UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

CENTRO DE CIÊNCIAS

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

PAULO VITOR DA SILVA SANTIAGO

GEOSMART: GEOMETRIA DO COTIDIANO ATRAVÉS DO SUÍTE GEOGEBRA CALCULADORA

FORTALEZA

2021

PAULO VITOR DA SILVA SANTIAGO

GEOSMART: GEOMETRIA DO COTIDIANO ATRAVÉS DO SUÍTE GEOGEBRA CALCULADORA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (ENCIMA) da Universidade Federal do Ceará, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.
Linha de Pesquisa: Tecnologias Digitais no Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Régis Vieira Alves.

FORTALEZA

2021

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 APRESENTAÇÃO

Na presente pesquisa, nomeado Geosmart, é uma seção integrante do produto educacional elaborado a partir de uma dissertação de mestrado profissional. Nele apresenta-se a professores da educação básica, cinco situações didáticas que buscam os conceitos de geometria dividas em: geometria básica, plana, espacial, analítica e fractal, com o suporte do aplicativo Suíte GeoGebra Calculadora, nas versões para o sistema operacional IOS e Android, disponível na plataforma do geogebra.org. Situações problemas que podem ser aplicadas nos níveis do ensino fundamental, médio e superior.

O produto educacional divide-se em seis capítulos. No primeiro capítulo é feita uma descrição de como montar uma olimpíada de matemática na escola, como funciona o processo de implementação, melhorias do rendimento em sala de aula, os professores a participar, como deve acontecer a escolha dos alunos, material necessário para aplicar e tópicos fundamentais para serem abordados.

No segundo capítulo é realizado uma situação didática que explora os conceitos básicos de geometria, com a construção do Teorema de Pitágoras.

No terceiro capítulo é apresentado uma situação didática de geometria plana, trabalhando o tópico incentro do triângulo retângulo.

No quarto capítulo é exposto uma situação didática para a geometria espacial com os tópicos a serem trabalhados: perímetro, área e volume.

No quinto capítulo continua-se outra situação didática, com o conteúdo de geometria analítica: secções cônicas, explorando os movimentos deslizante e a forma adquirida nesta aprendizagem.

No sexto capítulo é explorado uma situação didática da geometria fractal, construindo um triângulo de *Sierpinski* com os seguintes tópicos de medições, perímetro, perímetro total, área, área total e sequências. Ainda pode-se encontrar os links e *QR Code* de cada situação didática e, em cada capítulo apresenta questões para aplicação em sala de aula.

Como complemento a este e-book, disponibilizamos no site: https://sites.google.com/view/geosmarteducacional, recursos educacionais digitais (RED), artigos, tutorial de aplicativos educacional e vídeos com tema geral na Geometria: plana, espacial, analítica e fractal. Para maiores informações sobre conteúdos, publicações e postagens, entrar em contato pelo e-mail: geosmarteducacional@gmail.com, ou troca de experiências.

Nossa finalidade, ao disponibilizar este livreto para professores em formação, atuantes e futuros docentes, é a maneira de interpretação de alguns conceitos envolvendo o estudo de geometria, estudado em todos os níveis de ensino de matemática, apresentando que, por meio de suportes acessíveis das tecnologias digitais educacionais.

2 INTRODUÇÃO

A implantação consiste na organização de uma Olimpíada de Matemática Escolar (OME), cujo objetivo é preparar e desenvolver o pensamento matemático de ensino para os alunos atuarem em competições matemáticas.
O procedimento acontece no ensino de Matemática em sala de aula, e nas aulas preparatórias para olimpíada, devendo funcionar de forma agradável, um ajudando o outro, sendo conduzido pelo professor es responsáveis de Matemática interessados na preparação olímpica da escola, definido os professores que irão lecionar as aulas preparatórias de Matemática, é necessário que o material disponibilizado seja dividido entre eles e combinar quem será o responsável por cada nível de ensino e definir o horário da aula preparatória.

2.1 Montando uma Olímpiada de Matemática na sua escola

Nesse sentido, o aluno que frequenta as aulas de preparação para olímpiada terá a chance de estar em contato com novas concepções na Matemática, buscando o raciocínio junto a criatividade. Ao longo do tempo, o professor perceberá a evolução dos alunos, e ele mesmo se sentirá que a aprendizagem melhorou bastante, procurando a cada momento assuntos relevantes para apresentar aos alunos. Com isso o professor sentirá mais estimulado a ensinar e aprender mais. Com isso, é notável que essa implantação pode acontecer em outras áreas do ensino como as Ciências Humanas e suas Tecnologias (História, Geografia, Filosofia e Sociologia), Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Linguagens (Química, Física e Biologia), Códigos e suas Tecnologias (Língua Portuguesa, Literatura, Língua Estrangeira (Inglês ou Espanhol), Artes, Educação Física e Tecnologias da Informação e Comunicação).

Analisando essa preparação olímpica na escola, percebe-se que a gestão, coordenação e toda a comunidade escolar terá um salto de qualidade na formação de seus alunos, que será refletivo no desempenho deles nas competições culturais, vestibulares dos mais concorridos do país, como o Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA) e Instituto Militar de Engenharia (IME) e, futuramente aprovação em concursos e seleções.

A seleção dos alunos, o ideal que todos participantes independente de nível de ensino, sem preferência em nenhuma turma ou aluno. De acordo com Carneiro (2004) na sua experiência como professor preparatório de olimpíadas, a "turma de olimpíada que começa com 30 alunos, depois de um semestre tem apenas 20, depois de um ano 15 ou menos. Há uma evasão natural de alunos". Sendo citado vários motivos, como por exemplo, nem todos os estudantes gostam de aulas extras na escola, outros começam e não acompanham o ritmo da aula, observa-se que terá diversos tipos de aluno. A definição das turmas e preparação de olímpiada de Matemática, têm que iniciar-se pelas turmas de 3º ou 4º ano do ensino fundamental até o 1º ano do ensino médio de preferência, pensando na sua base ainda está em formação, e desta maneira forma a preparação olímpica pode ajudar bastante no desenvolvimento e maturidade em Matemática. Caso isso não seja possível uma outra forma seria dividir os alunos pelos níveis da Olimpíada Brasileira de Matemática: nível I (6ª e 7ª séries), nível II (8ª e 9ª séries) e nível III (ensino médio).

O material para aplicação, deverá conter link de sites, livros didáticos e folhas com atividades extras para seus alunos treinar em casa. Além disso, os assuntos abordados são divididos em quatro temas: Teorias dos Números, Álgebra, Geometria e Combinatória.

A contextualização dos temas apresenta a Teoria dos Números, relacionado as propriedades elementares dos números inteiros: divisibilidade, números primos, fatoração, MDC, MMC, esse tópico é recomendado para alunos iniciantes, por conter vários destes assuntos já trabalhados na escola. Livros a serem recomendados para os iniciantes: Teoria Elementar dos Números, Edgar de Alencar Filho (Brasil); Aritmética, Maria Elena Backer, Ed. Red Olímpica (Argentina); Aritmética, Saulo Aranda (Venezuela) e para o nível intermediário: Introdução à teoria dos números, José Plínio Santos, Coleção Matemática Universitária (Brasil). Importante salientar que, são recomendações, ficando a critério do professor escolher sua fonte de livro que contenha os mesmos assuntos para preparação olímpica de matemática.

Na Álgebra, os alunos do ensino fundamental devem aprender as operações com números e suas propriedades: equações de primeiro e segundo grau, sistemas de equações e os produtos notáveis. Já o aluno do ensino médio estuda polinômios, números complexos, sequências e outros assuntos relacionado a esse tópico. Livro didático da escola é recomendado para os iniciantes e para nível intermediário: *Challenging Problems in Algebra*, I.M. Yaglom (EUA), analisando as Técnicas da Resolução de Problemas.

