-master-of-mathematics/>. Acesso em: 10 dez. 2019.

devem estar matriculados em uma universidade como estudante de graduação, descrição extraída do *site*[14] da OBM (2019).

Os organizadores e proponentes desse projeto relacionado à matemática, são professores doutores do Instituto Militar de Engenharia (IME[15], 2020) que tenham participado das Competições Iberoamericana Interuniversitária de Matemática – CIIM - desde a sua criação e também da *International Mathematics Competition for University Students* - IMC, que se realiza anualmente na Bulgária. São também representantes do IME nas suas Olimpíadas Internas de Matemática (OMIME) e das Olimpíadas Matemática Universitária (OBMU) pelo Instituto Militar de Engenharia (IME).

2.9 Canguru Matemático - Canguru sem Fronteiras

No início da década de 1980, Peter O'Holloran, professor de matemática em Sydney, na Austrália, criou um novo tipo de Concurso Nacional em escolas australianas: um questionário de escolha múltipla, que fez um enorme sucesso naquele país. Posteriormente, em 1991, dois professores franceses (André Deledicq e Jean Pierre Boudine) decidiram começar a competição na França, com o nome denominado Canguru ("*Kangourou*") para homenagear os seus amigos australianos. Na sua primeira edição, participaram 120.000 estudantes, chamando a atenção dos países vizinhos.

Em junho de 1993, o Conselho de Administração do Canguru ("*Kangourou*") Francês convidou para um encontro europeu em Paris e sete países decidiram adotar o mesmo concurso. No ano seguinte, junho de 1994, em Estrasburgo, no Conselho Europeu, a Assembleia Geral dos representantes de dez países europeus (Espanha, França, Grã-Bretanha, Hungria, Itália, Moldávia, Polónia, Rússia e Eslovénia) determinaram a criação do "Canguru Matemático sem Fronteiras". Atualmente, a associação da competição conta com representantes de 86 países e mais de seis milhões de participantes em todo o mundo.

A Associação Canguru sem Fronteiras é uma associação de caráter internacional que tem em seus objetivos:

> (i) estimular o gosto e o estudo pela Matemática; (ii) atrair os alunos que têm receio da disciplina de Matemática, permitindo que estes descubram o lado lúdico da

[14] Informações disponíveis em <https://www.obm.org.br/competencia-ibero-americana-interuniversitaria-de-matematicas/>. Acesso em: 10 dez. 2019.

[15] É uma instituição de ensino superior pública pertencente ao Exército Brasileiro que oferece cursos de graduação e pós-graduação em Engenharia, sendo considerado um centro de excelência e referência nacional e internacional no ensino da Engenharia.

> disciplina; (iii) tentar que os alunos se divirtam a resolver questões matemáticas e percebam que conseguir resolver os problemas propostos é uma conquista pessoal muito recompensadora; (iv) aumentar todos os anos o número de participantes no concurso a nível nacional e tentar atingir as cotas de participação de outros países europeus. (CANGURU SEM FRONTEIRAS, 2019).

O concurso consiste em uma única prova de questões-problema, não existindo assim, nenhuma seleção prévia para participação ou prova final.

Quadro 1 – Categorização da CANGURU SEM FRONTEIRAS

Categoria	**Nível Escolar**	**Pontuação Máxima**
Mini-Escolar-I	Alunos do 2º ano de escolaridade	75 pontos
Mini-Escolar-II	Alunos do 3º ano de escolaridade	120 pontos
Mini-Escolar-III	Alunos do 4º ano de escolaridade	150 pontos
Escolar	Alunos do 5º e 6º anos de escolaridade	150 pontos
Benjamim	Alunos do 7º e 8º anos de escolaridade	150 pontos
Cadete	Alunos do 9º ano de escolaridade	150 pontos
Júnior	Alunos do 10º e 11º anos de escolaridade	150 pontos
Estudante	Alunos do 12º ano de escolaridade	150 pontos

Fonte: Adaptado de CANGURU SEM FRONTEIRAS (2019).

Os estudantes começam a competição com uma pontuação de 15 pontos na categoria Mini-Escolar nível I, com 24 pontos nas categorias Mini-Escolar nível II, Mini-Escolar nível III e Escolar e com 30 pontos nas restantes categorias Benjamim, Cadete, Júnior e Estudante). Por cada resposta errada, são descontados 1/4 da pontuação da questão. A categoria Mini-Escolar nível I é constituída por cinco questões de três pontos, cinco questões de quatro pontos e cinco questões de cinco pontos, a Mini-Escolar nível II, Mini-Escolar nível III e Escolar têm oito questões de três pontos, oito questões de quatro pontos e oito questões de cinco pontos e as demais restantes categorias têm dez questões de três pontos, dez questões de quatro pontos e dez questões de cinco pontos.

2.10 Olimpíada Matemática Ásia-Pacífico

A *Asian Pacific Mathematics Olympiad* (APMO) é realizada anualmente desde 1989 e tem como objetivos principais descobrir, encorajar e desafiar talentos matemáticos, além de criar benefícios para troca de experiências e cooperação mútua entre os participantes de todas as regiões. Participam da competição os países da região do pacífico asiático e os Estados Unidos da América (EUA).

A avaliação é realizada todos os anos na 2ª segunda-feira de março para os países participantes nas Américas do Norte e do Sul, e 2ª terça-feira de março para os países participantes no Pacífico Ocidental e na Ásia; e consiste em cinco problemas para um total de quatro horas de duração. São disponibilizadas medalhas de ouro, prata e bronze e menções honrosas para os mais bem colocados do torneio.

No Brasil, a avaliação da APMO também é utilizada como o segundo teste de seleção para o time que representa o país na Olimpíada Internacional de Matemática.

2.11 Olimpíada de Matemática da Comunidade dos Países de Língua Portuguesa

Iniciado em julho de 2011, em Coimbra (Portugal), a Olimpíada de Matemática da Comunidade dos Países de Língua Portuguesa (OMCPLP) tem como objetivo geral:

> A melhoria da qualidade do ensino e a descoberta de talentos em matemática, fundamental para o desenvolvimento científico e tecnológico; fomentar o estudo da Matemática nos países lusófonos; a criação de uma oportunidade para a troca de experiências educacionais nacionais; a união e cooperação entre os países lusófonos para a criação de instrumentos que permitam a competição de alunos numa olimpíada internacional para os países de língua portuguesa. (OMCPLP, 2019).

São convidados para participar da olimpíada oito dos nove membros da CPLP: Angola, Brasil, Cabo Verde, Guiné-Bissau, Moçambique, Portugal, São Tomé e Príncipe e Timor-Leste.

O processo seletivo da competição para representantes do Brasil são os alunos medalhistas (Níveis 2 e 3) e menções honrosas (Nível 3) da OBM do ano imediatamente anterior. Porém, cabe recurso durante a seleção, no qual a comissão organizadora definirá a participação da seleção.

As avaliações são realizadas, individualmente, em dois dias consecutivos. Os participantes do evento têm quatro horas e meia, em cada dia de prova, para resolver três problemas de matemática, propostos pelos países participantes e selecionados por um júri internacional. As questões abrangem os conteúdos de álgebra, teoria dos números, geometria e combinatória. As premiações serão entregues medalhas de ouro, prata, bronze e menções honrosas, distribuídas segundo percentuais mínimos de acerto das avaliações.

Atualmente no Brasil, só é permitida a seleção de alunos que não tenham idade maior que quinze anos, no ano da seletiva da OMCPLP. Os testes de seleção são os mesmos da Olimpíada Cone Sul. (OMCPLP, 2019).

2.12 Concurso Universitário de Matemática Galois Noether

Sua criação foi elaborada em homenagem a dois grandes matemáticos históricos: a matemática alemã Emmy Noether e o matemático francês Évariste Galois. O Concurso Universitário de Matemática Galois-Noether é um concurso anual para estudantes universitários, descrição retirada do *site*[16] da OBM (2019). Sendo os seus objetivos difundir a importância da resolução de problemas na matemática e áreas afins, detectar jovens talentosos e ajudá-los a desenvolver suas carreiras na matemática e criar uma comunidade incumbida de resolver problemas matemáticos. Sua organização é executada pela Universidade Nacional Autónoma de México (UNAM), e é uma das Olimpíadas Internacionais de Ciências.

Sua primeira competição foi disputada pela primeira vez em 2010, e desde então, se realiza anualmente com aproximadamente 10 países participantes na competição.

2.13 Olimpíada Iraniana de Geometria

Criada em 2014, a Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO) não permitia, inicialmente, a participação de estudantes de outros países, porém, em 2015, a competição abriu a possibilidade de participação para os competidores de todo o mundo. O Brasil participa do evento desde 2016. A IGO tem como objetivos proporcionar aos professores de geometria oportunidades de trocar seus conhecimentos e experiências para melhorar e enriquecer o ensino médio; popularizar o pensamento geométrico entre pessoas diferentes, incluindo estudantes, professores e acadêmicos e proporcionar oportunidades para que os amantes da geometria ampliem a comunicação em seu país de origem e ao redor do mundo.

Descrição retirada do *site*[17] da Olimpíada Brasileira de Matemática, no qual são divididos os quatro níveis de participação da Olimpíada Iraniana:

> **Nível Elementar:** Para estudantes do 7º e 8º anos do Ensino Fundamental; **Nível Intermediário:** Para estudantes do 9º e 1º anos do Ensino Fundamental e Médio;

---

[16] Informações disponíveis em <https://www.obm.org.br/concurso-galois-noether/>. Acesso em: 10 dez. 2019.
[17] Informações disponíveis em <https://www.obm.org.br/olimpiada-iraniana-de-geometria/>. Acesso em: 10 dez. 2019.

> **Nível Avançado:** Para estudantes do 2º e 3º anos do Ensino Médio; **Nível Livre:** sem limite de idade. (OBM, 2019).

A realização da prova tem quatro níveis distintos: elementar (7º e 8º anos do ensino fundamental II); intermediário (9º ano do ensino fundamental II e 1º ano do ensino médio); avançado (2º e 3º anos do ensino médio) e livre (sem limite de idade e ano escolar). São elaboradas cinco situações-problema de geometria, cada questão valendo no máximo oito pontos, para um limite de quatro horas e meia de duração.

2.14 Olimpíada Europeia de Matemática para Garotas

A European Girls' Mathematical Olympiad (EGMO) é uma competição internacional de Matemática similar à Olimpíada Internacional de Matemática (IMO): dois dias de prova, cada um com três questões e um limite de quatro horas e meia de duração. Sua primeira edição aconteceu em 2012, no Reino Unido, e teve como participantes da competição países europeus e outros continentes (Austrália, Índia e Japão), sendo que cada país envia equipes constituídas por quatro estudantes alunas em idade escolar, um líder e um vice-líder. No ano de 2017, o Brasil levou sua primeira equipe de estudantes, estando entre os 40 países convidados neste ano de olimpíada.

2.15 Olimpíadas Nacionais de Matemática

As Olimpíadas Nacionais de Matemática têm como objetivo de eleger alunos de seus respectivos países para os torneios internacionais de matemática. As competições de matemática têm a participação de vários continentes da Europa, a Ásia, a África, a América, a Antártida e a Oceania, e destacam-se como os torneios principais de matemática do Brasil a OBM, OBMEP e a Canguru de Matemática Brasil.

2.15.1 Olimpíada Brasileira de Matemática

Segundo Alves (2010, p. 44), "a Olimpíada de Matemática do Estado de São Paulo (OMESP), primeira Olimpíada de Matemática nacional, surgiu com o Movimento da Matemática Moderna, no estado de São Paulo, em 1967". Diante disso, Burigo (1989, p. 159) relata que a olimpíada foi realizada com a "divulgação da Matemática Moderna em São Paulo realizada nesse período, com o sentido da valorização do ensino de Matemática e do trabalho de renovação desenvolvido em várias escolas, organizadas pelo GEEM (Grupo de Estudo do Ensino da Matemática) ". São disputadas desde 1894, quando foram organizadas competições na Hungria. Com o passar dos anos, competições similares foram se espalhando pelo Leste Europeu, culminando, em 1959, com a organização da 1ª Olimpíada Internacional de Matemática, na Romênia. A Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) organizou em 1979 a 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM). Desde a sua primeira competição, a OBM vem sofrendo mudanças em seu formato (veja abaixo os quadros ilustrativo), porém mantendo a sua ideia central de "estimular o estudo da Matemática pelos alunos, de desenvolver e aperfeiçoar a capacitação dos professores, de influenciar na melhoria do ensino, além de descobrir jovens talentos" (ALVES, 2010, p. 38). Observe as alterações que aconteceram até a última competição serão descritas a seguir, segundo dados fornecidos pelo próprio *site*[18] da OBM (2019), conforme Quadro 2:

Quadro 2 – Categorização anteriores das fases e níveis da OBM

Ano	**Nível e Modalidade**
1991	Divisão em dois níveis: Júnior (para alunos até 15 anos), Sênior (para alunos cursando o ensino médio)
1992	Ocorre duas fases (a primeira com 25 questões objetivas e a segunda, aplicado em dois dias, com 3 questões subjetivas em cada dia). Nesse mesmo ano, o nível Júnior passou a ser aplicável para alunos que estivessem no ensino fundamental
1993	Nível Júnior volta a ser realizado em um dia, contendo 5 problemas
1995	O nível Júnior volta a ser aplicável a estudantes de até 15 anos.
1998	OBM muda sistemática de provas, objetivando aperfeiçoamento dos professores, o que consequentemente implicaria na melhoria do ensino, assim criou três níveis e três fases
1999	Provas da fase final do nível II passam a ser realizadas em dois dias
2001	Criado o nível universitário, com duas fases
2017	A OBM se integra à OBMEP realizando apenas a fase única para os níveis 1, 2 e 3. Mantendo o nível universitário realizado em duas fases

Fonte: Adaptado da OBM (2019).

Atualmente fica assim, como mostrado no Quadro 3:

[18] Informações disponíveis em < http://www.obm.org.br/quem-somos/historico/>. Acesso em: 10 dez. 2019.

Quadro 3 – Categorização das fases e níveis da OBM

Níveis	Modalidade de participantes	Número de fases
1	Alunos que estejam matriculados no 6º ou 7º ano do ensino fundamental.	Única da OBM
2	Alunos matriculados no 8º ou 9º ano do ensino fundamental.	Única da OBM
3	Alunos matriculados em qualquer série do ensino médio.	Única da OBM
Universitário	Estudantes universitários em nível de graduação, podendo ser estudantes de qualquer curso e qualquer período, ou aqueles que concluíram o ensino médio há menos de um ano e não tenham ingressado em curso de nível superior até a data de realização da prova da Primeira Fase da OBM.	Duas da OBM

Fonte: Adaptado da OBM (2019).

De acordo com as informações do regulamento da OBM (2019), a estruturação da prova segue as descrições feitas a seguir ilustrado no Quadro 4:

Quadro 4 – Estruturação da prova da OBM

Níveis	Processo de avaliação
Nível 1	Prova discursiva composta de 5 problemas, com duração de 4 horas e 30 minutos, e realizada em local determinado pelo responsável pela aplicação das provas da OBM.
Nível 2	Prova discursiva, realizada em dois dias consecutivos, em local designado pelo responsável pela aplicação das provas, com 3 problemas em cada dia e duração de 4 horas e 30 minutos por dia.
Nível 3	
Nível Universitário Primeira Fase	Prova objetiva com perguntas de múltipla escolha. A duração da prova será de 3 horas, aplicada em local a ser determinado pelo Coordenador Universitário.

Nível Universitário Segunda Fase	Prova discursiva realizada em dois dias consecutivos, composta de 3 questões em cada dia e com duração de 4 horas e 30 minutos por dia a ser realizada em local designado pelo Coordenador Universitário da OBM

Fonte: Adaptado da OBM (2019).

Os alunos universitários ganhadores de medalha de ouro, prata ou bronze na OBM do ano relativo à competição se classificam para a Segunda Fase mesmo que não participem da Primeira Fase em ano posterior ou que não atinjam a nota de corte da Primeira Fase.

Neste próximo tópico, faz-se uma descrição de uma das maiores Olimpíadas de Matemática reconhecidas internacionalmente pelo número de participantes, que, embora a olimpíada seja de caráter nacional, trata-se da OBMEP.

2.15.2 Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) é um projeto nacional dirigido às escolas públicas e privadas brasileiras, realizado pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), e promovida com recursos do Ministério da Educação e do Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações (MCTIC).

Criada em 2005 para estimular o estudo da matemática e identificar talentos na área. De acordo com o regulamento citado no *site*[19] da OBMEP (2020), os objetivos principais são:

> Estimular e promover o estudo da Matemática; contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica, possibilitando que um maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade; identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades, nas áreas científicas e tecnológicas; incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional; contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas; promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento. (OBMEP, 2020).

O público-alvo da OBMEP é composto de alunos do 6º ano do ensino fundamental até último ano do ensino médio. Em 2019, mais de 18 milhões de alunos participaram da olimpíada. Apresenta-se a seguir alguns programas desenvolvidos ao longo desses anos e a descrição da OBMEP. De forma geral, o reforço da OBMEP nível A é voltado para alunos do 4º e 5º anos do ensino fundamental das escolas públicas, no qual, a sua 1ª edição ocorreu no

[19] Informações obtidas em < http://www.obmep.org.br/regulamento.htm>. Acesso em: 20 jun. 2020.

ano de 2018 e esteve prevista para ocorrer no 2º semestre de 2020, no mesmo formato do ano anterior.

É válido citar os programas de preparação olímpica dos quais os medalhistas podem participar e, por fim, uma breve descrição dos sítios eletrônicos de materiais para estudo e preparação da OBMEP.

Nesse sentido, existem dois programas de Iniciação Científica vinculados à Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, o Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC), destinado aos estudantes medalhistas e menções honrosas da OBMEP, no qual as atividades acontecem por meio de uma rede nacional de professores em polos distribuídos em diferentes cidades do país. O principal objetivo é despertar nos alunos a vocação científica do estudante pela Matemática e pela ciência em geral no Brasil.

Em seguida, há outro programa da OBMEP, o Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME), direcionado aos estudantes universitários que se destacaram nas Olimpíadas de Matemática (medalhistas da OBMEP ou da OBM) a oportunidade de realizar estudos avançados em matemática simultaneamente com sua graduação. Os participantes são estudantes de graduação que recebem as bolsas de iniciação científica do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e com a parceria da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), que oferece bolsas aos estudantes de pós-graduação.

Em decorrência das preparações dos programas anteriores, no ano de 2013, foram criados e divulgados diversos portais, com ambientes interativos nos quais é possível pesquisar, desenvolver e criar atividades matemáticas de forma divertida e ampla através de atividades como resolução de problemas, jogos, gincanas regionais e nacionais, discussão de filmes, além de atividades e filmagem de geometria dinâmica.

A partir disso, inicialmente, fala-se do Portal Clubes de Matemática que conta com a participação de alunos da OBMEP, alunos de escolas privadas do ensino fundamental II e ensino médio para organização de um Clube Olímpico de Matemática (COM). Também participam estudantes de ensino superior, assim como professores, na orientação de um COM.

Ainda em 2013, realizaram divulgação dos POTI, programa destinado aos interessados em se preparar para as provas da OBMEP e da OBM, que estejam matriculados no 8º ou no 9º ano do ensino fundamental ou em qualquer uma das séries do ensino médio. Hoje já existem POTI nas regiões do Brasil (Norte, Nordeste, Centro-Oeste, Sudeste e Sul). Nesses polos olímpicos, são ofertados, ao longo de todo ano, cursos gratuitos e presenciais de matemática abrangendo os conteúdos de álgebra, combinatória, geometria plana e teoria dos números voltados para estudantes interessados em participar da OBM e OBMEP e que estejam matriculados no ensino fundamental II (8º ou 9º ano) para competições de nível II e em qualquer uma das séries do ensino médio na competição de nível III.

No Portal do Saber, pode-se encontrar diversos materiais relacionados à grade curricular do 6º ano do ensino fundamental II ao 3º ano do ensino médio, além de outros tópicos adicionais que não costumam ser abordados no ensino fundamental ou médio. Assim, busca-se complementar o aprendizado da matemática e da física, disponibilizando videoaulas, exercícios resolvidos, caderno de exercícios, material teórico e aplicativos iterativos.

Ofertado em 2014, o Programa OBMEP na Escola está associado à Olimpíada da OBMEP e tem como objetivo geral melhorar a qualidade do ensino da matemática nas escolas públicas do país, estimulando a adoção em sala de aula de novas práticas pedagógicas e do material didático produzido pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) para a OBMEP, e incentivando a criação de atividades extraclasse vinculadas às provas da Olimpíada. O programa é voltado para os professores de matemática das escolas públicas, e serve como incentivo aos alunos para realização de atividades extraclasse com o uso dos materiais da OBMEP, tais como provas e Bancos de Questões. Os professores inscritos e classificados no programa são habilitados e preparados para desenvolver essa atividade em sua escola ou em escolas vizinhas. Devido a esse processo de preparação, divulgação e seleção, discutindo assim, o número de inscritos que ocorre anualmente na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.

Podem ser observados na Tabela 1 os números relacionados aos inscritos na OBMEP em todas suas competições e a mudança da quantidade de estudantes inscritos para a primeira fase.

Tabela 1 – Número de escolas, alunos, municípios e medalhas dos participantes na OBMEP até 2020

Ano	Escolas Inscritas (1ª fase/2ª fase)	Alunos Inscritos (1ª fase/2ª fase)	Municípios Inscritos (1ª fase/2ª fase)	Total de Premiações (Medalhas e Menção Honrosa)
2005	31.031/ 29.074	10.520.831/ 457.725	93,5%/ 91,9%	31.109
2006	32.655/ 29.661	14.181.705/ 630.864	94,5%/ 92,4%	34.743
2007	38.450/ 35.483	17.341.732/ 780.333	98,1%/ 96,9%	33.003
2008	40.397/ 35.913	18.326.029/ 789.998	98,7%/96,9%	33.017
2009	43.854/ 39.387	19.198.710/ 841.139	99,1%/ 98,1%	33.011

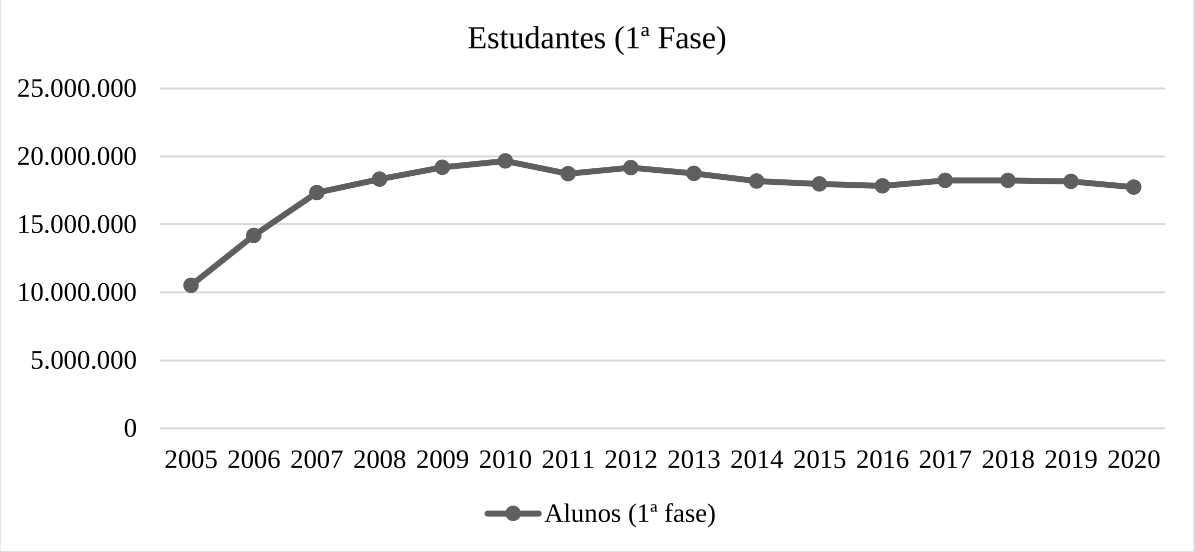
2010	44.717/ 39.929	19.665.928/ 863.000	99,16%/ 98,3%	33.256
2011	44.691/ 39.935	18.720.068/ 818.566	98,9%/ 98,1%	33.202
2012	46.728/ 40.770	19.166.371/ 823.871	99.42%/ 98,5%	45.434
2013	47.144/ 42.480	18.762.859/ 954.926	99,35%/ 98,83%	44.835
2014	46.711/ 41.302	18.192.526/ 907.446	99,41%/ 99,41%	45.664
2015	47.580/ 42.316	17.972.333/ 889.018	99,48%/ 97,62%	48.784
2016	47.474/ 43.232	17.839.424/ 913.889	99,59%/ 99,05%	48.984
2017	53.231/ 49.617	18.240.497/ 941.630	99,57%/ 99,23%	51.887
2018	54.498/ 50.183	18.237.996/ 952.782	99,44%/ 98,89%	54.121
2019	54.831/ 50.663	18.158.775/ 949.240	99,71%/ 99,03%	55.671
2020	51.933/ -	17.729.501/ -	99,84%/ -	-

Fonte: Informações extraídas da OBMEP (2020).

As informações expostas, na Tabela 1, denotam que quantidade de escolas, alunos, municípios e medalhas dos participantes aumenta a cada ano, em exceção do ano de 2011. Todavia, aconteceu um crescimento enorme no ano de 2017, pois, naquele referido ano, as escolas da rede privada foram convidadas a participar da olimpíada de matemática — anteriormente se restringia aos alunos de escola da rede pública de ensino. Após essas mudanças, destaca-se as premiações para alunos com medalhas e menções honrosas, os quais participam de um Programa de Iniciação Científica Jr (PIC) em matemática. Os professores de matemática capacitam os alunos em saberes matemáticos, com a finalidade de preparar o estudante para um bom rendimento acadêmico e profissional, entre outros fatores que levam ao sucesso.

Com isso, pode ser esclarecido, que após o início da OBMEP, a quantidade de inscritos vem aumentando a cada ano chegando à participação de mais de 99,7% dos municípios, o que implica mais de 54.800 escolas inscritas no ano de 2019. A partir do exposto, acontece a participação na 1ª fase do ano de 2020, que teve uma diminuição na quantidade de escolas inscritas na OBMEP. Devido a diversos fatores, no gráfico a seguir (Gráfico 2), é possível ver que o crescimento da quantidade de alunos inscritos na primeira fase está em torno de 18 milhões. Com o avanço da OBMEP no número de inscritos, principalmente na primeira fase, deveria ser normal entre todos os professores da área fazer uso de uma metodologia de resolução de problemas olímpicos como instrumento que melhore a intuição do aluno para uma capacidade de ensino-aprendizagem da matemática.

Gráfico 2 – Número de estudantes inscritos para a primeira fase da OBMEP nas competições de 2005 a 2019



Fonte: OBMEP (2020).

O destaque das escolas participantes tem um aumento progressivo desde 2005 com mais de 10 milhões de alunos inscritos e atualmente apresenta um valor acima de 17 milhões de participantes. Por fim, houve uma diminuição no ano de 2020 em comparação com 2019 em relação aos estudantes inscritos e escolas participantes, embora o número de municípios tenha aumentado bastante, na perspectiva de que escolas se preocupam em expor seus resultados e destaques em matemática.

2.15.3 Canguru de Matemática Brasil

A competição Canguru de Matemática Brasil se diferencia da IMO em alguns aspectos, pois são eventos que se opõem, pois a primeira é uma competição descompromissada, uma espécie de jogo matemático. Diferentemente da Olimpíada Internacional de Matemática, ela teve sua primeira edição em 2009 e acontece a cada ano, com um gigantesco número de estudantes de escolas públicas e privadas em todo o Brasil, faz parte de um importante evento internacional de matemática, uma competição chamada Canguru de Matemática.

Participam dessa competição, estudantes de escolas públicas ou privadas, matriculados regularmente no terceiro ano do ensino fundamental até a terceira série do ensino médio, por intermédio de suas escolas, com seus responsáveis para realizar a inscrição, em seis diferentes categorias etárias, contando com 30 questões de múltipla escolha relativamente fáceis com duração de uma hora e quarenta minutos para todos os níveis de ensino. Talvez, a diferença mais óbvia seja a de que a Canguru de Matemática não é somente para os melhores estudantes da disciplina. Ao contrário, o concurso intenciona os estudantes quanto for possível, com a finalidade de mostrar-lhes que a matemática pode ser útil, interessante e mesmo divertida.

Em seguida, apresenta-se no Quadro 5 o respectivo nível da Canguru de Matemática Brasil com seus níveis de atuação:

Quadro 5 – Níveis e descrição da Canguru de Matemática Brasil

Níveis	**Descrição**
Nível *Pre Ecolier* (P)	Alunos do 3º e 4º anos do Ensino Fundamental I
Nível *Ecolier* (E)	Alunos do 5º e 6º anos do Ensino Fundamental I e II, respectivamente
Nível *Benjamin* (B)	Alunos do 7º e 8º anos do Ensino Fundamental II
Nível *Cadet* (C)	Alunos do 9º ano do Ensino Fundamental II
Nível *Junior* (J)	Alunos da 1ª e 2ª séries do Ensino Médio
Nível *Student* (S)	Alunos da 3ª série do Ensino Médio.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Toda a organização das provas acontece nas seguintes etapas: as questões são propostas em três níveis de dificuldade crescente (primeiro terço da prova, questões básicas; segundo terço, questões mais complexas e terceiro terço, questões mais desafiadoras ou técnicas). Entretanto, existem os níveis mais elementares (P, E, B, C) que predominam as habilidades de raciocínio, enquanto nos níveis (J e S) é exigido algum conhecimento técnico.

2.16 Olimpíada Cearense de Matemática

Com a ideia da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) em institucionalização da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) em 1979, os Departamentos de Matemática das Universidades Federais ampliaram a necessidade de criarem Olimpíadas Regionais de Matemática. Em 1981, no estado do Ceará, essa ideia foi a fundação da Olimpíada Cearense de Matemática. Segundo França (apud GOMES, 2019, p. 72):

> A OCM teve como idealizador responsável Francisco Gesário da Silva Bezerra que na época era chefe do departamento de Matemática da UFC e surgiu com ele essa ideia de trazer e criar essa olimpíada aqui e implantamos juntamente com os professores João Marques Pereira, Guilherme Ellery, Tompson Gonçalves, Petrola, Ciro e depois só ficaram os quatro eu , João Marques, Guilherme Ellery e Tompson , e com isso fizemos uma divulgação para a primeira olimpíada e tivemos algumas

escolas pioneiras que participaram ativamente do processo Colégio Militar, Farias Brito, Christus, Batista e a escola Medalha Milagrosa.

Atualmente, a Olimpíada Cearense de Matemática ficou conhecida como OCM, é um torneio realizado anualmente e sem interrupções desde sua criação até os dias atuais, aprimorando o ensino de matemática para escolas, alunos e professores.

Executada na Universidade Federal do Ceará (UFC), pelo Departamento de Matemática, as provas são divididas em dois segmentos: alunos do ensino fundamental e ensino médio. As questões propostas em cada segmento são criadas pelos docentes da Comissão de Olimpíadas do dito departamento, maior parte deles sendo de sua própria autoria.

A Olimpíada Cearense de Matemática da UFC tem como objetivos:

I) Descobrir, despertar e estimular talentos e vocações para o estudo da matemática;

II) Incentivar a participação de estudantes cearenses do ensino médio na Olímpiada Brasileira de matemática de abrangência Internacional/Regional e Mundial (Olimpíada de Matemática do cone sul, Olimpíada Ibero-americana de Matemática e Olimpíada Internacional de Matemática);

III) Contribuir para a melhoria do ensino de Matemática nos ensinos fundamentais e médio;

IV) Promover a integração da escola de ensino fundamental e médio com a Universidade, através do ensino de Matemática.

Conforme seu regulamento, o solicitante deve atender aos seguintes requisitos:

a) Para se inscrever na competição o candidato deve estar cursando:

• Nível 1: 6º e 7º anos do ensino fundamental I.

• Nível 2: 8º e 9º anos do ensino fundamental II.

• Nível 3: 1ª, 2ª e 3ª séries do ensino médio.

b) Entregar a ficha de inscrição preenchida sem emendas e/ou rasuras.

c) Para cada Nível, haverá uma prova analítico-expositiva, baseada no programa da competição, com duração de 4 horas e composta de 5 (cinco) problemas, valendo cada um deles 10 pontos.

d) As provas são aplicadas nas dependências do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, no Campus do Pici.

e) As inscrições são efetuadas nos estabelecimentos de ensino fundamental e médio cadastrados.

f) A Comissão Examinadora classifica até o máximo de 20 (vinte) candidatos de cada Nível e indicará aqueles que serão premiados com medalhas de ouro, prata e bronze, na proporção aproximada de 1:2:3 (ex: sendo x medalhas de ouro, serão 2x de prata e 3x de bronze).

g) O total de premiados com medalhas, em cada nível, será aproximadamente 60% dos classificados pela Comissão Examinadora.

h) Será outorgado diploma de Menção Honrosa aos classificados que não forem premiados com medalhas.

i) As decisões da Comissão Examinadora são irrecorríveis, não havendo vistas de provas nem possibilidades de revisão, nem divulgação dos critérios usados para classificação e premiação.

j) Os casos omissos deste regulamento serão resolvidos pelo Coordenador da OCM e, em última instância, pela Comissão Coordenadora da Olimpíada.

Atualmente a OCM é apresentada em fase única composta por 5 questões abertas e respostas dissertativas.

Tabela 2 – Quantidade de estudantes inscritos na OCM de 2014 a 2019

QUANTIDADE DE ALUNOS				
ANO	**NÍVEL 1**	**NÍVEL 2**	**NÍVEL 3**	**TOTAL**
2014	540	495	744	1779
2015	456	426	416	1298
2016	417	365	442	1224
2017	549	531	456	1536
2018	664	561	508	1733
2019	712	558	560	1830

Fonte: GOMES (2019).

2.17 Didática Matemática para professores que trabalham com Olimpíadas

Com o surgimento das olimpíadas internacionais e nacionais, no ano de 2014, surgiu um programa de formação para professores trabalhar com Olimpíadas de Matemática. O programa OBMEP na Escola está vinculado à OBMEP e tem como principal objetivo melhorar a qualidade do ensino da matemática nas escolas públicas do país, estimular a adoção de novas práticas de ensino e produção de material didático pelo IMPA para a OBMEP e estimular a criação de atividades extracurriculares relacionadas às competições olímpicas. O programa divide-se em duas etapas:

> Etapa 1 – Habilitação de professores através de aplicação da Prova de Habilitação, para seleção de acordo com as vagas e critérios descritos neste Regulamento;
> Etapa 2 - Implementação do Programa OBMEP na Escola, pela Coordenação de Programas de Extensão Acadêmica do IMPA, para professores de matemática da educação básica que tenham sido selecionados. (OBMEP, 2020).

Com isso, em todas as edições realizadas nos anos decorrentes, percebe-se o aumento de professores participantes para atuarem como articuladores de olimpíadas, preparando os estudantes para as competições olímpicas, conforme pode ser visualizado na Tabela 3.

Tabela 3 – Edições OBMEP na Escola com quantitativo de vagas anuais no Brasil

Ano	**Quantidade**	**Ensino Fundamental II (Ceará)**	**Ensino Médio (Ceará)**	**Total**
2014	*	4	2	6
2016	501	8	4	12
2019	816	12	8	20

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em relação à ampliação do aperfeiçoamento e formação do professor na sua prática de ensino em matemática, existem livros disponíveis pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), que podem ser comprados na loja virtual como sócio ou usuário. Assim, expõe a prática direcionada aos problemas de olimpíadas de matemática para os docentes adquirirem um resultado satisfatório com os estudantes participantes de olimpíadas.

Mediante as discussões apresentadas, pode perceber a importância das olimpíadas de Matemática Internacionais e Nacionais para o desenvolvimento dos conhecimentos dos alunos na matemática. Com a inclusão de questões dessa natureza em sala de aula, busca-se desenvolver habilidades nas quais o discente possa procurar a solução de uma questão de forma livre, utilizando seus conhecimentos prévios no processo do ensino. Para isso, apresenta-se a Fundamentação Teórica e Metodológica que foi utilizada na pesquisa, a metodologia da Engenharia Didática e junto à Teoria das Situações Didáticas, que serão discutidas no capítulo a seguir.

3 PROCESSOS METODOLÓGICO DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Este capítulo encarrega-se da descrição das metodologias de pesquisa e de ensino que construiu o presente trabalho. Refere-se, relativamente, à Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau (2008), em que serão apresentadas as etapas e discussões relacionadas a cada situação. Essa teoria ajudou na construção dos POs da IMO por meio das situações didáticas seguindo as quatro etapas da TSD (ação, formulação, validação e institucionalização) e com isso, propiciando ao professor a estruturação de um espaço favorável a investigação nos conceitos matemáticos, proporcionado que o aluno articule o seu conhecimento com o saber escolar, planejando as situações didáticas no ensino adequado.

As construções dessas situações didáticas basearam-se em questões retiradas de avaliações da IMO do ano de 1959 até 2020, que tiveram como critério de seleção os tópicos de incentro e circuncentro, adaptando ao contexto de sala de aula no ensino médio, seguindo as etapas da TSD. Essas questões de olimpíadas representam “[...] um viés intrínseco do conhecimento matemático que não pode ser apartado e distinguido da abordagem e uma transposição didática para a Matemática em situações ordinárias e de não competição oficial” (ALVES, 2020, p. 321). Dessa maneira, refletiu-se sobre esse amoldamento visando à sala de aula e não apenas espaços formais para torneios/competições.

Nesse processo, foi utilizada a Teoria das Situações Didáticas a qual “[...] propõe uma ruptura com a aula tradicional de matemática, em que o professor é o centro das atenções e o aluno assiste passivamente à exposição direta do assunto matemático em questão” (FERREIRA, 2020, p. 43). Diante disso, essa teoria ajudou na necessidade de implantação de novas práticas de ensino que possam ser usadas como uma base para os docentes que lecionam matemática, “[...] de forma mais efetiva, o raciocínio intuitivo, desenvolvendo nos alunos habilidades essenciais que norteiam vários conteúdos em matemática” (OLIVEIRA NETO, 2019, p. 13).

3.1 Teoria das Situações Didáticas

Segundo Brousseau (1996), o processo de comunicação na Didática da Matemática deve se centralizar nas atividades didáticas que têm como objetivo principal o ensino que privilegie, notadamente, os saberes matemáticos. Com essa concepção, a Didática da Matemática deve oferecer: explicações, teorias e conceitos, formas de previsão e análise e integração de resultados relativos aos modos cognitivos dos estudantes.

De acordo com Almouloud (2007, p.37), "uma situação didática é caracterizada pelo milieu[20] (meio) e este é organizado a partir da escolha das variáveis didáticas, que são aquelas para as quais a mudança de valores provoca modificações nas estratégias ótimas". A identificação desse modelo levanta uma série de questões do ponto de vista da TSD e de seus elementos, como a estruturação do milieu e a reorganização necessária às adaptações didáticas. Nessa situação, o processo de aprendizagem é dividido em quatro fases dominantes, as chamadas etapas dialéticas: ação, formulação, validação e institucionalização.

De acordo com Brousseau (2008, p. 31-32), os termos "conhecimento" e "saber" são utilizados de forma diferenciada:

> Os conhecimentos são meios transmissíveis (por imitação, iniciação, comunicação, etc.) ainda que necessariamente demonstráveis, de controlar uma situação e obter dela um resultado determinado, de acordo com uma expectativa e exigência social. O **saber** é o produto cultural de uma instituição que tem como objetivo identificar, analisar e organizar os conhecimentos a fim de facilitar sua comunicação. (grifo nosso)

Para o autor, o conhecimento é construído, passando pelas fases de ação, formulação, validação e, posteriormente, institucionalização, assim, no que se refere ao conhecimento, concordando com o ponto de vista do autor. A instigação do professor é, exatamente, construir situações didáticas cujas disposições de ensinar não são primeiramente apresentadas aos alunos – mas que estes aceitam – e conseguir que eles sejam preparados a refletir, pensar, evoluir e atuar em suas habilidades matemáticas por conta própria.

