

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**SOLUÇÃO NUMÉRICA USANDO MÉTODOS ADAPTATIVOS-IMPLÍCITOS E MALHA  
DE VORONOI DE PROBLEMAS DE RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO**

TESE SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA PARA A  
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ENGENHARIA

**FRANCISCO MARCONDES**

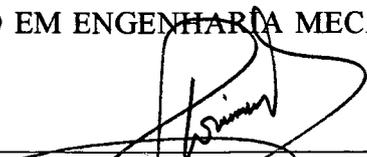
FLORIANÓPOLIS, ABRIL DE 1996

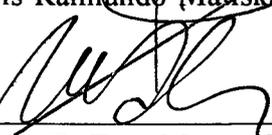
**SOLUÇÃO NUMÉRICA USANDO MÉTODOS ADAPTATIVOS-IMPLÍCITOS E MALHA  
DE VORONOI DE PROBLEMAS DE RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO**

**FRANCISCO MARCONDES**

**ESTA TESE FOI JULGADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
DOUTOR EM ENGENHARIA**

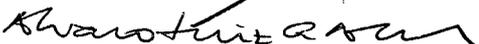
**ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA E APROVADA EM SUA FORMA FINAL  
PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

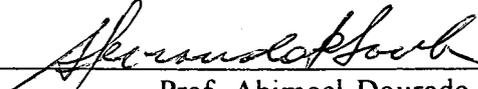
  
\_\_\_\_\_  
Clovis Raimundo Maliska, Ph. D. - Orientador

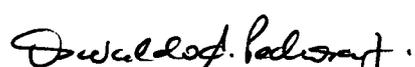
  
\_\_\_\_\_  
Antônio Fábio Carvalho da Silva, D. Eng. Mec. - Coordenador do Curso

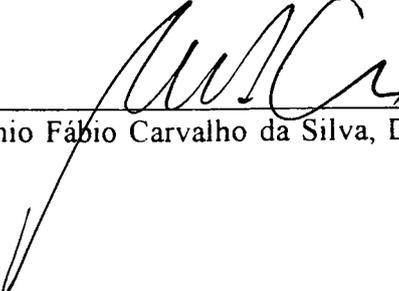
**BANCA EXAMINADORA:**

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Clovis Raimundo Maliska, Ph. D. - Presidente

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Álvaro L. G. de Azeredo Coutinho, D. Sc. - Relator

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Abimael Dourado Loula, D. Sc.

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Oswaldo Antunes Pedrosa Jr., Ph. D.

  
\_\_\_\_\_  
Antônio Fábio Carvalho da Silva, D. Eng. Mec.

*À minha esposa Reneuda e à minha filha Rebeca, minhas musas inspiradoras, pelo carinho e paciência nestes tempos difíceis; aos meus pais, Moisés (in memoriam) e Naide, pela preciosa e indispensável formação.*

---

Ao Prof. Clovis Raimundo Maliska, pela valiosa orientação, escolha de tema e pela amizade adquirida ao longo dos anos.

Ao Prof. Mario Cesar Zambaldi, do Dep. de matemática da UFSC, pela valiosa cooperação na solução de sistemas lineares e pela amizade.

Ao Clovis Raimundo Maliska Jr. por ter iniciado o gerador de malhas de Voronoi que permitiu a realização do presente trabalho.

Ao Amigo Axel Dilhamn pela amizade e cooperação nos momentos difíceis.

Ao doutorando João Flávio de Vasconcellos pela prestigiosa revisão do texto deste trabalho.

Ao Marcos Livramento pela ajuda com os diversos softwares disponíveis no SINMEC.

Ao demais membros do SINMEC pela convivência agradável e harmoniosa.

Aos professores do Departamento de Engenharia Mecânica da UFPB, Campus II, principalmente os colegas da área térmica, por terem viabilizado o meu afastamento para conclusão deste trabalho.

A CAPES pelo auxílio financeiro.

# SUMÁRIO

v

---

Resumo .....	viii
<i>Abstract</i> .....	ix
Lista de Figuras .....	x
Lista de Tabelas .....	xiii
Simbologia .....	xv
1. Introdução .....	1
1.1 Preliminares .....	1
1.2 Malhas Utilizadas .....	4
1.3 Técnicas de Solução das Equações .....	9
1.4 Solução dos Sistemas Lineares .....	11
1.5 Esboço da Tese .....	13
2. Formulação .....	17
2.1 Introdução .....	17
2.2 Modelo Composicional .....	17
2.3 Modelo <i>Black-Oil</i> .....	19
2.4 Modelo <i>Black-Oil</i> do Presente Trabalho .....	20
3. Metodologias Explícita, Implícita e Adaptativa .....	23
3.1 Introdução .....	23
3.2 Definição do Diagrama de Voronoi .....	23
3.3 Integração das Equações Governantes .....	25
3.4 Fator de Correção Cilíndrica .....	29
3.5 Metodologia Totalmente Implícita .....	33
3.6 Metodologia IMPES .....	37
3.6.1 Procedimento Iterativo Utilizando o Esquema IMPES .....	39
3.7 Metodologia Implícita Adaptativa .....	40
3.7.1 Critério de Mudança de um Volume de IMPES para TI e Vice-	

Versa .....	44
3.8 - Escolha do Passo de Tempo .....	52
4. Métodos de Solução dos Sistemas Lineares .....	54
4.1 Introdução .....	54
4.2 Precondicionamento .....	54
4.3 Ordenação das Incógnitas .....	57
4.4 Métodos de Solução .....	62
4.4.1 Método GMRES .....	63
4.4.2 Método Bi-CGSTAB .....	65
4.4.3 Método ORTHOMIN .....	66
5 - Validação do Modelo Numérico .....	68
5.1 Introdução .....	68
5.2 Comparação com os Resultados de Palagi (1992) .....	68
5.3 Comparação com o SIRP-3D .....	82
5.4 Análise de Caso .....	100
6 - Resultados: Comparação Entre as Metodologias TI, IMPES E AIM .....	107
6.1 Introdução .....	107
6.2 Efeito do Critério de Parada das Iterações Newtonianas .....	108
6.3 Análise das Metodologias IMPES, AIM e TI .....	112
7 - Resultados: Comparação Entre Métodos de Solução de Sistemas Lineares .....	123
7.1 Introdução .....	123
7.2 Efeito da Ordenação MDF .....	123
7.3 Comparação Entre os Métodos de Solução dos Sistemas Lineares .....	131
8. Conclusões .....	136
Referências Bibliográficas .....	140

Apêndice A ..... 148

---

O objetivo do presente trabalho é o desenvolvimento de um modelo numérico usando malhas de Voronoi para a solução de problemas de reservatório de petróleo. Empregou-se o modelo *black-oil*, bifásico (óleo-água) e as equações foram discretizadas utilizando-se o Método dos Volumes Finitos.

Implementou-se três metodologias de solução, a saber: IMPES - *Implicit Pressure Explicit Saturation*, TI - *Totalmente Implícita* e AIM - *Adaptive Implicit Method*. Apesar do uso destas metodologias por vários autores, os critérios empregados para troca de IMPES para TI e vice-versa e parada das iterações newtonianas não são claramente apresentados e discutidos na literatura. Portanto, uma das contribuições do presente trabalho é uma discussão destes tópicos usando malhas com conectividade variada.

Malhas híbridas de Voronoi são fortemente usadas neste trabalho devido a sua flexibilidade em representar o escoamento em volta dos poços. Um extensivo estudo é realizado onde os métodos para solução dos sistemas são analisados considerando os esquemas de ordenações das incógnitas e aceleradores de convergência. Com relação aos esquemas de ordenação ambos esquemas, ordenação natural, similar à ordenação natural em malhas cartesianas, bem como esquemas baseados na estrutura do Jacobiano são considerados. O último método ordena as incógnitas baseado nos valores numéricos dos elementos do Jacobiano e é conhecido na literatura como MDF - *Minimum Discarded Fill*. Com relação aos aceleradores de convergência empregou-se três métodos largamente conhecidos na literatura: ORTHOMIN, GMRES e Bi-CGSTAB. Estes métodos foram comparados entre si em diversas situações práticas.

O modelo numérico desenvolvido foi validado usando resultados numéricos disponíveis na literatura e também aplicando o mesmo a situações práticas, onde as malhas híbridas de Voronoi são mais indicadas.

---

The main goal of the present work is the development of a numerical model using Voronoi grids for the solution of fluid flow in petroleum reservoirs. The scheme uses the two-phase (oil-water) black-oil model with the equations discretized using finite-volume method.

Three methodologies were implemented, namely, the IMPES - Implicit Pressure Explicit Saturation, TI - Totally Implicit e AIM - Adaptive Implicit Method. Despite the use of these methodologies for several authors, the criteria employed for switching from IMPES to TI and vice-versa, and for stopping the Newton iterations are not clearly presented and discussed in the available literature. Therefore, one of the contributions of this work is to address these topics using grids with variable connectivity.

Voronoi grids are strongly used in this work due their flexibility in representing the flow around wells. An extensive study is realized where the methods for solving the linear systems of equations are analyzed considering ordering schemes and convergence accelerators. With respect to the ordering schemes both, natural ordering, like the ones used in cartesian, as well as schemes based on the structure of the Jacobian are considered. The latter one uses the numerical value of the Jacobian, and it is known in the literature as MDF - Minimum Discarded Fill. With respect to the convergence accelerator three well known methods, ORTHOMIN, GMRES e Bi-CGSTAB were used. They are fully compared among them.

The numerical model developed is evaluated using available numerical results and also applied to practical situations where hybrid Voronoi grids are suitable.

## LISTA DE FIGURAS

x

---

Fig. 1 - Amostra do reservatório .....	2
Fig. 2 - Malha diagonal e paralela para a configuração de cinco poços .....	5
Fig. 3 - Diagrama de Voronoi com seis pontos geradores .....	25
Fig. 4 - Volume de controle de Voronoi para o ponto $i$ .....	26
Fig. 5 - Bloco de Voronoi contendo um poço .....	29
Fig. 6- Diagrama de Voronoi com 2297 pontos geradores .....	30
Fig. 7 - Módulo cilíndrico .....	31
Fig. 8 - Conexão $ij$ em uma seção de um módulo cilíndrico .....	31
Fig. 9 - Bloco mais interno de um módulo cilíndrico .....	33
Fig. 10 - Seqüência de passos para obtenção da equação da pressão para o IMPES .....	38
Fig. 11 - Exemplo bidimensional utilizando AIM para um escoamento bifásico .....	41
Fig. 12 -Matriz Jacobiana para o exemplo da Fig. 11 .....	41
Fig. 13 - Matriz Jacobiana para o exemplo da Fig. 11 para o método AIM .....	43
Fig. 14 - Discretização da equação de Buckley-Leverett .....	50
Fig. 15 - Fatoração incompleta de nível 1 - ILU(1) .....	57
Fig. 16 - Esquema de ordenação do gerador .....	58
Fig. 17 - Malha de Voronoi - esquema de ordenação horizontal .....	59
Fig. 18 - Estrutura da matriz Jacobiana - ordenação horizontal .....	59
Fig. 19 - Representação da eliminação do nó 1 para uma ILU(0) .....	60
Fig. 20 - Seqüência necessária para originar a equação reduzida de pressão para a metodologia TI .....	62
Fig. 21 - Malha hexagonal-híbrida com 445 volumes .....	70
Fig. 22 - Escoamento tipo pistão - $M = 10$ .....	71
Fig. 23 - Escoamento tipo pistão - $M = 50$ .....	72
Fig. 24 - Fig. 6.23 do trabalho de Palagi (1992) .....	74
Fig. 25 - Fig. 6.29 do trabalho de Palagi (1992) .....	75
Fig. 26 - Escoamento tipo pistão - poço paralelo - $M=10$ .....	77
Fig. 27 - Escoamento tipo pistão - poço diagonal - $M=10$ .....	77
Fig. 28 - Escoamento tipo pistão - poço paralelo - $M=50$ .....	78

Fig. 29 - Escoamento tipo pistão - poço diagonal - M=50 .....	78
Fig. 30 - Efeito do fator de correção cilíndrica - escoamento tipo pistão - M=10 .....	79
Fig. 31 - Efeito do fator de correção cilíndrica - escoamento tipo pistão - M=50 .....	79
Fig. 32 - Escoamento típico de reservatório - M=10 .....	80
Fig. 33 - Escoamento típico de reservatório - M=50 .....	81
Fig. 34 - Malha generalizada com 756 volumes (21x36) .....	82
Fig. 35 - Malha hexagonal com 410 volumes .....	83
Fig. 36 - Recuperação - comparação com o SIRP-3D - caso 2 .....	85
Fig. 37 - Corte de água - comparação com o SIRP-3D - caso 2 .....	86
Fig. 38 - Pressão - comparação com o SIRP-3D - caso 2 .....	87
Fig. 39 - Algumas das malhas utilizadas para a configuração de oito poços .....	88
Fig. 40 - Erro de localização dos poços para a malha generalizada .....	90
Fig. 41 - Erro de localização dos poços para a malha hexagonal .....	90
Fig. 42 - Recuperação do poço 1 - comparação com o SIRP-3D - caso 3 .....	91
Fig. 43 - Corte de água do poço 1 - comparação com o SIRP-3D - caso 3 .....	92
Fig. 44 - Pressão do poço 1 - comparação com o SIRP-3D - caso 3 .....	93
Fig. 45 - Recuperação do poço 4 - comparação com o SIRP-3D - caso 3 .....	94
Fig. 46 - Corte de água do poço 4 - comparação com o SIRP-3D - caso 3 .....	95
Fig. 47 - Pressão do poço 4 - comparação com o SIRP-3D - caso 3 .....	96
Fig. 48 - Recuperação do poço 5 - comparação com o SIRP-3D - caso 3 .....	97
Fig. 49 - Corte de água do poço 5 - comparação com o SIRP-3D - caso 3 .....	98
Fig. 50 - Pressão do poço 5 - comparação com o SIRP-3D - caso 3 .....	99
Fig. 51 - Recuperação com pressão capilar - caso 1 .....	103
Fig. 52 - Saturação e pressão com pressão capilar - caso 1 .....	104
Fig. 53 - Recuperação com pressão capilar - caso 2 .....	105
Fig. 54 - Saturação e pressão com pressão capilar - caso 2 .....	106
Fig. 55 - Campos de implicitude para quatro valores de VPI - $\lambda_1 = 1,0$ , $\lambda_2 = 0,8$ e $\Delta S_w = 0,0117$ .....	107
Fig. 56 - Comparação de metodologias - VOR .....	118
Fig. 57 - Comparação de metodologias - corte de água .....	118
Fig. 58 - Corte de água - IMPES - $\Delta t_{max} = 50$ dias .....	119
Fig. 59 - Malha hexagonal híbrida com 1026 volumes .....	128

Fig. 60 - Malha hexagonal com 559 volumes ..... 129

---

Tab. 1 - Restrição para a equação do poço .....	34
Tab. 2 - Número aproximado de operações dos métodos para $i$ iterações .....	67
Tab. 3 - Dados físicos e geométricos do reservatório - caso 1 .....	69
Tab. 4 - Dados físicos e geométricos do reservatório - caso 2 .....	83
Tab. 5 - Permeabilidades relativas .....	84
Tab. 6 - Dados físicos e geométricos do reservatório - caso 3 .....	89
Tab. 7 - Pressão capilar .....	102
Tab. 8 - Fator de formação volumétrico e compressibilidade .....	105
Tab. 9 - Caso típico de reservatório - $M=10$ - Malha hexagonal híbrida com 445 volumes $VPI = 1,82$ - $\square - \ r\ /r_o \leq 10^{-2}$ ; $\circ - \ r\ /r_o \leq 10^{-3}$ .....	109
Tab. 10 - Caso típico de reservatório - Malha hexagonal híbrida com 445 volumes - $M=50$ $VPI = 1,82$ - $\square - \ r\ /r_o \leq 10^{-2}$ ; $\circ - \ r\ /r_o \leq 10^{-3}$ .....	110
Tab. 11 - Configuração de oito poços - Malha hexagonal com 672 volumes - $VPI = 1,82$ - $\square - \ r\ /r_o \leq 10^{-2}$ ; $\circ - \ r\ /r_o \leq 10^{-3}$ .....	111
Tab. 12 - Comparação de metodologias - malha hexagonal-híbrida com 445 volumes - $M=10$ - $VPI=1,82$ - menor tempo de CPU = 236,6 seg. ....	116
Tab. 13 - Comparação de metodologias - Malha hexagonal-híbrida com 445 volumes - $M=50$ $VPI = 1,82$ - menor tempo de CPU = 234,04 seg. ....	120
Tab. 14 - Comparação de metodologias - malha hexagonal com 410 volumes - $VPI=1,82$ menor tempo de CPU = 171,29 seg. ....	121
Tab. 15 - Comparação de metodologias - configuração de oito poços - malha hexagonal-híbrida com 672 volumes - menor tempo de CPU = 255,03 seg. ....	122
Tab. 16 - Resultados para o problema <i>STRONGY</i> utilizando GMRES .....	125
Tab. 17 - Resultados para o problema <i>STRONGX</i> utilizando GMRES .....	125
Tab. 18 - Resultados para a conf. de cinco poços - 1,0 $VPI$ - $M=10$ .....	126
Tab. 19 - Resultados para a conf. de oito poços - 0,50 $VPI$ .....	127
Tab. 20 - Resultados para a malha hexagonal com 559 volumes - 0,5 $VPI$ .....	129
Tab. 21 - Número de elementos necessários para solução via GMRES com base igual a 50, tamanho médio da base e número de elementos para fatoração completa	

da matriz Jacobiana .....	130
Tab. 22 - Número médio de elementos armazenados e número de elementos requerido para a malha hexagonal com 559 volumes com ordenação vertical .....	131
Tab. 23 - Número de iterações e tempo de CPU normalizado - para 1,0 VPI - caso 1 - M=10 .....	132
Tab. 24 - Número de iterações e tempo de CPU normalizado - para 0,5 VPI - caso 2 . . .	133
Tab. 25 - Número de iterações e tempo de CPU normalizado - para 0,5 VPI - caso 3 . . .	134
Tab. 26 - Variáveis dependentes para o modelo composicional .....	149

---

<b>a</b>	=	coeficiente de ortogonalidade - algoritmo ORTHOMIN
<b>A</b>	=	área, m <sup>2</sup>
<b>b</b>	=	largura da interface entre dois volumes, m
<b>B</b>	=	matriz, Nota de rodapé 1 - Pag. 11
<b>B<sub>p</sub></b>	=	fator de formação volumétrico da fase p
<b>c</b>	=	vetor, Nota de rodapé 1 - Pag. 11
<b>c<sub>1</sub></b>	=	constante - algoritmo de controle do passo de tempo
<b>c<sub>2</sub></b>	=	constante - algoritmo de controle do passo de tempo
<b>c<sub>i</sub></b>	=	coeficiente da rotação de Givens - algoritmo GMRES
<b>c<sub>o</sub></b>	=	compressibilidade do componente óleo, Pa <sup>-1</sup>
<b>c<sub>w</sub></b>	=	compressibilidade do componente água, Pa <sup>-1</sup>
<b>C</b>	=	matriz de transformação local, Eq. (60)
<b>CFL</b>	=	número de Courant-Friedrichs-Lewy
<b>d</b>	=	distância entre pontos geradores, m
<b>discard(i)</b>	=	discard do nó i
<b>d((x,y) - p)</b>	=	distância do ponto (x,y) ao ponto p, m
<b>D</b>	=	profundidade medida em relação a um plano horizontal (Eq. 98), m
<b>Det</b>	=	determinante, Eq. (72)
<b>D<sub>1</sub></b>	=	bloco diagonal
<b>DPLIM</b>	=	parâmetro de controle do passo de tempo baseado na pressão
<b>DPMAX<sup>n+1</sup></b>	=	variação máxima na pressão no instante de tempo n+1
<b>DSLIM</b>	=	parâmetro de controle do passo de tempo baseado na saturação
<b>DSMAX<sup>n+1</sup></b>	=	variação máxima na saturação no instante de tempo n+1
<b>e</b>	=	vetor canônico de m+1 componentes - algoritmo GMRES
<b>EBC<sub>p</sub></b>	=	erro de balanço percentual de volume do componente p, Eq. (92)
<b>f<sub>c</sub></b>	=	fator de correção cilíndrico
<b>f<sub>w</sub></b>	=	fluxo fracionário da água com pressão capilar, Eq. (90)
<b>f<sub>w</sub><sup>*</sup></b>	=	fluxo fracionário da água sem pressão capilar, Eq. (94)

<b>g</b>	=	aceleração da gravidade, m/dia <sup>2</sup>
<b>h</b>	=	profundidade da face ij, m
<b>I</b>	=	matriz identidade
<b>J</b>	=	matriz Jacobiana
<b>l(J<sub>ij</sub>)</b>	=	nível, Eq. (80)
<b>L</b>	=	matriz triangular inferior
<b>L<sub>1</sub></b>	=	Bloco triangular inferior
<b>k</b>	=	permeabilidade absoluta no plano horizontal, m <sup>2</sup>
<b>K<sub>m</sub></b>	=	base de Krylov
$\overline{\overline{\mathbf{K}}}$	=	Tensor permeabilidade absoluta
<b>K<sub>x</sub></b>	=	condutividade térmica adimensional na direção x, Eq. (97)
<b>K<sub>y</sub></b>	=	condutividade térmica adimensional na direção y, Eq. (97)
<b>K<sub>rp</sub></b>	=	permeabilidade relativa da fase p
<b>m</b>	=	massa, Kg; tamanho da base de Krylov - algoritmo GMRES
<b>m<sub>p</sub></b>	=	massa da fase p nas condições P e T do reservatório, Kg
<b>m<sub>ip</sub></b>	=	massa liberada do componente i da fase p nas condições P e T do reservatório, Kg
<b>M</b>	=	razão de viscosidades óleo/água
<b>M<sub>1</sub></b>	=	matriz de condicionamento
$\vec{n}$	=	vetor normal a superfície
<b>N</b>	=	número de volumes
<b>N<sub>p</sub></b>	=	número de fases
<b>N<sub>q</sub></b>	=	número de componentes
<b>N<sub>v</sub></b>	=	número de vizinhos do volume de controle
<b>p</b>	=	vetor - algoritmo Bi-CGSTAB
$\hat{p}$	=	vetor - algoritmo Bi-CGSTAB
<b>P<sub>o</sub></b>	=	pressão do óleo, Pa
<b>P<sub>w</sub></b>	=	pressão da água, Pa

$P_c$	=	pressão capilar, Pa
$P'_c$	=	derivada da pressão capilar em relação a saturação da água, Pa
$P_p$	=	pressão da fase $p$ , Pa
$P_{p,i}$	=	pressão da fase $p$ no ponto $i$ , Pa
$P_{wf}$	=	pressão de poço, Pa
$q$	=	termo fonte, Eq. (98); vetor - algoritmo ORTHOMIN
$q_{l1}$	=	vazão de líquido produzida no poço 1 (óleo + água), $m^3/dia$
$q_{w1}$	=	vazão de água injetada no poço 1, $m^3/dia$
$q_p$	=	vazão volumétrica da fase $p$ nas condições de reservatório por unidade de volume do reservatório, $m^3/(dia\ m^3)$
$\bar{q}_{pp}$	=	vazão de fase $p$ produzida em todos os poços, $m^3/dia$
$\bar{q}_{wi}$	=	vazão de água injetada em todos os poços, $m^3/dia$
$\tilde{q}_p$	=	vazão volumétrica da fase $p$ nas condições padrão por unidade de volume do reservatório, $m^3/(dia\ m^3)$
$\bar{q}_{p,i}$	=	vazão volumétrica da fase $p$ do volume $i$ nas condições padrão, $m^3/dia$
$r$	=	vetor resíduo, Eq. (79)
$\hat{r}$	=	vetor - algoritmo Bi-CGSTAB
$r_o$	=	raio equivalente do poço, Eq. (25), m
$r_c$	=	raio do bloco C, Eq. (31), m
$\ r\ $	=	norma segunda do vetor resíduo, $r$
$\ r_o\ $	=	norma segunda do vetor resíduo inicial, $r_o$
$r_e$	=	raio externo, m
$r_w$	=	raio do poço, m
$R$	=	função resíduo
$R^*_{p,i}$	=	função resíduo da fase $p$ no volume $i$ excluído o termo de acumulação, Eqs. (61)-(62).

$R_{ip}$	=	solubilidade do componente $i$ na fase $p$ , Eq. (6)
$s$	=	vetor - algoritmo Bi-CGSTAB
$\hat{s}$	=	vetor - algoritmo Bi-CGSTAB
$s_i$	=	coeficiente da rotação de Givens - algoritmo GMRES
$S_{or}$	=	saturação residual do óleo
$S_{wi}$	=	saturação inicial da água
$S_p$	=	saturação da fase $p$
$t$	=	tempo, dia; vetor - algoritmo Bi-CGSTAB
$T$	=	matriz de transformação, Eq. (56); temperatura
$T_{ij}$	=	fator de transmissibilidade
$\bar{u}$	=	$j$ -ésima coluna de $\bar{U}$ - algoritmo GMRES
$u$	=	elementos de $\bar{U}$ - algoritmo GMRES
$\bar{U}$	=	matriz de Hessenberg - algoritmo GMRES
$U$	=	matriz triangular superior
$U_1$	=	bloco triangular superior
<b>TOL</b>	=	tolerância
$v$	=	vetor - algoritmo GMRES
$V$	=	Volume, $m^3$
$V_i$	=	volume da célula $i$ , $m^3$
$V_p$	=	Volume da fase nas condições $P$ e $T$ do reservatório, $m^3$
$V_{i,p}$	=	Volume inicial da fase $p$ no início da simulação, $m^3$
$V_{ip}$	=	Volume do componente $i$ na fase $p$ nas condições padrão, $m^3$
$V_{f,p}$	=	Volume final da fase $p$ em cada instante de tempo, $m^3$
$V_{pp}$	=	Volume do componente $p$ na fase $p$ nas condições padrão, $m^3$
$\vec{V}_p$	=	velocidade da fase $p$ , m/dia
$\vec{V}_t$	=	velocidade da total (óleo + água), m/dia
<b>VOR</b>	=	volume de óleo recuperado, Eq. (95)
<b>VPI</b>	=	volume poroso injetado, Eq. (96)

$w$	=	vetor - algoritmo GMRES
$WI$	=	índice de poço, Eq. (23)
$x$	=	vetor solução, Eq. (86)
$x$	=	coordenada cartesiana
$x'$	=	coordenada cartesiana local
$X$	=	vetor de incógnitas
$X_{ip}$	=	fração mássica do componente $i$ na fase $p$
$z$	=	vetor - algoritmo GMRES; vetor Eq. (88)
$Z_i$	=	fração mássica global do componente $i$ , Eq. (123);
$Z_m$	=	matriz ( $n \times m$ ) - algoritmo GMRES
$y$	=	coordenada cartesiana
$y'$	=	coordenada cartesiana local
$y_m$	=	vetor solução do problema de quadrados mínimos - algoritmo GMRES
$(. , .)$	=	produto escalar
$\  \ $	=	norma segunda

### Gregos

$\alpha$	=	razão de raios, Eq. (27); coeficiente - algoritmo Bi-CGSTAB
$\alpha_i$	=	autovalor $i$
$\beta$	=	ângulo; coeficiente - algoritmo GMRES
$\beta_t$	=	ângulo total de abertura de fluxo
$\gamma$	=	constante, Eq. (73); constante-algoritmo GMRES
$\Delta P_{p,i}$	=	gradiente de pressão no volume $i$ entre a pressão da fase $p$ e a pressão de poço, Eq. (24)
$\Delta P_{o,max}^*$	=	critério de parada na pressão para o ciclo de Newton
$\Delta P_{o,max}^{v+1}$	=	variação máxima na pressão no instante $v+1$
$\Delta S_{w,max}^*$	=	critério de parada na saturação para o ciclo de Newton
$\Delta S_{w,max}^{v+1}$	=	variação máxima na saturação da água no instante $v+1$
$\Delta X$	=	incremento nas variáveis saturação ou pressão
$\Delta X_i$	=	dimensão do volume $i$

$\Delta t$	=	incremento de tempo, dias
$\Delta t^{n+1}$	=	incremento de tempo do instante $n+1$ , dias
$\Delta t_p$	=	incremento de tempo baseado na pressão, dias
$\Delta t_s$	=	incremento de tempo baseado na saturação, dias
$\Delta S_w$	=	variação na saturação para troca de implicitude
$\varepsilon$	=	medida do erro
$\theta_{ij}$	=	ângulo, Eq. (25)
$\lambda_1$	=	limite superior para troca <i>forward</i>
$\lambda_2$	=	limite inferior para troca <i>backward</i>
$\lambda_p$	=	mobilidade da fase $p$
$\lambda_{p,ij}$	=	mobilidade da fase $p$ avaliada na face $ij$ do volume de controle $i$
$\mu_p$	=	viscosidade da fase $p$ , Pa.dia
$\rho$	=	raio espectral; coeficiente - algoritmo Bi-CGSTAB
$\rho_i$	=	densidade do componente $i$ nas condições padrão, Kg/m <sup>3</sup>
$\rho_m$	=	densidade da média da mistura, Eq. (115), Kg/m <sup>3</sup>
$\rho_p$	=	densidade da fase $p$ , Kg/m <sup>3</sup>
$\phi$	=	porosidade
$\Omega$	=	coeficiente, Eq. (73)
$\omega$	=	coeficiente - algoritmo Bi-CGSTAB; coeficiente - algoritmo ORTHOMIN
$v$	=	vetor - algoritmo Bi-CGSTAB; vetor - algoritmo ORTHOMIN; velocidade

### Subscritos

$c$	=	correção cilíndrica
$i$	=	componente ou volume do bloco
$h$	=	horizontal
$ij$	=	conexão entre os volume $i$ e $j$
$g$	=	gás
$j$	=	vizinho do volume $i$
$o$	=	óleo
$p$	=	fase $p$

**ip** = componente **i** na fase **p**

**w** = água ou poço

### Superscritos

**m** = última iteração newtoniana do instante de tempo **n**

**n** = instante de tempo

**T** = vetor transposto ou matriz transposta

**θ** = grau de implicidade

**v** = nível de iteração

**\*** = vizinho mais distante do ponto **i**, Eq. (25); parâmetro especificado pelo usuário; restrição imposta, Tab. 1.

---

## 1.1 Preliminares

Na indústria de petróleo existem diversas questões que devem ser respondidas antes de se decidir a viabilidade de uma determinada bacia petrolífera. Dentro destas questões, podem-se citar duas principais: vida útil do reservatório e a capacidade de produção por unidade de tempo. Devido ao fato do petróleo encontrar-se geralmente localizado no subsolo, a centenas de metros abaixo da superfície, das dificuldades de escala e da complexidade do problema real, é bastante improvável que estas questões possam ser respondidas somente através de experimentos em laboratório.

Devido à dificuldades experimentais e aos altos custos associados à perfuração e instalação de plataformas de produção de petróleo, é necessário prever as características importantes do reservatório no que concerne ao escoamento de fluidos no meio poroso. A questão primordial é como conseguir este intento. Uma saída para este problema é a construção de modelos matemáticos que possam representar adequadamente o escoamento dos fluidos presentes no reservatório. A escolha do modelo, para um determinado reservatório, dependerá, obviamente dos tipos de fluidos presentes no reservatório.

Antes de se referir a um determinado modelo, far-se-á uma descrição sucinta de alguns tipos de fluidos que podem ser encontrados em uma determinada bacia petrolífera e dos diversos métodos de recuperação.

O processo produtivo pode ser dividido em três fases distintas: o escoamento no interior do meio poroso, o escoamento dos fluidos dos poços até a superfície, e o escoamento no interior de dutos na superfície do solo até o local de armazenamento, Mezzomo (1992). Enquanto que o escoamento nas duas etapas finais do processo são regidos por leis físicas bem conhecidas, a primeira etapa do processo é bastante complexa e muito desenvolvimento tecnológico ainda será necessário para que se possa obter melhores eficiências no processo produtivo.

Um erro geralmente cometido por pessoas que não conhecem o processo de recuperação de petróleo, é o de imaginar que o óleo ou gás é encontrado em grandes piscinas subterrâneas, e que o mesmo deve ser bombeado de forma semelhante a um líquido armazenado em um tanque. Evidentemente isto não ocorre. Em geral o óleo ou gás encontra-se confinado em pequenos poros da rocha e irá escoar através destes sob a influência de grandes gradientes de pressão. A Fig. 1 esboça uma possível amostra do reservatório. Uma grande porcentagem destes poros são conectados entre si e os fluidos podem escoar através destes canais na rocha. Contudo, os canais são muito pequenos e altamente irregulares e tortuosos, criando um escoamento transiente e altamente irregular a nível microscópico, Ewing (1983).

No início da vida útil do reservatório as pressões existentes são elevadas e geralmente suficientes para iniciar o escoamento dos fluidos através dos poros da rocha e retirá-los nos poços de produção, sem esforço de bombeamento. A energia existente (pressão) no reservatório pode ser oriunda do contato com aquíferos naturais, gás em solução no óleo, e capas de gás. Este tipo de procedimento é denominado recuperação primária. A medida que as pressões vão decrescendo, diminui também a produção e, geralmente, mais de 70% do petróleo inicialmente presente permanece no reservatório quando não existe mais o escoamento natural. Fica claro, portanto, a importância de melhorar a eficiência dos métodos de recuperação.

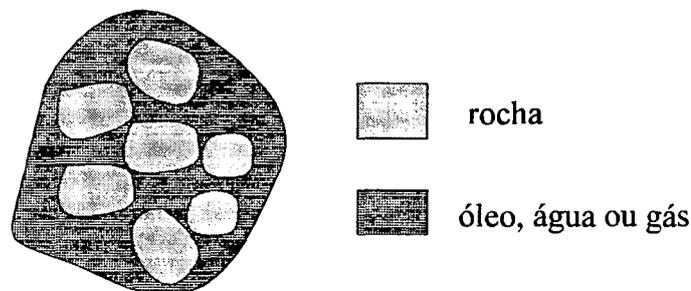


Fig. 1 - Amostra do reservatório

Com o intuito de recuperar o nível de pressão existente no reservatório pode-se injetar água ou gás em alguns poços, forçando o petróleo a migrar para outros poços de produção. A

este processo dá-se o nome de recuperação secundária. A eficiência deste processo dependerá da mobilidade do fluido residente. Se o fluido residente tem uma mobilidade baixa quando comparada com aquela do fluido injetado e se as vazões de injeção são elevadas, a interface entre o óleo residente e a água injetada torna-se instável e frentes com formatos de "dedos" ou "chifres" tendem a aparecer, as quais crescem em direção aos poços de produção. Quando esta frente atinge um determinado poço extrator, a produção de óleo é sensivelmente reduzida e a produção de água largamente aumentada. Com isto grande parte de petróleo (mais de 50%, dependendo da mobilidade do mesmo) fica ainda retido sem que possa ser retirado com este tipo de recuperação.

Para aumentar a eficiência do processo de recuperação secundária existem os métodos de recuperação terciária que englobam os métodos térmicos (combustão *in situ*, injeção contínua de vapor, etc); os métodos químicos (injeção de polímeros, álcalis, tensoativos); os métodos miscíveis (injeção de gás natural, gás carbônico, nitrogênio, etc) e outros como a introdução de bactérias, espumas, etc.

Além de existirem vários tipos de óleos, requerendo modelos diferentes, há ainda vários parâmetros do reservatório suscetíveis a grandes incertezas. Por exemplo, porosidade, permeabilidade absoluta, contornos geométricos do reservatório, etc. Para a medição de parâmetros como a porosidade são tomadas amostras ao longo do reservatório, sendo difícil avaliar quão representativos são estes dados. Entretanto, estas incertezas não impedem que cada vez mais se busquem modelos matemáticos mais representativos do problema físico em questão. Logicamente, quanto melhor caracterizado o reservatório, melhores resultados serão obtidos na previsão.

O tipo de hidrocarboneto presente no reservatório irá determinar o modelo (conjunto de equações) que possibilitará a sua caracterização. Por exemplo, se estão presentes no reservatório hidrocarbonetos com alta volatilidade, modelos composicionais ou modelos de múltiplos componentes em múltiplas fases são requeridos. Por outro lado, se os hidrocarbonetos presentes no reservatório possuem baixa volatilidade, o modelo *black-oil* ou modelo de dois componentes hidrocarbonetos (óleo e gás) pode ser utilizado. Além disso, se a viscosidade do

óleo presente no reservatório for elevada, tomando o processo de recuperação inviável somente com a imposição de elevados gradientes de pressão, é necessário alguma técnica que permita a redução da viscosidade do óleo. Uma possibilidade já citada, é a injeção de vapor d'água em alguns poços do reservatório. Evidentemente que existem vários métodos e não é o objetivo deste trabalho falar de cada um individualmente.

Qualquer que seja o modelo utilizado, as leis básicas que governam o escoamento dos fluidos presentes no reservatório são: a conservação da massa e de energia e relações adicionais, como a equação de Darcy e equações de estado. Para o fechamento do problema são necessários ainda uma completa descrição do reservatório (geometria, propriedades físicas, etc), e um conjunto de condições iniciais e de contorno. Em geral, as equações diferenciais que descrevem o escoamento de fluidos em reservatórios não podem ser resolvidas analiticamente. Uma forma de contornar este problema é resolvê-las numericamente, substituindo as equações diferenciais por equações aproximadas. No esquema numérico o reservatório é tratado como se fosse constituído de volumes discretos e as taxas de mudança em cada equação são calculadas em intervalos de tempo discretos. Obviamente, o processo físico é independente desta divisão (volumes, intervalos de tempo), contudo, a resposta do simulador vai depender da forma como foi efetuada a discretização do reservatório e como cada equação foi formulada e discretizada. As equações discretizadas geram, por sua vez, um sistema de equações algébricas não-lineares, as quais devem ainda serem linearizadas antes da obtenção da solução final do problema. O sistema linear final dependerá da forma como cada equação foi linearizada. Existem na literatura diversas possibilidades de linearizações, as quais receberão maior enfoque posteriormente neste trabalho.

A seguir realizar-se-á uma revisão dos diversos tipos de malhas utilizadas em simulação de reservatórios, dos métodos de linearização das equações aproximadas e resolução dos sistemas lineares.

## **1.2 Malhas Utilizadas**

Malhas cartesianas têm sido amplamente utilizadas em simulação de reservatórios,

Brand et al. (1991), Yanosik e McCracken (1978), Bertiger e Padmanabhan (1983), Rubin e Blunt (1991) e Pinto (1991). Todos os aplicativos comerciais atualmente utilizados pelas grandes companhias de petróleo empregam coordenadas cartesianas. A Fig. 2 apresenta dois tipos de malhas cartesianas que podem ser utilizadas para uma configuração teórica empregada em simulação de reservatórios, uma configuração de cinco poços. Esta configuração é constituída de 4 poços produtores e um injetor, com este esquema repetindo-se ao longo do reservatório.

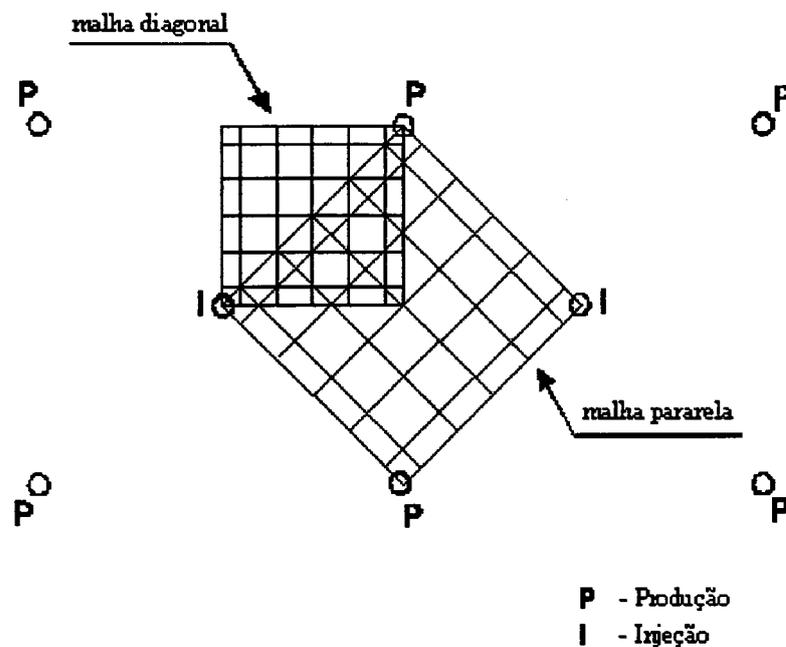


Fig. 2 - Malha diagonal e paralela para a configuração de cinco poços

Malhas cartesianas apresentam como vantagens principais a facilidade na realização de balanços de componentes e na solução dos respectivos sistemas lineares, que apesar de esparsos, apresentam leis de formação bem definidas. Entretanto, existem algumas dificuldades relacionadas com a sua utilização. Os resultados obtidos com malhas cartesianas (paralelas e diagonais), para a configuração de cinco poços, utilizando esquemas de primeira ordem nas permeabilidades relativas, são altamente dependentes da orientação da malha. Para muitos esquemas, principalmente os de primeira ordem (UDS - *Upstream Differencing Schemes*), existem diferenças consideráveis nas soluções numéricas obtidas para as malhas paralelas e

diagonais. Para um escoamento denominado *piston-type* estas diferenças não desaparecem quando malhas mais refinadas são utilizadas. Este fenômeno é denominado efeito de orientação de malha, Brand *et al.* (1991). Yanosik e McCracken (1978), Bertier e Padmanabham (1983) e Santos (1990) reduziram este efeito utilizando esquemas de 9 pontos. Rubin e Blunt (1991) e Pinto (1991) conseguiram reduzir tal efeito utilizando esquemas TVD (*Total Variation Diminishing schemes*). Outra dificuldade no uso de malhas cartesianas é a difícil representação de reservatórios com fronteiras arbitrárias.

O uso de malhas coincidentes com a fronteira contorna a dificuldade da representação de reservatórios com fronteiras complexas e permite, também maior flexibilidade na representação de falhas geológicas ao longo do reservatório, (Hirasaki e O'Dell, 1970; Fleming, 1987; Sharpe e Anderson, 1991; Sharpe, 1993; Maliska *et al.*, 1994; Cunha *et al.*, 1994; Mota, 1994; Mota e Maliska, 1994; Maliska, 1995). Os quatro primeiros trabalhos citados utilizam coordenadas curvilíneas ortogonais, que é um caso especial dos esquemas de cinco pontos. Existem dois problemas relacionadas com a utilização de coordenadas curvilíneas ortogonais. O primeiro, e talvez o mais restritivo, é a sua difícil geração. O segundo está relacionado ao uso deste tipo de coordenadas juntamente com os esquemas de primeira ordem, que devem apresentar as mesmas dificuldades das malhas cartesianas, no que tange ao problema de orientação de malha. Obviamente, existem casos especiais em que a geometria do reservatório permite que as linhas coordenadas assemelhem-se às linhas de fluxo do escoamento. Neste caso, deve-se esperar uma melhora sensível dos resultados.

Uma forma de eliminar a restrição da ortogonalidade das linhas coordenadas é trabalhar com coordenadas curvilíneas não-ortogonais, (Maliska *et al.*, 1994; Cunha *et al.*, 1994; Mota, 1994; Mota e Maliska, 1994; Maliska, 1995). Neste caso, o esquema numérico para o caso 2D passa a ser de 9 pontos, mas este fato deve-se unicamente aos termos cruzados do tensor métrico e não a uma melhor aproximação dos fluxos de massa nas fronteiras do volume de controle. Maliska *et al.* (1994), Mota (1994), e Mota e Maliska (1994) obtiveram resultados sem efeito de orientação de malha em uma configuração de cinco poços, para um caso proposto por Palagi (1992). Nestes trabalhos foram empregadas curvas de permeabilidade relativa mais realistas do ponto de vista de recuperação de petróleo.

Conforme Palagi (1992), von Rosenberg (1982) propôs a combinação de malhas cartesianas de diferentes tamanhos. von Rosenberg (1982) modelou um escoamento com razão de mobilidades unitária em um quarto da configuração de cinco poços, e observou que o refinamento próximo aos poços melhora a solução sem um considerável aumento no número de volumes. Heinemann *et al.* (1983) usaram a técnica de refinamento local da malha cartesiana dinamicamente, isto é, a malha refinada é somente aplicada para um certo período de tempo. Os resultados obtidos com a grade localmente refinada foram bastante similares aos obtidos com grades refinadas uniformemente. Quandalle e Besset (1983) apresentaram resultados obtidos com malhas localmente refinadas e concluíram que este procedimento melhora a qualidade da solução, com tempos totais de execução ligeiramente maiores que aqueles obtidos usando malhas grosseiras. Nacul (1991) mostrou que o refinamento de áreas em volta dos poços nem sempre melhora os resultados para o problema de injeção de gás em um quarto da configuração de cinco poços. Pedrosa e Aziz (1986) propuseram o uso da malha híbrida, que é uma combinação de grades cilíndricas e cartesianas. A geometria cilíndrica é usada em volta de poços verticais e a grade cartesiana no restante do reservatório. Mais recentemente, Deimbacher e Heinemann (1993), Chien e Northrup (1993) propuseram o uso de refinamento local dinâmico, com a malha dentro das janelas (ou subdomínios) podendo ter geometrias diferentes da malha cartesiana global (restante do domínio).

Pruess e Bodvarsson (1983) propuseram o uso de grades hexagonais (que gera um esquema de 7 pontos, utilizando o esquema UDS em 2D) com o intuito de reduzir o efeito de orientação de malha. Foi observado para o problema de injeção de vapor, que este tipo de grade originava soluções com pouco efeito de orientação de malha. Heinemann e Brand (1988) utilizaram uma malha de hexágonos distorcida, a qual também origina esquemas de 7 pontos. Foi resolvido o problema de injeção de vapor e verificou-se que os resultados estavam de acordo com aqueles obtidos com malhas cartesianas utilizando esquemas de 9 pontos. Malhas hexagonais é um caso especial das malhas de Voronoi que serão empregadas no presente trabalho.

Palagi (1992) propôs a utilização de malhas de Voronoi na solução de problemas de reservatório. A malha gerada utilizando o princípio de Voronoi dá origem a volumes de controle cujas faces são sempre ortogonais às retas que unem o ponto gerador do volume de controle em

questão aos pontos dos volumes vizinhos. Isso, por sua vez, facilita a realização de balanços de massa, energia, etc. Obviamente que todos os tipos de malhas localmente ortogonais podem ser vistas como casos particulares de malhas de Voronoi (cartesianas, cilíndricas, coordenadas generalizadas ortogonais, etc). Como as diversas grades utilizadas em simulação de reservatório são casos especiais de malhas de Voronoi, Palagi (1992) propôs a combinação de módulos (cartesianos, cilíndricos, hexagonais ou irregulares) para a discretização do domínio. Colocando módulos cilíndricos em volta de poços verticais e no restante do domínio módulos cartesianos ou hexagonais, Palagi (1992) obteve resultados com pouco efeito de orientação de malha para uma série de problemas onde tal influência é bastante pronunciada (escoamento tipo pistão, cone de água, etc). Em todos estes casos, a malha de Voronoi foi competitiva com todos os métodos existentes na literatura. A malha de Voronoi não precisa de nenhum tratamento especial na transição de regiões com malha refinada para regiões com malhas grosseiras (por exemplo, na transição de uma malha cilíndrica em volta de um poço vertical para uma região com malha cartesiana grosseira). A combinação de diferentes malhas de Voronoi generaliza a proposição de Pedrosa e Aziz (1986).