A Geometria destaca-se a geometria plana cobrada em várias olimpíadas de Matemática, e bastante trabalhada em sala de aula, de maneira que o aluno aprenda a matéria na escola para depois se intensificar no conteúdo. O livro recomendado para estudantes iniciantes: Matemática Elementar, vol. 9, Gelson Iezzi et al. (Brasil) e livros para o nível intermediário: Geometria, volumes: 1 e 2, A.C. Morgado (Brasil), *Challenging Problems in Geometry*, I.M. Yaglom (EUA) e *Geometry Revisited*, H.S. Coxeter (EUA).

O tópico Combinatória trabalha tudo aquilo que não se destaca na Teoria dos Números, Álgebra ou Geometria, tendo os seguintes assuntos: paridade, contagem, princípio das gavetas, jogos, invariantes, e outros conteúdos. Este assunto é a grande novidade e legítimos de olimpíada. Neste momento também, o professor deve ir ensinando com calma e estimular o raciocínio dos seus alunos, por eles não terem contato em nenhum momento na escola. Livros em destaque para o nível iniciante: *Mathematical Circles, the russian experience,* D. Fomin (Russia-traduzido para o inglês); Contos com contas, Miguel de Guzman (Portugal) e Aventuras Matemáticas, M. Guzman (Portugal), o livro recomendado para nível intermediário: Combinatória e Probabilidade, A.C. Morgado et al (Brasil).

Por fim, propicia nesta preparação as Técnicas de resolução de problemas, com algumas recomendações em coletâneas de problemas e soluções. Este assunto é de fundamental importância para o professor elaborar suas listas, simulados e aulas de situações problemas, e para os alunos tentar resolvê-los com seu aprendizado e descobrir novas técnicas de resolução. Para os iniciantes têm os livros: Olimpíadas de Matemática do Estado do Rio de Janeiro, Eduardo Wagner et al (Brasil) e o *Contest Problem Book* (AHSME e AIME), volumes 1 a 6 (EUA, para o nível intermediário destacamos o *The Hungarian Problem Book* I, II, III (Hungria), Olimpíadas Brasileiras de Matemática 1ª a 8ª (Brasil), Olimpíadas Brasileiras de Matemática 9ª a 16ª (Brasil), Olimpíadas de Matemática do Cone Sul, 1ª a 4ª (Argentina), Olimpíadas de Matemática do Cone Sul, 5ª a 12ª (Brasil) e Olimpíadas Ibero-americanas de Matemática 1ª a 10ª (Brasil).

Sendo possível, pesquisar na internet assuntos pertinentes as olimpíadas de matemática. Alguns são citando informações por olimpíada, provas de anos anteriores, revistas, material de treinamentos, imagens e outros meios digitais. Com isso, o aluno ou professor terá o privilégio de ver os premiados, fotos, curiosidades e notícias sobre as olimpíadas nacionais e internacionais, destacamos a página da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), o site da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), o portal da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), a página da Olimpíada de Matemática Argentina (OMA), a website da Olimpíada Paulista de Matemática e o sítio do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA).

O professor que leciona e prepara suas aulas para olimpíadas, certamente vai se deparar com novos conhecimentos, aprendizado e alternativas de aplicação em sala de aula com seus alunos, e também aprenderá bastante com essa rotina de mestre e aprendiz. Já os alunos encontram novas amizades, pessoas em outras escolas, experiência em diversas cidades e países das competições acompanhada pelos responsáveis (professores), e possibilitar o aumento de seu raciocínio e desenvolvimento educacional, não só em Matemática, mais outras áreas do ensino.

O processo deve ser contínuo, para todas as turmas, para que não aconteça lacunas ou falhas na aprendizagem e ensino. De fato, os professores podem discutir em suas áreas, o progresso das turmas e estudantes, qual meta alcançada, quais conteúdos foram absorvidos e, para que cada professor seja responsável com seus objetivos e obrigações escolares. É importante definir alguns incentivos junto a gestão e coordenação escolar, como medalhas, certificado de participação, pontuação extra na disciplina ou brinde básico para os primeiros lugares em sala de aula, ocorrendo assim, uma competição saudável entre eles, o que importa mesmo, é a satisfação de eles terem essa oportunidade de aprendizado, e procurar o caminho certo na educação.

3 ENGENHARIA DIDÁTICA

A Engenharia Didática foi desenvolvida pela forma de tornar as ideais e pressupostos de pesquisa na escola da Didática da Matemática Francesa, ao final da década de 1960. Nesses princípios da Didática da Matemática, o Instituto de Investigação do Ensino de Matemática (IREM), desenvolvia uma complementação para criação de recursos e meios para melhorar o trabalho em sala de aula, que mais tarde, evoluiu para a estruturação dentro de um quadro teórico mais amplo, permitindo a projetar uma situação de aprendizagem e também servir como referência metodológica para análise posterior do material empírico. De acordo com Artigue (1996, p. 193) descreve a Engenharia Didática (ED) como:

> "[...] ofício do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apóia sobre conhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico mas, [...] problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta".

Segundo a autora, a ED é um processo empírico que tem como objeto de estudo na realização de observar, conceber e analisar as situações didáticas, sendo compreendida como uma produção para o ensino e servindo como uma metodologia de pesquisa qualitativa.

De acordo com Almouloud e Coutinho (2008, p. 66), descreve a ED como metodologia de pesquisa que "[...] caracteriza-se, em primeiro lugar, por um esquema experimental baseado em "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, na concepção, realização, observação e análise de sessões de ensino".

Diante de diversos trabalhos sobre a ED, ela acontece por "[...] uma perspectiva de abordagem metodológica influenciada por alguns autores de compêndios especializados e investigações sobre a matéria assinalaremos, acontecendo "o papel da percepção e da visualização" (ALVES, 2013, p. 4). Compreendendo em quatro fases (Tabela 1):

Tabela 1 – Fases da Engenharia Didática

Fases	Descrição
1ª Fase: Análise Prévia ou Preliminar	Permite o pesquisador identificar potenciais variáveis didáticas que serão explicadas e manipuladas em fases particulares
2ª Fase: Concepção e Análise a Priori	Determinar como as escolhas feitas, permitindo controlar o comportamento dos alunos e explicar seu significado.
3ª Fase: Experimentação	Iniciar todo o dispositivo embutido, e corrigi-lo se necessário
4ª Fase: Análise a Posteriori e Validação	Conjunto de resultados da exploração dos dados recolhidos contribuindo para a melhoria dos conhecimentos pedagógicos

Fonte: Elaborada pelo autor.

4 TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Para Guy Brousseau, um dos pesquisadores do grupo IREM, teve sua contribuição para o desenvolvimento Teoria das Situações Didáticas (1986). Acontecendo assim, o momento histórico desta proposta dominado pela visão do campo da educação sendo essencialmente cognitivo, devido a Piaget e colegas que o comprovaram o papel central da ação, a originalidade do pensamento matemático e seus estágios desenvolvimento em crianças.

Dessa forma, o autor Almouloud (2007) aponta como principal objetivo da Didática da Matemática as características do processo de aprendizagem por meio de uma série de situações repetitivas, chamadas de situações didáticas que determinam os determinantes da evolução comportamento dos alunos.

Nesse aspecto, “[...] o objeto central de estudo nessa teoria não é o sujeito cognitivo, mas a situação didática, na qual são identificadas as interações entre professor, aluno e saber” (ALMOULOUD, 2007, p. 32).

Nesse sentido, Almouloud (2007) comenta que o contrato didático não é apenas regras sociais ou uma lista comum, mas também um contrato pedagógico. O contrato didático se referiria ao processo de ensino e aprendizagem, geralmente não por escrito, mas moldado pelas relações que o professor espera do aluno e pelas atitudes que o aluno espera do professor em geral.

Neste processo, Brousseau (1986) utiliza a descrição das situações modelos que delineiam as atividades do professor e do aluno.

Situação de ação: Nesta fase, os alunos analisam o estado da competição, tomam decisões e, após algumas etapas, observam o resultado. Durante o jogo / problema, eles desenvolvem novas métodos e toma novas providências (algumas intuitivas).