3.2 Situação Didática de Ação

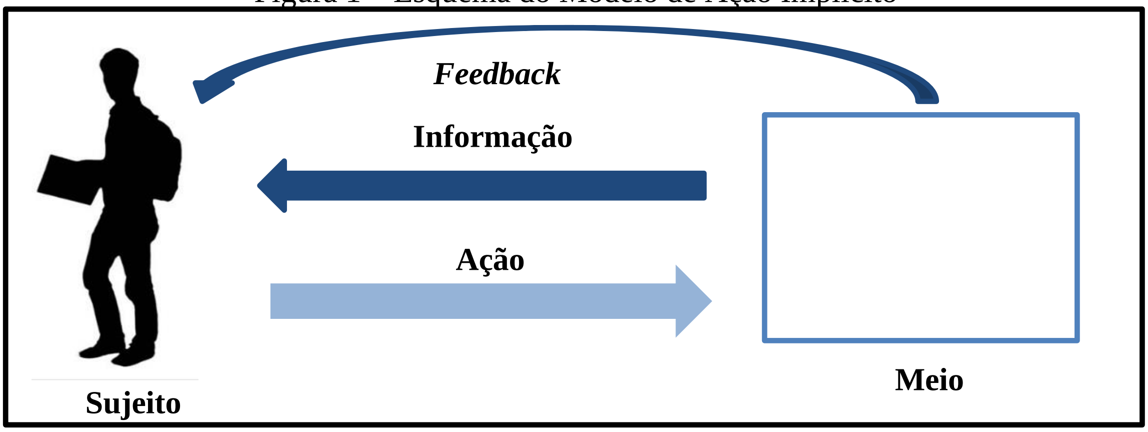
A Situação Didática da Ação analisa o estado de torneio dos alunos, passando a tomar decisões nos resultados de uma observação. Neste processo o problema tem estratégias para gerar decisões (algumas intuitivas). Com vários torneios, observa-se que o estudante seja capaz de elaborar uma tática, explicá-la e, finalmente, determinar suas decisões. A continuação da ação tem um procedimento em que o aluno vai aprender uma técnica de respostas do problema. Essa manifestação pode ser observada na aprendizagem acontecendo mudanças no conhecimento "[...] por meio de descrições de táticas (ou procedimentos) que o indivíduo parece seguir ou pelas declarações daquilo que parece levar em consideração, mas tudo são só

[20] O milieu é um conceito central no TSD Guy Brousseau (1986), é um aspecto de dificuldade, contradição, desequilíbrio. Segundo Perrin-Glorian (1999), na teoria de Piaget a criança aprende adaptando-se ao ambiente escolar em uma situação não didática. Segundo Brousseau (1988), o meio ambiente é definido como um conjunto de condições externas em que o homem se comporta e aumenta.

projeções" (BROUSSEAU, 2008, p. 28), entre o Sujeito e o Meio (Figura 1), como um padrão de resposta explicado por um modelo de ação implícito.

Portanto, essas são situações marcadas pela estruturação/aquisição do conhecimento matemático mais experimental e intuitivo teórico que pode explicar parcialmente a falta de argumentação dos nossos alunos quando encontram a solução certa e não sabem explicar os procedimentos que usam.

Figura 1 – Esquema do Modelo de Ação Implícito



Fonte: (BROUSSEAU, 2008, p. 28) adaptada pelo autor.

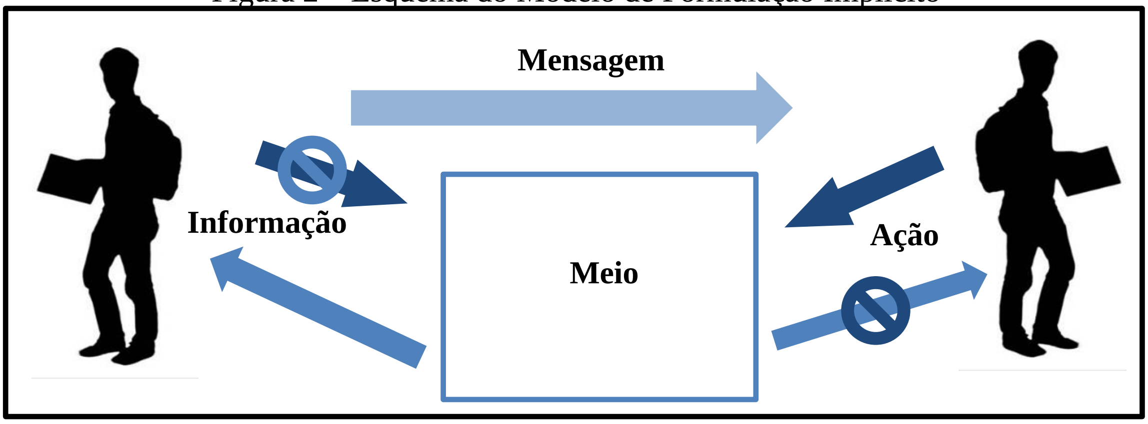
Almouloud (2007, p. 37), relata condução do aprendiz numa situação, chamada de situação de ação, que "coloca um problema para o aluno cuja melhor solução, nas condições propostas, é o conhecimento a ensinar; o aluno passa agir sobre essa situação e que ela lhe retorne informações sobre sua ação".

Dessa maneira, a demonstração tem um padrão de resposta observado em um modelo de ação implícito. Conforme Brousseau (2008), a situação dialética de ação apresenta as condições necessárias do pensamento matemático e que exigem do estudante uma escolha, muitas vezes sem compreender o motivo e sem conseguir explicá-la, mas que o faz perceber a situação que deve ser realizado ao certo. Nesse momento, o estudante pode realizar a escolha que desejar e não é necessário se comunicar. Ele facilmente realiza o que é proposto pela situação-problema.

3.3 Situação Didática da Formulação

A Situação Didática da Formulação parte de um entendimento de um sujeito deve retomar o problema a fim de compreender a resolução. O uso da formulação será exigido pelo indivíduo participante, envolvendo outro sujeito para comunicar uma informação. A formulação dos conhecimentos abrange repertórios linguísticos (sintaxe e vocabulário) diversos, essa aquisição acompanha os conhecimentos declarados por eles, mas ambos são processos diferentes contidos na Figura 2 com um Modelo de Formulação Implícito.

Figura 2 – Esquema do Modelo de Formulação Implícito



Fonte: (BROUSSEAU, 2008, p. 28) adaptada pelo autor.

Conforme Almouloud (2007, p. 38):

> O objetivo da dialética da formulação é a troca de informações. Por exemplo, se o aluno deve agir e não dispõe de toda a informação e seu parceiro no jogo dispõe das informações que lhe faltam, pode haver, nessas trocas, julgamentos, debates de validade, sem que isto constitua necessariamente uma situação de formulação.

Esta etapa de comunicação divide-se em duas situações:

I) a do líder da equipe à frente, praticando e;

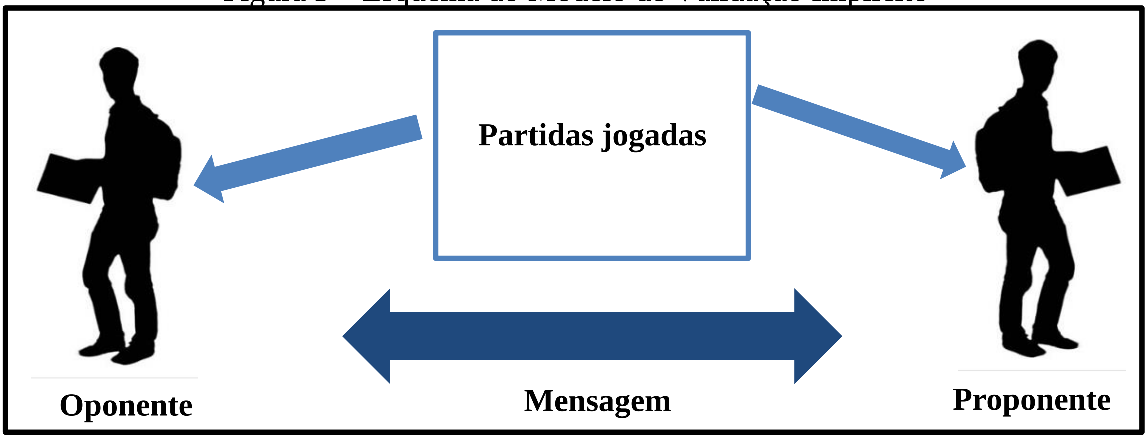
II) do grupo discutindo o assunto.

Na primeira etapa de comunicação, o aluno analisa os seus colegas participantes e repassa a informação para outro aluno que está à frente e, no segundo momento da etapa, o aprendizado de cada aluno é construído por um conjunto de partidas disputadas. A estratégia é identificar se a comunicação entre os colegas está sendo reflexiva e presente no entendimento da situação-problema.

3.4 Situação Didática da Validação

A Situação Didática da Validação é diferenciada de um novo modelo de formulação: um emissor já não participa como informante, mas um proponente; e o receptor, um oponente. Os dois sujeitos se unem para descobrir a resposta, ou seja, um método de vinculação do saber já garantido. Nessa etapa de validação, segue-se o enunciado e, havendo divergência, pede-se uma demonstração ou solicita-se que outra pessoa aplique suas descobertas na conversa com o meio destacado na Figura 3.

Figura 3 – Esquema do Modelo de Validação Implícito



Fonte: (BROUSSEAU, 2008, p. 28) adaptada pelo autor.

De acordo com Almouloud (2007, p. 40):

> O aluno deve mostrar a validade das possíveis soluções dos diversos modelos criados por eles em linguagem matemática (modelo da situação) submetendo à apreciação e ao julgamento de seus colegas de grupo ou de sala, onde ele deve mostrar de forma clara e precisa a pertinência do desenvolvimento do seu modelo, e caso possível, fazer a sua validação.

Brousseau (1996) ressalta que na perspectiva da teoria das situações, os alunos tornam-se reveladores das características das situações às quais reagem. Nesse contexto, as relações de um aluno com o meio podem ser classificadas em três categorias:

a) troca de informações não codificadas ou sem linguagem (ações e decisões);

b) troca de informações codificadas em uma linguagem (mensagens);

c) troca de opiniões.

Essas etapas são divididas em três tem métodos para que os estudantes possam desenvolver as situações didáticas que lhe forem recomendadas. Cada sujeito toma um posicionamento em relação a um enunciado da questão e, havendo diferença, pede uma demonstração ou exige que o outro sujeito aplique suas resoluções na interação com o meio.

3.5 Situação Dialética da Institucionalização

Brousseau (1996, p. 45) “fundamenta a importância dessa fase da institucionalização para a apropriação dos saberes pelo aluno”. A situação didática da institucionalização na TSD faz com que o professor apresente uma solução do problema que foi apresentado e discutido em sala de aula, intervindo em um momento de interação e socialização do saber ensinado.

Por fim, em situações institucionais, o conhecimento é claramente estabelecido pelo professor e passa a ser o conhecimento oficial que os alunos devem utilizar para resolver problemas. Brousseau (2008) ressalta que o papel do professor nessa fase é fundamental, pois a institucionalização, se feita precocemente, pode atrapalhar a construção do conhecimento, causando dificuldades tanto para o professor quanto para o aluno; já se feita tarde, amplifica interpretações errôneas, atrasa o aprendizado e torna a aplicação difícil.

3.6 Situação Didática Olímpica

Diante da Teoria das Situações Didáticas (TSD) citada anteriormente por Brousseau (2008) na proposta metodológica de ensino/aprendizagem incluída neste trabalho, descreve-se que Alves (2018) tem uma definição sobre o tema descrito.

A Situação Didática Olímpica de Alves (2021, p. 125-126) define os problemas olímpicos embasados na dialética de:

> Um conjunto de relações estabelecidas implícita ou explicitamente, balizado por uma metodologia de ensino (TSD) entre um aluno ou grupo(s) de alunos, um certo meio (compreendo, ainda, o conhecimento matemático abordado por intermédio de problemas de competição e de olimpíadas) e um sistema educativo, com o objetivo de permitir a apropriação, por parte destes alunos, a um conhecimento constituído ou em vias de constituição, oriundo de um ambiente de competição coletiva e debate científico do grupo, a competição solidária e problemas ou conjunto de problemas característicos e abordados nas olimpíadas de Matemática.

Assim, a Situação Didática Olímpica (SDO) aparece nos temas olímpicos como uma nova metodologia de ensino alcançada nas fases dialéticas da Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau (2008) e que estabelece um novo assunto aos Problemas Olímpicos.

Segundo Alves (2021, p. 126), a partir de situações de ensino em olimpíadas, pode-se instituir a seguinte premissa da “*SDO = PO + TSD*”.

Então, observa-se a Situação Didática Olímpica igualada ao Problema Olímpico somado à Teoria das Situações Didáticas, iniciando na intenção de ensinar não falando diretamente a solução, mas de modo que o professor organize um caminho para o aluno construir seu saber matemático.

3.7 Descrição do *software* GeoGebra

O *software* GeoGebra, descrito por Lucas (2009), foi desenvolvido em 2001 pelo professor Dr. *Markus Hohenwarter*, sendo um programa livre (*freeware*), dinâmico, gratuito e educacional, além disso, que qualquer usuário tem oportunidade de realizar o download com facilidade na sua plataforma virtual, sendo compatível com os três sistemas operacionais mais utilizados, o *MacOS*, o Linux, o Windows e com suas adaptações para o smartphone (celular) como o *Android* e o iOS com vários aplicativos. Este programa tem formas gráficas e algébricas ao mesmo tempo no seu uso, podendo ser configurado a qualquer situação trabalhada para obtenção de resultados dinâmicos e atraentes.

O GeoGebra, criado em Java, tem uma linguagem aberta de programação e conta com o portal geogebra.org, que serve como um repositório interativo para auxiliar nas construções de modelos a serem utilizadas pelos professores e alunos. Ele ganhou um espaço mundialmente e prêmios internacionais de melhor *software* educacional alemão e europeu, e contém vários tópicos matemáticos destacados em vários trabalhos de estudantes como: geometria plana, razão, proporção, trigonometria, geometria analítica, funções afins e quadráticas.

> [...] o software livre constitui um forte aliado no processo de inclusão digital; inclusão esta que, mesmo sendo um processo complexo, deve contribuir para a formação de professores e aprendizes como sujeitos autônomos e conscientes, capazes de colaborar na constituição de uma sociedade menos desigual e mais justa (GOMES et al., 2013, p. 20).

O GeoGebra é uma plataforma na qual se pode realizar construções com pontos, retas, segmentos, vetores, funções e seções cônicas e mudá-las depois. Entretanto, as coordenadas e equações podem ser introduzidas diretamente. Dessa forma, o *software* GeoGebra tem o mecanismo de tratar das variáveis para números, pontos e vetores, comandos como raízes e extremos visualizados na janela 2D. Essas duas visualizações têm as seguintes características do GeoGebra: uma expressão em álgebra corresponde a um objeto determinado na geometria e vice-versa (PARANHOS, 2009). Nessa perspectiva, o aluno pode relacionar um aprendizado significativo com suporte do professor, envolvendo a turma em geral, nos conceitos, ferramentas e impacto de conhecimentos teóricos e práticos.

3.8 Engenharia Didática e suas fases dialéticas

A Engenharia Didática (ED) teve sua origem no início dos anos 1980 na França, no âmbito da Didática da Matemática (DM). Além disso, a metodologia para análise de situações didáticas, a ED foi realizada como um trabalho didático de modo semelhante ao:

> “[...] ofício do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apóia sobre conhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os objetos depurados na ciência e, portanto, a enfrentar [...] problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta” (ARTIGUE, 1996, p. 193).

De acordo com Artigue (1996, p. 196), “a Engenharia Didática é um processo empírico que objetiva conceber, realizar, observar e analisar as situações didáticas”. A autora argumenta que a Engenharia Didática possui dupla função, a qual pode ser integrada na elaboração de uma metodologia de pesquisa qualitativa para o ensino.

Desse modo, podem-se assimilar essas funções de pesquisas na Engenharia Didática: *microengenharia*, que estuda notadamente a complexidade dos fatos acontecidos na sala de aula e a *macroengenharia*, que apresenta as “dificuldades de ordem metodológica e/ou institucionais referentes ao binômio ensino e aprendizagem” (ALVES, 2016, p. 70).

Neste trabalho, resgata-se a ED elaborada para o conceito da prática papel-lápis com uso do *software* GeoGebra, reformulando em especial a análise preliminar a análise a *priori* para que se identifique as variáveis didáticas da geometria plana (Incentro e Circuncentro), e uma análise a *posteriori*, realizada em questões com o uso das tecnologias digitais.

As estratégias são influenciadas pelo emprego das variáveis didáticas em função dos valores que possuem. Na descrição sobre as variáveis didáticas, Barros (2012, p.47) reproduz em seu trabalho dissertativo:

> Consideramos como variáveis didáticas, pontos e ações em um ambiente didático cuja variação de seus valores modificam as condições de estratégias a serem trabalhadas para a resolução de problemas pelos alunos.

Segundo Artigue (1988, p.202), as variáveis didáticas podem ser caracterizadas em dois momentos das análises da ED:

> Variáveis macro-didáticas ou globais, relativas à organização global da Engenharia; Variáveis micro-didáticas ou locais, referentes à organização de uma sessão ou de uma fase, podendo ser as variáveis do problema, ou de situação.

Para a realização da pesquisa, foi utilizada uma metodologia da microengenharia e a sistematização das variáveis: macrodidáticas e microdidáticas. Segundo Alves (2016, p. 70), “as variáveis macrodidáticas se referem à estrutura geral da ED e as microdidáticas estão relacionadas à fase de experimentação da ED”. Dessa forma, “a Engenharia tem uma peculiaridade na sua validação, que é o fato de se validar internamente, sem precisar de pré/pós testes, sendo necessário e suficiente uma comparação entre as análises *a priori* e a *posteriori”* (ALMOULOUD, 2007, p. 171).

Nas subseções a seguir, serão apresentadas as quatro fases da Engenharia Didática (ED).

3.8.1 Análise Prévia da Situação Didática

A primeira fase inicial da Engenharia, a etapa das análises prévias, é desenvolvida com o objetivo de analisar o andamento do ensino habitual do conteúdo, para intervir na modificação da sala de aula usual. Nessa primeira análise prévia da situação didática, como descreve Machado (2002, p. 200), “são feitas ponderações envolvendo o quadro teórico didático mais geral, como também sobre os conhecimentos mais específicos envolvendo o tema da pesquisa”.

Segundo Almouloud e Coutinho (2008, p. 66), a metodologia da Engenharia Didática consta das seguintes vertentes:

> Epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino; do ensino usual e seus efeitos; das concepções dos alunos, das dificuldades e dos obstáculos que marcam sua evolução; das condições e fatores de que depende a construção didática efetiva; a consideração dos objetivos específicos da pesquisa; o estudo da transposição didática do saber considerando o sistema educativo no qual insere-se o trabalho.

A fase da análise prévia das situações didáticas ressalta um ponto de apoio das análises preliminares “[...] reside na fina análise prévia das concepções dos alunos, das dificuldades e dos erros tenazes, e a engenharia é concebida para provocar, de forma controlada, a evolução das concepções” (ARTIGUE, 1996, p. 202).

3.8.2 Concepção e Análise a Priori da Situação Didática

Na segunda fase, ocorre a concepção e análise a *priori* das situações didáticas. Nesta etapa, Machado (2002, p. 200) “ressalta que a pesquisa delimita as variáveis de comando, que são as variáveis microdidáticas (ou locais) e macrodidáticas (ou globais) pertinentes ao Sistema Didático (professor/aluno/saber) que podem ser consideradas pelo pesquisador/professor para que sejam abordadas as várias sessões ou fases de uma Engenharia Didática”.

Almouloud e Coutinho (2008, p. 67) declaram que, dessa forma, ao realizar uma análise a *priori*, deve-se:

> Descrever as escolhas das variáveis locais e as características da situação adidática desenvolvida; analisar a importância dessa situação para o aluno e, em particular, em função das possibilidades de ações e escolhas para construção de estratégias, tomadas de decisões, controle e validação que o aluno terá. As ações do aluno são vistas no funcionamento quase isolado do professor, que, sendo o mediador no processo, organiza a situação de aprendizagem de forma a tornar o aluno responsável por sua aprendizagem; prever comportamentos possíveis e tenta mostrar como a análise feita permite controlar seu sentido, assegurando que os comportamentos esperados, se e quando eles intervêm, resultam do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem.

Esses autores ressaltam a importância de que o aluno faça e seja capaz de evoluir em seus conhecimentos. O professor participará como mediador em sala de aula, procurando desenvolver a aprendizagem decorrente do desempenho do estudante.

Nesses moldes, na segunda fase da Engenharia Didática, a análise *a priori*:

> [...] deve ser concebida como uma análise do controlo do sentido; muito esquematicamente, se a teoria construtivista coloca o princípio do compromisso do aluno na construção dos seus conhecimentos por intermédio das interações com determinado meio, a teoria das situações didáticas que serve de referência à metodologia de engenharia [didática], teve, desde sua origem a ambição de se constituir como uma teoria de controle das relações entre sentido e situações. (ARTIGUE, 1996, p. 205).

Ainda com relação a análise *a priori*, seu objetivo é:

> [...] determinar de que forma permitem as escolhas efetuadas controlar os comportamentos dos alunos e o sentido desses comportamentos. Para isso, ela funda-se em hipóteses; será a validação destas hipóteses que estará, em princípio, indiretamente em jogo no confronto, operado na quarta fase, entre a análise a priori e a análise a posteriori (ARTIGUE, 1996, p. 205).

Nesse ponto, o docente tem o papel importante para oferecer ao aluno as situações de ensino e novas ideias, de modo a selecionar um procedimento de resolução de problemas de forma autônoma. Os alunos têm o propósito de tomar decisões para a resolução de questões ou o problema do jogo a ser oferecido.

3.8.3 Experimentação da Situação Didática

A terceira fase ED, conforme Artigue (1996, p. 208-209), inicialmente é “constituída pelo período de aplicação e experimentação das atividades anteriormente planejadas, colhendo dados sobre a investigação”. Carneiro (2005, p. 104-105) ressalta que “o professor em ação não espera para analisar o trabalho após concluí-lo”. Para isso, o pesquisador aplica uma sequência didática para analisar constantemente o andamento das atividades desenvolvidas pelos alunos, trazendo alterações caso seja necessária.

> Durante a experimentação, coletamos e organizamos um corpus de pesquisa variado, composto por produção dos alunos, registro de perguntas, dúvidas e erros constatados durante o acompanhamento de suas ações e diários de classe dos ministrantes. A análise desse material é essencial para a etapa da validação. (CARNEIRO, 2005, p. 105).

Nessa etapa, o autor relata que, no decorrer da fase, o pesquisador deve sistematizar e reunir a construção dos alunos, os erros encontrados no decorrer e depois da construção dos alunos e registro de perguntas propostas. Essa fase se baseia na análise de resultados durante os encontros de ensino, assim como etapa fundamental da validação.

3.8.4 Análise à Posteriori e Validação da Situação Didática

A análise à *posteriori* e validação da situação didática se baseia nos dados no decorrer do desenvolvimento das atividades, sendo realizado o desenvolvimento do trabalho: as produções dos estudantes e o diário de campo. Nesse sentido, Almouloud e Silva (2012) relatam que nesta fase acontece a análise dos dados coletados durante a aplicação das situações-problema e isso deve ser registrado fazendo-se uso do relato de observações, das gravações de vídeos e da escrita dos estudantes. Conforme os autores, “nessa análise se faz necessário sua confrontação com a análise *a priori* para que seja feita a validação ou não das hipóteses formuladas na investigação” (ALMOULOUD E SILVA, 2012, p. 27). Nessa fase, é realizada a análise de dados atingidos na sequência didática aplicada. De acordo com Artigue (1988), esses dados são geralmente completados por outros, obtidos pela utilização de metodologias externas, como questionários, entrevistas individuais ou em pequenos grupos, realizados em diversos momentos do ensino ou a partir dele. Todos os seus registros serão relacionados com a análise a *priori*.

Conforme com Souza e Cordeiro (2005, p. 37-38):

> As principais diferenças entre as pesquisas realizadas dentro de uma Metodologia da Engenharia Didática e outras, na área da didática que não são desenvolvidas por meio desta metodologia, são observadas na profundidade das análises preliminares, e também no fato da validação das hipóteses realizadas sobre o problema da pesquisa serem validadas no confronto entre análise a priori e a posteriori.

A Engenharia Didática tem contribuído em muitas atividades em sala de aula, na metodologia, e para a oportunidade de fornecer a fundamentação teórica para o professor ampliar sua teoria e a prática de sala de aula. Pais (2002) destaca que a Engenharia Didática representa uma forma de compreensão entre teoria e prática, metodologia que permite se estabelecer vínculo com a questão da formação de conceitos matemáticos.

Fica evidenciado que essa metodologia precisa de uma revisão bibliográfica relacionada ao conhecimento (dimensão epistemológica). Assim, o objetivo deve ser buscar os princípios da matemática para o professor aprimorar a conexão com o saber, tendo como crítica os materiais didáticos à disposição de seu trabalho em sala de aula.

No quarto capítulo, serão explanadas as análises prévias das Situações Didáticas Olímpicas, tornando a validação dos objetivos generalizados nesta pesquisa.

4 ANÁLISES PRELIMINARES (PRÉVIAS) DAS SDOs

Como prerrogativa da primeira fase (das análises preliminares) da Engenharia Didática, deve-se apresentar as considerações que justifiquem os fundamentos teóricos de pertinência da geometria plana para as olimpíadas, direcionando para o ensino de matemática, e, assim, levando-se em conta o objeto de estudo desse nível de ensino para os professores de matemática, de modo a contribuir na inserção de uma análise de promoção a dimensão didática.

4.1 Análise preliminar no contexto olímpico em livros didáticos de matemática

Para auxiliar nessa situação, Barman, Griffiths e Okebukola (1995), que estudaram os conceitos de cadeia e teia alimentar, consideram muito importante, nesse processo do ensino de matemática, reconhecer os conceitos prévios dos alunos, para que o professor possa concentrar-se nos tópicos que apresentarem maiores dificuldades. Na análise didática, são citados doze livros didáticos apresentados no Quadro 6, que podem ser utilizados por professores de matemática no decorrer da preparação de estudantes para as olimpíadas de matemática.

A seleção dos livros didáticos aconteceu com critérios que levaram em consideração a preocupação com tema da pesquisa e sugestões de professores que trabalham com olimpíadas de matemática, acrescentando-os como um instrumento de análise que os auxiliassem de maneira mais prática em sala de aula remota. Sugere-se então efetivar a análise dos livros com critérios mais resumidos, porém essenciais e acompanhados de declarações pelos autores .

Nesse sentido, segundo Núñez et al (2009), a escolha dos livros didáticos para preparação a serem empregados constitui uma responsabilidade de importância primordial para uma boa aprendizagem dos estudantes. Com isso, tem uma grande relevância de buscar critérios específicos que possibilitem aos docentes formas de avaliar de forma efetiva os livros didáticos escolares. Miranda (1997) descreve a seguinte situação: “é essencial uma análise cautelosa do livro didático, pautada em critérios claros e democraticamente estabelecidos”.

Quadro 6 – Análise didática de livros direcionados em preparação para as olimpíadas de matemática

LIVRO	EDITORA/AUTOR(ES)/ANO	DESCRIÇÃO

Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 1ª a 8ª	Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) Élio Mega e Renate Gompertz Watanabe (2010)	Ele traz as primeiras provas da OBM, da 1ª a 8ª. O material, composto por 110 problemas, está disposto por temas, em ordem mais ou menos crescente de dificuldade das questões.
Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 9ª a 16ª	Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) Carlos Moreira, Edmilson Motta, Eduardo Tengan, Luiz Amâncio, Nicolau Saldanha, Paulo Rodrigues (2009)	Neste livro, há problemas que parecem difíceis. Eis o bom desafio proposto nesta edição que reúne as questões propostas na fase final da Olimpíada Brasileira de Matemática, no período de 1987 a 1994.
The IMO Compendium	Springer Dusan Djukic Vladimir Jankovic Ivan Matic Nikola Petrovic (2011)	O objetivo deste livro é incluir todos os problemas já pré-selecionados para as OMIs em um único volume. Neste livro, todos os manuscritos foram coletados em um único compêndio de problemas de matemática do tipo que geralmente aparecem nas OMI.
Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 17ª a 24ª	Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) Carlos Yuzo Shine, Carlos Moreira, Edmilson Motta, Eduardo Tengan, Nicolau Saldanha (2015)	Este é mais um material inestimável para professores e estudantes porque auxilia a ambos na preparação para as olimpíadas de matemática. A coletânea de provas vai de 1995 a 2002 e reúne todas as categorias: júnior, sênior, níveis 1, 2 e 3, e nível universitário.

21 Aulas de Matemática Olímpica	Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) Carlos Yuzo Shine (2009)	O livro do professor Carlos Yuzo Shine foi concebido a partir de suas anotações olímpicas e é interessante para estudantes, professores e todos que desejam participar das olimpíadas matemáticas.
10 Matemáticos 100 Problemas	Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) Eduardo Wagner (2016)	Os problemas são originários de olimpíadas de matemáticas realizadas na Argentina, Brasil, Colômbia, El Salvador, Espanha, México, Peru, Portugal, Uruguai e Venezuela.
Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções	Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) Krerley Oliveira, Adan Jose Corcho Fernandez (2012)	Diferentes métodos de resolução de problemas, todos acompanhados de exemplos. Esta é uma das vantagens para estudantes do ensino médio e de graduação neste livro que introduz a matemática elementar.
Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 – Nível Médio	Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) Francisco Antonio Martins de Paiva, Onofre Campos da Silva Farias, Emanuel Augusto de Souza Carneiro (2014)	Este livro é essencial para professores, estudantes do ensino médio e universitário, e para todos os que estão se preparando para concursos, vestibulares e olimpíadas de matemática. As provas e soluções reunidas na publicação fizeram parte de 25 edições da Olimpíada Cearense de Matemática – OCM (1981 a 2005).
Olimpíadas Cearenses de	Sociedade Brasileira de Matemática (SBM)	A edição reúne provas das Olimpíadas Cearenses de

Matemática 1981-2005 Nível Fundamental	Francisco Antonio Martins de Paiva, Onofre Campos da Silva Farias, Emanuel Augusto de Souza Carneiro (2014)	Matemática (OCM) de mais de duas décadas. Desde a sua criação, em 1981, esta modalidade conta com a participação das escolas locais. As questões das primeiras provas foram sugeridas pelos professores dessas instituições. A OCM é realizada todos os anos e as provas são aplicadas com três níveis de dificuldade (sexto e sétimo anos, oitavo e nono anos, e ensino médio).
Treinamento Olímpico	Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) Bruno Holanda, Carlos A. Ribeiro, Cícero T. Magalhães, Samuel Barbosa, Yuri Lima (2020)	*Treinamento Olímpico* é um livro que visa divulgar alguns problemas utilizados durante os processos seletivos das delegações brasileiras para diversas competições internacionais. Escrito por professores experientes que participaram por diversas vezes da preparação das equipes brasileiras, é uma excelente fonte de estudo para as mais variadas competições nacionais e internacionais.
Círculos Matemáticos: A Experiência Russa	Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) Dimitri Fomin, Sergey Genkin, Ilia Itenberg (-)	Esta obra foi originalmente publicada em inglês pela American Mathematical Society com o título Mathematical Circles em 1996. A presente tradução foi feita e publicada pelo IMPA com a autorização da AMS. Este livro foi produzido por circunstâncias

		culturais que fomentaram a criação de grupos formados por alunos, professores e matemáticos da União soviética, chamados círculos matemáticos.
Como Resolver Problemas Matemáticos	Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) Terence Tao (2013)	Táticas para resolver problemas. É o que oferece com muita criatividade Terence Tao, vencedor da Medalha Fields, para professores e estudantes a partir dos 14 anos. As questões reunidas, em nível das olimpíadas de matemática, são acompanhadas de modelos de solução. O autor reúne exemplos que envolvem a teoria de números, álgebra, análise, geometria euclidiana e geometria analítica.

Fonte: Elaborada pelo autor.

No tocante aos livros didáticos selecionados para olimpíadas, percebe-se o amplo conteúdo matemático que se assimila na análise realizada através das questões selecionadas com os tópicos de incentro e circuncentro e observa-se que os autores delimitam uma sequência didática igual aos demais: teoria descrita (demonstração de conceitos) e proposta de problemas matemáticos (exercícios realizados), contendo um espaço referente ao método de resposta. Dos dozes livros analisados, apenas o *The IMO Compendium* (2011), utilizado na preparação das situações didáticas dessa dissertação, também expõe o assunto em todos os capítulos. Além disso, observou-se a maneira com que os conteúdos são explanados aos estudantes e professores, seguindo padrões tradicionais de ensino que estimulam a mecanização do pensamento e a aprendizagem por questões abertas.

4.2 Análise das dissertações do PROFMAT relacionadas a Olimpíada de Matemática

Em virtude do que é observado nas olimpíadas de matemática, com tendência na aplicação de recursos didáticos direcionados ao planejamento de estudos ligados a olimpíadas e no processo de ensino e aprendizagem de professores e alunos nas escolas de rede de educação básica, focou-se na verificação da plataforma Banco de Dissertações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), com a finalidade de analisar as pesquisas produzidas no campo acadêmico relacionando aos tópicos do trabalho (incentro e circuncentro) selecionados nesta pesquisa.

Dessa forma, foram utilizadas palavras-chave: “Olimpíadas de Matemática”, para o pesquisador ter uma noção da quantidade de dissertações afins ao seu trabalho, para daí ter condições de elevar a relevância da pesquisa em construção. Além disso, a partir desse estudo, determinar uma aplicação da Engenharia Didática (ED) voltada para a metodologia de pesquisa.

Além disso, o PROFMAT (2020), “é um programa de mestrado semipresencial na área de Matemática com oferta nacional”. É formado por uma rede de instituições de ensino superior, no contexto da Universidade Aberta do Brasil/Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior (CAPES), e coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), com apoio do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). O Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) surgiu mediante uma ação induzida pela CAPES junto à comunidade científica da área de matemática, representada e coordenada pela SBM. O objetivo geral é a formação de professores de matemática em exercício na educação básica, especialmente de escolas públicas, que busquem aprimoramento em sua formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua docência. De acordo com PROFMAT (2020),

> A avaliação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional foi recomendada pela CAPES, reconhecido pelo Conselho Nacional de Educação – CNE e validado pelo Ministério da Educação com nota 5 (nota máxima para programas de mestrado). Então, o PROFMAT vem ao encontro do Plano Nacional de Educação – PNE, Lei Nº 13.005, de 25 junho de 2014, que coloca em sua Meta 16: formar, em nível de pós-graduação, 50% (cinquenta por cento) dos professores da Educação Básica, até o último ano de vigência deste PNE, e garantir a todos (as) os (as) profissionais da Educação Básica formação continuada em sua área de atuação, considerando as necessidades, demandas e contextualizações dos sistemas de ensino. Além disso, o PROFMAT também atende as metas 14, 17 e 18, que tratam respectivamente, elevar o número de matrículas na pós-graduação stricto sensu; valorização do professor; e plano de carreira.

Logo, este trabalho pode oferecer aos professores de matemática uma alternativa de ensino para alunos com os Problemas Olímpicos (PO). Dessa maneira, no sítio eletrônico do programa de mestrado citado, as dissertações pesquisadas foram:

Tabela 4 – Primeiros títulos com as dissertações pesquisadas

Total de Dissertações	Olimpíada de Matemática (2013 a 2020)	Percentual	Data da Pesquisa
5260	30	0,58 %	03 a 20/03/2020

Fonte: Elaborada pelo autor, a partir do site do PROFMAT (2020).

Sendo assim, pode-se chegar a uma conclusão pela tabela acima do quantitativo e percentual de trabalhos com o tema “Olimpíada de Matemática”, comparando a outros temas de pesquisa em matemática ao longo de alguns anos – o que é lastimável, pois, o Programa do PROFMAT tem um alcance enorme em todo o Brasil, então seria interessante abordar assuntos relativos às práticas de competições de matemática em sala de aula do professor de educação básica com mencionado tema, nessa situação a IMO.

Diante do exposto, acontece a ordenação das dissertações na plataforma em dois quadros divididos no **Apêndice E** (data da defesa, autor, objetivos e instituições/universidades), percebendo que os trabalhos encontrados no sítio eletrônico têm foco maior na OBMEP. No **Apêndice G** (resumo das dissertações), em algumas dissertações, foi citada a metodologia de pesquisa ED, a utilização da TSD como o uso da teoria de ensino e a aplicação de PO. Por isso, que o ensino de geometria plana nas olimpíadas, tema de fundamental importância para o presente trabalho, desperta o interesse em executar a metodologia de pesquisa Engenharia Didática e a metodologia de ensino Teoria das Situações Didáticas na Situações Didáticas Olímpicas, tendo como apoio o *software* GeoGebra. Na análise dos trabalhos, foram encontrados alguns com os conteúdos de incentro e circuncentro no repositório do PROFMAT, tendo em vista que o programa trabalha o assunto geometria nas disciplinas obrigatórias.

Adiante, no capítulo cinco, são abordadas a segunda e a terceira fase previstas na Engenharia Didática (ED): Análise a *priori* e Experimentação. Na fase da Análise a *priori*, compreende-se a ordenação das Situações Didáticas Olímpicas (SDO), escolhendo questões de provas anteriores da IMO. Já na fase de Experimentação, mostra-se como foi a estruturação da formação de resolução de questões problemas, além disso descrever os participantes da pesquisa.

5 ANÁLISE A *PRIORI* DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS OLÍMPICAS

Neste capítulo, realiza-se o processo de descrição das SDO da IMO a serem aplicadas em sala de aula remota no contexto olímpico, descobrindo, assim, as dificuldades dos estudantes nos conteúdos prévios. Para essa aplicação, foram utilizadas questões de provas da Olimpíada Internacional de Matemática com o tópico descrito para geometria plana nos Problemas Olímpicos da pesquisa.

5.1 Descrição das Situações Didáticas Olímpicas (SDOs)

Nesta seção, serão apresentadas três Situações Didáticas Olímpicas (SDOs), seguindo as fases dialéticas da TSD, descrevendo os procedimentos dos alunos na proposta didática olímpica. O programa GeoGebra será utilizado para auxiliar no pensamento intuitivo do aluno. Ao final, serão explicados os comandos do *software* GeoGebra para elaboração das SDO.

5.2 Situação Didática Olímpica (SDO) 01

A situação didática SDO 01 é referente ao conteúdo da circunferência inscrita e ex-inscritas no triângulo, mais especificamente o seu centro conhecido por incentro, o ponto de encontro das bissetrizes internas e externas que também é o ponto que equidistância dos lados do triângulo, utiliza-se o *software* GeoGebra para discutir e resolver esse problema olímpico, relacionando os conteúdos prévios destacado no tópico seguinte.

Congruência de triângulos, Razão de segmentos, Semelhança de triângulos, Quadriláteros notáveis, Ângulos na circunferência, Circunferência inscrita e ex-inscrita.

5.2.1 Situação do Problema Olímpico

(Problema da IMO 1959 - Geometria - 2º Dia - Questão 04). Construir um triângulo retângulo com hipotenusa c, tal que a mediana da hipotenusa é a média geométrica dos dois catetos do triângulo.

Na Figura 4 (Linguagem - Inglês), apresenta-se a questão 04 extraída da prova da IMO (1959), menciona-se que, naquele ano, não houve a tradução para nossa língua portuguesa, sendo descrito o conceito de média geométrica visualizado na solução produzida pelo entendimento do aluno ao buscar subjetividade relacionando a noção de figuras geométricas, presente na estruturação do texto.

Figura 4 - Problema IMO 1959 (Linguagem - Inglês)

1959/4.

Construct a right triangle with given hypotenuse c such that the median drawn to the hypotenuse is the geometric mean of the two legs of the triangle.

Fonte: IMO (2020).

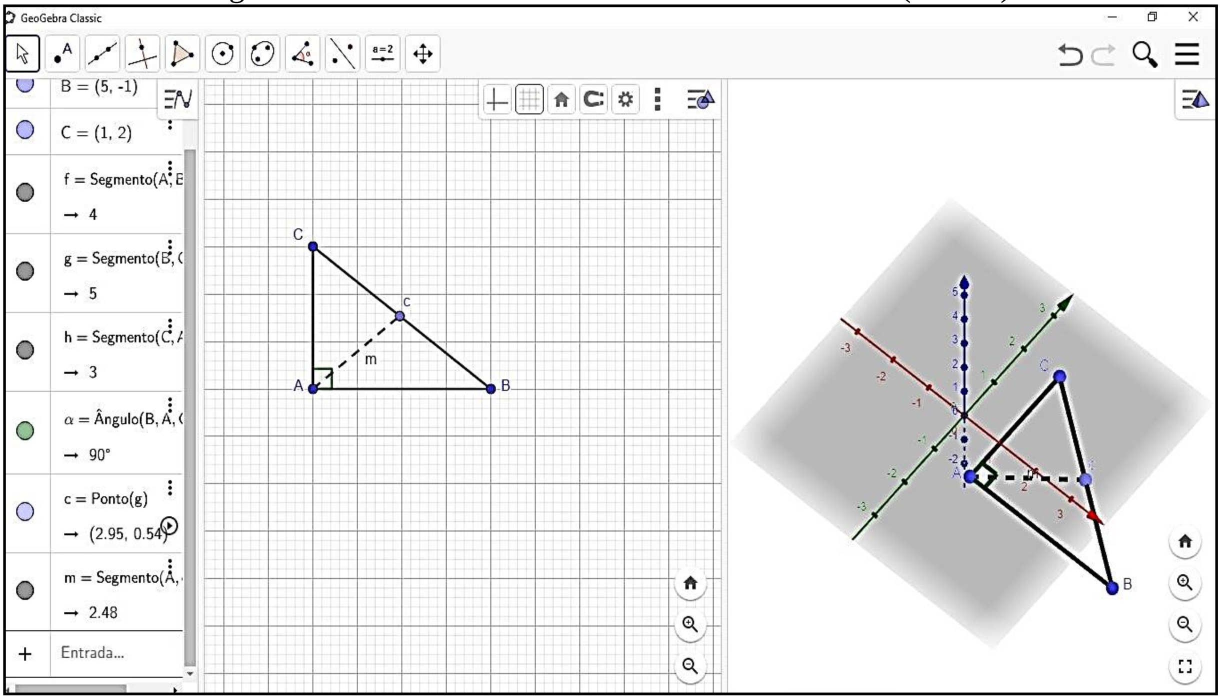
A IMO 1959 foi realizada na cidade Bucareste – Brasov, Romênia. Problema proposto pela delegação da Hungria.