Os métodos de discretização vistos anteriormente empregam as técnicas de diferenças finitas ou volumes finitos. Outra possibilidade e que tem grande facilidade na representação de geometrias complexas é o método dos elementos finitos. Este método tem sido empregado na simulação de reservatórios de petróleo por diversos autores (Sprivak *et al.*, 1977; Shaw, 1993; Coutinho *et al.*, 1993 a-b e Coutinho *et al.*, 1994). Deve-se salientar que o dual das malhas de Voronoi é a triangulação de Delaunay, que coincide com o elemento triangular bastante empregado pelos pesquisadores de elementos finitos na representação de geometrias 2D.

Obviamente que o esquema numérico dos volumes finitos utilizando-se malhas de Voronoi pode ser visto como um caso especial da técnica dos volumes de controle utilizando elementos finitos - *Control Volume Finite Element Method*. Esta técnica foi inicialmente proposta por Baliga e Patankar (1983), Raw e Schneider (1986) na solução de problemas de mecânica dos fluidos e transferência de calor e posteriormente aplicada na solução de problemas de reservatório por Forsyth (1989), Fung *et al.* (1991).

### 1.3 Técnicas de Solução das Equações

As equações de conservação de massa dos componentes óleo, água ou gás podem ser consideradas hiperbólicas para a saturação (ou quase hiperbólicas, quando a pressão capilar é considerada e os fluidos são compressíveis) e a equação da pressão elíptica, ou quase elíptica (quando os efeitos de compressibilidade das fases ou rocha são considerados), conforme Peaceman (1977). Este fato, sugere que na avaliação do fluxo de massa, num determinado instante de tempo, os termos que dependem da saturação podem ser avaliados com a saturação do instante de tempo anterior, e os termos que dependem da pressão sejam avaliados no mesmo instante de tempo em que o fluxo está sendo calculado, originando o esquema IMPES (*Implicit Pressure Explicit Saturation*). Este fato, desacopla a equação da pressão das equações de saturação, uma vez que o campo de pressão depende apenas do campo de saturação do instante anterior. Tal esquema requer pequeno esforço computacional por intervalo de tempo, uma vez que a pressão é a única incógnita do sistema de equações e a saturação é calculada explicitamente com o novo campo de pressão.

Para o IMPES os erros de discretização de primeira ordem dos termos temporais e espaciais das equações de conservação tem sinais contrários e são funções do CFL. Desta forma, a dispersão numérica associada a estes erros tende a desaparecer ou diminuir quando o intervalo de tempo ( $\Delta t$ ) é escolhido de forma que o número de Courant-Friedrichs-Lewy, o CFL, é próximo de 1 (um). Devido à natureza não-linear das equações envolvidas, o cálculo exato do CFL deverá requerer um algebrismo acentuado. Na prática, trabalha-se com o CFL aproximado, (Russell, 1989; Young e Russell, 1993) e, desta forma, mesmo com o esquema IMPES, os erros de truncamentos ainda estarão presentes nas equações, mesmo em menor escala. Outra vantagem do IMPES é que o procedimento de avanço das incógnitas explícitas é facilmente vetorizável. A principal desvantagem do IMPES é que se deve empregar o CFL menor que a unidade a fim de se evitar oscilações espúrias na solução.

Uma metodologia que trabalha com o de CFL maior que um, sem que ocorra oscilações na solução, é a solução totalmente implícita (TI), ou solução simultânea. Na solução simultânea, a equação da pressão não é desacoplada das equações das saturações e ambas são

calculadas simultaneamente. Todavia, o esforço computacional por passo de tempo aumenta quando comparado com o IMPES, uma vez que todas as incógnitas fazem parte do sistema de equações (por exemplo, cada elemento da matriz Jacobiana passa a ser uma submatriz 3x3, no caso do modelo black-oil, com três fases água, óleo e gás). Conforme observado por alguns autores, (Thomas e Thurnau, 1983; Forsyth Jr. e Sammon, 1986; Fung *et. al*, 1989; Forsyth, 1989; Russel, 1989; Young e Russel, 1993), o método IMPES consegue trabalhar com razoáveis intervalos de tempo ( $\Delta t$ ) exceto em algumas regiões localizadas do reservatório, como por exemplo, nas proximidades de poços. Partindo desta observação, Thomas e Thurnau (1983) propuseram o uso de esquemas implícitos adaptativos (AIM - *Adaptive Implicit Method*), cujo conceito foi posteriormente melhorado por Forsyth Jr. e Sammon (1986). A idéia do método implícito adaptativo é avançar todas as incógnitas implicitamente nas regiões onde o CFL é maior que um ou onde ocorram grandes variações nas saturações ou na pressão de saturação, e no restante do reservatório somente a pressão é tratada implicitamente. Se o número de volumes onde todas as incógnitas são avançadas implicitamente não for muito grande, menor que 50% segundo Young e Russel (1993), consegue-se uma boa redução no tempo final de execução da simulação. Um dos grandes problemas da implementação do AIM é o critério lógico para trocar uma variável de IMPES para TI ou vice-versa.

Thomas e Thurnau (1983), Forsyth Jr. e Sammon (1986), utilizaram como critério de troca as variações máximas nas saturações e pressão de saturação. Se uma célula IMPES tiver uma variação em saturação ou pressão de saturação maior que um valor predeterminado, esta célula é calculada como sendo TI na próxima iteração de Newton ou no próximo intervalo de tempo. Forsyth Jr. e Sammon (1986) argumentam que este critério não permite que uma célula volte a ser IMPES após ter sido trocada para TI, porque uma célula TI pode ter grandes fluxos de massa e as variações nas saturações serem pequenas. Caso esta célula seja trocada para IMPES é possível que ocorram instabilidades. Evidentemente, se fosse calculado o CFL da célula, seu valor deveria ser elevado. Entretanto, como o critério utilizado é baseado somente nas variações das incógnitas explícitas, este critério não pode detectar o surgimento desta instabilidade.

Russel (1989) propõe um critério baseado no CFL para determinar se uma célula deva passar de TI para IMPES e vice-versa. Russel (1989) fornece várias justificativas para trabalhar

com o critério baseado no CFL e várias formas de calculá-lo aproximadamente. Entretanto, não apresenta nenhum resultado para escoamento bi ou trifásico. Young e Russel (1993) propuseram uma nova expressão para o cálculo do CFL e sugerem que este seja aplicado juntamente com o cálculo de máxima variação nas saturações ou pressão de saturação. Ou seja, se o CFL ou a máxima variação for violada, a célula deve passar de IMPES para TI. Caso o número de CFL seja menor que um, a célula TI passará para IMPES. Entretanto, com a expressão de cálculo do CFL proposta por Young e Russel (1993) foram obtidas soluções com o método IMPES com CFL maiores que um, sem que ocorressem oscilações na solução.

Fung *et al.* (1989) propuseram um critério baseado na análise local das equações aproximadas. Em cada célula são calculados os autovalores e é exigido o módulo do menor autovalor não seja superior a unidade, para que a célula possa ser tratada pelo método IMPES. Caso contrário, a célula deve ser tratada pelo método TI. Russel (1989) argumentou que a forma como é calculado os autovalores pelo método de Fung *et al.* (1989) é equivalente ao cálculo do CFL. Maiores detalhes sobre o cálculo dos autovalores serão fornecidos no Cap. 3 do presente trabalho.

#### 1.4 Solução dos Sistemas Lineares

Na solução dos sistemas lineares obtidos por algum dos métodos citados anteriormente, existem duas linhas principais a ser adotadas: métodos diretos e métodos iterativos. De acordo com o que foi exposto nas seções precedentes, os problemas oriundos de simulação de reservatórios são não-lineares e desta forma a solução do sistema linear representa uma solução intermediária, cujo custo computacional para obtê-la não deve ser excessivo.

Métodos diretos apresentam como principais obstáculos à sua utilização o alto valor requerido de memória e o número excessivo de operações para o cálculo dos fatores  $LU$  da decomposição. A memória e número de operações envolvidas dependem do tamanho das malhas empregadas, do número de equações e da ordenação da incógnitas. Baseado nas informações anteriores e lembrando que a resolução do sistema linear é um passo intermediário do processo de solução, pode-se justificar porque se tem preterido, na maior parte dos trabalhos, os métodos

diretos, na resolução de problemas de reservatórios.

Na maioria dos casos a resolução dos sistemas lineares é obtida via métodos iterativos. Estes métodos têm como características principais: o baixo custo por iteração e a pouca memória requerida. Dentre os métodos iterativos mais conhecidos pode-se citar os métodos estacionários<sup>1</sup> (Jacobi, Gauss-Seidel, SOR (*Successive OverRelaxation*), SSOR (*Symmetric Successive OverRelaxation*)) e os métodos não-estacionários (*GC-Conjugate Gradient*, *GMRES-Generalized Minimal Residual*, *Bi-CGSTAB-BiConjugate Gradient Stabilized*, *CGS-Conjugate Gradient Square*, *ORTHOMIN*, etc).

Os métodos estacionários, apesar de facilmente vetorizáveis e paralelizáveis, não são bastantes empregados em simulação de reservatórios. Estes métodos, além de possuírem taxa de convergência lenta, requerem que a matriz Jacobiana seja diagonalmente dominante. Devido aos grandes intervalos de tempo em que, geralmente, realiza-se a simulação, a dominância diagonal do Jacobiano é reduzida, diminuindo também as propriedades de convergência destes métodos, Marcondes *et al.* (1995c). Métodos não-estacionários têm sido largamente aplicados em simulação de reservatórios (Vinsome, 1976; Behie e Vinsome, 1982; Behie e Forsyth, 1983; Coutinho *et al.*, 1993a-b). A taxa de convergência destes métodos dependem principalmente de dois fatores: a qualidade do preconditionador empregado e ordenação das incógnitas. Existem diversas formas de preconditionamento. Alguns pesquisadores que trabalham com elementos finitos preconditionam as matrizes locais em vez de preconditionar a matriz Jacobiana globalmente - (*EBE - Element by Element*), (Shakib, *et al.*, 1989; Coutinho *et al.*, 1993a-b; Coutinho *et al.*, 1994). A maioria dos trabalhos que empregam diferenças finitas ou volumes finitos preconditionam a matriz Jacobiana globalmente. Nesta linha, a fatoração ILU (*Incomplete LU Factorization*) tem sido a mais utilizada.

---

<sup>1</sup>Conforme Barrett *et al.* (1993), métodos iterativos que podem ser escritos como  $x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + c$  ; onde  $B$  e  $c$  não dependem do contador de iteração, são classificados como métodos estacionários. Por outro lado, se existem parâmetros que variam a cada iteração os métodos são denominados de não-estacionários.

Com relação a ordenação das incógnitas, diversas formas de ordenações geométricas (ordenações baseadas somente no grafo da matriz) têm sido empregadas. Por exemplo, *red-black* (Price e Coats, 1974), *Cuthill-McKee - CM* (Cuthill e McKee, 1969; Liu e Sherman, 1975), *reverse Cuthill-McKee - RCM* (George, 1971; Liu e Sherman, 1975), *minimum degree* e *minimum deficiency* (Tinney e Walker, 1967), etc. Conforme comentado por D'Azevedo et al. (1992a) estes métodos não são capazes de detectar a anisotropia nos elementos da matriz. A anisotropia pode ser originada pelo emprego de malhas estruturadas com regiões de refino localizado, através de materiais ou meios heterogêneos ou ambos. D'Azevedo et al. (1992a) propuseram um método de ordenação das incógnitas baseado não somente na estrutura da matriz, mas também nos seus valores numéricos. Este esquema é denominado MDF (*Minimum Discarded Fill*) e está associado a uma fatoração incompleta da matriz. Maiores detalhes deste esquema de ordenação serão apresentados no Cap. 4 do presente trabalho.

### 1.5 Esboço da Tese

Malhas não-estruturadas, que eram basicamente utilizadas apenas em elementos finitos, têm recebido bastante atenção dos pesquisadores que empregam métodos baseados nos volumes finitos, ou seja, em métodos que realizam balanços para cada volume, (Baliga e Patankar, 1983; Raw e Schneider, 1986; Forsyth, 1989; Fung *et al.*, 1991; Palagi, 1992). Este fato, por sua vez, origina sistemas que respeitam a conservação de cada propriedade física localmente. Malhas não-estruturadas têm uma grande vantagem sobre malhas estruturadas, pois na maioria dos casos os problemas que se deseja resolver ocorrem em geometrias complexas. Empregando-se malhas estruturadas nem sempre é possível resolver um determinado tipo de problema com a utilização de único domínio de cálculo, mesmo trabalhando-se com coordenadas generalizadas, Vasconcellos (1993) e Vasconcellos e Maliska (1994). Em malhas não-estruturadas este problema não existe e é também muito mais fácil a realização de refinamento local da malha. Conforme comentado anteriormente, as malhas de Voronoi híbridas, propostas por Palagi (1992), apresentam grandes vantagens sobre a maioria das malhas utilizadas na simulação de reservatórios. Neste trabalho fazendo-se uso deste tipo de malha, é desenvolvido um código computacional 2D não-estruturado, para a simulação do escoamento bifásico óleo-água. Para a geração dos diagramas de Voronoi foi utilizado o gerador de malhas de Voronoi desenvolvido

por Maliska Jr. (1993).

Um dos objetivos do presente trabalho é desenvolver um código computacional utilizando malhas não estruturadas de Voronoi que englobe as metodologias IMPES, AIM e Totalmente Implícita (TI). Conforme citado anteriormente, existe uma série de trabalhos que versam a respeito da metodologia AIM. Na maioria destes trabalhos são realizadas comparações entre as metodologias AIM, IMPES e TI. Um fato que deve ser frisado, é o não aparecimento dos critérios utilizados para convergência de uma iteração newtoniana. Um outro detalhe, talvez mais importante, com relação a metodologia AIM é a pouca discussão a respeito da eficiência dos diversos critérios para trocar-se uma célula de IMPES para TI e em alguns casos de TI para IMPES. Por exemplo, no trabalho de Young e Russel (1993) é sugerido que critérios baseados no CFL devem ser utilizados. Entretanto, soluções com CFL maiores que 1 (um) foram obtidas sem oscilações através do método IMPES. Este fato pode ser atribuído ao cálculo não rigoroso do CFL.

Outro ponto que será focado neste trabalho é a solução dos sistemas lineares oriundos da utilização de malhas não-estruturadas. Para malhas estruturadas existe uma série de trabalhos que utilizam métodos derivados dos gradientes conjugados com ILU (*Incomplete LU Factorization*), (Behie e Vinsome, 1982; Behie e Forsyth, 1984; Eisenstat *et al.*, 1988). Com relação ao condicionamento, existem duas linhas básicas: uma utiliza como ILU somente uma partição do Jacobiano, Eisenstat *et al.* (1988) e outra utiliza toda a estrutura do Jacobiano, (Behie e Vinsome, 1982; Behie e Forsyth, 1984). Partições do Jacobiano podem não fornecer bons resultados em malhas não-estruturadas, Marcondes *et al.* (1995c). Para malhas não-estruturadas, a conectividade da matriz Jacobiana pode ser variada e uma decomposição como proposta por Behie e Forsyth (1984) é mais complicada. Forsyth e Sammon (1985) sugerem que a decomposição ILU para matrizes com conectividade variada pode ser realizada de forma semelhante àquela utilizada por Behie e Forsyth (1984), desde que seja realizada primeiramente uma fatoração simbólica da matriz. A fatoração simbólica determina a posição do enchimento (*fill-in*) nos fatores LU.

Outro ponto que deve ser frisado é o esquema de armazenamento da matriz Jacobiana.

Para preconditionadores de ponto (*point-wise*) pode-se resolver com facilidade os sistemas oriundos das metodologias IMPES e TI. Para a metodologia AIM vetores adicionais são necessários para armazenamento e processo de fatoração aproximada. No presente trabalho as operações são realizadas do ponto de vista de bloco. Por exemplo, primeiramente é realizada uma fatoração simbólica independente da metodologia empregada e o processo de fatoração é realizado com o auxílio de um vetor auxiliar para determinar-se o tamanho de cada bloco. No presente caso, para a metodologia AIM, cada bloco pode ser  $1 \times 1$ ,  $2 \times 1$ ,  $1 \times 2$  ou  $2 \times 2$ .

O restante deste trabalho será dividido da seguinte forma: O Cap. 2 apresentará as equações do modelo *black-oil* utilizado neste trabalho. As equações serão obtidas a partir de um modelo composicional.

No Cap. 3 serão integradas as equações no espaço e no tempo. Serão apresentadas as metodologias TI, IMPES e AIM e o ciclo iterativo de cada metodologia. Também serão discutidos os critérios de troca de implícitude.

O Cap. 4 apresentará os ciclos dos três métodos iterativos (GMRES, Bi-CGSTAB e ORTHOMIN) que serão utilizados para a resolução dos sistemas lineares oriundos das metodologias utilizadas. Apresentar-se-á também, a forma de preconditionamento empregado, bem como, os esquemas de ordenações das incógnitas utilizados.

O Cap. 5 apresentará os resultados com o intuito de validar o código computacional desenvolvido neste trabalho. Os resultados apresentados foram obtidos com a metodologia TI e foram empregados para validação alguns dos resultados obtidos por Palagi (1992) e Cunha (1996). Foi também realizado uma análise de caso onde se verificou o efeito da pressão capilar nas curvas de recuperação de óleo.

O Cap. 6 apresentará as comparações das metodologias TI, IMPES e AIM. Os resultados serão apresentados em termos de tempo de CPU, número de iterações de Newton, número de iterações no tempo e percentagem de implícitude. Como critério de chaveamento de implícitude foram utilizados o critério de estabilidade de Fung *et al.* (1989) e o critério de

variação na saturação.

O Cap. 7 apresentará uma comparação entre três métodos de solução de sistemas lineares empregados no presente trabalho: ORTHOMIN, GMRES e Bi-CGSTAB. As comparações serão realizadas em termos de tempo de CPU e número de iterações no *solver*. Apresentar-se-á também o efeito da ordenação MDF no método GMRES.

Por fim o Cap. 8 é reservado para um resumo das conclusões obtidas e sugestões para futuros trabalhos.

## 2.1 Introdução

Neste capítulo apresenta-se a equação de conservação de um componente qualquer que poderá estar presente em uma ou mais fases existentes no reservatório. Em seguida são apresentadas as hipóteses simplificativas necessárias para tornar o modelo composicional ou modelo de múltiplos componentes em múltiplas fases, no modelo de dois componentes ou modelo *black-oil*.

## 2.2 Modelo Composicional

Suponha que existam  $N_p$  fases presentes no reservatório (geralmente óleo, gás e água) e que existam  $N_q$  espécies químicas ou componentes, onde cada um deles pode estar presente em qualquer uma das  $N_p$  fases. Representar-se-á por  $X_{ip}$  a fração mássica do componente  $i$  presente na fase  $p$ . Uma vez que existe a possibilidade de transferência de componentes entre as fases, não se pode dizer que a massa da fase é conservada; o que se conserva é a massa de cada componente individualmente. Conforme Peaceman, (1977) e Allen *et al.*, (1988), a equação representando o balanço de cada componente pode ser escrita como,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \phi \left[ \sum_{N_p} X_{ip} \rho_p S_p \right] \right) = -\vec{\nabla} \cdot \left[ \sum_{N_p} X_{ip} \rho_p \vec{V}_p \right] + \sum_{N_p} \rho_p X_{ip} q_p \quad (1)$$

onde a porosidade  $\phi$  representa a fração de volume que é disponível para o escoamento dos fluidos presentes no reservatório e é, em geral, função das pressões encontradas no meio poroso.  $\rho_p$  é a densidade da fase  $p$ , e para fluidos compressíveis  $\rho_p = \rho_p(X_{ip}, P_p)$ , onde  $P_p$  é a pressão da fase  $p$ .  $S_p$  é a saturação da fase  $p$  e representa a fração do espaço poroso que é ocupado pela fase  $p$ .  $\vec{V}_p$  é a velocidade da fase  $p$  e  $q_p$  é a vazão volumétrica de produção/injeção da fase  $p$  por unidade de volume do reservatório, que é admitido positivo para para injeção e negativo para produção. O termo no lado esquerdo da Eq. (1) é a taxa de acumulação do componente  $i$  na fase

$p$  e o primeiro termo da direita representa a taxa de fluxo do componente  $i$  por convecção. Na Eq. (1) foi admitido que não existe nenhuma reação química e que o transporte do componente  $i$  é somente por convecção, não sendo considerado o transporte do mesmo por difusão molecular e dispersão hidrodinâmica. Uma vez que na maioria dos casos práticos envolvendo recuperação primária e secundária ocorre somente escoamento imiscível, os termos convectivos das equações de conservação da massa de cada componente são largamente dominantes. As unidades de cada termo na Eq. (1) são,

$$\frac{\text{massa do componente } i}{(\text{unidade de tempo}) (\text{unidade de volume do reservatório})}$$

A velocidade da fase  $p$  considerando o reservatório 2D e horizontal é dada pela lei de Darcy,

$$\vec{V}_p = -\lambda_p \cdot \vec{\nabla} P_p \quad (2)$$

onde,  $P_p$  é a pressão da fase  $p$  e  $\lambda_p$  a mobilidade da fase  $p$ , definida por

$$\lambda_p = \frac{\overline{\overline{K}} K_{rp}}{\mu_p} \quad (3)$$

onde,  $K_{rp}$  é a permeabilidade relativa da fase  $p$ , que é função da saturação da fase  $p$ ,  $\mu_p$  a viscosidade da fase  $p$ , geralmente uma função da pressão da fase  $p$ , e  $\overline{\overline{K}}$  o tensor permeabilidade absoluta do meio, dado por

$$\overline{\overline{K}} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \quad (4)$$

$k$  na Eq. (4) representa a permeabilidade no plano horizontal. Está implícito na Eq. (4) que o meio poroso considerado neste trabalho será localmente isotrópico na direção horizontal, isto é, os valores de  $k$  nas direções  $x$  e  $y$  ao longo do plano serão iguais.

Maiores detalhes do modelo composicional serão apresentados no apêndice A.

### 2.3 Modelo *Black-Oil*

O modelo composicional da seção anterior permite que sistemas com óleos de alta volatilidade sejam modelados. Entretanto, o custo computacional gasto para tratar o sistema de equações oriundos deste modelo é bastante alto. Contudo, para óleos com baixa volatilidade, o modelo *black-oil* ou modelo de dois componentes pode ser usado para descrever o equilíbrio das fases. É admitido que não existe transferência de massa entre a fase água e as fases óleo e gás. No sistema hidrocarboneto somente dois componentes são considerados: óleo e gás. O componente óleo (também chamado óleo nas condições de armazenagem ou condições padrão (*standard*)) é o líquido residual na pressão atmosférica após uma vaporização diferencial, e o fluido restante é o componente gás.

O fator de formação de volume da fase **p** e a solubilidade do componente **i** na fase **p** são definidos como,

$$B_p = \frac{V_p}{V_{pp}} \quad (5)$$

$$R_{ip} = \frac{V_{ip}}{V_{pp}} = \frac{m_{ip}/\rho_i}{V_p/B_p} = \frac{m_{ip}/\rho_i}{\frac{m_p}{\rho_p} \frac{1}{B_p}} = \frac{m_{ip}}{m_p} \frac{\rho_p}{\rho_i} B_p = X_{ip} \frac{\rho_p}{\rho_i} B_p \quad (6)$$

onde,

$B_p$  = fator de formação de volume da fase **p** nas condições de pressão e temperatura do reservatório (**P** e **T**);

$m_p$  = massa da fase **p** nas condições **P** e **T** do reservatório;

$V_p$  = volume da fase **p** nas condições **P** e **T** do reservatório;

- $\rho_p$  = densidade da fase **p** nas condições **P** e **T** do reservatório;  
 $\rho_i$  = densidade do componente **i** nas condições de estocagem;  
 $m_{ip}$  = massa liberada do componente **i** da fase **p** nas condições de estocagem, oriunda de condições **P** e **T** do reservatório;  
 $R_{ip}$  = solubilidade do componente **i** na fase **p** nas condições **P** e **T** do reservatório;  
 $V_{ip}$  = volume liberado do componente **i** da fase **p** nas condições de estocagem, oriundo de condições **P** e **T** do reservatório;  
 $V_{pp}$  = volume liberado do componente **p** da fase **p** nas condições de estocagem, oriundo de condições de **P** e **T** do reservatório.

Da Eq. (6) obtém-se,

$$X_{ip} \rho_p = R_{ip} \frac{\rho_i}{B_p} \quad (7)$$

Substituindo-se as Eqs. (2) e (7) na Eq. (1), obtém-se a equação de conservação do componente **i** para o modelo *black-oil*,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \phi \left[ \sum_{N_p} \frac{R_{ip}}{B_p} S_p \right] \right) = \bar{\nabla} \cdot \left[ \sum_{N_p} \frac{R_{ip}}{B_p} \lambda_p \cdot \bar{\nabla} P_p \right] + \sum_{N_p} \frac{R_{ip}}{B_p} q_p \quad (8)$$

#### 2.4 - Modelo *Black-Oil* do Presente Trabalho

No presente trabalho implementou-se um modelo *black-oil* simplificado, o qual consiste do escoamento de duas fases imiscíveis, óleo (o) e água (w). Neste caso,

$$R_{wo} = R_{ow} = 0 \quad (9)$$

$$R_{ww} = R_{oo} = 1 \quad (10)$$

As equações de conservação para os componentes óleo e água podem ser escritas como,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \phi \frac{S_o}{B_o} \right) = \nabla \cdot \left[ \frac{\lambda_o}{B_o} \nabla P_o \right] + \frac{q_o}{B_o} \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \phi \frac{S_w}{B_w} \right) = \nabla \cdot \left[ \frac{\lambda_w}{B_w} \nabla P_w \right] + \frac{q_w}{B_w} \quad (12)$$

As Eqs. (11) e (12) representam a conservação volumétrica dos componentes óleo e água nas condições de estocagem. Observando-se as Eqs. (11) e (12) vê-se que existem quatro incógnitas ( $S_o$ ,  $S_w$ ,  $P_o$  e  $P_w$ ) e apenas duas equações. As outras duas equações para o fechamento do problema vêm da restrição de volume e de dados experimentais via pressão capilar.

$$S_w + S_o = 1 \quad (13)$$

$$P_c(S_w) = P_o - P_w \quad (14)$$

Por facilidade de representação escrever-se-á as Eqs. (11) e (12) na seguinte forma geral, com o índice  $p$  podendo representar a fase óleo ( $o$ ) ou fase água ( $w$ ),

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \phi \frac{S_p}{B_p} \right) = \nabla \cdot (\lambda_p \nabla P_p) + \tilde{q}_p \quad (15)$$

A mobilidade da fase  $p$  foi modificada para levar em consideração o fator volumétrico, e  $\tilde{q}_p$  representa a vazão volumétrica nas condições de estocagem por unidade de volume do reservatório. Desta forma, tem-se

$$\lambda_p = k \frac{K_{rp}}{\mu_p B_p} \quad (16)$$

e

$$\tilde{q}_p = \frac{q_p}{B_p} \quad (17)$$

### 3.1 Introdução

Neste capítulo integra-se a equação do modelo *black-oil* no espaço e no tempo para um componente  $p$  qualquer. Dependendo das aproximações efetuadas durante o processo surgem naturalmente as metodologias TI, IMPES e AIM. Apresenta-se também o critério para a troca de implicitude baseado nos autovalores.

### 3.2 Definição do Diagrama de Voronoi

O diagrama de Voronoi para um conjunto de pontos foi definido primeiramente por Dirichlet (1850) e Voronoi (1908). Conforme Palagi (1992) este tipo de malha tem sido aplicada em áreas como, física (Winterfeld *et al.*, 1981), caracterização de rochas (Pathak, *et al.* 1980), cristalografia (Mackay, 1981), etc. Recentemente tem sido aplicado a problemas de mecânica dos fluidos (Taniguchi *et al.*, 1991) e a problemas de reservatório de petróleo (Heinemann e Brand, 1988; Palagi, 1992; Marcondes *et al.* 1994; Maliska e Maliska Jr., 1994).

Um volume de Voronoi é definido como a região do espaço que é mais próxima do seu *grid-point* ou ponto gerador do que qualquer outro ponto e o diagrama ou malha de Voronoi é composta de tais volumes. A definição de um volume de Voronoi para o espaço  $\mathbf{R}^2$ , conforme pode ser encontrada nos trabalhos de Sugihara e Iri (1992) e Maliska Jr. (1993), é:

Dado um conjunto de  $n$  pontos  $\mathbf{p}$  e uma região do espaço  $\mathbf{R}^2$ , o volume de Voronoi para o ponto gerador  $i$  é o conjunto dos pontos  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{R}^2$  que obedecem a:

$$d((\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathbf{p}_i) < d((\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathbf{p}_j) \quad \forall j / 1 < j < n \text{ e } j \neq i$$

onde  $d((\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathbf{p})$  é a distância do ponto  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  ao ponto  $\mathbf{p}$ .

A Fig. 3 apresenta o diagrama de Voronoi para o ponto gerador  $i$ . Da Fig. 3 pode-se

observar as seguintes propriedades do diagrama:

- a) A reta que une o ponto  $i$  ao seu vizinho  $j$  é sempre ortogonal a aresta comum a estes dois pontos. Por exemplo,  $\overline{i-j=1} \perp \overline{b-c}$ .
- b) A face comum ao ponto  $i$  e seu vizinho  $j$ , ou o seu prolongamento, passa no ponto médio da reta unindo estes dois pontos. Por exemplo, a reta  $\overline{b-c}$  passa no ponto médio da reta  $\overline{i-j=1}$  e o prolongamento da reta  $\overline{c-d}$  passa no ponto médio da reta  $\overline{i-j=5}$ . O último caso acontece geralmente nas interfaces de alguns volumes onde ocorre a combinação de diferentes tipos de malhas (hexagonal-híbrida, cartesiana-híbrida, cartesiana com refino local, etc.). No trabalho de Palagi (1992) malhas de múltiplas geometrias foram empregadas para resolver diversos problemas, onde as soluções numéricas foram validadas com soluções analíticas e soluções numéricas obtidas com malhas refinadas. Conforme Palagi (1992) não existe nenhuma indicação de que a existência de interfaces que não interceptem a linha que une dois pontos geradores seja a única causa de inexatidão nas soluções obtidas.
- c) O círculo que passa por três pontos geradores é um vértice do volume de Voronoi. Por exemplo, o ponto  $c$  é o centro do círculo que passa pelos pontos  $j=1$ ,  $j=2$  e  $i$ .
- d) Qualquer ponto dentro do polígono  $abcde$  está mais próximo do ponto  $i$  do que de qualquer um dos seus vizinhos  $j$ .

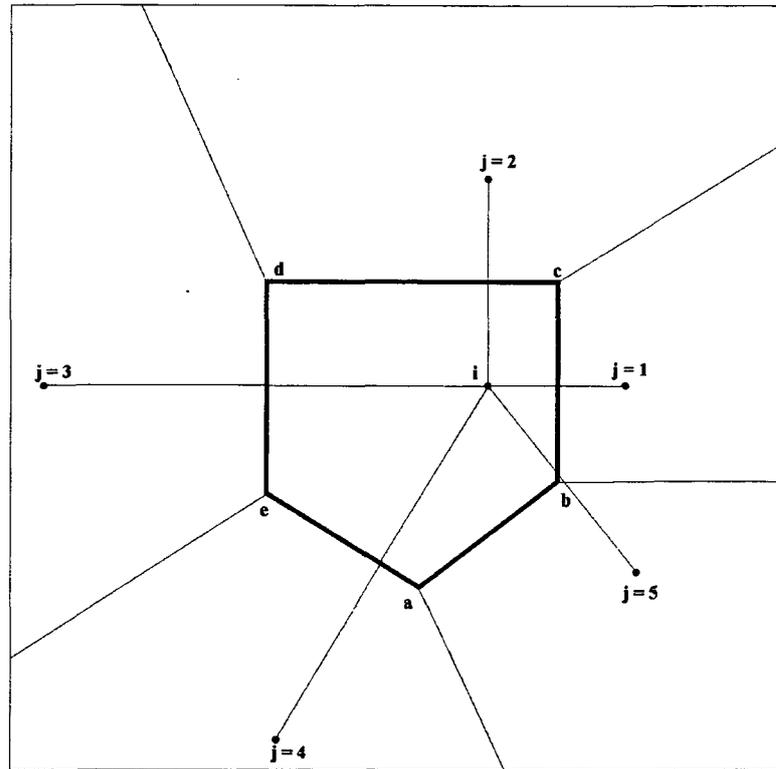


Fig. 3 - Diagrama de Voronoi com seis pontos geradores

### 3.3 Integração das Equações Governantes

A Fig. 4 apresenta um volume de controle de Voronoi. O ponto  $i$  é o ponto gerador e os pontos  $j$ 's seus vizinhos. Para cada ponto  $j$  é possível alinhar um sistema cartesiano local  $x'$ - $y'$  de tal forma que o eixo  $x'$  (linha que une o ponto  $i$  ao ponto  $j$ ) seja perpendicular à face do volume de controle e o eixo  $y'$  paralelo a esta face.

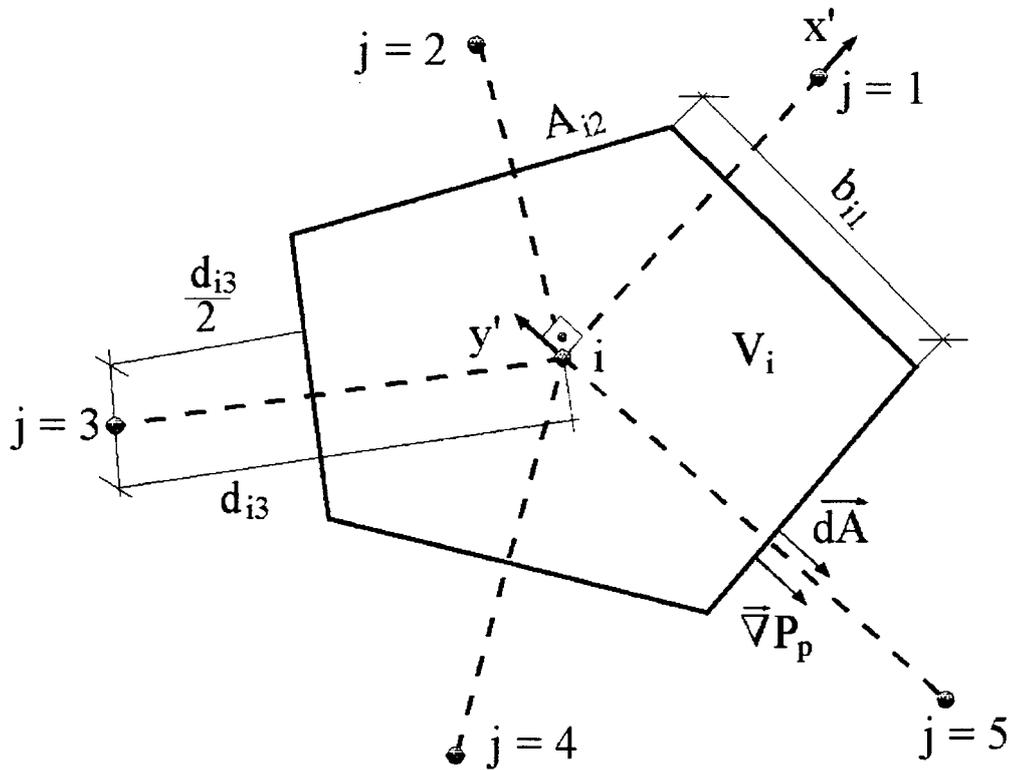


Fig. 4 - Volume de controle de Voronoi para o ponto i

A Eq. (15), onde \$S\_p\$ é a saturação do óleo ou da água, é integrada no volume de controle e no tempo,

$$\int \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left( \phi \frac{S_p}{B_p} \right) dV dt = \int \int_V \vec{\nabla} \cdot (\lambda_p \cdot \vec{\nabla} P_p) dV dt + \int \int_V \tilde{q}_p dV dt \quad (18)$$

Aplicando-se o teorema da divergência ou teorema de Gauss para o primeiro termo do lado direito da Eq. (18), obtém-se

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left( \phi \frac{S_p}{B_p} \right) dV dt = \int_A \lambda_p \cdot \nabla P_p \cdot d\vec{A} dt + \int_V \tilde{q}_p dV dt \quad (19)$$

onde  $d\vec{A}$  é o vetor área elementar.

Para a integração da Eq. (19) foi admitido que o fluxo convectivo é constante através de cada face  $ij$  do volume de controle  $i$ . Uma vez que o sistema cartesiano local  $\mathbf{x}'\text{-}\mathbf{y}'$  é perpendicular a cada face do volume de controle, o cálculo do primeiro termo no lado direito da Eq. (19) é bastante facilitado. Para cada face  $ij$ , o gradiente normal a esta face depende unicamente dos valores de  $P_p$  nestes pontos. Vale a pena salientar que, se o meio poroso não fosse localmente isotrópico, (ver Eq. (4)), o fluxo convectivo dependeria de outros vizinhos  $j$ , Palagi (1992). Fazendo-se as integrações da Eq. (19) e representando  $t + \Delta t$  por  $n + 1$ , tem-se

$$\left( \frac{\phi V S_p}{\Delta t B_p} \right)_i^{n+1} - \left( \frac{\phi V S_p}{\Delta t B_p} \right)_i^n = \sum_{j=1}^{N_v} T_{ij} \lambda_{p,ij}^{n+\theta} (P_{pj}^{n+1} - P_{p,i}^{n+1}) + \bar{q}_{p,i}^{n+\theta} \quad (20)$$

O índice  $\theta$  na Eq. (20) pode assumir os valores 0 ou 1, dependendo, da técnica de solução (IMPES ou TI).  $\bar{q}_p$  é a vazão volumétrica da fase  $p$  nas condições padrão e  $N_v$  o número de vizinhos do volume  $i$ . O termo  $T_{ij}$  na Eq. (20) é conhecido como fator de transmissibilidade e é o produto de fatores geométricos e da permeabilidade horizontal,

$$T_{ij} = \left( \frac{bhk}{d} \right)_{ij} \quad (21)$$

onde,  $d$  é a distância do ponto  $i$  ao ponto  $j$ ,  $b$  e  $h$  são a largura e profundidade da face  $ij$ , respectivamente, e  $k$  é a permeabilidade na face  $ij$ . Na interface de dois meios diferentes será calculado via média harmônica.

Voltando à Eq. (20), o último termo desta equação é calculado como,

$$\bar{q}_{p,i}^{-n+\theta} = (WI)_i \left( \frac{K_{rp}}{\mu_p B_p} \right)_i^{n+\theta} \Delta P_{p,i} \quad (22)$$

com

$$(WI)_i = \frac{k \beta_t h}{\ln(r_o/r_w)} \quad (23)$$

e

$$\Delta P_{p,i} = P_{p,i}^{n+1} - P_{wf}^{n+1} \quad (24)$$

Nas Eqs. (22) a (24),  $\beta_t$  representa o ângulo total de abertura de fluxo ( $\beta_t = 2\pi$  para um poço interno).  $P_{wf}$  a pressão do poço localizado no bloco  $i$ ,  $(WI)_i$  é o índice de poço e  $r_o$  o raio equivalente do bloco do poço. O raio equivalente do poço é o raio para o qual a distribuição de pressão do poço em regime permanente iguala-se a pressão numérica do bloco contendo o poço, Peaceman (1978, 1983, 1987). Para o cálculo de  $r_o$  adotar-se-á o "modelo 2" proposto por Palagi (1992). Segundo este modelo,  $r_o$  é dado por,

$$r_o = d_{ij}^* \exp\left(\frac{-\theta_{ij}^* d_{ij}^*}{f_{c,ij}^* b_{ij}^*}\right) \quad (25)$$

onde, \* refere-se ao vizinho  $j$  mais distante do volume  $i$ , conforme Fig. 5.

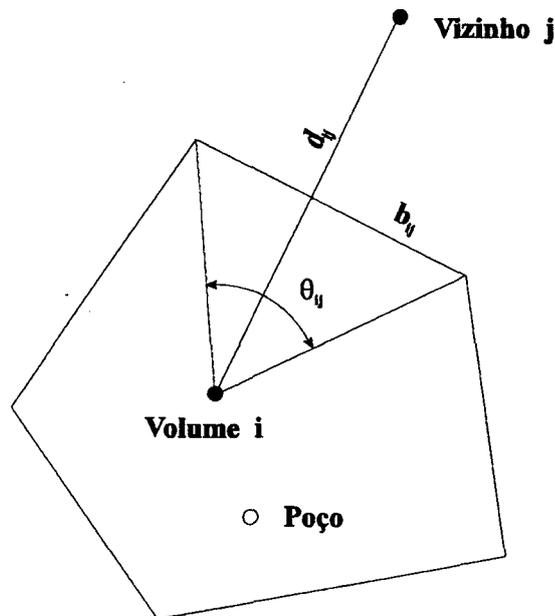


Fig. 5 - Bloco de Voronoi contendo um poço

### 3.4 - Fator de Correção Cilíndrica

A malha de Voronoi, que foi utilizada neste trabalho, é composta de vários módulos, conforme exemplo apresentado na Fig. 6. Uma vez que os volumes formados pelos módulos cilíndricos não são exatamente os volumes que deveriam ser originados se uma discretização no plano  $r-\theta$  fosse realizada, Palagi (1992) propôs uma correção no fator de transmissibilidade para que os módulos cilíndricos em volta dos poços verticais possam representar exatamente o escoamento radial nesta região.

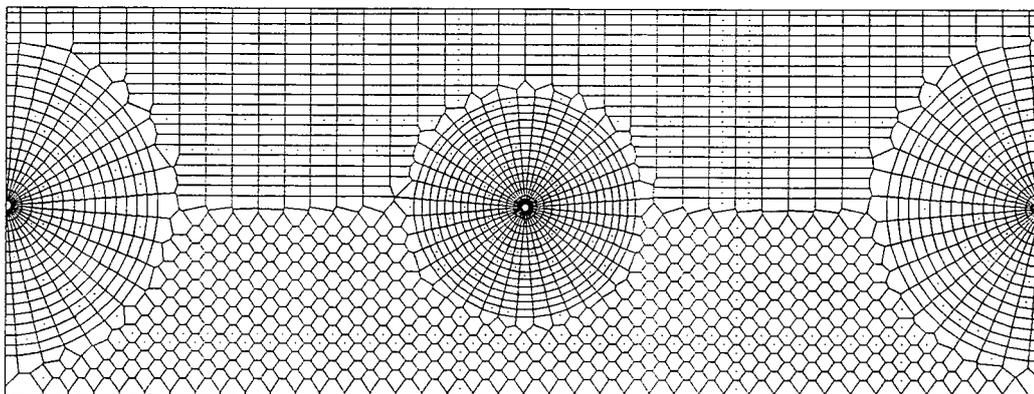


Fig. 6- Diagrama de Voronoi com 2297 pontos geradores

A Fig. 7 apresenta uma malha "quase-cilíndrica" em torno de um poço vertical e a Fig. 8 apresenta uma seção da malha apresentada na Fig. 7. Com a inclusão da correção cilíndrica o fator de transmissibilidade é dado por

$$T_{ij} = \left( \frac{f_c b h k}{d} \right)_{ij} \quad (26)$$

onde,

$$f_{cij} = \left( \frac{2(\beta_1 + \beta_2)}{(\tan \beta_1 + \tan \beta_2)(\alpha + 1)} \frac{(\alpha - 1)}{\ln \alpha} \right)_{ij} \quad (27)$$

e

$$\alpha = \frac{r_j}{r_i} \quad (28)$$

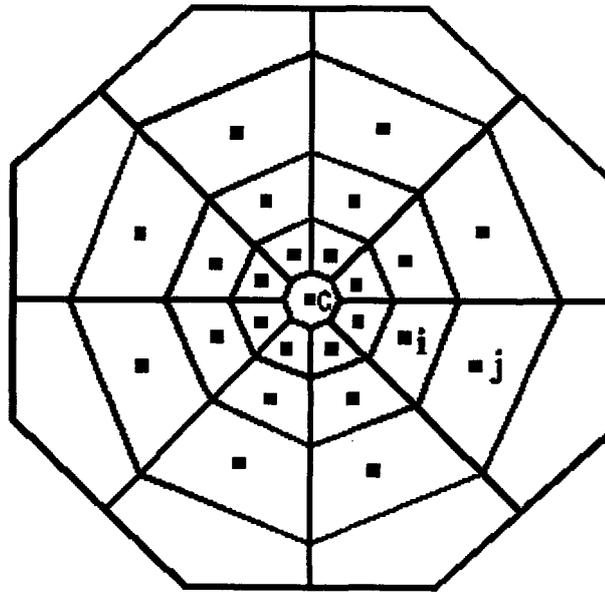


Fig. 7 - Módulo cilíndrico

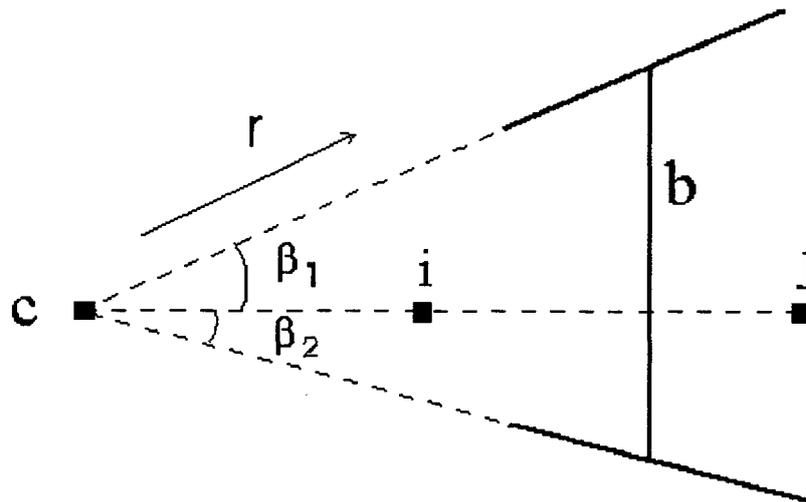


Fig. 8 - Conexão  $ij$  em uma seção de um módulo cilíndrico

Para as regiões cilíndricas em volta de poços verticais  $f_c$  é calculado pela Eq. (27), fora desta região  $f_c=1$ . Necessita-se ainda de uma maneira de calcular  $f_c$  para o bloco mais interno (bloco C na Fig. 7) e seus vizinhos. Embora este ponto esteja localizado na origem de um sistema de coordenadas cilíndricas, na realidade ele representa condições médias do correspondente volume. O bloco C pode ser visualizado como sendo o volume mais interno, cujas

fronteiras estão limitadas pelo raio do poço ( $r_w$ ) e pelo raio externo ( $r_e$ ), Palagi, (1992). Na Fig. 9 estão representados  $r_w$ ,  $r_c$  e  $r_e$ , onde  $r_e$  é dado por

$$r_e = \sqrt{\left(2 \frac{A}{\beta_t}\right)} \quad (29)$$

onde  $A$  é a área do volume  $C$ . Palagi (1992) propôs que a posição do ponto gerador do bloco  $C$  ( $r_c$ ) fosse expresso como função do raio  $r_e$  e  $r_w$  usando uma expressão desenvolvida por Pedrosa e Aziz (1986).

$$r_c = \frac{r_e}{\alpha_*} \exp \left[ \frac{\alpha_*^2}{\alpha_*^2 - 1} \ln \alpha_* - \frac{1}{2} \right] \quad (30)$$

onde

$$\alpha_* = \frac{r_e}{r_w} \quad (31)$$

O raio  $r_c$  é usado somente na Eq. (28) para calcular  $\alpha$  para todas as conexões do bloco  $C$ .