Situação de formulação: São medidas que exigirão que o sujeito use a formulação, portanto, inclui outro sujeito a quem o primeiro deve comunicar a informação. Para determinar o conteúdo da comunicação, a cooperação de ambas as partes no campo do controle do ambiente externo também será necessária para se obter a formulação do conhecimento ao assunto.

Situação de validação: Este é o momento que nos permite distinguir um novo tipo de formulação: o remetente não é mais um informante, mas um apoiador, e o destinatário - um oponente. Ambos colaboram na busca da verdade, ou seja, no esforço de conectar com segurança o conhecimento a um campo do conhecimento já consolidado.

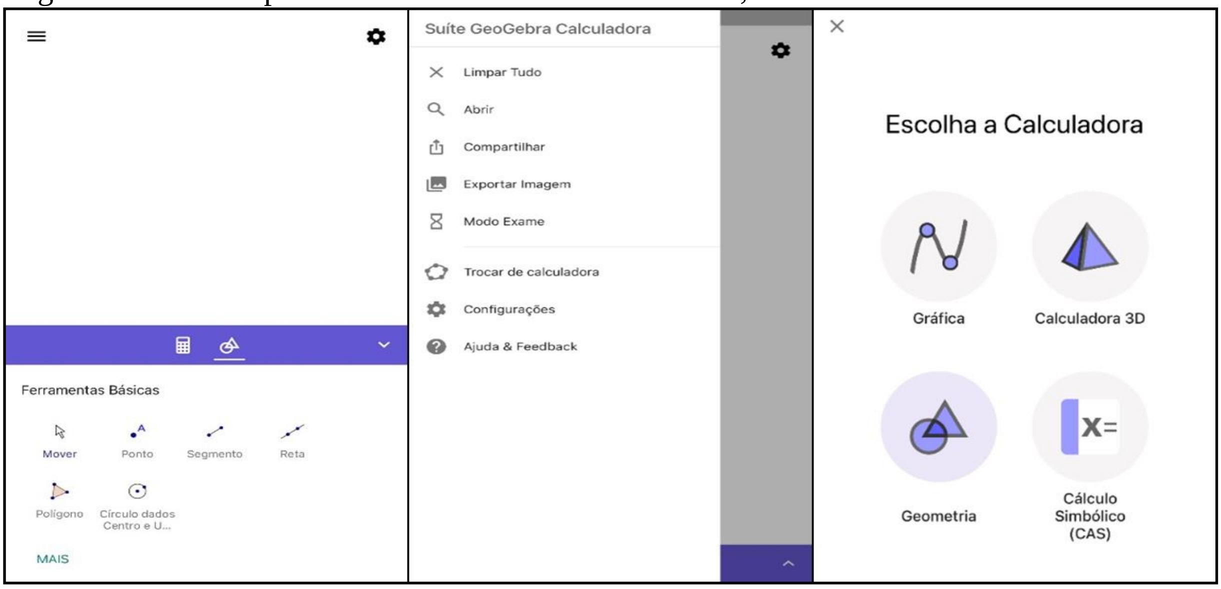
Situação da institucionalização: O professor tenta não intervir diretamente nas três fases anteriores, limitando-se à orientação quando julgar necessário para evitar possíveis bloqueios. O facilitador retoma a ação, determinando qual conhecimento adquirido nas etapas anteriores é relevante e qual é pontual, configurando o estado do objeto ao conhecimento adquirido.

5 O APLICATIVO SUÍTE GEOGEBRA CALCULADORA

O Suíte GeoGebra Calculadora é um aplicativo de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra. Ele foi desenvolvido 2001, na Universidade Salzburg por Markus Hohenwarter para ser utilizado em todos os níveis de ensino. O aplicativo foi adaptado dos computadores para ser disponibilizado nas plataformas da *App Store*, Google Play e no próprio site do desenvolvedor www.geogebra.org. Com sua interface associada na álgebra e geometria, promovendo a visualização de gráficos e a compreensão de funções, principalmente por seu dinamismo e praticidade. Ao utilizar o app durante a aula, o professor pode trabalhar e explorar conceitos, tais como, trabalhar com pontos, reta, distâncias, áreas, polígonos regulares, circunferências, gráficos, funções, entre outros recursos, e seguindo de forma resumida os seguintes passos de demonstração:

Tela inicial mostrada na Figura 1, é composta por dois campos de visualização, um algébrico e outro geométrico. Eles possibilitam modificações dinâmicas por acesso de entrada de dados realizados pelo teclado virtual ou pelos recursos da tela sensível ao toque. Descrição dos recursos da tela *Touchscreen*: com um simples toque é possível arrastar objetos desenvolvidos em exibição na tela inicial; movendo dois dedos para dentro e para fora permite modificar o tamanho do zoom de visualização do objeto; para visualizar as propriedades de uma construção, usa-se um toque longo sobre o objeto desejado; arrastando o fundo da tela com o dedo, permite mover toda a figura criada, e um clique em qualquer ferramenta pode criar vários objetos.

Figura 1 - Tela do aplicativo suíte GeoGebra calculadora, menu inicial e troca de calculadora



Fonte: Elaborado pelo autor.

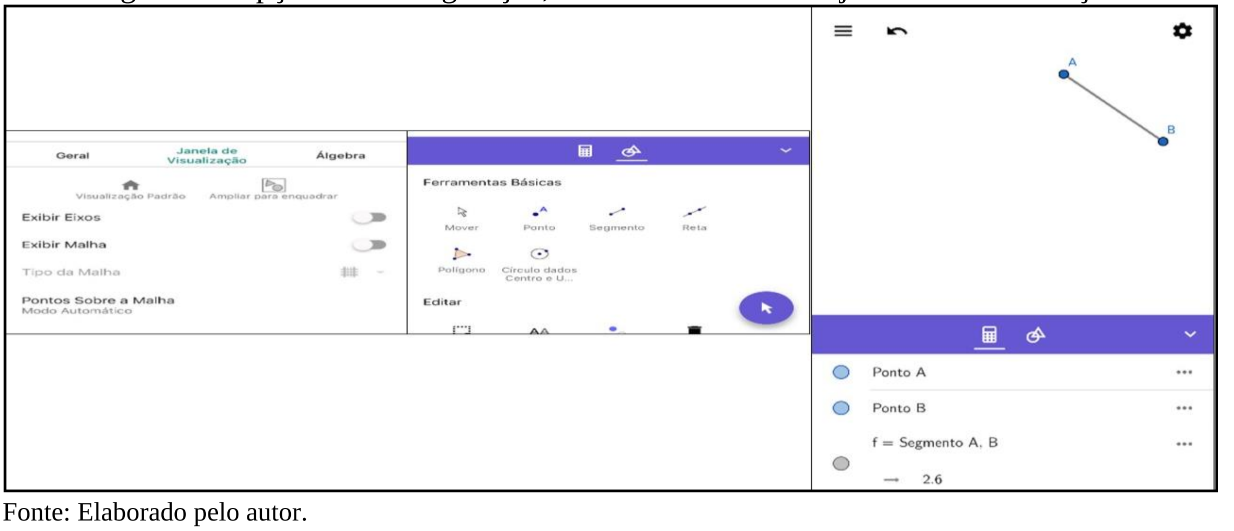
Com um clique no ícone contendo três barras horizontais paralelas no canto superior da Tela Inicial, exibe-se um menu interativo ilustrado na Figura 1 que permite limpar todo o trabalho, abrir projetos já construídos, compartilhar o objeto em várias formas, exportar imagem para envio, o modo exame conectado ao *bluetooth* permite o acesso ao objeto ou arquivo em PDF, a troca de calculadora possibilita a mudança para Gráfica, Calculadora 3D, Geometria ou Cálculo Simbólico (CAS) conforme Figura 1, as configurações contém funções de arredondamento, unidade de medida de ângulos, rotular, coordenadas, tamanho da fonte e idioma de preferência, sendo também possível salvar projetos e criações desenvolvidas.