5.2.2 Situação da Dialética da Ação

Nessa etapa, as pessoas da pesquisa terão uma proximidade com a descrição do problema olímpico, como também com a sua transferência para o *software* GeoGebra. Para que ocorra o conhecimento prévio da construção da SDO, o estudante toma suas próprias decisões sem ter consciência delas, como aprender um novo método de resolução de um problema. Almeja-se que os alunos incrementem um método de resposta fundamentada em seus conhecimentos preliminares em matemática e na situação didática olímpica ofertada, conforme procedimento de solucionar cada questão proposta.

Incialmente, nessa etapa, o professor pesquisador deve incentivar o discurso científico entre os alunos, destacando que, por meio da análise das simulações efetuadas com o manuseio da estruturação atingida pelo *software* GeoGebra, seja possível compreender a presença de relações entre os elementos matemáticos que podem ser visualizados na Figura 5.

Figura 5 - Desenvolvimento no GeoGebra da SDO 01 (Parte 1)



Fonte: Elaborada pelo autor.

A visualização da Figura 5 corresponde à imagem construída pelo software GeoGebra para *personal compute* (PC) ou *notebook*. Na janela de visualização do programa, é conduzida a imagem referente à visualização em duas dimensões geométricas: largura e comprimento (2D - dimensional) e em três dimensões geométricas: largura, altura e profundidade (3D - tridimensional). A Figura 6 corresponde ao *QR Code*[21] (*Quick Response*) código de barra criado pelo professor aplicador que possibilita o acesso à estruturação pelo *smartphone* (celular) ou *tablets*. Para ter acesso à construção, o aluno precisa apontar a câmera do *smartphone/tablet* na figura do código disponibilizado pelo professor ou ter um aplicativo que leia *QR Code* disponível nas lojas de compras de aplicativos de *Android* ou *iOS*.

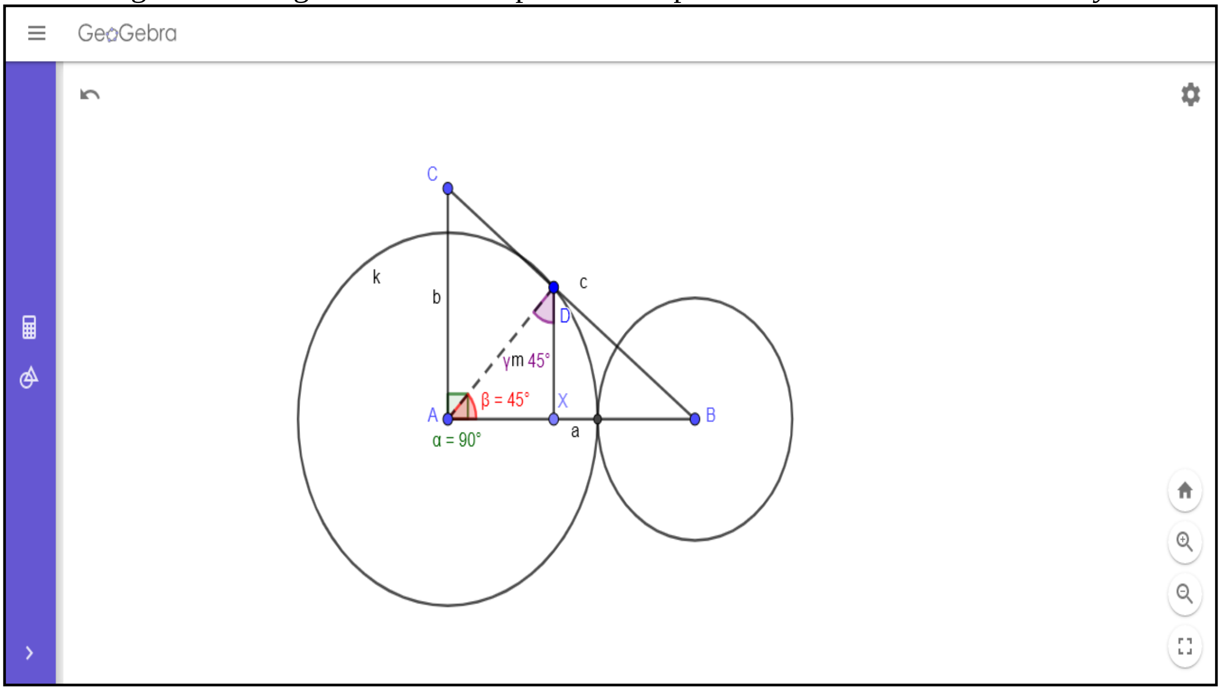
Figura 6 - *QR Code* para leitura do celular permitindo o acesso à figura

Fonte: Elaborada pelo autor.

[21] O *QR Code* também pode ser facilmente escaneado por qualquer celular moderno, no qual existem aplicativos específicos ou navegadores que tem a capacidade de ler o *link* e levar o aluno em potencial para o site que o professor realizou a hospedagem das figuras construídas no *software* GeoGebra.

Com o acesso permitido pelo *QR Code* exibido pelo navegador do *smartphone* para a plataforma GeoGebra *online*, o aluno terá acesso à figura construída em seu celular ou dispositivo móvel, e como outra opção o aplicativo *online Geometry* para computadores poderá abrir o arquivo em formato (ggb), adquirindo a seguinte visualização (Figura 7).

Figura 7 – Imagem identificada pelo celular para GeoGebra *online* - *Geometry*



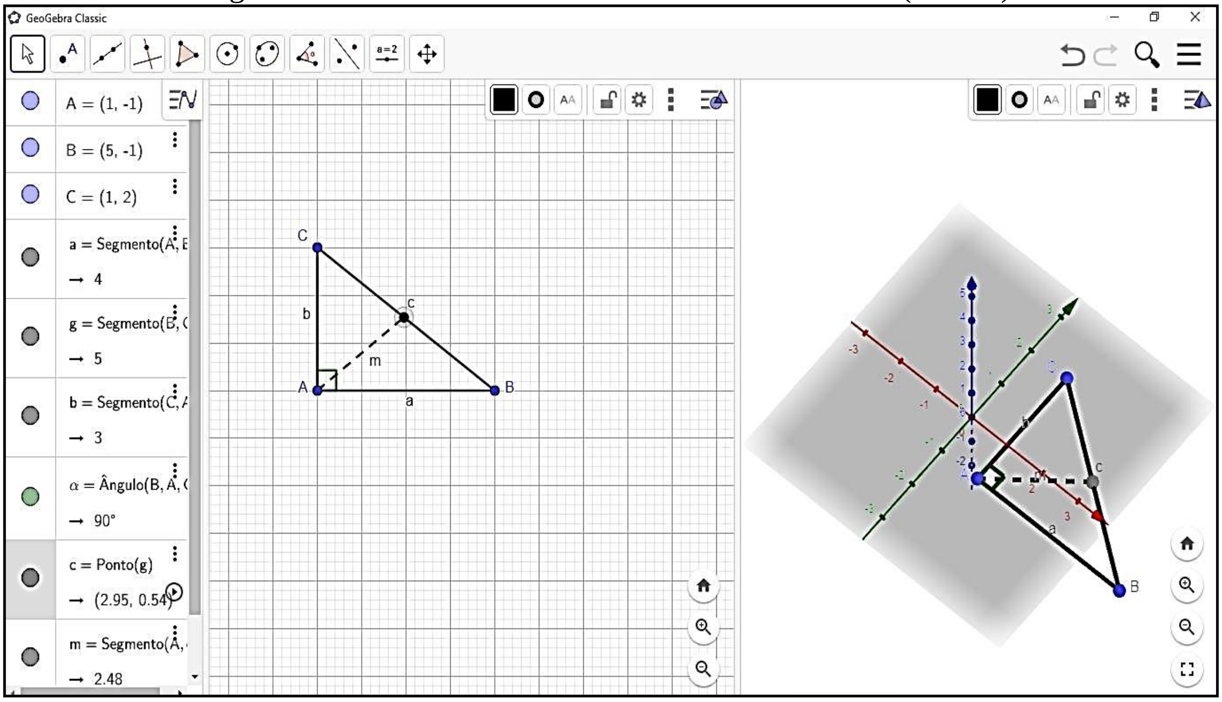
Fonte: Elaborada pelo autor.

5.2.3 Situação da Dialética da Formulação

Nessa fase, acontecerão as argumentações, a comparação dos princípios e suposições com o que foi mencionado ou relatado entre os estudantes sobre o procedimento de resposta na questão. Existe também um diálogo dos alunos com o processo realizado no *software* Geogebra. Se necessário, o professor pesquisador poderá até esse momento conduzir os estudantes a realizar indagações, relacionando ao conceito de exposição da prática didática.

Denota-se os dois catetos do triângulo retângulo descritos em duas reta *a* e *b*. Ao observar o fato bem conhecido de que, em um triângulo retângulo (ABC), a mediana (m) da hipotenusa (c) tem a metade do comprimento (CB) da hipotenusa. Isso é verdade porque, ao descrever o triângulo em um círculo ligados ao pontos A e B, a hipotenusa (c) é o diâmetro (Ac), então um segmento de qualquer ponto do círculo até o ponto médio da hipotenusa é um raio (Figura 8).

Figura 8 - Desenvolvimento no GeoGebra da SDO 01 (Parte 2)

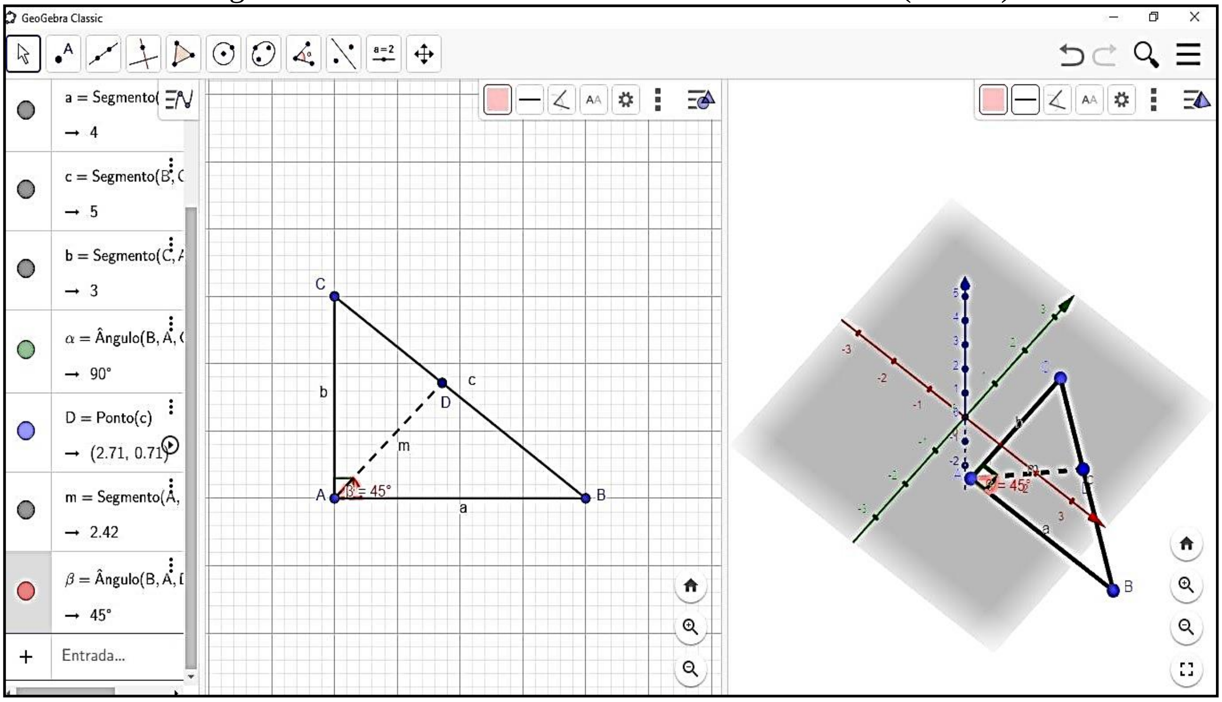


Fonte: Elaborada pelo autor.

Os alunos da pesquisa vão discutir a partir das informações obtidas na interpretação em relação ao ângulo formado no triângulo retângulo *ΔABC*. A partir das construções realizadas pelo *software* GeoGebra e com o contexto desses segmentos, além da modelagem do triângulo *ΔABC*, também se notará os catetos, se a e b, ou seja, $a < b$, então $c^2 = a^2 + b^2$, segue-se que o ângulo agudo em $\angle BAD = 45^o$ (quando sua medida é um número maior que 0 e menor que 90º) seja a metade do ângulo reto do triângulo *ΔABC* (Figura 9).

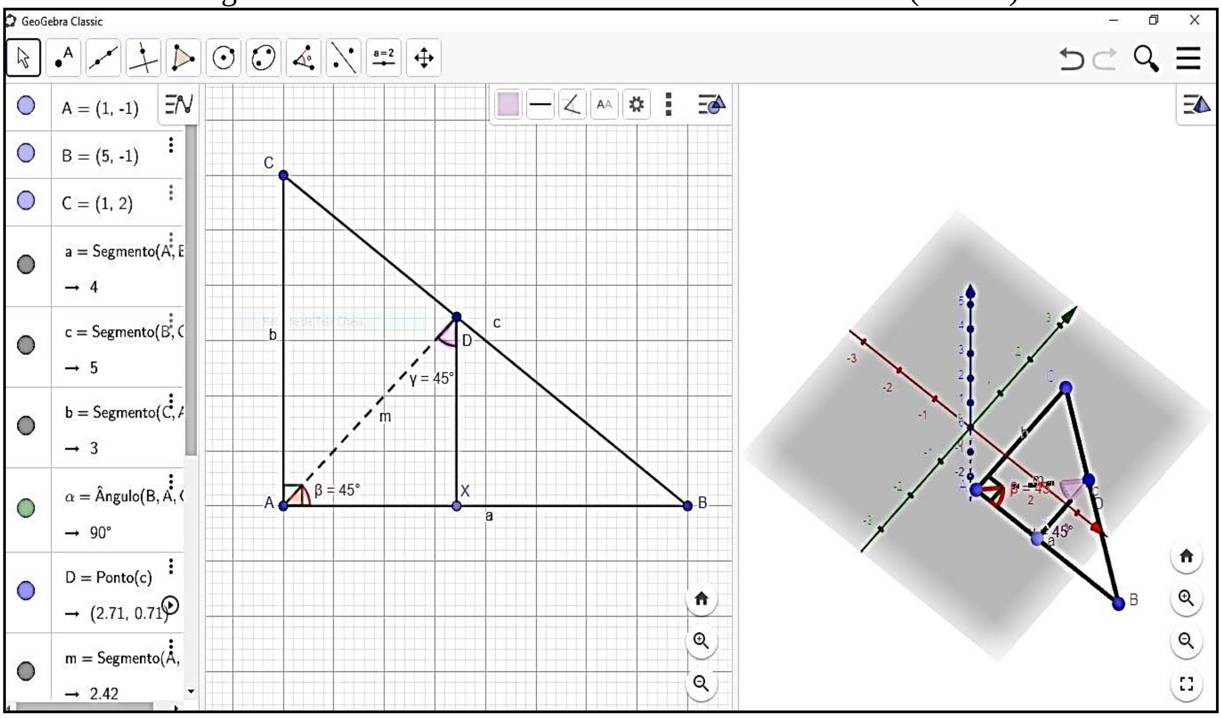
Dessa forma, dando continuidade à resolução do problema, é previsto que $c^2 = 4ab$, a partir da identificação, foi deduzido, imediatamente, por meio de alguns cálculos curtos da fórmula quadrática que $a = (2 - \sqrt{3})b$ e $a = (2 + \sqrt{3})b$ (Figura 9). Assim, $\frac{a}{b} = tan\ 15^o$ e $\frac{a}{b} = tan\ 75^o$ na Figura 10, e então um dos ângulos do triângulo ΔABC deve ser 15^o e outro deve ser 75^o (Figura 11).

Figura 9 - Desenvolvimento no GeoGebra da SDO 01 (Parte 3)



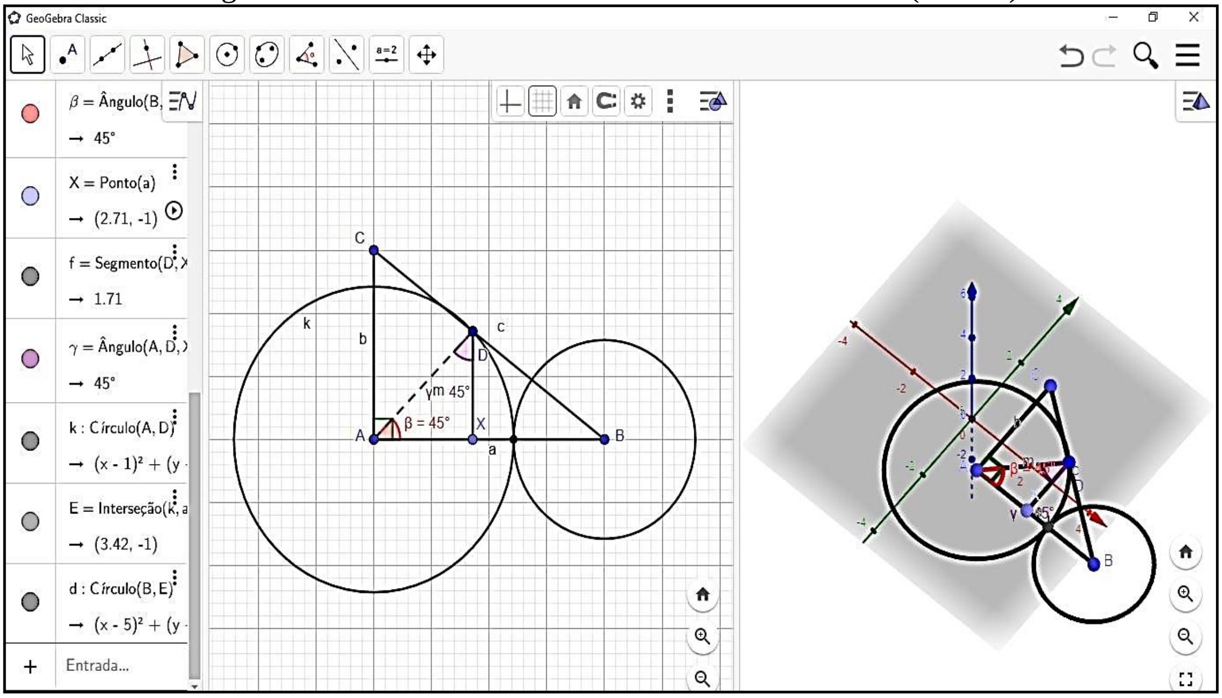
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 10 - Desenvolvimento no GeoGebra da SDO 01 (Parte 4)



Fonte: Elaborada pelo autor.

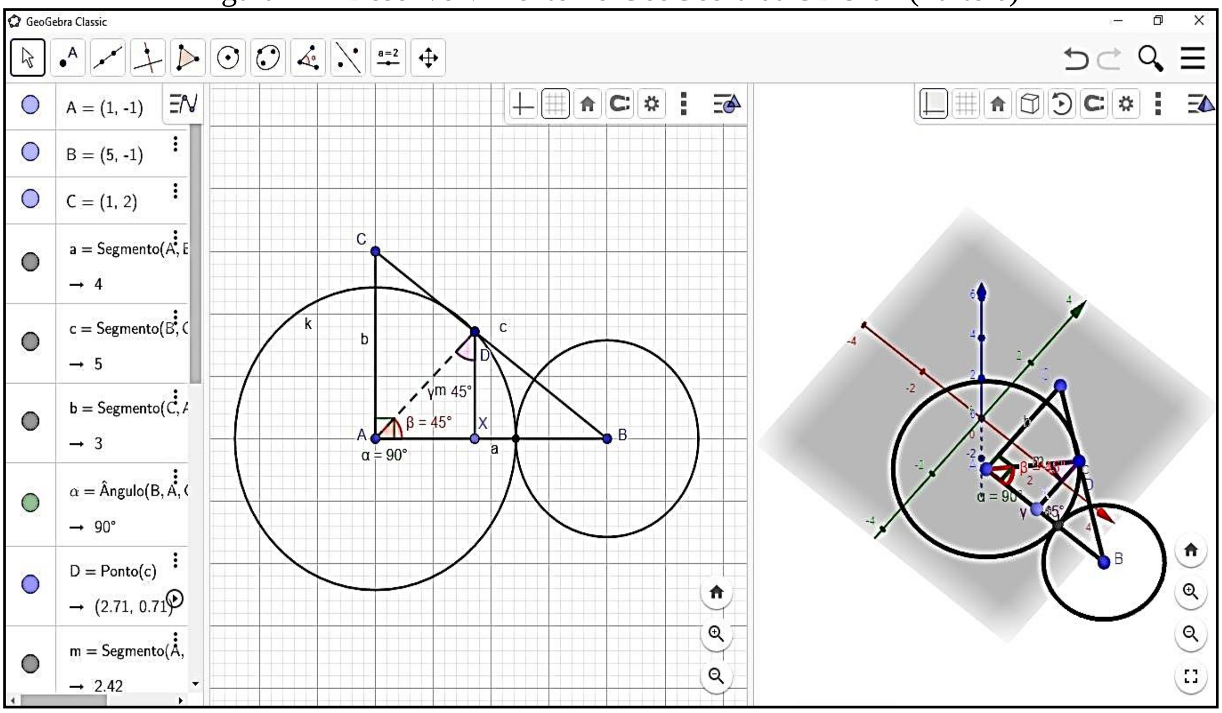
Figura 11 - Desenvolvimento no GeoGebra da SDO 01 (Parte 5)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Um ângulo de *15º* é facilmente construído pela bissetriz de um ângulo de *30º* (que é formado pela construção da altitude de um triângulo equilátero), e o ângulo de *75º* é construído pela construção de um ângulo de 15 graus no topo do ponto de 60 graus (Figura 12).

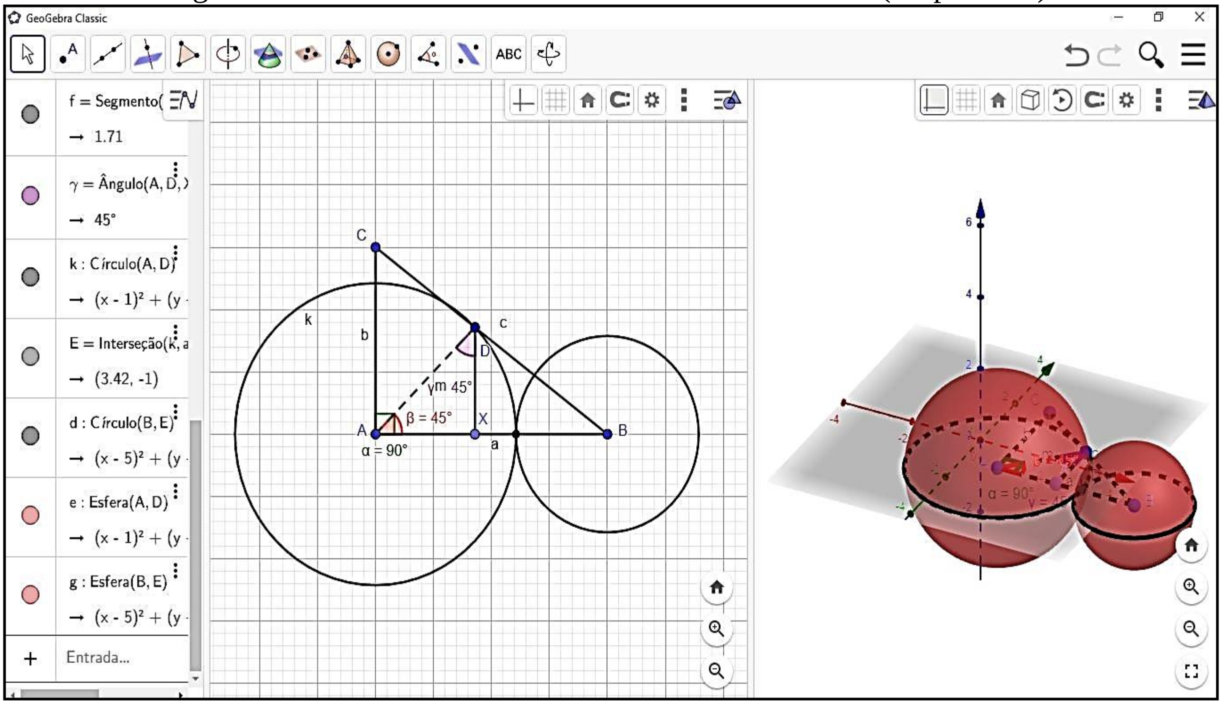
Figura 12 - Desenvolvimento no GeoGebra da SDO 01 (Parte 6)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Nesse aspecto, observa-se a construção da Figura 13 alinhada à opção de visualização em 3D do *software* GeoGebra.

Figura 13 - Desenvolvimento no GeoGebra da SDO 01 (Etapa Final)



Fonte: Elaborada pelo autor.

5.2.4 Situação da Dialética da Validação

Nessa etapa, deseja-se que exista uma conversa sobre a Situação Didática Olímpica (SDO), validação dos princípios no decorrer de sua resolução e, ainda, que seja verificado o condicionamento da questão, caso seja necessário à sua modelagem, a fim de avaliar os aspectos dela com a proposta do problema olímpico. De outra forma, espera-se ainda que a modelagem possibilite a construção de saberes matemáticos compreendidos no ensino tradicional de questão, pretendendo auxiliar na alegação no resultado dela.

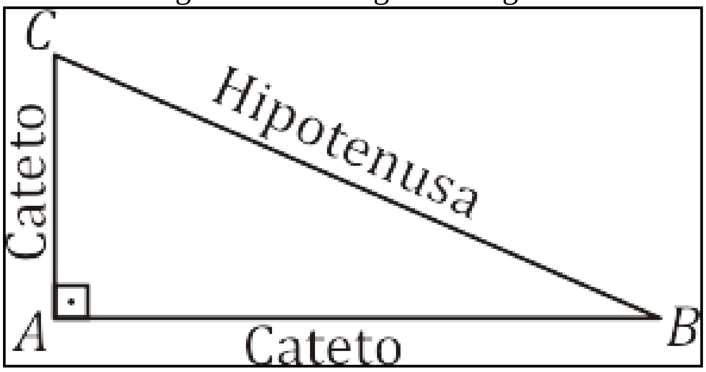
5.2.5 Situação da Dialética da Institucionalização

Nessa fase, segundo Teixeira e Passos (2013, p.166), o “professor retoma parte da responsabilidade cedida aos estudantes, conferindo-lhes o estatuto do saber ou descartando algumas produções dos estudantes e definindo, assim, os objetos de estudo por meio da formalização e da generalização”. Esse contexto possui um caráter didático, notado que, além do professor ter uma função ativa, ocorre um diálogo dele, do aluno e do saber, destacando ainda o processo do teorema do triângulo retângulo, o qual é apresentado conforme a demonstração de Quilhais (2015).

Teorema do triângulo retângulo

Um triângulo é chamado de triângulo retângulo se possuir um ângulo interno reto. O lado oposto ao ângulo reto recebe o nome de hipotenusa e os outros dois lados que formam o ângulo reto são chamados de catetos.

Figura 14 – Triângulo retângulo

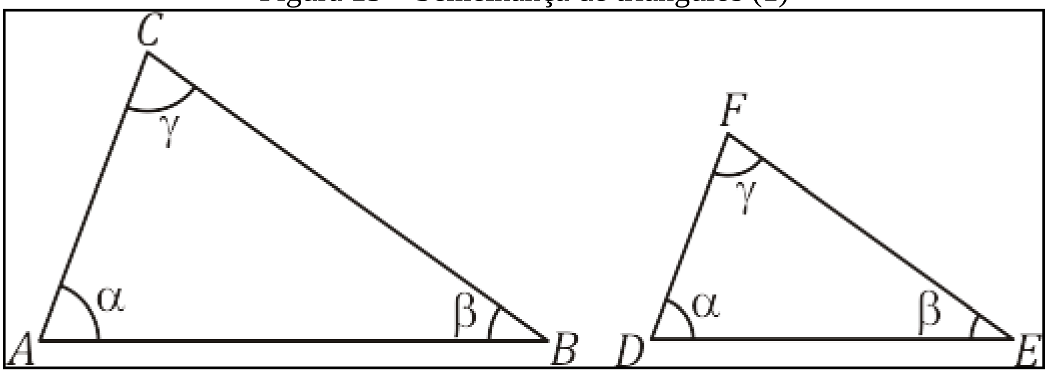


Fonte: Quilhais (2015).

Definição 2: Semelhança de triângulos: dois triângulos são semelhantes se, e somente se, existe uma correspondência biunívuca, que associa os três vértices de um triângulo aos três vértices do outro triângulo, tais que:

- ângulos com vértices correspondentes são congruentes;
- lados opostos a vértices correspondentes são iguais.

Figura 15 – Semelhança de triângulos (1)



Fonte: Quilhais (2015).

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF \Leftrightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

e

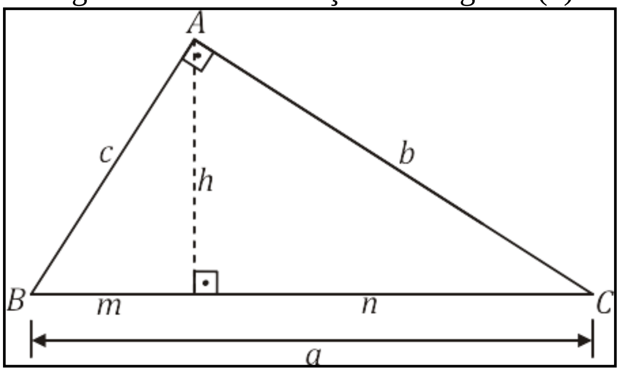
$$A \cong D$$

$$B \cong E$$

$$C \cong F$$

Seja o triângulo ΔABC, reto em A:

Figura 16 – Semelhança de triângulos (2)



Fonte: Quilhais (2015).

Apresenta descrito que:

- a é a hipotenusa;
- b e c são os catetos;
- h é a altura do triângulo relativa à hipotenusa;
- m é a projeção ortogonal do cateto c sobre a hipotenusa;
- n é a projeção ortogonal do cateto b sobre a hipotenusa.

5.2.6 Situação do Protocolo de Construção no **GeoGebra**

O Protocolo de Construção é uma tabela que detalha todos os comandos de construção no programa. Concede-lhe refazer passo a passo de uma construção já pronta, usando a Barra de Navegação localizada na base da Zona Gráfica. Na visualização da Figura 17, tem-se o protocolo de construção da SDO 01.

Figura 17 - Protocolo de construção no GeoGebra SDO 01

	Nome	Ícone	Descrição	Definição
1	Ponto A			
2	Ponto B			
3	Ponto C			
4	Segmento a		Segmento A, B	Segmento(A, B)
5	Segmento c		Segmento B, C	Segmento(B, C)
6	Segmento b		Segmento C, A	Segmento(C, A)
7	Ângulo α		Ângulo entre B, A, C	Ângulo(B, A, C)
8	Ponto D		Ponto sobre c	Ponto(c)
9	Segmento m		Segmento A, D	Segmento(A, D)
10	Ângulo β		Ângulo entre B, A, D	Ângulo(B, A, D)
11	Ponto X		Ponto sobre a	Ponto(a)
12	Segmento f		Segmento D, X	Segmento(D, X)
13	Ângulo γ		Ângulo entre A, D, X	Ângulo(A, D, X)
14	Círculo k		Círculo por D com centro A	Círculo(A, D)
15	Ponto E		Interseção de k, a	Interseção(k, a, 1)
16	Círculo d		Círculo por E com centro B	Círculo(B, E)
17	Esfera e		Esfera passando por D com centro A	Esfera(A, D)
18	Esfera g		Esfera passando por E com centro B	Esfera(B, E)

Fonte: Elaborada pelo autor.

5.3 Situação Didática Olímpica (SDO) 02

A SDO 02 trouxe consigo a notação usada no triângulo retângulo para escrever as relações métricas. Mostram-se os triângulos semelhantes e a descrição da proporcionalidade dos lados com auxílio do *software* GeoGebra e há os seguintes conteúdos prévios relacionados no próximo ponto: circunferência, incentro, pontos notáveis do triângulo, ângulos na circunferência e relações métricas no triângulo.

5.3.1 Situação do Problema Olímpico

(Problema da IMO 2006 - Geometria - 1º Dia - Questão 01). Seja *ABC* um triângulo com incentro *I*. Um ponto *P* no interior do triângulo verifica

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Prove que $AP \geq AI$, com igualdade se, e somente se, $P = I$.

Na visualização da Figura 18 (Linguagem - Inglês) e a Figura 19 (Linguagem - Português), apresenta-se a questão 01 extraída da prova da IMO (2006), na qual se menciona o conceito de pontos notáveis do triângulo, cuja solução é gerada pelo uso do raciocínio intuitivo do aluno ao procurar a abstração relacionada à noção de ângulo, presente na organização do texto.

Figura 18 - Problema IMO 2006 (Linguagem - Inglês)

G1. Let ABC be a triangle with incentre I. A point P in the interior of the triangle satisfies

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Show that $AP \geq AI$ and that equality holds if and only if P coincides with I.

(Korea)

Fonte: IMO (2020).

Figura 19 - Problema IMO 2006 (Linguagem - Português)

Problema 1. Seja ABC um triângulo com incentro I. Um ponto P no interior do triângulo verifica

$$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB}.$$

Prove que $AP \geqslant AI$, com igualdade se, e somente se, $P = I$.

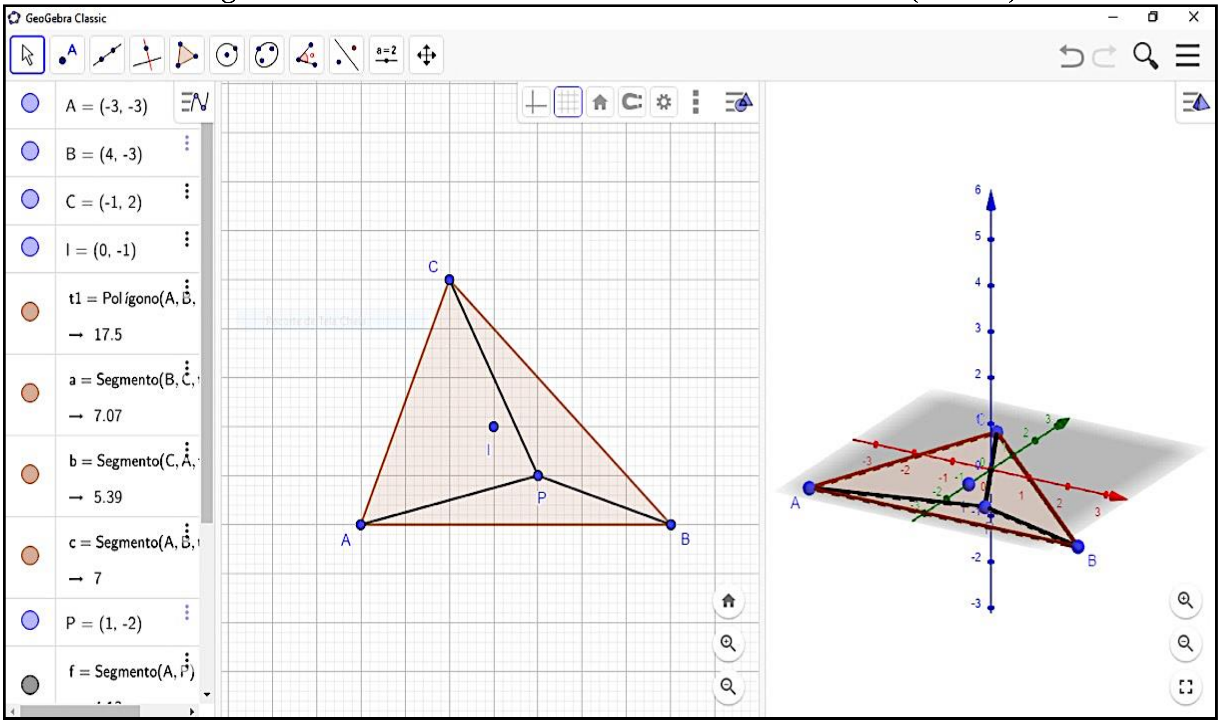
Fonte: IMO (2020).

A IMO 2006 foi realizada na cidade Eslovênia, Ljubljana. Problema proposto pela delegação da Coreia do Sul (*Korea*).

5.3.2 Situação da Dialética da Ação

Nesta etapa, deve-se permitir que os alunos avaliem os resultados do texto da própria questão e ajustem, se necessário, na Situação Didática Olímpica no GeoGebra, sem a interferência do professor. “Nela as interações estão centralizadas na tomada de decisões” (ALMOULOUD, 2007, p. 37-38). Dessa forma, vale ressaltar a importância das decisões aceitas pelos alunos na interpretação e no diagnóstico do problema para atingirem a uma solução. Espera-se que os alunos, nessa etapa dos conteúdos prévios, diferenciem as características do problema a fim de uma condição equivalente nos pontos ABC do triângulo, assim como analisem como exercerão os comandos na construção no GeoGebra proposta pela SDO (Figura 20).

Figura 20 - Desenvolvimento no GeoGebra da SDO 02 (Parte 1)



Fonte: Elaborada pelo autor.

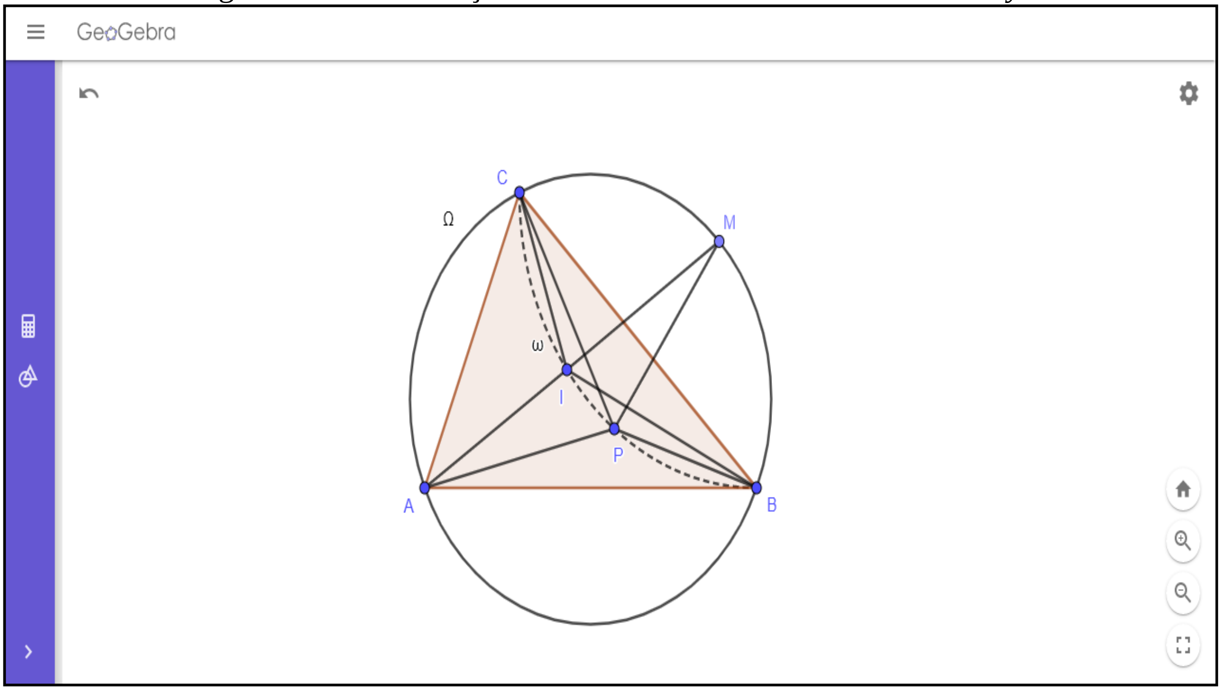
Nessa etapa, observa-se o *QR Code* (Figura 21) que demonstra, no aplicativo do *smartphone* ou dispositivo móvel, a construção do Problema Olímpico (PO) para os estudantes.

Figura 21 – Acesso via *QR Code* para celular ou *tablet*

Fonte: Elaborada pelo autor.

A construção (Figura 22) mostra os comandos do Problema Olímpico (PO) para os alunos terem uma noção no *software* GeoGebra, disponível na plataforma virtual ou no acesso ao programa diretamente feito *download* para computadores e que é acessível a qualquer sistema operacional.