O efeito da correção cilíndrica será analisado para o escoamento tipo pistão no Cap. 5. Serão apresentados resultados para este tipo de escoamento empregando malhas híbridas, com  $f_c = 1$  e  $f_c$  obtido via Eq. (27) na região radial. Discute-se também alguns dos resultados obtidos por Palagi (1992) empregando a correção cilíndrica.

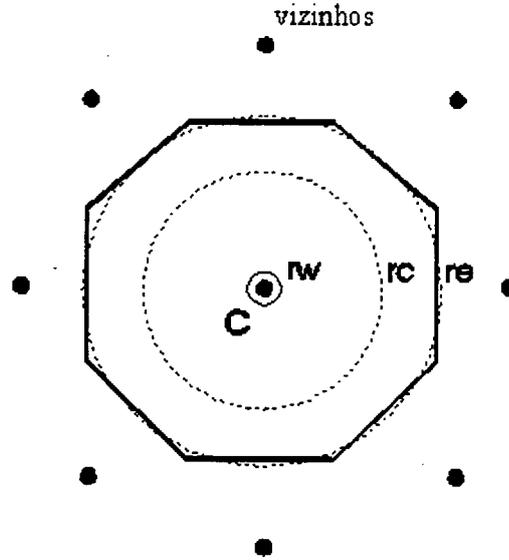


Fig. 9 - Bloco mais interno de um módulo cilíndrico

### 3.5 Metodologia Totalmente Implícita

Fazendo-se  $\theta = 1$  na Eq. (20), tem-se

$$\left( \frac{\phi V S_p}{\Delta t B_p} \right)_i^{n+1} - \left( \frac{\phi V S_p}{\Delta t B_p} \right)_i^n = \sum_{j=1}^{N_v} T_{ij} \left( \frac{K_{rp}}{\mu_p B_p} \right)_{ij}^{n+1} (P_{pj}^{n+1} - P_{p,i}^{n+1}) + \bar{q}_{p,i}^{n+1} \quad (32)$$

As incógnitas que devem ser calculadas implicitamente para cada volume são a pressão do óleo ( $P_o$ ) e a saturação da água ( $S_w$ ). Apesar dos termos de poços serem tratados implicitamente pode-se mostrar facilmente que a pressão do poço não faz parte do sistema de equações. O que ocorre com o tratamento implícito dos termos de poços é o acréscimo de uma parcela no bloco diagonal do Jacobiano nos blocos contendo os poços. Este fato ocorre devido ao não surgimento dos termos de gravidade nos termos de fluxo e o fato de se ter desconsiderado os efeitos da pressão capilar no cálculo das vazões produzidas. Para o cálculo de

$\left( \frac{K_{rp}}{\mu_p B_p} \right)_{ij}$  adotar-se-á o seguinte procedimento:  $K_{rp,ij}$  será calculado pelo esquema UDS ou

*upstream weighting scheme* (esquema de um ponto a montante) como é conhecido na literatura de simulação de reservatórios e  $(\mu_p \mathbf{B}_p)_{ij}$  será calculado pela média aritmética dos correspondentes valores nos pontos  $ij$ .

O sistema de equações é resolvido iterativamente usando o método de Newton. A forma residual da equação de conservação do componente  $p$  para o volume  $i$  é

$$R_{p,i} = \sum_{j=1}^{N_v} T_{ij} \left( \frac{K_{rp}}{\mu_p B_p} \right)_{ij}^{n+1} (P_{pj}^{n+1} - P_{p,i}^{n+1}) + \bar{q}_{p,i}^{n+1} - \left( \frac{\phi V S_p}{\Delta t B_p} \right)_{i}^{n+1} + \left( \frac{\phi V S_p}{\Delta t B_p} \right)_{i}^n ; p=o,w \quad (33)$$

A Tab. 1 apresenta algumas restrições possíveis para os poços de injeção e produção. O sobrescrito \* refere-se ao valor da restrição imposta.

Tab. 1 - Restrição para a equação do poço

Poço	Restrição
Produtor	$P_{wf} \geq P_{wf,min}^*$
	$ \bar{q}_{o,k}  \leq \bar{q}_{o,k,max}^*$
	$ \bar{q}_{o,k}  +  \bar{q}_{w,k}  \leq \bar{q}_{t,k}^*$
Injetor	$P_{wf} \leq P_{wf,max}^*$
	$\bar{q}_{w,k} \leq \bar{q}_{w,k,max}^*$

Expandindo o resíduo em série de Taylor, tem-se

$$R_{p,i}^{v+1} = R_{p,i}^v + \sum_{\forall X} \left( \frac{\partial R_{p,i}}{\partial X} \right)^v \Delta X \quad (34)$$

onde  $v$  é o nível iterativo e  $X$  representa as incógnitas ( $P_o, S_w$ ). Assumindo-se que o resíduo na iteração  $v + 1$  é zero, tem-se

$$\sum_{\forall X} \left( \frac{\partial R_{p,i}}{\partial X} \right)^v \Delta X^{v+1} = -R_{p,i}^v ; p=o,w \quad (35)$$

ou,

$$[J]^v \Delta X^{v+1} = -R^v \quad (36)$$

onde

$$R^v = \{[R_{o,1}, R_{w,1}, \dots, R_{o,j}, R_{w,j}, \dots, R_{o,N}, R_{w,N}]^T\}^v \quad (37)$$

$$\Delta X^{v+1} = \{[\Delta P_{o,1}, \Delta S_{w,1}, \dots, \Delta P_{o,j}, \Delta S_{w,j}, \dots, \Delta P_{o,N}, \Delta S_{w,N}]^T\}^{v+1} \quad (38)$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{o,1}}{\partial P_{o,1}} & \frac{\partial R_{o,1}}{\partial S_{w,1}} \\ \frac{\partial R_{w,1}}{\partial P_{o,1}} & \frac{\partial R_{w,1}}{\partial S_{w,1}} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{o,j}}{\partial P_{o,j}} & \frac{\partial R_{o,j}}{\partial S_{w,j}} \\ \frac{\partial R_{w,j}}{\partial P_{o,j}} & \frac{\partial R_{w,j}}{\partial S_{w,j}} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{o,N}}{\partial P_{o,N}} & \frac{\partial R_{o,N}}{\partial S_{w,N}} \\ \frac{\partial R_{w,N}}{\partial P_{o,N}} & \frac{\partial R_{w,N}}{\partial S_{w,N}} \end{bmatrix} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{o,j}}{\partial P_{o,1}} & \frac{\partial R_{o,j}}{\partial S_{w,1}} \\ \frac{\partial R_{w,j}}{\partial P_{o,1}} & \frac{\partial R_{w,j}}{\partial S_{w,1}} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{o,j}}{\partial P_{o,j}} & \frac{\partial R_{o,j}}{\partial S_{w,j}} \\ \frac{\partial R_{w,j}}{\partial P_{o,j}} & \frac{\partial R_{w,j}}{\partial S_{w,j}} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{o,j}}{\partial P_{o,N}} & \frac{\partial R_{o,j}}{\partial S_{w,N}} \\ \frac{\partial R_{w,j}}{\partial P_{o,N}} & \frac{\partial R_{w,j}}{\partial S_{w,N}} \end{bmatrix} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{o,N}}{\partial P_{o,1}} & \frac{\partial R_{o,N}}{\partial S_{w,1}} \\ \frac{\partial R_{w,N}}{\partial P_{o,1}} & \frac{\partial R_{w,N}}{\partial S_{w,1}} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{o,N}}{\partial P_{o,j}} & \frac{\partial R_{o,N}}{\partial S_{w,j}} \\ \frac{\partial R_{w,N}}{\partial P_{o,j}} & \frac{\partial R_{w,N}}{\partial S_{w,j}} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{o,N}}{\partial P_{o,N}} & \frac{\partial R_{o,N}}{\partial S_{w,N}} \\ \frac{\partial R_{w,N}}{\partial P_{o,N}} & \frac{\partial R_{w,N}}{\partial S_{w,N}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (39)$$

onde,  $N$  é o número de volumes, e  $[J]$  a matriz Jacobiana. As incógnitas ( $P_o$ ,  $S_w$ ) são calculadas após cada iteração newtoniana, como

$$X^{v+1} = X^v + \Delta X^{v+1} \quad (40)$$

e a solução é aceita quando todas as tolerâncias são satisfeitas, de acordo com

$$\begin{aligned} \Delta P_{o,\max}^{v+1} &\leq \Delta P_{o,\max}^* \\ \Delta S_{w,\max}^{v+1} &\leq \Delta S_{w,\max}^* \end{aligned} \quad (41)$$

### 3.6 Metodologia IMPES

No método IMPES a avaliação, em um determinado instante de tempo, dos termos de fluxo que carregam a informação da mobilidade do fluido e dos termos de produção ou injeção, é feita baseando-se nas saturações e pressões do instante anterior. Fazendo-se  $\theta = 0$  na Eq. (20) e escrevendo-se a mesma, na forma residual para o componente  $p$ , tem-se

$$R_{p,i} = \sum_{j=1}^{N_v} T_{ij} \left( \frac{K_{rp}}{\mu_p B_p} \right)_{ij}^n (P_{pj}^{n+1} - P_{pi}^{n+1}) + \bar{q}_{p,i}^n - \left( \frac{\phi V S_p}{\Delta t B_p} \right)_i^{n+1} + \left( \frac{\phi V S_p}{\Delta t B_p} \right)_i^n ; p=o,w \quad (42)$$

onde,

$$P_{wj}^{n+1} = P_{oj}^{n+1} - P_{cj}^n (S_w) \quad (43)$$

procedimento similar é aplicado para a pressão da água no ponto  $i$ .

Observando-se a Eq. (42) nota-se que o único termo que depende da saturação no instante futuro,  $n+1$ , é o termo de acumulação. Desta forma, quando da linearização de Newton, em cada linha de blocos do Jacobiano, o único bloco cheio é aquele da diagonal, ver Fig. 10a. Para obter a equação implícita da pressão cada linha de blocos do Jacobiano é multiplicada pelo inverso da diagonal, resultando na linha de bloco da Fig. 10b. Após esta operação a equação da pressão é desacoplada da equação da saturação originando a linha de blocos da Fig. 10c. Este processo é repetido para todas as células. A equação da pressão é obtida tomando-se a primeira linha de cada linha de blocos da Fig. 10c, originando o sistema dado pela Eq. (44).

$$[J]^v \Delta X^{v+1} = -R^{*v} \quad (44)$$

onde,  $R^{*v}$  é o vetor resíduo multiplicado pela inversa da matriz do bloco diagonal de cada

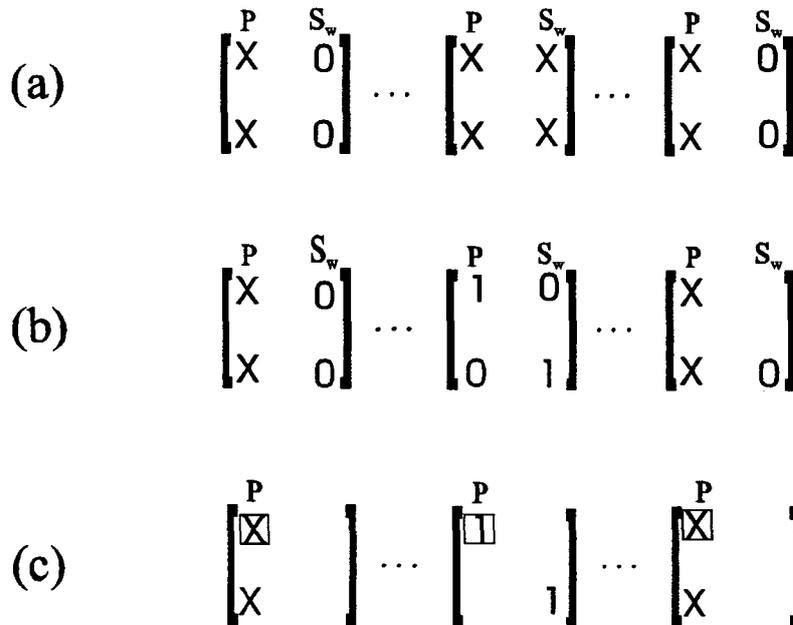
volume de controle. O vetor  $R^{*v}$  é dado pela Eq. (45). Resolvido o sistema dado pela Eq. (44),  $P_o$  é obtido via Eq. (47) e  $S_w$  através da Eq. (48). Na Eq. (48),  $J_{ij}$  representam os coeficientes da segunda linha de  $i$  após a multiplicação pela matriz inversa da diagonal, conforme Fig. 10c.

$$R^{*v} = \{[R_{o,1}^*, \dots, R_{o,j}^*, \dots, R_{o,N}^*]^T\}^v \tag{45}$$

$$\Delta x^{v+1} = \{[\Delta P_{o,1}, \dots, \Delta P_{j,1}, \dots, \Delta P_{N,1}]^T\}^v \tag{46}$$

$$P_o^{v+1} = P_o^v + \Delta X^{v+1} \tag{47}$$

$$S_{w,i} = \sum_{j=1, j \neq i}^{N_v} \Delta X_j^{v+1} J_{ij} + R_{w,i}^{*v} \tag{48}$$



$\square$  - Equação da pressão

Fig. 10 - Sequência de passos para obtenção da equação da pressão para o IMPES

### 3.6.1 Procedimento Iterativo Utilizando o Esquema IMPES

1. Estima-se as condições iniciais  $S_w$ ,  $P_o$  (instante de tempo  $n$ );
2. faz-se,  $S_w^{v+1} = S_w^v$  e  $P_o^{v+1} = P_o^v$ ;
3. monta-se a matriz Jacobiana e função resíduo;
4. multiplica-se cada linha de blocos da matriz Jacobiana pela inversa do bloco diagonal;
5. calcula-se  $P_o$  no instante de tempo  $v + 1$ ;
6. calcula-se  $S_w$  explicitamente via Eq. (48);
7. volta-se ao item 2 e itera-se até obter a convergência;
8. faz-se  $P_o^n = P_o^{n+1}$  e  $S_w^n = S_w^{n+1}$  e volta-se ao item 2 para avançar a solução para um novo instante de tempo.

Observe-se que o item 6 poderia ser realizado após a convergência da pressão, isto é, quando as variações de pressão fossem pequenas. Teoricamente, este seria o "verdadeiro" IMPES. A metodologia IMPES foi implementada desta forma neste trabalho, para que o ciclo iterativo do IMPES fosse idêntico ao ciclo iterativo do AIM, que será discutido na próxima seção. Entretanto, o "verdadeiro" IMPES também foi implementado e os resultados obtidos com o mesmo foram idênticos aos obtidos com o ciclo apresentado nesta seção. Com relação à implementação da metodologia IMPES, deve-se frisar que esta forma é mais estável numericamente que a forma implementada nos trabalhos de Mota (1993), Maliska e Mota (1994), Maliska *et al.* (1994) e Cunha *et al.* (1994). Este fato ocorre devido ao acréscimo da contribuição do termo de acumulação no termo diagonal de cada linha de blocos. No método IMPES implementado por Mota (1993), Mota e Maliska (1994), Maliska *et al.* (1994) e Cunha *et al.* (1994) as equações de conservação do óleo e água são manipuladas juntamente com a restrição de volume no sentido de obter a equação da pressão. Este fato origina um sistema linear para a pressão que é semi-definido, se os fluidos presentes são incompressíveis. Ou seja, se  $\Delta X$  é solução da Eq. (44) então  $\Delta X + C$ , sendo  $C$  uma constante qualquer, também deve satisfazer a mesma.

### 3.7 Metodologia Implícita Adaptativa

A metodologia IMPES requer menor esforço computacional por intervalo de tempo que a metodologia TI. Entretanto, exige pequenos intervalos de tempo por motivo de instabilidades. Este efeito geralmente é localizado em algumas áreas do reservatório onde as velocidades são elevadas, ou os gradientes de saturação são elevados, ou em regiões onde ocorre um refino local da malha. Por outro lado, a metodologia TI permite trabalhar com maiores intervalos de tempo, uma vez que não sofre as limitações de instabilidade numérica do IMPES. O objetivo do AIM é tratar estas regiões onde o IMPES tem problemas de instabilidades utilizando o TI e o restante do reservatório utilizando o IMPES. Num dado intervalo de tempo a pressão irá ser calculada implicitamente em todo o reservatório e a saturação irá ser calculada implicitamente somente em algumas regiões do reservatório e explicitamente no restante. Esta divisão de regiões implícitas e explícitas pode variar a cada iteração de Newton e a cada intervalo de tempo.

Avaliando-se os termos de produção/injeção implicitamente e considerando que as mobilidades das fases podem ser implícitas ou explícitas pode-se escrever a Eq. (20) na forma residual como,

$$R_{p,i} = \sum_{j=1}^{N_v} T_{ij} \left( \frac{K_{rp}}{\mu_p B_p} \right)_{ij}^{n+\theta} (P_{pj}^{n+1} - P_{pi}^{n+1}) + \bar{q}_{p,i}^{n+1} - \left( \frac{\phi V S_p}{\Delta t B_p} \right)_i^{n+1} + \left( \frac{\phi V S_p}{\Delta t B_p} \right)_i^n ; p=o,w \quad (49)$$

Aplicando-se o mesmo processo que foi realizado para a obtenção da matriz Jacobiana do IMPES, a Eq. (49), tem-se

$$[J]^v \Delta X^{v+1} = -R^{*v} \quad (50)$$

com  $R^{*v}$  e  $\Delta X^{v+1}$  idênticos às Eqs. (45) e (46), respectivamente.

Para uma melhor visualização da metodologia AIM considere-se a malha apresentada na Fig. 11. A matriz Jacobiana para o exemplo apresentado nesta figura, sem considerar a

presença poços, é apresentada na Fig. 12. Cada x na matriz da Fig. 12 pode representar

$$\frac{\partial R_o}{\partial P_o}, \frac{\partial R_o}{\partial S_w}, \frac{\partial R_w}{\partial P_o} \text{ ou } \frac{\partial R_w}{\partial S_w}$$

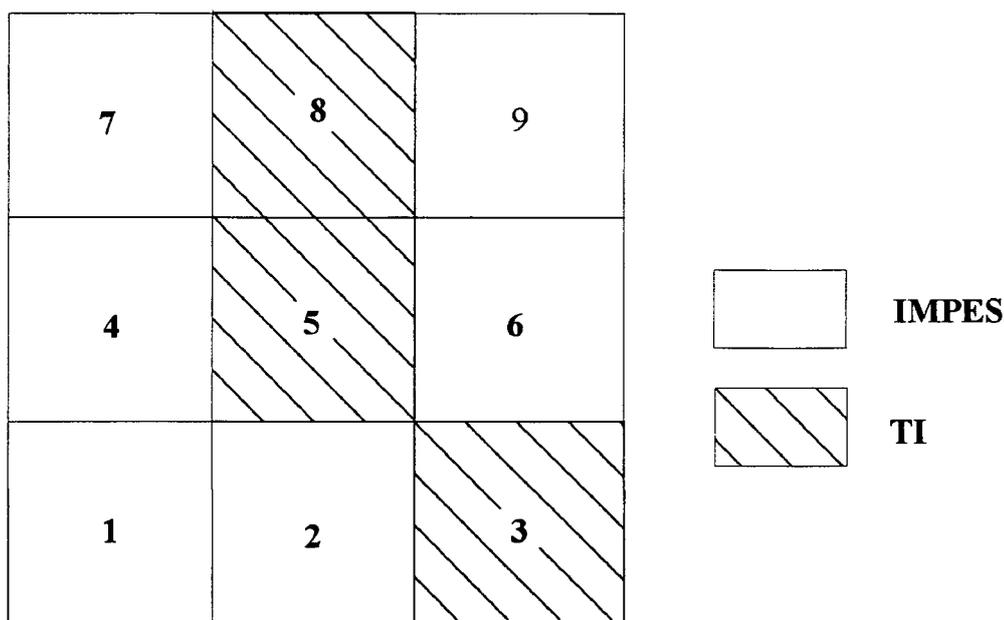


Fig. 11 - Exemplo bidimensional utilizando AIM para um escoamento bifásico

		1	2	3	4	5	6	7	8	9
		Po Sw								
1	Ro	X	X	X		X				
	Rw	X	X	X		X				
2	Ro	X	X	X	X		X	X		
	Rw	X	X	X	X		X	X		
3	Ro		X	X	X			X		
	Rw		X	X	X			X		
4	Ro	X			X	X	X	X		X
	Rw	X			X	X	X	X		X
5	Ro		X		X	X	X		X	X
	Rw		X		X	X	X		X	X
6	Ro			X	X	X	X			X
	Rw			X	X	X	X			X
7	Ro				X			X	X	X
	Rw				X			X	X	X
8	Ro					X	X	X	X	X
	Rw					X	X	X	X	X
9	Ro						X		X	X
	Rw						X		X	X

Fig. 12 -Matriz Jacobiana para o exemplo da Fig. 11

No caso de uma célula IMPES, as derivadas em relação a saturação aparecem somente no bloco diagonal. Suponha, por exemplo, que o volume  $i$  é IMPES e é vizinho do volume  $k$ , que é TI. As equações para a célula  $i$  contém derivadas com relação a  $S_{w,i}^{n+1}$  somente na submatriz diagonal do Jacobiano. Estas equações contém derivadas nas submatrizes fora da diagonal principal com relação a  $S_{w,k}^{n+1}$ , visto que a célula  $k$  é TI. Para as equações da célula  $k$  não existe nenhuma derivada com relação a  $S_{w,i}^{n+1}$ , uma vez que a célula  $i$  é IMPES. Existem, por sua vez, derivadas em relação a  $S_{w,k}^{n+1}$  oriundas dos termos de fluxo e dos termos de acumulação. Conforme sugerido por Forsyth e Sammon (1986), cada linha da matriz Jacobiana é multiplicada pela inversa da submatriz diagonal. Para volumes IMPES esta operação elimina a saturação da célula do sistema de equações. Se a célula  $i$  é IMPES após a multiplicação pela inversa da submatriz diagonal as únicas entradas não-nulas nas colunas correspondendo para  $S_{w,i}^{n+1}$  aparecem na submatriz diagonal da célula  $i$ . Isto significa que a equação contendo dependência de  $S_{w,i}^{n+1}$  pode ser retirada da matriz Jacobiana, uma vez que nenhuma outra equação tem dependência sobre as derivadas de  $S_{w,i}^{n+1}$ . Após a resolução do sistema para as outras variáveis,  $S_{w,i}^{n+1}$  pode ser calculada por retrossubstituição. Aplicando este esquema para a matriz Jacobiana da Fig. 12 resulta na matriz Jacobiana apresentada na Fig. 13.

$$[J] =$$

		1	2	3	4	5	6	7	8	9
		P		P S	P	P S	P	P	P S	P
1	{ <sub>Ro</sub>	1	X		X					
2	{ <sub>Ro</sub>	X	1	X X		X X				
3	{ <sub>Ro</sub> { <sub>Rw</sub>		X	1 0			X			
			X	0 1			X			
4	{ <sub>Ro</sub>	X			1	X X		X		
5	{ <sub>Ro</sub> { <sub>Rw</sub>		X		X	1 0	X		X X	
			X		X	0 1	X		X X	
6	{ <sub>Ro</sub>			X X		X X	1			X
7	{ <sub>Ro</sub>				X			1	X X	
8	{ <sub>Ro</sub> { <sub>Rw</sub>					X X		X	1 0	X
						X X		X	0 1	X
9	{ <sub>Ro</sub>					X	X		X X	1

Fig. 13 - Matriz Jacobiana para o exemplo da Fig. 11 para o método AIM

onde,

$$R^{*v} = \{[R_{o,1}^*, R_{o,2}^*, R_{o,3}^*, R_{w,3}^*, R_{o,4}^*, R_{o,5}^*, R_{w,5}^*, R_{o,6}^*, R_{o,7}^*, R_{o,8}^*, R_{w,8}^*, R_{o,9}^*]^T\}^v \quad (51)$$

$$\Delta X = \{[\Delta P_{o,1}, \Delta P_{o,2}, \Delta P_{o,3}, \Delta S_{w,3}, \Delta P_{o,4}, \Delta P_{o,5}, \Delta S_{w,5}, \Delta P_{o,6}, \Delta P_{o,7}, \Delta P_{o,8}, \Delta S_{w,8}, \Delta P_{o,9}]^T\} \quad (52)$$

Os esquemas IMPES, TI ou combinação de ambos (AIM) são de primeira ordem no tempo, ou seja, são compatíveis entre si e com o esquema de discretização espacial (UDS) empregado na avaliação das permeabilidades relativas nas faces de cada volume de controle.

### 3.7.1 Critério de Mudança de um Volume de IMPES para TI e Vice-Versa

Quando se utiliza a metodologia AIM, uma questão chave é o critério para a escolha se um determinado volume é IMPES ou TI. Forsyth e Sammon (1986) propuseram que o volume contendo o poço e seus vizinhos fossem tratados implicitamente (TI) e o restante do reservatório via IMPES. O critério para trocar uma célula de IMPES para TI é baseado na mudança na pressão de saturação ou saturação do instante anterior. Cada vez que ocorrer uma mudança na saturação ou pressão de saturação maior que o valor previamente estabelecido, o volume passa de IMPES para TI. Evidentemente, este processo só permite que células passem de IMPES para TI e no final da execução quase todas as células serão TI.

O critério que será adotado neste trabalho é o critério de estabilidade local da matriz Jacobiana proposta por Fung *et al.* (1989). A seguir delinear-se-á este procedimento.

Se  $R_i^{n+1}$  e  $X_i^{n+1}$  denotam o resíduo das equações de conservação e variáveis primárias ( $P_o^{n+1}$  e  $S_w^{n+1}$ ), respectivamente, a iteração de Newton pode ser escrita na notação indicial, como

$$X_i^{n+1,v+1} = X_i^{n+1,v} - \left( \frac{\partial R_i^{n+1,v}}{\partial X_j^{n+1,v}} \right)^{-1} R_i^{n+1,v} ; i=1,\dots,N_q \text{ e } j=1,\dots,N_q \quad (53)$$

onde  $N_q$  é o número de espécies químicas ou componentes. Na Eq. (53),  $X_i^{n+1,v+1}$  é a  $(v+1)$ -ésima iteração de  $X_i$  no tempo  $(n+1)$ , e  $R_j^{n+1,v}$  é a  $v$ -ésima iteração da equação  $j$ .  $X_i^{n+1,v+1}$  convergirá quando a norma infinita de  $X$  for pequena, ou seja,  $\|X_i^{n+1,v+1} - X_i^{n+1,v}\|_\infty \leq \epsilon$ . Escrevendo  $dR_j^{n+1,v}$ , como

$$dR_j^{n+1,v+1} = \left( \frac{\partial R_j^{n+1,v+1}}{\partial X_i^{n,m}} \right) dX_i^{n,m} + \left( \frac{\partial R_j^{n+1,v+1}}{\partial X_i^{n+1,v+1}} \right) dX_i^{n+1,v+1} \approx 0 \quad (54)$$

onde o índice  $m$  refere-se à última iteração do instante de tempo  $n$ .

Se os erros no instante  $n$  e  $n+1$  são  $\epsilon_i^n$  e  $\epsilon_i^{n+1}$ , respectivamente, pode-se escrever a Eq. (54) como,

$$\left( \frac{\partial R_j^{n+1,v+1}}{\partial X_i^{n+1,v+1}} \right) \epsilon_i^{n+1} = \left( \frac{\partial R_j^{n+1,v+1}}{\partial X_i^{n,m}} \right) \epsilon_i^n; \quad i=1,\dots,N_q \text{ e } j=1,\dots,N_q \quad (55)$$

onde os sinais de  $\epsilon$  não foram considerados, porque se está interessado nas normas de  $\epsilon$ . Fazendo-se,

$$T = \left( \frac{\partial R_j^{n+1,v+1}}{\partial X_i^{n+1,v+1}} \right)^{-1} \left( \frac{\partial R_j^{n+1,v+1}}{\partial X_i^{n,m}} \right) \quad (56)$$

pode-se escrever a Eq. (55), como

$$\epsilon_i^{n+1} = T \epsilon_i^n \quad (57)$$

onde  $T$  é a matriz transformação. Segundo Fung *et al.* (1989), a condição de estabilidade do intervalo de tempo ( $\Delta t$ ) é,

$$\|\epsilon_i^{n+1}\| \leq \|\epsilon_i^n\| \quad (58)$$

a qual garante que os erros introduzidos em um intervalo de tempo não serão amplificados nos intervalos seguintes. Esta condição é satisfeita se  $T$  é normal<sup>2</sup>, requerendo que,

---

<sup>2</sup>Uma matriz normal ( $J$ ) comuta com sua transposta ( $J^T$ ), isto é,  $JJ^T = J^TJ$ .

$$\rho(T) = \max \|\alpha_i(T)\| \leq 1; \quad 1 \leq i \leq N_q \quad (59)$$

onde  $\rho$  é o raio espectral e  $\alpha_i$  os autovalores de  $T$ . A análise anterior proposta por Fung *et al.* (1989) determina se o sistema como um todo é estável. Entretanto, o objetivo é determinar quais células são instáveis com o  $\Delta t$  escolhido. Fung *et al.* (1989) sugerem que a Eq. (57) seja escrita para cada célula e seja calculado o máximo autovalor de  $C$ , onde  $C$  é dado por,

$$C = \left( \frac{\partial R_j^{n+1,v+1}}{\partial X_i^{n+1,v+1}} \right)^{-1} \left( \frac{\partial R_j^{n+1,v+1}}{\partial X_i^{n,m}} \right) \quad (60)$$

Fung *et al.* (1989) argumentaram que se deve excluir de  $R_i$  os termos de acumulação no instante  $n$  para que este critério funcione adequadamente. A seguir apresenta-se uma expressão para o cálculo de máximo autovalor de cada célula. Representar-se-á por  $R_i^*$  a função resíduo excluída do termo de acumulação no instante  $n$ .

Avaliando-se os termos de fluxo no instante  $n$  e desprezando-se o termo de acumulação no instante  $n$ , pode-se escrever a equação residual para as fases óleo e água como,

$$R_{o,i}^* = \sum_{j=1}^{N_v} T_{ij} \lambda_{o,ij}^n (P_{o,j}^{n+1} - P_{o,i}^{n+1}) - \left( \frac{\phi V (1 - S_w)}{\Delta t B_o} \right)_i^{n+1} \quad (61)$$

$$R_{w,i}^* = \sum_{j=1}^{N_v} T_{ij} \lambda_{w,ij}^n (P_{w,j}^{n+1} - P_{w,i}^{n+1}) - \left( \frac{\phi V S_w}{\Delta t B_w} \right)_i^{n+1} \quad (62)$$

Usando a Eq. (57) do ponto de vista local, tem-se

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{o,i}^*}{\partial P_{o,i}^{n+1}} & \frac{\partial R_{o,i}^n}{\partial S_{w,i}^{n+1}} \\ \frac{\partial R_{w,i}^*}{\partial P_{o,i}^{n+1}} & \frac{\partial R_{w,i}^n}{\partial S_{w,i}^{n+1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E} p_i^{n+1} \\ \mathcal{E} S_{w,i}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{o,i}^*}{\partial P_{o,i}^n} & \frac{\partial R_{o,i}^n}{\partial S_{w,i}^n} \\ \frac{\partial R_{w,i}^*}{\partial P_{o,i}^n} & \frac{\partial R_{w,i}^n}{\partial S_{w,i}^n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E} p_i^n \\ \mathcal{E} S_{w,i}^n \end{bmatrix} \quad (63)$$

Para o cálculo das derivadas admitiu-se que o escoamento é incompressível. Isto de certa forma facilita o cálculo dos autovalores. Numa etapa posterior desprezou-se esta hipótese e o comportamento do método foi idêntico. Portanto, para todos os resultados que serão expostos no Cap. 6 empregando-se a análise de estabilidade, foram obtidos considerando-se que os fluidos presentes no reservatório são incompressíveis. Levando-se em consideração a hipótese do escoamento incompressível, tem-se

$$\frac{\partial R_{o,i}^*}{\partial P_{o,i}^{n+1}} = -\sum_{j=1}^{N_v} T_{ij} \left( \frac{K_{ro}}{\mu_o B_o} \right)^n \quad (64)$$

$$\frac{\partial R_{w,i}^*}{\partial P_{o,i}^{n+1}} = -\sum_{j=1}^{N_v} T_{ij} \left( \frac{K_{rw}}{\mu_w B_w} \right)^n \quad (65)$$

$$\frac{\partial R_{o,i}^*}{\partial R_{o,i}^n} = \frac{\partial R_{w,i}^*}{\partial P_{o,i}^n} = 0 \quad (66)$$

$$\frac{\partial R_{o,i}^*}{\partial S_{w,i}^{n+1}} = \frac{\phi V_i}{\Delta t B_o^{n+1}} \quad (67)$$

$$\frac{\partial R_{w,i}^*}{\partial S_{w,i}^{n+1}} = -\frac{\phi V_i}{\Delta t B_w^{n+1}} \quad (68)$$

$$\frac{\partial R_{o,i}^*}{\partial S_{w,i}^{n+1}} = -\sum_{j=1}^{N_v} T_{ij} \left( \frac{1}{\mu_o B_o} \right)^n \left( \frac{\partial K_{ro}}{\partial S_w^n} \right) (P_{o,j}^{n+1} - P_{o,i}^{n+1}) \quad (69)$$

$$\frac{\partial R_{w,i}^*}{\partial S_{w,i}^n} = -\sum_{j=1}^{N_v} T_{ij} \left( \frac{1}{\mu_w B_w} \right)^n \left( \frac{\partial K_{rw}}{\partial S_w^n} \right) (P_{o,j}^{n+1} - P_{o,i}^{n+1} + P_c^n(S_{w,i}) - P_c^n(S_{w,j})) \quad (70)$$

Com algum algebrismo pode-se mostrar que a matriz de transformação local  $C$  pode ser dada por

$$C = \frac{1}{\text{Det}} \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial R_{w,i}^*}{\partial S_{w,i}^{n+1}} \frac{\partial R_{o,i}^*}{\partial P_{o,i}^n} - \frac{\partial R_{o,i}^*}{\partial S_{w,i}^{n+1}} \frac{\partial R_{w,i}^*}{\partial P_{o,i}^n} \right) & \left( \frac{\partial R_{w,i}^*}{\partial S_{w,i}^{n+1}} \frac{\partial R_{o,i}^*}{\partial S_{w,i}^n} - \frac{\partial R_{o,i}^*}{\partial S_{w,i}^{n+1}} \frac{\partial R_{w,i}^*}{\partial S_{w,i}^n} \right) \\ \left( \frac{\partial R_{o,i}^*}{\partial P_{o,i}^{n+1}} \frac{\partial R_{w,i}^*}{\partial P_{o,i}^n} - \frac{\partial R_{w,i}^*}{\partial P_{o,i}^{n+1}} \frac{\partial R_{o,i}^*}{\partial P_{o,i}^n} \right) & \left( \frac{\partial R_{o,i}^*}{\partial P_{o,i}^{n+1}} \frac{\partial R_{w,i}^*}{\partial S_{w,i}^n} - \frac{\partial R_{w,i}^*}{\partial P_{o,i}^{n+1}} \frac{\partial R_{o,i}^*}{\partial S_{w,i}^n} \right) \end{bmatrix} = \frac{1}{\text{Det}} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \quad (71)$$

onde,

$$\text{Det} = \left( \frac{\partial R_{o,i}^*}{\partial P_{o,i}^{n+1}} \frac{\partial R_{w,i}^*}{\partial S_{w,i}^{n+1}} - \frac{\partial R_{o,i}^*}{\partial S_{w,i}^{n+1}} \frac{\partial R_{w,i}^*}{\partial P_{o,i}^{n+1}} \right) \quad (72)$$

Os autovalores da Eq. (71) satisfazem a equação quadrática,

$$\alpha^2 - \Omega \alpha + \gamma = 0 \quad (73)$$

onde,

$$\Omega = (C_{11} + C_{22})/Det \quad e \quad \gamma = (C_{11}C_{22} - C_{21}C_{12})/Det^2 \quad (74)$$

Substituindo-se a Eq. (66) na Eq. (74), e o resultado na Eq. (73), tem-se os dois autovalores,

$$\alpha_1 = 0 \quad e \quad \alpha_2 = C_{22}/Det \quad (75)$$

Desta forma, para estabilidade é necessário que  $\|\alpha_2\| \leq 1$ . No caso de se relaxar a hipótese de incompressibilidade dos fluidos presentes no reservatório, deverão existir dois autovalores reais.

Apresenta-se agora a relação do cálculo da estabilidade com o CFL, conforme apresentado por Russel (1989). Considere-se o escoamento bifásico (óleo-água), unidimensional, incompressível e sem a inclusão do efeito da pressão capilar e gravitacional. A equação governante que descreve a frente de saturação da água é conhecida como equação de Buckley-Leverett (Allen *et al.*, 1988) e é dada por,

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\vec{V}_t}{\phi} \frac{\partial f_w^*}{\partial x} = 0 \quad (76)$$

onde  $\vec{V}_t$  é a velocidade total (óleo + água) e  $f_w^*$  é o fluxo fracionário da água sem a pressão capilar e é a razão entre a mobilidade da água e a mobilidade do óleo e da água, sendo portanto, uma função da saturação da água. Maiores detalhes serão fornecidos no Cap. 5.

Assumindo-se que  $f_w^*$  e  $S_w$  são funções diferenciáveis pode-se escrever a Eq. (76)

como,

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} + v \frac{\partial S_w}{\partial x} = 0 \quad (77)$$

onde

$$v = \frac{\vec{V}_t \frac{\partial f_w^*}{\partial S_w}}{\phi} \quad (78)$$

é uma velocidade positiva e constante.

Para resolver a Eq. (77) suponha ainda a seguinte condição inicial e de contorno,

$$\begin{aligned} S_w(x,0) &= 0 & 0 < x < 1; \\ S_w(0,t) &= 1 & t > 0; \end{aligned} \quad (79)$$

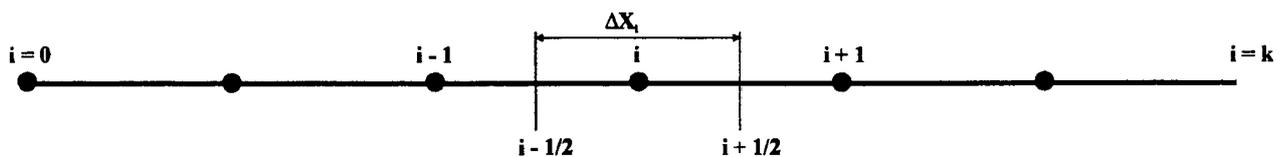


Fig. 14 - Discretização da equação de Buckley-Leverett

Discretizando a Eq. (77) no espaço (Fig. 14) e no tempo e empregando-se um esquema explícito tem-se,

$$\frac{(S_{w,i}^{n+1} - S_{w,i}^n)\Delta X_i}{\Delta t} + vS_{w,i|/2} - vS_{w,i-1/2} = 0 \quad (80)$$

Assumindo o esquema UDS para avaliação das saturações nas faces e com  $v$  positivo tem-se,

$$S_{w,i}^{n+1} - S_{w,i}^n + c_i S_{w,i}^n - S_{w,i-1}^n = 0; \quad 1 \leq i \leq k \quad (81)$$

onde  $c_i$  é o CFL do volume  $i$  e é dado por

$$c_i = \frac{v\Delta X_i}{\Delta t} \quad (82)$$

Reescrevendo a Eq. (81) na forma de resíduo tem-se,

$$R_i^{n+1} = S_{w,i}^{n+1} - (1-c_i)S_{w,i}^n - c_i S_{w,i-1}^n \quad 1 \leq i \leq k \quad (83)$$

com  $S_{w,0}^n = 1$  quando  $i=1$ .

Pode-se mostrar que o esquema explícito dado pela Eq. (83) é estável para  $c_i \leq 1$ , (Peaceman, 1977; Russel, 1989). As derivadas da Eq. (60) são dadas por,

$$\frac{\partial R_j^{n+1,v+1}}{\partial S_{w,i}^{n+1,v+1}} = I, \quad \frac{\partial R_j^{n+1,v+1}}{\partial S_{w,i}^{n+1,m}} = \begin{bmatrix} 1-c_1 & & & \\ c_2 & 1-c_2 & & \\ & \dots & \dots & \\ & c_k & 1-c_k & \end{bmatrix} \quad (84)$$

Desta forma,

$$C = \left( \frac{\partial R_i^{n+1,v+1}}{\partial S_{w,j}^{n+1,v+1}} \right)^{-1} \left( \frac{\partial R_i^{n+1,v+1}}{\partial S_{w,i}^{n+1,m}} \right) = \frac{\partial R_i^{n+1,v+1}}{\partial S_{w,i}^{n+1,m}} \quad (85)$$

Uma vez que a matriz  $C$  é uma matriz triangular inferior os autovalores são os elementos da diagonal. Neste caso o critério de estabilidade é satisfeito para  $0 \leq c_i \leq 2$ . Entretanto, esta não é a condição aplicada uma vez que no trabalho de Fung *et al.* (1989) é sugerido que os termos no instante  $n$  sejam suprimidos do cálculo da estabilidade. Fazendo-se isto, remove-se os 1's da diagonal de  $C$  e os autovalores são dados por  $c_i$  e o critério exige que  $c_i \leq 1$ . Observe-se que este também é o critério empregado via análise do CFL.

### 3.8 - Escolha do Passo de Tempo

Conforme Aziz e Settari (1979) a escolha do passo de tempo ( $\Delta t$ ) deve assegurar estabilidade da solução e erros de truncamento aceitáveis e conforme estes autores estes requerimentos podem ser relacionados ao menos qualitativamente para as taxas de troca nas saturações e pressões no reservatório. Mudanças bruscas nas saturações e pressões indicam que menores passos de tempo devem ser empregados.

O algoritmo para controle do passo de tempo conforme apresentado por Aziz e Settari (1979) é dado por:

a) Calcular

$$DPMAX^n = \max_i \{ |\Delta P_{o,max}^n| \}$$

$$DSMAX^n = \max_i \{ |\Delta S_{w,max}^n| \}$$

b) Calcular  $\Delta t^{n+1}$  como

$$\Delta t^{n+1} = \min\{\Delta t_s, \Delta t_p\}$$

onde

$$\Delta t_s = \Delta t^n DSLIM / DSMAX^n ; \quad \Delta t_p = \Delta t^n DPLIM / DPMAX^n$$

**DSLIM** e **DPLIM** são parâmetros de iteração a serem definidos pelo usuário. O algoritmo irá manter as variações de pressão e saturações próximas para **DPLIM** e **DSLIM**. Por causa das não-linearidades envolvidas os valores de **DPLIM** e **DSLIM** podem ser consideravelmente excedidos. Isto pode ser prevenido adicionando o seguinte passo:

c) após a solução no instante de tempo (**n+1**) ser completada, calcule **DSMAX<sup>n+1</sup>** e **DPMAX<sup>n+1</sup>**. A solução é aceita se,

$$\mathbf{DSMAX}^{n+1} \leq c_1 \mathbf{DSLIM} \quad \text{e} \quad \mathbf{DPMAX}^{n+1} \leq c_2 \mathbf{DPLIM}$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes e maiores que 1. No presente trabalho  $c_1 = c_2 = 1,1$ . Caso contrário, calcule  $\Delta t^*$  como,

$$\Delta t^* = \min\{\Delta t_s, \Delta t_p\}$$

onde

$$\Delta t_s = \Delta t^{n+1} \mathbf{DSLIM} / \mathbf{DSMAX}^{n+1} ; \quad \Delta t_p = \Delta t^{n+1} \mathbf{DPLIM} / \mathbf{DPMAX}^{n+1}$$

#### 4.1 Introdução

Neste capítulo serão discutidos alguns aspectos relevantes da solução dos sistemas lineares. A saber, o condicionamento e a ordenações das incógnitas. Também serão apresentados os algoritmos dos três métodos não-estacionários (GMRES, Bi-CGSTAB e ORTHOMIN) que foram empregados na solução dos sistemas lineares deste trabalho.

#### 4.2 Precondicionamento

De acordo ao que foi exposto no Cap. 3, o processo final da solução dos problemas descritos é a solução dos sistemas lineares. Para maior clareza, considere o sistema linear,

$$Jx = R \quad (86)$$

onde  $J$  é a matriz Jacobiana,  $x$  é o vetor solução e  $R$  é a função resíduo. Observe-se que  $\Delta X$ , na Eq. (36) e similares foi substituído por  $x$  na Eq. (86), por simplicidade. Os métodos iterativos não-estacionários, em geral, utilizados para solução deste tipo de sistema apresentam taxa de convergência lenta. Com o objetivo de melhorar a taxa de convergência destes métodos, resolve-se o sistema equivalente,

$$M_1^{-1} J x = M_1^{-1} R \quad (87)$$

onde,  $M_1$  é denominada matriz de condicionamento e deve ser ao mesmo tempo, uma boa aproximação do Jacobiano e sua fatoração fácil de ser obtida. Observe-se que  $M_1$  deve oscilar entre a matriz identidade e a matriz Jacobiana  $J$ . Se a matriz de condicionamento for uma boa aproximação de  $J$  o raio espectral de  $(M_1^{-1}J)$  é menor que o de  $J$ , e isso acelera a taxa de convergência do método iterativo.

O novo sistema, dado pela Eq. (87), é considerado preconditionado a esquerda. Existem outras duas formas possíveis de se aplicar o preconditionador: à direita ou à esquerda e direita. Nos resultados que serão apresentados no Cap. 7 foi utilizado o preconditionamento à direita. Foram realizados alguns testes com o sistema dado pela Eq. (87), mas estes foram sempre inferiores à aqueles obtidos com o preconditionamento à direita. Para o preconditionamento à direita pode-se escrever a Eq. (86), como

$$JM_1^{-1}z = R \quad e \quad x = M_1^{-1}z \quad (88)$$

Neste caso, o resíduo correspondente do sistema preconditionado é idêntico ao resíduo original,

$$r_k = R - JM_1^{-1}z_k = R - Jx_k \quad (89)$$

Existem diversas possibilidades de se obter  $M_1$ . Por exemplo, se a matriz  $J$  apresenta uma estrutura regular, uma partição de  $J$  pode ser uma boa escolha para  $M_1$ . Entretanto, se  $J$  resulta de uma discretização utilizando malhas não-estruturadas a estrutura de  $J$ , além de ser esparsa, pode não ter uma estrutura regular e a escolha de  $M_1$  como sendo uma partição de  $J$  pode não ser adequada, Marcondes *et al.* (1995c). Preconditionadores baseados na estrutura global da matriz Jacobiana contém mais informações e, geralmente, fornecem resultados satisfatórios para malha estruturadas e não-estruturadas. Se o preconditionador é baseado na estrutura de  $J$ , a matriz  $M_1$  pode ter o mesmo padrão de esparsidade de  $J$  ou pode ter elementos adicionais que não pertençam a estrutura de  $J$ . Caso seja permitido a criação de elementos que não pertençam a estrutura original de  $J$  é necessário que primeiramente uma fatoração simbólica seja realizada, Simon (1988).