O aplicativo contém uma barra de ferramenta com diversos ícones interativos para o aprendizado, sendo de fácil manuseio. Para um entendimento das funções do Suíte GeoGebra Calculadora, será demonstrado uma breve descrição de cada ferramenta na sequência em que surgem na barra de visualização.

No lado direito da Tela Inicial possui um ícone com um formato de catraca referente também as configurações descritas anteriormente mostradas na Figura 2, que ao ser clicada exibe alterações na malha, os eixos x e y, além de exibir outra janela de Álgebra para descrição e alterações. Para um entendimento das funções será feito uma construção de uma demonstração utilizando o App, para avaliar a percepção dos estudantes quando a utilização de dispositivos móveis em sala de aula, como também proporcionar a outros professores de escolas públicas e privada uma ferramenta interativa no processo de ensino e aprendizagem.

Verificando o Teorema de Pitágoras com o Suíte GeoGebra Calculadora, descreve-se um triângulo retângulo de catetos que medem x e y, e hipotenusa que mede z temos a igualdade $x^2 + y^2 = z^2$. Observe uma forma de verificar essa igualdade utilizando o Suíte GeoGebra Calculadora.

Figura 2 – Opções de configuração, ferramentas básicas e janela de visualização



Fonte: Elaborado pelo autor.

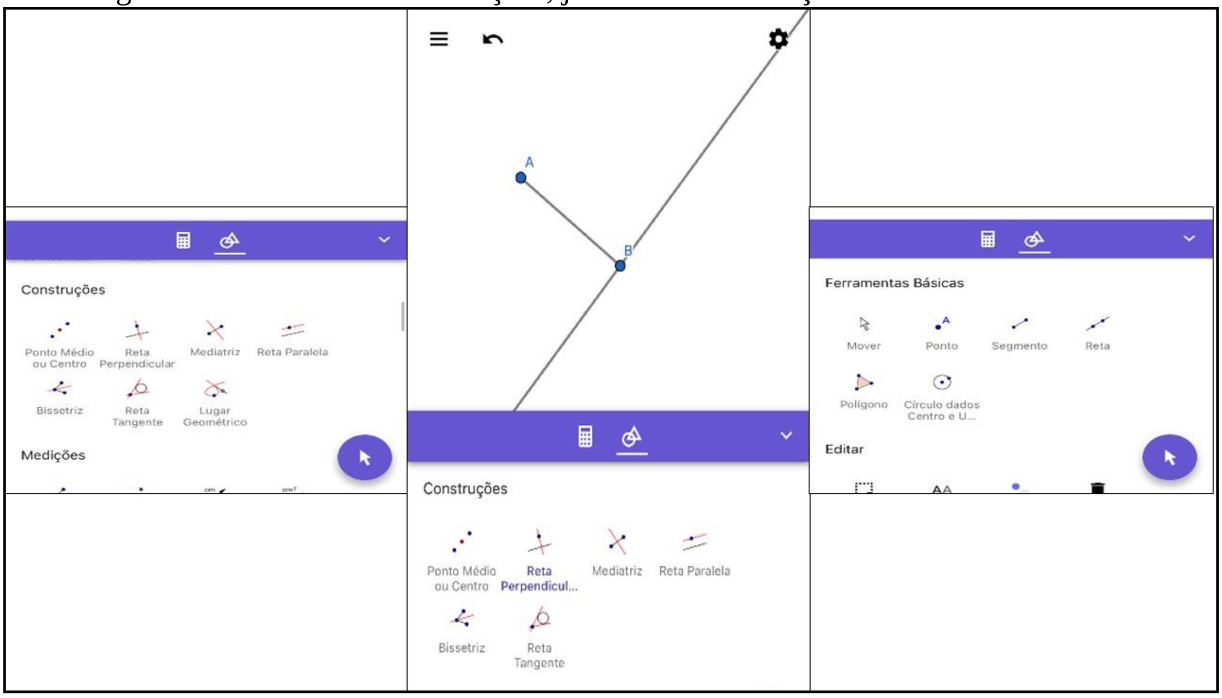
Passo 1: Abrir o aplicativo Suíte GeoGebra Calculadora. No menu do lado superior esquerdo clique no ícone com três barras horizontais paralelas, trocar de calculadora marque Geometria. No menu Configurações lado superior direito clique em Geral, depois Arredondamento e, em seguida, em 2 (duas) Casas Decimais.

Passo 2: Selecione a opção Campo de Entrada de Texto  e digite A = (1.05, 1.90) criando o ponto A, agora digite B = (3.10, 0.25) criando o ponto B. No menu Ferramentas , e em seguida Ferramentas Básicas, selecione Segmento 

e clique no ponto A arrastando ao ponto B para criar um segmento AB, conforme a Figura 2.

Passo 3: Vá até a ferramenta Construções e selecione a ferramenta Reta Perpendicular e clique uma vez no segmento e uma vez no ponto B para criar a reta b, perpendicular ao segmento AB (Figura 3).

Figura 3 – Ferramentas construções, janela de visualização e ferramentas básicas

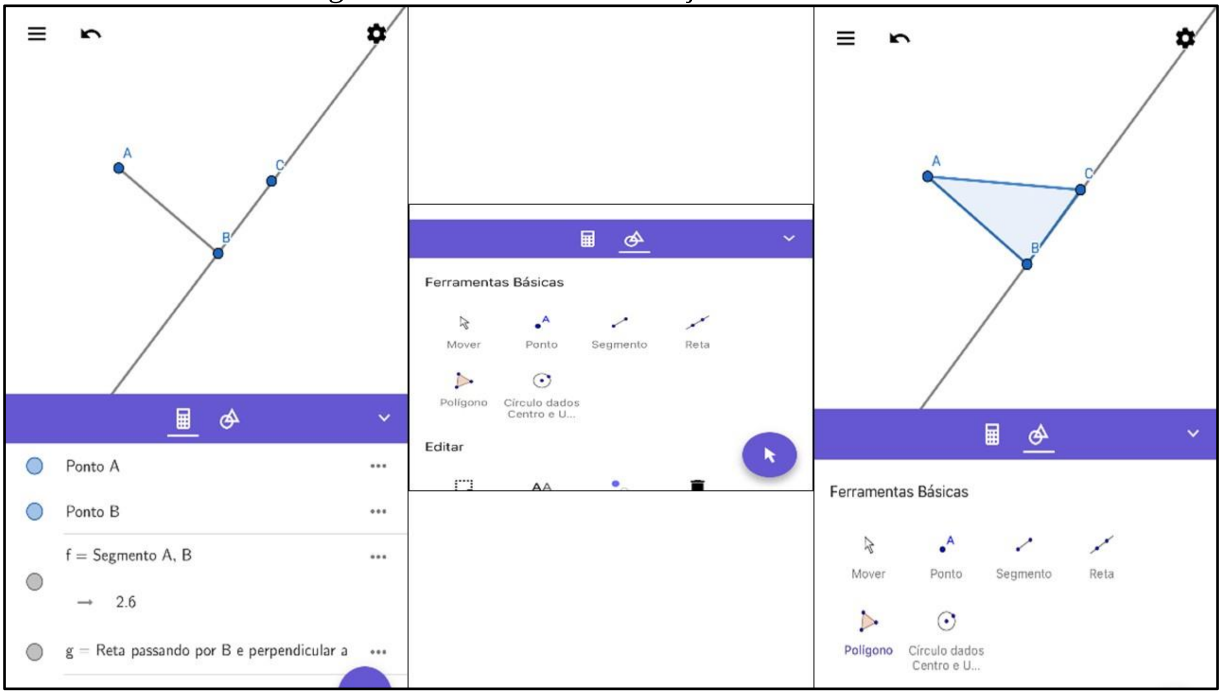


Fonte: Elaborado pelo autor.

Passo 4: Crie um ponto C sobre a reta b, selecionando a opção Campo de Entrada de Texto  e digite C = (4.25, 1.65) criando o ponto C, (Figura 4).