Figura 22 – Visualização do PO no GeoGebra *online* - *Geometry*



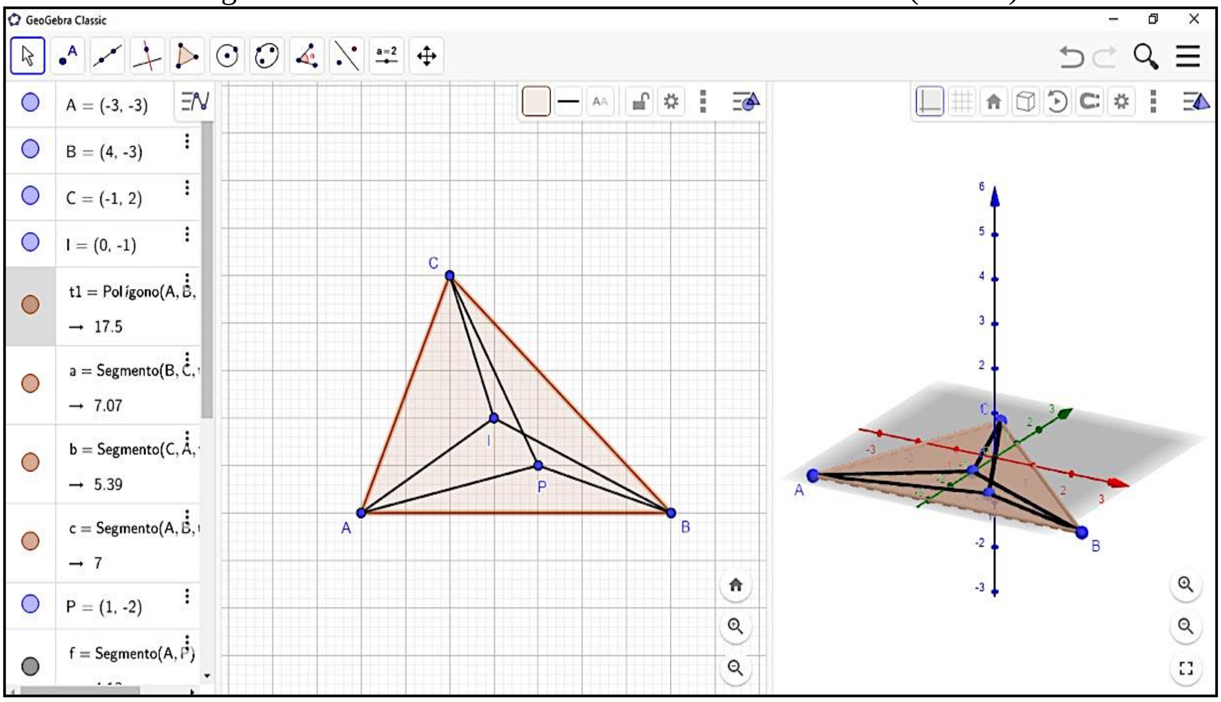
Fonte: Elaborada pelo autor.

5.3.3 Situação da Dialética da Formulação

De acordo com Almouloud (2007, p. 38), a etapa de formulação "[...] consiste em proporcionar ao aluno condições para que este construa, progressivamente, uma linguagem compreensível por todos". É nessa fase, portanto, que eles têm uma interação mais atenciosa com os colegas, buscando inovar nas ideias sobre o problema proposto, com o propósito de encontrar um padrão matemático, para chegar à solução do problema.

Apresenta a seguinte descrição dos pontos $\angle IBP = \angle IBC - \angle PBC = \frac{1}{2} \angle ABC - \angle PBC = \frac{1}{2}(\angle PCB - \angle PCA)$ (1) e da mesma forma $\angle ICP = \angle PCB - \angle ICB = \angle PCB - \frac{1}{2} \angle ACB = \frac{1}{2}(\angle PBA - \angle PBC)$ (2) como ilustrada na Figura 23 e 24.

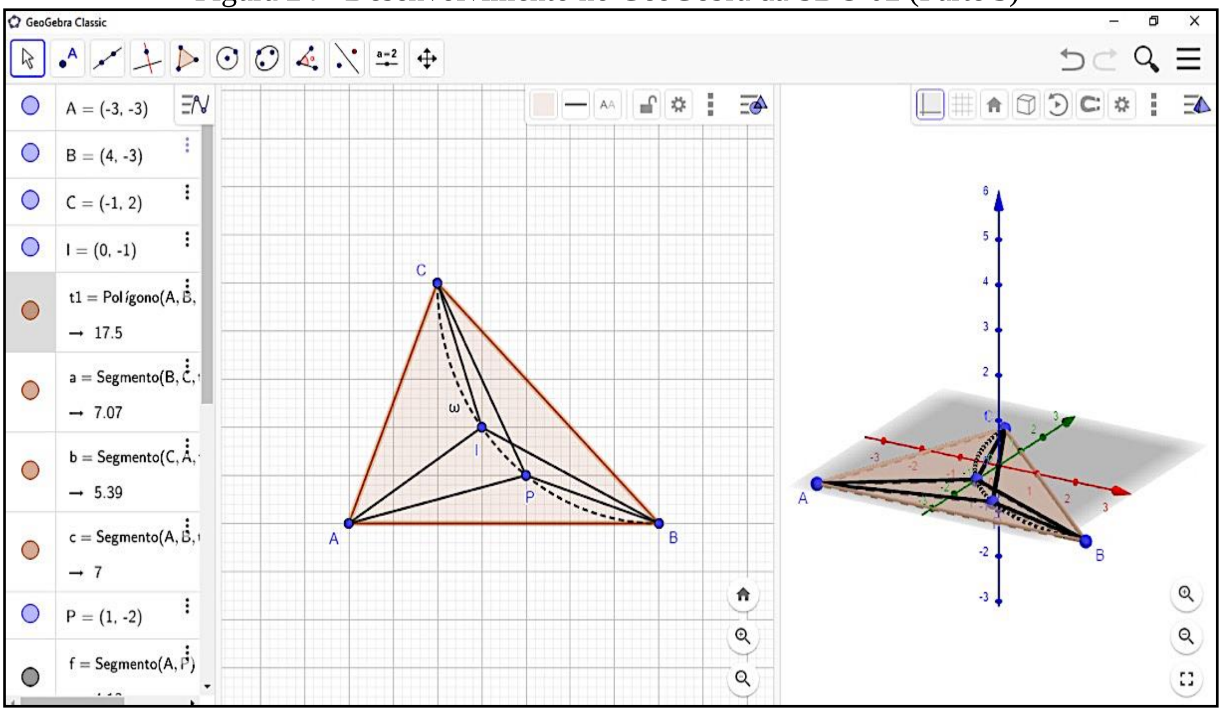
Figura 23 - Desenvolvimento no GeoGebra da SDO 02 (Parte 2)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Desse modo, os alunos chegam à seguinte conclusão: o incentro (intersecção das bissetrizes internas de um triângulo, ou seja, dado pelo encontro dessas semirretas) do triângulo Δ*ABC* tem seu ângulo interno de *180º*.

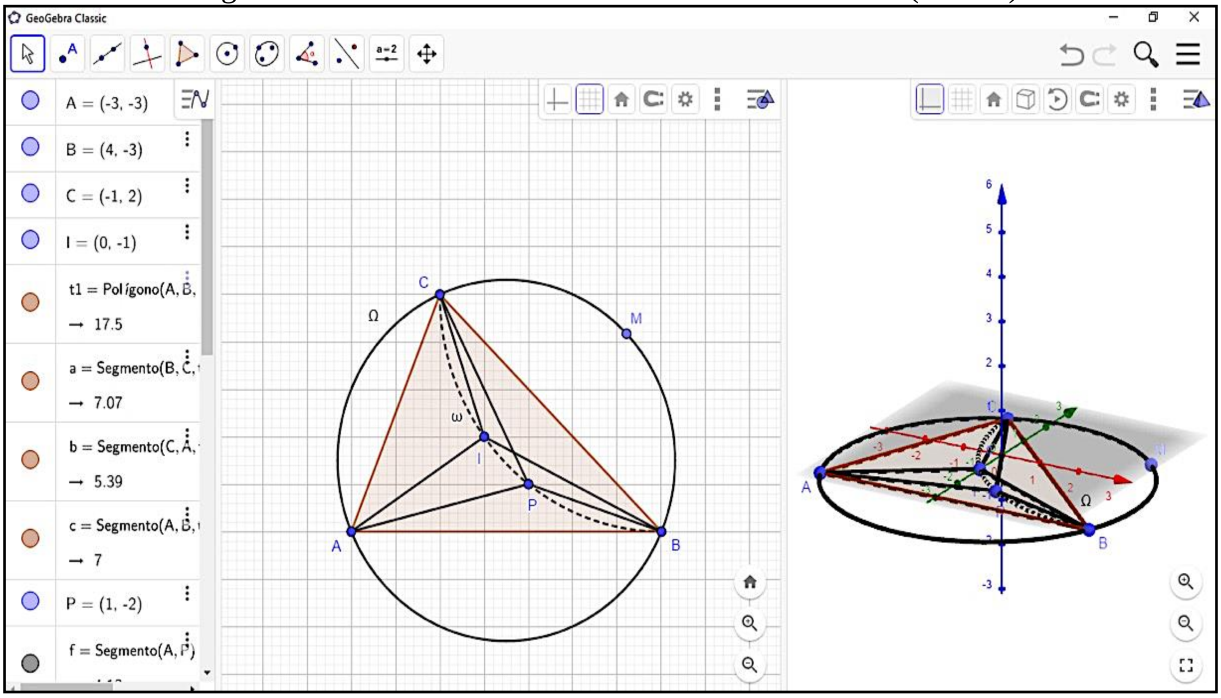
Figura 24 - Desenvolvimento no GeoGebra da SDO 02 (Parte 3)



Fonte: Elaborada pelo autor.

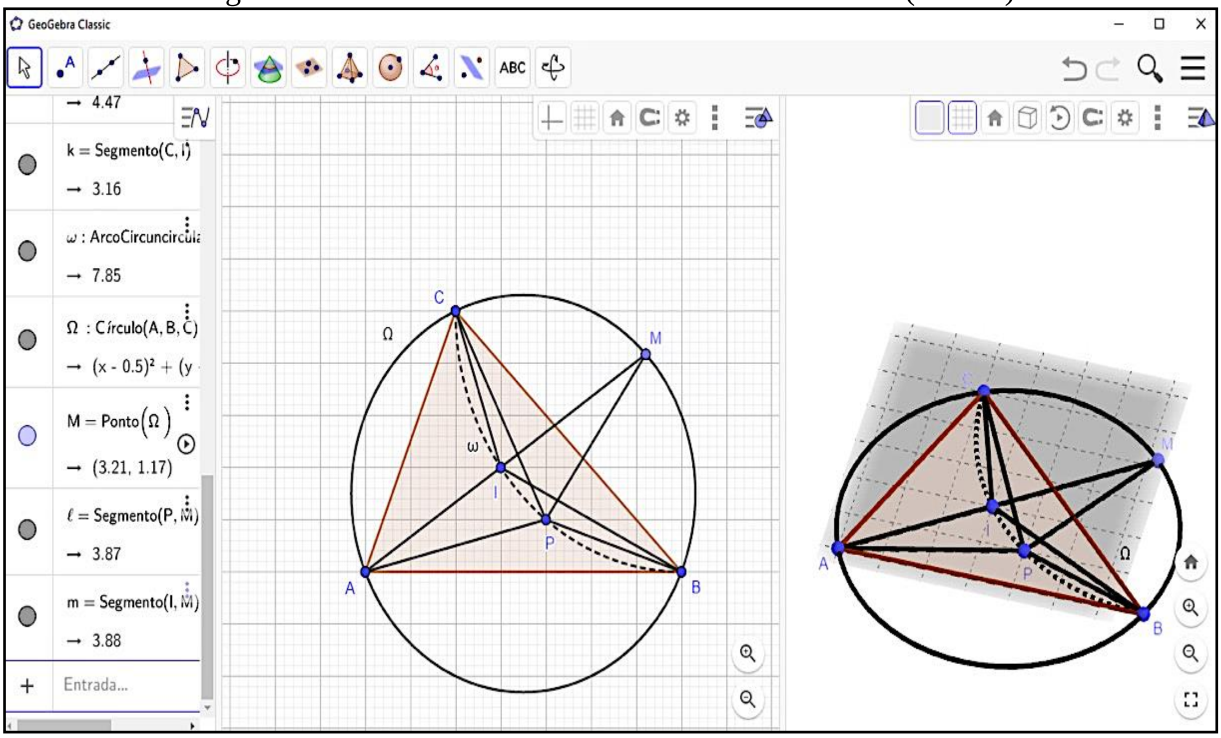
Desse modo, os alunos chegam à seguinte conclusão: $\angle PBA + \angle PCA - \angle PBC + \angle PCB$, tendo as ligações dos pontos $\angle PBA - \angle PBC = \angle PCB - \angle PCA$. Consequentemente, por (1), (2) e (3), obtém os seguintes pontos $\angle IBP = \angle ICP$; portanto, B, I, P, C são concíclicos (aqueles que pertencem à mesma circunferência), conforme vistos na Figura 25 e 26.

Figura 25 - Desenvolvimento no GeoGebra da SDO 02 (Parte 4)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 26- Desenvolvimento no GeoGebra da SDO 02 (Parte 5)

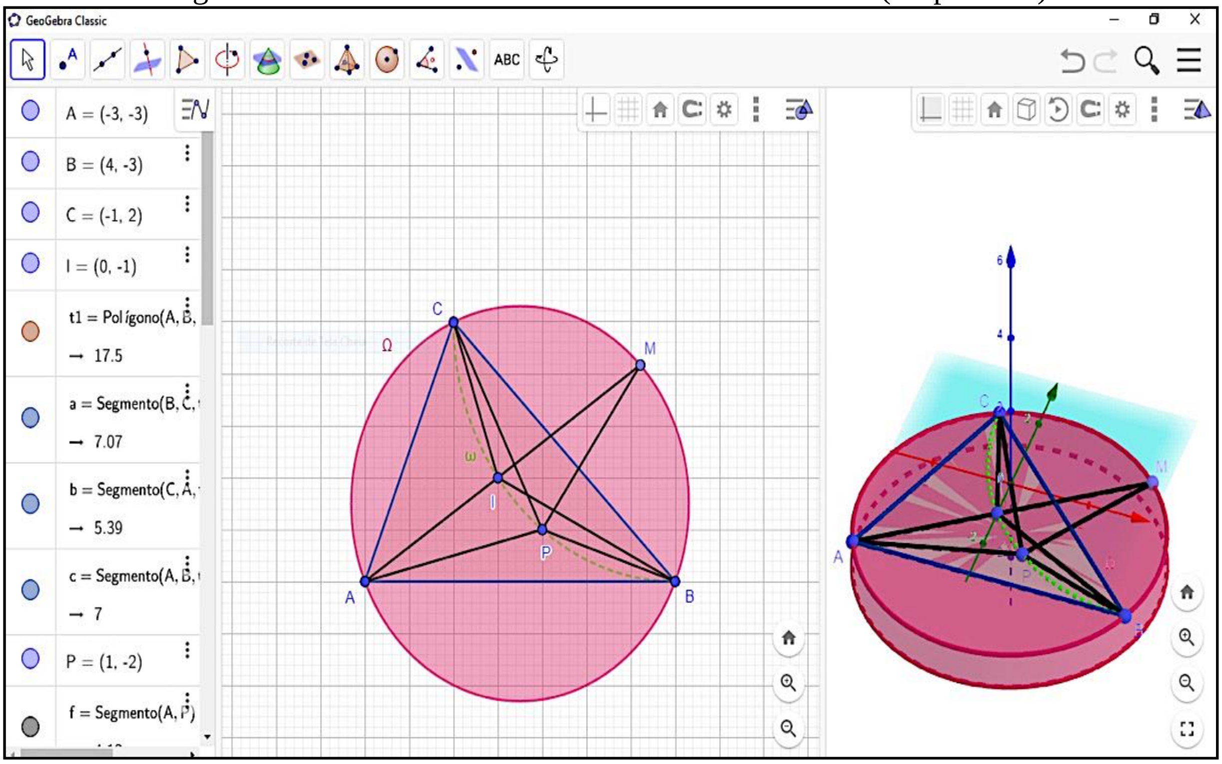


Fonte: Elaborada pelo autor.

Os alunos chegam a um resultado de incluir também que a área do triângulo *ABC* é dividida pelo incentro ligado a *A*, *B* e *C*. Com o raio *AI*, encontra-se a circunferência de *ΔABC* um ponto *M*. Então, pelo segmento do incentro nos pontos $MB = MC = MI = MP$ de mesmo segmento de reta exposto (Figura 26).

Finalmente, $AP + MP \geq AM = AI + IM$ (uma vez que o triângulo APM pode ser alterado, o que ocorre apenas quando $P = I$) mas $MI = MP$; daqui $AP \geq AI$ descrito no modelo de figura tridimensional (Figura 27).

Figura 27 - Desenvolvimento no GeoGebra da SDO 02 (Etapa Final)



Fonte: Elaborada pelo autor.

5.3.4 Situação da Dialética da Validação

Espera-se, nesse processo, que os estudantes fundamentem e apresentem as estratégias matemáticas aplicadas, já que, nas palavras de Almouloud (2007, p. 39), o objetivo a ser alcançado nessa etapa é que “[...] o aprendiz deve mostrar a validade do modelo por ele criado, submetendo a mensagem matemática (modelo da situação) ao julgamento de um interlocutor”. Perante os pressupostos feitos na dialética de formulação, os alunos devem concluir que as retas AP ≥ AI. Portanto, a igualdade vale se, e somente se, P estiver no segmento de linha AI, que ocorre se e somente se P = I.

5.3.5 Situação da Dialética da Institucionalização

Então, o professor reassume o controle das atividades didáticas e formaliza o resultado obtido pelos alunos. Para Almouloud (2007, p. 40), essa é a etapa em que "o professor fixa, convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber".

Nesse processo final, cabe ao professor justificar uma solução do problema, as mediatrizes (dos lados) de um triângulo interceptam em um único ponto o qual é equidistante dos seus vértices. Enfatizando ainda os casos de circuncentro, conforme Massago (2014, p. 2-3) apresenta a descrição do teorema do circuncentro:

Teorema do Circuncentro

- Seja o triângulo retângulo de *ΔABC*. Então as mediatrizes *AB*, *AC* e *BC* interceptam num ponto *P*. Além disso, *PA* = *PB* = *PC*. Dado *ΔABC* com *M* e *P*, pontos médios dos lados *AB*, *BC* e *AC* respectivamente. Como as mediatrizes de *AB* e *BC* cruzam, ao denotar que este ponto passa por I (Figura 13). Como I está na mediatriz de *AB*, é equidistante de *A* e *B*, tendo *IA* = *IB*.
- Analogamente, *IB* = *IC* e, consequentemente, I é equidistante dos vértices.
- Agora considere a reta passando por *P* e *I*. Como *P* é o ponto médio e *I* é equidistante de *A* e *C*, a reta é mediatriz do lado *AC*. Portanto, todas as mediatrizes cruzam em *I* que é equidistante dos vértices. Uma circunferência com centro no circuncentro que passa em um dos vértices, passa em todos os outros vértices. A circunferência que passa em todos os vértices de um polígono é chamada de circunferência circunscrita. A intersecção das mediatrizes dos lados de um triângulo é o centro da circunferência circunscrita (Figura 13).

Após confrontar o modelo matemático com o modelo computacional, far-se-á o fechamento dos conceitos explicitando aos alunos que a atividade envolveu um Problema Olímpico (PO).

5.3.6 Descrição do Protocolo de Construção no GeoGebra

O Protocolo de Construção é uma tabela que detalha todos os comandos de construção no programa. Concede-lhe refazer passo a passo uma construção já pronta, usando a Barra de Navegação localizada na base da Zona Gráfica. Nas figuras 28 e 29, tem-se o protocolo de construção da SDO 02.

Figura 28 - Protocolo de construção no GeoGebra SDO 02 (Parte 1)

	Nome	Ícone	Descrição	Definição
1	Ponto A			
2	Ponto B			
3	Ponto C			
4	Ponto I			

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 29 - Protocolo de construção no GeoGebra SDO 02 (Parte 2)

5	Triângulo t1		Polígono A, B, C	Polígono(A, B, C)
5	Segmento c		Segmento A, B	Segmento(A, B, t1)
5	Segmento a		Segmento B, C	Segmento(B, C, t1)
5	Segmento b		Segmento C, A	Segmento(C, A, t1)
6	Ponto P			
7	Segmento f		Segmento A, P	Segmento(A, P)
8	Segmento g		Segmento B, P	Segmento(B, P)
9	Segmento h		Segmento C, P	Segmento(C, P)
10	Segmento i		Segmento A, I	Segmento(A, I)
11	Segmento j		Segmento B, I	Segmento(B, I)
12	Segmento k		Segmento C, I	Segmento(C, I)
	Nome	Ícone	Descrição	Definição
13	Arco ω		ArcoCircuncircular(B, I, C)	ArcoCircuncircular(B I, C)
14	Círculo Ω		Círculo por A, B, C	Círculo(A, B, C)
15	Ponto M		Ponto sobre Ω	Ponto(Ω)
16	Segmento l		Segmento P, M	Segmento(P, M)
17	Segmento m		Segmento I, M	Segmento(I, M)

Fonte: Elaborada pelo autor.

5.4 Situação Didática Olímpica (SDO) 03

A Situação Olímpica 03 relaciona a circunferência inscrita ou ex-inscrita, linha tangente e congruência de triângulos, conforme descrito nos conteúdos prévios: Triângulo retângulo, Circuncentro, Incentro, Ponto médio do segmento, Congruência de triângulos, Razão de segmentos, Ângulos na Circunferência e Relações métricas no triângulo.

5.4.1 Situação do Problema Olímpico

(Problema da IMO 2009 – Geometria – 1º Dia – Questão 02). Seja *ABC* um triângulo cujo circuncentro é *O*. Sejam *P* e *Q* pontos interiores dos lados *CA* e *AB*, respectivamente. Sejam *K*, *L* e *M* os pontos médios dos segmentos *BP*, *CQ* e *PQ*, respectivamente, e Γ a circunferência que passa por *K*, *L* e *M*. Suponha que a reta *PQ* é tangente à circunferência Γ. Demonstre que *OP* = *OQ*.

Na visualização da Figura 30 (Inglês) e visto na Figura 31 (Português), apresenta-se a questão 02 extraída da prova da IMO (2009), a qual menciona o conceito de circunferência, cuja resultado é formado no entendimento do estudante ao buscar a relação de concepção de ponto médio do segmento existente na colocação do texto.

Figura 30 – Problema IMO 2009 (Linguagem – Inglês)

G2 RUS (Russian Federation)

Let ABC be a triangle with circumcenter O. The points P and Q are interior points of the sides CA and AB, respectively. The circle k passes through the midpoints of the segments BP, CQ, and PQ. Prove that if the line PQ is tangent to circle k then $OP = OQ$.

Fonte: IMO (2020).

Figura 31 - Problema IMO 2009 (Linguagem - Português)

Problema 2. Seja ABC um triângulo cujo circuncentro é O. Sejam P e Q pontos interiores dos lados CA e AB, respectivamente. Sejam K, L e M os pontos médios dos segmentos BP, CQ e PQ, respectivamente, e Γ a circunferência que passa por K, L e M. Suponha que a recta PQ é tangente à circunferência Γ. Demonstre que $OP = OQ$.

Fonte: IMO (2020).

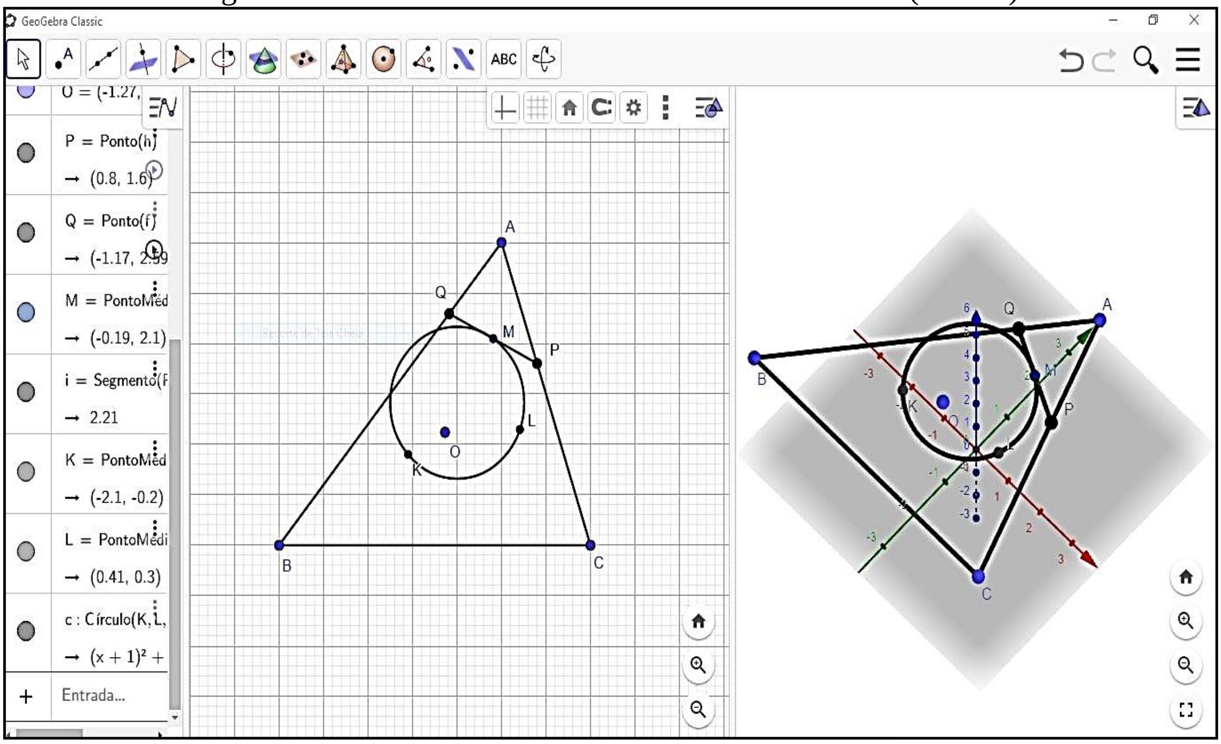
A IMO 2009 foi realizada na cidade Bremen, Alemanha. Problema proposto pela delegação da Rússia.

5.4.2 Situação da Dialética da Ação

Nessa fase, espera-se que os estudantes tenham as suas discussões levadas ao problema. Condições diferentes produzem a necessidade da mudança de informações e a criação de uma linguagem para assegurar/permitir tal mudança. (DOUADY, 1984, apud ARTIGUE, 1984a, p. 7). Desse modo, espera-se que os discentes analisem e notem a descrição e a figura plana acessível para chegar às situações e os pressupostos necessários à resolução da questão e, assim, compreender que a circunferência está ligada ao ponto médio do triângulo retângulo ΔABC. Entretanto o ponto médio do triângulo ΔABC tem sua reta que passa pelo triângulo ΔAPQ.

Inicialmente, o professor deve estimular nos alunos a análise dos dados disponibilizados no enunciado do problema, realizando uma breve leitura do texto da questão e o esboço da construção do triângulo retângulo junto à circunferência e seus pontos médios. Seguindo assim, a partir do ponto O, marcando dois pontos que passam na circunferência K e L (Figura 32).

Figura 32 - Desenvolvimento no GeoGebra da SDO 03 (Parte 1)



Fonte: Elaborada pelo autor.

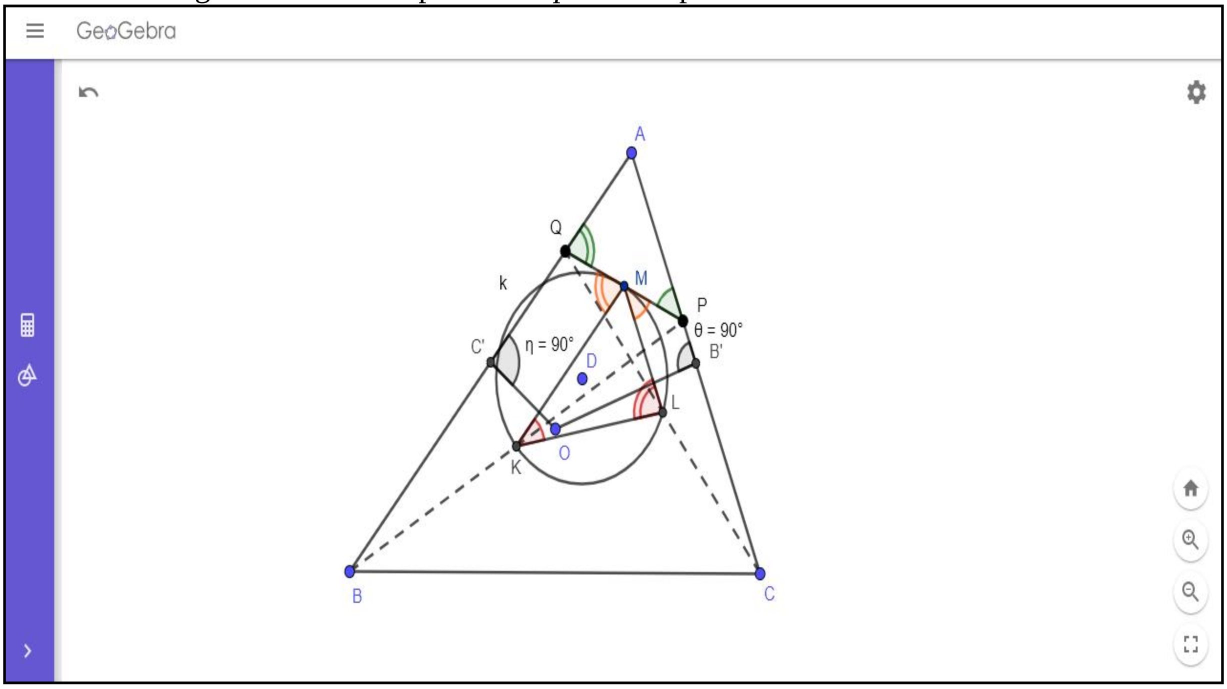
Contudo, observa-se na estruturação (Figura 33) o *QR Code* para dispositivo móvel (*smartphone*/*tablet*). Assim, os alunos terão acesso à construção realizada no *software* GeoGebra para utilização das suas resoluções da situação didática 03.

Figura 33 – Visualização do *QR Code* para acesso ao Problema Olímpico

Fonte: Elaborada pelo autor.

Além disso, os estudantes têm disponível acesso à base de dados da Situação Didática Olímpica 03, observada no celular (Figura 34).

Figura 34 - Acesso pelo *smartphone* na plataforma GeoGebra *online*

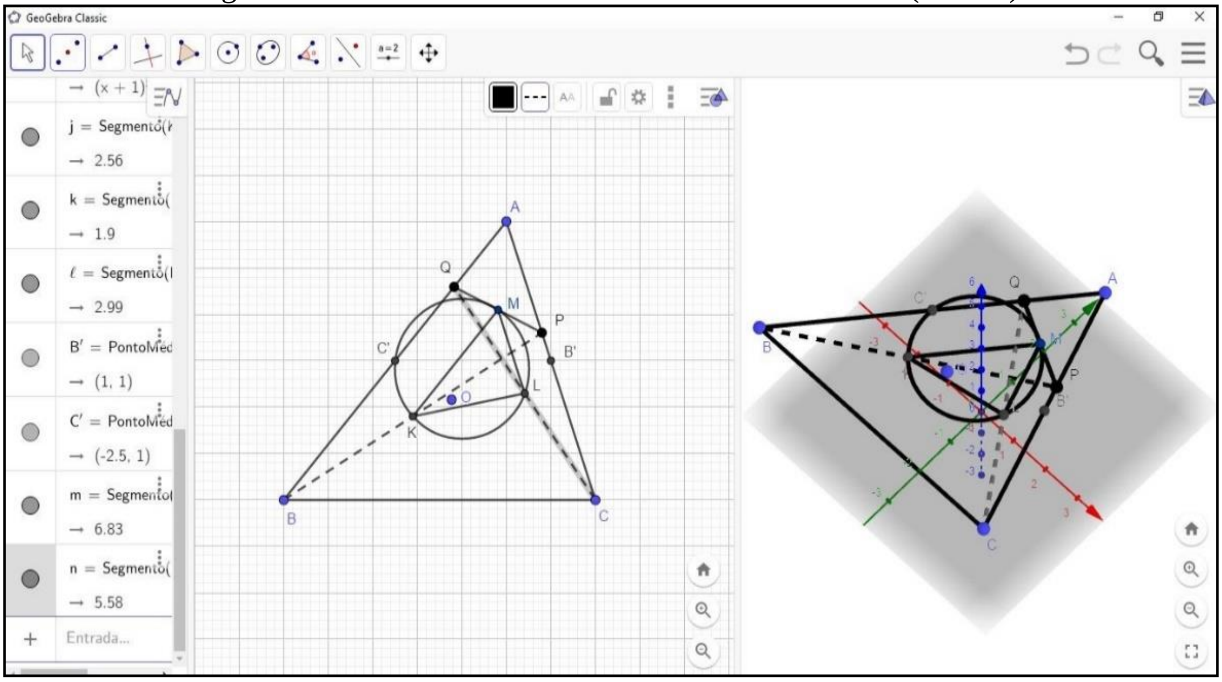


Fonte: Elaborada pelo autor.

5.4.3 Situação da Dialética da Formulação

Nessa fase, segundo Douady (1984, apud ARTIGUE, 1984b, p. 7), "condições diferentes produzem a necessidade da mudança de informações e a criação de uma linguagem para assegurar/permitir tal mudança". Dessa forma, o estudante pode justificar suas informações pelas argumentações nos pressupostos levantados anteriormente e, com ajuda da modelação no *software* GeoGebra, explorar as propriedades matemáticas que se tornem necessárias na Situação Didática Olímpica ligadas à descrição dos pontos *K*, *L*, *M*, *B'*, *C'* os pontos médios de *BP*, *CQ*, *PQ*, *CA e AB*, respectivamente (Figura 35).

Figura 35 - Desenvolvimento no GeoGebra da SDO 03 (Parte 2)



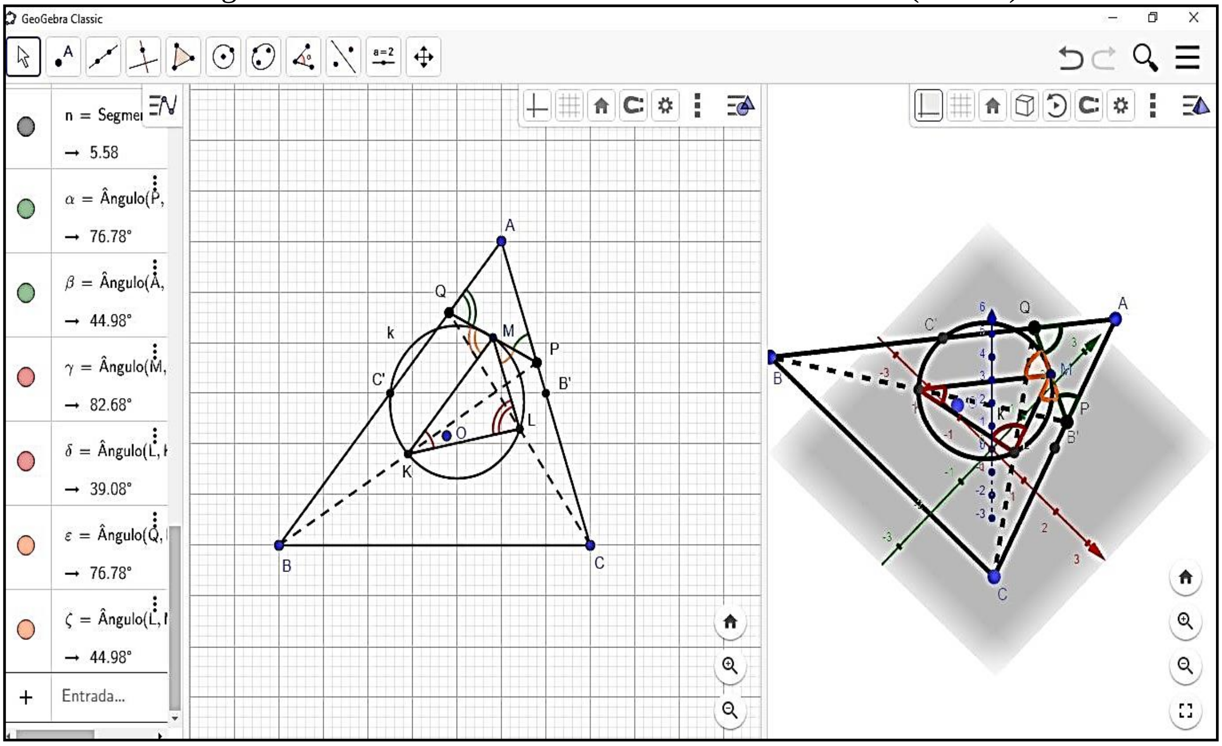
Fonte: Elaborada pelo autor.

Portanto, ampliando a relação de *CA* || *LM*, tendo a ligação dos pontos ∠*LMP* = ∠*QPA*. Como *K* toca o segmento *PQ* em *M*, encontra-se a seguinte descrição ∠*LMP* = ∠*LKM*. Tendo circunscrito outro triângulo Δ*KLM* descrito dentro da circunferência com dois lados iguais e um diferente (triângulo equilátero), conforme a Figura 36.

Assim, para descrever os pontos médios do *PAQPA* = ∠*LKM*, os docentes deverão realizar cada intersecção ligados ao triângulo retângulo Δ*ABC*. Da mesma forma, segue *AB* || *MK* que ∠*PQA* = ∠*KLM* determinando seus ângulos. Portanto, os triângulos *APQ* e *MKL* são semelhantes (Figura 37).

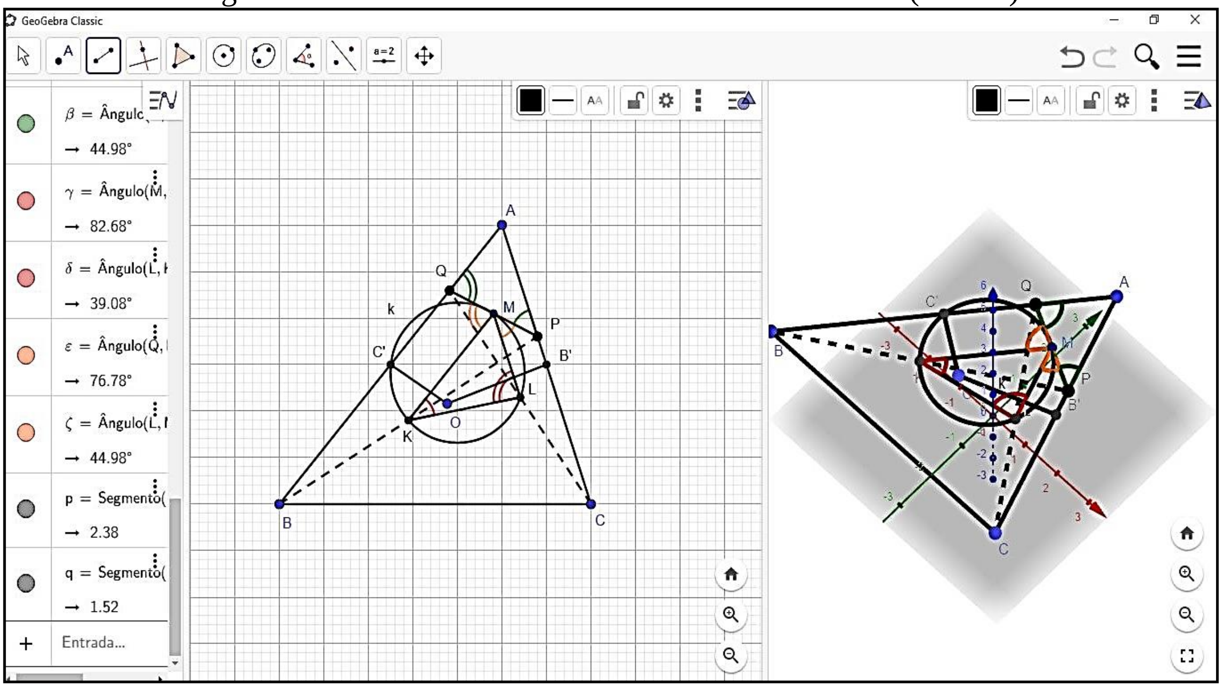
$$\frac{AP}{AQ} = \frac{MK}{ML} = \frac{\frac{QB}{2}}{\frac{PC}{2}} = \frac{QB}{PC}$$

Figura 36 - Desenvolvimento no GeoGebra da SDO 03 (Parte 3)



Fonte: Elaborada pelo autor.