Na fatoração simbólica não é realizado nenhum cálculo, apenas é localizada a posição dos novos elementos, do ponto de vista de nível. Para cada posição ( $J_{ij}$ ) na matriz está associado um nível  $l(J_{ij})$ . Inicialmente,

$$l(J_{ij}) = \begin{cases} 0 & \text{se } J_{ij} \neq 0 \\ \infty & \text{se } J_{ij} = 0 \end{cases} \quad (90)$$

no  $m$ -ésimo passo da eliminação gaussiana, define-se

$$l(J_{ij}) = \min[l(J_{ij}), l(J_{im}) + l(J_{mj}) + 1] \quad (91)$$

Por definição todos os elementos nas matrizes  $L$  e  $U$  têm nível 0 (zero). Caso não seja permitido que elementos adicionais sejam criados, obtêm-se uma fatoração de ordem zero, denominada por ILU(0). Se uma fatoração de nível 1 (um) é realizada, somente os elementos com nível menor ou igual a um são aceitos com os elementos de nível mais alto rejeitados, isto é, não são incluídos nos fatores  $L$  e  $U$ . A Fig. 15 apresenta os elementos criados nos fatores  $L$  e  $U$  para uma ILU(1). Quanto maior o nível da ILU, menor o custo por iteração do método iterativo. Por outro lado, a memória e o trabalho na realização da fatoração aumentam, o que pode comprometer o desempenho do método iterativo. Usualmente níveis 0, 1 e 2 são os mais recomendados pois não comprometem o custo da iteração individual do algoritmo.

Este tipo de fatoração incompleta é denominado *point-wise*, (Meijerink e van der Vorst, 1981; Forsyth e Sammon, 1985; Simon, 1988; Marcondes *et al.*, 1995c), e é diferente dos preconditionadores de blocos (Axelsson, 1985; Concus *et al.*, 1985; Eisenstat *et al.*, 1988; Aarden e Karlsson, 1989). No segundo caso, particiona-se a matriz Jacobiana por blocos da forma  $J = D_1 + L_1 + U_1$ , onde  $D_1$  é o bloco diagonal,  $L_1$  é o bloco triangular inferior e  $U_1$  o bloco triangular superior. Cada posição no bloco pode ser um elemento ou uma submatriz de dimensão igual ao número de equações acopladas por células. Os preconditionadores *point-wise* têm sido preteridos por alguns autores porque têm mais relações recursivas do que os de blocos, sendo portanto, menos paralelizáveis e vetorizáveis. Entretanto, a maioria dos trabalhos que utilizam este tipo de preconditionadores empregam malhas estruturadas. Não é claro, entretanto, a eficiência deste tipos de métodos na solução de sistemas lineares oriundos de malhas não-estruturadas, devido a conectividade variada. Além do mais, os computadores que serão utilizados para a implementação do código computacional são seriais, de forma que não é objetivo, neste

instante, a paralelização e vetorização do código em desenvolvimento. Pelos motivos anteriormente expostos resolveu-se adotar no presente trabalho o preconditionador tipo *point-wise*.

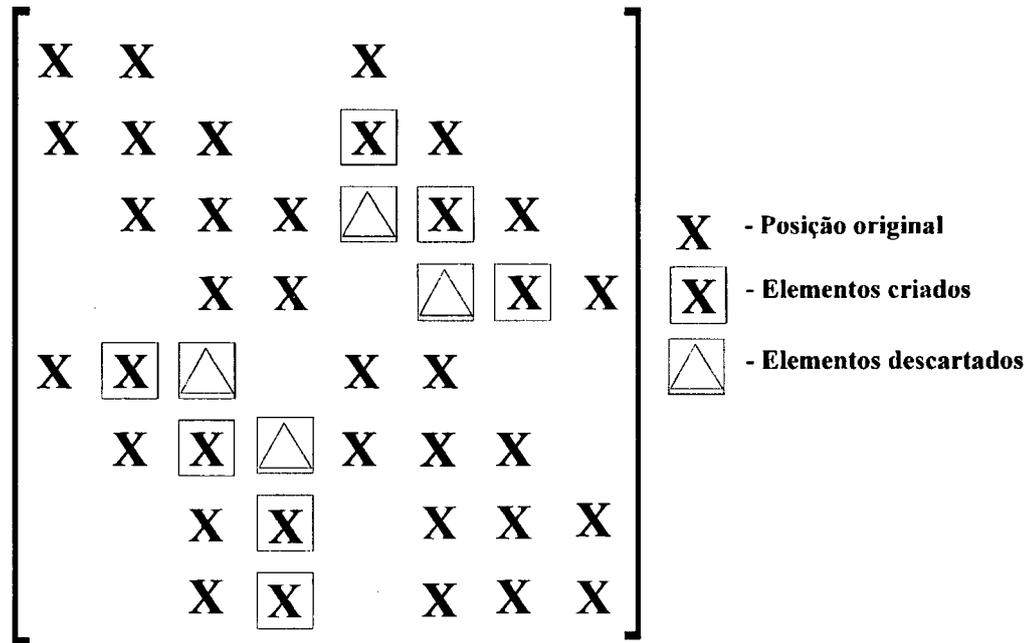


Fig. 15 - Fatoração incompleta de nível 1 - ILU(1)

#### 4.3 Ordenação das Incógnitas

No presente trabalho foram empregados dois tipos de ordenações: uma geométrica (natural, vertical e horizontal) e outra baseada na fatoração incompleta da matriz Jacobiana (MDF - *Minimum Discarded Fill*).

A ordenação natural é a ordenação oriunda do gerador da malha. Para malhas híbridas, a malha básica é hexagonal ou cartesiana, com os volumes podendo ser distorcidos ou irregulares. Após a construção desta, escolhe-se o local onde se deseja a malha polar, por exemplo, em torno de um poço vertical. Os pontos pertencentes à malha básica contidos na região polar são eliminados e os pontos remanescentes reenumerados. Os novos pontos colocados dentro

da janela polar são numerados a partir do último nó da malha básica. Por simplicidade apresenta-se na Fig. 16, para uma malha cartesiana, um exemplo onde foram retirados 16 pontos na região central da malha em um janela retangular. Os novos pontos a serem incluídos nesta janela serão numerados a partir do ponto 85. Note que isto torna a matriz originalmente estruturada (Fig. 16a) numa matriz com uma estrutura bastante complexa. Observe-se também que o termo natural não tem nenhuma conexão com a ordenação natural utilizados em malhas cartesianas.

91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

(a)

75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	
65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	
55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	
49	50	51					52	53	54	
43	44	45					46	47	48	
37	38	39					40	41	42	
31	32	33					34	35	36	
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

(b)

Fig. 16 - Esquema de ordenação do gerador

A ordenação vertical ou horizontal, proposta por Palagi (1992), é realizada de forma semelhante à ordenação natural empregada em malhas cartesianas. Para o caso da ordenação horizontal, considere-se a malha da Fig. 17. Localiza-se o ponto gerador com menor valor de  $y$ , e passa-se uma linha horizontal com altura igual a  $y$  mínimo. Todos os pontos geradores que estiverem sobre esta linha serão renumerados. A seguir localiza-se, entre os pontos não renumerados, o próximo ponto com menor valor de  $y$  e repete-se o processo para os pontos remanescentes. A Fig. 18 apresenta a estrutura da matriz Jacobiana para a ordenação horizontal aplicada à malha da Fig 17. A ordenação vertical é realizada de forma semelhante, a única



Conforme D'Azevedo *et al.* (1991) a combinação de malhas não-estruturadas com meios heterogêneos tornam os preconditionadores baseados em fatorações incompletas (ILU) muito sensíveis a ordenação das incógnitas. Na maioria dos casos não existe uma forma adequada de ordenação. No trabalho de D'Azevedo *et al.* (1992a) é mostrado que a solução de um sistema linear oriundo de problema de condução de calor com ordenação natural  $x-y$ , é fortemente afetada pelos valores das condutividades térmicas nessas direções. Baseado neste fato, os mesmos autores propuseram um método de ordenação das incógnitas baseado não somente na estrutura da matriz, mas também nos seus valores numéricos. Este esquema, denominado MDF (*Minimum Discarded Fill*), também está associado a uma fatoração incompleta. A idéia do método é ordenar as incógnitas que minimizem localmente o enchimento a ser descartado durante a fatoração incompleta. Este método tem sido utilizado nos trabalhos de D'Azevedo *et al.* (1991, 1992a) para problemas não-simétricos e simétricos, respectivamente, utilizando malhas estruturadas e não-estruturadas.

A ordenação das incógnitas através do MDF é realizada durante a fatoração incompleta da matriz Jacobiana, ordenando os nós que tiverem menores *discard* (D'Azevedo *et al.*, 1991). Para um dado nível da fatoração incompleta, o *discard* para o nó  $i$  é calculado com os elementos que não fazem parte dos fatores  $L$  e  $U$ . A Fig. 19 apresenta os elementos que participarão do cálculo do *discard* para o nó 1 (pivô) quando uma ILU(0) for realizada.

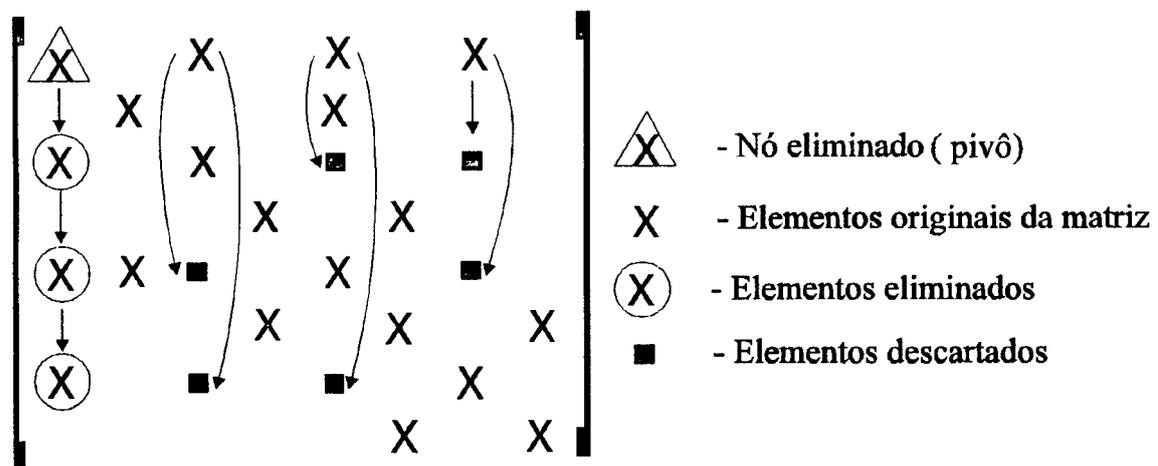


Fig. 19 - Representação da eliminação do nó 1 para uma ILU(0)

O valor do *discard* para o nó *i* é dado por,

$$\text{discard}(i) = (\sum (\text{elementos descartados})^2)^{1/2} \quad (92)$$

O algoritmo MDF para uma ILU(1) é denotado por MDF(1).

Algoritmo MDF.

Inicialização:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_0$$

para cada  $\mathbf{J}_{ij} \neq \mathbf{0}$

$$l(\mathbf{J}_{ij}) = \mathbf{0}$$

para cada nó *i*

calcule **discard(i)**

para  $k=1, \dots, n$

. escolha o nó com o mínimo **discard**

. elimine o nó **j**

. para todos os nós **k** vizinhos de **j**

atualize o **discard(k)**

No processo de eliminação e cálculo do *discard* é possível obter-se vários nós com o mesmo *discard*, principalmente nos estágios iniciais da ordenação. Nesses casos são necessários estratégias de desempate (*tie-breaking*). Utilizar-se-á neste trabalho como primeiro critério o nó com mínima deficiência (menor enchimento, caso este nó seja eliminado) e se, mesmo assim, ainda existam nós empatados procura-se o nó com o menor valor na ordenação original.

Quando o esquema totalmente implícito é empregado, existem duas incógnitas por nó ( $\mathbf{P}_0, \mathbf{S}_w$ ), originando uma matriz Jacobiana blocada, com cada bloco sendo 2x2. D'Azevedo *et al.* (1991) não aplicam o MDF para a matriz Jacobiana completa, e sim para uma matriz reduzida com forte influência da pressão, considerando que a pressão domina a convergência do *solver*.

Uma típica linha da matriz Jacobiana é apresentada na Fig. 20a. A matriz reduzida é originada multiplicando cada linha de blocos da matriz Jacobiana (Fig. 20a) pela inversa do bloco diagonal, resultando a linha blocada apresentada na Fig. 20b. Considerando as entradas  $\epsilon$  pequenas, do ponto de vista de ordenação, a pressão resulta independente da saturação. Este processo é repetido para todas as linhas de blocos e o MDF é aplicado para a matriz reduzida de pressão, obtida no final deste processo. Observe-se que este procedimento é idêntico para as metodologias IMPES e AIM. A única diferença é que as entradas  $\epsilon$  são zero para as células IMPES.

$$\begin{array}{l}
 \text{(a)} \quad \begin{bmatrix} P & S_w \\ X & X \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} P & S_w \\ X & X \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} P & S_w \\ X & X \end{bmatrix} \\
 \text{(b)} \quad \begin{bmatrix} P & S_w \\ X & \epsilon \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} P & S_w \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} P & S_w \\ X & \epsilon \\ X & X \end{bmatrix} \\
 \text{(c)} \quad \begin{bmatrix} P \\ \boxed{X} & \epsilon \\ X & X \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} P \\ \boxed{1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} P \\ \boxed{X} & \epsilon \\ X & X \end{bmatrix}
 \end{array}$$

□ - Equação da pressão

Fig. 20 - Seqüência necessária para originar a equação reduzida de pressão para a metodologia TI

#### 4.4 Métodos de Solução

Apresenta-se agora os algoritmos dos três métodos não-estacionários que foram empregados no presente trabalho. Todos os algoritmos são preconditionados à direita. Nos algoritmos descritos,  $x_0$  é a aproximação inicial,  $r_0$  o resíduo calculado com este ponto. Em todos os casos  $x_0$  foi calculado por,

$$x_o = M_1^{-1} r_o \quad (93)$$

#### 4.4.1 Método GMRES

No método GMRES (sem condicionamento) de Saad e Schultz (1986), a cada passo minimiza-se a norma do vetor  $\|\mathbf{R} - \mathbf{J}(\mathbf{x}_o + \mathbf{z})\|$ , onde  $\mathbf{z}$  é um membro do subespaço de Krylov  $\mathbf{K}_m = \text{span} \{r_o, \mathbf{J}r_o, \dots, \mathbf{J}^{(k-1)}r_o\}$ . Na prática a dimensão  $m$  do subespaço de Krylov é determinada no sentido de reduzir o custo do algoritmo e restrição de memória. No processo de minimização, busca-se uma base ortonormal de  $\mathbf{K}_m$  e posteriormente resolve-se um problema de quadrados mínimos. Os resultados deste trabalho correspondem à utilização do método de Gram-Schmidt modificado sucedido por rotações no plano.

Algoritmo GMRES.

passo 1 - inicialização

$$r_o = \mathbf{R} - \mathbf{J}x_o; v_1 = r_o / \|r_o\| \text{ e } e_1 = \|r_o\|$$

passo 2 - iteração do GMRES

para  $j=1, \dots, m$

$$z_j = M^{-1} v_j$$

$$w = \mathbf{J}z_j$$

passo 3 - ortogonalização de Gram-Schmidt Modificado

para  $i=1, \dots, j$

$$u_{i,j} = (w, v_i)$$

$$w \leftarrow w - u_{i,j} v_i$$

$$u_{j+1,j} = \|w\|$$

$$v_{j+1} = w / u_{j+1,j}$$

$$\tilde{u}_j = \{u_{1,j}, \dots, u_{j+1,j}\}^T$$

passo 4 - algoritmo QR (rotações de Givens)

para  $i=1, \dots, j-1$

$$\begin{Bmatrix} u_{ij} \\ u_{i,j+1} \end{Bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} c_i & s_i \\ -s_i & c_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{ij} \\ u_{i,j+1} \end{Bmatrix}$$

$$\gamma = [u_{jj}^2 + u_{j,j+1}^2]^{1/2}$$

$$c_j = u_{jj} / \gamma$$

$$s_j = u_{j,j+1} / \gamma$$

rotação aplicada a  $\bar{U}$

$$u_{jj} \leftarrow \gamma$$

$$u_{j,j+1} \leftarrow 0$$

rotação aplicada a  $e$

$$e_{j+1} \leftarrow -s_j e_j$$

$$e_j \leftarrow -c_j e_j$$

se  $|e_{j+1}| / |e_j| < \text{TOL}$  saia do *loop*  $j$

passo 5 - resolve  $y$

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_j \end{Bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} u_{1,1} & \dots & u_{1,j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & u_{j,j} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_j \end{Bmatrix}$$

passo 6 - resolve  $x$

$$x = x_0 + Z_m y_m$$

se convergiu **pare**

senão

passo 7- recomeço

$$r_0 = R - Ax_m$$

$$x_0 = x_m \text{ e } v_1 = r_0 / \|r_0\| \text{ vá para o passo 2}$$

No algoritmo apresentado  $e$  é o vetor canônico de  $m + 1$  componentes,  $TOL$  é a tolerância,  $Z_m = [z_1, \dots, z_m]$ .

#### 4.4.2 Método Bi-CGSTAB

O Bi-CGSTAB, de van der Vorst (1992), foi desenvolvido no sentido de corrigir "frequentes irregularidades" no processo de convergência do método CGS (*Conjugate Gradient Squared*, Sonneveld, 1989), por um tipo de minimização local do vetor resíduo. O CGS pode ser visto como um método no qual o operador contração do BiCG (*BiConjugate Gradient*, Voevodin, 1983) é aplicado duas vezes. O Bi-CGSTAB pode ser interpretado como o produto do BiCG e repetidamente aplicado o GMRES(1). Ao menos localmente, o vetor resíduo é minimizado, o qual conduz a uma convergência suave, Barrett *et al.* (1994).

Algoritmo Bi-CGSTAB.

$$r_o = R - Jx_o$$

$$\hat{r} = r_o ; \rho_o = \alpha_o = \omega_o = 1$$

$$v_o = p_o = 0$$

para  $i=1,2,\dots$

$$\rho_i = (\hat{r}, r_{i-1})$$

$$\beta_{i-1} = (\rho_i / \rho_{i-1}) / (\alpha_{i-1} / \omega_{i-1})$$

$$p_i = r_{i-1} + \beta_{i-1} (p_{i-1} - \omega_{i-1} v_{i-1})$$

$$\hat{p} = M^{-1} p_i$$

$$v_i = J \hat{p}$$

$$\alpha_i = \rho_i / (\hat{r}, v_i)$$

$$s_i = r_{i-1} - \alpha_{i-1} v_i$$

$$\hat{s} = M^{-1} s$$

$$t = J \hat{s}$$

$$\omega_i = (t, s) / (t, t)$$

$$x_i = x_{i-1} + \alpha_i \hat{p} + \omega_i \hat{s}$$

$$r_i = s - \omega_i t$$

se  $\|r_i\| / \|r_o\| < TOL$  pare

senão

$$x_{i-1} = x_i; \alpha_{i-1} = \alpha_i; \omega_{i-1} = \omega_i; \rho_{i-1} = \rho_i$$

#### 4.4.3 Método ORTHOMIN

O ORTHOMIN minimiza a norma do resíduo no subespaço de Kyrlov e conforme Ewing (1989) pode ser interpretado como a versão com recomeços do método CGR (*Generalized Conjugate Residual*, Eisenstat *et al.*, 1983), o qual é uma classe especial dos métodos conhecidos como Petrov-Galerkin-Krylov.

Algoritmo ORTHOMIN.

$$r_o = R - Ax_o$$

passo 1:

para  $k=1, \dots, m$

$$v_k = M^{-1}r_{k-1}$$

$$a_{i,k} = -(Jv_k, Jq_i) / (Jq_i, Jq_i); \quad i=1, k-1$$

$$q_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} a_{i,k} q_i$$

$$\omega_k = (r_{k-1}, Jq_k) / (Jq_k, Jq_k)$$

$$x_k = x_{k-1} + \omega_k q_k$$

$$r_k = r_{k-1} - \omega_k Jq_k$$

se  $\|r_k\| / \|r_o\| < TOL$  pare

senão

passo 2 - recomeço

$$r_o = R - Ax_m$$

$$x_o = x_m; \text{ vá ao passo 1}$$

Conforme citado em Behie e Vinsome (1982), o coeficiente  $\omega_k$  é escolhido de modo que a soma dos quadrados do resíduo seja minimizado e os coeficientes  $a_{i,k}$  são os coeficientes

de ortogonalidade, de modo que os vetores  $aq_k$  sejam ortogonais.

A Tab. 2 apresenta o número aproximado de operações para cada um dos métodos. Verificando-se os dados da Tab. 2 pode-se concluir que, se o número de iterações do GMRES e ORTHOMIN coincidem, o custo do ORTHOMIN deverá ser maior, uma vez que, o mesmo realiza 1 produto interno e  $(i+1)$  operações do tipo  $(x + \alpha y)$  a mais que o GMRES.

Tab. 2 - Número aproximado de operações dos métodos para  $i$  iterações

MÉTODO	$(x,y)$	$y + \alpha x$	$y = Jx$	$y = M^{-1} x$
GMRES	$i + 1$	$i + 1$	1	1
ORTHOMIN	$i + 2$	$2i + 2$	1	1
Bi-CGSTAB	4	6	2	2

Todos os métodos anteriormente descritos foram empregados no presente trabalho. Nos resultados apresentados nos Caps. 5 e 6 foi empregado apenas o método GMRES. O Cap. 7 é dedicado a uma comparação da eficiência dos três métodos. No Cap. 7 foi também verificado o efeito de diversas ordenações geométricas no desempenho destes métodos de solução. Com relação ao MDF é mostrado o efeito desta ordenação somente para o GMRES.

### 5.1 - Introdução

O objetivo deste capítulo é validar alguns dos resultados obtidos no presente trabalho com os dados existentes na literatura. As comparações foram realizadas utilizando a metodologia totalmente implícita (TI). Para efeito de comparação foram analisados alguns dos resultados obtidos por Palagi (1992) e os resultados obtidos com o SIRP-3D (Simulador de Reservatórios de Petróleo Tridimensional) (Maliska, *et. al*, 1995, Cunha, 1996). O SIRP-3D emprega coordenadas curvilíneas não-ortogonais e o modelo utilizado é o *black-oil* com as frações mássicas e pressão como variáveis dependentes. Por último, foram realizados alguns testes para verificar o efeito da pressão capilar na recuperação de óleo.

### 5.2 - Comparação com os Resultados de Palagi (1992)

Comparou-se inicialmente os resultados obtidos para um escoamento tipo pistão para razões de viscosidade ( $M$ ) iguais a 10 e 50. Este tipo de escoamento, apesar de não ser um escoamento típico de reservatório, é largamente empregado para efeito de validação de resultados porque a sua solução é bastante dependente da orientação da malha utilizada. As curvas de permeabilidade relativa e razão de viscosidades são dadas pela Eq. (94). A Tab. 3 apresenta os dados físicos e geométricos do reservatório e a Fig. 21 mostra a malha hexagonal. Esta malha se assemelha a malha hexagonal-híbrida com 445 volumes empregada por Palagi (1992). No trabalho de Palagi (1992) a região cilíndrica foi localizada na região onde as linhas de igual potencial eram aproximadamente circulares para um deslocamento com razão de mobilidades iguais a 1 (um). Para a geração da malha da Fig. 21, o tamanho da região cilíndrica foi tomado como uma medida aproximada da Fig. 8.1-b do trabalho de Palagi (1992). Devido à simetria da malha hexagonal, a malha da Fig. 21 apresenta os poços diagonal e paralelo. Observe-se que as linhas que unem os pontos geradores dos volumes da malha hexagonal são paralelos em relação ao escoamento do poço injetor-produtor na horizontal, enquanto que são inclinados em relação ao escoamento do poço injetor-produtor na vertical, daí a denominação poço paralelo e poço diagonal. Para os resultados que serão apresentados nesta seção foram utilizados como critério

de parada de uma iteração newtoniana  $6,893 \times 10^2$  Pa para  $\Delta P_{o,\max}^*$  e  $10^{-4}$  para  $\Delta S_{w,\max}^*$ . A vazão de produção corresponde a uma vazão constante de líquido prescrita (óleo + água).

$$\begin{aligned} K_{rw} &= S_w^2 / (M(1 - S_w^2) + S_w^2) \\ K_{ro} &= 1 - K_{rw} \\ M &= \mu_o / \mu_w \end{aligned} \quad (94)$$

Tab. 3 - Dados físicos e geométricos do reservatório - caso 1

Dados do reservatório	Condição inicial	Propriedades físicas
$k = 12,5 \times 10^{-15} \text{ m}^2$ $h = 6,09 \text{ m}$ $A = 1,6 \times 10^5 \text{ m}^2$ $\phi = 0,08$ $r_w = 0,0914 \text{ m}$	$S_{wi} = 0,0$ $P_i = 6,893 \times 10^5 \text{ Pa}$ $S_{or} = 0,0$	$B_o = B_w = 1 \text{ a } 0 \text{ Pa}$ $P_c = 0$ $\mu_o = 10^{-3} \text{ Pa.s}$ $\mu_w = 1/M \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$ $c_o = c_w = 1,45 \times 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$ $\ \bar{q}_{II}\  = \ \bar{q}_{wI}\  = 1,10 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$

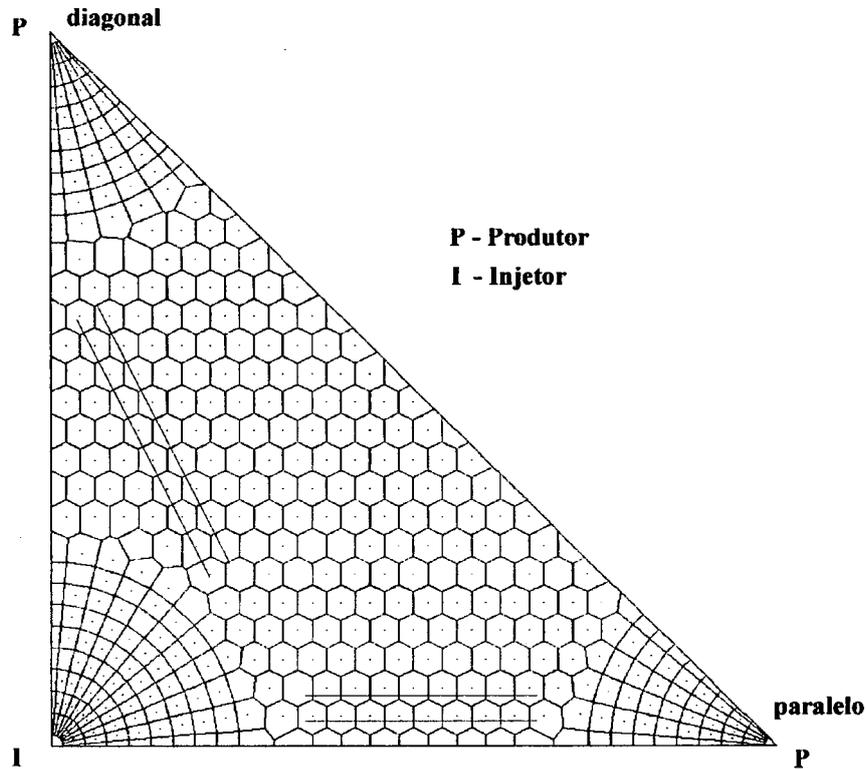
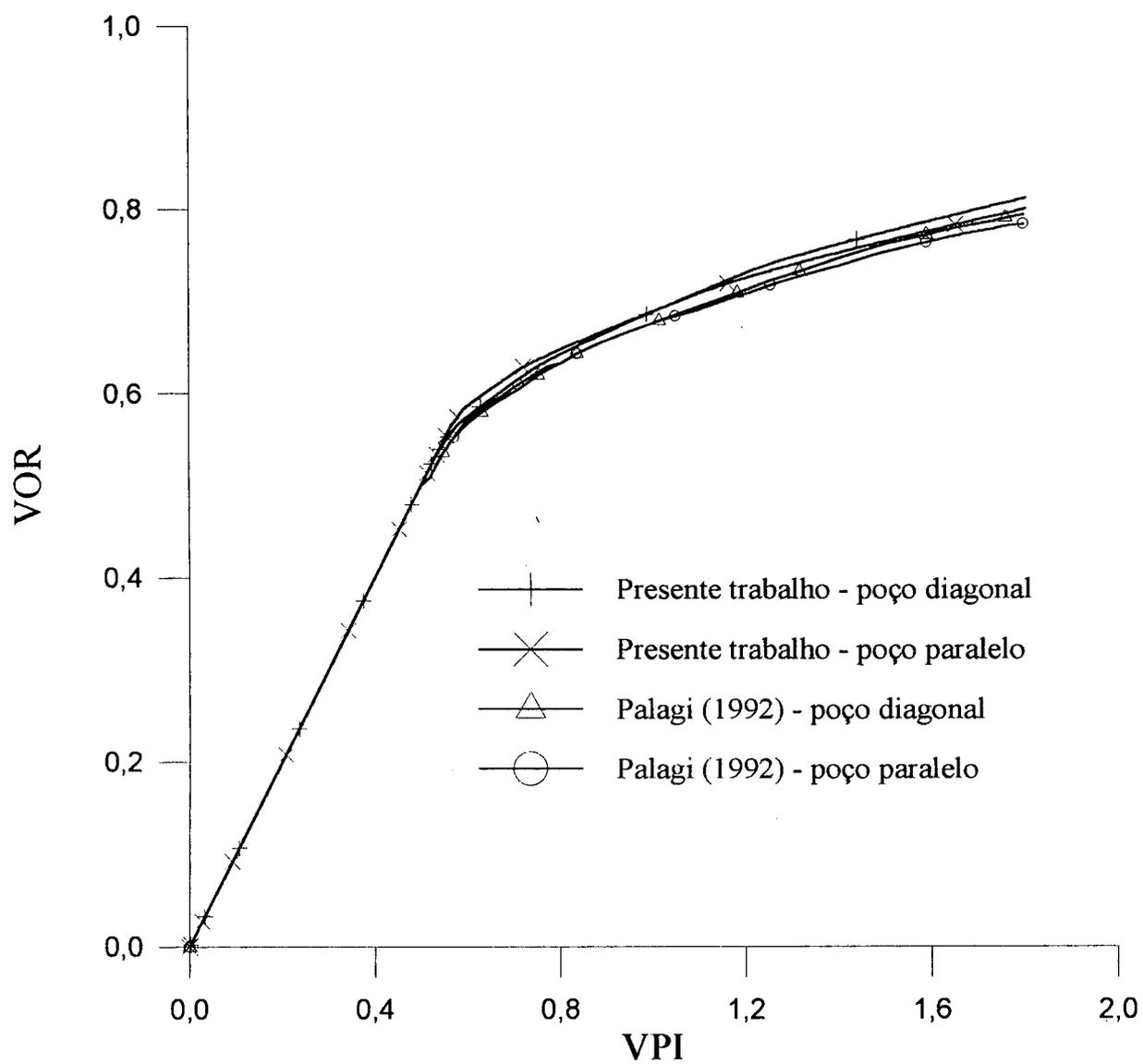


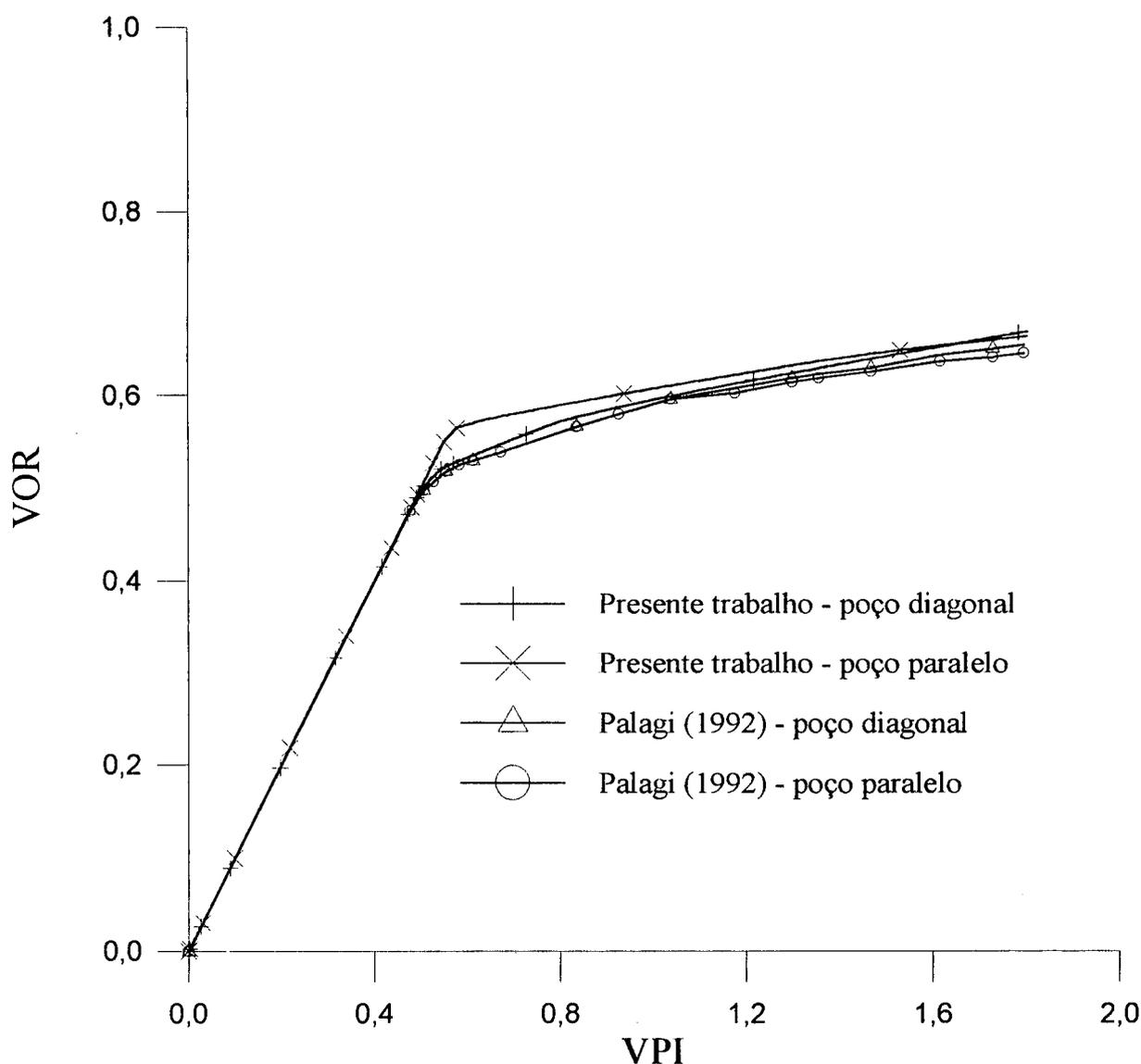
Fig. 21 - Malha hexagonal-híbrida com 445 volumes

As Figs. (22) e (23) apresentam as curvas de volume de óleo recuperado (VOR) *versus* volume poroso injetado (VPI), para M igual a 10 e 50, respectivamente. As Eqs. (95) e (96) apresentam a definição destes dois números adimensionais, onde  $S_{wi}$  é a saturação de água inicial e  $S_{or}$  é a saturação de óleo residual (saturação na qual nenhum óleo pode mais ser recuperado),  $V$  é o volume do reservatório,  $\phi$  é a porosidade, e  $\bar{q}_{wi}$  é o volume de total de água injetada no reservatório por unidade de tempo. O denominador nestas equações é o volume total de óleo possível de ser recuperado.

$$VOR = \int_0^t \bar{q}_{wi} dt / (\phi V (1 - S_{wi} - S_{or})) \quad (95)$$

$$VPI = \int_0^t \bar{q}_{wi} dt / (\phi V (1 - S_{wi} - S_{or})) \quad (96)$$

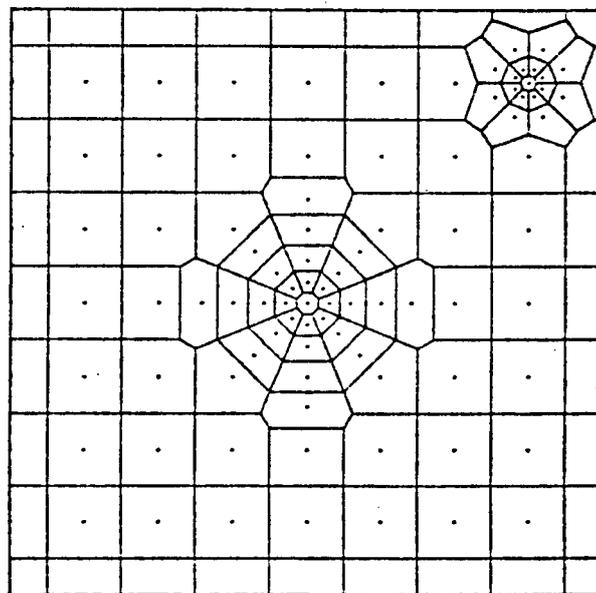
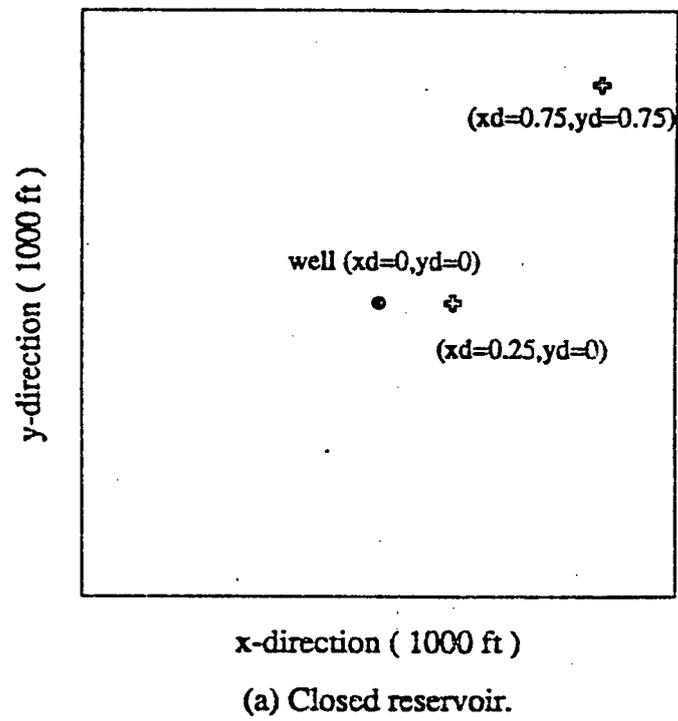
Fig. 22 - Escoamento tipo pistão -  $M = 10$

Fig. 23 - Escoamento tipo pistão -  $M = 50$ 

Nas Figs. (22) e (23) observa-se uma diferença nas curvas de recuperação obtidas no presente trabalho e aquelas obtidas por Palagi (1992), principalmente para  $M=50$ . Pode-se verificar entretanto, que a máxima diferença para  $M=10$ , quando compara-se a recuperação do poço paralelo (Palagi, 1992) com o poço diagonal (presente trabalho), ficou em torno de 4% e a diferença máxima para  $M=50$ , para o poço paralelo, não ultrapassou a 8%. Destaca-se que os pontos lidos da curva de Palagi (1992) para  $M=50$  podem ser mais imprecisos devido ao tamanho reduzido da figura apresentada em seu trabalho quando comparada com os resultados para  $M=10$

e ao elevado número de curvas presentes na mesma.

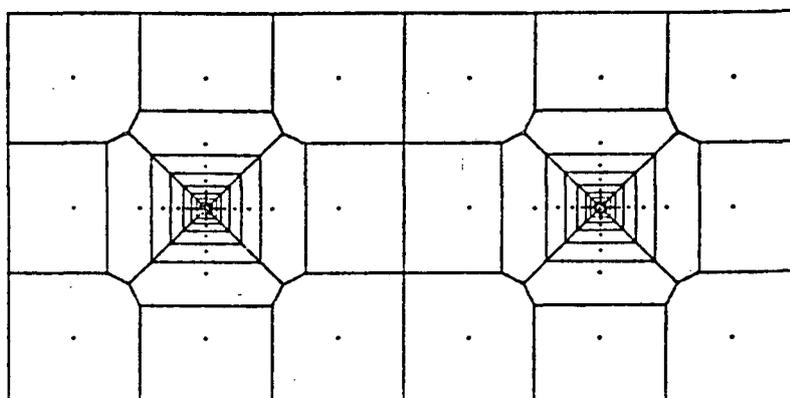
Com relação aos resultados do escoamento tipo pistão, outro ponto deve ser enfatizado. O mesmo refere-se ao fator de correção cilíndrica. Palagi (1992) analisou o efeito da correção cilíndrica para dois problemas monofásicos. O primeiro teste foi para um reservatório quadrado, com um poço no centro do reservatório, produzindo uma vazão constante, (Exemplo 6.6 do trabalho de Palagi (1992)). Neste caso, foram empregados três tipos de malhas: (1) malha cartesiana (9x9); (2) malha cartesiana (33x33) e (3) malha cartesiana (9x9) com dois módulos cilíndricos (4x8 e 2x8), sendo o primeiro número na direção radial e o segundo na direção axial ( $\theta$ ). A Fig. 24 mostra o reservatório e a malha cartesiana-híbrida empregada no trabalho de Palagi (1992) para este caso. A malha híbrida foi simulada com e sem o fator de correção cilíndrica, ou seja,  $f_c$  calculado via Eq. (27) e  $f_c=1$ . Os resultados obtidos pelo mesmo, para a pressão do poço, foram comparados com a solução analítica. Os resultados concordaram razoavelmente bem com a solução analítica, sendo que a maior diferença ocorreu para a solução com malha cartesiana-híbrida sem fator de correção cilíndrica. Sobre estes resultados, Palagi (1992) comenta que não existe nenhuma razão para usar malhas com geometria complexa para este caso.



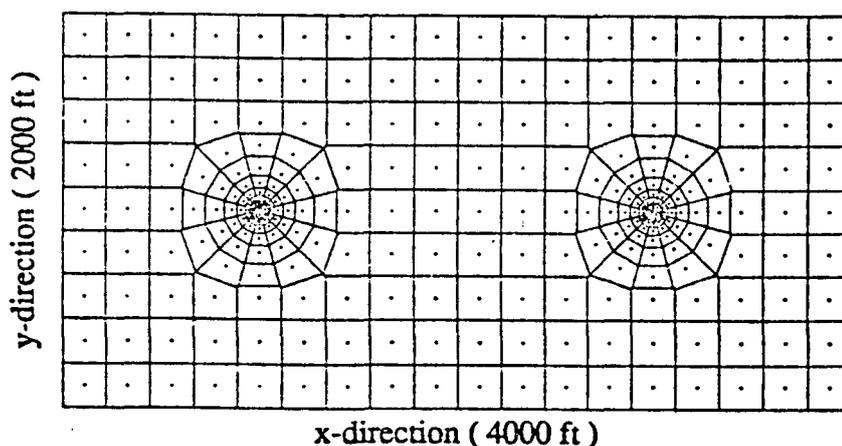
(b) 9x9 Cartesian grid plus 2 'cylindrical' (4x8 and 2x8).

Fig. 24 - Fig. 6.23 do trabalho de Palagi (1992)

O segundo caso foi para um problema analisado anteriormente, por Pedrosa e Aziz (1986), (Exemplo 6.8 do trabalho de Palagi (1992)). O problema consiste de dois poços colocados na linha de centro de um reservatório retangular e dispostos equidistantes um do outro e das fronteiras, com um dos poços produzindo a vazão constante e o outro injetando a mesma vazão. Devido à simetria esta configuração é equivalente a um poço no centro de um reservatório quadrado com três fronteiras impermeáveis e outra a pressão constante. Neste caso, foi empregado aproximadamente as mesmas malhas utilizadas por Pedrosa e Aziz (1986), a saber: (1) malha cartesiana (6x3) com geometria cilíndrica (8x4) em volta de cada poço; (2) malha cartesiana (18x9) com geometria cilíndrica (8x12) em volta de cada poço. A Fig. 25 apresenta as duas malhas cartesiana-híbrida empregadas no trabalho de Palagi (1992).



(a) Coarse Cartesian grid (6x3) plus 2 hybrid (8x4).



(b) Fine Cartesian grid (18x9) plus 2 hybrid (8x12).

Fig. 25 - Fig. 6.29 do trabalho de Palagi (1992)

A Fig. (6.30) do trabalho de Palagi (1992) apresenta a solução analítica, os resultados de Pedrosa e Aziz (1986) e os seus próprios resultados, para as malhas grosseiras e refinadas com e sem o uso do fator cilíndrico. As soluções de Palagi (1992), com o uso do fator cilíndrico, concordam razoavelmente bem com a solução analítica. Entretanto, os resultados com malha grosseira diferem daqueles obtidos por Pedrosa e Aziz (1986). Observe-se que a malha de Palagi (1992), com o uso do fator cilíndrico é equivalente à malha empregada por Pedrosa e Aziz (1986) que é cilíndrica em volta do poço. Os resultados obtidos por Palagi (1992) sem o uso do fator de correção cilíndrica apresentam uma maior diferença em relação a solução analítica. Quando se compara os resultados obtidos por Palagi (1992) com e sem o uso do fator cilíndrico observa-se uma diferença aproximada de 8,5%, para os resultados com a malha grosseira e de 1,3%, para a malha refinada.

Inicialmente, no presente trabalho, todas as simulações foram realizadas empregando-se o fator cilíndrico fornecido pela Eq. (27). Entretanto, como foram observadas algumas diferenças nos resultados quando comparados como o trabalho de Palagi (1992), para o escoamento tipo-pistão, foram realizadas algumas simulações empregando-se  $f_c = 1$  na região cilíndrica. Os resultados destas simulações encontram-se nas Figs. (26) a (29). Nas curvas apresentadas "sem correção cilíndrica" significa que em volta dos poços (na região radial)  $f_{c,ij} = 1,0$ . Como as curvas apresentadas nas Figs. (26) a (29) são curvas integrais (Eq.(95)) plotou-se, também, as curvas de pressão nos poços para  $M = 10$  e  $M = 50$ . As Figs. (30) e (31) apresentam os resultados para os poços paralelo e diagonal. Observe-se que de acordo como foi apresentado nas Figs. (22) e (23), para as curvas de recuperação, as pressões em ambos os poços (diagonal e paralelo) são diferentes, com esta diferença aumentando com a razão de mobilidade ( $M$ ). Novamente o efeito do fator cilíndrico praticamente não foi observado. Não existe a princípio nenhum argumento físico que justifique a influência de  $f_c$  nas curvas de recuperação. O efeito de orientação de malha está relacionado a forma com que a malha é direcionada em relação ao escoamento e não se a malha é "radial ou quase-radial". É evidente que quanto menor for a conectividade de um determinado volume (por exemplo, um poço) menor será a possibilidade de alinhar a malha com a direção do escoamento, e é este ponto que deve ser enfatizado quando da utilização de malha híbridas em volta de poços verticais.