Passo 5: Nas Ferramentas Básicas selecione Polígono, clique nos pontos A, B, C e A, nessa ordem, para criar um triângulo retângulo, cujo ângulo reto esteja em B, conforme (Figura 4).

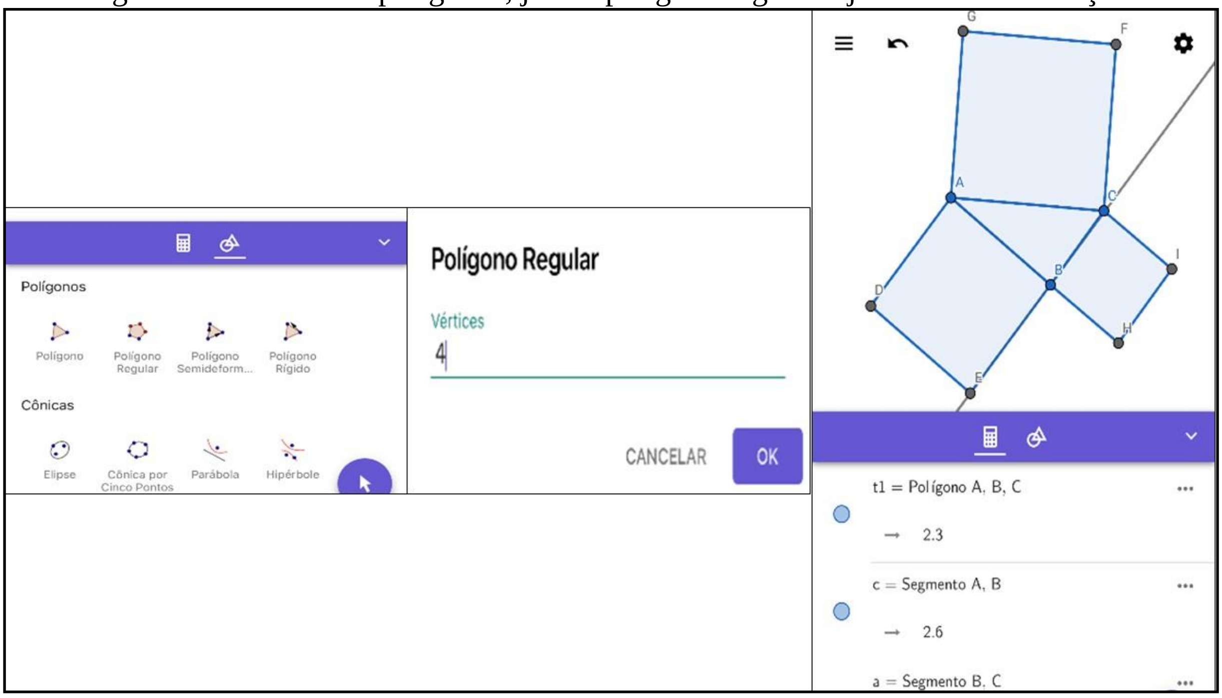
Figura 4 – Janela de visualização e ferramentas básicas



Fonte: Elaborado pelo autor.

Passo 6: Procure em Ferramentas a opção Polígonos, e selecione a ferramenta Polígono Regular, clique nos pontos B e A, nessa ordem, para rir a janela Polígono Regular. Clique em OK para definir 4 como o número de vértices desse polígono. Repita o passo duas vezes e clique agora nos pontos A e C, C e B, nessa ordem, para criar outros dois quadrados, (Figura 5).

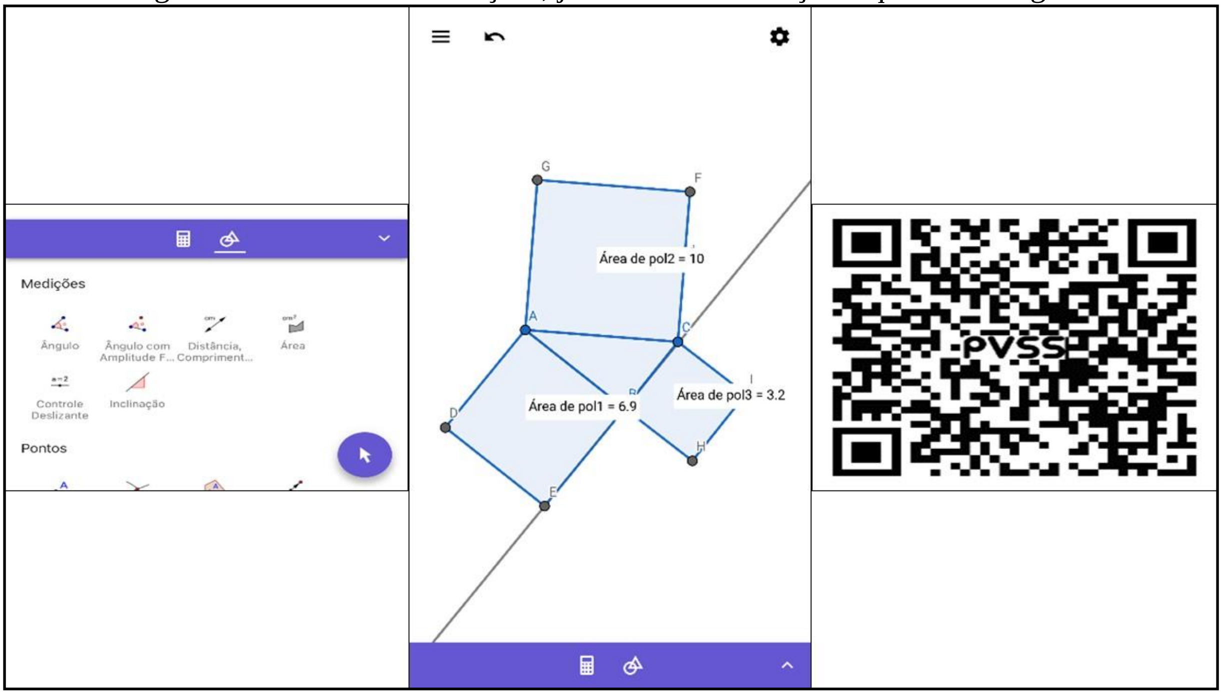
Figura 5 – Ferramenta polígonos, janela polígono regular e janela de visualização



Fonte: Elaborado pelo autor.

Passo 7: Encontre nas Ferramentas a opção Medições, e selecione a ferramenta Área, selecionada dê um clique em cada quadrado, conforme a Figura 6.

Figura 6 – Ferramenta medições, janela de visualização e qr code da figura



Fonte: Elaborado pelo autor.

Com a ferramenta, Mover selecionada, clique e arraste um dos pontos A, B ou C, e verifique se a igualdade $x^2 + y^2 = z^2$ sempre é mantida.

No exemplo apresentado, sendo x a medida do lado do cateto menor, y a medida do lado do cateto maior e z a medida da hipotenusa, temos a relação $x^2 + y^2 = z^2$ satisfeita, pois:

$$x^2 + y^2 = 3{,}2 + 6{,}9 = 10{,}1 = z^2$$

O exemplo pode ser encontra através do link: https://www.geogebra.org/m/a9k8t9fr ou pelo QR Code da figura ao lado, Figura 6.

Questionário para aplicação em sala de aula:

1. Ao mover o ponto A, B ou C, a igualdade $x^2 + y^2 = z^2$ é sempre mantida os valores? Justifique.
2. Utilizando a construção feita anteriormente, é possível mover pontos A, B e C de modo que obtenhamos os quadrados menores com áreas 10 e 5, e, além disso, que o quadrado maior possua área de 18? Justifique.

Resolução 1 e 2: Justicativas pessoais dos alunos.