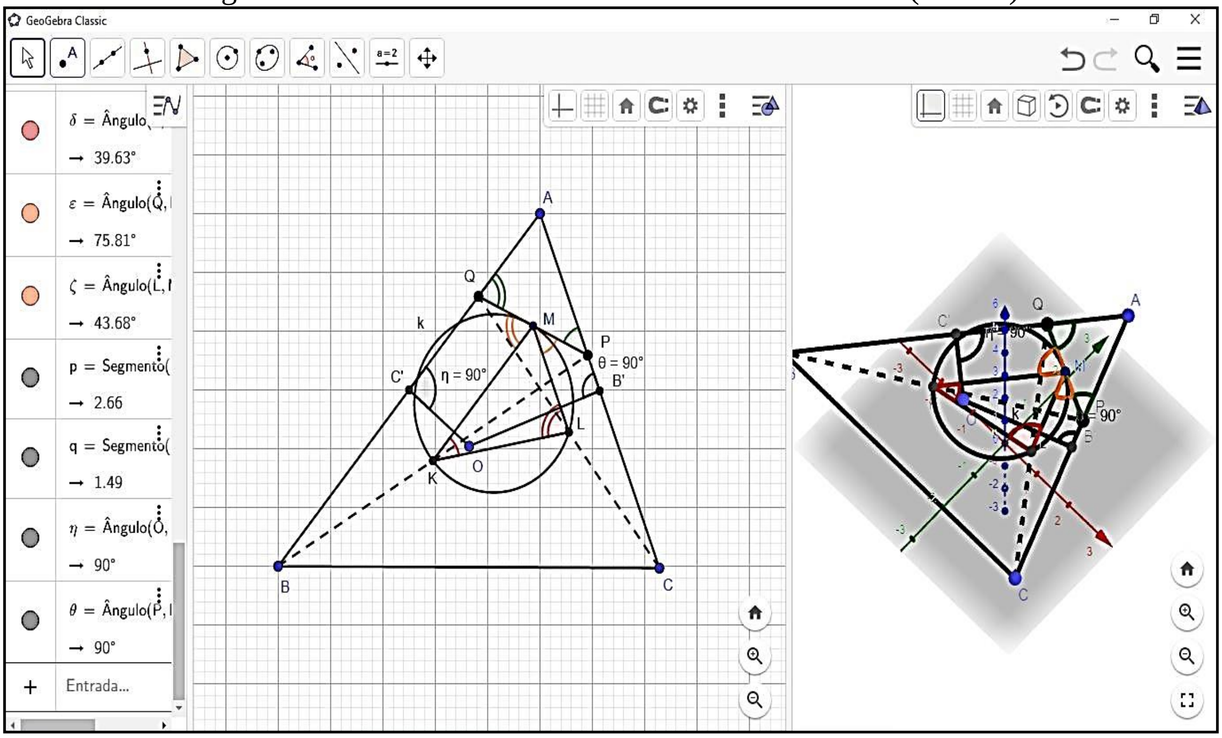
Figura 37 - Desenvolvimento no GeoGebra da SDO 03 (Parte 4)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Agora na Figura 38, apresentam-se os pontos equivalentes a $AP \cdot PC = AQ \cdot QB$, o que significa que a potência dos pontos P e Q em relação ao círculo do ΔABC é igual, portanto, $OP = OQ$.

Figura 38 - Desenvolvimento no GeoGebra da SDO 03 (Parte 5)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Complementando o último argumento também pode ser estabelecido pelo seguinte cálculo:

$$OP2 - OQ2 = OB'2 + B'P2 - OC'2 - C'Q2$$

$$= (OA2 - AB'2) + B'P2 - (OA2 - AC'2) - C'Q2$$

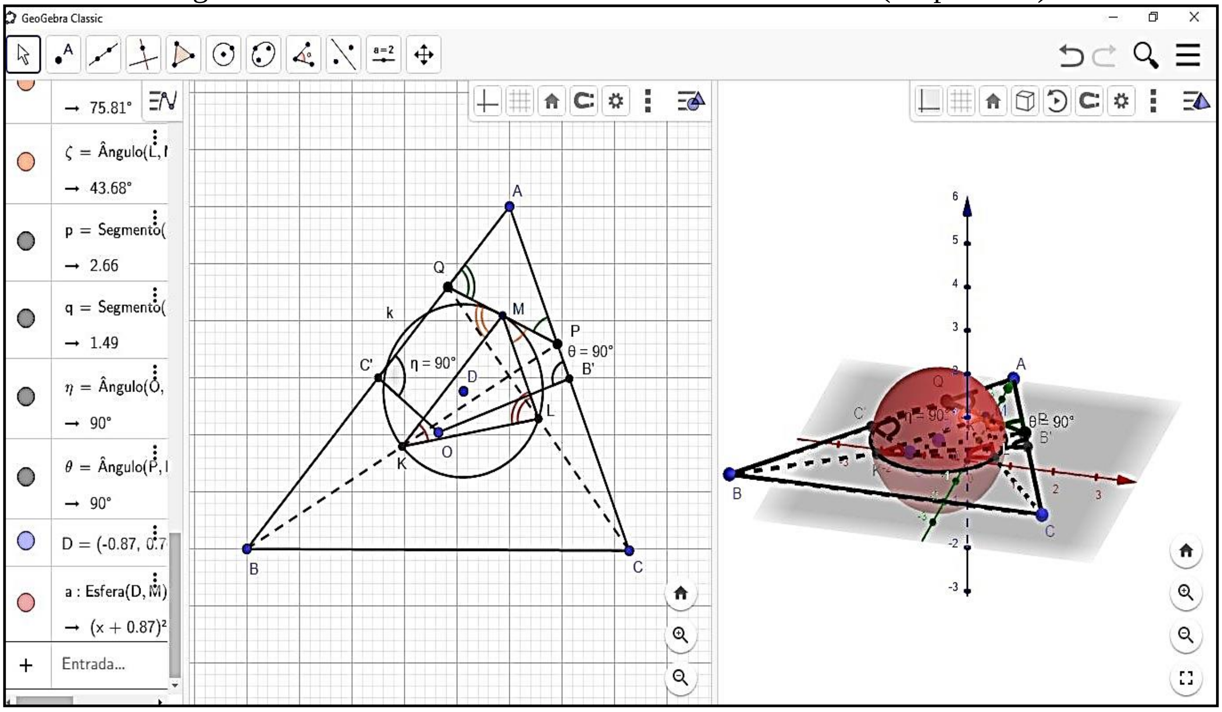
$$= (AC'2 - C'Q2) - (AB'2 - B'P2)$$

$$= (AC' - C'Q)(AC' + C'Q) - (AB' - B'P)(AB' + B'P)$$

$$= AQ \cdot QB - AP \cdot PC$$

Com isso, conclui-se que os pontos ligados $OP2 - OQ2 = 0$, conforme descrito na Figura 39.

Figura 39 - Desenvolvimento no GeoGebra da SDO 03 (Etapa Final)



Fonte: Elaborada pelo autor.

5.4.4 Situação da Dialética da Validação

Diante desse processo, "as mudanças não concernem apenas com a informação, mas, também, com o conjunto de declarações. Se torna necessário provar o que foi realizado por meio de uma ação na etapa passada" (DOUADY, 1984, apud ARTIGUE, 1984a, p. 7). Desse modo, espera-se que os estudantes discutam, analisando as suas informações que estão em compatibilidade com os demais colegas. Sendo destacado, antes de mostrar a última situação didática, que as fases de Ação, Formulação, Validação são identificados como Situações Didáticas Olímpicas, na definição de que o professor não atue diretamente. Dessa maneira, "o professor permite ao aluno trilhar os caminhos da descoberta, sem revelar sua intenção didática, tendo somente o papel de mediador" (BROUSSEAU apud TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p.165). Tal relatividade só será manifestada na próxima fase a seguir da situação dialética da institucionalização.

5.4.5 Situação da Dialética da Institucionalização

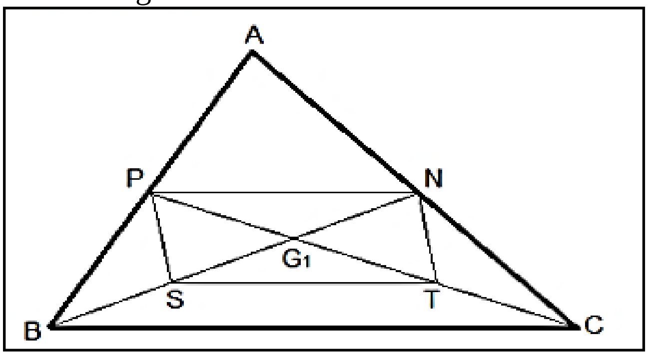
Nesse momento, o professor tem a solução da situação didática revelada, assim os estudantes "se caracterizam pelo momento de fixação ou convenção explícita do estatuto cognitivo de um conhecimento ou saber" (BROUSSEAU, 1981, p. 17). Além disso, parafraseando o pensamento de Artigue (1984), o professor de Matemática tem um papel principal no conhecimento matemático científico ao assinalar que, "[...] o conhecimento matemático que o expert deverá convencionar ou fixar, seguindo os rituais acadêmicos, com estatuto de um novo saber, rico em relações conceituais" (ARTIGUE, 1984a, p. 8).

Teorema das principais cevianas e pontos notáveis do triângulo

Mediana

A mediana de cada lado de um triângulo é a ceviana que une um vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto. Dessa forma, todo triângulo possui três medianas que se intersectam em um único ponto denominado de baricentro, que divide cada mediana, a partir do vértice correspondente, na razão 2 : 1.

Figura 40 - Mediana e baricentro



Fonte: Elaborada pelo autor.

Seja o triângulo *ABC* (Figura 40), considere *N* e *P*, respectivamente, os pontos medianos de *BN* e *CP*. Portanto, como já mencionado, *PN* é base média, cujo comprimento é a metade do comprimento de *BC*, *BN* e *CP*, são medianas correspondentes aos vértices *B* e *C*, respectivamente. Dessa forma *G1*, ponto de encontro das medianas *BN* e *CP*, é o baricentro.

A partir de *PN*, constrói-se o paralelogramo *PNTS*, cujos vértices pertençam as medianas *BN* e *CP*. Como *ST* é paralelo e congruente a *NP*, então *ST* é paralelo a *BC* e tem comprimento igual a metade de *BC*, logo *ST* é base média do triângulo *G1BC* e, por isso, *S* e *T* são pontos médios de *BG1* e *CG1*, respectivamente. Verifica-se, também, que *G1* é o ponto de encontro das diagonais do paralelogramo *PNTS*, que se cruzam nos seus pontos médios (propriedade dos paralelogramos), então *BS = SG1 = G1N* e *CT = TG1 = G1P*. Dessa forma, pode-se afirmar que o baricentro de qualquer triângulo divide cada mediana na proporção 2:1, a partir do vértice correspondente.

Segundo Alves (2010), caso fosse feita a seguinte pergunta aos professores e estudantes de Matemática: qual é o centro de massa de um triângulo? Certamente a grande maioria iria responder que seria o baricentro. Contudo é importante lembrar que o centro de massa de um corpo (ponto onde fisicamente podendo considerar toda a massa do corpo concentrada) depende da distribuição da massa desse corpo. O centro de massa de uma região triangular só é realmente o baricentro se esse triângulo tiver sua massa distribuída de forma homogênea. Caso o triângulo seja formado apenas por seus lados (como um triângulo feito com um arame fino e homogêneo), o seu centro de massa seria o centro da circunferência de Spieker (circunferência inscrita ao triângulo medial do triângulo formado com o arame), ou seja, seria o encentro (ponto de encontro das bissetrizes do triângulo medial do triângulo de arame).

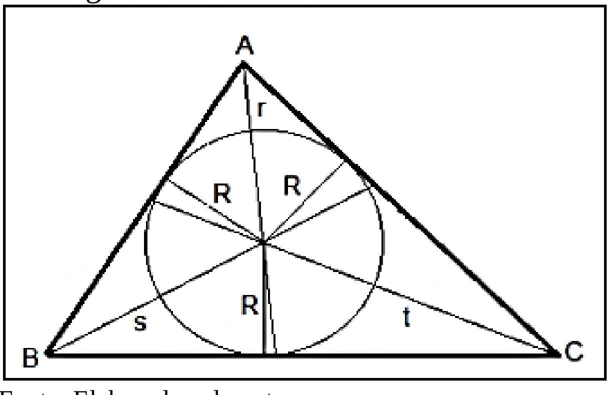
Bissetriz interna

A bissetriz de cada ângulo interno de um triângulo é uma ceviana (segmento de reta que liga um vértice de um triângulo a um ponto qualquer do lado oposto) que une um vértice de um triângulo ao lado oposto, dividindo o ângulo interno em dois ângulos congruentes. As três bissetrizes internas de um triângulo encontram-se num ponto denominado de incentro descrito na Figura 41.

A definição de bissetriz para um ângulo qualquer seria a de uma reta formada por pontos, em que todos eles são equidistantes aos lados do ângulo.

A demonstração proposta por Muniz Neto (2012) utilizou bem o conceito de bissetriz de um ângulo. Suponha um triângulo *ABC*, sendo *r, s* e *t*, respectivamente, as bissetrizes internas dos ângulos $\hat{A}, \widehat{B}, \hat{C}$ e *I* o ponto de intersecção das retas *r* e *s*. Como *I* pertence a *r*, então *I* é equidistante aos lados *AB* e *AC*, mas *I* também pertence a *s* e, por isso, também é equidistante a *AB* e *BC*. Logo, *I* é equidistante a *AC* e *BC*, portanto *I* pertence a *t*, sendo o ponto de intersecção das três bissetrizes, denominado incentro, que também é o centro da circunferência inscrita ao triângulo *ABC*, cujo raio *(R)*, denominado de apótema, é exatamente a distância do incentro a cada lado do triângulo (Figura 41).

Figura 41 - Bissetriz interna e incentro



Fonte: Elaborada pelo autor.

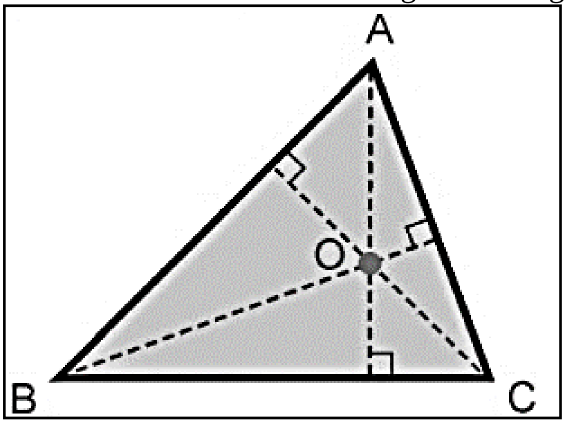
Altura

Altura de um triângulo é a ceviana que une um vértice de um triângulo qualquer à reta suporte do lado oposto a esse vértice. Todo e qualquer triângulo possui três alturas que se encontram num ponto denominado de ortocentro. Sobre o ortocentro de um triângulo *ABC* qualquer, há três casos a considerar:

A) *ABC* acutângulo

O ortocentro é interno ao triângulo, pois as alturas correspondentes aos três lados são internas.

Figura 42 - Ortocentro de um triângulo acutângulo

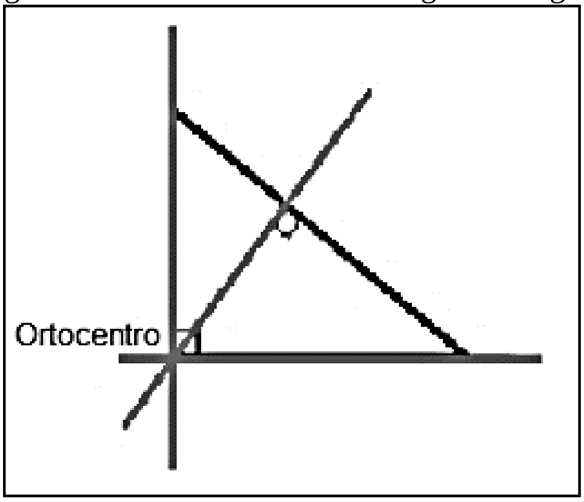


Fonte: Elaborada pelo autor.

B) *ABC* retângulo

O ortocentro é o próprio vértice do ângulo reto, pois as alturas correspondentes a cada cateto é o outo cateto. Nesse caso, a única altura interna é a correspondente à hipotenusa (maior lado).

Figura 43 - Ortocentro de um triângulo retângulo

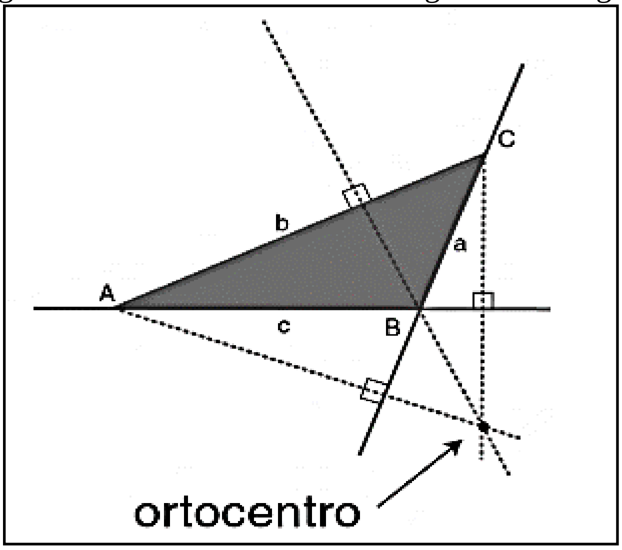


Fonte: Elaborada pelo autor.

C) *ABC* obtusângulo

O ortocentro é externo ao triângulo, pois as alturas correspondentes aos dois menores lados são externas. Nesse caso, a única altura interna ao triângulo é a correspondente ao maior lado.

Figura 44 - Ortocentro de um Triângulo Obtusângulo



Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao desenhar um triângulo a partir dos pontos de intersecção das alturas com os respectivos lados de um triângulo, tem-se um triângulo órtico (um triângulo ABC qualquer, cujos vértices são os lados das alturas do triângulo ABC), e far-se-á a conclusão das ideias explicitando aos alunos que a atividade envolveu um PO.

5.4.6 Situação do Protocolo de Construção no **GeoGebra**

O protocolo de construção é uma tabela que detalha todos os comandos de construção no programa. Concede-lhe refazer passo a passo uma construção já pronta, usando a Barra de Navegação localizada na base da Zona Gráfica. Na visualização da Figura 45, tem-se o protocolo de construção da SDO 03.

Figura 45 - Protocolo de construção no GeoGebra SDO 03

	Nome	Ícone	Descrição	Definição
1	Ponto A			
2	Ponto B			
3	Ponto C			
4	Segmento a		Segmento A, B	Segmento(A, B)
5	Segmento c		Segmento B, C	Segmento(B, C)
6	Segmento b		Segmento C, A	Segmento(C, A)
7	Ângulo α		Ângulo entre B, A, C	Ângulo(B, A, C)
8	Ponto D		Ponto sobre c	Ponto(c)
9	Segmento m		Segmento A, D	Segmento(A, D)
10	Ângulo β		Ângulo entre B, A, D	Ângulo(B, A, D)
11	Ponto X		Ponto sobre a	Ponto(a)
12	Segmento f		Segmento D, X	Segmento(D, X)
13	Ângulo γ		Ângulo entre A, D, X	Ângulo(A, D, X)
14	Círculo k		Círculo por D com centro A	Círculo(A, D)
15	Ponto E		Interseção de k, a	Interseção(k, a, 1)
16	Círculo d		Círculo por E com centro B	Círculo(B, E)
17	Esfera e		Esfera passando por D com centro A	Esfera(A, D)
18	Esfera g		Esfera passando por E com centro B	Esfera(B, E)

Fonte: Elaborada pelo autor.

No próximo capítulo, é descrito, a última fase da ED dos dados obtidos e previstos na análise a *priori*, reforçando os elementos característicos de duas possibilidades distintas de validação em uma ED.

6 EXPERIMENTAÇÃO DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS OLÍMPICAS

Este capítulo decorre, portanto, todos os processos aplicados para a prática das Situações Didáticas Olímpicas (SDO) em sala de aula remota que advêm de resoluções de Problemas Olímpicos (PO) retirados do sítio eletrônico da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), ligados aos sujeitos participantes. Essa aplicação apresenta os objetivos e circunstâncias da efetuação da pesquisa junto aos conjuntos de relações estabelecidas entre o professor, os participantes e o conhecimento da pesquisa, o que Brousseau (1982) intitula de "contrato didático", a definir como: o comportamento do professor esperado pelo aluno e pelo grupo de alunos e o comportamento do aluno esperado pelo professor.

Além disso, essa Experimentação tem o objetivo de examinar a conduta dos estudantes relacionado à resolução dos PO e à utilização do *software* GeoGebra, a seleção dos participantes envolvidos na pesquisa da investigação e os dados que foram coletados nos encontros *online*, assim os registros foram arquivados por meio de arquivos de áudios, imagens e as análises executadas de forma remota devido à suspensão das aulas presenciais, ocasionada por conta da pandemia da Covid-19.

Todo o processo de aplicação foi fundamentado na Teoria das Situações Didáticas (TSD) e apoiado nas fases de Ação, Formulação, Validação e Institucionalização. No tópico seguinte, apresentam-se os participantes e o *lócus* da pesquisa.

6.1 O *lócus* e os participantes da pesquisa

A Experimentação foi realizada em uma escola estadual da zona rural, dentro da região do Sertão Central do estado do Ceará, com estudantes da 2ª série e 3ª série do ensino médio na disciplina de Matemática, por meio de uma equipe de estudo olímpica, a qual promoveu encontros virtuais, utilizando a plataforma virtual de web conferência e *app* virtual de sala. Essa equipe olímpica teve como critérios de escolha: ser participante do Programa dos POTI como alunos treinadores de olimpíadas, ter frequência relativa em todas as disciplinas da escola acima de 80% e ser monitor escolar na área de Ciências da Natureza e Matemática, atuando de forma interativa com seus colegas nas dificuldades com problemas relacionados a olimpíadas de Matemática.

Os participantes foram nomeados por P1 a P8 na contínua descrição da dissertação para manter suas identificações seguras, tendo protocolado um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), que descreve a natureza da investigação, os objetivos, os métodos aplicados, benefícios e a garantia de anonimato da equipe. Esse termo também evidencia que as informações oriundas da análise de dados podem ser utilizadas pelos pesquisadores em publicações e/ou eventos e cunho científicos, conforme apresentado no **Anexo C**. A equipe de alunos participantes era composta por 8 membros olímpicos da escola, mas os dados recebidos são equivalentes a 8 participantes que obtiveram presença equivalente mínima entre 50% e 75% das aulas planejadas.

As atividades foram elaboradas pelo pesquisador com o apoio dos estudantes participantes e incluíram as resoluções de situações-problema de olimpíadas internacionais com o manuseio do *software* GeoGebra. Em seguida, acontece a realização da sequência didática, seguindo da temática Olimpíada Internacional de Matemática com uso das Situações Didáticas Olímpicas e, em síntese, os estudantes responderam a um questionário elaborado no formulário *online* relacionado aos assuntos abordados, começando nas identificações dos Problemas Olímpicos em meio a participação durante o processo de ensino/aprendizagem das Situações Didáticas Olímpicas (SDO). A seguir, no Quadro 7, apresentam-se características descritas pelos participantes via formulário *online* sobre a série em que estão matriculados na escola de ensino médio e suas noções sobre o *software* GeoGebra.

Quadro 7 – Características dos participantes olímpicos da pesquisa

Estudantes	**Gênero Feminino ou Masculino**	**Série do Ensino Médio**	**Conhece ou utiliza o *software* GeoGebra**
P1	Masculino	2ª	Sim
P2	Feminino	3ª	Às vezes
P3	Feminino	2ª	Não
P4	Feminino	2ª	Não
P5	Masculino	2ª	Não
P6	Feminino	3ª	Às vezes
P7	Masculino	3ª	Às vezes
P8	Feminino	3ª	Às vezes

Fonte: Elaborada pelo autor.

Ressalta-se que os participantes mencionados no Quadro 7 têm relação na diversificação das séries e uso do GeoGebra, permitindo, assim, que todos os sujeitos da pesquisa tenham uma aprendizagem significativa na matemática olímpica.

O processo de ensino das aulas aconteceu de forma remota na plataforma Google, em seu aplicativo da plataforma virtual de web conferência no horário correspondente das 09h às 11h no período matutino. Além desse *app*, também foram acrescentados mais três suportes digitais: aplicativo de mensagens em tempo real, plataforma GeoGebra nas versões 5.0 ou 6.0 (Desktop/*Smartphone*) e aplicativo de sala virtual remota para acompanhar os envios dos arquivos construídos pelos participantes nos seguintes formatos jpeg, pdf e ggb para visualização nos *smartphones*, computadores desktop, notebook e *tablet*.

Os encontros ocorreram em quatro dias no período de 08/01/2021 a 29/01/2021, dividido cada dia em 1h/a remota, mais 1,5h/a de acompanhamento nas demais plataformas virtuais descritas, totalizando um total de 10 h/a. O Quadro 8 descreve o cronograma desenvolvido no período da experimentação via plataforma virtual de web conferência.

Quadro 8 – Cronograma de encontros realizados no grupo olímpico

Ano/Conteúdo	Atividade	Data	Hora/aula
1959 - Triângulo retângulo, média geométrica, circunferência.	Introdução, conceitos e a Situação Didática Olímpica 1	08/01/2021	2,5 h/a
2006 - Circunferência, Incentro, Pontos notáveis do triângulo.	Situação Didática Olímpica 2	15/01/2021	2,5 h/a
2009 - Triângulo retângulo, circuncentro, incentro, ponto médio do segmento.	Situação Didática Olímpica 3	22/01/2021	2,5 h/a
2021 - Estudo sobre o assunto abordado nas SDOs.	Leitura de livros preparatórios e aplicação do questionário	29/01/2021	2,5 h/a

Fonte: Elaborada pelo autor.

As Situações Didáticas Olímpicas (SDO) apresentadas na pesquisa foram extraídas do sítio eletrônico da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO), fase única, realizada no ano de 1959, 2006 e 2009, além disso, as questões são relativas ao tópico de ensino de geometria plana. Buscou-se questões interessantes na linha de construção do *software* GeoGebra para atrair atenção dos participantes, com uso de vários comandos utilizados pelo professor durante a fase antecedente, ou seja, a observação da descrição da pergunta relacionada a SDO sugeriu a SDO aplicada, da mesma maneira que acontece a estruturação no *software* GeoGebra, e possibilitando uma adequação aos comandos utilizados por professores e estudantes que estão em interação com essa forma de trabalhar com questões olímpicas de matemática.

Nessa expectativa, aplicou-se o contrato didático descrito por Pinto (2003), que é "estruturado no partir da percepção das relações ternárias mantidas entre si polos do chamado triângulo didático, ou sejam, o professor, o aluno e saber". Joshua e Dupin (1993) *apud* Pinto (2003, p. 8) descreve que:

> O aluno e o mestre não ocupam posições simétricas na relação com o saber. O segundo não somente "sabe" mais que o primeiro, mas tem a responsabilidade de organizar as situações de ensino consideradas favoráveis para as aprendizagens do primeiro. Conseguir tratar a eventual estrutura comum dessas situações ao mesmo tempo em que sua diversidade, suas características diferentes, seus alcances e limitações subsequentes levam a uma decisiva clareza dos atos didáticos.

Nesse sentido, o docente disponibiliza sua experiência para a construção do aprendizado dos estudantes, e depois foi instruído aos sujeitos da pesquisa, o contrato didático, relacionado à leitura da descrição específica da geometria plana. Contudo, foi explicado que, no processo de elaboração da resolução do problema, eles contariam com o apoio do *software* GeoGebra, e esse programa teria diversos comandos a serem explorados durante a visualização das figuras cedidas pelo professor.

Por fim, foi aplicado um questionário virtual relacionado a pesquisa para a equipe, as descrições das perguntas foram descritas abaixo (Quadro 9):

Quadro 9 – Questionário aplicado aos estudantes da pesquisa

Questões	Assertivas
Q1	Você aprendeu algo que considera pertinente no uso com *software* GeoGebra?
Q2	O seu interesse sobre o tema cresceu como consequência do curso na resolução das Situações Didáticas Olímpicas (SDO)?
Q3	Os materiais do curso foram bem-preparados e cuidadosamente transmitidos para o entendimento das ferramentas do *software* GeoGebra?
Q4	O professor melhora a apresentação dos conteúdos com sugestões de sites e vídeos voltados para Olímpiadas Nacionais e Internacionais?
Q5	Os estudantes são encorajados a participarem das discussões em sala de aula virtual (plataforma de web conferência)?
Q6	Leituras complementares de artigos, chat, livros, *feedback*, portfólios contribuem para apreciação e compreensão dos conteúdos?

Fonte: Adaptado de Silva *et al*. (2017).

O *feedback* dos estudantes referente ao questionário *online* será exibido na fase de análise a *posteriori* e validação da Engenharia Didática (ED). Essas perguntas foram formuladas conforme os objetivos da pesquisa e o aprendizado adquirido pelos estudantes.

6.2 A equipe de estudos olímpicos

A equipe olímpica foi proposta pelo autor e os alunos monitores na disciplina de Matemática para todas as turmas da escola. A seleção dos discente que poderiam participar do grupo da pesquisa segue os pré-requisitos de ser aluno da escola EEMJAC e estar cursando a 1ª, 2ª ou 3ª série do ensino médio e que já tivessem conhecimentos prévios na compreensão dos conteúdos, como fazer parte da equipe de monitores que acontece semanalmente por ordem de chamada e por ter diálogo diretamente com o professor acerca das questões trabalhadas em olimpíadas de Matemática.

Seguindo esse contexto de grupo de estudos fundamentado no objeto da pesquisa, define-se os objetivos geral e específicos:

6.2.1 Objetivo Geral de estudos olímpicos

Desenvolver um método de formação relacionado ao ensino de geometria plana a partir das questões da IMO, pretendendo uma forma de ensino/aprendizagem, com apoio do *software* GeoGebra e a Teoria das Situações Didáticas (TSD), que possa ser trabalhada futuramente pelo profissional de Matemática em sala de aula.

6.2.2 Objetivos Específicos de estudos olímpicos

Determinar a resolução de Problemas Olímpicos (PO) ligados a estudos de geometria plana com apoio na Teoria das Situações Didáticas (TSD) e com suporte do *software* GeoGebra;

Proporcionar aos estudantes o conhecimento de recursos de estudos pertinentes a aplicação de questões olímpicas para ensino de geometria plana em sala de aula;

Analisar os participantes em relação à apropriação com *software* GeoGebra, das questões de olimpíadas de Matemática internacionais para ensino de geometria plana em sala de aula;

O professor pesquisador não se interfere durante o processo das atividades disponibilizadas, conforme exposto no **Anexo A**; ou quando solicitado, evitando assim interromper os grupos durante a construção das soluções dos Problemas Olímpicos (PO). A institucionalização dos conceitos básicos foi realizada ao final de cada situação olímpica, levando em consideração os métodos formulados pelos participantes.

No capítulo seguinte, mostra-se as exposições das vivências obtidas a partir da aplicação da Teoria das Situações Didáticas (TSD), seguidas da exibição dos assuntos mais importantes coletados durante a aplicação das Situações Didáticas Olímpicas (SDOs) e do questionário de avaliação da pesquisa, pretendendo uma defrontação com a fase de Análise a *posteriori* e validação da Engenharia Didática (ED), com propósito de validar as conjecturas determinadas na fase de Análise *a priori*, destacando uma melhor validação da investigação.

7 ANÁLISE A POSTERIORI/VALIDAÇÃO (INTERNA) DAS SDO

A fase da experimentação representa a quarta e última etapa da metodologia utilizada nesta pesquisa. Para Almouloud e Coutinho (2008, p. 73), uma análise *a posteriori* é "um processo de aprendizagem por meio de discussões, distinção entre definição e propriedade, associação dos registros de representação e estabelecimento de um conceito por uma definição ou uma propriedade geométrica". Assim, a análise *a posteriori* depende das ferramentas teóricas (teoria das situações, contrato didático e entre outros) e técnicas (livro didático, foto, vídeo) as quais permitirão a construção dos protocolos de pesquisa, que serão analisados pelo professor pesquisador em confronto com a análise *a priori* realizada a partir das informações coletadas, proporcionando, assim, que a validação dos objetivos a pesquisa aconteça, por meio da aplicação das situações didáticas olímpicas.

No decorrer deste capítulo, faz-se uma interpretação do desenvolvimento da aplicação e uma análise das sessões didáticas olímpicas, baseada pela Teoria das Situações Didáticas (TSD) e Engenharia Didática (ED), o que pretende a validação interna das situações-problemas, formada pelo diálogo dos alunos com os conhecimentos adquiridos durante sua aprendizagem na disciplina de Matemática e das situações didáticas.

Diante da situação encontrada na aplicação remota, foram adotadas algumas orientações para garantir a melhor forma da aplicação prática, organizada e fundamentada na TSD e ED. Assim sendo, tinha-se o objetivo de utilizar de forma remota, como também aplicar a metodologia da Engenharia Didática. Dessa forma, mostra-se as comunicações dialéticas dos sujeitos envolvidos, previstas na Teoria das Situações Didáticas, vivenciadas pelos estudantes olímpicos, com o propósito de identificar a manifestação no conhecimento adquirido durante o processo de ensino-aprendizagem de uma Situação Didática Olímpica (SDO) da IMO.

7.1 Primeiro encontro: análise *a posteriori* e validação das Situações Didáticas da IMO

As Situações Didáticas Olímpicas 1, 2 e 3 da Olimpíada Internacional de Matemática têm por objetivo levar aos alunos olímpicos a realizarem o uso dos conhecimentos aprendidos durante sua formação no ensino médio, para um melhor desempenho e compreensão de cada nível das questões propostas pelo professor. Entretanto, por se proceder de forma remota, teve-se a atenção de solicitar aos estudantes que não consultassem internet, livro didático e nenhum outro instrumento para fazer pesquisas nas suas resoluções, além dos oferecidos pelo professor pesquisador.

Nesse contexto, implementa-se o contrato didático com todos os estudantes da pesquisa, pois de acordo com Figueroa e Almouloud (2018, p. 690), “o contrato didático está relacionado ao conjunto de comportamentos que o professor espera do aluno e ao conjunto de comportamentos que os alunos esperam do professor”.

Para orientar os participantes, foi criado um grupo no aplicativo de mensagens instantâneas, com o objetivo de disponibilizar um tutorial básico em pdf sobre o *software* GeoGebra, incluir vídeos com algumas construções básicas e materiais sobre aplicações na geometria plana. Antes da aplicação das Situações Didáticas Olímpicas (SDO), os estudantes foram divididos em duplas e foram estabelecidas as seguintes considerações para a realização da pesquisa:

a) Criar as duplas, sendo divididas pelos próprios estudantes, os quais foram identificados por siglas, sendo essas P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7 e P8;
b) Cada dupla criou um grupo no aplicativo de mensagens em tempo real para realizar as comunicações entre si, procurando soluções e métodos práticos resolutivos. A dupla precisou enviar ao professor pesquisador *screenshots*, assim como os desenhos, escritas e áudios das conversas realizadas com o objetivo de chegar à solução de cada situação didática olímpica;
c) As duplas receberam uma folha via plataforma Google Sala de Aula (*Classroom*) com os enunciados da atividade 1, 2 e 3, com espaço suficiente para escrever suas soluções;
d) Cada dupla deveria eleger um representante principal para realizar a sua resolução, explicando e mostrando os métodos aplicados para resolução do Problema Olímpico (PO);
e) As duplas poderiam se comunicar durante a busca pela resolução das situações didáticas, descrevendo cada processo e anotando as dúvidas;
f) Seria preciso registrar fotos das conversas, gravações audiovisuais das resoluções da folha e cada atividade, do manuseamento do GeoGebra e todas as escritas feitas pelas duplas.

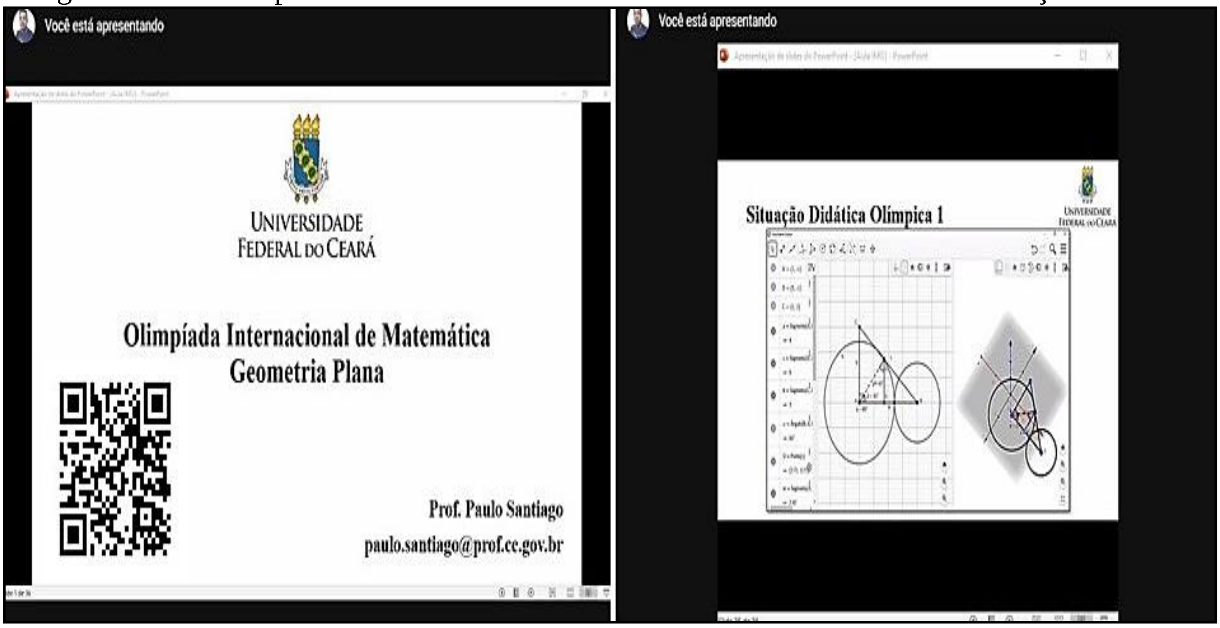
Essas considerações serviram para todas as outras aplicações realizadas na pesquisa.

Assim, os registros devem ser enviados ao final de cada encontro ao professor para registro e arquivamento da coleta de dados a serem aplicados nesta pesquisa, criando critérios para representação da análise *a posteriori* e validação do problema olímpico 1.

7.1.1 Análise a posteriori e validação do problema olímpico 1

Iniciou-se essa primeira Situação Didática Olímpica por meio do aplicativo da plataforma virtual de web conferência de forma remota, em que os estudantes foram informados a realizarem o *download* do *QR Code* ou copiar os *links* disponibilizados no aplicativo de mensagens em tempo real do grupo referente às situações didáticas da IMO que estão no **Apêndice B**. Com isso, os membros de cada dupla poderão visualizar essas construções no *software* GeoGebra junto aos respectivos comandos realizados pelo professor pesquisador, conforme imagem da Figura 46. Visto que era o primeiro contato dos alunos com o *software* GeoGebra, buscou-se deixá-los à vontade no manuseio dos comandos e funções.

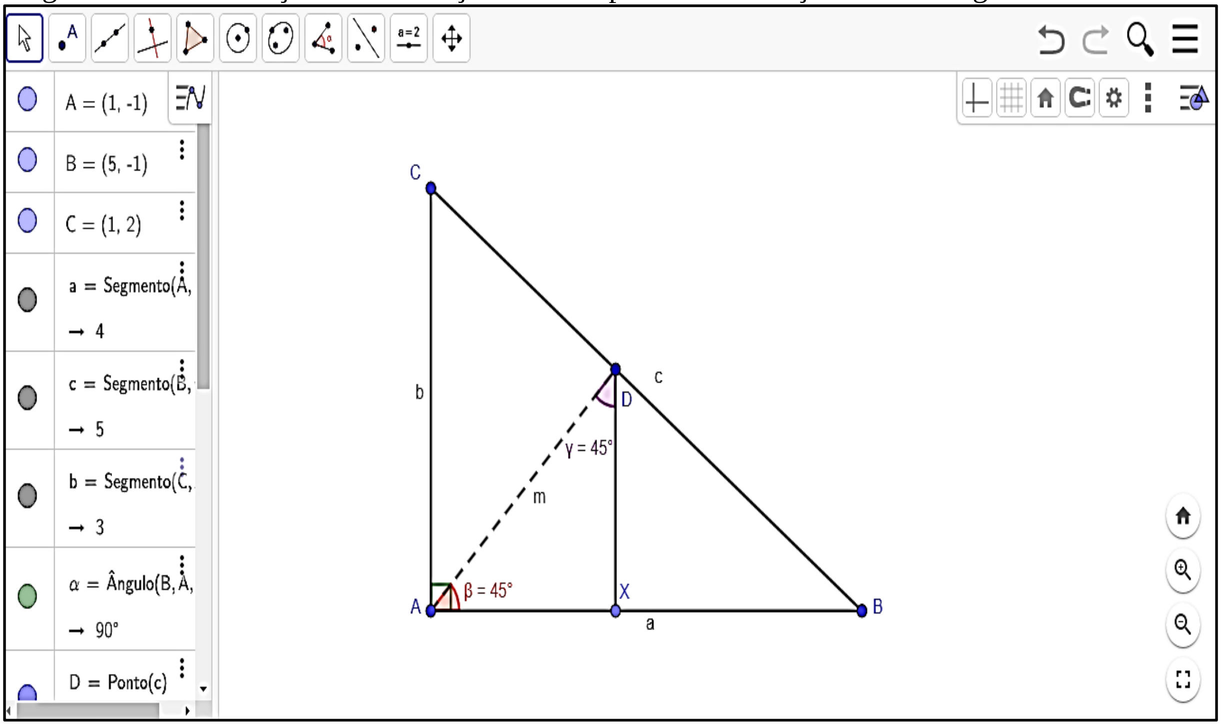
Figura 46 - Tela da plataforma de web conferência relacionada ao início da situação didática



Fonte: Elaborada pelo autor.