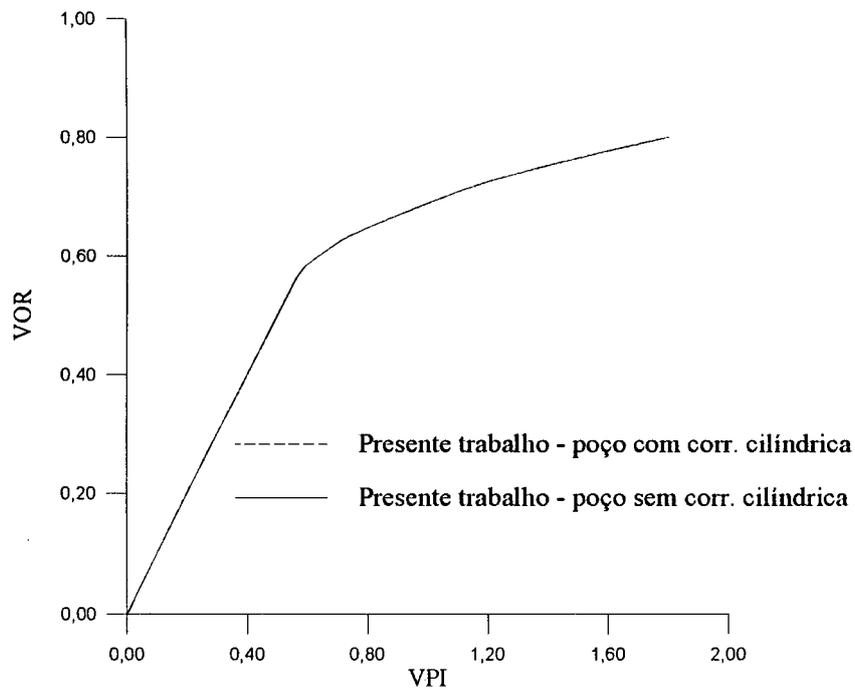


Fig. 26 - Escoamento tipo pistão - poço paralelo - M=10

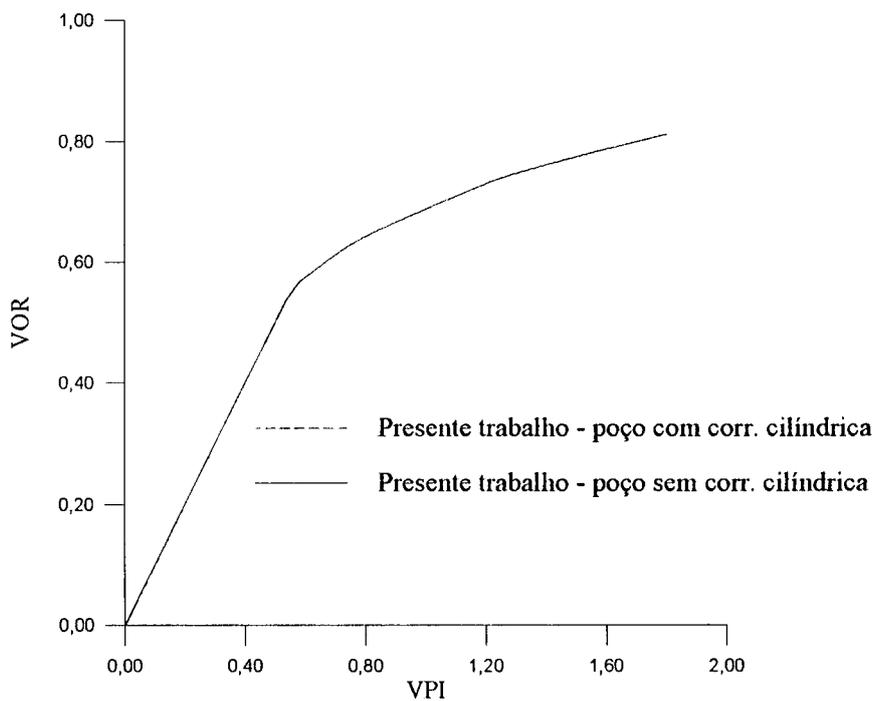


Fig. 27 - Escoamento tipo pistão - poço diagonal - M=10

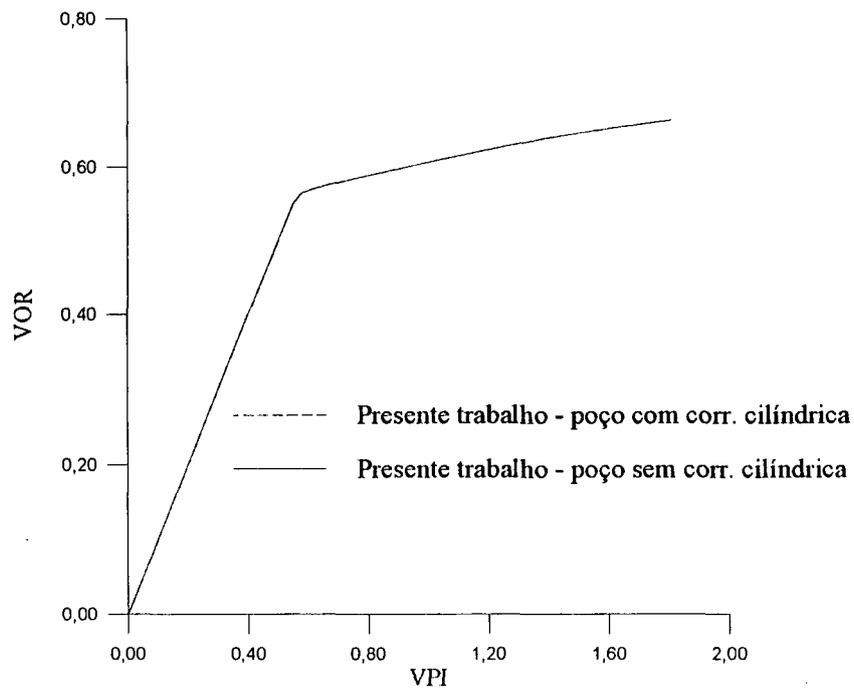


Fig. 28 - Escoamento pistão - poço paralelo - M=50

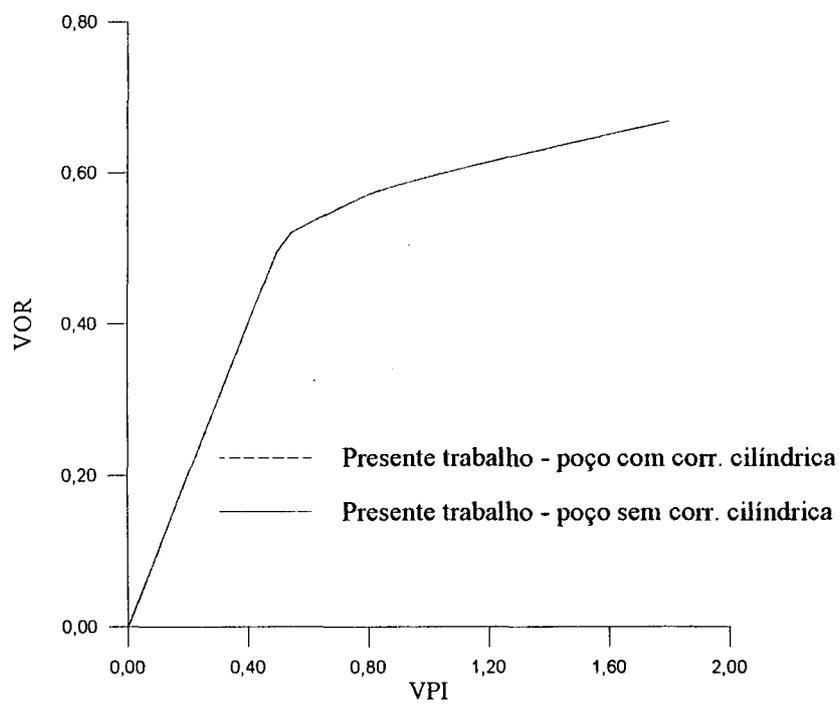


Fig. 29 - Escoamento tipo pistão - poço diagonal - M=50

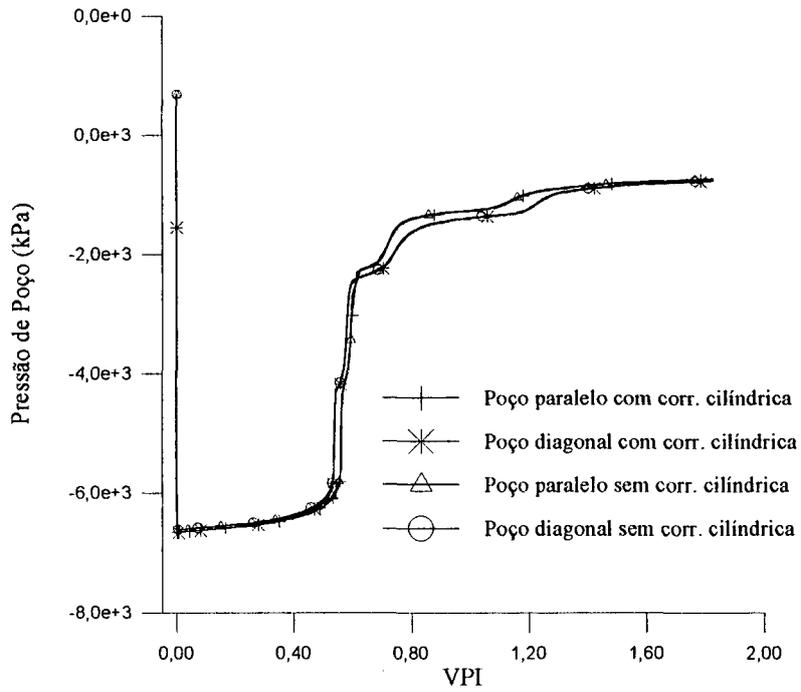


Fig. 30 - Efeito do fator de correção cilíndrica - escoamento tipo pistão - M=10

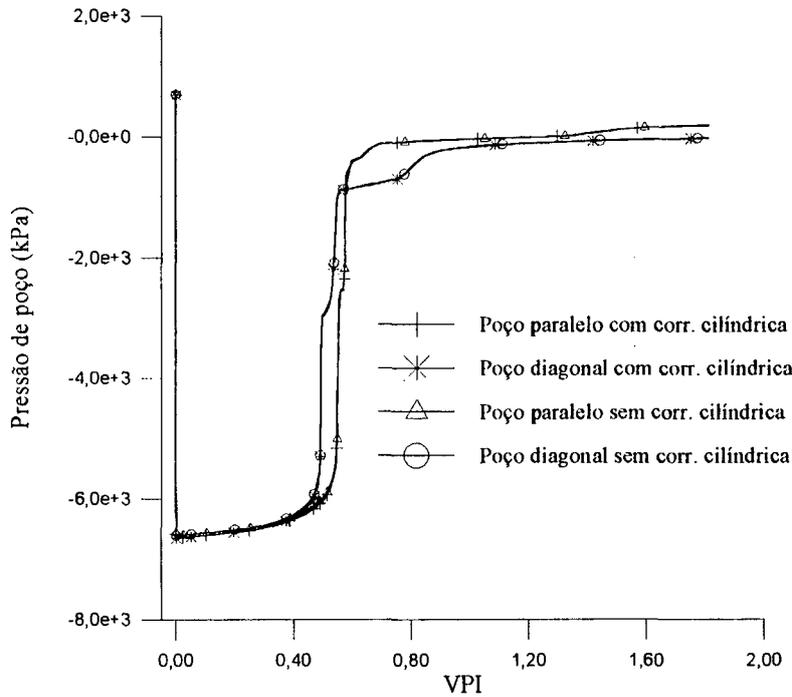


Fig. 31 - Efeito do fator de correção cilíndrica - escoamento tipo pistão - M=50

Para finalizar as comparações com o trabalho de Palagi (1992) apresenta-se agora resultados para um caso onde as curvas de permeabilidade relativa são mais próximas das curvas tipicamente empregadas na recuperação de petróleo. As curvas de permeabilidades são dadas pela Eq. (97) e os demais dados são aqueles já listados na Tab. 3.

$$\begin{aligned} K_{rw} &= S_w^2 \\ K_{ro} &= (1 - S_w)^2 \end{aligned} \quad (97)$$

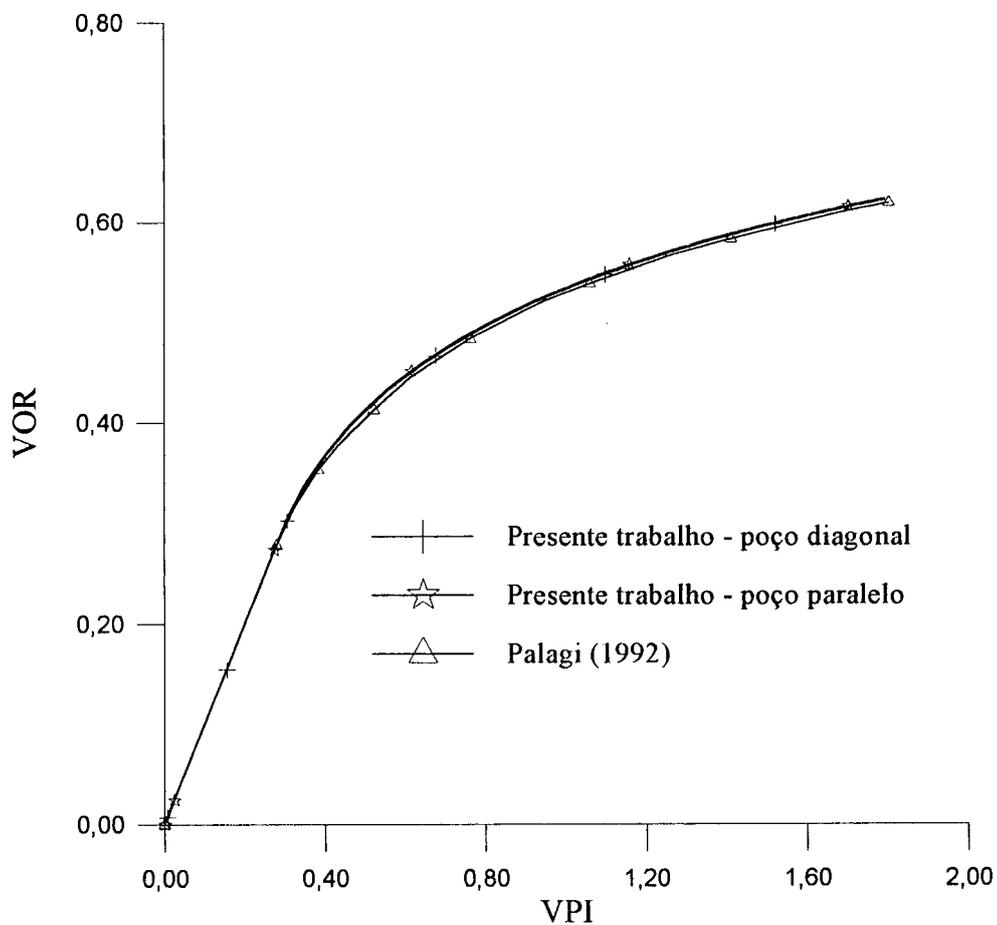
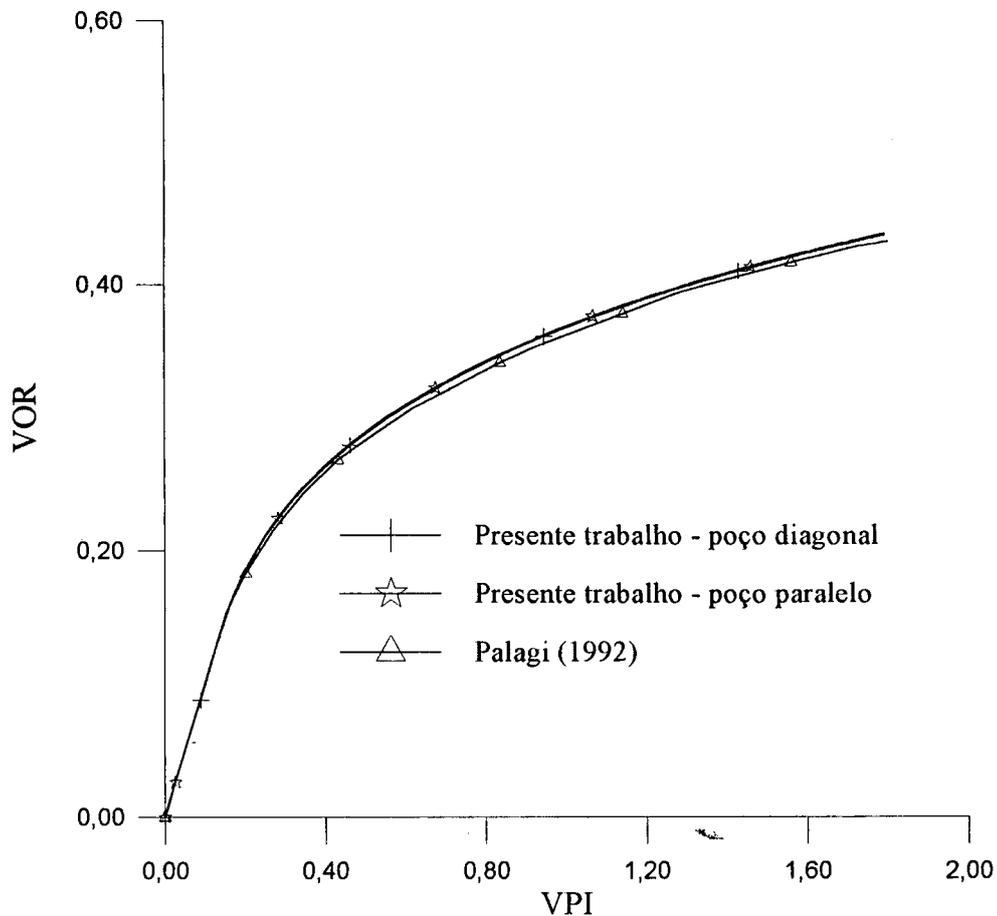


Fig. 32 - Escoamento típico de reservatório - M=10

Fig. 33 - Escoamento típico de reservatório -  $M=50$ 

As Figs. (32) e (33) apresentam os resultados para razões de viscosidade iguais a 10 e 50, respectivamente. Pode-se observar que os resultados apresentam boa concordância com aqueles obtidos por Palagi (1992). Com relação aos resultados de Palagi (1992), mostrados na Figs. (32) e (33), não se especifica se os mesmos são para um poço paralelo ou diagonal, porque na Fig. 8.9 daquele trabalho se as curvas de recuperação para os dois poços coincidem. Também não foi especificado na Fig. 8.9 daquele trabalho, se as curvas de recuperação foram obtidas com ou sem fator de correção cilíndrica. Os resultados apresentados nas Figs. (32) e (33) foram obtidos sem o uso do fator cilíndrico. Apesar de não estar reportado, foram realizados testes para  $f_c$  calculado pela Eq. (27) e os resultados foram idênticos à aqueles já apresentados nas Figs. (32) e (33). Como não foi observado nenhuma diferença nos resultados anteriores quando da utilização da correção cilíndrica, no restante deste trabalho todas as simulações serão realizadas com  $f_c=1$ .

### 5.3 - Comparação com o SIRP - 3D

A primeira geometria testada foi uma configuração de cinco poços, na qual as linhas coordenadas da malha generalizada assemelham-se as linhas de fluxo do escoamento. A Fig. (34) mostra uma das malhas empregadas. O *zoom* na Fig. (34) é apenas ilustrativo e é utilizado somente para indicar a forma da malha nos poços. Observe que a massa produzida ou injetada é distribuída ao longo da região radial como condição de contorno de vazão prescrita. Para validação dos resultados foram empregados duas malhas: uma hexagonal com 410 volumes e uma hexagonal-híbrida com 445 volumes, similar àquela apresentada na Fig. (21). A Fig. (35) mostra a malha hexagonal. Os dados físicos e geométricos estão listados na Tab. 4. As curvas de permeabilidade relativa encontram-se na Tab. 5 e foram extraídas da Tab. 9.3 do trabalho de Palagi (1992). As viscosidades do óleo e da água são dados pela Eq. (98).

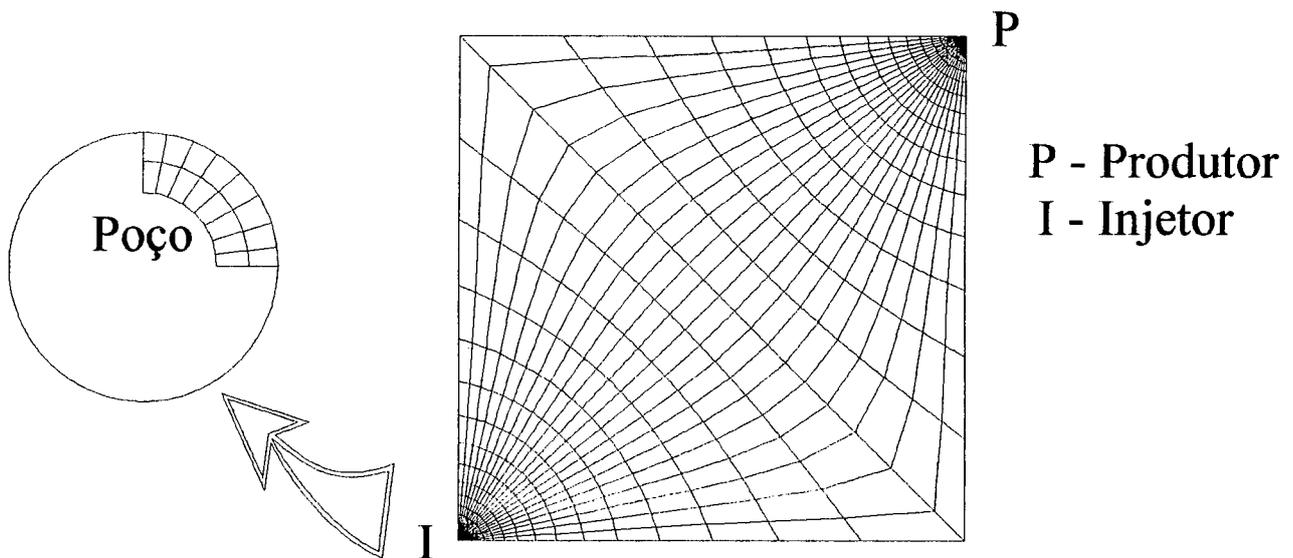


Fig. 34 - Malha generalizada com 756 volumes (21x36)

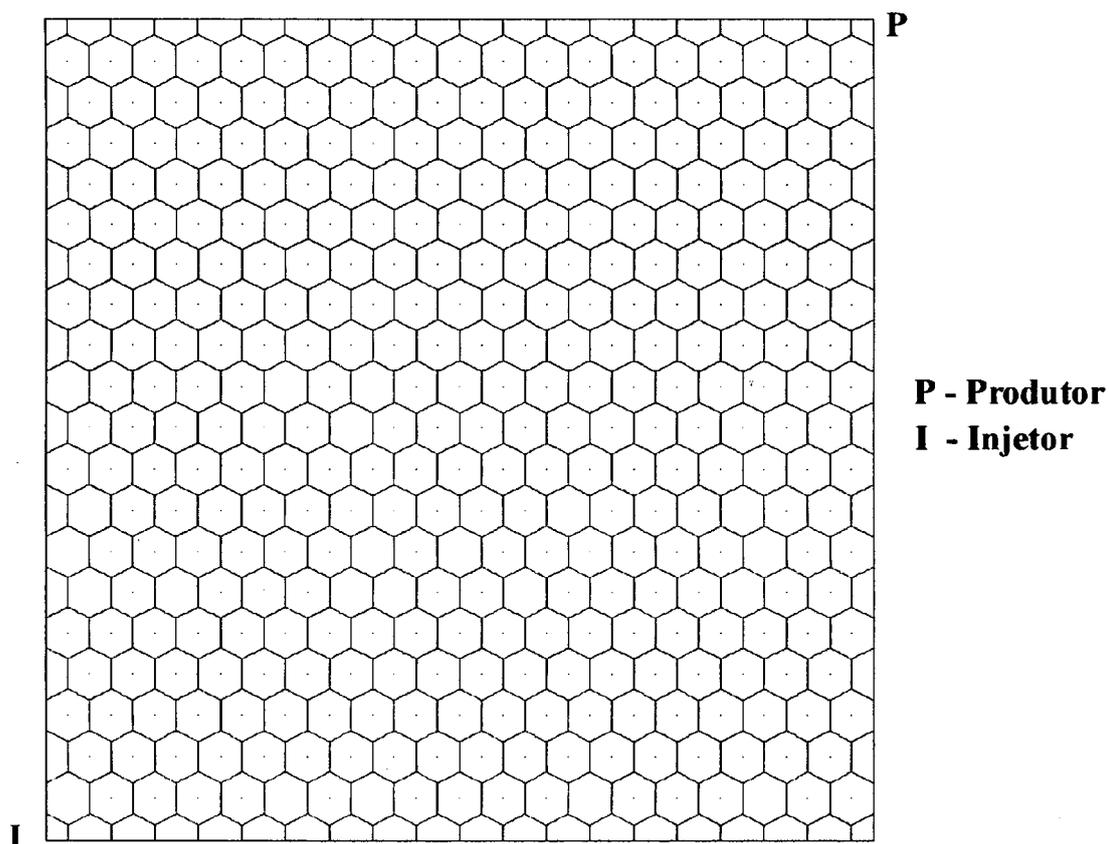


Fig. 35 - Malha hexagonal com 410 volumes

Tab. 4 - Dados físicos e geométricos do reservatório - caso 2

Dados do reservatório	Condição inicial	Propriedades físicas
$k = 3,0 \times 10^{-13} \text{ m}^2$ $h = 15 \text{ m}$ $A = 2,14048 \times 10^6 \text{ m}^2$ $\phi = 0,30$ $r_w = 0,122 \text{ m}$	$S_{wi} = 0,22$ $P_i = 2,068427 \times 10^7 \text{ Pa}$ $S_{or} = 0,20$	$B_o = B_w = 1$ a $2,068427 \times 10^7 \text{ Pa}$ $P_c = 0$ $c_o = c_w = 7,25 \times 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$ $\ \bar{q}_{II}\  = \ \bar{q}_{wI}\  = 2,76 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$

Tab. 5 - Permeabilidades relativas

$S_w$	$K_{ro}$	$K_{rw}$
0,22	1,0000	0,00
0,30	0,4000	0,07
0,40	0,1250	0,15
0,50	0,0649	0,24
0,60	0,0048	0,33
0,80	0,0000	0,65
0,90	0,0000	0,83
1,00	0,0000	1,00

$$\begin{aligned} \mu_w &= 10^{-3}(1 + 1,45 \times 10^{-12}(P_o - 1,37 \times 10^7)) \text{ [Pa.s]} \\ \mu_o &= 1,163 \times 10^{-2}(1 + 1,45 \times 10^{-12}(P_o - 1,37 \times 10^7)) \text{ [Pa.s]} \end{aligned} \quad (98)$$

A Fig. (36) apresenta a curva de recuperação de óleo e a Fig. (37) a curva de corte de água. O corte de água é definido como a razão do volume de água produzido e o volume total de líquido produzido (óleo + água). Observa-se uma boa concordância dos resultados para as três malhas empregadas. A Fig. (38) mostra a pressão no bloco produtor. Neste caso existiu uma diferença entre os resultados da malha generalizada e as malhas empregadas no presente trabalho. Apesar de não estar representado na Fig. (38) foram utilizadas duas outras malhas hexagonais (uma com 559 e outra com 915 volumes) e a pressão do bloco obtida com estas malhas tendiam a pressão do bloco produtor com a malha hexagonal-híbrida, sendo o resultado com a malha hexagonal com 915 bastante próxima da malha hexagonal-híbrida. Aparentemente, a malha hexagonal produz resultados satisfatórios quando comparado com a malha generalizada, mesmo para este caso onde as linhas coordenadas da malha apresentam uma semelhança considerável com as linhas de fluxo do escoamento. É, portanto, mais um indicativo de que o aumento da

conectividade do volume de controle beneficia a qualidade da solução.

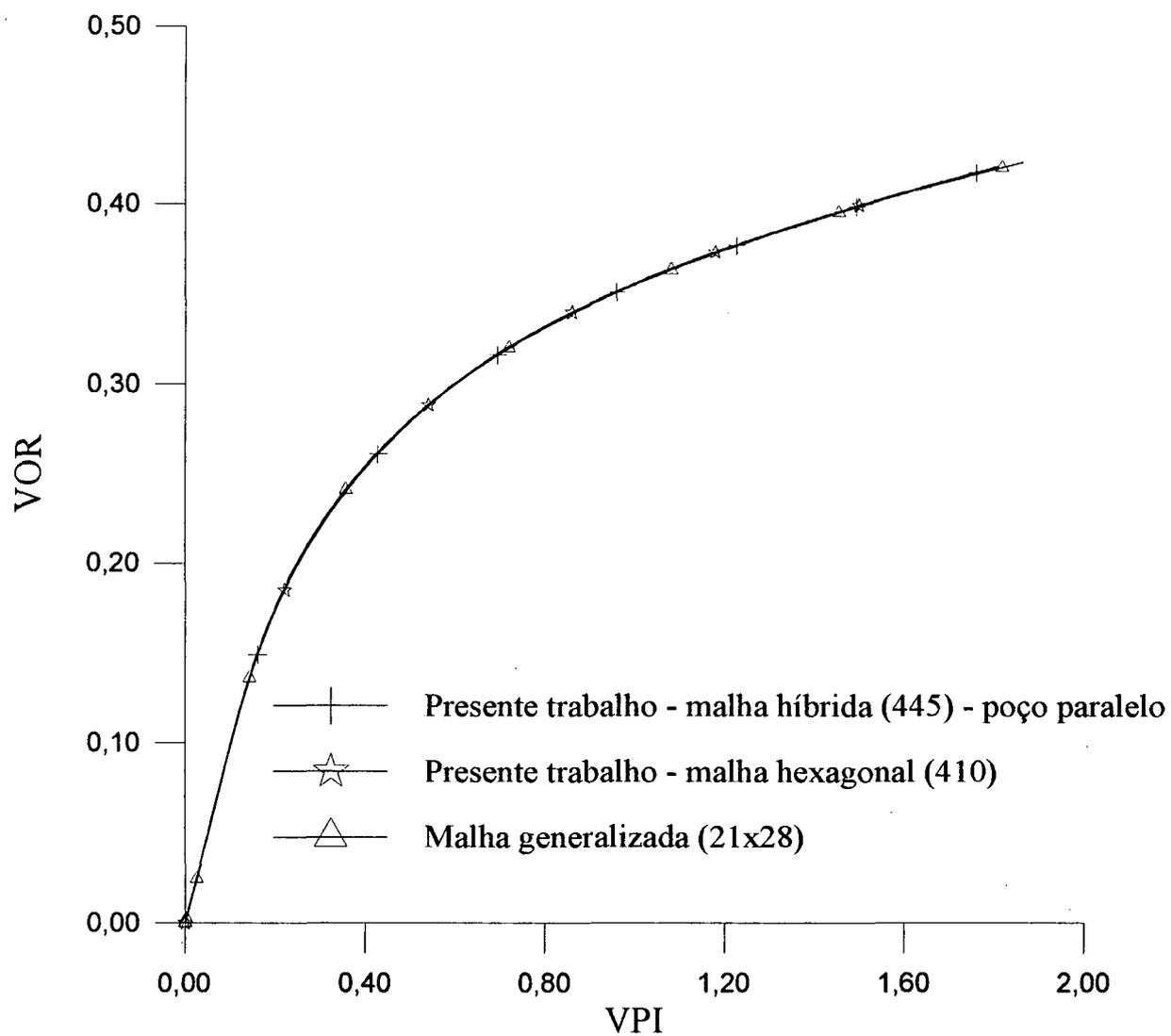


Fig. 36 - Recuperação - comparação com o SIRP-3D - caso 2

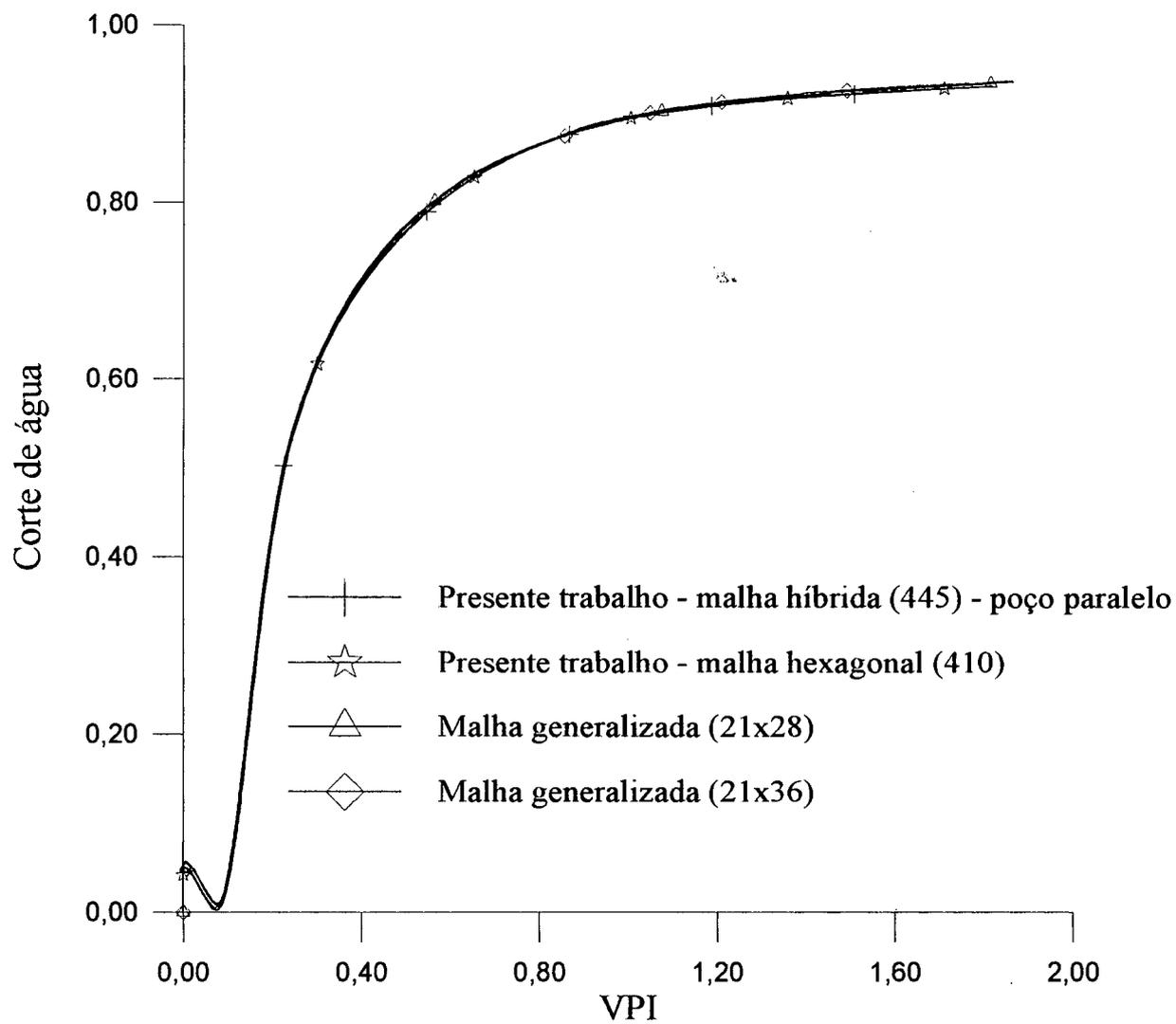


Fig. 37 - Corte de água - comparação com o SIRP-3D - caso 2

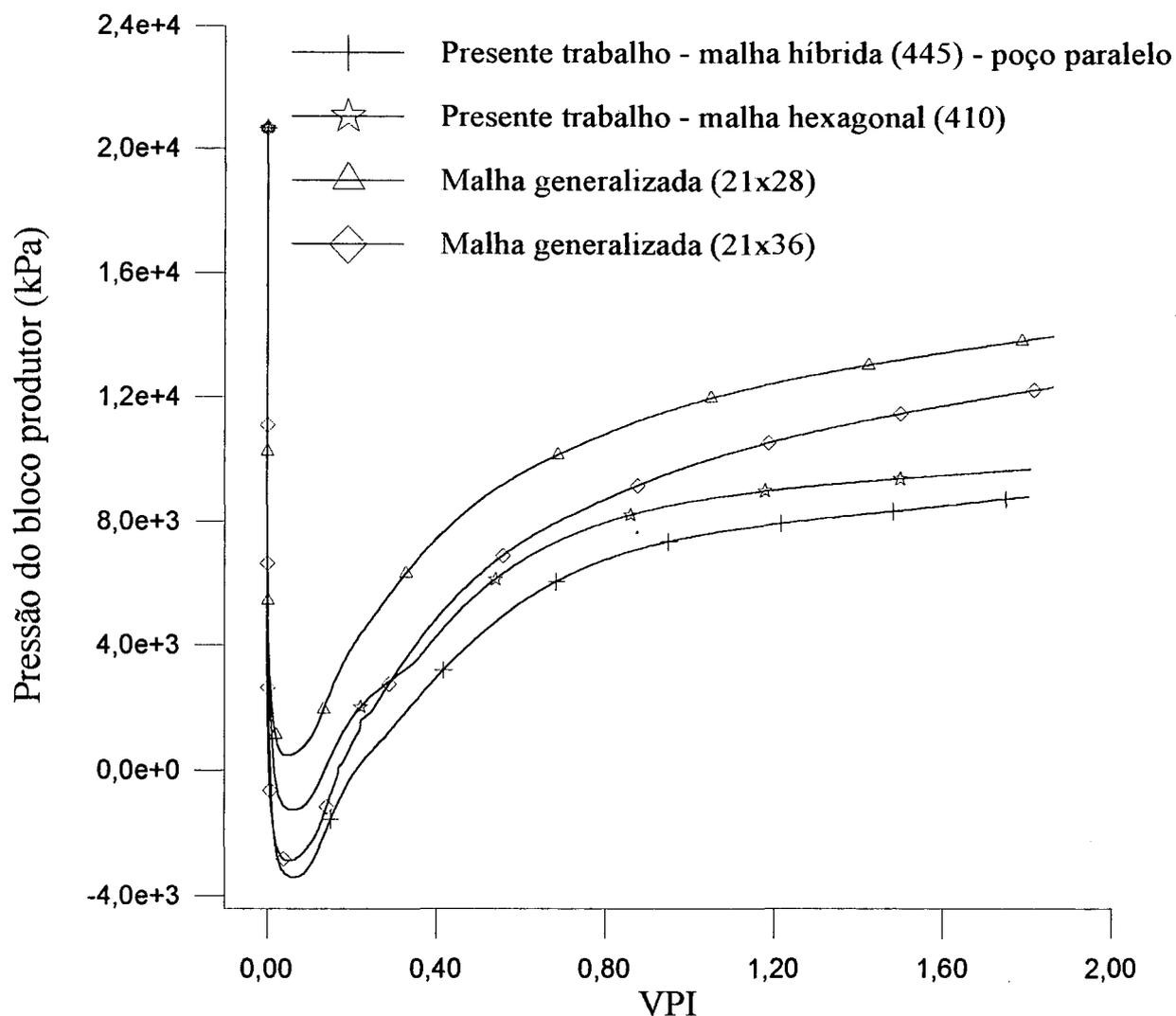
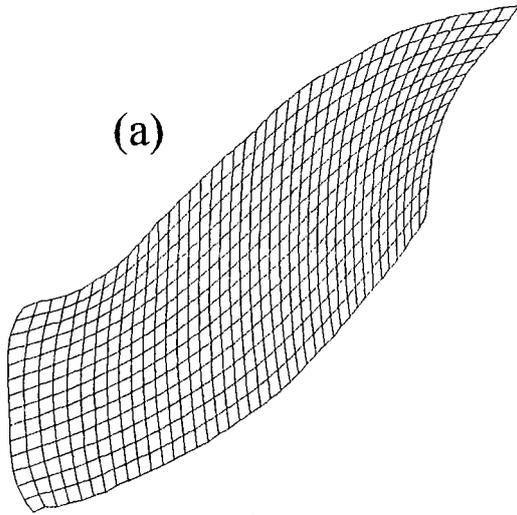


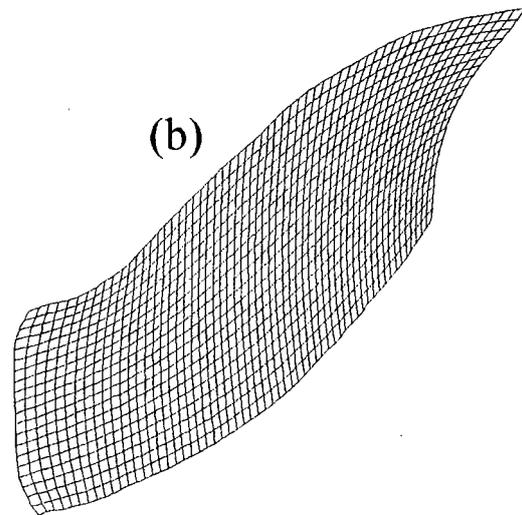
Fig. 38 - Pressão - comparação com o SIRP-3D - caso 2

O último teste utilizando-se o SIRP-3D como comparação, é para uma configuração mais próxima daquelas encontradas em recuperação de petróleo. A configuração é composta de 8 (oito) poços, sendo que 6 (seis) são poços produtores e 2 (dois) injetores. A Fig. (39) apresenta algumas das malhas utilizadas para os testes. A Tab. (6) apresenta os dados físicos e geométricos, a Eq. (99) contém os dados de permeabilidade relativa e as curvas de viscosidade empregadas foram aquelas da Eq. (98).



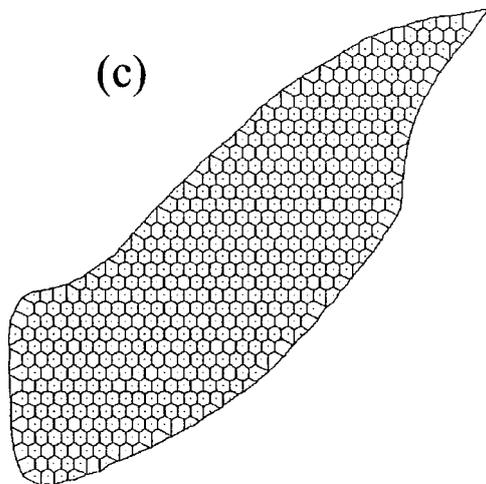
(a)

Malha generalizada (560)



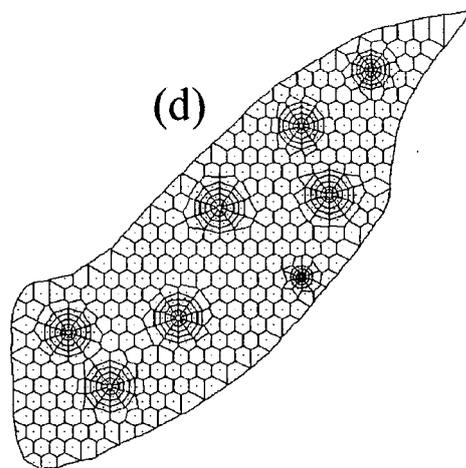
(b)

Malha generalizada (1160)



(c)

Malha hexagonal (559)



(d)

Malha hexagonal-híbrida(672)

Fig. 39 - Algumas das malhas utilizadas para a configuração de oito poços

Tab. 6 - Dados físicos e geométricos do reservatório - caso 3

Dados do reservatório	Condição inicial	Propriedades físicas
$k = 3,0 \times 10^{-13} \text{ m}^2$ $h = 15 \text{ m}$ $A = 1,82 \times 10^6 \text{ m}^2$ $\phi = 0,30$ $r_w = 0,122 \text{ m}$	$S_{wi} = 0,20$ $P_i = 2,068427 \times 10^7 \text{ Pa}$ $S_{or} = 0,20$	$B_o = B_w = 1$ a $2,068427 \times 10^7 \text{ Pa}$ $P_c = 0$ $c_o = c_w = 7,25 \times 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$ $\bar{q}_{11} = \bar{q}_{13} = -9,2 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ $\bar{q}_{12} = -1,1 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ $\bar{q}_{14} = -5,52 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ $\bar{q}_{15} = \bar{q}_{16} = -7,36 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ $\bar{q}_{w1} = 2,94 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ $\bar{q}_{w2} = 2,024 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$

$$K_{rw} = (S_w - 0,2)(-250S_w^2 + 325S_w - 55)/27 \quad (99)$$

$$K_{ro} = 1 - K_{rw}$$

Para a configuração de 8 poços utilizando malhas generalizadas (SIRP-3D) e hexagonais (presente trabalho) o poço produtor ou injetor foi localizado no volume mais próximo de sua posição correta. Ou seja, para cada posição de poço foi procurado o volume para o qual a distância do seu ponto gerador estava mais próximo da posição do poço, e neste volume foi localizado o poço. Observe que com o refinamento da malha ocorre também uma mudança de orientação da mesma e isto dificulta a convergência da localização dos poços quando malhas mais refinadas são empregadas. As Figs. (40) e (41) apresentam a variação da localização dos poços para a malha generalizada e hexagonal, respectivamente quando as mesmas são refinadas. Para melhor visualização as distâncias da posição correta estão ampliadas por um fator de 8. Estas duas figuras facilitarão o entendimento das curvas de recuperação, corte de água e pressão apresentadas nas Figs. (42) a (50) para três dos poços produtores. Com relação a localização dos poços para a malha hexagonal-híbrida, o bloco central de cada região cilíndrica foi localizado na

posição de cada poço, de forma que o ponto (nó) do volume e posição do poço coincidam.