6 GEOMETRIA PLANA

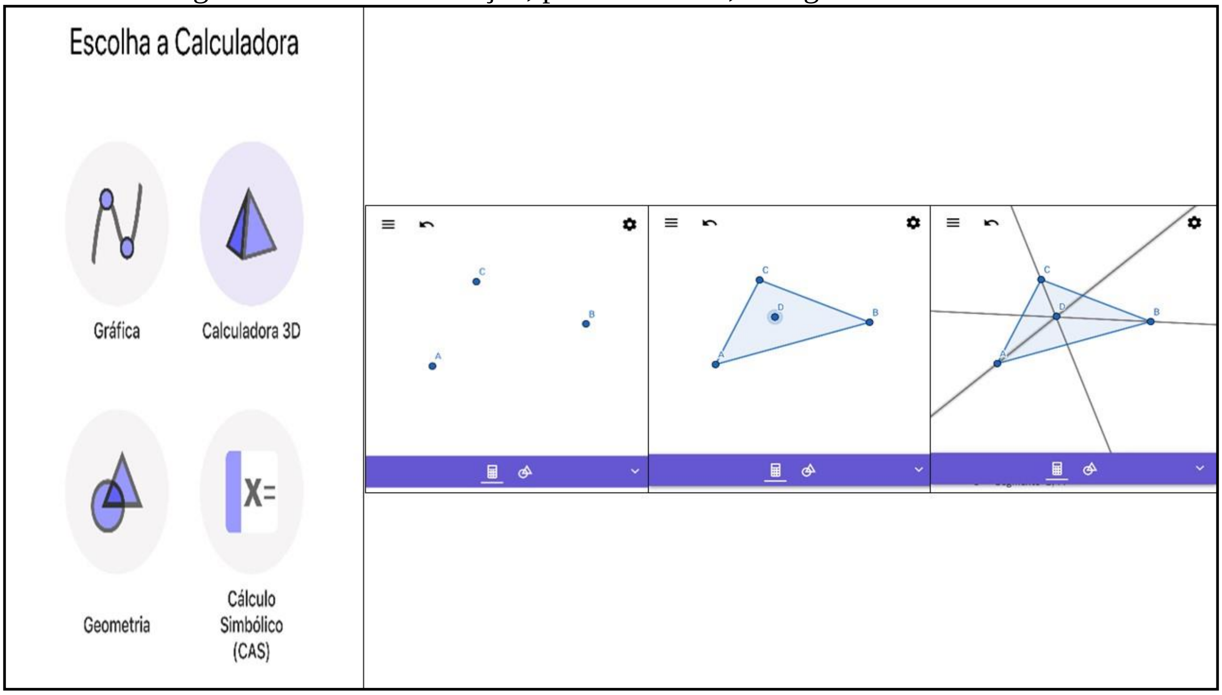
No incentro, tem-se as bissetrizes com os seguintes comandos: abra o aplicativo Suíte GeoGebra Calculadora e no canto superior esquerdo da janela gráfica selecione Troca de calculadora, escolha a opção Geometria (Figura 7) e observe os procedimentos a seguir:

Passo 1: Selecione a opção Campo de Entrada de Texto e digite A = (-2,-1) criando o ponto A, agora digite B = (5,1) criando o ponto B, e por fim, digite C = (0,3) criando o ponto C, Figura 7.

Passo 2: Nas Ferramentas Básicas selecione Polígono, clique nos pontos A, B, C e A, nessa ordem, para criar um triângulo ABC, em seguida criar o ponto D, digite D = (0.70,1.25).

Passo 3: Criando as Bissetrizes. No Campo de Entrada de Texto, digite f: - 0.05x -1 y= -1.25 criando a reta f, agora siga o mesmo procedimento para criar a reta g e h, digite g: 0.93x + 0.36y = 1.07 e depois h: - 0.64x + 0.77y = 0.51, a construção está finalizada, (Figura 7).

Figura 7 – Janela de seleção, pontos criados, triângulo abc e incentro



Fonte: Elaborado pelo autor.

Questionário para aplicação em sala de aula:

3. Na figura D é o ponto de encontro das bissetrizes de um triângulo ABC. O ponto D é:

(A) O baricentro do triângulo ABC.

(B) O incentro do triângulo ABC.

(C) O circuncentro do triângulo ABC.

(D) O ortocentro do triângulo ABC.

(E) Um ex-incentro do triângulo ABC.

Resolução 3: C.

7 GEOMETRIA ESPACIAL

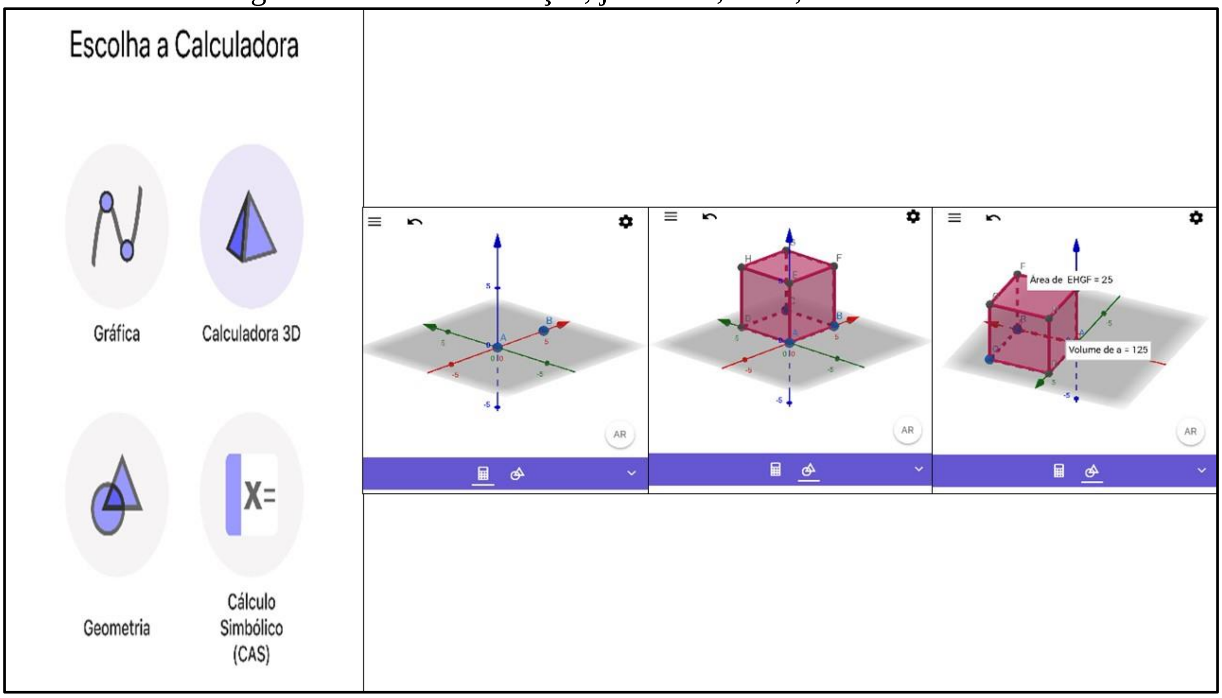
Nesse sentido, os poliedros serão construídos a partir do cubo seguindo os comandos: abra o aplicativo Suíte GeoGebra Calculadora e no canto superior esquerdo da janela gráfica selecione Troca de calculadora, escolha a opção Calculadora 3D (Figura 8), e observe os procedimentos a seguir:

Passo 1: Selecione a opção Campo de Entrada de Texto , e digite A = (0,0,0) criando o ponto A, agora digite B = (5,0,0) criando o ponto B, conforme a Figura 24.

Passo 2: No Campo de Entrada de Texto, digite C = (5, 0, -5), e depois aperte no teclado Enter (Figura 8). É necessário que a reta BC seja perpendicular à reta AB.

Passo 3: Criando o Cubo. Digite no Campo de Entrada de Texto: “Cubo [A, B, C]” e depois aperte a tecla Enter. No menu Ferramentas , e em seguida Medições, selecione cm² (Área)  e depois cm³ (Volume) , Figura 8.

Figura 8 – Janela de seleção, janela 3d, cubo, área e volume



Fonte: Elaborado pelo autor.