Dessa maneira, os participantes tiveram acesso às situações didáticas olímpicas, visualizaram a construção no GeoGebra (Figura 47) e realizaram a leitura do enunciado da questão. Iniciaram a construção das suas resoluções, com um formato que tinha o leitor da questão com suas ideias e o desenvolvedor da estruturação no *software* GeoGebra. Nesse processo, acontece o envio de mensagens dentro do grupo de mensagens, implementando-se às etapas da Ação e Formulação na procura de solucionar a situação-problema, conforme mostrado anteriormente na etapa da análise *a priori*. Destaca-se, na fase da Ação, a utilização do GeoGebra, como recurso tecnológico da educação utilizado para observação dos elementos e conceitos matemáticos incluídos na situação didática olímpica cedida.

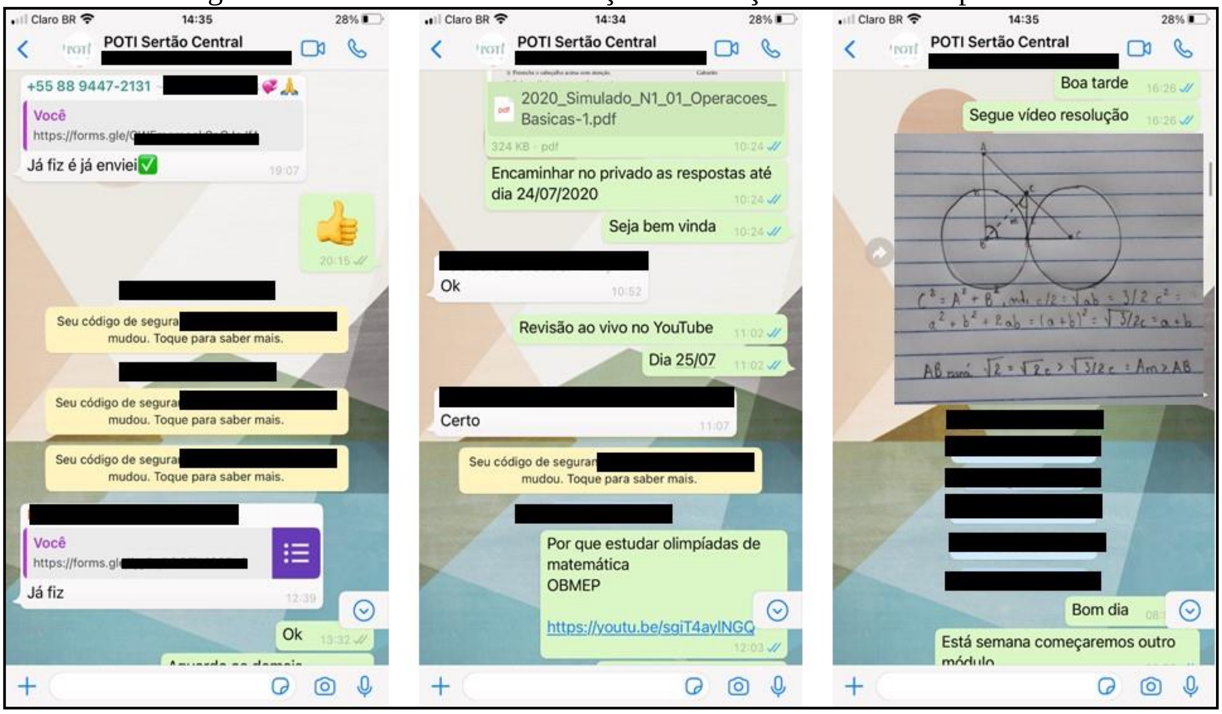
Figura 47 - Visualização da construção iniciada pelo aluno na ação de modelagem no GeoGebra



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na sessão da Formulação, é o momento que os estudantes mobilizam seus conhecimentos necessários para escritas e informações orais na resolução do problema. Nesse momento, observaram-se as mensagens no grupo da pesquisa com algumas sugestões, compartilhado por meio do *print* da tela do celular de cada indivíduo para envio no aplicativo de mensagens, contendo a alteração elaborada no comando segmento do *software* GeoGebra, alinhando o formato da figura de acordo com o enunciado da questão. Na imagem geral das conversas da Figura 48, mostra-se a etapa da Formulação entre os alunos olímpicos, na procura de solução da situação didática olímpica.

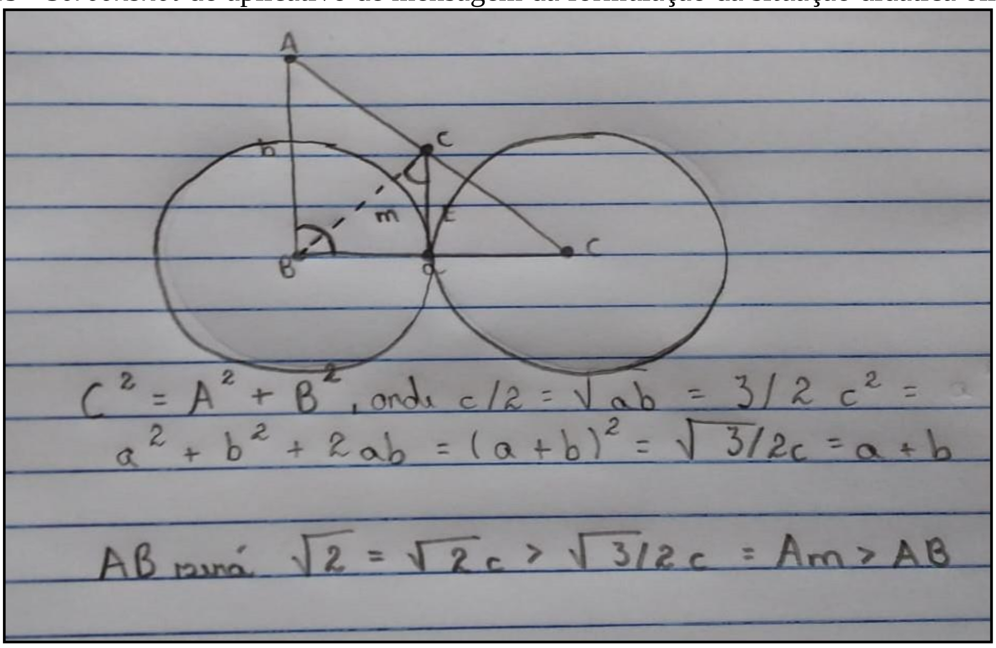
Figura 48 - *Screenshot* da formulação da situação didática olímpica 1



Fonte: Elaborada pelo autor.

Chamando a atenção dos alunos para a condução da aula remota, sendo fundamental a realização da construção da situação-problema no *software* GeoGebra formulando questionamentos para que possam pensar sobre os melhores caminhos a serem estruturados na resolução da atividade. Logo depois, o grupo da pesquisa apresentou sua solução (Figura 49), elaborada por uma das duplas, capturada no ambiente da escrita do lápis, caneta e papel.

Figura 49 - *Screenshot* do aplicativo de mensagem da formulação da situação didática olímpica 1

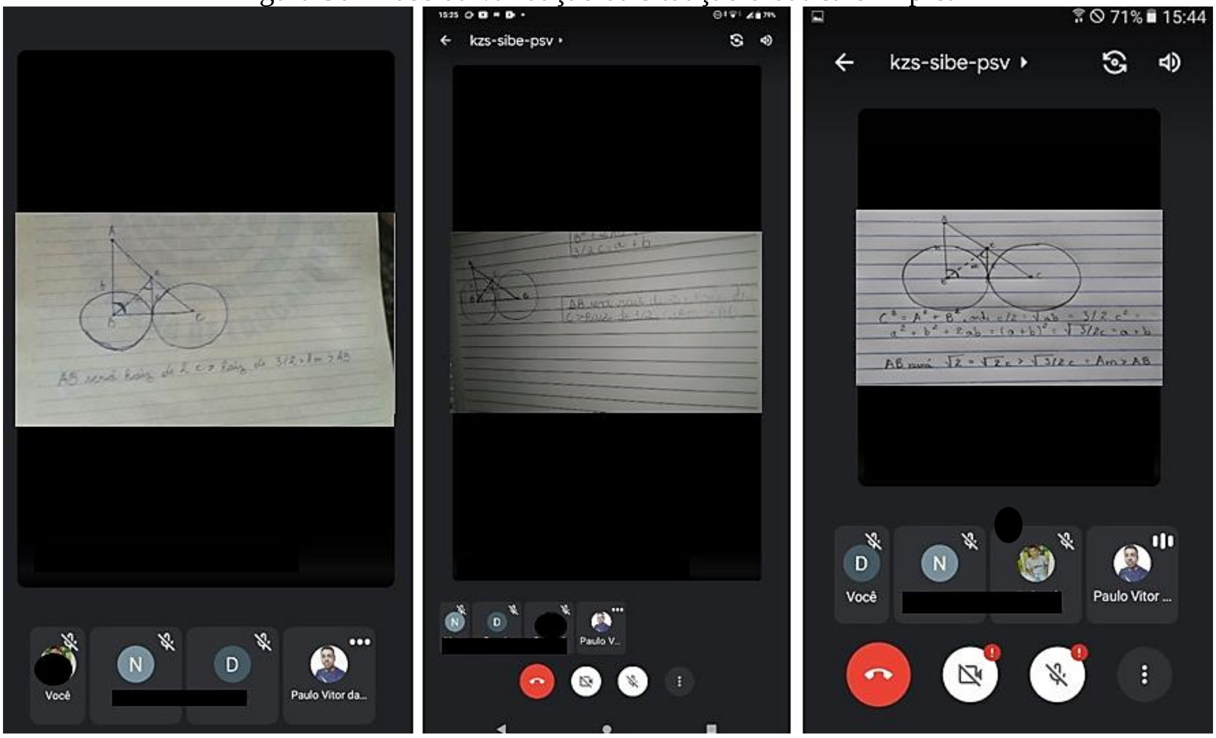


Fonte: Elaborada pelo autor.

Verifica-se que as duplas têm livre escolha para opinar, esclarecer e escolher a solução ideal para atividade 1. Nessa perspectiva, todos conseguiram compreender o problema e resolver corretamente, estabeleceram a relação dos pontos aos segmentos da construção, pois ao notar os ângulos de 45º em *Ac* e *cx*, poderiam alinhar a primeira circunferência em *c* com centro no ponto *A*. Para chegar ao final da construção da SDO, observaram que a partir do ponto *B* desenvolveriam outra circunferência paralela à primeira elaborada.

Esse momento da aula evidenciou formalmente a fase da Validação, um representante de cada dupla relatou as propriedades aos demais participantes (Figura 50), exposto no desenho por eles construído.

Figura 50 - Fase da validação da situação didática olímpica 1



Fonte: Elaborada pelo autor.

Nesse ínterim, descreve-se o relato do representante (P5) escolhido no grupo, concebido pela gravação salva na plataforma de web conferência, no instante da validação.

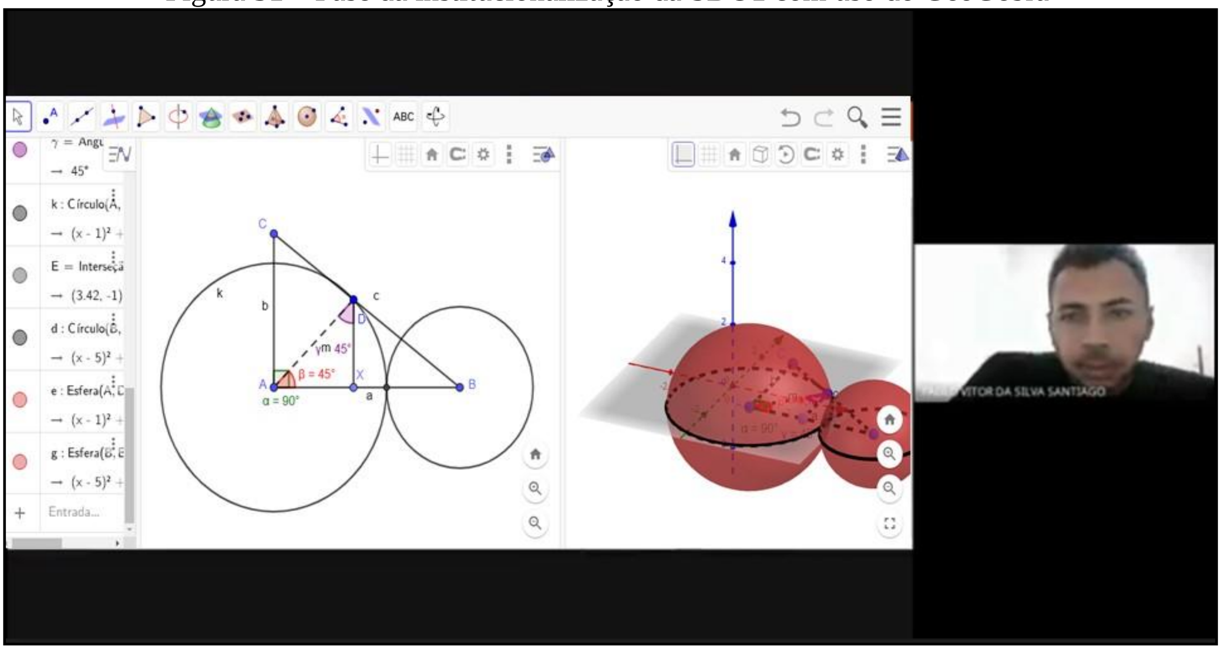
> P5: Como vocês podem observar que o meu desenho tem as seguintes condições do problema, exigem que ab = c²/4. No entanto, notamos que o dobro da área do triângulo abc é ab, uma vez que os pontos a e b forma um ângulo reto de 90º. No entanto, o dobro da área do triângulo também é o produto de c e a altura para c. Portanto, a altura de c deve ter comprimento c/4. Assim, quando construirmos um círculo com diâmetro c e uma linha paralela c e à distância c/4 de c, qualquer ponto de intersecção entre a linha e o círculo fornecerá um terceiro vértice adequado para o triângulo ABC.

As experiências das fases da Ação, Formulação e Validação (situação adidática), proporcionaram, aos estudantes do grupo, novos conhecimentos teóricos e práticos na geometria plana, dialogando e explicando um pouco mais entre si sobre triângulo retângulo, através da construção da figura no papel e *software* GeoGebra.

Os participantes relataram ter compreendido que a SDO construída no GeoGebra contribuiu bastante na resolução e visualização da figura em 2D, relembrando a importância da condução dos comandos, para não agirem de forma muita diretiva e, principalmente, refletirem sobre o fato de que, em geral, foi considerado como elemento fundamental para demonstrar a situação-problema. Vale destacar que esse recurso educacional tem um potencial para uso com alunos da educação básica de ensino, bem como uma aprendizagem significativa no momento da resolução e validação do problema olímpico.

Retomando a dialética da institucionalização, o professor pesquisador enumerou as respostas socializadas pelos participantes do grupo de pesquisa, refletindo sobre as diferenças, avaliando matematicamente os argumentos sugeridos e formalizando os conceitos envolvidos em um único assunto do problema, por meio de interpretação das variáveis didáticas e tentativas de resolução. Vale destacar que, na fase da institucionalização, o pesquisador manuseou o *software* GeoGebra para confrontar a figura gerada no computador com o modelo matemático exibido na descrição do problema proposto (Figura 51). Logo, novamente, percebe-se que o enunciado deve ser lido e interpretado para, a partir daí, construir as estratégias de resolução e validar as propriedades implícitas do problema olímpico (PO) no recurso didático educacional.

Figura 51 – Fase da institucionalização da SDO1 com uso do GeoGebra



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para finalizar, questiona se havia alguma dúvida e/ou comentário a serem feitos sobre o GeoGebra ou a Situação Didática Olímpica (SDO) 1, assim, ao evidenciar as descrições junto aos participantes, a importância de buscar diferentes métodos práticos para a resolução de uma questão olímpica envolvendo o assunto geometria plana.

Depois de formalizar as quatro etapas da Teoria da Situações Didáticas (TSD) na primeira situação didática, deu-se início a segunda situação didática com as fases de Ação, Formulação, Validação e Institucionalização, continuando os mesmos padrões de aplicação da questão 1.

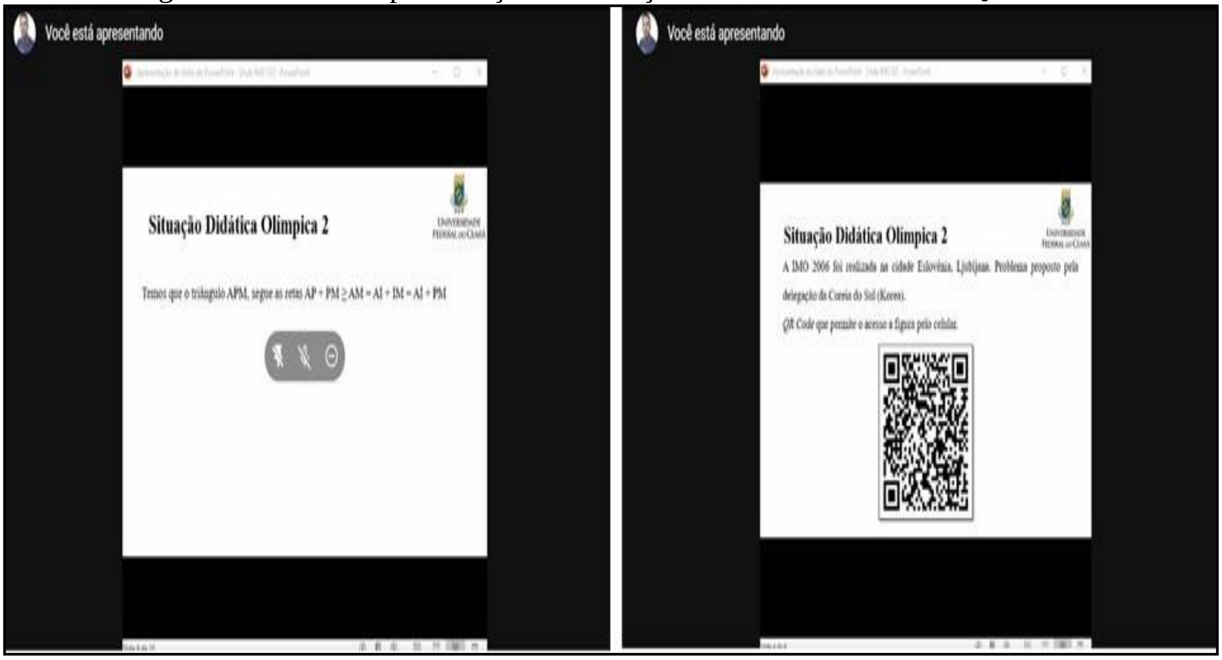
7.2 Segundo encontro: análise *a posteriori* e validação das Situações Didáticas da IMO

De maneira análoga à aplicação da situação didática olímpica do encontro anterior, os estudantes tiveram ciência da situação didática da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO). que seria aplicada durante o encontro. Assim, eles receberam os *links* e *QR Code* de acesso à construção, como também lhes foram disponibilizados o documento da atividade em pdf e do arquivo GeoGebra, em formato ggb.

7.2.1 Análise a posteriori e validação do problema olímpico 2

Ao providenciar os códigos dos *links* e *QR Code* de acesso à estruturação da atividade 2 no *software* GeoGebra (Figura 52), os estudantes passaram a ter seu primeiro contato, analisando, observando e anotando algumas dúvidas relacionadas à figura, como as "formas planas", e apresentando os conhecimentos prévios expostos na análise *a priori*, de maneira semelhante à aplicação da SDO 1. A construção ficou exposta em tela por meio do aplicativo da plataforma de web conferência para auxiliar o acesso aos dados, durante a execução da atividade. Assim, os participantes buscaram demonstrar uma relação funcional entre o triângulo retângulo e o incentro da Figura 52, conforme descrito no enunciado do problema olímpico.

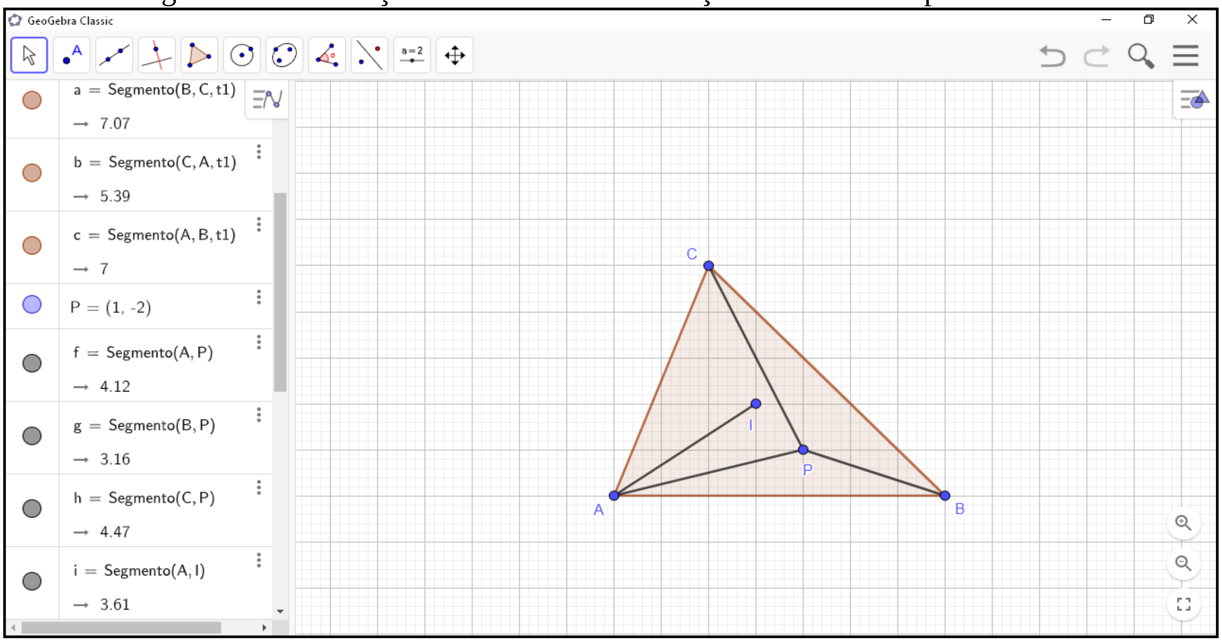
Figura 52 - Tela de apresentação da Situação Didática com referido *QR Code*



Fonte: Elaborada pelo autor.

Nesse momento, foram realizadas as orientações pelo professor pesquisador aos estudantes, pois eles precisariam desenhar primeiramente a atividade 2 e, só após a prática, estruturar a Situação Didática Olímpica (SDO), respectivamente. Dessa maneira, foram instigados a utilizarem a construção no *software* GeoGebra (Figura 53) para colaborar no pensamento e do raciocínio que conseguisse possibilitar a instituição de um modelo matemático que solucionasse a questão.

Figura 53 - Construção no GeoGebra da Situação Didática Olímpica da IMO

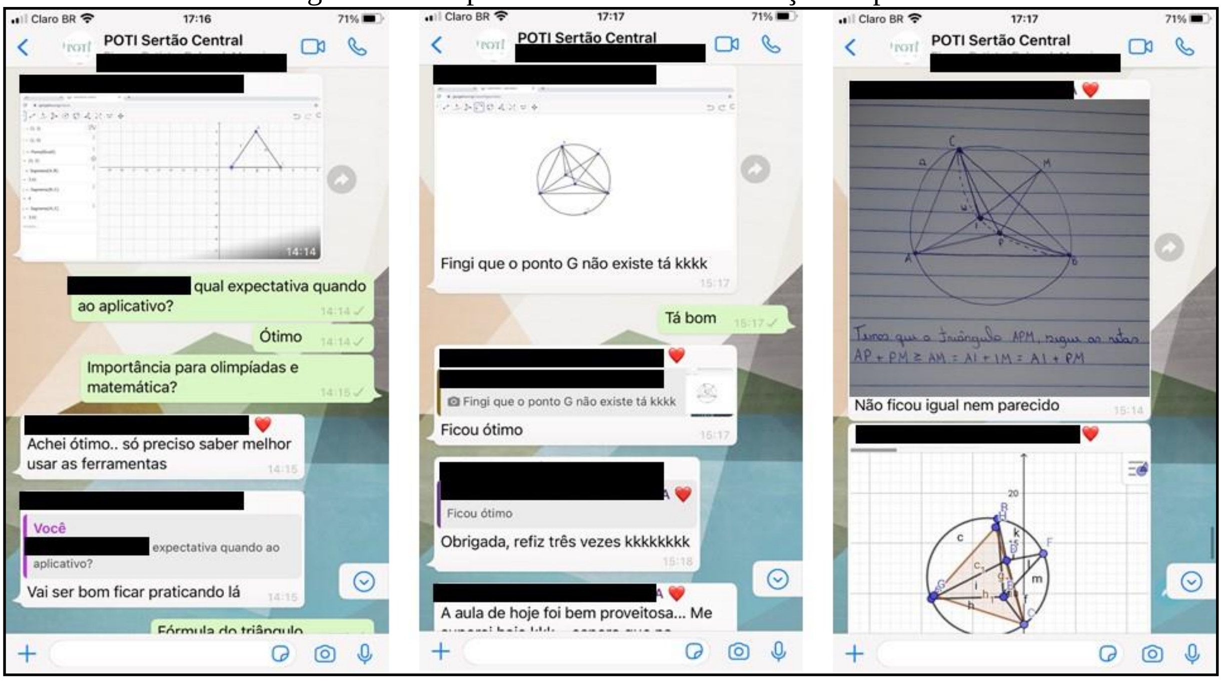


Fonte: Elaborada pelo autor.

Durante a fase da ação, os alunos tiveram acesso à situação didática olímpica 2, efetuaram a leitura da atividade e começaram a rabiscar as estratégias de resolução, por intermédio de seus conhecimentos cognitivos e objetivos nos elementos matemáticos reconhecidos, durante a análise da situação-problema.

Nesse momento da ação, as duplas elaboraram simulações, por meio da modelização da situação didática olímpica 2. Então, incrementaram outros pontos e segmentos no triângulo retângulo (Figura 53) e perceberam as possíveis resoluções da questão, como havia-se conjecturado na análise *a priori*. Ademais, os estudantes visualizaram os comandos na caixa de entrada e tiveram a oportunidade de experimentar funções para a resolução. A Dupla 2, no momento da formulação, possibilitou interações no grupo de mensagem, referentes ao objetivo da situação didática olímpica 2 (Figura 54).

Figura 54 - Etapa da dialética da formulação Dupla 2



Fonte: Elaborada pelo autor.

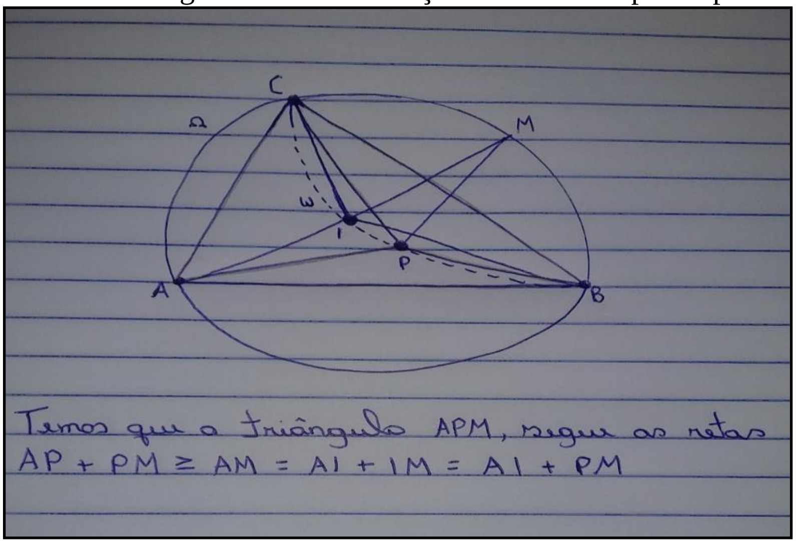
Diante disso, o pesquisador realizou alguns questionamentos à dupla, como “qual a importância dessas construções no GeoGebra e desenho/escrita no caderno para olímpiadas de matemática?”, com o propósito relacionado às tentativas iniciais da SDO2. Segue a descrição do áudio, disponibilizado pelo indivíduo P3 no aplicativo de mensagem, na tentativa de buscar novos procedimentos na resolução do problema.

> P3: Ao conhecer o *software* GeoGebra disponibilizado pelo professor durante suas aulas remotas, percebi o quanto era importante na resolução de problemas, construção de formas geométrica 2D e 3D e interação com a visualização da atividade. No momento comecei a colocar os pontos e segmentos sem medidas exatas, busquei

> chegar o mais próximo da estruturação visualizada pelo professor, assim procurei me aprimorar nos procedimentos até chegar ao resultado final da atividade 2.

Logo depois, a dupla procurou construir um modelo matemático para resolver o problema proposto. Assim, no ambiente lápis, caneta e papel, executaram um registro geométrico e formularam a resposta (Figura 55) do PO. Sendo assim, observa-se, na discussão das informações, os conhecimentos cognitivos e pragmáticos entre os estudantes.

Figura 55 – Modelo geométrico da situação didática olímpica 2 pela Dupla 2

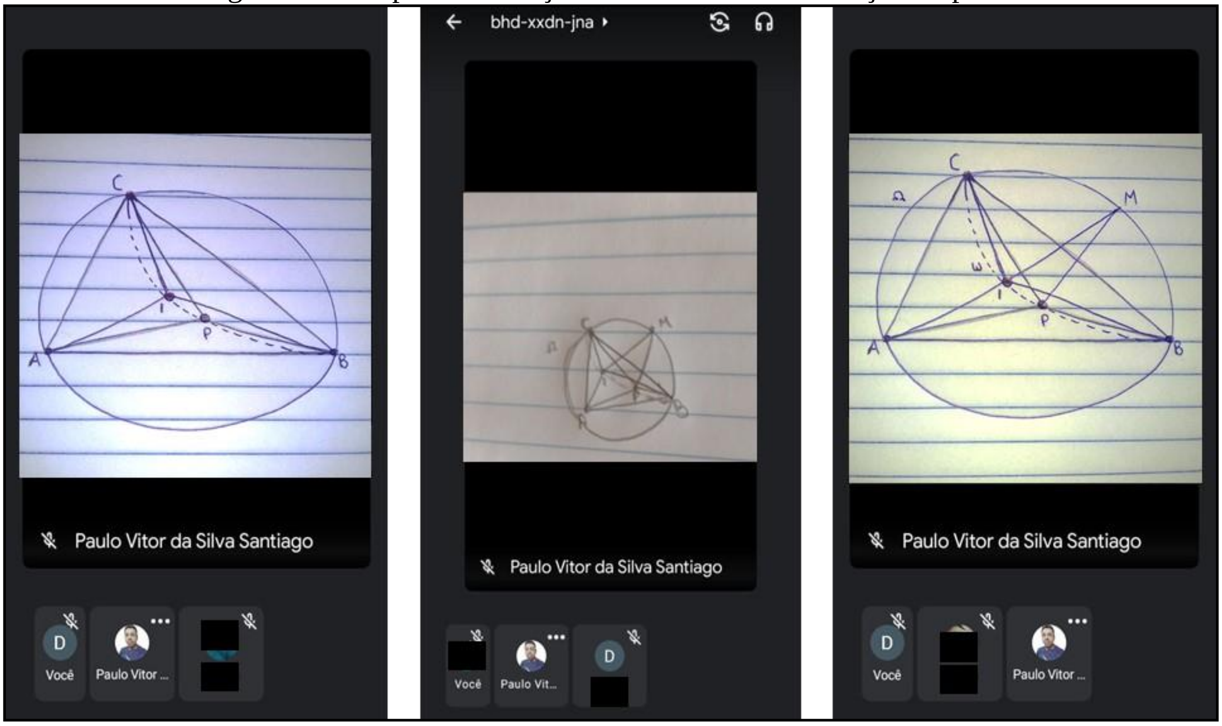


Fonte: Elaborada pelo autor.

Pelo exibido, percebe-se que a Dupla 2, de instantâneo, descreve outra forma de resolução para atender às especificações do enunciado da atividade 2. Com isso, P4, procede que $AP + MP \geq AM = AI + IM$ (uma vez que o triângulo APM pode ser alterado, o que ocorre apenas quando $P = I$), mas $MI = MP$; daqui $AP \geq AI$. Estabelecendo, assim, a resposta da situação olímpica 2 da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO).

Na fase dialética da validação, exibida pela Dupla 2, eles também realizam desenhos para mostrar métodos de resolução, chegando com o modelo matemático da solução do problema olímpico proposto, conforme exibido na Figura 56.

Figura 56 – Etapa da validação dos métodos de resolução Dupla 2



Fonte: Elaborada pelo autor.

Nesse caso, é importante dar oportunidades para os participantes durante a resolução de um problema, pois, mesmo errando ou empregando dados divergentes, o estudante consegue aprender a partir da visão dos outros colegas, o que se torna uma parte importante da validação da situação didática.

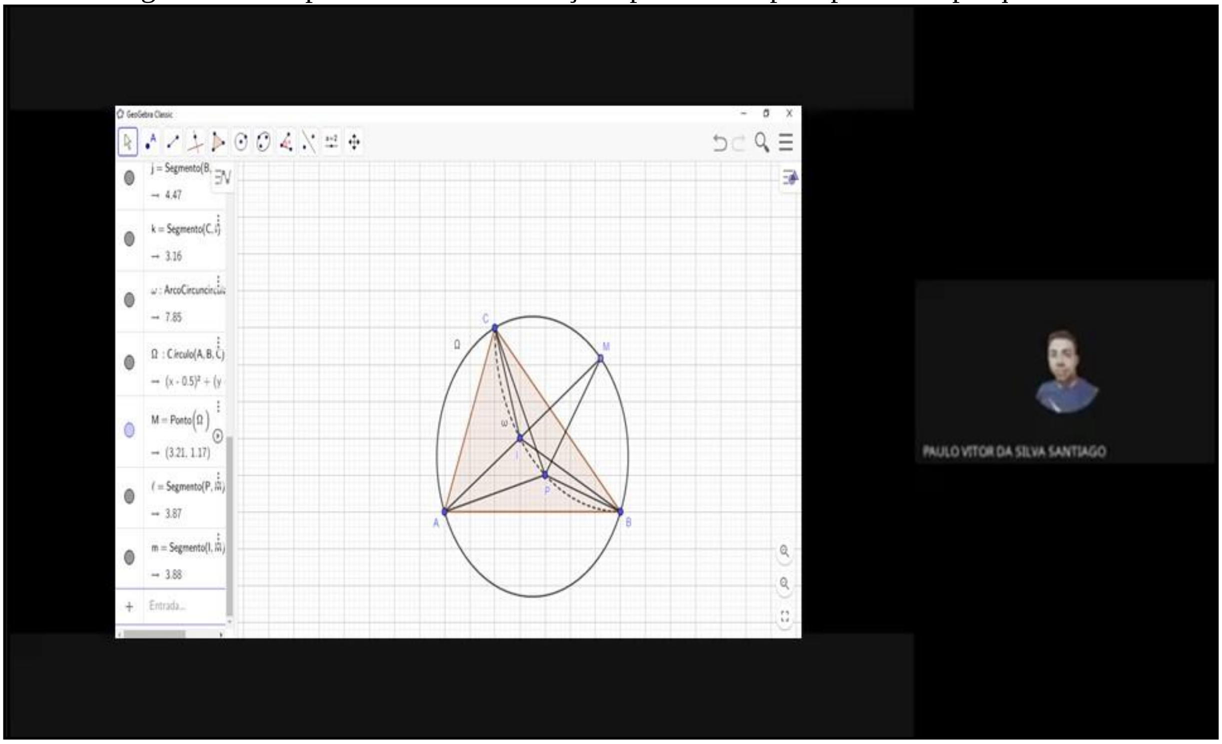
Portanto, depois da vivência das etapas anteriores pelos alunos olímpicos, como também das conversas, áudios reproduzidos e audiovisuais no grupo do aplicativo de mensagens em tempo real, pode-se concluir que o objetivo proposto nessa situação-problema foi alcançado, pois os participantes utilizaram a estrutura do desenho no desenvolvimento da construção no *software* GeoGebra para, em seguida, formular e validar suas soluções. Com isso, o P4 relatou da seguinte maneira:

> P4: Utilizando o GeoGebra *online*, por meio da estrutura construída pelo professor, obtivemos por interação o uso dos comandos para efetuação de outras formas de estruturação da SDO. Sendo assim, a utilização do GeoGebra tornou-se importante para a dinâmica da apresentação e compartilhamento com os outros colegas do grupo.

Por fim, na fase dialética da institucionalização, expuseram-se as ideias intuitivas da geometria plana, embasadas no conteúdo de formas geométricas estudado em sala de aula, haja visto que o ensino de figuras planas nas escolas brasileiras estarem marcados nesse assunto.

Conforme previsto na utilização do GeoGebra, o professor possibilitou aos participantes a visualização da SDO 2, facilitando o entendimento e a resolução dos sujeitos (Figura 57).

Figura 57 – Etapa da institucionalização apresentado pelo professor pesquisador



Fonte: Elaborada pelo autor.

Logo depois, o professor reestabeleceu os conhecimentos adquiridos a partir das conjecturas dos alunos e expôs a solução, a mesma que fora oferecida na etapa da análise *a priori*. É importante salientar que, nesse momento, também foi utilizado o GeoGebra para confrontar as informações do modelo matemático com o modelo apresentado no computador, validando assim os processos e propriedades geométricas presentes no enunciado do problema olímpico.

7.3 Terceiro encontro: análise *a posteriori* e validação das Situações Didáticas da IMO

A partir do momento que o pesquisador disponibilizou o *link* e *QR Code* (Figura 58) e a folha da atividade em formato de arquivo pdf pelo aplicativo de mensagens dentro do aplicativo de comunicação, os estudantes iniciaram um primeiro contato com a figura. Além da construção no GeoGebra, eles também manusearam caneta, lápis e papel na descrição e reprodução do modelo matemático descrito na atividade 3 da situação olímpica.

7.3.1 Análise a posteriori e validação do problema olímpico 3

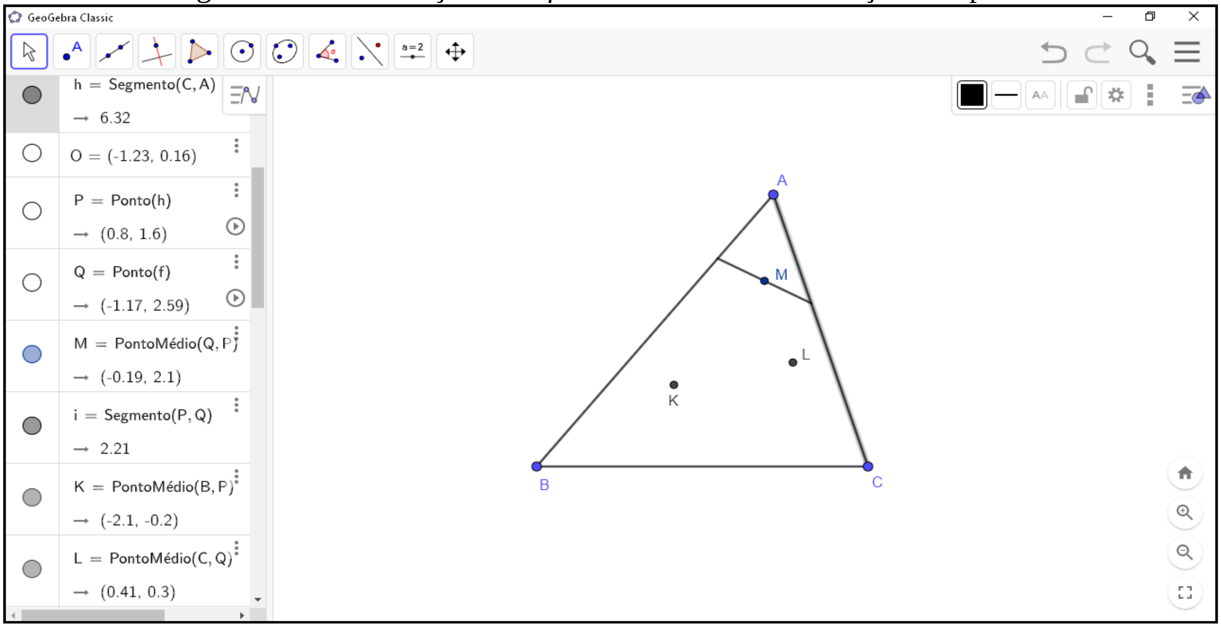
Em primeiro contato e diante da análise *a priori*, os participantes realizaram a leitura da situação didática olímpica 3, eles tiveram dificuldades em pensar no método prático que os levassem a uma formulação da questão. Diante disso, o professor pesquisador estimulou os alunos a analisarem algumas funções no *software* GeoGebra, realizando comandos básicos na construção, e a criarem um modelo matemático de resolução da SDO3.