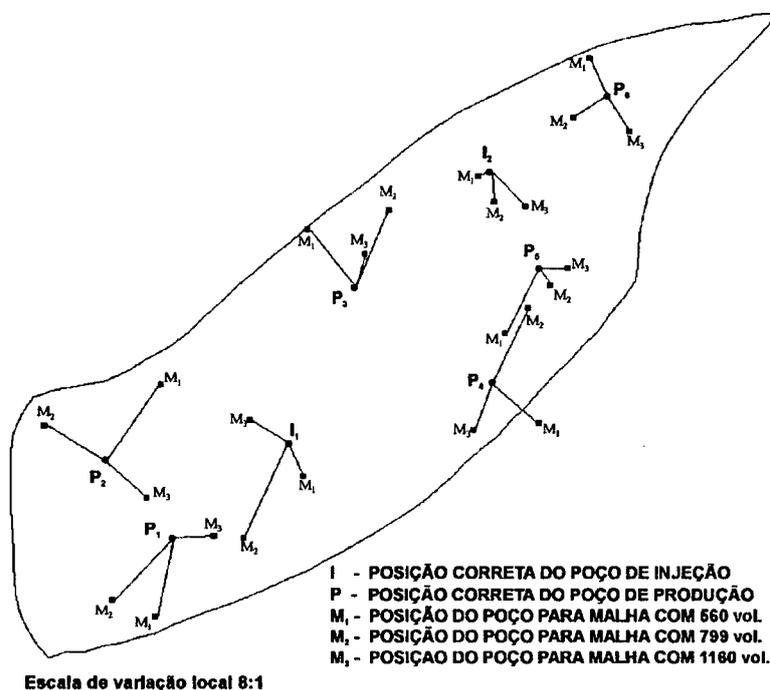


Fig. 40 - Erro de localização dos poços para a malha generalizada

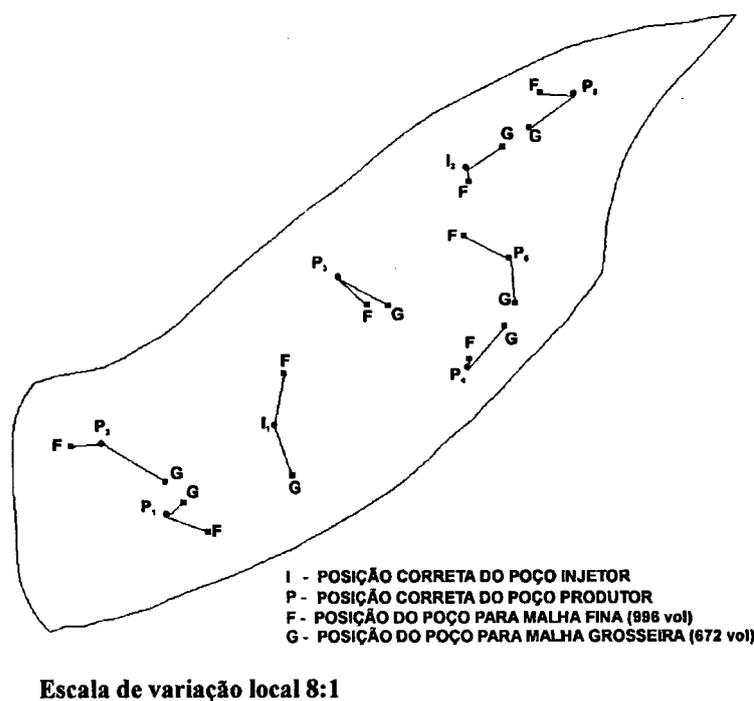


Fig. 41 - Erro de localização dos poços para a malha hexagonal

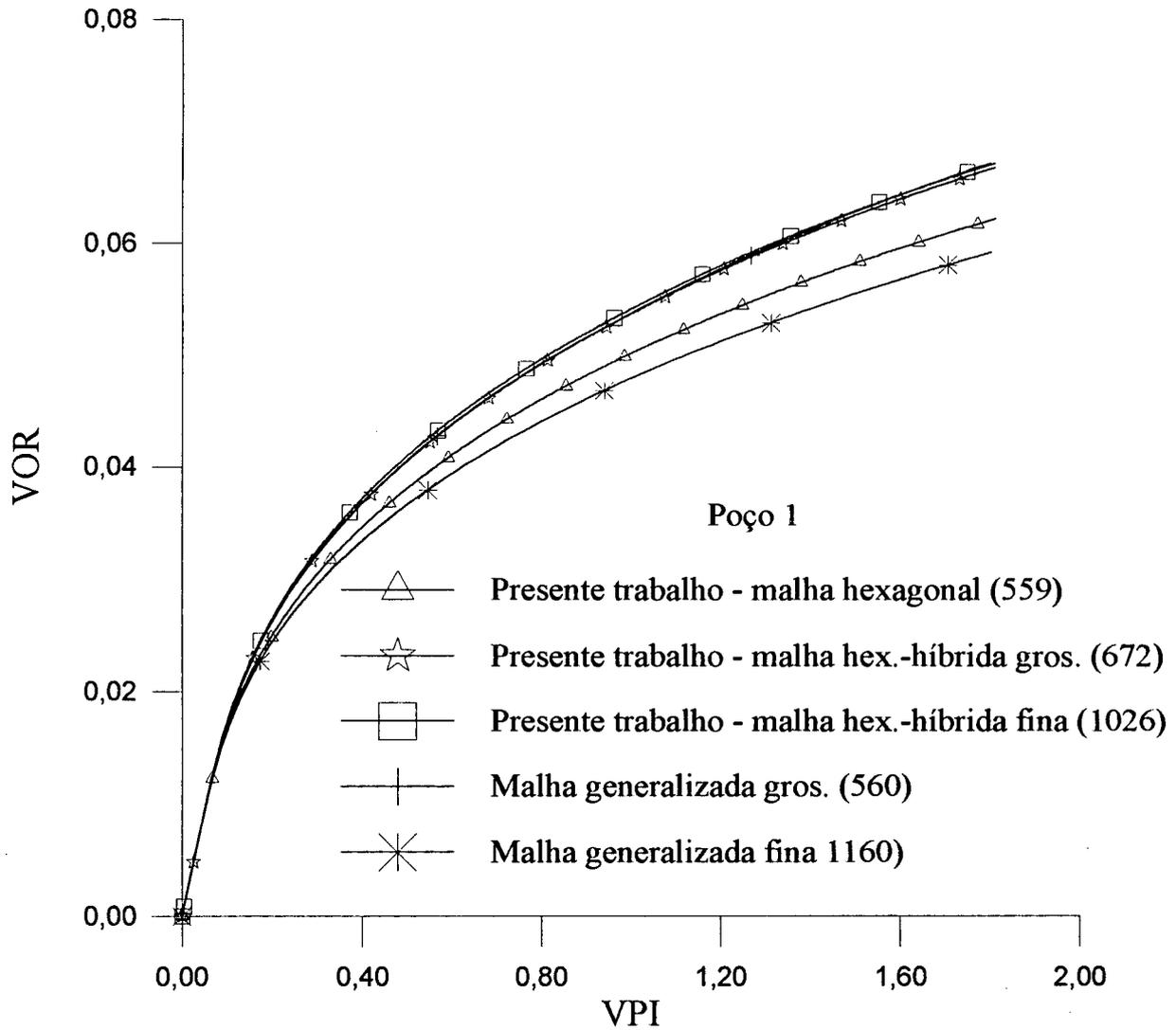


Fig. 42 - Recuperação do poço 1 - comparação com o SIRP-3D - caso 3

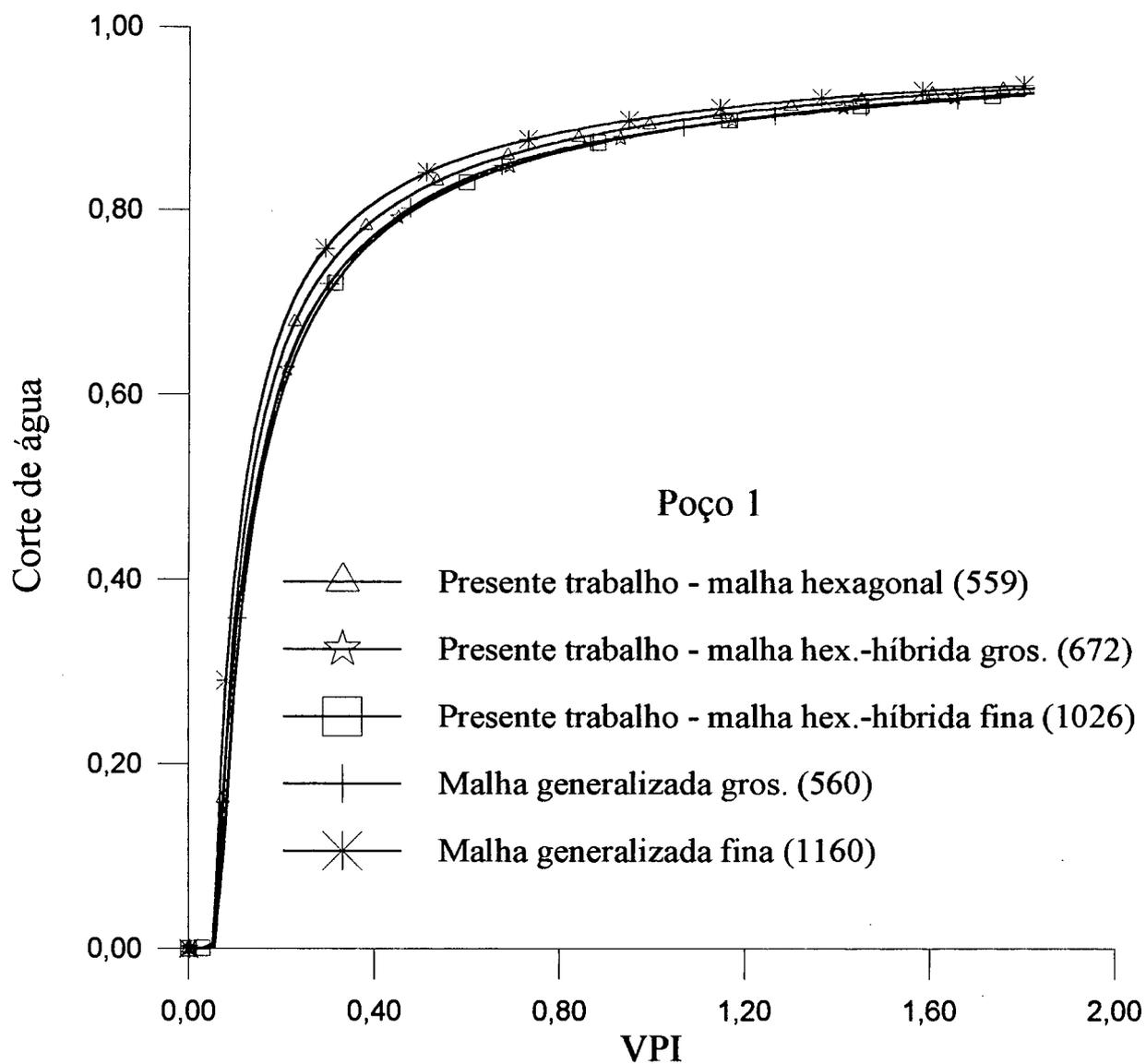


Fig. 43 - Corte de água do poço 1 - comparação com o SIRP-3D - caso 3

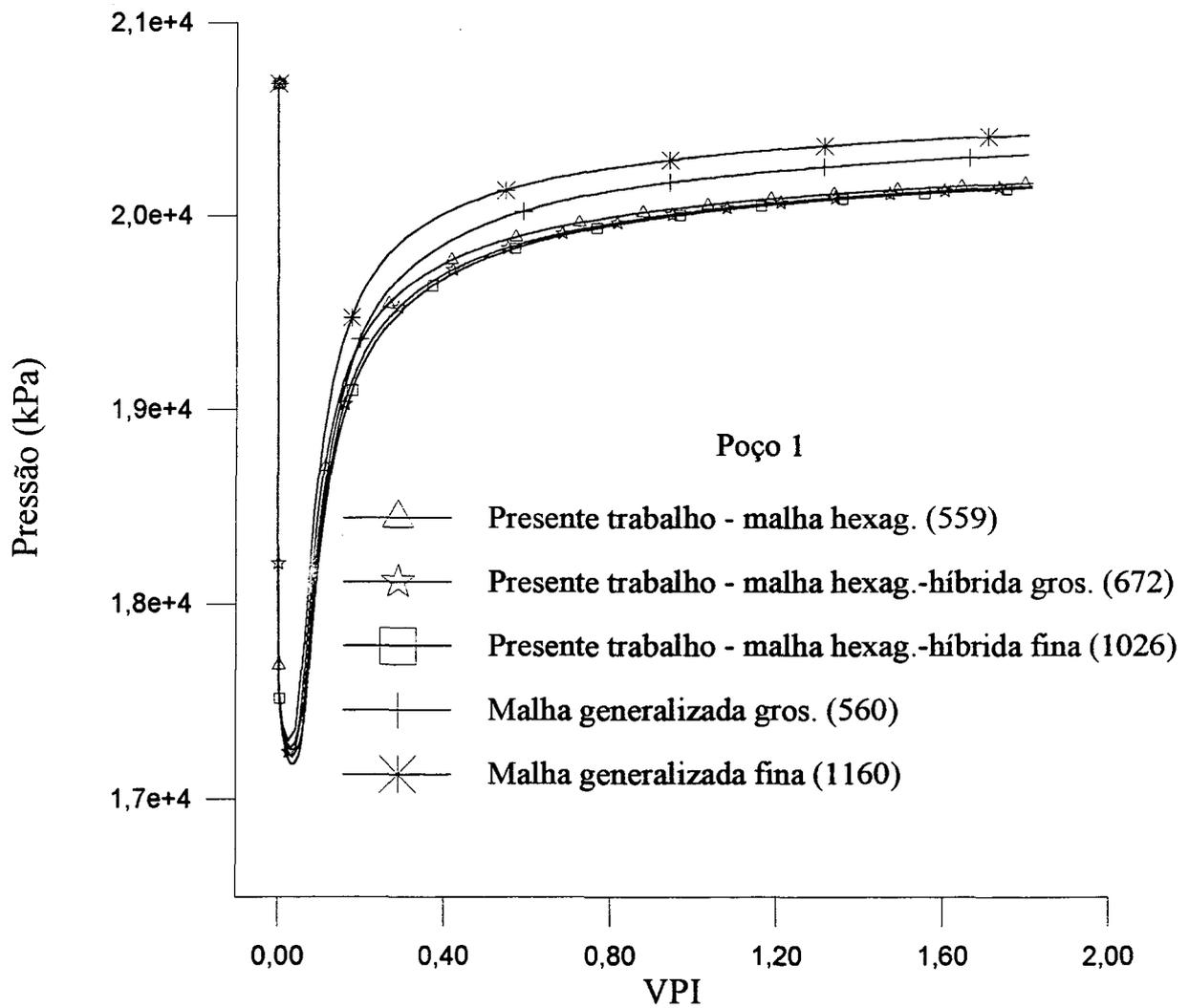


Fig. 44 - Pressão do poço 1 - comparação com o SIRP-3D - caso 3

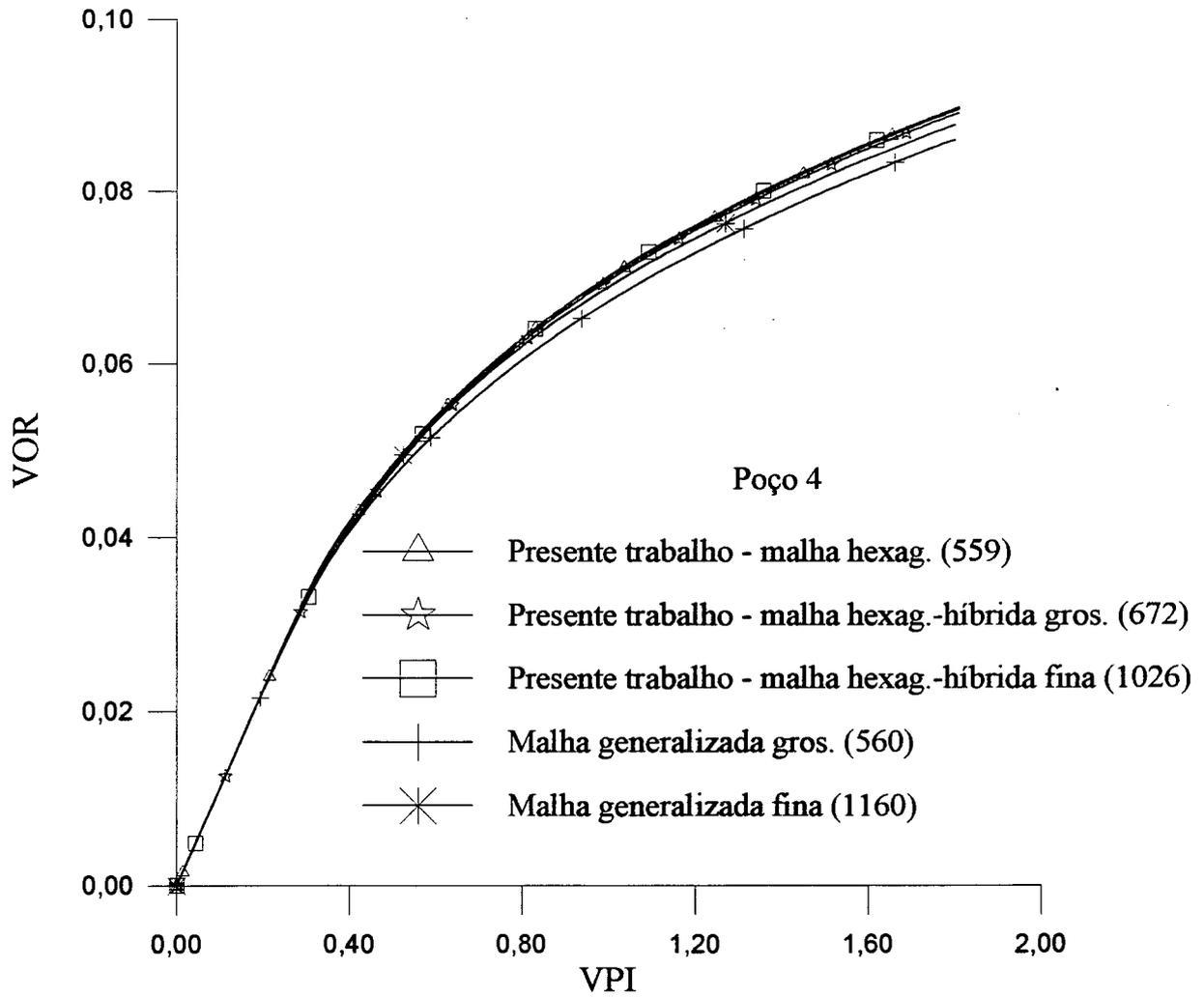


Fig. 45 - Recuperação do poço 4 - comparação com o SIRP-3D - caso 3

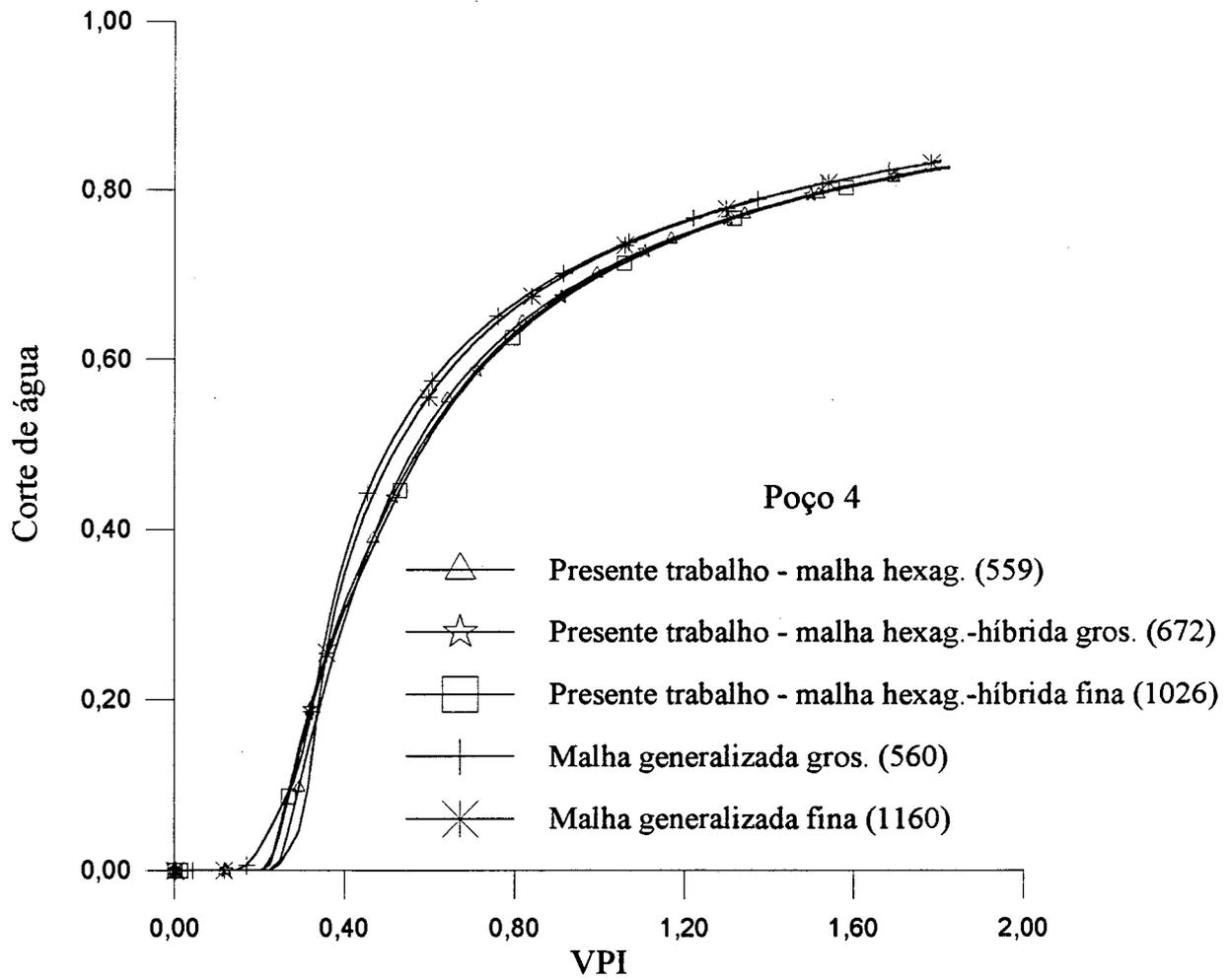


Fig. 46 - Corte de água do poço 4 - comparação com o SIRP-3D - caso 3

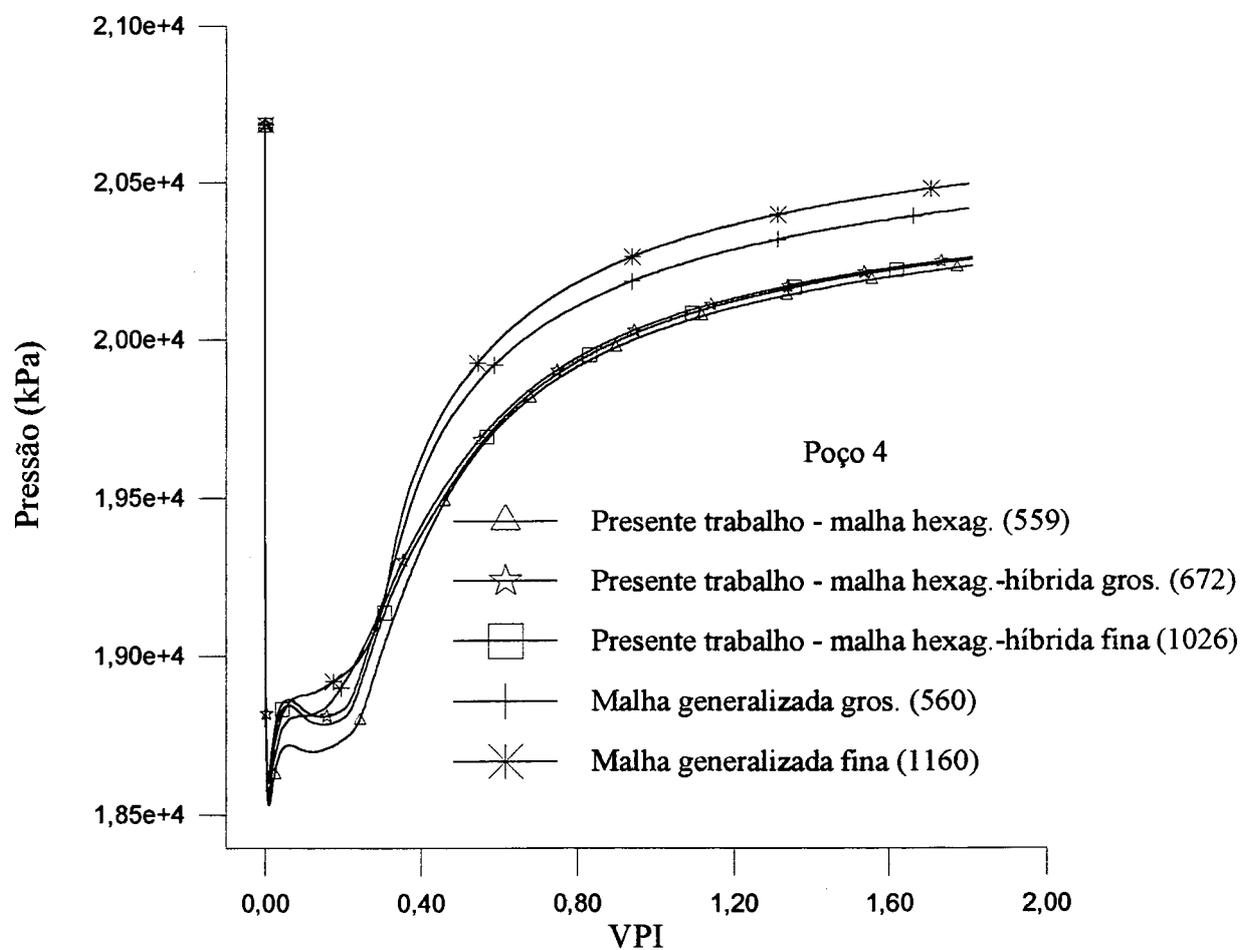


Fig. 47 - Pressão do poço 4 - comparação com o SIRP-3D - caso 3

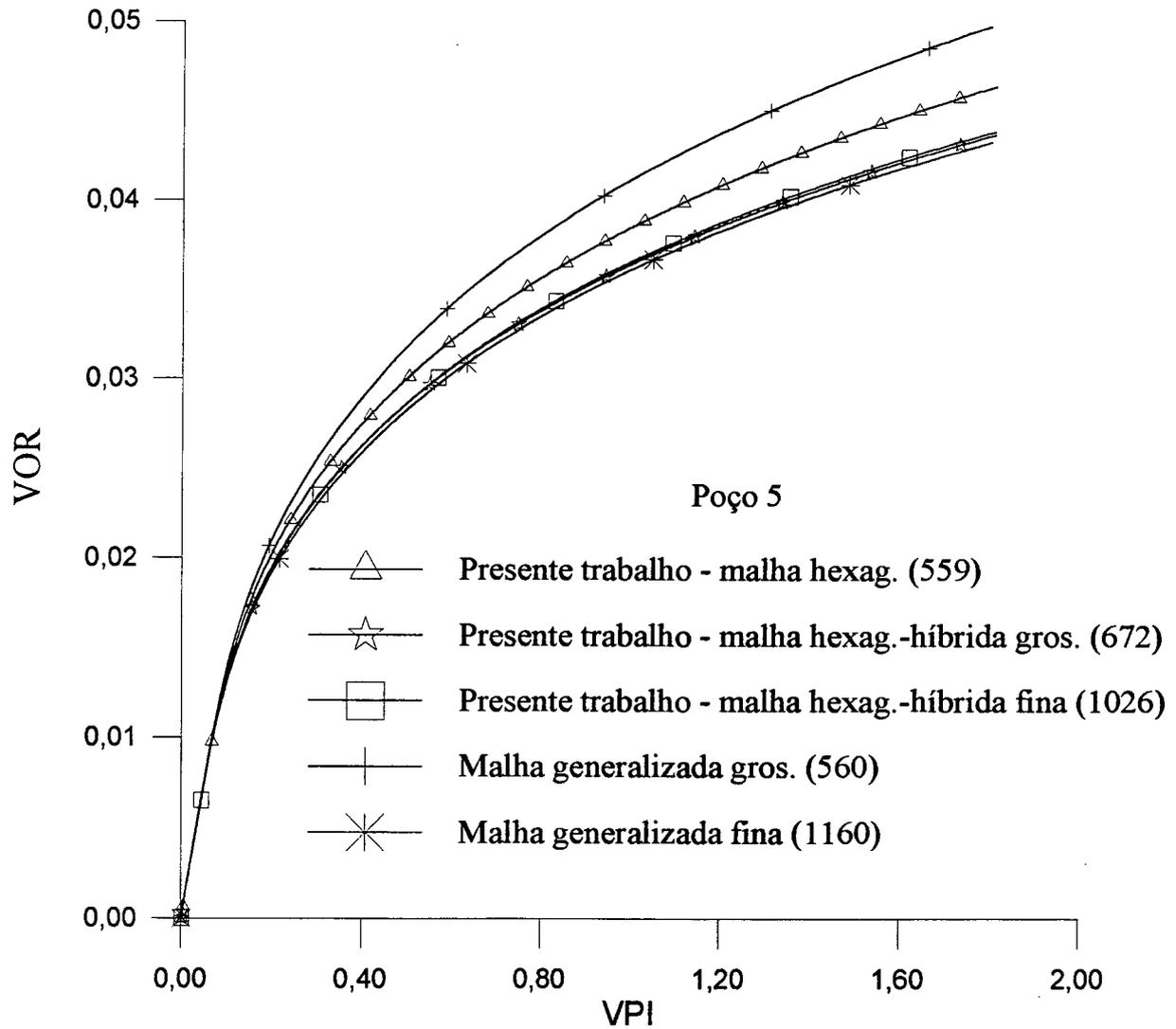


Fig. 48 - Recuperação do poço 5 - comparação com o SIRP-3D - caso 3

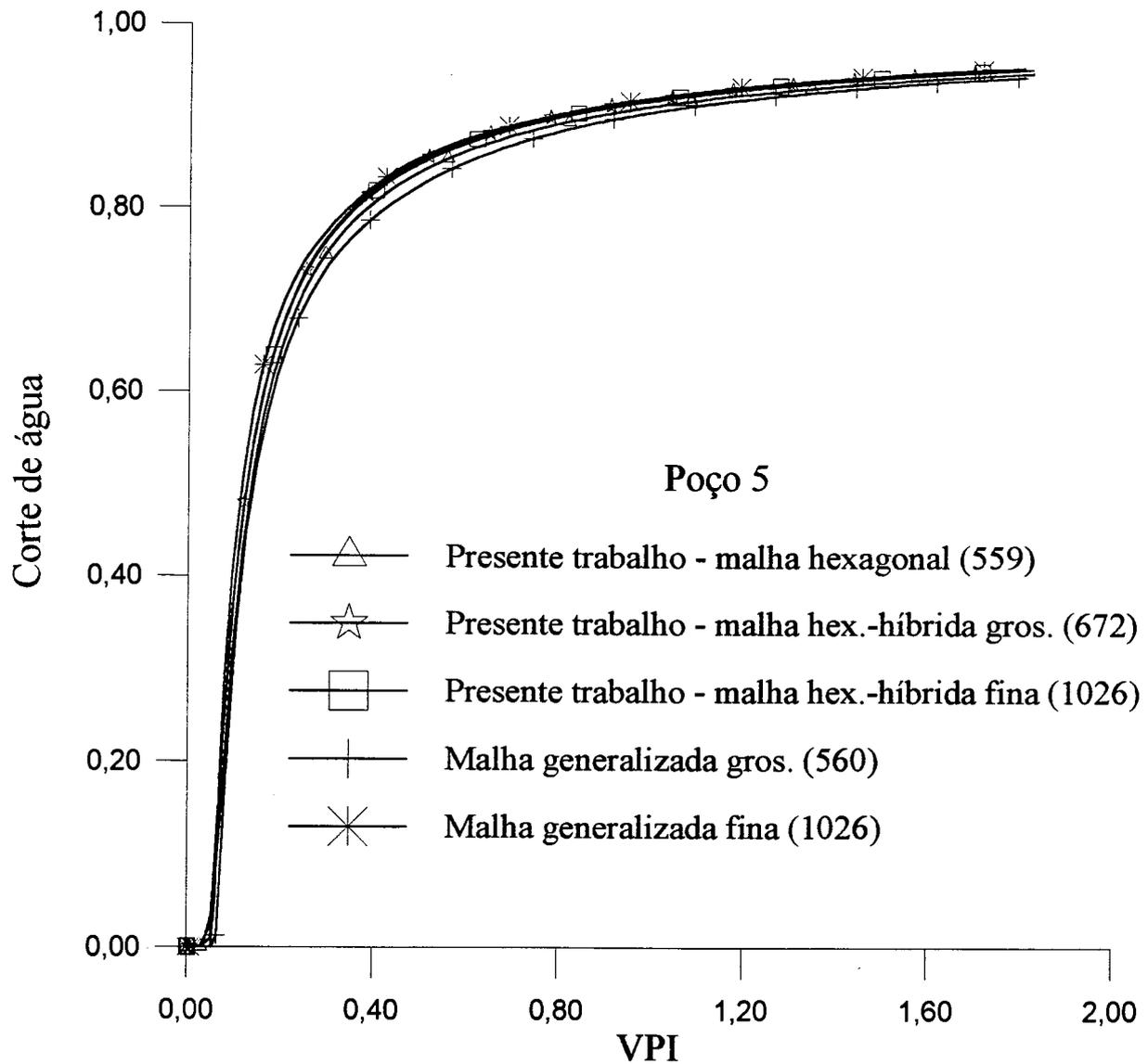


Fig. 49 - Corte de água do poço 5 - comparação com o SIRP-3D - caso 3

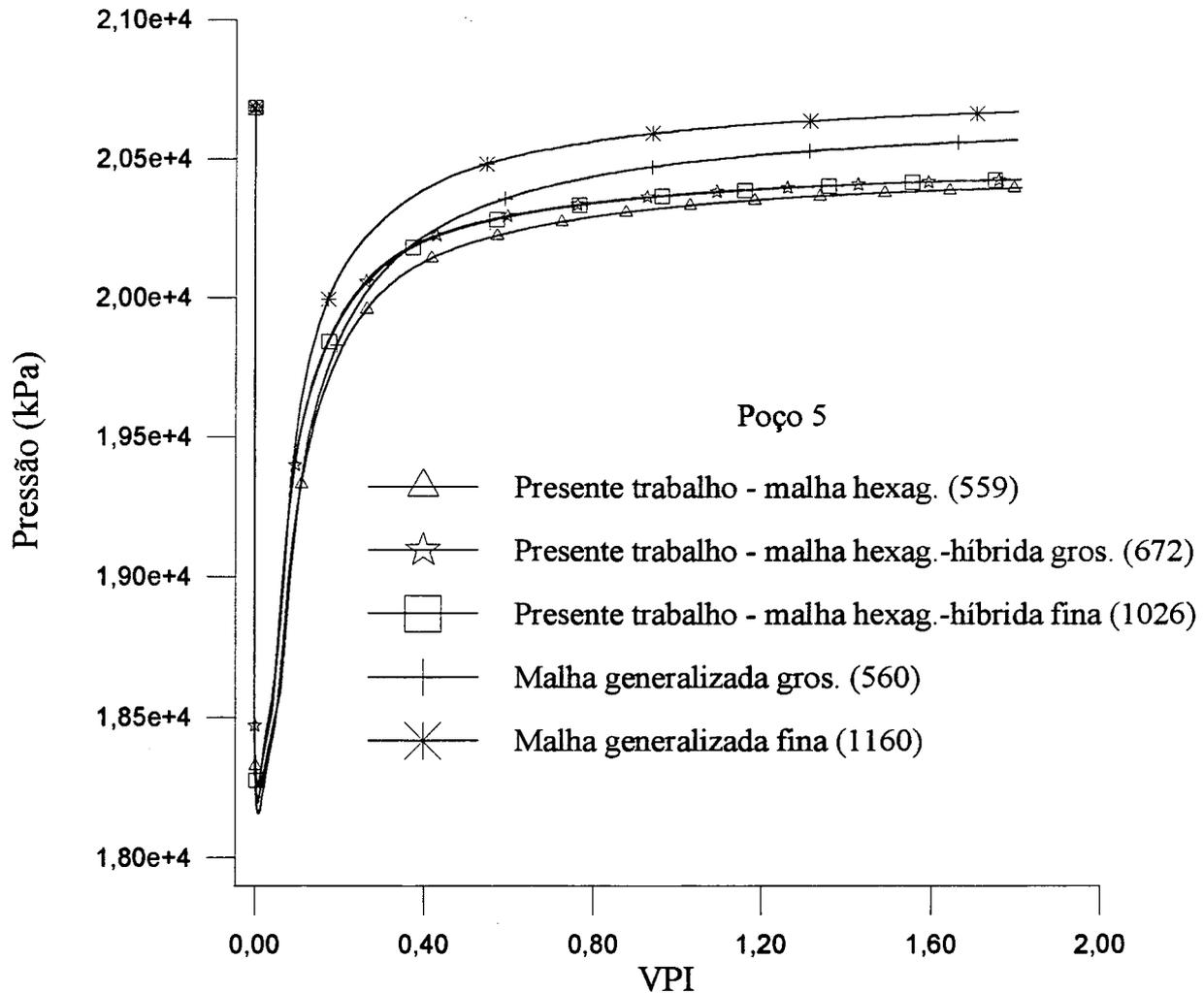


Fig. 50 - Pressão do poço 5 - comparação com o SIRP-3D - caso 3

Nas Figs. (42) a (50) observa-se que a malha hexagonal-híbrida (672) forneceu resultados bastantes próximos a malha hexagonal-híbrida fina (1026), para as curvas de recuperação, corte de água e pressão de poço, indicando uma razoável independência da malha hexagonal híbrida. Com relação ao comportamento das malhas generalizada e hexagonal o que se pode afirmar é que da forma como foram localizados os poços e distribuídas as vazões, estar-se-á resolvendo problemas distintos e evidentemente não se pode esperar nenhuma concordância dos resultados. Com estes tipos de malhas o que parece mais correto é dividir a vazão de cada

poço nos volumes que tiverem alguma face em comum. Nesse caso deveria-se esperar uma concordância dos resultados ou mesmo uma convergência dos mesmos quando da utilização de malhas mais refinadas.

#### 5.4 - Análise de Caso

O objetivo desta seção é estudar o efeito da pressão capilar nas curvas de recuperação. Devido a pouca disponibilidade de resultados que verifiquem o seu efeito em escoamentos em reservatórios 2D, os resultados desta seção não são comparados com dados da literatura.

A principal característica matemática quando da inclusão da pressão capilar nas equações de conservação é tornar as equações hiperbólicas em equações parabólicas. As equações hiperbólicas, prevêm a formação de soluções descontínuas (choques), e conforme Dake (1978), é nas regiões de choque que o gradiente de pressão capilar é máximo. Fisicamente, a pressão capilar reduz ou atenua o choque. Antes de se analisar alguns dos resultados obtidos é instrutivo analisar a forma do fluxo fracionário da água. Conforme pode ser encontrado em Lake (1989), para um escoamento unidimensional e incompressível sem efeito da força gravitacional, o fluxo fracionário da água pode ser dado por,

$$f_w(S_w) = \frac{\lambda_w}{\lambda_w + \lambda_o} + \frac{k \lambda_w (\partial P_c / \partial x)}{(1 + \lambda_w / \lambda_o) \bar{V}_t} \quad (100)$$

onde  $\bar{V}_t$  é a velocidade total das duas fases. O gradiente da pressão capilar na Eq. (100) pode ser escrito como,

$$\frac{\partial P_c}{\partial x} = \left( \frac{dP_c}{dS_w} \right) \left( \frac{\partial S_w}{\partial x} \right) = P'_c \left( \frac{\partial S_w}{\partial x} \right) \quad (101)$$

O sinal do gradiente de pressão capilar é sempre positivo para o deslocamento do óleo pela água, independentemente da molhabilidade da rocha, porque a derivada da pressão capilar

em relação à saturação é negativa e este também é o sinal do gradiente de saturação. Desta forma, a pressão capilar tende a aumentar o fluxo fracionário da água.

Reescrevendo a Eq. (15) para os componentes óleo (o) e água (w) e considerando o escoamento incompressível,  $B_o = B_w = 1$ , pode-se escrever a equação do componente água como,

$$-\vec{\nabla} \cdot [f_w^* \vec{V}_t + \lambda_o f_w^* \frac{\partial P_c}{\partial x}] + q_w + q_o = \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} \quad (102)$$

onde,

$$\vec{V}_t = \vec{V}_o + \vec{V}_w = \text{constante} \quad (103)$$

e

$$f_w^* = \frac{\lambda_w}{\lambda_o + \lambda_w} \quad (104)$$

Combinando-se as Eqs. (101) e (103) pode-se escrever a Eq. (102) como,

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \vec{V}_t \cdot \vec{\nabla} f_w^* + \vec{\nabla} \cdot (-\lambda_o f_w^* P_c' \vec{\nabla} S_w) - q_w - q_o = 0 \quad (105)$$

O termo  $-\lambda_o f_w^* P_c' > 0$ , pode ser interpretado como uma difusão. Desta forma, a pressão capilar torna as equações de conservação originalmente hiperbólicas em equações parabólicas.

Apresenta-se a seguir alguns resultados para dois casos analisados. No primeiro caso as densidades dos fluidos (óleo e água) são iguais. A malha empregada foi a malha hexagonal-híbrida similar à aquela apresentada na Fig. 21. Os dados físicos e geométricos e as curvas de permeabilidades relativas são aqueles já listados na Tabs. 4 e 5, respectivamente. A única exceção são as vazões injetadas e produzidas. Para este caso a vazão injetada foi  $1,8401 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$  e a vazão produzida (óleo + água) em cada poço foi igual a  $9,2005 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ . Os dados de pressão

capilar foram extraídos da Tab. 9.3 do trabalho de Palagi (1992) e estão mostrados na Tab. 7.

Tab. 7 - Pressão capilar

Saturação	0,22	0,30	0,40	0,50	0,60	0,80	0,90	1,00
$P_c, \text{base}$ (kPa)	48,258	27,576	20,682	17,235	13,788	6,894	3,447	0,000

A Fig. (51) apresenta as curvas de recuperação e a Fig. (52) mostra o comportamento da pressão e saturação ao longo da linha injetor-produtor para três curvas de pressão capilar. Pode-se verificar nestas figuras que para valores baixos de pressão capilar não existe quase nenhuma influência da mesma no comportamento das curvas. Para valores maiores ( $50 \cdot P_c, \text{base}$ ) ocorreu uma maior variação nas curvas de recuperação. Apesar de não reportado nas Figs. (51) e (52) foi simulado com os mesmos dados já apresentados o caso para  $P_c$  igual a zero. Os resultados foram idênticos à aqueles para  $P_c = P_c, \text{base}$ .

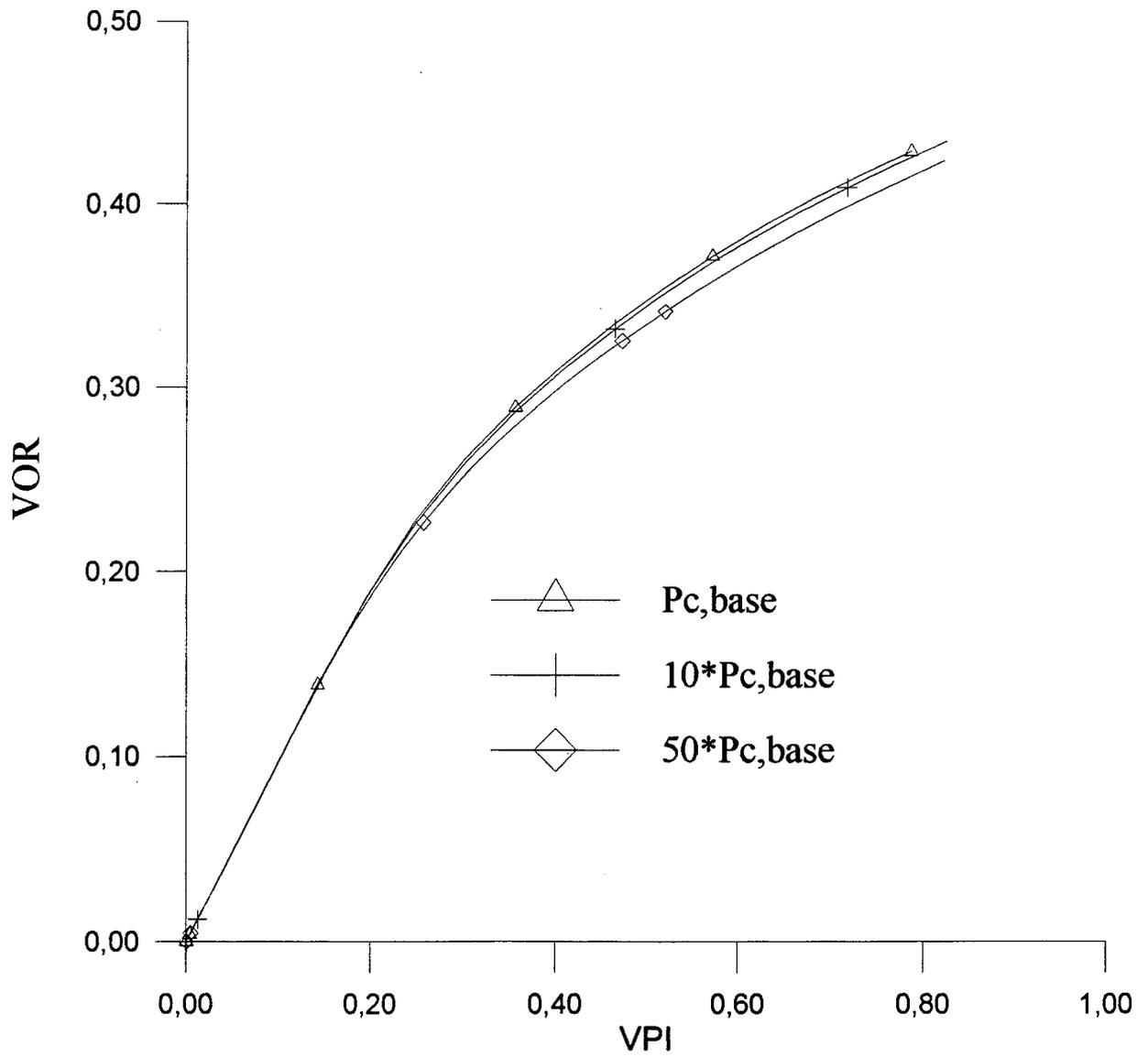


Fig. 51 - Recuperação com pressão capilar - caso 1

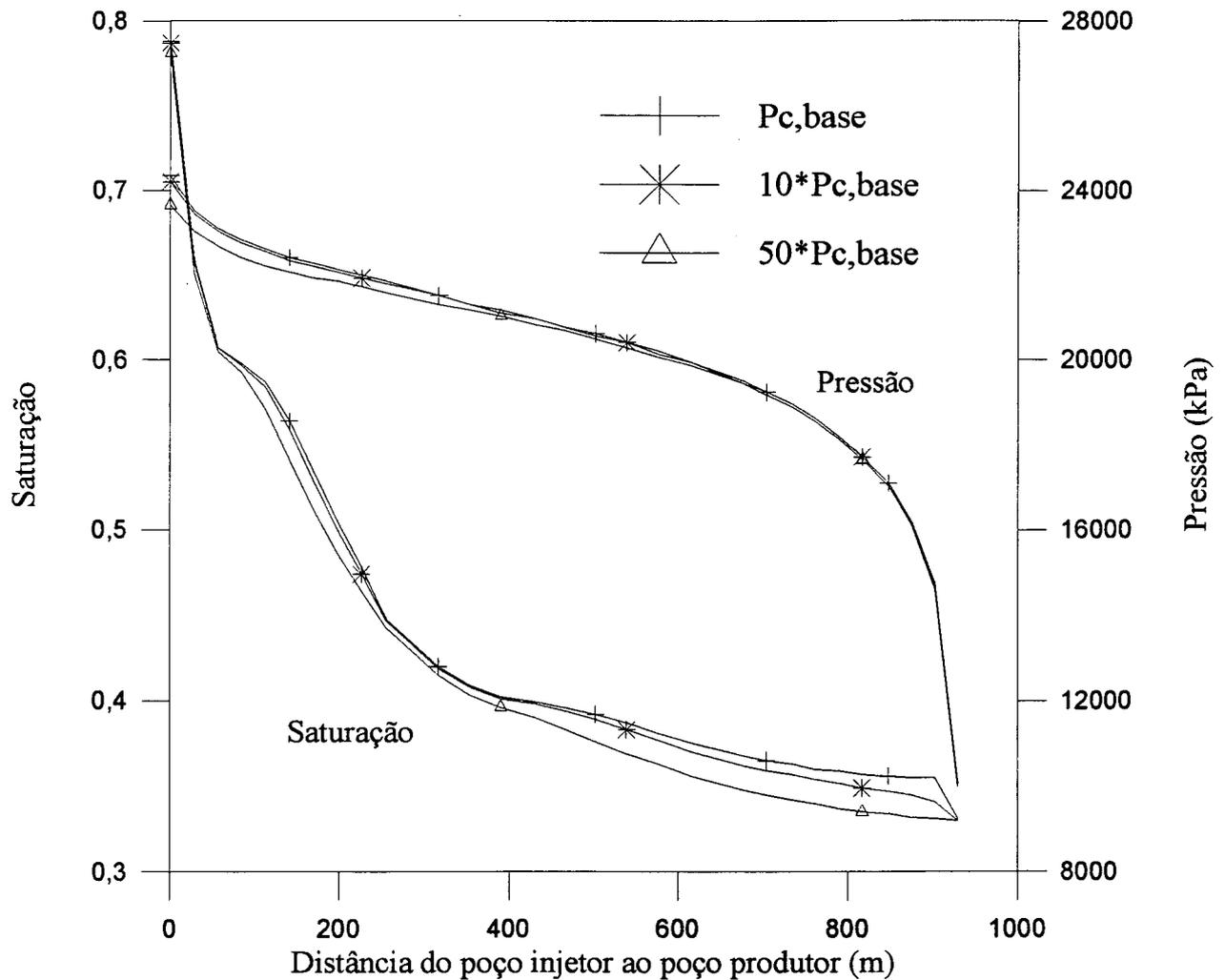


Fig. 52 - Saturação e pressão com pressão capilar - caso 1

O segundo teste realizado foi para o caso da densidade da água diferente da densidade do óleo. A Tab. 8 apresenta as compressibilidades e fatores de formação volumétricos. O restante dos dados foram iguais aos do caso anterior. As Figs. (53) e (54) apresentam as curvas de recuperação, saturação e pressão ao longo da linha injetor-produtor.