Questionário para aplicação em sala de aula:

4. O volume interno do cubo é de 125 cm³. Qual sua capacidade total convertida em litros?

5. Se o preço da gasolina custa R$ 5,20, quanto custa para encher um cubo que tem capacidade de 32L?

Resolução 4: 125 : 1000 = 0,125 litro, resolução 5: 5,20 x 32 = R$ 166,40.

8 GEOMETRIA ANALÍTICA

Neste tópico, apresenta-se as secções cônicas com os comandos: abra o aplicativo Suíte GeoGebra Calculadora e no canto superior direito da janela gráfica selecione Janela de Visualização, ative a opção Exibir Eixos e Exibir Malha, em seguida clique na tela de visualização.

Passo 1: No menu Ferramentas, Medições, e selecione Controle Deslizante e, em seguida, clique em qualquer parte da tela de visualização (Região Gráfica) e tecle OK. Nesse momento, aparecerá o parâmetro a (com valor igual a 1). Repita a operação e insira novos parâmetros (b, c e d), conforme Figura 9.

Passo 2: Selecione a ferramenta Mover, clique em cima do controle deslizante a e selecione ... e, em seguida, coloque 0 (zero) para opção “Min” (mínimo) e verifique se a opção “Máx” (máximo) está o número 5 (cinco). O incremento e demais opções não necessita alterar. Faça o mesmo procedimento com os parâmetros b, c e d, Figura 9.

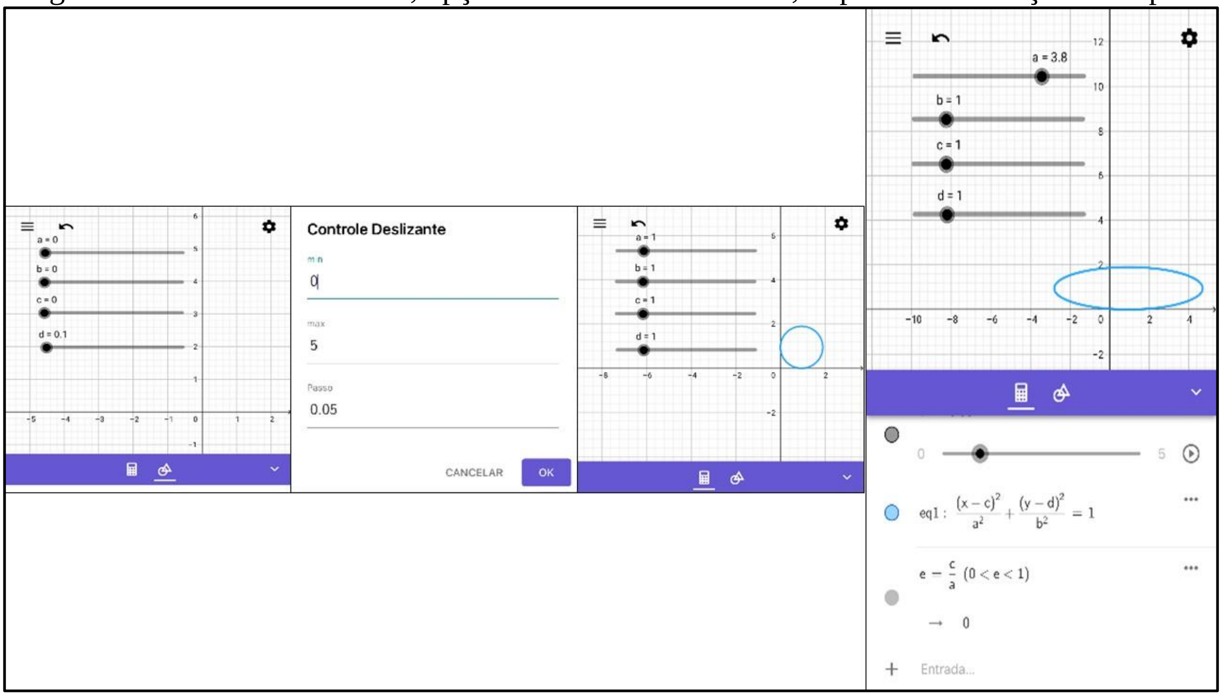
Passo 3: Selecione a opção Campo de Entrada de Texto e digite: ((x – c)^2) / (a^2) + ((y – d)^2) / (b^2) = 1 e tecle “Enter”. Observe que “^” significa a operação de potenciação, Figura 9.

Passo 4: Para melhorar a visualização, clique novamente em Mover, em seguida clique em cima da elipse. No ícone lata de tinta e escolha uma nova cor para a sua construção. Em seguida, clique no — (Estilo) e coloque a espessura da linha até o nível final. Clique na tela de visualização e observe o gráfico ficou destacado.

Passo 5: Observe significados importantes para os parâmetros a, b, c e d. Para isso, clique na bolinha do controle deslizante de a e altere lentamente o seu valor (basta arrastar a bolinha para um dos lados). Observe o que acontece com o gráfico da elipse. Repita a operação para os controles deslizantes de b, c e d (utilize um controle deslizante por vez), Figura 9.

Passo 6: Digite e = c / a (0 < e < 1) no Campo de Entrada de Texto e tecle “Enter”. E depois Excentricidade[eq1], note que aparecerá a letra f na zona algébrica. O número que está à direita do f representa a excentricidade da elipse.

Figura 9 – Controle deslizante, opção do controle deslizante, elipse e visualização da elipse



Fonte: Elaborado pelo autor.

Questionário para aplicação em sala de aula:

Agora, responda às perguntas tendo como base a elipse: $(x-c)^2/a^2 + (y-d)^2/b^2 = 1$

6. Qual é o efeito dos parâmetros a e b no gráfico da elipse?

7. Qual é o efeito dos parâmetros c e d no gráfico da função?

8. Ao movimentar os parâmetros a e b, o que se pode concluir sobre o gráfico da elipse quando o valor da excentricidade está próximo de zero? E quando o valor da excentricidade está próximo de 1?

Resolução 6: Alteram o formato da elipse.

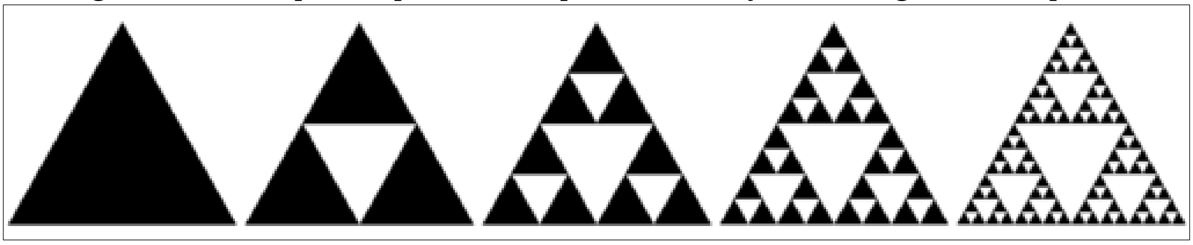
Resolução 7: Alteram o centro (a posição) da elipse.

Resolução 8: Próximo de zero - a forma da elipse se aproxima de uma circunferência; próximo de 1 - a forma de elipse se aproxima de um segmento de reta.

9 GEOMETRIA FRACTAL

No Triângulo de Sierpinski (Figura 10), tem-se que a figura geométrica foi objeto de estudo do matemático Waclaw Sierpinski (1882-1969).

Figura 10 – Exemplo das primeiras etapas da construção do triângulo de Sierpinski



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nessa perspectiva, constrói-se a ferramenta Sierpinski com os seguintes comandos:

Passo 1: Abrir o aplicativo para Smartphone, o Suíte GeoGebra Calculadora selecionando a ferramenta calculadora a opção Geometria e construir um triângulo equilátero. Para esta construção, deverão utilizar o comando para criar o Ponto (A, B e C). Selecione a opção Campo de Entrada de Texto , e digite A=Interseção(EixoX,EixoY) criando o ponto A, agora digite B=Ponto(EixoX) criando o ponto B, e por último digite C=(3,6) para criar o ponto C conforme a Figura 11. Em seguida, selecione a opção Campo de Entrada de Texto para criar um polígono regular, digite: pol1=Polígono(A,B,C). Obtemos assim, o triângulo equilátero ABC.