Figura 58 – Terceiro encontro da SDO via web conferência

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os estudantes foram incentivados a usarem a estruturação no GeoGebra (Figura 59) e a buscarem a forma geométrica, a partir do comando Ponto e Segmento para tentarem construir um modelo geométrico matemático de resolução dessa situação didática olímpica.

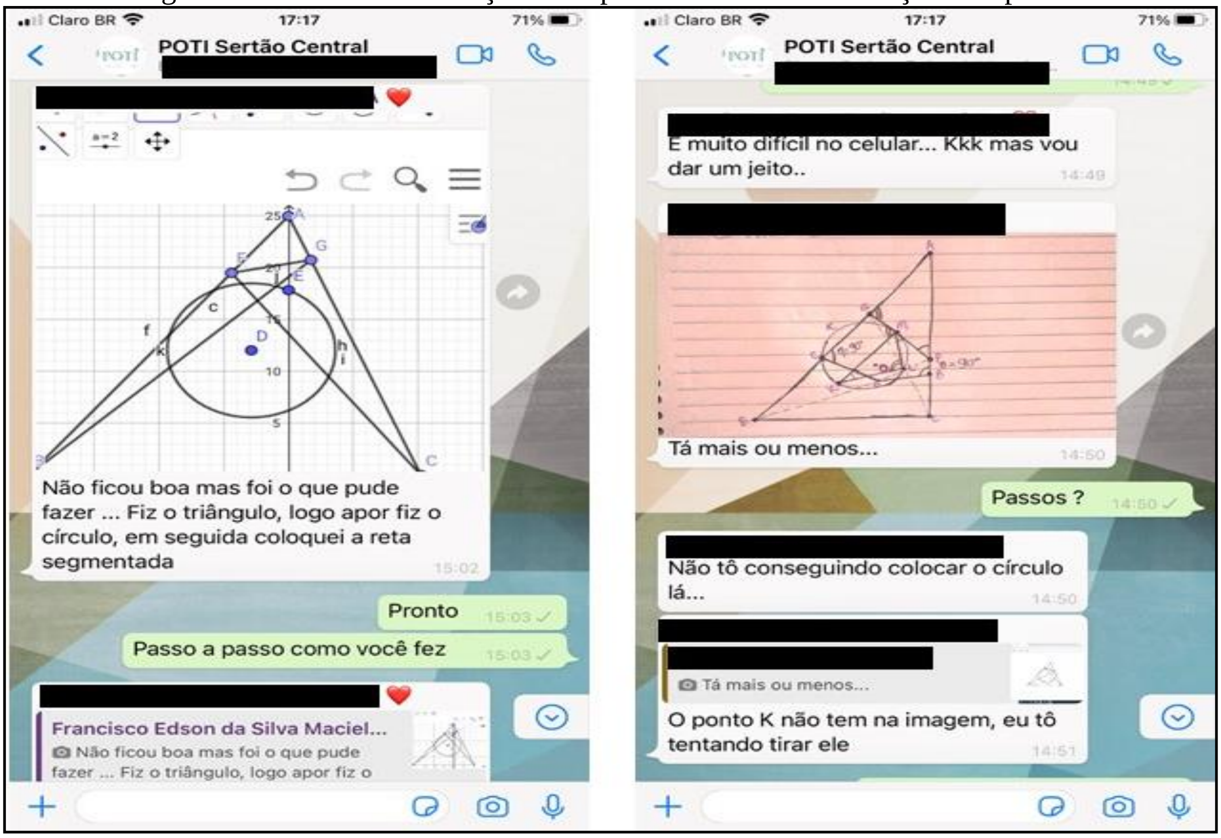
Figura 59 – Estruturação no *software* GeoGebra da situação olímpica 3



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na fase da Formulação, a dupla 4 procede a interação de métodos por meio do aplicativo de mensagens. A partir disso, as conversas descritas são evidenciadas para atingir o objetivo da questão 3 (Figura 60).

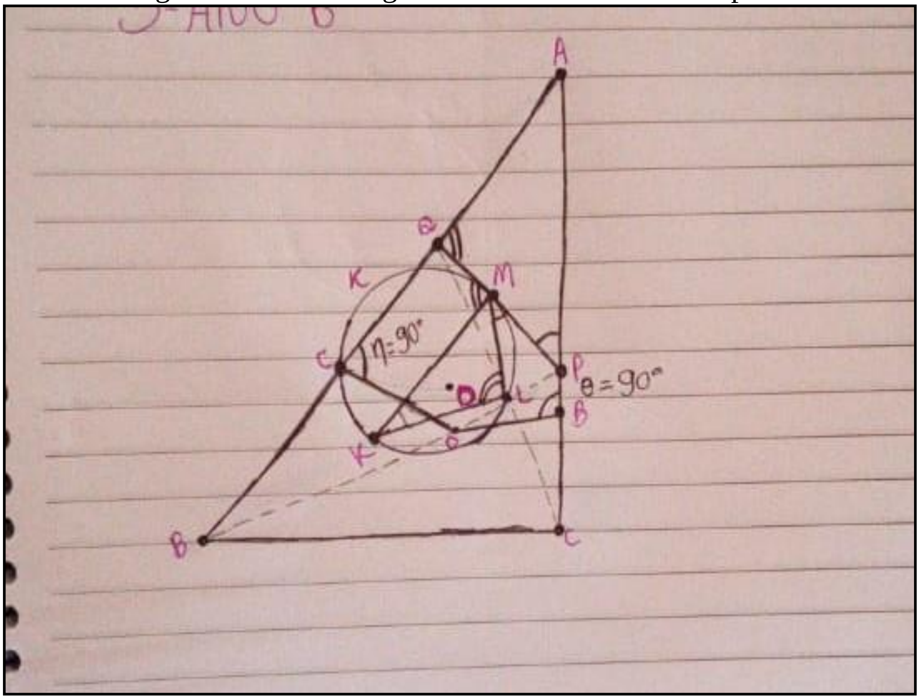
Figura 60 – Fase da formulação da dupla 4 relacionado à situação olímpica 3



Fonte: Elaborada pelo autor.

A partir dessas informações, começaram a construir um modelo matemático, contando com a prática adquirida e formulando um registro geométrico da figura (Figura 61).

Figura 61 – Modelo geométrico da SDO 3 da Dupla 4



Fonte: Elaborada pelo autor.

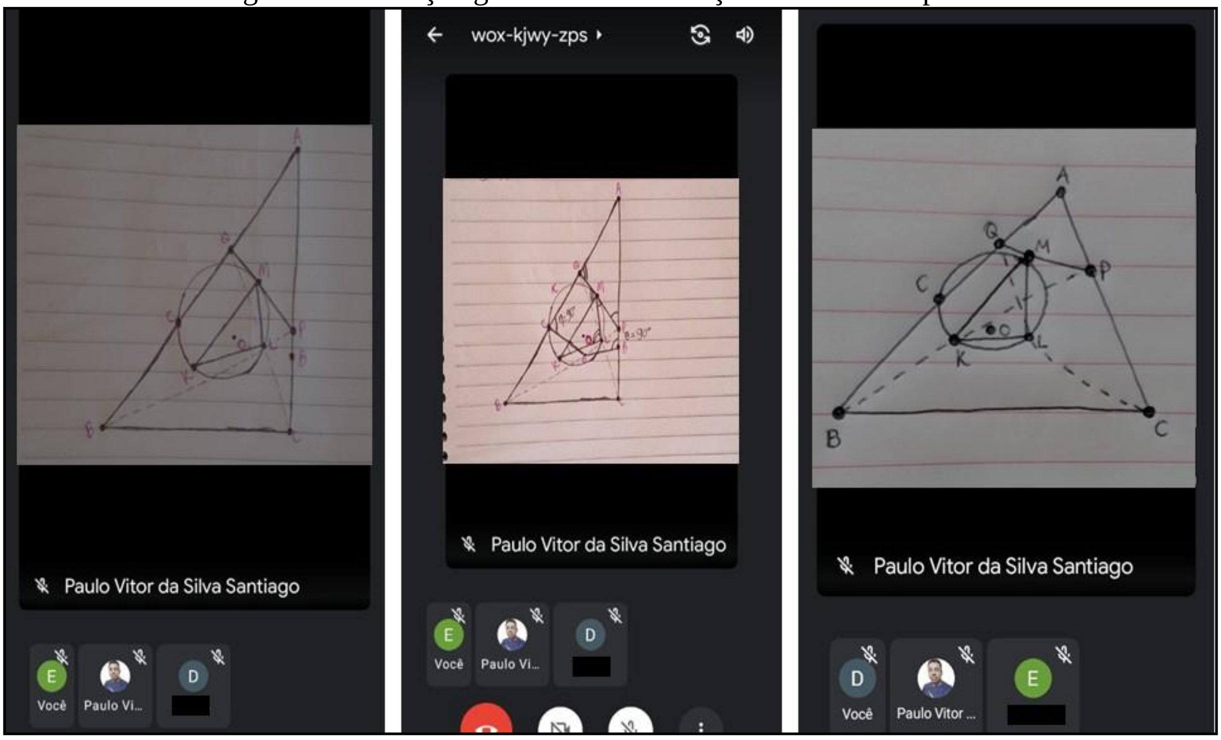
A dupla 4 apresentou uma resposta de acordo com os conceitos da análise *a priori*. Sendo assim, incluíram a circunferência dentro do triângulo retângulo *ABC* formando a seguinte expressão, por linhas paralelas e a condição de tangência:

$$\angle APM \ \cong \angle LMP \cong \angle LKM.$$

Na etapa da validação, a Dupla 4 expôs, no aplicativo *online* na plataforma de web conferência, os processos de resolução adotadas por eles para resolver o problema 3. Após a estratégia que perspectivou encontrar soluções do problema, o integrante P8 apresentou a descrição utilizada para complementar a figura construída.

O sujeito P8 descreve que: inicialmente, eu utilizei o comando segmento para construir um triângulo retângulo ABC sem medidas exatas, conforme enunciado da questão. Agora seguir com o comando Círculo definido por Três Pontos para incluir a circunferência sem medidas também. Já na finalização, incluir alguns pontos para estruturar um triângulo no centro da circunferência com ponto médio O incluso, sendo que OP = OQ comprovando a resolução da situação olímpica 3. Depois, a dupla 4 também compartilhou pela plataforma de web conferência a solução encontrada por eles da situação didática olímpica 3 (Figura 62).

Figura 62 – Solução geométrica da situação didática olímpica 3



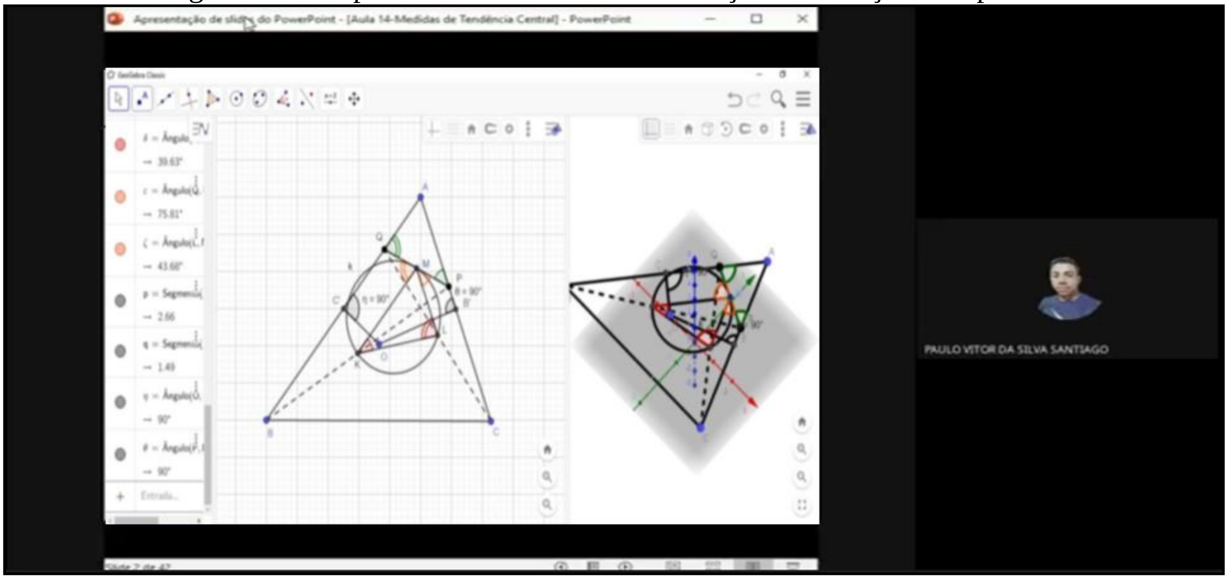
Fonte: Elaborada pelo autor.

Diante dos dados analisados, verificou-se que os demais participantes do grupo de pesquisa encontraram as mesmas formas geométricas do triângulo retângulo, portanto, o objetivo dessa situação olímpica foi alcançado.

A plataforma didática ajustada para o *software* GeoGebra, segundo as informações obtidas dos estudantes, foi importante por ser um novo conhecimento prático de uso para visualização e instituir métodos de resolução do problema.

Neste momento da institucionalização, reconduziu-se os conhecimentos adquiridos nessa situação didática, formando os conceitos implícitos da descrição da questão, pautados no tópico de geometria plana e, utilizando o *software* GeoGebra (Figura 63).

Figura 63 – Etapa dialética da institucionalização da situação olímpica 3



Fonte: Elaborada pelo autor.

Logo depois, fez-se um levantamento das conjecturas expostas pelas duplas, sistematizando em uma única resolução e mostrando a todos os presentes no grupo, de acordo com os pressupostos da análise *a priori*. No decorrer da análise dos dados coletados, pôde-se examinar que os estudantes definiram seus modelos geométricos diferentes em sua formulação, sendo percebido pelo professor como um ponto positivo no desenvolvimento da aprendizagem dos alunos em formação olímpica.

7.4 Realização e análise do questionário D

Nessa fase, foi aplicado um questionário, por meio do aplicativo de formulário *online*, sendo respondido pelos dez integrantes da pesquisa, a qual foi disponibilizada um *link* pelo professor pesquisador, no grupo de pesquisa do aplicativo de mensagens instantâneas. Esse questionário teve como objetivo identificar aspectos dos estudantes, mediante os conhecimentos adquiridos nas práticas das situações didáticas olímpicas, além de identificar o propósito que eles têm da aplicação das tecnologias digitais, no ensino de geometria plana.

As respostas do **Questionário de aplicação com estudantes da EEMJAC: Avaliação Final** encontram-se no Apêndice D, composto por seis questões que tratavam das sugestões de aplicação, métodos práticos e ferramentas didáticas relacionados ao ensino de conceitos geométricos da geometria plana.

Em seguida, apresenta-se o último capítulo desta pesquisa, no qual se destacam os resultados mais importantes alcançados e mostram-se novas concepções de pesquisas futuras.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa apresentou as etapas da Engenharia Didática que propôs a estruturação da dissertação, tendo como ponto central as questões de ensino e da aprendizagem do conteúdo de geometria plana, e possibilitou ao professor pesquisador um vasto conhecimento sobre as teorias e metodologias do objeto de estudo. Além disso, concedeu a verificação de variáveis didáticas para a elaboração de Situações Didáticas Olímpicas extraídas da Olimpíada Internacional de Matemática, em conexão do *software* GeoGebra.

Mediante a revisão bibliográfica definida por análise de diversos artigos científicos e dissertações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional que tratam do ensino de geometria plana, pode-se verificar alguns pontos importantes que atraem atenção nos processos de ensino e aprendizagem desse conteúdo, destacando dificuldades na compreensão de diferenciar o incentro e circuncentro, na geometria plana, refletindo no tópico de Geometria Espacial de Posição, ficando restrito às fórmulas, estruturações e resoluções de exercícios.

Essa metodologia possibilitou a construção de três situações olímpicas, com a colaboração do *software* GeoGebra, que se fundamentou no modelo didático de ensino equivalente à Teoria das Situações Didáticas, permitindo estudantes do ensino médio, durante a etapa da experimentação, a possibilidade de pensar, analisar, formular, descrever e validar hipóteses construídas e que induziu os diálogos entre professor, aluno e meio (*milieu*).

No desenvolvimento da situação didática olímpica, com o auxílio do *software* GeoGebra, observou-se os meios de utilização ao se defrontar, durante a aplicação do problema, expondo formas diferentes, a partir do emprego do GeoGebra, colocando à disposição todos os comandos necessários para que o aluno entre em contato com o problema olímpico, apropriando-se de saberes geométricos, analisados pelo encontro de tais conceitos nas etapas de Ação, Formulação e Validação, aplicado durante a fase dialética da experimentação dessa investigação.

Durante a manipulação do *software* GeoGebra, percebeu-se que os estudantes colocaram em prática noções intuitivas do conteúdo de formas planas de posição. Nesse sentido, os participantes utilizaram a visualização das figuras disponibilizadas no GeoGebra para estimular seus conhecimentos epistémicos e pragmáticos e, assim, entender o Problema Olímpico com sua devida solução. Essa inclusão também diferiu do modelo de ensino adotado nos livros didáticos, os quais seguem um padrão de atividades que mecaniza o aprendizado do aluno pelas várias repetições de exercícios propostos sobre determinado conteúdo, afastando a autonomia e possibilitando a decoração do conhecimento matemático.

A presente pesquisa teve alguns impedimentos, decorrentes pelo decreto governamental do estado do Ceará em relação à pandemia do coronavírus (COVID-19) e, com essa situação, todos os centros de ensinos (universidades, instituições, escolas) permaneceram fechados. À vista disso, a intermediação aconteceu de maneira virtual na plataforma de web conferência, o que foi provocador tanto na superação e nas observações instantâneas às dúvidas dos alunos. Essa proposta fica como sugestão para futuros professores trabalharem a aplicação das Situações Didáticas Olímpicas em formato presencial, para que estes possam reunir dados suficientes de forma mais ampla, mostrando informações que podem ser visualizadas presencialmente.

Durante esse isolamento social em decorrência da pandemia, ocorreu a mudança de ambiente presencial para o ensino remoto à distância, que foi um ponto desafiador, entre outros fatores que poderiam acontecer durante o desenvolvimento das atividades, como a falta de acesso à internet, computadores disponíveis, o conhecimento dos alunos relacionado ao uso das ferramentas tecnológicas, nessa situação, a plataforma de web conferência, aplicativo de sala de aula remota, um formulário *online* e o software GeoGebra. Com isso, foram estabelecidos meios de comunicação e envio das resoluções das situações olímpicas, o aplicativo de mensagem, *links* de acesso rápido, códigos em formato *QR-Code*, direcionando a estruturação dos problemas propostos pelo pesquisador.

Contudo, foram utilizados os celulares como ferramenta de visualização e construção, devido alguns participantes não possuírem notebook ou computadores em seus lares. Nesse momento, os alunos tiveram um treinamento junto ao professor pela plataforma de web conferência com uso do aplicativo *Suíte GeoGebra* para smartphones com sistema *Android* e *iOS*, realizando com eles simulações de algumas construções de geometria plana. Então fica como sugestão futura, às pesquisas decorrentes do aplicativo ou *software*, a aplicação das Situações Didáticas Olímpicas, utilizando celular, computadores ou notebook com utilização do GeoGebra disponível em forma *online,* programa e aplicativo, sendo diferentes meios de interações aos pesquisadores.

Diante do exposto, pode-se concluir que a proposta didática, apresentada por interação das situações olímpicas, seguida pelo uso do *software* GeoGebra, colaborou bastante aos conhecimentos adquiridos da geometria plana, como o incentro e circuncentro das figuras construídas, além de outros tópicos relacionados aos prévios saberes, por exemplo, circunferência circunscrita no triângulo retângulo ou vice-versa.

O produto educacional criado a partir desta pesquisa é composto de um site educacional e um *e*-book, contendo situações didáticas para o ensino de geometria, direcionada para professores em formação, formados ou em estudo de pesquisa, aplicarem em sala de aula com o objetivo de elaborar situações olímpicas pertinentes nas olimpíadas de matemática para cada ocasião do contexto escolar. Para tanto, sugere-se que essa vivência pelos alunos do ensino médio amplie seus conhecimentos para as competições olímpicas futuras, em particular a IMO e, como resultado, a gratificação de conhecer novas aprendizagens e culturas pelo mundo.

Tais pressupostos impulsionaram e fundamentaram a importância da aplicação desses Problemas Olímpicos em consonância ao *software* GeoGebra para o ensino de geometria plana, pela maneira chamativa, provocadora e pelas várias concepções utilizadas no resumo das soluções. Foram analisadas, nas pesquisas para a dissertação, a participação de estudantes do ensino fundamental, ensino médio e superior em olímpiadas de matemática, e a participação de professores para preparação desses estudantes.

Em razão disso, espera-se que esta pesquisa possa promover o ensino de geometria plana, associado às metodologias da Engenharia Didática em conjunto com a Teoria das Situações Didáticas, para que os professores de matemática possam utilizar os Problemas Olímpicos internacionais em sala de aula. Sendo assim, como contribuições futuras, especialmente, a todas as regiões do estado do Ceará, espera-se, com este estudo, alcançar uma maior atenção às olimpíadas nacionais e internacionais de matemática na educação básica do ensino médio, em que possa fortalecer atividades de integração com uso da tecnologia educacional, por interação de grupos de estudos, grupos de preparação para olimpíadas, entre outros, e promover efeitos diretos nas práticas dos indivíduos aos saberes matemáticos.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. Q. S. Engenharia didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPEd. **Revemat:** Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis/SC, v. 3, n. 1, p. 62-77, 2008. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article /view/1981-1322.2008v3n1p62/12137. Acesso em: 14 mar. 2020.

ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. Engenharia didática: evolução e diversidade. **Revemat:** Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 22-52, 2012. Disponível em: https:// periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/19811322.2012 v7n2p22/23452. Acesso em: 14 mar. 2020.

ALVES, D. S. **Os teoremas esquecidos pelos professores de geometria plana no ensino médio.** 2015. 67 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Instituto de Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2015. Disponível em: https://repositorio.ufms.br/handle/123456789/2404. Acesso em: 14 mar. 2021.

ALVES, F. R. V. Engenharia didática para a generalização da sequência de fibonacci: uma experiência num curso de licenciatura. **Educação Matemática Pesquisa,** São Paulo, v. 18, n. 1, p. 61-93, 2016. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/20879. Acesso em: 18 mar. 2020.

ALVES, F. R. V. Visualizing the olympic didactic situation (ods): teaching mathematics with support of the geogebra software. **Acta Didactica Napocensia,** Romênia, v. 12, n. 2, p. 97-116, 2019. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/338880829_ Visualizing_the_Olympic_Didactical_Situation_ODS_Teaching_Mathematics_with_support_ of_GeoGebra_software. Acesso em: 18 mar. 2020.

ALVES, F. R. V. Situações didáticas olímpicas (sdos): ensino de olimpíadas de matemática com arrimo no software geogebra como recurso na visualização. **Alexandria:** Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v. 13, n. 1, p. 1-30, 2020. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/ index.php/ alexandria/ article/ view/ 1982-5153.2020v13n1p319. Acesso em: 15 mar. 2020.

ALVES, F. R. V. Situação didática olímpica (sdo): aplicações da teoria das situações didáticas para o ensino de Olimpíadas. **Revista Contexto & Educação,** v. 36, n. 113, p. 116-142, 2021. Disponível em: https://www.revistas.unijui.edu.br/index.php/contextoeducacao/article/view/ 7992. Acesso em: 17 mar. 2020.

ALVES, S. O centro e massa de um triângulo. **Revista do Professor de Matemática,** São Paulo, p. 40-46, 2010.

ALVES, W. J. S. **O impacto da Olimpíada de Matemática em alunos da escola pública.** 2010. 30 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010. Disponível em:

http://www.pucsp.br/sites/default/files/download/posgraduacao/programas/educacaomatematica/washington_alves.pdf. Acesso em: 14 mar. 2020.

AZEVEDO, I. F. **Situações Didáticas Profissionais (SDP):** uma perspectiva de complementaridade entre a teoria das situações e a didática profissional no contexto das olimpíadas de matemática. 2020. 163 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, Fortaleza, 2020. Disponível em: http://pgecm.fortaleza.ifce.edu.br/dissertacoes-2020/. Acesso em: 20 abr. 2020.

ARTIGUE, M. Modélisation et reproductibilité en didactique des Mathématiques. **Le Cahiers Blancs,** n. 8, v. 1, p. 1- 39, 1984a.

ARTIGUE, M. **Contribuition à l´étude de la reproductibilité des situations didactiques – divers travaux de mathématiques et des didactiques des mathématiques. (Thése d´état).** Paris: Université Paris VII. 264f, 1984b. Disponível em: https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01250658/document/. Acesso em: 22 mar. 2020.

ARTIGUE, M. "Ingénierie Didactique". **Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions,** v. 9, n. 3, p. 281-308, 1988.

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. *In:* BRUN, J. **Didática das Matemáticas.** Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, Cap. 4. p. 193-217, 1996.

BAGATINI, A. **Olimpíadas de matemáticas, altas habilidades e resolução de problemas.** 2010. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Departamento de Matemática Pura e Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010. Disponível em: https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/29144/ 000775916.pdf?sequence=1. Acesso em: 15 out. 2019.

BARBOSA, J. L. M. **Olimpíadas de Matemática:** uma experiência de sucesso em educação no Ceará. 2005. Disponível em: http://www.sbpcnet.org.br/livro/57ra/progra-mas/ CONF_SIMP/textos/joaolucasbarbosasimp.htm. Acesso em: 20 out. 2019.

BARMAN, C. R.; GRIFFITHS, A. K.; OKEBUKOLA, P. A. O. High school students' concepts regarding food chains and food webs: a multinational study. **International Journal of Science Education,** United Kingdom, v. 17, n. 6, p. 775-782, 1995.

BARROS, L. D. O. **Análise de um jogo como recurso didático para o ensino da geometria:** jogo dos polígonos. 2012. 102 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2012. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/12653/1/Dissertacao_Lilian_Debora_Barros.pdf. Acesso em: 20 out. 2019.

BORTOLOSSI, H. J.; REZENDE, W.M.; PESCO, D. U. INSTITUTO GEOGEBRA NO RIO DE JANEIRO. **Geogebra.** Niterói: Universidade Federal Fluminense, 2015. Disponível em: http://www.geogebra.im-uff.mat.br. Acesso em: 22 fev. 2020.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Consulta Pública. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2015. Disponível em: http://historiadabncc.mec.gov.br/ documentos/ BNCC-APRESENTACAO.pdf. Acesso em: 11 nov. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_ versaofinal_site.pdf. Acesso em: 14 nov. 2020.

BROUSSEAU, G. Problèmes de didactique des décimaux. **Recherches em didactique des mathèmatiques.** v. 2, n. 1, p. 37-127. 1981. *E-book.* Disponível em: http://math.unipa.it/ ~grim/brousseau_decimaux_RDM_1981_2.1.pdf. Acesso em: 10 maio 2020.

BROUSSEAU, G. **Ingéniere didactique.** D'un problème à l'étude à priori d'une situation didactique. Deuxième École d'Été de Didactique des mathématiques, Olivet, 1982.

BROUSSEAU, G. La relation didactique: Le milieu, **Actes de la IVème Ecole d'Eté de didactique des mathématiques,** IREM Paris 7, p. 54-68, 1986.

BROUSSEAU, G. Le Contrat Didactique: Le Milieu. **Recherche en Didactique des Mathematiques,** v. 9, n. 3, p. 309-336, 1988.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e métodos da didáctica da matemática. In: BRUN, J. **Didática das Matemáticas**. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, p. 35-113, 1996.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas:** conteúdos e métodos de ensino. Apresentação de Benedito Antônio da Silva. São Paulo: Ática, 2008.

BURIGO, E. Z. **Movimento da matemática moderna no Brasil:** estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos dos anos 60. Dissertação (Mestrado) – UFRGS, Porto Alegre, 1989. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/163050. Acesso em: 17 dez. 2019.

CANGURU SEM FRONTEIRAS. **Concurso.** Coimbra, 2019. Disponível em: https://www.mat.uc.pt/canguru/index.html. Acesso em: 17 dez. 2019.

CARNEIRO, V. C. G. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de Matemática. **Zetetiké,** Campinas: UNICAMP, v. 13, n. 23, p. 87-119, 2005. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/ view/8646981. Acesso em: 25 out. 2019.

DJUKIC, D.; JANKOVIĆ, V.; MATIĆ, I.; PETROVIĆ, N. **The IMO Compendium:** A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959-2004, Springer, 2006. *E-book.* Disponível em: http://mathksar.weebly.com/uploads/1/4/4/0/ 14403348/the-imo-compendium-1959_2009 .pdf. Acesso em: 25 out. 2019.

FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA. **Instituto São Paulo Geogebra.** São Paulo. 2020. Disponível em: https://www.pucsp.br/geogebrasp/geogebra.html. Acesso em: 14 fev. 2020.

FERREIRA, H. S. **A neuroeducação e a teoria das situações didáticas: uma proposta de aproximação para atender à diversidade em sala de aula.** Orientador: Prof. Dr. Tadeu Oliver Gonçalves. 2020. 121 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Belém, 2020. Disponível em: http://200.239.66.58/jspui/bitstream/2011/12809 /1/NeuroeducacaoTeoria Situacoes_Tese.pdf . Acesso em: 03 jan. 2021.

FIGUEROA, T. P; ALMOULOUD, S. A. O milieu e o contrato didático: análise de uma aula demonstrativa do círculo da matemática do Brasil. **Acta Scientiae,** Canoas, v. 20, n. 4, p. 687-706, 2018. DOI: https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v20iss4id4620. Disponível em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/4620. Acesso em: 20 mar. 2020.

GOMES, K. G. **Olimpíada Cearense de Matemática (OCM):** laboratório de oportunidades, experiências e de desenvolvimento da matemática no Estado do Ceará. 2019. 123f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Universidade Federal do Ceará, Fortaleza. 2019. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=170160631. Acesso em: 20 mar. 2020.

GOMES, R. O.; SILVA, M. L.; NUNES, J. B. Formação de professores para o letramento digital. In: NUNES, Joào B.; OLIVEIRA, Luisa X. (org). **Formação de professores para as tecnologias digitais:** software livre e educação a distância. Brasília: Liber, p.68-81, 2013.

GUZMÁN, M. **A História dos jogos olímpicos.** Lisboa: Círculo de Leitores, 1992.

IMO. **INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD.** Sítio eletrônico oficial. 2020. Disponível em: https://www.imo-official.org. Acesso em: 18 fev. 2020.

IME. **INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA.** Sítio eletrônico oficial. 2020. Disponível em: http://www.ime.eb.mil.br/pt/. Acesso em: 30 ago. 2020.

KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias:** um novo ritmo da informação. 8. ed. Campinas: Papirus, p. 15-25, 2012.

LIMA, C. E. O. **A utilização do *software* geogebra como ferramenta para o ensino de funções**. 2013. 61f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013. Disponível em: http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/5815/1/2013_dis_ceolima.pdf. Acesso em: 11 nov. 2019.

LIMA, F. D. S. **Situações didáticas olímpicas para o ensino de funções:** o contributo da engenharia didática de segunda geração. 2019. 122f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Fortaleza, 2019. Disponível em: http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/49133/5/2019_dis_fdslima.pdf. Acesso em: 12 jan. 2020.

LINARES, J. L. **Problemas resolvidos sobre sequências no treinamento de estudantes do ensino médio para olimpíadas internacionais de matemática.** 2019. 135 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos,

2019. Disponível em: https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/11881. Acesso em: 20 mar. 2020.

LUCAS, R. D. **GeoGebra e Moodle no ensino de geometria analítica.** 2009. 84 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2009.

MACIEL, M. V. M. Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP): as origens de um projeto de qualificação do ensino de matemática na educação básica. *In:* ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA,10, 2009, Ijuí/RS. **Anais.** Ijuí-RS: [s. n.], 2009. Disponível em: http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/CC/CC_19.pdf. Acesso em: 22 mar. 2020.

MACHADO, S. D. A. Engenharia didática. *In:* MACHADO, S. D. A. et al. (org.). **Educação matemática:** uma introdução. 2 ed. São Paulo: Educ, 2002. p. 197-208.

MARTINS, R. A. **Colinearidade e concorrência em olimpíadas internacionais de matemática:** uma reflexão voltada para o ensino da geometria plana no Brasil. 2015. 145f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Universidade de Brasília, Brasília, 2015. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=90299. Acesso em: 20 mar. 2020.

MASSAGO, S. **Pontos notáveis de um triângulo.** São Paulo. 2014. Disponível em: https://www.dm.ufscar.br/profs/sadao/download/?file=student/triangulo-pontos-notaveis. pdf. Acesso em: 22 fev. 2020.

MENDES, I. A. **Investigação histórica no ensino da matemática.** 1. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

MIRANDA, M. A. **O livro didático em questão.** Monografia (Pós-Graduação em Ensino de Língua Portuguesa) - Universidade Estadual do Centro-Oeste, Guarapuava- PR, 1997.

MUNIZ NETO, A. C. **Tópicos de matemática elementar:** geometria euclidiana plana. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

NÚÑEZ, I. B. *et al.* A seleção dos livros didáticos: um saber necessário ao professor; o caso do ensino de ciências. **OEI- Revista Iberoamericana de Educación,** [International organization], v. 13, n. 1, p. 1-11, 2009. Disponível em: http://www.rieoli.org/deloslectores/427Beltran.pdf. Acesso em: 26 maio 2021.

OBMEP. **Regulamento**. Rio de Janeiro, 2020. Disponível em: http://www.obmep.org.br/regulamento.htm. Acesso em: 20 jan. 2020.

OBM. **EUREKA! Nº 3**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998. Trimestral. Disponível em: https://www.obm.org.br/revista-eureka/. Acesso em: 18 nov. 2019.

OBM. **INTERNACIONAIS.** Rio de Janeiro, 2019. Disponível em: https://www.obm.org.br/competicoes/internacionais/. Acesso em: 10 dez. 2019.

OLIVEIRA, C. C. N. **Olímpiadas de matemática:** concepção e descrição de "situações olímpicas" com recurso do software GeoGebra. 2016. 136 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2016. Disponível em: http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/21033/1/2016_dis _ccnoliveira.pdf. Acesso em: 06 dez. 2019.

OLIVEIRA NETO. J. E. **Situações didáticas olímpicas aplicadas a problemas de geometria plana da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).** 2019. 64 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2019. Disponível em: http://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/49131/5/2019_dis_jeoneto.pdf. Acesso em: 06 jan. 2021.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA. **6ª Olimpíada de Matemática da Comunidade dos Países de Língua Portuguesa (OMCPLP).** Rio de Janeiro: IMPA, 2019. Disponível em: http://omcplp.obmep.org.br/. Acesso em 18 dez. 2019.

PAIS, L. C. Introdução. *In:* MACHADO, S. D. A. *et al.* (org.). **Educação matemática:** uma introdução. 2 ed. São Paulo: Educ, 2002. p. 9-12.

PARANHOS, M. M. **Geometria dinâmica e o cálculo diferencial e integral.** 2009. 112 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

PERRIN-GLORIAN, M. J. Problèmes d'articulation de cadres théoriques: l'exemple du concept de milieu. **Recherches en Didactique des Mathématiques,** France, v. 19, n. 3, p. 279-322, 1999.

PINTO, N. B. Contrato didático ou contrato pedagógico? **Revista Diálogo Educacional,** Curitiba, v. 4, n. 10, p. 93-106, 2003. DOI: http://dx.doi.org/10.7213/rde.v4i10.6437. Disponível em: https://periodicos.pucpr.br/index.php/dialogoeducacional/article/view/6437. Acesso em: 20 dez. 2020.

POLYA, G. Sobre a resolução de problemas de matemática na high school. *In:* KRULIK, Stephen; REYS, Robert E. **A resolução de problemas na matemática escolar.** Tradução: Hygino H. Domingues, Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA. **Poti:** Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo. Rio de Janeiro: IMPA, 2020. Disponível em: https://poti.impa.br/. Acesso em: 18 maio 2020.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. **Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2020. Disponível em: https://www.profmat-sbm.org.br/. Acesso em: 16 maio 2020. .

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. **Apresentação [Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional].** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática,

2020. Disponível em: http://www.profmat-sbm.org.br/organizacao/apresentacao/. Acesso em: 18 mar. 2020.

QUILHAIS, K. Relações métricas no triângulo retângulo. *In:* KILHIAN, Kleber. **O baricentro da mente,** [*s. l.*]c2021. Disponível em: https://www.obaricentrodamente.com/2015/04/ relacoes-metricas-no-triangulo-retangulo.html. Acesso em: 18 fev. 2020.

SILVA, L. S. C. **O teorema de Morley.** 2014. 58 f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=996. Acesso em: 12 mar. 2021.

SILVA, T. E. V. *et al.* QEOn Questionnaire for Assessing Experiences in Virtual Learning Environments. **IEEE Latin America Transactions,** United States, v. 15, n. 6, p. 1196 -1203, 2017.

SOUZA, R. N. S; CORDEIRO, M. H. B. V. A contribuição da engenharia didática para a prática docente de matemática na educação básica. *In:* CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 5, 2005, Curitiba. **Anais** [...] Curitiba: PUCPR, 2005. p 33-45, 2005.

TEIXEIRA. P. J. M.; PASSOS, C. C. M. Um pouco da teoria das situações didáticas (TSD) de Guy Brousseau. **Zetetiké – FE/Unicamp,** Campinas, v. 21, n. 39, p. 155-168, 2013. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646602/13504. Acesso em: 10 mar. 2020.

TIETZE, Uwe-Peter. Currículo matemático e os objetivos subjacentes. *In:* BIEHLER, R.; SCHOLZ, R.; STRÄßER, R.; WINKELMANN, B. **Didática da matemática como disciplina científica:** o estado da arte. Dordrecht: Kluwer-Reidel, 1994. p. 41-53.

TURNER, Nura Dorothea Rains. A historical sketch of olympiads: U.S.A. and international. **College Mathematics Journal,** United States, v. 16, n. 5, p. 330-335, 1985.

APÊNDICE A - SITUAÇÕES DIDÁTICAS OLÍMPICAS

ATIVIDADE 01 – PESQUISA DE MESTRADO PROFISSIONAL

Mestrando: Paulo Vitor da Silva Santiago

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

Aluno: ____ **Data:** ____________________

1) (Problema da IMO 1959 - Geometria - 2º Dia - Questão 04). Construir um triângulo retângulo com hipotenusa c, tal que a mediana da hipotenusa é a média geométrica dos dois catetos do triângulo.

ATIVIDADE 02 – PESQUISA DE MESTRADO PROFISSIONAL

Mestrando: Paulo Vitor da Silva Santiago

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

Aluno: ____ **Data:** ____________________

2) (Problema da IMO 2006 - Geometria - 1º Dia - Questão 01). Seja ABC um triângulo com incentro I. Um ponto P no interior do triângulo verifica

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Prove que $AP \geq AI$, com igualdade se, e somente se, $P = I$.

ATIVIDADE 03 – PESQUISA DE MESTRADO PROFISSIONAL

Mestrando: Paulo Vitor da Silva Santiago
Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves

Aluno: ______________________________________ **Data:** ___________________

3) (Problema da IMO 2009 - Geometria - 1º Dia - Questão 02). Seja ABC um triângulo cujo circuncentro é O. Sejam P e Q pontos interiores dos lados CA e AB, respectivamente. Sejam K, L e M os pontos médios dos segmentos BP, CQ e PQ, respectivamente, e Γ a circunferência que passa por K, L e M. Suponha que a reta PQ é tangente à circunferência Γ. Demonstre que $OP = OQ$.

APÊNDICE B - ATIVIDADES (LINKS E CÓDIGOS)

LINKS DE ATIVIDADE DE PESQUISA - APLICAÇÃO DA SITUAÇÃO DIDÁTICA OLÍMPICA

ATIVIDADE OLÍMPICA 01: encurtador.com.br/dpBW9

ATIVIDADE OLÍMPICA 02: encurtador.com.br/GHST4

ATIVIDADE OLÍMPICA 03: encurtador.com.br/ilNY6

LINKS DE ATIVIDADE DO GEOGEBRA - APLICAÇÃO DA SITUAÇÃO DIDÁTICA OLÍMPICA

QUESTÃO OLÍMPICA 01: encurtador.com.br/yRSY6

QUESTÃO OLÍMPICA 02: encurtador.com.br/xDM08

QUESTÃO OLÍMPICA 03: encurtador.com.br/gmtwB

QR CODE ATIVIDADE DE PESQUISA - APLICAÇÃO DA SITUAÇÃO DIDÁTICA OLÍMPICA

Figura 64 - Códigos das Atividades Aplicadas 1, 2 e 3, respectivamente

Fonte: Elaborada pelo autor.