Tab. 8 - Fator de formação volumétrico e compressibilidade

$B_w = 1,1018 \text{ a } 20,682 \text{ kPa}$	$c_w = 1,45054 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$
$B_o = 1,1018 \text{ a } 20,682 \text{ kPa}$	$c_o = 7,25269 \times 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$

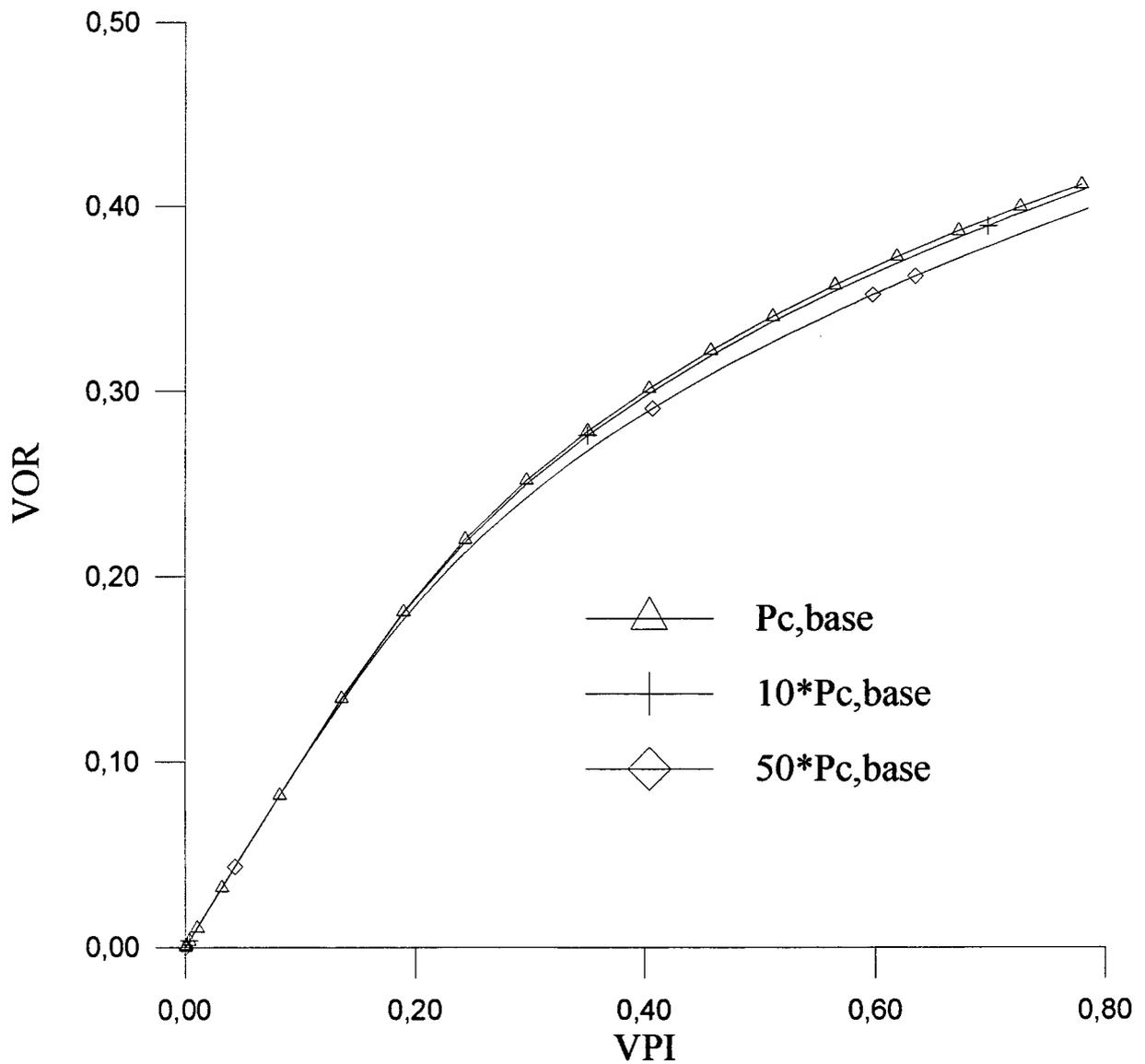


Fig. 53 - Recuperação com pressão capilar - caso 2

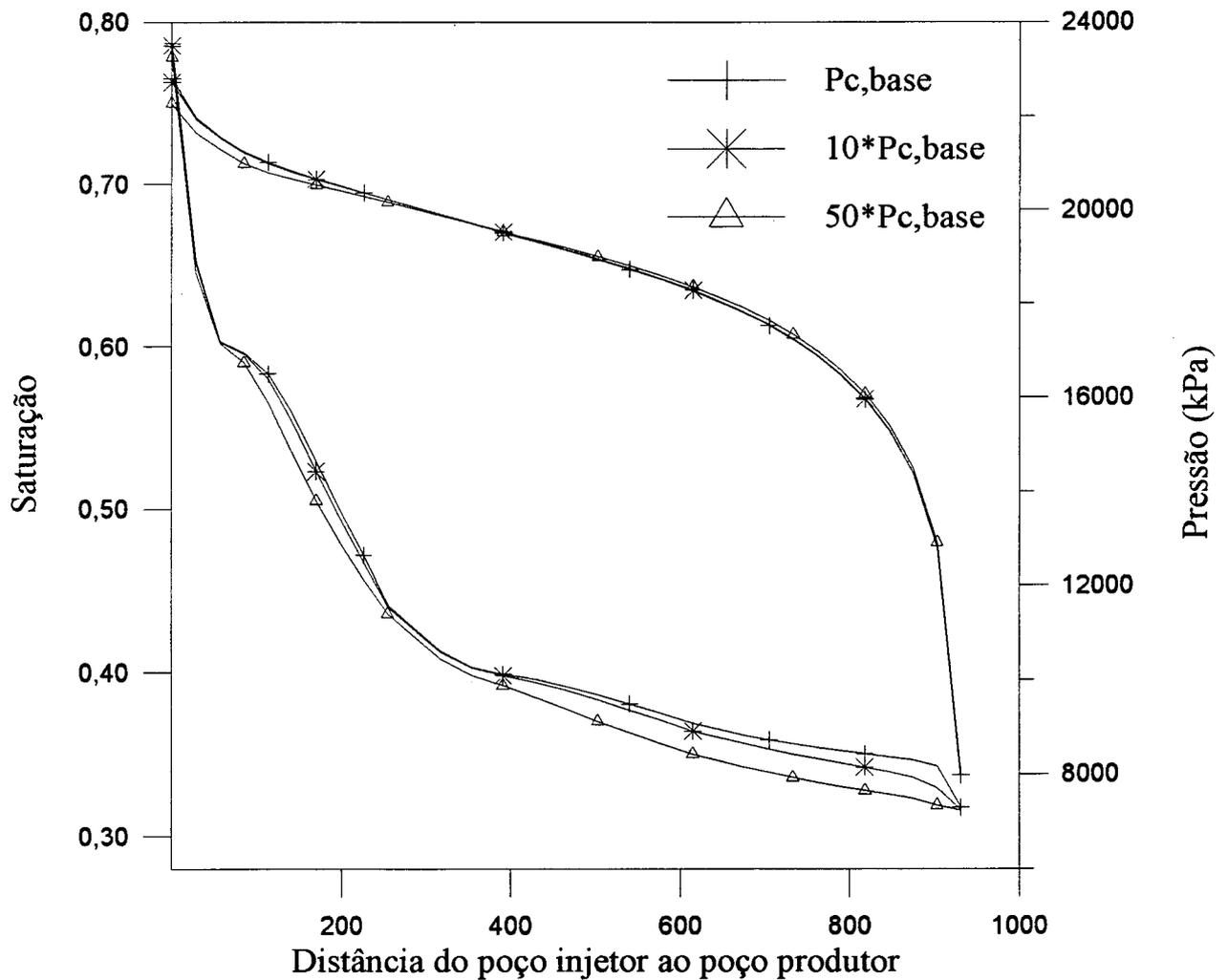


Fig. 54 - Saturação e pressão com pressão capilar - caso 2

Das Figs. (53) e (54) observa-se que o comportamento das curvas de recuperação e pressão foram bastante similares as curvas já apresentadas nas Figs. (51) e (52). Apesar do efeito da pressão capilar ter sido pequena, observa-se que em termos de recuperação o seu comportamento está de acordo com o esperado via Eq. (100), ou seja, a pressão capilar tende a aumentar a fluxo fracionário de água e conseqüentemente diminuir o volume de óleo recuperado.

## 6.1 - Introdução

O objetivo deste capítulo é comparar a eficiência de três metodologias de linearização das equações do modelo *black-oil*: TI, IMPES e AIM. As comparações foram realizadas em termos do tempo de CPU, número de iterações no tempo e número de iterações de Newton necessárias para a obtenção da convergência. No caso da metodologia AIM, atenção também é dada ao efeito dos diferentes critérios de troca de implicitude no seu desempenho.

Existem diversos trabalhos na literatura que empregam as metodologias deste capítulo. Entretanto, os critérios de parada das iterações newtonianas, em sua maioria, não são descritos, o que dificulta a comparação da eficiência das mesmas. Além do mais, este é provavelmente um dos poucos trabalhos empregando malhas com conectividade variada que utiliza as três metodologias. Buscou-se então analisar alguns dos parâmetros que influenciam na convergência destes métodos.

Antes de apresentar o desempenho das metodologias, investigou-se inicialmente o efeito do critério de convergência das iterações newtonianas no erro de balanço de volume dos componentes óleo e água, no número de iterações de Newton e no número de iterações no *solver*.

Outro ponto que deve ser enfatizado é que o sistema linearizado não é consistente, devido a diferença dos valores numéricos das grandezas que estão sendo calculadas ( $P_o$  e  $S_w$ ). Devido a este fato, não se pode afirmar rigorosamente que normas de vetores, produtos escalares, etc. sejam bem definidos. A rigor o sistema deveria ser homogeneizado. Entretanto, no presente trabalho isto não foi realizado. Uma forma de homogeneização bastante empregado por pesquisadores de elementos finitos é:  $D_1^{-1/2} J D_1^{-1/2} z = D_1^{-1/2} R$ .

## 6.2 - Efeito do Critério de Parada das Iterações Newtonianas

O primeiro caso analisado é para o escoamento cujas curvas de permeabilidade relativa são funções quadráticas da saturação. Este problema já foi estudado no Cap. 5 do presente trabalho. Os dados físicos e geométricos encontram-se na Tab. 3 e as curvas de permeabilidade relativa e razão de viscosidade são fornecidas pela Eq. (94). O cálculo do erro de volume global de cada componente ( $EBC_p$ ) foi obtido via Eq. (106). O numerador da Eq. (106), a cada instante da simulação, representa o erro no volume da fase  $p$  medido desde o instante inicial da simulação e o denominador o volume de água injetada.

$$EBC_p = (V_{i,p} + \sum \bar{q}_{wi}\Delta t - \sum \bar{q}_{pp}\Delta t - V_{f,p}) / \sum \bar{q}_{wi}\Delta t \quad (106)$$

onde,  $V_{i,p}$  é o volume inicial da fase  $p$ ,  $V_{f,p}$  o volume final da fase  $p$  avaliada em um determinado instante de tempo e  $\bar{q}_{wi}$  o volume total de água injetada em cada intervalo de tempo  $\Delta t$  e  $\bar{q}_{pp}$  a vazão total de água ou óleo produzida por unidade de tempo.

As Tabs. (9) e (10) mostram os resultados obtidos para as razões de viscosidade iguais a 10 e 50, respectivamente. Nas tabelas apresentadas NIN é o número total de iterações de Newton, NIS o número total de iterações no *solver* e NIT o número de intervalos de tempo. O *solver* empregado foi o GMRES preconditionado à direita com uma ILU(1). Nas tabelas  $\|\mathbf{r}\|$  é a norma do resíduo após um determinado número de iterações no *solver* e  $\|\mathbf{r}_0\|$  é a norma do resíduo inicial calculado com o vetor inicial  $\mathbf{x}_0$ , Eq. (93). Nos testes realizados neste capítulo foi empregado o algoritmo de passo de tempo variável conforme descrito na seção 3.8 do presente trabalho. O valor máximo do passo de tempo empregado foi de 50 dias e foi utilizado os seguintes valores para os parâmetros de ajuste do passo de tempo: 0,05 para DSLIM e 689,5 kPa para DPLIM.

Tab. 9 - Caso típico de reservatório - M=10 - Malha hexagonal-híbrida com 445 volumes

$$\text{VPI} = 1,82 - \square - |r/r_o| \leq 10^{-2}; \circ - |r/r_o| \leq 10^{-3}$$

Tolerância		NIN	NIS	NIT	EBC <sub>p</sub> (%)	
$\Delta P^*_{o,max}$ (kPa)	$\Delta S^*_{w,max}$				óleo	água
$\square 0,6895$	0,0001	848	12.024	358	$1,13 \times 10^{-6}$	$3,39 \times 10^{-6}$
$\square 6,895$	0,0001	823	11.717	358	$1,87 \times 10^{-6}$	$3,84 \times 10^{-6}$
$\square 34,475$	0,0001	820	11.710	358	$1,88 \times 10^{-6}$	$3,84 \times 10^{-6}$
$\square 68,950$	0,0001	819	11.709	358	$1,88 \times 10^{-6}$	$3,84 \times 10^{-6}$
$\square 6,895$	0,0005	795	11.260	358	$6,46 \times 10^{-6}$	$7,49 \times 10^{-6}$
$\square 34,475$	0,0005	790	11.243	358	$6,47 \times 10^{-6}$	$7,49 \times 10^{-6}$
$\square 68,950$	0,0005	789	11.242	358	$6,47 \times 10^{-6}$	$7,49 \times 10^{-6}$
$\square 34,475$	0,0010	754	10.635	358	$3,98 \times 10^{-5}$	$5,30 \times 10^{-5}$
$\square 68,950$	0,0010	752	10.629	358	$3,99 \times 10^{-5}$	$5,30 \times 10^{-5}$
$\square 68,950$	0,0050	504	6.006	358	$7,89 \times 10^{-4}$	$1,88 \times 10^{-3}$
$\circ 68,950$	0,0010	752	14.713	358	$2,62 \times 10^{-6}$	$1,76 \times 10^{-5}$
$\circ 68,950$	0,0050	504	9.843	358	$2,92 \times 10^{-4}$	$2,15 \times 10^{-4}$

Tab. 10 - Caso típico de reservatório - Malha hexagonal-híbrida com 445 volumes - M=50

$$VPI = 1,82 - \square - |r_i/r_o| \leq 10^{-2}; \circ - |r_i/r_o| \leq 10^{-3}$$

Tolerância		NIN	NIS	NIT	EBC <sub>p</sub> (%)	
$\Delta P^*_{o,max}$ (kPa)	$\Delta S^*_{w,max}$				óleo	água
$\square$ 0,6895	0,0001	804	11.571	343	$1,09 \times 10^{-6}$	$7,83 \times 10^{-6}$
$\square$ 6,895	0,0001	763	11.022	343	$5,03 \times 10^{-6}$	$7,87 \times 10^{-6}$
$\square$ 34,475	0,0001	760	11.015	343	$5,12 \times 10^{-6}$	$7,87 \times 10^{-6}$
$\square$ 68,950	0,0001	759	11.014	343	$5,11 \times 10^{-6}$	$7,87 \times 10^{-6}$
$\square$ 6,895	0,0005	700	9.916	343	$8,06 \times 10^{-6}$	$1,35 \times 10^{-4}$
$\square$ 34,475	0,0005	696	9.905	343	$8,06 \times 10^{-6}$	$1,35 \times 10^{-4}$
$\square$ 68,950	0,0005	695	9.904	343	$8,06 \times 10^{-6}$	$1,35 \times 10^{-6}$
$\square$ 34,475	0,0010	567	7.315	343	$1,46 \times 10^{-4}$	$1,07 \times 10^{-3}$
$\square$ 68,950	0,0010	565	7.310	343	$1,46 \times 10^{-4}$	$1,07 \times 10^{-3}$
$\square$ 68,950	0,0050	436	4.903	343	$1,39 \times 10^{-3}$	$4,11 \times 10^{-3}$
$\circ$ 68,950	0,0010	565	11.810	343	$5,14 \times 10^{-5}$	$5,10 \times 10^{-5}$
$\circ$ 68,950	0,0050	436	8.500	343	$5,25 \times 10^{-4}$	$2,21 \times 10^{-4}$

Das Tabs. (9) e (10), observa-se que  $\Delta P^*_{o,max}$  tem pouca influência no número de iterações de Newton e no erro de balanço de componentes, para valores de  $\Delta P^*_{o,max}$  maiores ou iguais a 6,895 kPa. Este fato pode ser explicado considerando a natureza quase linear de  $B_p$  e  $\mu_p$  com a pressão para os fluidos estudados. A convergência do ciclo iterativo é, portanto, dominada pela variação na saturação ( $\Delta S^*_{w,max}$ ). Observe-se que ocorre um decréscimo no número de iterações de Newton para M=50 quando comparado com M=10. Fisicamente o escoamento para M=50 é mais instável e propicia a formação de "dedos" ou "chifres", sendo portanto mais

dependente da orientação da malha empregada. Entretanto, isto não garante que sua a solução seja mais difícil de ser obtida quando comparado com aquela de  $M=10$ . Apesar dos dados de recuperação não estarem presentes nas tabelas, não existiu nenhuma variação nas curvas de volume de óleo recuperado (VOR). Note-se, também, que restringindo-se o critério de convergência no *solver* consegue-se uma redução nos erros de balanço para um mesmo conjunto de parâmetros de convergência de Newton. Um dos motivos para ocorrência deste fato é que as variações podem ser pequenas mas o valor do resíduo ainda pode ser grande.

Tab. 11 - Configuração de oito poços - Malha hexagonal com 672 volumes - VPI = 1,82

□ -  $\|r\|/r_o \leq 10^{-2}$ ; ○ -  $\|r\|/r_o \leq 10^{-3}$

Tolerância		NIN	NIS	NIT	EBC <sub>p</sub> (%)	
$\Delta P^*_{o,max}$ (kPa)	$\Delta S^*_{w,max}$				óleo	água
□0,6895	0,0001	986	9.418	454	$5,64 \times 10^{-7}$	$1,59 \times 10^{-6}$
□6,895	0,0001	982	9.414	454	$5,64 \times 10^{-7}$	$1,59 \times 10^{-6}$
□34,475	0,0001	981	9.413	454	$5,64 \times 10^{-7}$	$1,59 \times 10^{-6}$
□6,8950	0,0005	835	7.656	454	$1,08 \times 10^{-5}$	$1,31 \times 10^{-4}$
□34,475	0,0005	831	7.651	454	$1,09 \times 10^{-5}$	$1,31 \times 10^{-4}$
□68,950	0,0005	830	7.651	454	$1,09 \times 10^{-5}$	$1,31 \times 10^{-4}$
□34,475	0,0010	648	5.534	454	$1,70 \times 10^{-4}$	$9,41 \times 10^{-4}$
□68,950	0,0010	647	5.553	454	$1,70 \times 10^{-4}$	$9,41 \times 10^{-4}$
□68,950	0,0050	523	4.301	454	$3,84 \times 10^{-4}$	$9,91 \times 10^{-4}$
○68,950	0,0010	647	8.538	454	$7,62 \times 10^{-5}$	$3,45 \times 10^{-5}$
○68,950	0,0050	523	6.981	454	$2,90 \times 10^{-4}$	$2,29 \times 10^{-4}$

A Tab. 11 apresenta os resultados para a configuração de oito poços com uma malha hexagonal-híbrida de 672 volumes (Fig. 39-d). Os dados físicos e geométricos estão listados na Tab. 6, as curvas de permeabilidade relativa são dadas pela Eq. (98) e as de viscosidade pela Eq. (99). Novamente, pode-se observar que a convergência das iterações de Newton e o erro de balanço são dominados basicamente pela saturação. De novo, reduzindo-se o critério de convergência no *solver* foram obtidas soluções com pequenos erros de balanço para grandes variações nas saturações (0,001 e 0,005). Sugerindo que, para problemas bifásicos (óleo-água) não é necessário verificar as variações na pressão. Isto por sua vez, torna o código computacional mais versátil uma vez que o número de testes por iteração newtoniana diminui.

### 6.3 - Análise das Metodologias IMPES, AIM e TI

Todos os casos analisados nesta seção foram obtidos com os seguintes critérios:  $\Delta P_{o,max}^*$  igual a 68,95 kPa e  $\Delta S_{w,max}^*$  igual a  $5 \times 10^{-3}$ . O critério de parada no *solver* foi  $\|r\|/\|r_0\| \leq 10^{-3}$ . Foram realizados alguns testes com  $\Delta S_{w,max}^*$  igual a  $10^{-3}$  e o mesmo  $\Delta P_{o,max}^*$  e as razões de tempo do AIM em relação a metodologia TI foram semelhantes. Para as metodologias AIM e TI, uma nova iteração newtoniana foi requerida quando em algum volume as variações na saturação e pressão ultrapassaram valores predeterminados, independentemente da saturação ser explícita ou implícita. Para o IMPES isto aumentou consideravelmente o número de iterações de Newton por intervalo de tempo. Desta forma, optou-se por realizar apenas uma iteração de Newton por passo de tempo, isto é, somente uma iteração do ciclo apresentado na seção 3.4.1 foi realizada.

Para a metodologia AIM, se for utilizado valores apertados de  $\Delta P_{o,max}^*$  e  $\Delta S_{w,max}^*$  para a convergência do ciclo de Newton (por exemplo, 0,685 kPa para a pressão e  $10^{-4}$  para a saturação), a convergência do método adaptativo ficará sensivelmente prejudicada quando comparada com a metodologia TI, devido ao número excessivo de iterações newtonianas do AIM. Conforme Coutinho (1995) o método adaptativo pode ser considerado como um método de Newton Inexato, onde uma parcela do Jacobiano foi desprezada e desta forma, o número de iterações das metodologias AIM e TI não necessariamente coincidem.

Antes de apresentar as comparações das metodologias, explicar-se-á como foi aplicado o critério de estabilidade proposto por Fung *et al.* (1989). No trabalho destes autores foi aplicado a metodologia AIM para problemas trifásicos (óleo, gás e água). Desta forma, o critério de estabilidade requer o cálculo de três autovalores em cada volume, afim de decidir se as saturações devem ser calculadas explicitamente ou implicitamente. Para evitar o cálculo dos autovalores em todos os volumes, Fung *et al.* (1989) propuseram que só fossem calculados os autovalores na fronteira entre regiões implícitas e explícitas, a qual denominaram de frente implícita. Onde existisse uma troca nas células testadas nesta região, todos os vizinhos explícitos deveriam ser testados se a troca é de explícito para implícito (*forward switch* - troca à frente) ou nos vizinhos implícitos se a troca é de implícito para explícito (*backward switch* - troca para trás), repetindo-se este procedimento até que nenhum volume devesse ser trocado. Este foi o primeiro procedimento implementado neste trabalho. Entretanto, não se conseguiu captar a frente de implicitude conforme comentado por Fung *et al.* (1989) e representado para um problema 2D analisado por estes autores. Resolveu-se então calcular os autovalores para todos os volumes. Observe-se que com a hipótese de incompressibilidade dos fluidos é necessário calcular somente um autovalor por volume. Note-se que esta hipótese é plenamente aceitável, considerando os fluidos estudados no presente trabalho. Mesmo calculando-se os autovalores para todas as células observou-se somente uma pequena parcela de célula implícitas. Desprezando-se a hipótese de incompressibilidade os resultados foram idênticos. Para os resultados que serão expostos no restante desta seção foram testados o critério de estabilidade juntamente com critério de mudança na saturação.

Outro ponto que deve ser focado nos resultados apresentados a seguir é que foram construídos programas distintos para as metodologias AIM, IMPES e TI. Desta forma o (*overhead* - cálculo adicional) associado à montagem do Jacobiano e do *solver* para as metodologias IMPES e TI foi evitado.

Nas tabelas que serão apresentadas  $\lambda_1$  é o limite para troca à frente,  $\lambda_2$  o limite para troca para trás e  $\Delta S_w$  é a variação na saturação da água empregada para troca de implicitude. Utilizando o critério na saturação, sempre que uma célula foi trocada todos os seu vizinhos foram checados. Para troca para trás foram realizados alguns testes para descobrir a frequência com que

a mesma deveria ser realizada. A troca a cada 20 iterações no tempo forneceu bons resultados. Foram testados as seguintes frequências: 10, 20, 30 e 50. Todos os testes foram realizados numa estação de trabalho SUN SPARC Station 10 com 2 CPU's P61 com 128 Mbytes de RAM. Os tempos de CPU apresentados foram normalizados dividindo-se o tempo de computação pelo tempo de computação mínimo entre os métodos. Os mesmos referem-se a montagem do Jacobiano, lado direito (função resíduo) e tempo no *solver*.

O primeiro caso analisado foi para a configuração de cinco poços. As curvas de permeabilidade relativa são dadas pela Eq. (94). Os dados físicos e geométricos estão listados na Tab. 3. As Tabs. 12 e 13 mostram os resultados para duas razões de viscosidades, 10 e 50, respectivamente.

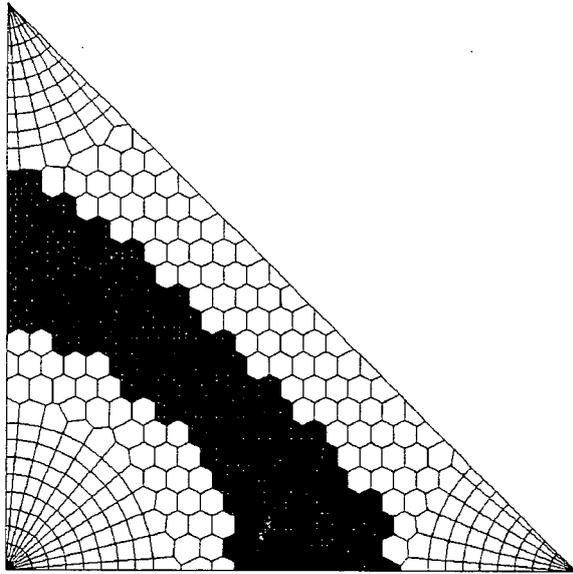
Da Tab. 12 observa-se que o critério baseado na análise de estabilidade requereu somente uma pequena parcela dos volumes a serem implícitos. Praticamente não existiu muito efeito nos limites dos autovalores testados para as trocas à frente e para trás. Para este caso um valor de  $\Delta S_w=0,01$  aliado ao critério de estabilidade forneceu o melhor resultado. Observa-se que, utilizando somente o critério de troca baseado na variação da saturação, uma grande parcela dos volumes é implícita no final da simulação, principalmente para pequenos valores de  $\Delta S_w$ . Nota-se também que existiu um caso onde o AIM requereu mais tempo de CPU que a metodologia TI. Observe-se que neste caso existiu uma diferença acentuada no número de iterações de Newton, significando então, que o critério utilizado para chaveamento da metodologia AIM não detectou adequadamente as regiões de surgimento de instabilidades. Pode-se observar também que os erros de balanço do IMPES são superiores aos do AIM e TI. Este fato pode ser explicado considerando que apenas uma iteração do ciclo apresentado na seção 3.6.1 foi realizado e de se ter empregado o mesmo critério de convergência no *solver* para as três metodologias. Por exemplo, se em algum instante da simulação o sistema linear da pressão não foi adequadamente solucionado os erros de balanço deverão ser grandes e como o ciclo não é repetido, os erros não podem ser reduzidos. A tendência é que estes erros se propaguem durante o restante da simulação.

A Fig. 55 apresenta as frentes de implicitude para quatro valores de VPI. Esta figura foi obtida para  $\lambda_1=1,0$ ,  $\lambda_2=0,8$  e  $\Delta S_w=0,01$ . Verifica-se que para valores elevados de VPI

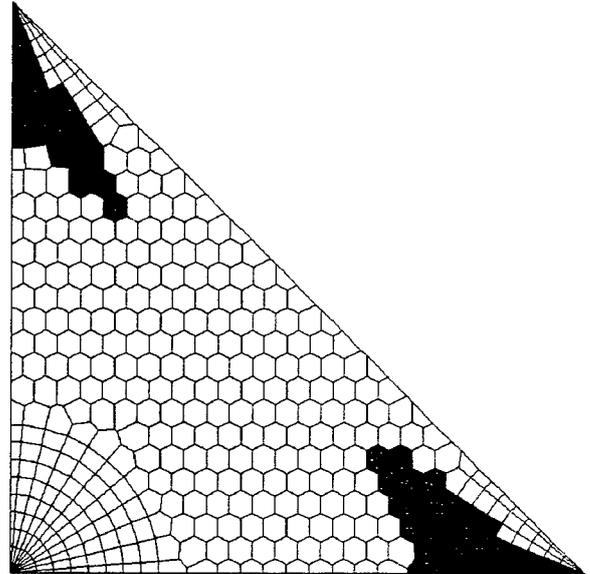
somente um pequeno número de volumes foram mantidos implícitos. Observe que ocorreu uma queda substancial no número de células implícitas de 0,2 para 0,6 VPI. Este fato ocorre devido a 0,6 VPI a frente de água já ter atingido os poços produtores. Após a chegada da frente no poço produtor o número de células implícitas vai diminuindo proporcionalmente à queda da saturação no poço. Para este caso a chegada da frente ocorre aproximadamente a 0,3 VPI, ver Fig. 57. A Fig. 56 mostra as curvas de VOR e a Fig. 57 o corte de água para as metodologias AIM, TI e IMPES para o poço paralelo. O corte de água é definido como a razão do volume de água produzido e o volume total de líquido produzido (óleo + água). Observa-se uma boa concordância dos resultados. A Fig. 58 apresenta o corte de água para a metodologia IMPES obtida com um  $\Delta t_{\max}$  de 50 dias. Observa-se acentuadas oscilações no corte de água. Um fato que deve ser frisado é que não foram observados oscilações nas curvas de VOR para o IMPES para valores de  $\Delta t_{\max}$  maiores que 2 (dois) dias. As curvas de VOR estavam de acordo com aquelas obtidas com o métodos AIM e TI. Entretanto, foram observados oscilações nas curvas de corte de água. Deve ser enfatizado que a curva de VOR não deve ser o único parâmetro de verificação uma vez que a mesma é uma curva integral, Eq. (95), e desta forma, as oscilações são suavizadas, mascarando as oscilações nas saturações.

Tab. 12 - Comparação de metodologias - malha hexagonal-híbrida com 445 volumes - M=10  
 VPI=1,82 - menor tempo de CPU = 236,6 seg.

Método	Critério	TCPU	NIT	NIN	PI (%)	EBC <sub>p</sub> (%)	
						óleo	água
AIM	autovalor ( $\lambda_1=1,0; \lambda_2=0,8$ )	1,04	381	541	4,93	$3,81 \times 10^{-4}$	$1,91 \times 10^{-4}$
AIM	autovalor ( $\lambda_1=1,0; \lambda_2=0,9$ )	1,04	381	541	4,60	$3,86 \times 10^{-4}$	$2,10 \times 10^{-4}$
AIM	autovalor ( $\lambda_1=0,8; \lambda_2=0,6$ )	1,04	380	529	6,79	$3,46 \times 10^{-4}$	$1,39 \times 10^{-4}$
AIM	autovalor + variação ( $\lambda_1=1,0; \lambda_2=0,8; \Delta S_w=0,01$ )	1,00	359	509	12,96	$3,12 \times 10^{-4}$	$1,37 \times 10^{-4}$
AIM	autovalor + variação ( $\lambda_1=1,0; \lambda_2=0,8; \Delta S_w=0,02$ )	1,01	360	515	10,22	$4,10 \times 10^{-4}$	$2,30 \times 10^{-4}$
AIM	autovalor + variação ( $\lambda_1=1,0; \lambda_2=0,8; \Delta S_w=0,05$ )	1,06	372	550	6,35	$3,76 \times 10^{-4}$	$2,34 \times 10^{-4}$
AIM	variação ( $\Delta S_w=0,01$ )	1,20	359	514	64,45	$3,11 \times 10^{-4}$	$1,18 \times 10^{-4}$
AIM	variação ( $\Delta S_w=0,02$ )	1,18	359	517	56,59	$4,21 \times 10^{-4}$	$1,98 \times 10^{-4}$
AIM	variação ( $\Delta S_w=0,05$ )	1,35	374	630	31,08	$4,17 \times 10^{-3}$	$1,78 \times 10^{-3}$
TI	-	1,26	358	504	100	$2,62 \times 10^{-6}$	$1,76 \times 10^{-5}$
IMPES	$\Delta t_{\max} = 2$ dias	11,00	7564	7564	0	$1,22 \times 10^{-2}$	$1,23 \times 10^{-2}$



(a) - 0,2 VPI



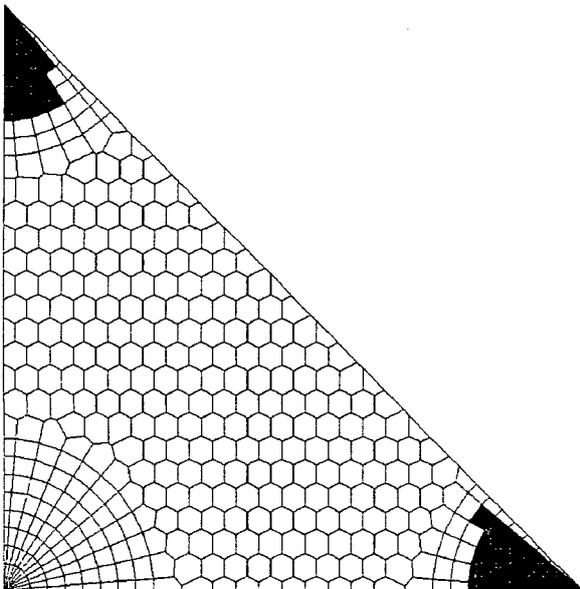
(b) - 0,3 VPI



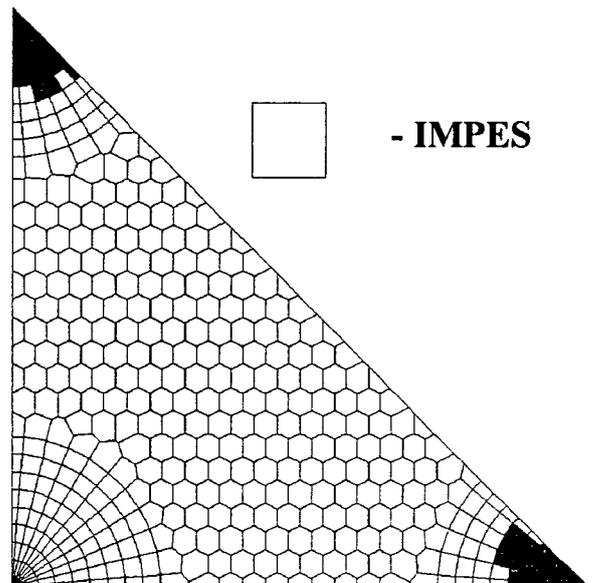
- TI



- IMPES



(b) - 0,4 VPI



(c) - 0,6 VPI

Fig. 55 - Campos de implicitude para quatro valores de VPI -  $\lambda_1 = 1,0$ ,  $\lambda_2 = 0,8$  e  $\Delta S_w = 0,01$

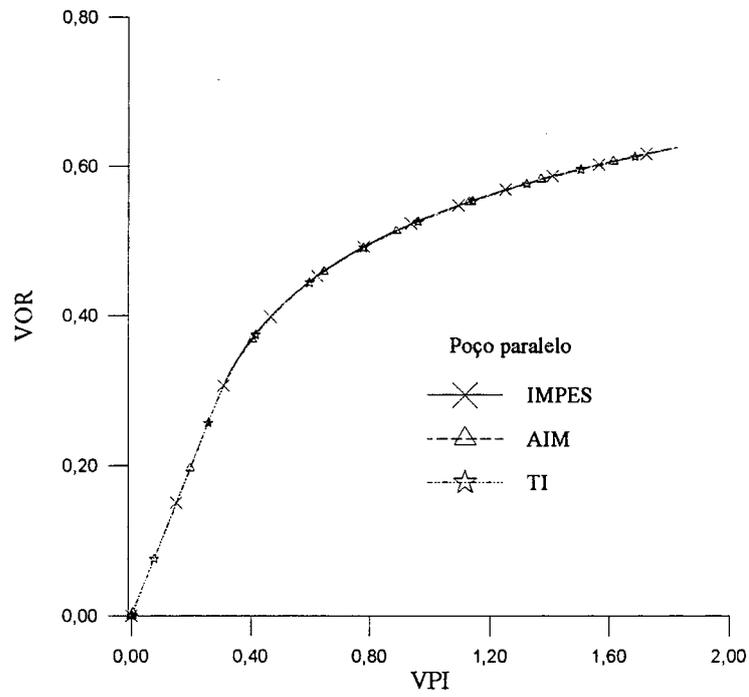


Fig. 56 - Comparação de metodologias - VOR

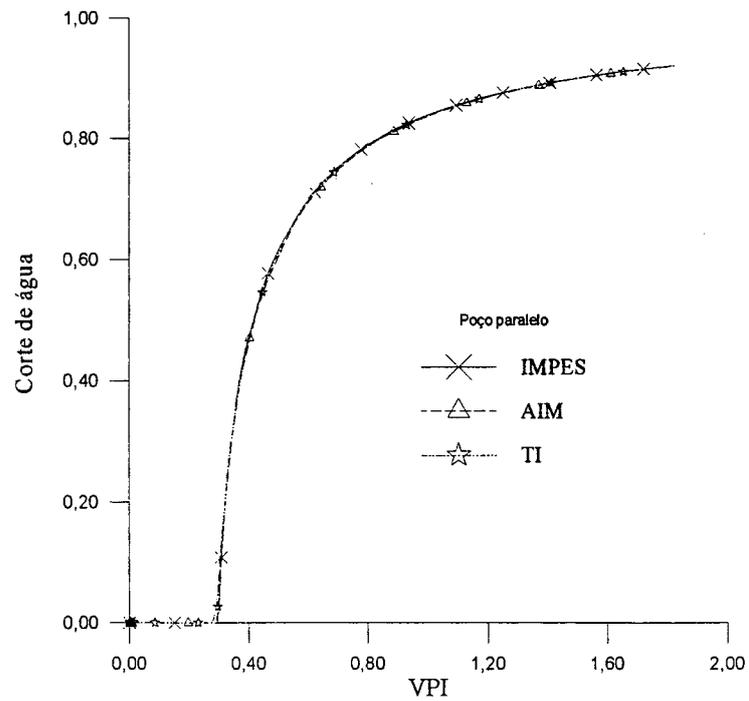
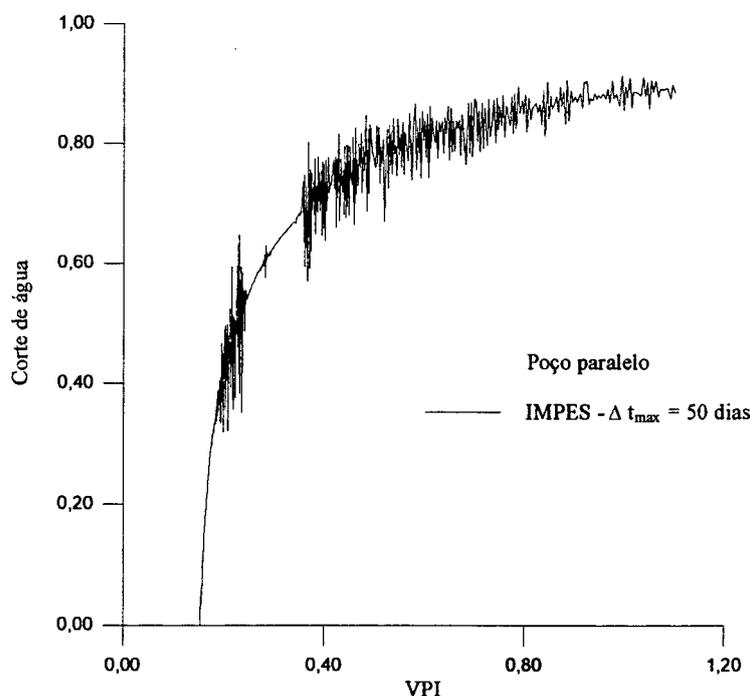


Fig. 57 - Comparação de metodologias - corte de água

Fig. 58 - Corte de água - IMPES -  $\Delta t_{\max} = 50$  dias

Da Tab. 13 observa-se que o critério de estabilidade não conseguiu captar adequadamente o surgimento de instabilidades, tornando os resultados do AIM inferiores aos da metodologia TI. Nota-se que este escoamento é mais instável que aquele analisado na Tab. 12, devido a maior razão de viscosidade. Observe-se que as percentagens de implicitude foram superiores à aquelas da Tab. 12 e, mesmo assim, não foram obtidos bons resultados somente com o critério de instabilidade. Verifica-se que o critério não foi capaz de detectar adequadamente o surgimento das instabilidades a fim de assegurar robustez na solução de Newton e desta forma, um número excessivo de iterações de Newton foram realizadas. Observe-se também, que mesmo trabalhando-se com os critérios de instabilidade e variação na saturação, não foi detectado o surgimento de instabilidades para  $\Delta S_w = 0,02$  durante algum período da simulação, o que resultou num número excessivo de iterações de Newton quando comparado com o mesmo caso com  $\Delta S_w = 0,01$ .

Tab. 13 - Comparação de metodologias - Malha hexagonal-híbrida com 445 volumes -  $M=50$   
 $VPI = 1,82$  - menor tempo de CPU = 234,04 seg.

Método	Critério	TCPU	NIT	NIN	PI (%)	EBC <sub>p</sub> (%)	
						óleo	água
AIM	autovalor ( $\lambda_1=1,0; \lambda_2=0,8$ )	1,30	362	592	7,74	$6,75 \times 10^{-4}$	$2,09 \times 10^{-3}$
AIM	autovalor ( $\lambda_1=0,8; \lambda_2=0,6$ )	1,40	361	617	11,21	$6,96 \times 10^{-4}$	$1,85 \times 10^{-3}$
AIM	autovalor + variação ( $\lambda_1=1,0; \lambda_2=0,8; \Delta S_w=0,01$ )	1,00	346	442	13,64	$7,21 \times 10^{-4}$	$1,81 \times 10^{-3}$
AIM	autovalor + variação ( $\lambda_1=1,0; \lambda_2=0,8; \Delta S_w=0,02$ )	1,24	348	563	13,40	$7,65 \times 10^{-4}$	$1,74 \times 10^{-3}$
AIM	autovalor + variação ( $\lambda_1=0,8; \lambda_2=0,6; \Delta S_w=0,01$ )	1,00	346	441	15,58	$6,96 \times 10^{-4}$	$1,81 \times 10^{-3}$
AIM	variação ( $\Delta S_w=0,01$ )	1,18	344	445	67,06	$7,64 \times 10^{-4}$	$1,93 \times 10^{-3}$
AIM	variação ( $\Delta S_w=0,02$ )	1,64	347	639	59,92	$7,51 \times 10^{-4}$	$1,98 \times 10^{-3}$
TI	-	1,28	343	436	100	$5,25 \times 10^{-4}$	$2,21 \times 10^{-4}$
IMPES	$\Delta t_{\max} = 1$ dia	26,5	15088	15088	0	$6,19 \times 10^{-3}$	$6,22 \times 10^{-3}$

A Tab. 14 apresenta os resultados obtidos para uma malha hexagonal com 410 volumes. Os dados estão listados nas Tabs. 4 e 5. As curvas de viscosidade são dadas pela Eq. (98) e a malha empregada é a mesma já apresentada na Fig. 35. Para este caso nota-se que foi requerida uma pequena quantidade de implicitude, mesmos para os casos onde somente o critério de variação na saturação foi utilizado. Com exceção do método IMPES, o número de intervalos de tempo para todas as simulações coincidiram. Neste caso, o método que forneceu melhores resultados em termos de tempo de CPU foi o AIM com o critério de troca baseado na variação de saturação ( $\Delta S_w=0,02$ ).

Tab. 14 - Comparação de metodologias - malha hexagonal com 410 volumes - VPI=1,82  
menor tempo de CPU = 171,29 seg.