Na construção da primeira iteração do Triângulo de Sierpinski, é necessário determinar o centro de gravidade dos lados AB, BC e AC do triângulo equilátero ABC. Para isto, deve digitar o seguinte comando descrito no Passo 2 (Centro de Gravidade), que se encontra na opção Campo de Entrada de Texto do aplicativo.

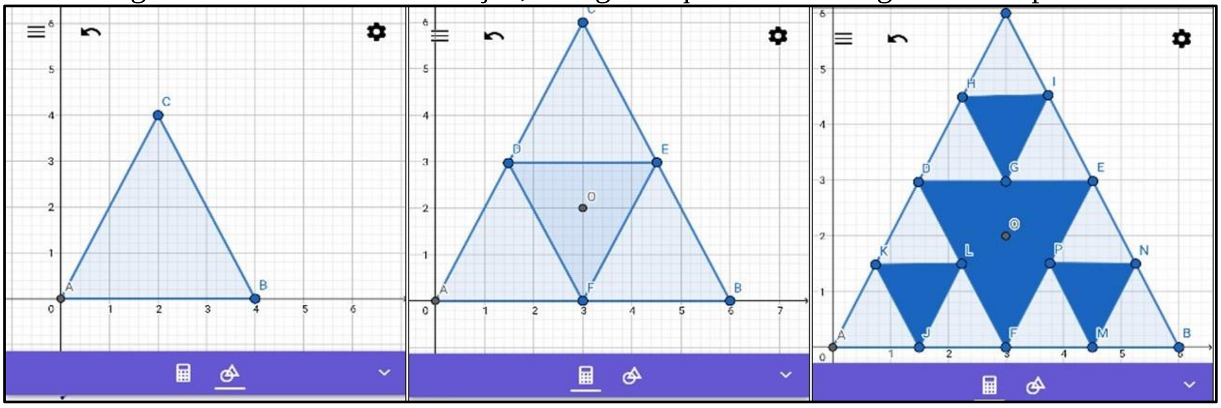
Passo 2: Criar o centro do polígono está localizado com o comando: O=CentroDeGravidade(pol1). Em seguida, selecione a digite: D=Ponto(b), E=Ponto(a) e F=Ponto(c) criando primeiro triângulo no centro do triângulo maior, seguindo este processo selecione a ferramenta Polígono para os pontos D, E e F. Repetir a operação três vezes para criar os triângulos menores, Figura 11.

Passo 3: Digite: G=Ponto(f), H=Ponto(b) e I=Ponto(a), J=Ponto(c), K=Ponto(b) e L=Ponto(e), M=Ponto(c), N=Ponto(a) e P=Ponto(d). Criar os Polígonos nos demais pontos (G, H e I), (J, K e L) e por último (M, N e P), (Figura 34).

Passo 4: Ocultar todos pontos e seguimentos criados na construção. Alterar a cores do triângulo equilátero principal para branco ou outra cor de preferência, os triângulos equiláteros internos azuis ou preferência de cor.

A partir da primeira iteração podemos criar uma ferramenta para construir as próximas iterações. Ao final deste capítulo pode encontrar os links e QR Code das construções de Geometria em geral com todos os passos e comandos de todas as construções, com informações detalhadas inclusive da construção desta ferramenta o Triângulo de Sierpinski.

Figura 11 – Tela de visualização, triângulo equilátero e triângulo de Sierpinski



Fonte: Elaborado pelo autor.

Questionário para aplicação em sala de aula:

Observando o número de triângulos que compõe a figura em cada etapa do processo de construção, podemos refletir sobre algumas situações:

9. Qual a quantidade de triângulos azuis em cada uma das etapas apresentadas?

10. Você consegue observar alguma regularidade?

11. O número de triângulos que compõem a figura em cada etapa do processo é uma função do número da etapa de sua construção? Resolução 9, 10 e 11: Justicativas pessoais dos alunos.

Agora pode-se aplicar outras reflexões que ajudarão a formar conceitos importantes de sequências, funções, potências e padrões, por exemplo. Obviamente, a figura em questão (Triângulo de Sierpinski) pode ser mais explorada, a depender do contexto da turma.

Os dados iniciais do processo de construção da figura estão organizados na Tabela 1 e mostram que a relação entre cada etapa e o número de triângulo é uma função.

Tabela 2 – Relação das etapas da construção

Etapa	1	2	3	4	5
Número de triângulos	1	3	9	27	81

Fonte: Elaboração do autor.

Questionário para aplicação em sala de aula:

12. Relação entre as etapas e o número de triângulos em cada uma delas segue um padrão de uma sequência numérica, agora temos uma análise do processo do perímetro e área do Triângulo de Sierpinski para iterações. A seguir apresentamos as tabelas de aplicação para esta análise.

Tabela 3 – Análise do perímetro e área do Triângulo de Sierpinski

Etapa	Quantidade de triângulos	Comprimento do lado de cada triângulo	Perímetro de cada triângulo	Perímetro total	Área de cada triângulo	Área total
1						
2						
3						

Fonte: Elaboração do autor.

Resolução 12: Justicativa pessoal pelo professor.

Descrição dos Links e Código de acesso (QR Code) as construções:

Capítulo 3. Geometria Plana: https://www.geogebra.org/m/sbz77gyw

Capítulo 4. Geometria Espacial: https://www.geogebra.org/m/zg6yphjg

Capítulo 5. Geometria Analítica: https://www.geogebra.org/m/g6xbaxuf

Capítulo 6. Geometria Fractal: https://www.geogebra.org/m/naemahv3

Figura 12 – Qr code da Geometria plana, espacial, analítica e fractal

Fonte: Elaborado pelo autor.

REFERÊNCIAS

ALVES, C. M. F. S. J. **Fractais:** conceitos básicos, representações gráficas e aplicações ao ensino não universitário. 2007. 324 f. Dissertação (Mestrado em Matemática para o Ensino) – Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, 2007.

ALVES, F. R. V. Engenharia didática para o teorema da função implícita: análise preliminares e a priori. **Revista Brasileira de ensino de Ciência e Tecnologia,** v. 6, n. 4, p. 1-25, 2013 Disponível em: https://ifce.academia.edu/RegisFrancisco. Acesso em 12 jan. 2021.

ALMOULOUD S. A.; COUTINHO C. Q. S. Engenharia didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. **Revemat:** Revista Eletrônica de Educação Matemática, v. 3, n. 6, p. 62-77, UFSC, 2008.

ARTIGUE, M. Engenharia didáctica. *In:* BRUN, Jean (Org.). **Didáctica das matemáticas.** Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria euclidiana plana.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a geometria fractal para a sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

BOULOS, P.; CAMARGO, I. **Geometria analítica:** um tratamento vetorial. 3 ed. São Paulo: Ed. Prentice Hall, 2005.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e métodos da didáctica da matemática. *In:* BRUN, J. **Didática das Matemáticas.** Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, p. 35-113, 1996.

CARNEIRO, E. **Olimpíada de matemática:** uma porta para o futuro. II Bienal da SBM, Salvador. 56 p, 2004.

CARVALHO, P. C. P. **Introdução à geometria espacial.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1999.

DANTE, L. R. **Matemática:** contexto & aplicações - ensino médio. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Geometria espacial.** Coleção Fundamentos de Matemática Elementar, v.10, São Paulo: Atual, 2005.

GEOGEBRA. **Site GeoGebra.org.** Disponível em:https://www.geogebra.org. Acesso em: 23 mar. 2021.

LISBOA, M. C. **Uma proposta de abordagem da geometria fractal na educação básica.** 2019. 60f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Universidade do Federal do Tocantins, Arraias, 2019. Disponível em: https://repositorio.uft.edu.br/handle/11612/2039. Acesso em: 20 mar. 2021.