QR CODE ATIVIDADE DO GEOGEBRA - APLICAÇÃO DA SITUAÇÃO DIDÁTICA OLÍMPICA

Figura 65 - Códigos das Situações Problemas 1, 2 e 3, respectivamente

Fonte: Elaborada pelo autor.

ANEXO C – TERMO DE CONSETIMENTO
TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)

PESQUISA. OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA (IMO): SITUAÇÕES DIDÁTICAS OLÍMPICAS NO ENSINO DE GEOMETRIA PLANA.

Prezado (a) colaborador (a),

Você é convidado (a) a participar desta pesquisa, que tem como finalidade analisar os Problemas Olímpicos, abordado como uma proposta para o ensino de Geometria Plana no contexto da Olimpíada Internacional de Matemática (*International Mathematical Olympiad*), de maneira complementar, alinhada à metodologia de pesquisa da Engenharia Didática, com o uso do software GeoGebra para auxiliar na formação de professores e preparação olímpica de alunos.

1. PARTICIPANTES DA PESQUISA: Indivíduos entre 16 e 19 anos, de ambos os sexos, provenientes da população geral da cidade de Quixeramobim (CE). Esta será, inevitavelmente, uma amostra de conveniência, não-probabilística; participarão da pesquisa aqueles voluntários que, convidados a colaborar, concordem com este termo.

2. ENVOLVIMENTO NA PESQUISA: Ao participar deste estudo, você deverá responder a três atividades envolvendo problemas olímpicos de matemática. Você tem a liberdade de se recusar a participar e pode ainda interromper a sua participação em qualquer momento da pesquisa, sem nenhum prejuízo. Sempre que quiser, você poderá pedir mais informações sobre a pesquisa. Para isso, poderá entrar em contato com a coordenadora da pesquisa.

3. RISCOS E DESCONFORTOS: A participação nesta pesquisa não traz complicações; talvez, apenas, algum constrangimento que algumas pessoas sentem quando estão fornecendo informações sobre si mesmas. Os procedimentos utilizados nesta pesquisa seguem as normas estabelecidas pela Resolução 510/16 do Conselho Nacional de Saúde, e não oferecem risco à sua integridade física, psíquica e moral. Nenhum dos procedimentos utilizados oferece riscos à sua dignidade.

4. CONFIDENCIALIDADE DA PESQUISA: Todas as informações coletadas neste estudo são estritamente confidenciais. Apenas os membros do grupo de pesquisa terão conhecimento das respostas, e seu nome não será utilizado em nenhum momento. Todos os dados serão analisados em conjunto, garantindo o caráter anônimo das informações. Os resultados poderão ser utilizados em eventos e publicações científicas.

5. BENEFÍCIOS: Ao participar desta pesquisa, você não deverá ter nenhum benefício direto. Entretanto, espera-se que a mesma nos forneça dados importantes acerca de possíveis fatores que influenciam no processo de julgamento social.

6. PAGAMENTO: Você não terá nenhum tipo de despesa por participar desta pesquisa. E nada será pago por sua participação. Entretanto, se você desejar, poderá ter acesso a cópias dos relatórios da pesquisa contendo os resultados gerais do estudo.

Endereço do responsável pela pesquisa:
Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Alves Vieira
Mestrando responsável: Paulo Vitor da Silva Santiago
Instituição: Universidade Federal do Ceará – Centro de Ciências
Unidade: Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação
Endereço: Campus do Pici, Bloco 902 - CEP 60455-900 - Fortaleza - CE
Fone: (85) 3366 9787 / 33669965
Fax: (85) 33669982
E-mail: encima@ufc.br
Sítio: www.ppgencima.ufc.br/

ATENÇÃO: Se você tiver alguma consideração ou dúvida, sobre a sua participação na pesquisa, entre em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa da UFC/PROPESQ – Rua Coronel Nunes de Melo, 1000 - Rodolfo Teófilo, fone: 3366-8344/46. (Horário: 08:00-12:00 horas de segunda a sexta-feira).
O CEP/UFC/PROPESQ é a instância da Universidade Federal do Ceará responsável pela avaliação e acompanhamento dos aspectos éticos de todas as pesquisas envolvendo seres humanos.

CONSENTIMENTO DA PARTICIPAÇÃO COMO SUJEITO

Tendo compreendido perfeitamente tudo o que me foi informado sobre a participação no mencionado estudo e estando consciente dos meus direitos, das minhas responsabilidades, dos riscos e dos benefícios que a minha participação implica, concordo em participar e para isso eu DOU O MEU CONSENTIMENTO SEM QUE PARA ISSO EU TENHA SIDO FORÇADO (A) OU OBRIGADO (A).

Nome do participante responsável: ____
Nome do membro da equipe de pesquisa: ______________________________________
Local e Data: ____
Assinatura do participante responsável: ______________________________________
Assinatura do membro da equipe de pesquisa: _________________________________
Assinatura do pesquisador(a) responsável: ____________________________________

APÊNDICE D – RESPOSTAS DO QUESTIONÁRIO APLICADO AOS PARTICIPANTES DA PESQUISA

Questionário de aplicação com estudantes da EEMJAC: Avaliação Final

Olá, alunos da João Carneiro!

Agradeço a todos a participação da convivência e reflexão com vocês nesses encontros da aplicação das situações didáticas olímpicas. Acredito ter colaborado na formação de vocês para as futuras olímpiadas internacionais apresentando uma proposta de ensino empregando questões da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) em conjunto com o auxílio do *software* GeoGebra, e que essa metodologia possa ser aplicada a futuros alunos, com apoio dos professores em formação, atuantes e futuros docentes.

Nesse sentido, a pesquisa foi complementada por algumas perguntas favorável à realização das Situações Didáticas Olímpicas (SDO), popular por abranger problemas da IMO e a Teoria das Situações Didáticas (TSD), e contribuir para preparação de todos vocês, estudantes participantes do grupo de estudo olímpico.

Q1 - Você aprendeu algo que considera pertinente no uso com *software* GeoGebra?

Com o uso do GeoGebra consegui entender bastante os conteúdos de matemática, possui muita praticidade deixando as aulas cada vez mais simples e fáceis de obter a compreensão. Esta ferramenta me proporcionou uma aprendizagem com uso de ferramentas digitais nesta época que estamos passando da pandemia Covid-19, espero ter melhor foco na volta as aulas com este método de ensino aprendido.

Q2 - O seu interesse sobre o tema cresceu como consequência do curso na resolução das Situações Didáticas Olímpicas (SDO)?

Influenciou bastante no meu aprendizado, principalmente para resolução de questões de matemática, o software GeoGebra possui várias visualizações gráficas que tornaram mais fácil minha interpretação nas questões. Também conheci algumas questões problemas que trabalham a matemática mais na parte do desenho e construção no GeoGebra.

Q3 - Os materiais do curso foram bem preparados e cuidadosamente transmitidos para o entendimento das ferramentas do software GeoGebra?

Foram bem explanados, mostrou o passo a passo de como utilizá-lo e foi ensinado com bastante calma para que todos compreendessem igual. O professor sempre repassava no Google Sala de Aula para lermos, depois iriamos pegar o código da construção para visualizar os comandos e ter um norte na modelagem.

Q4 - O professor melhora a apresentação dos conteúdos com sugestões de sites e vídeos voltados para Olímpiadas Nacionais e Internacionais?

Sim, foram indicados materiais em pdf para estudos, links e vídeos para aprofundar mais no conteúdo dado durante o curso. Ele passou alguns vídeos para nós estudarmos sobre as questões de olimpíadas internacionais e link de materiais traduzidos de fácil entendimento de conceitos matemáticos.

Q5 - Os estudantes são encorajados a participarem das discussões em sala de aula virtual (plataforma de web conferência)?

Sim, todas as nossas aulas foram desenvolvidas na plataforma de web conferência, o professor esteve sempre presente para tirar dúvidas e repassar o conteúdo. Sempre tinha uma dinâmica para motivação sobre as olimpíadas, participações de alunos e premiações dos alunos premiados.

Q6 - Leituras complementares de artigos, chat, livros, feedback, portfólios contribuem para apreciação e compreensão dos conteúdos

Contribuem para o meu conhecimento a leitura de artigos, ver vídeos e resolver atividades. Além disso, percebermos que foi muito enriquecedor para nossa aprendizagem fora da escola, neste momento que estudamos pela internet (ensino remoto).

APÊNDICE E - DISSERTAÇÕES DO PROFMAT COM TÍTULO “OLIMPÍADAS”

Tabela 5 - Trabalhos pesquisados no portal de dissertações do PROFMAT sobre o título: Dissertações voltadas para as OLIMPÍADAS, no período de março de 2013 até agosto de 2020

DATA DE DEFESA	AUTOR	TÍTULO DA DISSERTAÇÃO	INSTITUIÇÃO
05/03/2013	ADENILSON PEREIRA BONFIM	**PRODUÇÃO E APLICAÇÃO DE MATERIAL DIDÁTICO PARA ESTUDANTES INICIANTES EM OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA**	UFPA
15/03/2013	BRUNO BRAGANÇA	**OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA PARA A MATEMÁTICA AVANÇAR**	UFV
14/04/2013	CARLOS ALBERTO DA SILVA VICTOR	**OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA: QUE PRECIOSIDADES ENVOLVEM OS PROBLEMAS DESTA COMPETIÇÃO E QUAL O SEU IMPACTO PARA O PROFESSOR DE MATEMÁTICA SEM EXPERIÊNCIA EM OLIMPÍADAS E A SUA IMPORTÂNCIA PARA O ESTUDANTE?**	UFRRJ
28/06/2013	CLÁUDIA GALVÃO DA SILVA	**RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SOBRE GEOMETRIA PARA AS OLIMPÍADAS BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS – OBMEP.**	UFPA
28/06/2013	GILVAN LIRA SOUZA	**RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SOBRE ARITMÉTICA PARA A OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS – OBMEP.**	UFPA
28/06/2013	GILMAR VIRGOLINO AMÉRICO	**RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SOBRE ANÁLISE COMBINATÓRIA PARA AS OLIMPÍADAS BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS – OBMEP.**	UFPA
29/07/2013	VALESSA ZAIGLA FAUSTINO SOUSA	**FUNÇÕES CONVEXAS COM APLICAÇÕES EM PROBLEMAS DE OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA.**	UFPI
22/02/2014	MARCOS VINICIUS FERNANDES CALAZANS	**PROPOSTA DE IMPLANTAÇÃO DO CENTRO PREPARATÓRIO PARA OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA**	UESC

06/06/2014	GEORGE WESLEY BARBALHO GONÇALVES	**GEOMETRIA DO TRIÂNGULO: TEOREMAS, PROBLEMAS E APLICAÇÕES EM OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA**	UNB
06/02/2015	RONEI LIMA BADARÓ	**DO ZERO ÀS MEDALHAS: ORIENTAÇÕES AOS PROFESSORES DE CURSOS PREPARATÓRIOS PARA OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA**	UFBA
02/04/2015	FRANCISCO PEREIRA DE ANDRADE	**AS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA AMPLIANDO E FORTALECENDO O PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM**	UFERSA
26/06/2015	RONALD ALEXANDRE MARTINS	**COLINEARIDADE E CONCORRÊNCIA EM OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE MATEMÁTICA: UMA REFLEXÃO VOLTADA PARA O ENSINO DA GEOMETRIA PLANA NO BRASIL**	UNB
31/08/2015	RENILSON RODRIGUES ARAUJO	**PERFIL DE DESEMPENHO DOS ALUNOS DE ENSINO MÉDIO DA UNIDADE INTEGRADA HENRIQUE ROCHA, TUTÓIA-MA FRENTE A PRIMEIRA ETAPA DA OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS.**	UFPI
31/08/2016	ROGÉRIO DE CARVALHO PONTES	**GEOMETRIA ESPACIAL: MOTIVAÇÃO PARA OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA**	UNESP
25/11/2016	MAILY MARQUES PEREIRA	**A RESOLUÇÃO DE QUESTÕES DAS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA COM TEOREMAS DA ARITMÉTICA**	UNIR
27/06/2017	GRACIELI APARECIDA PERDOMO FERNANDES	**AS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA DA UNEMAT: UM OLHAR DA PROFICIÊNCIA EM GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO DO MUNICÍPIO DE SINOP/MT**	UNEMAT
30/06/2017	BRUNO SERAFIM DE SOUZA	**APLICAÇÕES DA DERIVADA: UMA ABORDAGEM PARA PARTICIPANTES DAS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA**	UFCA
01/09/2017	FABIO LUIZ GARCIA	**OLIMPÍADAS MATEMÁTICAS: UM CAMINHO PARA O FUTURO**	UEL

04/09/2017	VANESSA PRADO BERALDO DA PAZ	**O PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM ATRAVÉS DA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS, COM FOCO NAS QUESTÕES DA OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS**	UNESP
30/11/2017	DEBORA DAIANA KLERING WIEST	**ANÁLISE DOS IMPACTOS DA PARTICIPAÇÃO NA OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS (OBMEP) PARA A FORMAÇÃO DOS PROFESSORES ORIENTADORES E ALUNOS MEDALHISTAS DAS REGIÕES OESTE E SUDOESTE DO PARANÁ**	UTFPR
22/02/2018	DANIEL ALARCON	**DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO LÓGICO: UMA ABORDAGEM PELO ESTUDO DE GRUPOS E PELA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA**	UNICAMP
14/03/2018	ANDERSON BRAZ DE SANTANA	**A ADOÇÃO DE UMA DISCIPLINA EAD COM INTUITO DE PREPARAR OS ALUNOS PARA AS OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA**	UFAM
03/08/2018	ELIENE CRISTINE IZU NAKAMURA LISI	**OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA SUA IMPORTÂNCIA NA DIVULGAÇÃO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA. UMA EXPERIÊNCIA DE ANÁLISE, DIAGNÓSTICO E INTERVENÇÃO DIDÁTICO PEDAGÓGICA**	UNESP
10/08/2018	JANIO LUIZ DE AQUINO DE SOUZA	**OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS: DESAFIOS ENFRENTADOS POR PROFESSORES E ALUNOS DA REDE PÚBLICA MUNICIPAL NO MUNICÍPIO DE ASSÚ-RN**	UFERSA
23/10/2018	EDUARDO PEREIRA DUTRA	**A ARITMÉTICA EM CONCURSOS MILITARES E OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA: UMA DESARMONIZAÇÃO COM OS LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO FUNDAMENTAL E UMA PROPOSTA PARA MELHORIA DO ENSINO.**	UFJF

31/10/2018	WILLIAM LACERDA MOURÃO	**A ANÁLISE COMBINATÓRIA NOS VESTIBULARES MILITARES E OLIMPÍADAS.**	UFPB
31/01/2019	CRISTIANE FRANÇA NUNES MOREIRA	**FORMAÇÃO DE PROFESSORES DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: PREPARAÇÃO PARA OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA**	UFAL
15/08/2019	REJEANE DE LIMA	**CONGRUÊNCIAS MODULARES: APLICAÇÕES EM PROBLEMAS DE OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA E CHAVE PÚBLICA RSA**	UDESC
23/08/2019	KEYSON GONDIM GOMES	**OLIMPÍADA CEARENSE DE MATEMÁTICA (OCM): LABORATÓRIO DE OPORTUNIDADES, EXPERIÊNCIAS E DE DESENVOLVIMENTO DA MATEMÁTICA NO ESTADO DO CEARÁ.**	UFC
30/08/2019	JUAN LÓPEZ LINARES	**PROBLEMAS RESOLVIDOS SOBRE SEQUÊNCIAS NO TREINAMENTO DE ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO PARA OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE MATEMÁTICA**	UFSCAR

Fonte: Elaborada pelo autor.

APÊNDICE F - RESUMO DAS DISSERTAÇÕES CITADAS

Tabela 6 - Resumo das dissertações do PROFMAT encontradas relacionadas ao tópico olimpíadas

Ano	Autor	Resumo (os)	Estado
2013	Adenilson Pereira Bonfim	Propor a construção de um material didático que contemple estudantes do Ensino Básico Público e Particular nas Olimpíadas de Matemática Nacionais de forma a tornar este estudo em abrangente e costumeiro.	**PA**
2013	Bruno Bragança	Apresentar uma revisão bibliográfica de um histórico das Olimpíadas de Matemática no Brasil e no Mundo, através da leitura e estudo de regulamentos, páginas eletrônicas de competições dessa natureza e outros documentos para elaboração da atividade.	**MG**
2013	Carlos Alberto da Silva Victor	Propor a diminuição da distância com a matemática nas Escolas Básicas e a Olimpíada de Matemática, com uma dinâmica baseada em experiências na preparação de alunos para as olimpíadas através dos problemas envolvidos.	**RJ**
2013	Cláudia Galvão da Silva	Desenvolver uma compreensão intuitiva das questões e do raciocínio da Matemática, proporcionando-lhe ao mesmo tempo treino na resolução de problemas, de forma que seja capaz de identificar um determinado problema, a análise e o resolva recorrendo aos conhecimentos matemáticos.	**PA**
2013	Gilvan Lira Souza	Apresentar questões e suas respectivas resoluções algébricas e/ou aritméticas e comentários sobre um dos temas abordados na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP.	**PA**

2013	Gilmar Virgolino Américo	Apresentar trinta questões e suas respectivas soluções, sobre os temas abordados nas Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP, os quais são: Análise Combinatória.	**PA**
2013	Valessa Zaigla Faustino Sousa	Mostrar os conceitos básicos sobre funções convexas em uma variável real e usar as funções convexas para mostrar resultados importantes de desigualdades, médias e normas, como por exemplo: Desigualdade de Jensen, Generalização da Desigualdade das Médias, Desigualdade de Minkowski, Desigualdade de Young e Desigualdade de Hölder.	**PI**
2014	Marcos Vinicius Fernandes Calazans	Justificar a importância e as etapas para a implantação do Centro de Estudo, Pesquisa e Preparação para Olimpíadas de Matemática, no município de Porto Seguro – Bahia, com foco no atendimento de alunos interessados em participar da OBMEP e nos professores das escolas públicas municipais e estaduais.	**BA**
2014	George Wesley Barbalho Gonçalves	Abordar alguns teoremas e problemas ligados a propriedades de pontos notáveis do triângulo sempre com o objetivo de apresentar resultados que possam vir a ser utilizados por alunos de Ensino Médio como ferramentas para solução de problemas em Olimpíadas de Matemática.	**DF**
2015	Ronei Lima Badaró	Apresentar aos professores que irão preparar alunos para a OBM, um material de apoio para a tarefa.	**BA**
2015	Francisco Pereira de Andrade	Discutir em relação a algumas indagações, vários comentários dos atores sociais que participam desse cenário olímpico, alguns desabafos, certas instruções, algumas impressões, contudo, visando à busca pela disseminação do conhecimento matemático e a perfeição.	**RN**

2015	Ronald Alexandre Martins	Apresentar dados recentes sobre as olimpíadas de Matemática no Brasil e no mundo, e resgata conceitos como os de homotetia, inversão, polaridade, divisão harmônica, circunferência de Apolônio, eixo radical, quadriláteros completos, as retas de Euler, Steiner, Housel, Simson-Wallace, Gauss-Newton, além dos pontos notáveis de Gergonne, Lemoine, Nagel e teoremas como os deMenelaus, Ceva, Arquimedes, Desargues, Pascal, Brianchon, Pappus, Monge, Brahmagupta, Miquel, entre outros.	**DF**
2015	Renilson Rodrigues Araújo	Mostrar o desempenho dos alunos de ensino médio da Unidade Integrada Henrique Rocha, povoado de Barro Duro, Tutóia - MA, que realizaram pela primeira vez as provas da OBMEP, a fim de avaliar o interesse pelo desafio, uma vez que a inscrição da escola e a realização das mesmas são feitas à vontade destes.	**PI**
2016	Rogério de Carvalho Pontes	Explorar as definições mais usuais de Geometria Espacial, apresentamos um resultado sobre o volume de um icosaedro regular e um resultado envolvendo as bimedianas de um poliedro de n vértices, com o objetivo de contribuir para preparação de alunos do 9º ano do ensino fundamental ao 3º do ensino médio para olimpíadas de matemática.	**SP**
2016	Maily Marques Pereira	Fornecer um material de apoio, na área de aritmética, aos professores que trabalham projetos destinados a preparação de alunos do Ensino Médio que pretendem participar de Olímpiadas de Matemática. Para isso foram solucionadas questões do material de apoio da Olímpiada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP,	**RO**

		utilizando as definições, propriedades e teoremas da Teoria dos Números.	
2017	Gracieli Aparecida Perdomo Fernandes	Verificar em que medida as provas da Olimpíada de Matemática da UNEMAT, Campus de Sinop – MT podem descrever a proficiência em Geometria de alunos do ensino médio da cidade de Sinop – MT.	**MT**
2017	Bruno Serafim de Souza	Apresentar os resultados sobre limites e derivadas, entre eles um estudo sobre máximos e mínimos de funções, de forma a construir uma base sólida de conhecimentos básicos, pois os mesmos serão necessários na resolução das aplicações propostas no capítulo 04.	**CE**
2017	Fabio Luiz Garcia	Mostrar o funcionamento da olimpíada de matemática e como ela pode ser utilizada como fonte de estímulo para o ensino e a aprendizagem da matemática.	**PR**
2017	Vanessa Prado Beraldo da Paz	Apresentar o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) através da metodologia de Resolução de Problemas, dando ênfase na prática pedagógica com questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).	**SP**
2017	Debora Daiana Klering Wiest	Apresentar uma análise sobre a participação de alunos medalhistas e professores orientadores das regiões oeste e sudoeste do Paraná na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e, posteriormente, no Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC).	**PR**
2018	Daniel Alarcon	Propor a responder o seguinte problema: “Como auxiliar os alunos a desenvolver o raciocínio lógico em Matemática? ”. A pesquisa envolveu alunos das redes pública e particular de ensino e adotou como estratégias a “aprendizagem baseada em	**SP**

		problemas" e a aplicação de sequências didáticas de temática definida, no caso, o recorte do estudo de Grupos, propriedades e operações.	
2018	Anderson Braz de Santana	Discutir a importância da preparação para as olimpíadas de matemática e mostrar que através do ensino a distância essa preparação pode ocorrer com qualidade.	**AM**
2018	Eliene Cristine Izu Nakamura Lisi	Mostrar como as olimpíadas de matemática podem ser utilizadas como fonte de divulgação e estímulo para o ensino e a aprendizagem da matemática, além de desenvolver e aperfeiçoar a capacitação de professores e também como fonte de dados para a melhoria do ensino e aprendizado.	**SP**
2018	Janio Luiz de Aquino De Souza	Discutir os desafios que professores e alunos das escolas municipais da cidade de Assú-RN enfrentam no decorrer do processo de preparação para as provas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas públicas (OBMEP).	**RN**
2018	Eduardo Pereira Dutra	Explicar ao discente o assunto da questão, buscando enfocar de modo diferente daquele abordado nos livros didáticos, isso quando ele o aborda; resolução do problema pelos alunos, após a aula expositiva do professor; apresentação de um problema adicional para ratificar o aprendizado ou apresentação de uma nova interpretação do conteúdo; abordagem do assunto nos livros didáticos e conclusão.	**MG**
2018	William Lacerda Mourão	Estudar um importante tema da Matemática Discreta, a Análise Combinatória que muito amedronta os alunos de diversos cursos de graduação, bem como os alunos do ensino médio e os professores que ministram a matéria.	**PB**

2019	Cristiane França Nunes Moreira	Propor uma sistemática para a formação de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, por meio de situações problemas, utilizando a metodologia de Resolução de Problemas, a fim de que os mesmos possam preparar seus alunos para participação em Olimpíadas de Matemática e assim proporcionar melhoria na aprendizagem.	**AL**
2019	Rejeane de Lima	Abordar dois temas: O primeiro é o uso dos conceitos de congruências modulares como uma ferramenta para a resolução de problemas envolvendo teoria de números no nível básico de ensino e a segundo é a possibilidade de se fazer uma introdução pedagógica da criptografia RSA como uma aplicação da teoria de números no ensino básico.	**SC**
2019	Keyson Gondim Gomes	Mostrar as Olimpíadas de Matemática como fonte de divulgação e estímulo para o ensinamento e a aprendizagem da Matemática no Cear, onde vamos fazer um breve histórico das Olimpíadas no mundo e no Brasil, dando ênfase à OCM - Olimpíada Cearense de Matemática.	**CE**
2019	Juan López Linares	Apresentados e discutir de forma detalhada 26 problemas que foram propostos para alguma das versões das IMOs e que de uma forma ou outra usam sequências em sua formulação.	**SP**

Fonte: Elaborada pelo autor.

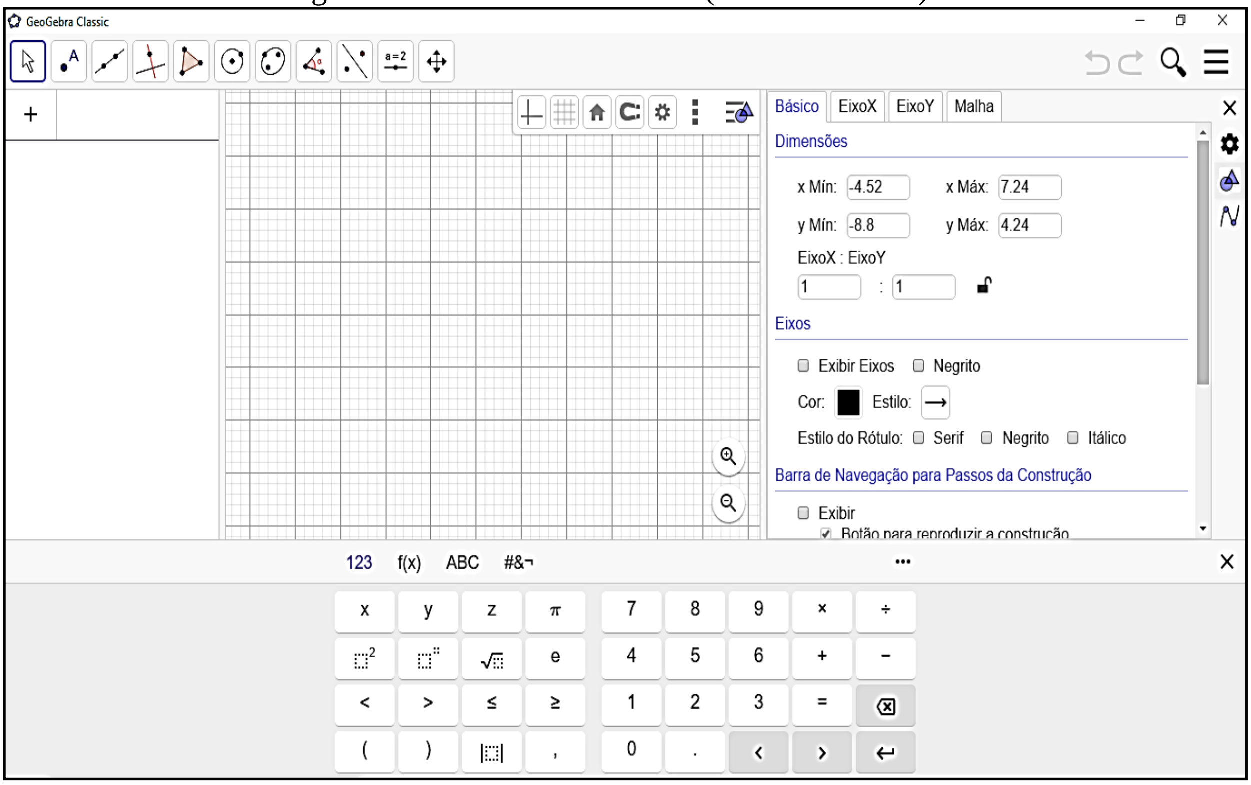
APÊNDICE G – MANUAL BÁSICO DE COMANDOS DO GEOGEBRA

Introdução a Interface do GeoGebra Classic Versão 6. Algumas modificações podem estar diferentes das versões anteriores.

I. Visão Geral

Ao clicar no ícone do aplicativo/programa você se encontrara a seguinte tela:

Figura 66 – GeoGebra Classic 6 (Interface Inicial)



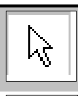
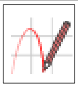
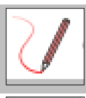
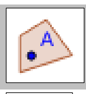
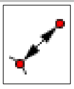
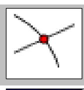
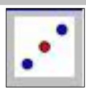
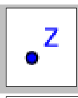
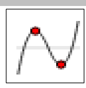
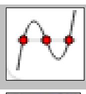
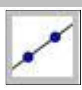
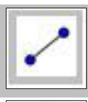
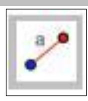
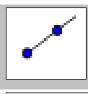
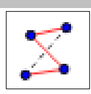
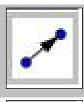
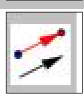
Fonte: Elaborada pelo autor.
Nota: No primeiro botão selecionado de borda azul significa que a mesma está selecionada para execução. Isso ajuda no uso do *software*, pois mostra sempre a ferramenta que está sendo utilizada.

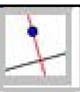
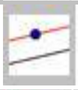
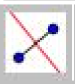
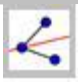
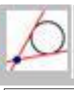
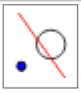
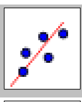
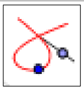
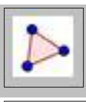
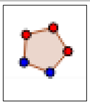
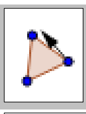
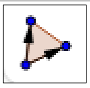
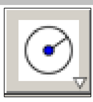
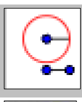
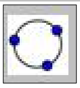
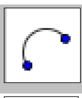
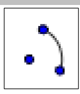
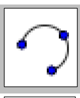
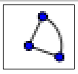
Você pode visualizar ao iniciar, por padrão, uma barra de menus, uma de ferramentas, caixa de entrada, janela de álgebra, uma calculadora, uma janela de eixos, e visualização 2D/3D. Esses itens, que serão detalhados em seguida, tornam provável um primeiro contato e a construção de projetos simples em duas dimensões. Eles aparecem acessível no *software* GeoGebra da seguinte forma, como mostra a Imagem 1.

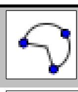
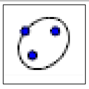
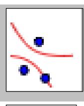
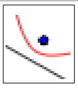
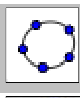
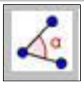
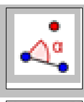
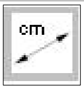
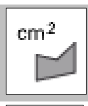
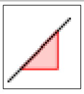
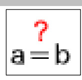
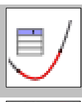
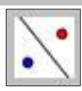
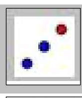
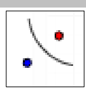
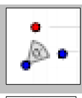
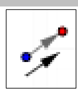
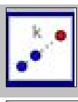
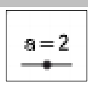
Encontra-se as ferramentas que auxiliam na construção de objetos matemáticos, sendo dividida em onze janelas, como é observado na seguir na Tabela 1.

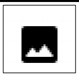
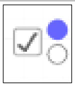
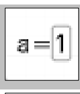
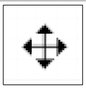
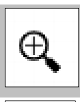
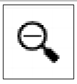
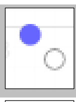
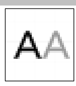
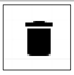
II. Barra de ferramentas

Tabela 7 – Barra de ferramentas do GeoGebra 6.0

COMANDOS	FIGURAS	PROCEDIMENTOS
Mover		Arraste ou selecione o objeto
Função à Mão Livre		Desenhe uma função ou um objeto geométrico
Caneta		Escreva ou desenhe, troque a cor usando a Barra de Estilo
Novo Ponto		Selecione uma posição ou reta, função ou curva
Ponto em Objeto		Selecione um objeto ou a sua fronteira
Vincular / Desvincular Ponto		Selecione ponto, então objeto para vincular
Interseção de Dois Objetos		Selecione a interseção ou dois objetos em sequência
Ponto Médio ou Centro		Selecione dois pontos, um segmento, um círculo ou uma cônica
Número Complexo		Selecione uma posição
Otimização		Selecione uma função
Raízes		Selecionar uma função
Reta		Selecione dois pontos ou duas posições
Segmento		Selecione dois pontos ou posições
Segmento com Comprimento Fixo		Selecione um ponto, depois entre com um comprimento
Semirreta		Selecione a primeira origem e, depois um outro, ponto
Caminho Poligonal		Selecione todos os vértices e, então, o vértice inicial novamente
Vetor		Selecione primeiro a origem e, depois, a outra extremidade
Vetor a Partir de um Ponto		Selecione primeiro o ponto de origem e, depois, um vetor

Reta Perpendicular		Selecione primeiro o ponto e, depois, uma reta (ou segmento, ou semirreta, ou vetor)
Reta Paralela		Selecione primeiro o ponto e, depois, a reta (ou segmento, ou semirreta ou vetor)
Mediatriz		Selecione dois pontos ou segmento
Bissetriz		Selecione três pontos ou duas retas
Reta Tangente		Selecione primeiro um ponto e, depois, um círculo, uma cônica ou uma função
Reta Polar ou Diametral		Selecione primeiro um ponto ou uma reta e, depois, um círculo ou uma cônica
Reta de Regressão Linear		Selecione vários pontos ou uma lista de pontos
Lugar Geométrico		Selecione o ponto do lugar geométrico e, depois, o ponto sobre o objeto ou o controle deslizante
Polígono		Selecione todos os vértices e, então, o vértice inicial novamente
Polígono Regular		Selecione primeiro dois pontos e, depois, entre com números de vértices
Polígono Rígido		Selecione todos os vértices, então o primeiro vértice novamente ou selecione um polígono
Polígono Semideformável		Selecione todos os vértices e, então, o vértice inicial novamente
Círculo dados Centro e Um de seus Pontos		Selecione o centro e, depois, um ponto do círculo
Círculo: Centro e Raio		Selecione o centro e, depois, digite a medida do raio
Compasso		Selecione um segmento ou dois pontos para definir o raio e, depois, o centro
Círculo definido por Três Pontos		Selecione três pontos do círculo
Semicírculo		Selecione dois pontos
Arco Circular		Selecione o centro e, depois, dois pontos
Arco Circuncircular		Selecione três pontos
Setor Circular		Selecione o centro e, depois, dois pontos

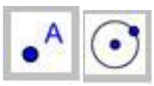
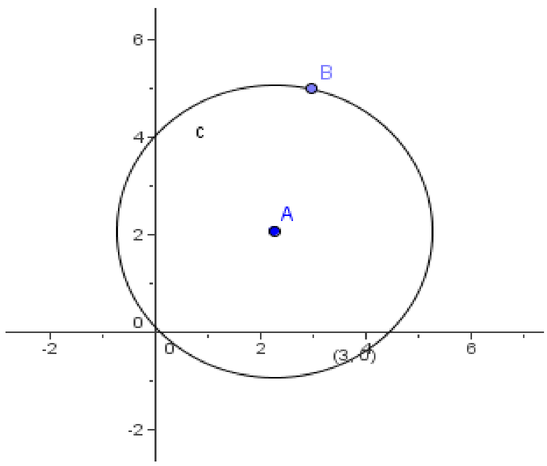
Setor Circuncircular		Selecione três pontos
Elipse		Selecione dois focos e, depois, um ponto da elipse
Hipérbole		Selecione dois focos e, depois, um ponto da hipérbole
Parábola		Selecione primeiro o foco e, depois, a diretriz
Cônica por Cinco Pontos		Selecione cinco pontos da cônica
Ângulo		Selecione três pontos ou duas retas
Ângulo com Amplitude Fixa		Selecione um ponto, um vértice e uma amplitude para o ângulo
Distância, Comprimento ou Perímetro		Selecione dois pontos, um segmento, um polígono ou um círculo
Área		Selecione um polígono, um círculo ou uma elipse
Inclinação		Selecione uma reta (ou semirreta ou segmento)
Lista		Criar uma lista das células selecionadas
Relação		Selecione dois objetos
Inspetor de Funções		Selecione uma função
Reflexão com Relação a uma Reta		Selecione primeiro o objeto e, depois, a reta de reflexão
Reflexão com Relação a um Ponto		Selecione primeiro o objeto e, depois, o centro da reflexão
Inversão		Selecione primeiro o objeto e, depois, o círculo
Rotação em Torno de um Ponto		Selecione primeiro o objeto, depois o centro e, então, o ângulo de rotação
Translação por um Vetor		Selecione primeiro o objeto a ser transladado e, depois, um vetor
Homotetia		Selecione o objeto, depois o centro e, então, a razão da homotetia
Controle Deslizante		Selecione uma posição
Texto		Selecione uma posição ou um ponto existente

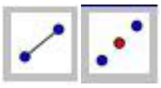
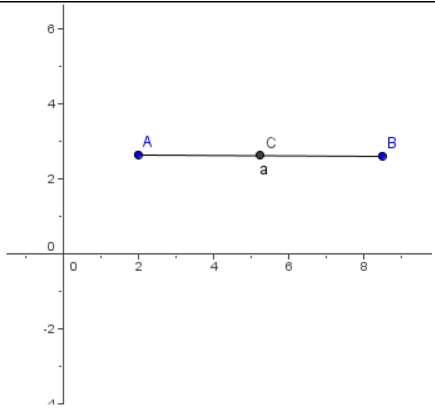
Inserir Imagem		Selecione uma imagem dos arquivos ou da webcam
Botão		Selecione uma posição
Caixa para Exibir/Esconder Objetos		Selecione uma posição
Campo de Entrada		Selecione uma posição
Mover Janela de Visualização		Arraste a janela de visualização ou um eixo (Shift + Arrastar)
Ampliar		Clique/toque para ampliar (ou use a Roda do Mouse)
Reduzir		Clique/toque para reduzir (ou use a Roda do Mouse)
Exibir/Esconder Objeto		Selecione os objetos e, em seguida, ative uma outra ferramenta
Exibir/Esconder Rótulo		Selecione o objeto para exibir/esconder o seu rótulo
Copiar Estilo Visual		Selecione o objeto, então clique/toque nos demais
Apagar		Selecione o objeto para apagá-lo

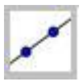
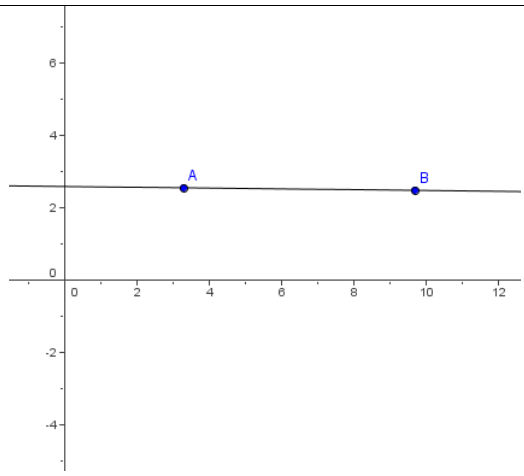
Fonte: Elaborada pelo autor.

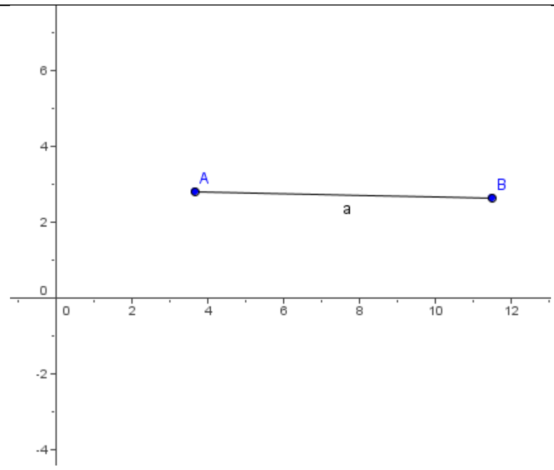
III. Exemplos de construções no *software* GeoGebra 6.0

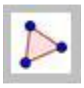
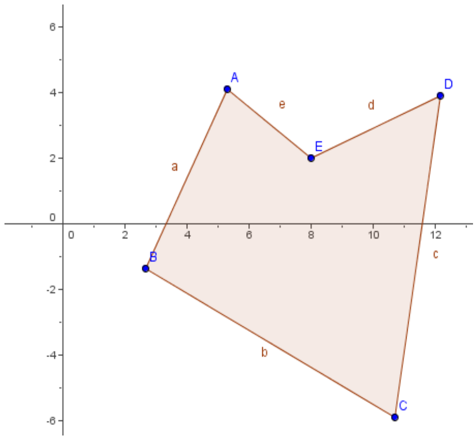
Tabela 8 – Comandos e construções no GeoGebra 6.0

COMANDOS	CONSTRUÇÃO
1. Marque um ponto numa circunferência dada	
	

2. Marque o Ponto Médio em um segmento dado	
COMANDOS	**CONSTRUÇÃO**
	

3. Construa uma reta definida por dois pontos	
COMANDOS	**CONSTRUÇÃO**
	

4. Construa um segmento de reta definido por dois pontos	
COMANDOS	**CONSTRUÇÃO**
	

5. Construa um Polígono qualquer	
COMANDOS	**CONSTRUÇÃO**
	

Fonte: Elaborada pelo autor.