Método	Critério	TCPU	NIT	NIN	PI (%)	EBC <sub>p</sub> (%)	
						óleo	água
AIM	autovalor ( $\lambda_1=1,0;\lambda_2=0,8$ )	1,05	882	953	1,26	$3,45 \times 10^{-4}$	$6,81 \times 10^{-4}$
AIM	autovalor ( $\lambda_1=0,8;\lambda_2=0,6$ )	1,06	882	957	1,87	$3,22 \times 10^{-4}$	$6,48 \times 10^{-4}$
AIM	autovalor + variação ( $\lambda_1=1,0;\lambda_2=0,8;\Delta S_w=0,01$ )	1,03	882	936	1,46	$3,24 \times 10^{-4}$	$6,50 \times 10^{-4}$
AIM	autovalor + variação ( $\lambda_1=1,0;\lambda_2=0,8;\Delta S_w=0,02$ )	1,05	882	953	1,26	$3,45 \times 10^{-4}$	$6,81 \times 10^{-4}$
AIM	autovalor + variação ( $\lambda_1=0,8;\lambda_2=0,6;\Delta S_w=0,01$ )	1,04	882	940	2,06	$3,01 \times 10^{-4}$	$6,18 \times 10^{-4}$
AIM	variação ( $\Delta S_w=0,01$ )	1,14	882	941	13,23	$4,02 \times 10^{-4}$	$5,27 \times 10^{-4}$
AIM	variação ( $\Delta S_w=0,02$ )	1,00	882	949	3,26	$3,67 \times 10^{-4}$	$5,41 \times 10^{-4}$
TI	-	1,38	882	9,34	100	$3,60 \times 10^{-4}$	$2,55 \times 10^{-4}$
IMPES	$\Delta t_{\max} = 4$ dias	7,25	10.676	10.676	0	$8,63 \times 10^{-3}$	$8,61 \times 10^{-3}$

A Tab. 15 apresenta os resultados para a configuração de oito poços com uma malha hexagonal-híbrida (Fig. 39-d). Os dados físicos e geométricos estão enumerados na Tab. 6. As curvas de viscosidade são dadas pela Eq. (99) e as de permeabilidade relativa pela Eq. (98). Da Tab. 15 pode-se observar que diminuindo os valores de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  conseguiu-se captar razoavelmente a região onde era necessário tratamento implícito. Novamente, o critério de estabilidade aliado ao critério de variação na saturação ( $\Delta S_w=0,01$ ) forneceu bons resultados. Para todos os testes realizados com uma pequena margem de implicitude, conseguiu-se bons resultados com a metodologia AIM. A questão principal é o critério de chaveamento das implicitudes.

Tab. 15 - Comparação de metodologias - configuração de oito poços - malha hexagonal-híbrida com 672 volumes - menor tempo de CPU = 255,03 seg.

Método	Critério	TCPU	NIT	NIN	PI(%)	EBC (%)	
						óleo	água
AIM	autovalor ( $\lambda_1=1,0;\lambda_2=0,8$ )	1,09	456	556	3,75	$4,57 \times 10^{-4}$	$3,78 \times 10^{-4}$
AIM	autovalor ( $\lambda_1=0,8;\lambda_2=0,6$ )	1,01	454	536	5,22	$2,13 \times 10^{-4}$	$1,34 \times 10^{-4}$
AIM	autovalor + variação ( $\lambda_1=1,0;\lambda_2=0,8;\Delta S_w=0,01$ )	1,01	454	521	6,40	$3,75 \times 10^{-4}$	$2,76 \times 10^{-4}$
AIM	autovalor + variação ( $\lambda_1=1,0;\lambda_2=0,8;\Delta_w=0,02$ )	1,03	454	537	5,99	$2,61 \times 10^{-4}$	$1,81 \times 10^{-4}$
AIM	autovalor + variação ( $\lambda_1=0,8;\lambda_2=0,6;\Delta S_w=0,01$ )	1,00	454	521	7,49	$2,45 \times 10^{-4}$	$1,40 \times 10^{-4}$
AIM	variação ( $\Delta S_w=0,01$ )	1,13	454	533	35,05	$2,56 \times 10^{-4}$	$1,66 \times 10^{-4}$
AIM	variação ( $\Delta S_w=0,02$ )	1,16	454	571	26,00	$2,61 \times 10^{-4}$	$2,29 \times 10^{-4}$
TI	-	1,33	454	523	100	$2,90 \times 10^{-4}$	$2,29 \times 10^{-4}$
IMPES	$\Delta t_{\max}=4$ dias	5,85	5232	5232	0	$1,75 \times 10^{-2}$	$1,75 \times 10^{-2}$

Nos testes realizados, conseguiu-se uma razoável redução de tempo de execução aliando-se ao critério de estabilidade o critério de variação na saturação. No trabalho de Fung *et al.* (1989) não foi necessário a utilização do critério estabilidade juntamente com o critério de variação na saturação. O critério de estabilidade mostrou-se robusto para detectar as regiões onde a maior implicitude era necessária. Uma possível causa para a não ocorrência deste fato no presente trabalho, foi ter-se trabalhado apenas com escoamento bifásico (óleo-água), no qual as instabilidades físicas são bem menores.

## 7.1 - Introdução

No presente capítulo apresenta-se uma comparação entre três métodos empregados para solução de sistemas lineares não-simétricos: ORTHOMIN, GMRES e Bi-CGSTAB. As comparações foram realizadas em termos de tempo de CPU e número de iterações no *solver*. Nas comparações verifica-se também o efeito das ordenações geométricas e nível da fatoração ILU empregada. Todos os métodos foram preconditionados à direita conforme descrito no Cap. 4.

Antes de se mostrar a análise dos métodos de resolução, é analisado o efeito da ordenação MDF no método GMRES. Na aplicação da ordenação MDF foram utilizados dois problemas testes: O problema bifásico (óleo-água) e um problema de condução anisotrópica.

## 7.2 Efeito da Ordenação MDF

Para todos os resultados que serão mostrados neste Capítulo o critério de parada no *solver* foi a razão  $\|r_k\|/\|r_0\| \leq 10^{-3}$ , e como critério de parada de uma iteração newtoniana, o valor de  $6,893 \times 10^2$  Pa para  $\Delta P_{o,máx}^*$  e  $10^{-4}$  para  $\Delta S_{w,máx}^*$ . Foram utilizados os seguintes valores para ajuste do passo de tempo: 0,02 para **DSLIM** e 13,79 kPa para **DPLIM**. O menor intervalo de tempo empregado foi  $10^{-5}$  dias e o máximo 10 dias. Estes critérios garantiram simulações com aproximadamente os mesmos intervalos de tempo.

Um dos problemas analisados no trabalho de D'Azevedo *et al.* (1992a) foi o problema de condução anisotrópica, governado por

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial P}{\partial y} \right) = q \quad (107)$$

definido na região  $x \in [0,1]$  e  $y \in [0,2]$ . No trabalho de D'Azevedo *et al.* (1992a) foi empregado

para resolver este problema diferenças finitas com volume centrado. A condição de contorno foi de fluxo nulo nas fronteiras com uma malha cartesiana uniforme, com espaçamento  $d=1/30$  (30 volumes em  $x$  e 60 em  $y$ ). O termo fonte  $q$  foi dado por

$$q(x, y) = \begin{cases} -1/h^2 & \text{em } (x, y) = (d/2, d/2) \\ 1/h^2 & \text{em } (x, y) = (1-d/2, 2-d/2) \\ 0 & \text{no restante do domínio} \end{cases} \quad (108)$$

No trabalho de D'Azevedo *et al.* (1992a) a denominação *STRONGY* corresponde a  $K_x=1$ ,  $K_y=1000$  e *STRONGX* a  $K_x=1000$ ,  $K_y=1$ . Em todas as tabelas apresentadas, **TS** corresponde ao tempo no *solver*, **NIS** o número de iterações no *solver* e **EL** o número de elementos na matriz triangular inferior. A ordenação MDF é recomendada para problemas transientes, uma vez que o custo da ordenação pode ser amortecido pela redução no custo da obtenção de cada sistema linear. Desta forma, nos tempos das Tabs. 16 e 17, não está embutido o tempo de ordenação. Nas demais tabelas o custo da ordenação está incluído no valor de TS. Todos os tempos apresentados foram normalizados dividindo-se o menor tempo da tabela pelo seu respectivo valor.

A Tab. 16 apresenta os resultados obtidos para o problema *STRONGY*. Observa-se que a ordenação original tem efeito significativo no MDF, que apresenta uma melhora somente no caso da ordenação vertical. O melhor caso ocorreu com ordenação horizontal e a aplicação do MDF a esta ordenação não apresentou efeito positivo. Por outro lado, na Tab. 17 acontece uma acentuada melhoria no desempenho do GMRES com MDF em ambas as ordenações, com mais efeito na horizontal. Conforme comentado em Behie e Forsyth (1984), se  $K_x \gg K_y$ , um método baseado em ILU (para qualquer nível  $> 0$ ) converge mais rápido se uma ordenação vertical for utilizada. Note-se que isto ocorre na Tab. 16, para a ordenação horizontal e Tab. 17 para a ordenação vertical. D'Azevedo *et al.* (1992a) apresentaram resultados para estes dois casos, utilizando o gradiente conjugado (GC) somente com ordenação vertical, o que não permite avaliar adequadamente as observações feitas. Apesar de não reportado no presente trabalho, utilizando o GC foram obtidos os mesmos resultados obtidos por D'Azevedo *et al.* (1992a). A diferença é

que o GMRES é mais sensível a ordenação porque o custo computacional do mesmo aumenta com o número de iterações. Observe-se que o enchimento da matriz para ILU(1) nas Tabs. 16 e 17 é muito maior para o MDF. Com o aumento do nível da ILU estas diferenças são sensivelmente reduzidas, como pode ser verificado nestas tabelas para os níveis de ILU 2 e 3.

Tab. 16 - Resultados para o problema *STRONGY* utilizando GMRES

Ordenação	ILU											
	0			1			2			3		
	EL	TS	NIS	EL	TS	NIS	EL	TS	NIS	EL	TS	NIS
Vertical	3510	14,55	59	5221	2,51	19	6903	2,68	19	10238	1,34	10
MDF-vertical	3510	14,53	59	6859	1,80	14	7021	1,62	13	10024	1,16	9
Horizontal	3510	5,21	32	5221	1,47	13	6873	1,60	13	10118	1,01	8
MDF-Horizontal	3510	5,25	32	6856	1,43	12	7126	1,31	11	10131	1,00	8

Tab. 17 - Resultados para o problema *STRONGX* utilizando GMRES

Ordenação	ILU											
	0			1			2			3		
	EL	TS	NIS	EL	TS	NIS	EL	TS	NIS	EL	TS	NIS
Vertical	3510	4,46	32	5221	4,68	32	6903	4,67	31	10238	4,81	30
MDF-vertical	3510	4,46	32	6851	1,26	12	7015	1,13	11	10120	1,00	9
Horizontal	3510	12,36	59	5221	12,06	57	6873	11,62	55	10118	11,62	53
MDF-Horizontal	3510	12,48	59	6845	1,53	14	7122	1,55	14	10050	1,00	9

Os casos analisados a seguir referem-se ao escoamento bifásico água-óleo em meios porosos. A primeira geometria testada é um quarto da configuração de cinco poços. Os dados

físicos e geométricos deste caso estão listados na Tab. 3 e a malha utilizada é apresentada na Fig. 21. As curvas de permeabilidades relativa e razão de viscosidades são dadas pela Eq. (94). Os resultados correspondentes a este caso estão listados na Tab. 18 para  $M=10$ . O tamanho máximo da base foi 10. Nas tabelas a serem expostas no restante deste capítulo NIN é o número de iterações de Newton.

Tab. 18 - Resultados para a conf. de cinco poços - 1,0 VPI -  $M = 10$ 

Ordenação	ILU											
	0				1				2			
	EL	TS	NIN	NIS	EL	TS	NIN	NIS	EL	TS	NIN	NIS
Natural	1074	2,77	1989	135.223	1572	1,12	1989	40.581	2258	1,30	1989	36.050
Vertical	1074	2,67	1989	131.445	1499	1,63	1989	67.275	2099	1,19	1989	34.625
Horizontal	1074	2,95	1989	132.695	1522	1,91	1989	69.221	2123	1,17	1989	34.671
MDF-Natural	1074	2,75	1989	119.681	1895	1,08	1989	34.940	2414	1,05	1989	24.014
MDF-Vertical	1074	2,52	1989	120.770	1931	1,17	1989	37.649	2413	1,02	1989	23.271
MDF-Horizontal	1074	2,41	1989	119.482	1901	1,21	1989	40.392	2420	1,00	1989	22.570

Na Tab. 18 observa-se que o MDF apresentou sensibilidade a todas as ordenações utilizadas, sendo o MDF-Horizontal com ILU(2) a ordenação mais robusta. Observe-se que para ILU(1) a ordenação natural foi a ordenação mais eficiente. Para os diversos níveis de ILU e ordenações empregadas, a aplicação da ordenação MDF sempre resultou num menor número de iterações no *solver*. Entretanto, isto não garante sempre menor tempo de CPU uma vez que o MDF, da forma como proposto inicialmente por D'Azevedo *et al.* (1992a), não verifica a importância dos elementos criados na fatoração incompleta.

A Fig. 59 apresenta a malha hexagonal-híbrida com 1026 volumes empregada para a configuração de 8 (oito) poços. Os dados físicos e geométricos estão listados na Tab. 6, as curvas de permeabilidade relativa são dadas pela Eq. (99) e as viscosidades são dadas na Eq. (98), todas no SI. Neste caso, não foi obtida convergência do GMRES, com base 10, mesmo

permitindo-se vários recomeços. O tamanho máximo da base foi 50. Os resultados estão mostrados na Tab. 19 para 0,5 VPI. Deve-se ressaltar que este tamanho de base para níveis de ILU igual ou superior a 1 não foi atingido. Todos os testes iniciais para dimensionamento do tamanho da base foi realizado com ILU(0) e como pode ser visto das tabelas apresentadas é um preconditionamento deficiente.

Tab. 19 - Resultados para a conf. de oito poços - 0,50 VPI

Ordenação	ILU											
	0				1				2			
	EL	TS	NIN	NIS	EL	TS	NIN	NIS	EL	TS	NIN	NIS
Natural	2456	2,30	1898	70.299	4179	1,43	1886	46.978	6373	1,33	1815	33.881
Vertical	2456	1,76	1891	64.124	3579	1,14	1891	42.325	4901	1,00	1855	31.044
Horizontal	2456	1,80	1891	64.785	3577	1,16	1889	42.554	4907	1,10	1866	31.520
MDF-Natural	2456	1,77	1888	64.169	4485	1,18	1828	37.843	5602	1,12	1855	30.633
MDF-Vertical	2456	1,76	1890	64.169	4481	1,23	1835	38.189	5595	1,18	1852	30.609

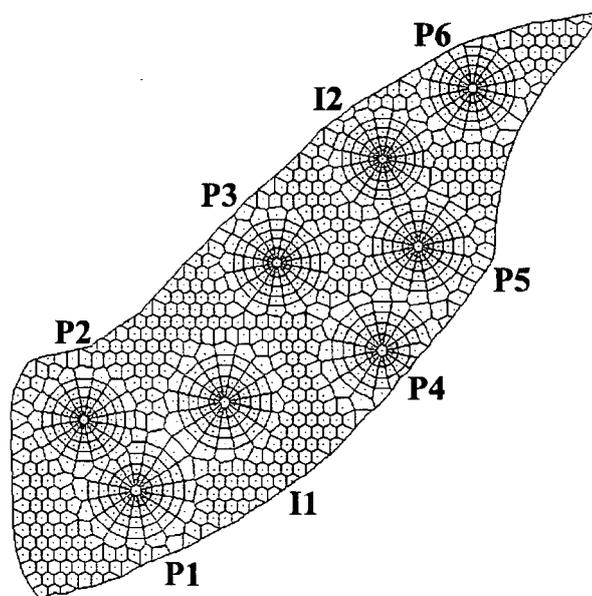


Fig. 59 - Malha hexagonal híbrida com 1026 volumes

Observa-se na Tab. 19, que o MDF foi a ordenação mais robusta em termos do número de iterações no *solver* para níveis de ILU 1 e 2. Entretanto, menores tempos de CPU foram obtidos com as ordenações vertical e horizontal. Nota-se que estas ordenações tentam minimizar a largura de banda do Jacobiano. Apesar da malha empregada ser bastante não-estruturada e possuir uma heterogeneidade acentuada, o MDF não foi capaz de fornecer a melhor ordenação. Pode-se verificar também que o tamanho médio da base para todas as ordenações com ILU maior ou igual 1 foi inferior a 25.

A Fig. 60 apresenta uma malha quase estruturada para o mesmo reservatório do caso anterior. A diferença é que esta malha tem conectividade aproximadamente constante e o Jacobiano resultante é bastante homogêneo. A única diferença com relação aos dados anteriores é que esta configuração é composta de dois poços produtores e um injetor. A vazão de cada produtor foi  $1.84 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$  e a do injetor  $3.68 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ . Como a convergência do método iterativo como base igual a 10 e com ILU(0) estava demasiadamente lenta foi empregado, novamente, tamanho de base máximo igual a 50.

A Tab. 20 apresenta os resultados obtidos. Novamente, observa-se que a ordenação

MDF foi a mais robusta em termos de iterações para níveis de ILU 1 e 2. Entretanto, a ordenação vertical foi mais robusta, em termos de tempo de CPU.

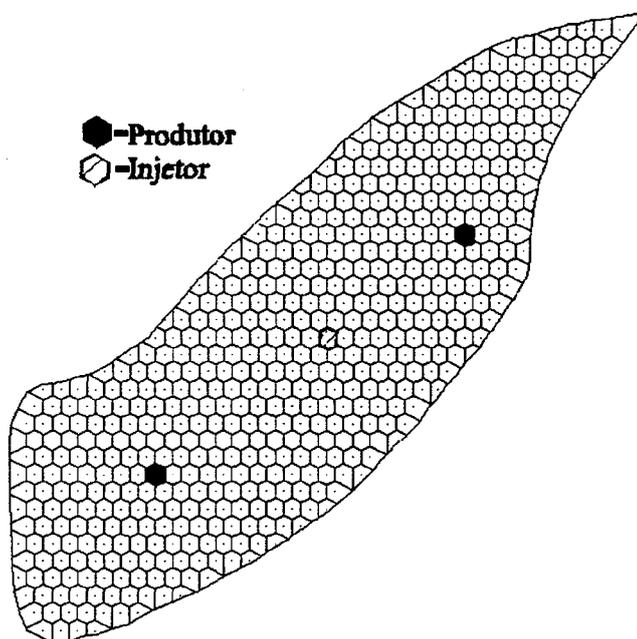


Fig. 60 - Malha hexagonal com 559 volumes

Tab. 20 - Resultados para a malha hexagonal com 559 volumes - 0,5 VPI

Ordenação	ILU											
	0				1				2			
	EL	TS	NIN	NIS	EL	TS	NIN	NIS	EL	TS	NIN	NIS
Natural	1568	1,68	2334	61.401	2329	1,55	2295	44.879	3588	1,63	2283	34.147
Vertical	1568	1,31	2353	48.218	2053	1,06	2293	36.348	2942	1,00	2274	25.449
Horizontal	1568	1,30	2345	50.749	2044	1,21	2326	39.743	2955	1,09	2279	28.365
MDF-Natural	1568	1,40	2336	49.602	2711	1,23	2283	34.101	3546	1,19	2268	23.551
MDF-Vertical	1568	1,30	2347	49.428	2746	1,18	2304	33.095	3456	1,14	2274	23.451
MDF-Horizontal	1568	1,45	2336	49.519	2817	1,32	2297	33.055	3496	1,18	2265	23.538

Apresenta-se na Tab. 21 o número médio de elementos a serem armazenados para solução via GMRES assumindo tamanho de base igual a 50, tamanho médio da base empregada (TMB) e o número de elementos requeridos para uma fatoração completa da matriz Jacobiana. TMB foi calculado dividindo-se o número de iterações do *solver* pelo número de iterações de Newton. Os dados da Tab. 21 referem-se aos resultados obtidos para malha hexagonal com 559 volumes mostrada na Fig. 60.

Tab. 21 - Número de elementos necessários para solução via GMRES com base igual a 50, tamanho médio da base e número de elementos para fatoração completa da matriz Jacobiana

Método (ILU)	Ordenação		
	Natural (TMB)	Vertical (TMB)	Horizontal (TMB)
GMRES (0)	70.680 (26,30)	70.680 (20,49)	70.680 (26,30)
GMRES (1)	76.768 (19,56)	74.560 (15,85)	74.488 (17,09)
GMRES (2)	86.840 (14,95)	81.672 (11,19)	81.776 (12,45)
DIRETO	124.628	76.652	77.436

Da Tab. 21 pode-se observar que apesar do aumento do número de elementos para níveis de ILU igual ou superior a 1 ocorreu também uma diminuição acentuada no tamanho médio da base necessária para convergência. Determinar o tamanho ótimo da base é uma tarefa que depende de certa forma da experiência do usuário ou de uma série de testes. Determinar o tamanho da base a partir de testes realizados com uma ILU(0), como foi realizado no presente trabalho, demonstrou não ser o método mais adequado. A Tab. 22 apresenta o número médio de elementos a serem armazenados e o número de elementos requerido para a ordenação vertical. NUEM é o número médio de elementos e NUER o número de elementos requerido.

Tab. 22 - Número médio de elementos armazenados e número de elementos requerido para a malha hexagonal com 559 volumes com ordenação vertical

Método (ILU)	NUEM	NUER
GMRES (0)	37.687	42.730
GMRES (1)	36.380	37.666
GMRES (2)	38.282	40.306

De acordo com os dados expostos anteriormente a memória requerida é função do número de elementos necessários para armazenar a matriz aproximada ( $M$ ) e tamanho da base empregada. O que ocorre na realidade é um balanceamento destes dois fatores. Observa-se da Tab. 22 que o GMRES(0) requereu mais memória que o GMRES(1). Isto ocorre devido ao decréscimo do tamanho da base com o aumento do nível da ILU.

Apesar de não estar reportado nesta seção, foram realizados testes do MDF aplicado ao Bi-CGSTAB e ORTHOMIN e na média o comportamento foi o mesmo ao apresentado anteriormente para o GMRES.

### 7.3 - Comparação Entre os Métodos de Solução dos Sistemas Lineares

A primeira geometria testada corresponde a um quarto da configuração de cinco poços. Os dados físicos e geométricos estão listados na Tab. 3 e a malha utilizada é apresentada na Fig. 21. As curvas de permeabilidade relativa e razão de viscosidades são dadas pela Eq. (94). Os resultados correspondentes a este caso, para  $M=10$  e 1,0 VPI, estão listados na Tab. 23. O tamanho máximo da base para o GMRES e ORTHOMIN foi 10.

Tab. 23 - Número de iterações e tempo de CPU normalizado - para 1,0 VPI - caso 1 - M=10

MÉTODO (ILU)	ORDENAÇÃO		
	NATURAL	VERTICAL	HORIZONTAL
GMRES(0)	135.223 (2,56)	131.145 (2,50)	132.695 (2,76)
GMRES(1)	40.581 (1,05)	67.275 (1,53)	69.221 (1,69)
GMRES(2)	36.050 (1,22)	34.265 (1,11)	34.671 (1,09)
ORTHOMIN(0)	135.223 (2,75)	131.145 (2,69)	132.695 (2,89)
ORTHOMIN(1)	40.581 (1,08)	67.275 (1,63)	69.221 (1,80)
ORTHOMIN(2)	36.050 (1,26)	34.265 (1,16)	34.671 (1,14)
Bi-CGSTAB(0)	36.190 (1,17)	39.135 (1,23)	40.193 (1,40)
Bi-CGSTAB(1)	22.800 (1,00)	26.058 (1,04)	26.918 (1,15)
Bi-CGSTAB(2)	17.734 (1,05)	18.389 (1,02)	18.577 (1,00)

Da Tab. 23, verifica-se que ORTHOMIN e GMRES com ILU(0) apresentaram comportamento bastante inferior ao Bi-CGSTAB. Por outro lado, o Bi-CGSTAB, apresentou uma sensibilidade muito pequena ao condicionamento, quando comparado aos outros dois métodos. Observa-se também, para este caso, que a ordenação natural foi a que apresentou melhores resultados para os três métodos. Antes de tentar elucidar este ponto, far-se-á uma breve descrição de como é obtida a ordenação natural, através do gerador usado neste trabalho. A malha básica é hexagonal. Após a construção desta, escolhe-se o local onde deseja-se a malha polar (por exemplo, em torno do poço). Os pontos pertencentes a malha hexagonal, contidos dentro da região polar, são eliminados e os pontos remanescentes no restante do domínio renumerados. Os novos pontos colocados dentro da janela circular são numerados a partir do último nó hexagonal. Isto faz com que as incógnitas relacionadas aos poços fiquem bastante próximas. Neste problema só existe uma frente de propagação de onda e, como as incógnitas relacionadas aos poços estão bastantes próximas, a informação da frente de onda é rapidamente transmitida para o restante do

domínio, melhorando a convergência do *solver*.

A Tab. 24 mostra os resultados obtidos para a configuração de oito poços com uma malha hexagonal-híbrida com 1026 volumes. Os dados deste problema foram idênticos aos apresentados na seção anterior. Neste caso, não foi obtida convergência do GMRES e ORTHOMIN, com base 10, mesmo permitindo-se vários recomeços. O tamanho máximo da base foi 50.

Tab. 24 - Número de iterações e tempo de CPU normalizado - para 0,5 VPI - caso 2

MÉTODO (ILU)	ORDENAÇÃO		
	NATURAL	VERTICAL	HORIZONTAL
GMRES(0)	70.299 (2,03)	64.124 (1,76)	64.785 (1,80)
GMRES(1)	46.979 (1,42)	42.325 (1,14)	42.554 (1,16)
GMRES(2)	33.831 (1,32)	31.044 (1,00)	31.520 (1,09)
ORTHOMIN(0)	70.286 (2,34)	64.058 (2,01)	-
ORTHOMIN(1)	46.846 (1,61)	42.243 (1,31)	-
ORTHOMIN(2)	33.954 (1,46)	30.924 (1,05)	-
Bi-CGSTAB(0)	54.839 (1,50)	54.669 (1,62)	-
Bi-CGSTAB(1)	36.536 (1,36)	33.162 (1,15)	-
Bi-CGSTAB(2)	27.035 (1,44)	25.326 (1,11)	-

Da Tab. 24 verifica-se, novamente, uma maior sensibilidade do GMRES e ORTHOMIN a qualidade do preconditionador. O Bi-CGSTAB também apresentou uma sensível diferença a qualidade do mesmo. Neste problema existem diversas frentes de propagação de onda e a ordenação natural não forneceu bons resultados. A melhor convergência foi obtida com uma ordenação vertical para a maioria dos casos testados. Este fato pode ser explicado, considerando

que o número de nós na direção y é muito menor que na direção x e, desta forma, a largura de banda originada com a ordenação vertical é muito menor. Observa-se que o número de iterações para o GMRES com as ordenações vertical e horizontal são bastantes próximas. Novamente, o tempo de CPU do ORTHOMIN foi maior que o tempo do GMRES, apesar de existir uma pequena diferença no número de iterações dos métodos, a favor do ORTHOMIN.

A Tab. 25 apresenta o resultados para a malha hexagonal com 559 volumes apresentada na seção anterior. Foram utilizados os mesmos dados já apresentados para esta configuração.

Tab. 25 - Número de iterações e tempo de CPU normalizado - para 0,5 VPI - caso 3

MÉTODO (ILU)	ORDENAÇÃO		
	NATURAL	VERTICAL	HORIZONTAL
GMRES(0)	61.401 (1,68)	48.218 (1,31)	50.749 (1,30)
GMRES(1)	44.879 (1,55)	36.348 (1,06)	39.743 (1,21)
GMRES(2)	34.147 (1,63)	25.449 (1,00)	28.365 (1,09)
ORTHOMIN(0)	61.312 (2,02)	48.220 (1,46)	50.693 (1,52)
ORTHOMIN(1)	44.886 (1,66)	36.324 (1,14)	39.658 (1,38)
ORTHOMIN(2)	34.147 (1,64)	25.440 (1,05)	28.357 (1,18)
Bi-CGSTAB(0)	49.212 (1,62)	35.941 (1,67)	39.499 (1,41)
Bi-CGSTAB(1)	34.467 (1,66)	26.370 (1,16)	28.481 (1,22)
Bi-CGSTAB(2)	25.188 (1,79)	18.325 (1,17)	20.178 (1,22)

Da Tab. 25 observa-se que Bi-CGSTAB com ILU(0) apresentou os piores resultados para as ordenações vertical e horizontal. Melhores resultados para todos os métodos foram

obtidos com a ordenação vertical. Observe que o melhor resultado em termos de tempo de CPU foi obtido para o GMRES com ILU(2) e ordenação vertical. O mesmo não ocorre para o Bi-CGSTAB. O maior custo computacional dos métodos está na solução do sistema preconditionado e no produto matriz-vetor. O enchimento da matriz de preconditionamento para uma ILU(2) é maior que o enchimento da matriz com ILU(1). Desta forma, o custo de resolver o sistema aproximado fica mais comprometido com o aumento do nível da ILU. Como no Bi-CGSTAB são necessárias duas operações deste tipo (ver. Tab. 1), não ocorre uma diminuição do tempo de CPU, com o aumento do nível da ILU de 1 para 2, embora ocorra uma diminuição do número de iterações.

---

No presente trabalho implementou-se um código computacional 2D não-estruturado empregando malhas de Voronoi, para a solução das equações oriundas do escoamento bifásico (óleo-água) em meios porosos. Foi empregado o modelo *black-oil* com as equações de conservação volumétricas escritas nas condições de superfície. O trabalho enquadra-se em uma linha bastante recente de pesquisa que é o uso de diagramas de Voronoi para a discretização do domínio de cálculo. O conhecimento do comportamento das técnicas neste tipo de discretização auxilia o desenvolvimento de simuladores, indispensáveis em engenharia de reservatório.

1. Comparar a eficiência da metodologias de linearização do modelo *black-oil*: IMPES, AIM e TI.

Apesar de existir um grande número de trabalhos que empregam a metodologia AIM não é claro o comportamento deste método em relação ao IMPES e TI, ou seja, grande parte destes trabalhos comparam o método AIM com o IMPES, TI ou com ambos, mas geralmente os critérios utilizados para controle das iterações de newtonianas não são apresentados. Além do mais este é um dos poucos trabalhos que empregam o AIM com malha híbridas de Voronoi com conectividade variada. Estes fatos justificam o estudo destes métodos no presente trabalho.

Para todos os testes realizados a metodologia IMPES requereu maior tempo de CPU. A limitação do IMPES está relacionada a fatores como: curva de fluxo fracionário, vazões empregadas, tipo de malhas, etc. Por exemplo, para a malha hexagonal-híbrida empregada para a configuração de cinco poços o IMPES requereu 11 vezes mais tempo de CPU que o AIM com critério de estabilidade aliado a variação na saturação para  $M=10$ . Para  $M=50$  esta relação aumentou para 26,2. Observe-se que a única diferença nestes dois casos foi a razão de viscosidade e por conseguinte a curva de fluxo fracionário.

Na maioria dos casos analisados o critério de estabilidade proposto por Fung *et al.* (1989) não foi bastante rigoroso, entretanto aliando-se ao mesmo a variação na saturação forneceu resultados satisfatórios. Deve-se salientar que o critério para chaveamento de IMPES para TI e

vice-versa não necessariamente deve ser exato. O que se objetiva são critérios confiáveis que possam realizar a troca sem causar oscilações. Devido a natureza não-linear das equações envolvidas um CFL ou critério de estabilidade exato não é uma tarefa fácil de ser realizada.

Verificou-se que mesmo desconsiderando-se uma parcela do Jacobiano para a metodologia AIM os erros de balanço tinham a mesma ordem de grandeza que aqueles obtidos para a metodologia TI. Para o IMPES mesmo trabalhando-se com intervalos de tempo bastante inferiores aos do AIM e TI os erros de balanço foram ligeiramente superiores. Este fato pode ser creditado à realização de apenas uma iteração do ciclo de Newton.

2. Estudar o efeito de dois tipos de ordenações das incógnitas para o GMRES: Uma geométrica, similar a ordenação natural aplicada a malhas cartesianas e outra baseada em uma fatoração incompleta (ILU), denominada MDF (*Minimum Discarded Fill*).

A ordenação MDF foi aplicada nos trabalhos de D'Azevedo et al. (1991, 1992a e 1992b) a problemas condutivos, de mecânica dos fluidos e de reservatório de petróleo empregando malhas cartesianas e malhas não-estruturadas oriundas do emprego de discretização triangular. Empregando o método dos volumes finitos este tipo de discretização origina volumes distorcidos de hexágonos (2D) e tetraedros (3D). Novamente, este é um tópico em aberto na literatura, sendo o seu estudo plenamente justificável.

3. Estudar o comportamento dos sistemas lineares oriundos da aplicação deste tipo de malhas. Para tal, foram empregados três aceleradores de convergência comumente empregados na literatura: ORTHOMIN, GMRES e Bi-CGSTAB.

Novamente, o emprego das malhas de Voronoi híbridas justifica o estudo do comportamento dos diversos métodos de solução dos sistemas lineares.

Os resultados apresentados mostraram que a ordenação MDF é robusta para níveis de ILU igual ou superior a 1, reduzindo o número de iterações no *solver*. Entretanto, a mesma é grandemente afetada pela ordenação original. Em alguns casos esta dependência foi diminuída

com o aumento do nível da fatoração incompleta. Talvez uma maior robustez do esquema seja obtida aliando-se ao MDF uma estratégia de análise dos elementos criados nos fatores LU como foi realizado por D'Azevedo *et al.* (1992b). Deve-se também testar outros tipos de ordenações básicas como por exemplo, *Reverse-Cuthil-McKee*, *Red Black*, etc.

Em relação a resolução dos sistemas lineares, os resultados apresentados em termos de tempo de CPU e número de iterações no *solver* mostraram que o GMRES é ligeiramente superior ao ORTHOMIN, apesar do número de iterações em ambos os métodos serem semelhantes. Isto ocorre, em virtude do número de operações no ORTHOMIN ser maior. Poder-se-ia tentar realizar o produto  $Mq^{n+1}$  em vez de realizá-lo por acumulação, como foi realizado neste trabalho. Entretanto como foi sugerido por Behie e Vinsome (1982) este procedimento só deve ser realizado se o número de ortogonalizações for maior que o número de bandas da matriz original. Entretanto como foi observado no presente trabalho, o número de ortogonalizações é dependente de cada problema a ser resolvido.

Para a configuração de oito poços com malha hexagonal-híbrida e para a configuração de dois poços com malha hexagonal o GMRES apresentou melhores resultados em termos de tempo de CPU, entretanto para a configuração de cinco poços o Bi-CGSTAB foi o método mais robusto. Em todos os casos testados o Bi-CGSTAB foi o método que apresentou o menor número de iterações para uma dada ordenação e nível de ILU empregado. Uma vantagem do Bi-CGSTAB é a não dependência de parâmetros de iteração a ser definidos pelo usuário, enquanto o GMRES e ORTHOMIN requerem alguma experiência do usuário ou uma série de testes na tentativa de obter a dimensão da base e número de recomeços ótimos.

Lista-se a seguir alguns dos pontos não abordados no presente trabalho e que considera-se que devam ser atacados em futuros trabalhos nesta área:

1. Testar outros esquema de fatoração aproximada, como por exemplo, os esquemas de fatoração em bloco (Eisenstat *et al.*, 1988; Axelsson, 1988; Aarden e Karlsson, 1989). Estes esquemas são considerados superiores ao empregado no presente trabalho quando trabalha-se com máquinas vetoriais e paralelas.

2. Resolver o problema trifásico e verificar se o critério de estabilidade funciona adequadamente com o acréscimo da fase gás, como foi observado no trabalho de Fung et al. (1992).
3. Implementar esquemas de interpolação de ordem mais alta na avaliação das mobilidades. Uma opção que parece mais atrativa devido as características geométricas da malha de Voronoi é o esquema CDS (*Central Difference Scheme*) com inclusão de termos de dissipação artificial para evitar possíveis oscilações nos campos de saturação e pressão. Este tipo de esquema tem sido largamente empregado na área de mecânica dos fluidos computacional (Jamenson e Mavriplis, 1986; Cabuk *et al.*, 1992).

- 
1. AARDEN, J. M. C. e KARLSSON, K. E.: "Preconditioned CG-Type Methods for Solving the Coupled Systems of Semiconductor Equations", BIT, 1989, pp. 916-937.
  2. ALLEN III, M. B., BEHIE, G. A. e TRANGENSTEIN, J. A.: "*Multiphase Flow in Porous Media*", ed. by C. A. Brebbia and Orszag, Germany, 1988.
  3. AXELSSON, O.: "Incomplete Block Matrix Factorization Preconditioning Methods, The Ultimate Answer?", *J. Comput. Appl. Math.*, 13, 1985, pp. 3-18.
  4. AZIZ, K.: "*Notes for Petroleum Reservoir Simulation*", Stanford University, 1993.
  5. AZIZ, K. e SETTARI, A.: "*Petroleum Reservoir Simulation*", Applied Science Publishers, 1979.
  6. BALIGA, B. R. and PATANKAR, S. V.: "A Control-Volume Finite Element Method for Two-Dimensional Fluid Flow and Heat Transfer", *Numer. Heat Transfer*, 6, 1983, pp. 245-261.
  7. BARRET, R., BERRY, M., CHAN, T., DEMMEL, J., DONATO, J., DONGARRA, J., EIJKHOUT, V., POZO, R., ROMINE, C. e van der VORST, H.: "*Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*", SIAM, Philadelphia, 1994.
  8. BEHIE, A. e FORSYTH Jr., P. A.: "Incomplete Factorization Methods for Fully Implicit Simulation of Enhanced Oil Recovery", *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 5, 1984, pp.543-561.
  9. BEHIE, A. and VINSOME, P. K. W.: "Block Iterative Methods for Fully Implicit Reservoir Simulation", *Soc. Pet. Eng. J.*, 22, 1982, pp. 659-668.
  10. BERTIGER, W. J. and PADMANABHAN, L.: "Finite Difference Solutions to Grid Orientation Problems Using IMPES, artigo SPE 12250, *SPE-AIME Symposium of Reservoir Simulation*, São Francisco, 1983.
  11. BRAND, C. W. e HEINEMANN, J. E and AZIZ, K.: "The Grid Orientation Effect in Reservoir Simulation", artigo SPE 21228, *Eleventh SPE Symposium on Reservoir Simulation*, Anaheim, 1991.
  12. CABUK, H., SUNG, C. -H., MODI, V.: "Explicit Runge-Kutta Method for Three-Dimensional Internal Incompressible Flows", *AIAA Journal*, 30, August, pp. 2024-2031.
  13. CHIEN, M. C. H. and NORTHRUP, E. J.: "VetORIZATION and Parallel Processing of Local

- Grid Refinement and Adaptive Implicit Schemes in a General Purpose Reservoir Simulation, artigo SPE 25258, *Twelfth Symposium on Reservoir Simulation*, New Orleans, 1993.
14. CONCUS, P., GOLUB, G. H. e MEURANT, G.: "Block Preconditioning for the Conjugate Gradient Method", *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 6, 1985, pp. 220-252.
  15. COUTINHO, A. L. G. A.: "*Comunicação pessoal*", 1995.
  16. COUTINHO, A. L. G. A., ALVES, J. L. D., LANDAU, L. e EBECKEN, N. F. F.: "Solution of Two-Phase Immiscible Flow in Oil Reservoirs Employing Element-By-Element Iterative Strategies on the CRAY Y-MP", XIV CILAMCE, São Paulo, SP, 1993a, pp. 723-732.
  17. \_\_\_\_\_: "A Dynamic Mesh Partition Algorithm for the Finite Element Solution of Two-Phase Immiscible Flow in Oil Reservoir", *Finite Elements in Fluids*, 1993b, pp. 856-865.
  18. COUTINHO, A. L. G. A., ALVES, J. L. D., GARCIA, E. L. e LOULA, A. F. D.: "Solution of Miscible and Immiscible Flows Employing Element-By-Element Iterative Strategies", artigo SPE 27050, *III American/Caribbean Petroleum Engineering Conference*, Buenos Aires, Argentina, 1994.
  19. CUNHA, A. R. C.: "Uma metodologia para Simulação Numérica Tridimensional de Reservatórios de Petróleo Utilizando o Modelo Black-Oil e Formulação nas Frações Mássicas", Dissert. de Mestrado, Dept<sup>o</sup> Eng<sup>a</sup> Mecânica, UFSC, em andamento.
  20. CUNHA, A. R., MALISKA, C. R., SILVA, A. F. C. e LIVRAMENTO, M. A.: "Two-Dimensional Two-Phase Petroleum Reservoir Simulation Using Boundary-Fitted Grids", *V ENCIT*, São Paulo, SP, Dezembro, 1994, pp. 359-362; *RBCM*, XVI, 1994, pp. 423-429.
  21. CUTHILL, E. e McKEE, J.: "Reducing the Bandwidth of Sparse Symmetric Matrices", *Proc. 24th Nat. Conf. of ACM*, ACM publ. P-69, Association of Computing Machinery, New York, 1969, pp. 157-172.
  22. DAKE, L. P.: "*Fundamentals of Reservoir Engineering*", Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, 1978.
  23. D'AZEVEDO, E., FORSYTH, P. A., e WEI-PAI, T.: "An Automatic Ordering Method for Incomplete Factorization Iterative Solvers", artigo SPE 21226, *Eleventh Symposium on Reservoir Simulation*, California, 1991, pp. 259-266.
  24. \_\_\_\_\_: "Ordering Methods for Preconditioned Conjugate Gradient Methods Applied to Unstructured Grid Problems", *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 13, 1992a, pp. 994-961.
  25. \_\_\_\_\_: "Towards a Cost-Effective ILU Preconditioner with High Level Fill", *BIT*, 32,

- 1992b, pp. 442-463.
26. DEIMBACHER, F. X. and HEINEMANN, Z. E.: "Time-Dependent Incorporation of Locally Irregular Grids in Large Reservoir Simulation Models", artigo SPE 25260, *Twelfth Symposium on Reservoir Simulation*, New Orleans, 1993.
  27. DIRICHLET, G. L. : "Z Reire Angew Math", vol. 40, 1850, p. 216.
  28. EISENSTAT, S. C., ELMAN, H. C. e SCHULTZ, M. H.: "Block-Preconditioned Conjugate-Gradient-Like Methods for Numerical Reservoir Simulation", *SPE Res. Eng.*, 1988, pp. 307-312.
  29. EWING, R.: "*Problems Arising in the Modeling of Processes for Hydrocarbon Recovery*" in *The Mathematics of Reservoir Simulation*, ed. por R. E. Ewing, Philadelphia: SIAM, 1983, pp. 3-34.
  30. EWING, R. E.: "Preconditioned Conjugate Gradient Methods for Large-Scale Fluid Flow Applications", *BIT*, 29, 1989, pp. 850-866.
  31. FLEMING, G. C.: "Modeling the Performance of Fractured Wells in Pattern Floods Using Orthogonal, Curvilinear Grids", artigo SPE 16973, *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, Dallas, 1987.
  32. FORSYTH, P. A.: "A Control Volume Finite Element Method for Local Mesh Refinement", artigo SPE 18415, *Tenth Symposium on Reservoir Simulation*, Houston, 1989, pp. 85-96.
  33. \_\_\_\_\_: "Adaptive Implicit Criteria for Two-Phase Flow with Gravity and Capillary Pressure", *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 10, 1989, pp. 227-252.
  34. FORSYTH, P. A. e SAMMON, P. H.: "Local Mesh Refinement and Modelling of Faults and Pinchouts", artigo SPE 13524, *Reservoir Symposium*, Dallas, Texas, 1985.
  35. \_\_\_\_\_: "Practical Considerations for Adaptive Implicit Methods in Reservoir Simulation", *Journal of Comput. Physics*, 62, 1986, pp. 265-281.
  36. FUNG, L. S. K., BUCHAMAN, W. L. and RAVI SHARMA: "Hybrid-CFFE Method for Flexible Grid Reservoir Simulation", artigo SPE 25266, *Twelfth Symposium on Reservoir Simulation*, New Orleans, 1993.
  37. FUNG, L. S. K., COLLINS, D. A., NGHIEM, L. X.: "An Adaptive-Implicit Switching Criterion Based on Numerical Stability Analysis", *SPE Reservoir engineering*, 1989, pp.45-51.
  38. FUNG, L. S. K., HIEBERT, A. D. and NGHIEM, L.: "Reservoir Simulation with a Control-

- Volume Finite-Element Method", artigo SPE 21224, *Eleventh SPE Symposium on Reservoir Simulation*, Anaheim, 1991.
39. GEORGE, J. A.: "Computer Implementation of the Finite Element Method", *Tech. Rep. STAN-CS. 71-208*, Computer Sci. Dept., Stanford Univ., Stanford, California, 1971.
40. HEINEMANN, Z. E. e BRAND, C. W.: "Gridding Construction for Reservoir Simulation, *First International Forum on Reservoir Simulation*, Alpbach, Austria, 1988.
41. HEINEMANN, Z. E., GERKEN, G. and HANTELMANN, G.: "Using Grid Refinement in a Multiple-Application Reservoir Simulator, artigo SPE 12225, *Seventh Symposium on Reservoir Simulation*, San Francisco, 1983.
42. HIRASAKI, G. J. and O'DELL, P. M.: "Representation of Reservoir Geometry for Numerical Simulation", *Soc. Pet. Eng. J.*, Dec. 1970, pp. 393-394.
43. JAMESON, A. e MAVRIPLIS, D.: "Finite Volume Solution of the Two-Dimensional Euler Equations on a Regular Triangular Mesh", *AIAA Journal*, 24, April, 1986, pp. 611-618.
44. LAKE, L. P.: "*Enhanced Oil Recovery*", Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1989.
45. LIU, J.W.-H. e SHERMAN, A. H.: "Comparative Analysis of the Cuthill-McKee and the Reverse Cuthill-McKee Ordering Algorithms for Sparse Matrices", *SIAM J. Numer. Anal.*, 13, 1975, pp. 198-213.
46. MACKAY, A. L. : "Stereological Characteristic of Atomic Arrangements in Crystals", *Journal of Microscopy*, 1972, 95, pp. 217 - 27.
- ✕ 47. MALISKA Jr., C. R.: "Um Robusto Gerador de Diagramas de Voronoi para Discretização de Domínios Irregulares", *XIV CILAMCE*, São Paulo, SP, Dezembro, 1993, pp. 753-762.
48. MALISKA, C. R. e MALISKA Jr., C. R.: "A Finite Volume Method Using Voronoi Grids for the Solution of Miscible Displacement in Porous Media", *V ENCIT*, São Paulo, SP, 1994, pp. 355-358; *RBCM*, XVI, 1994, pp. 415-422.
49. MALISKA, C. R.: "*Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*", LTC, Rio de Janeiro, RJ, 1995.
50. MALISKA, C. R., CUNHA, A. R., LIVRAMENTO M. A. e SILVA, A. F. C.: "Tridimensional Petroleum Reservoir Simulation Using Generalized Curvilinear Grids", *V ENCIT*, São Paulo, SP, Dezembro, 1994, pp. 363 - 366.
51. MALISKA, C. R., SILVA, A. F. C., CUNHA, A. R., e OMOTO, M.: "*Desenvolvimento de Modelos Computacionais em Coordenadas Generalizadas para Simulação de Reservatórios*

- de Petróleo - Modelo Black-Oil 3D Usando as frações Massicas*", Relatório para o CENPES, Projeto 03.73.01 - Programa 102, outubro, 1995.
52. MARCONDES, F., ZAMBALDI, M. C. e MALISKA, C. R.: "Simulação Numérica de Reservatórios de Petróleo Utilizando Malhas de Voronoi", *V ENCIT*, São Paulo, SP, Dezembro, 1994, pp. 335-338.
53. \_\_\_\_\_: "Aplicação da Ordenação MDF ao Método GMRES", *XIII COBEM*, Belo Horizonte, MG, 1995a.
54. \_\_\_\_\_: "Comparação de Métodos Iterativos não Estacionários em Malhas não Estruturadas de Voronoi na Solução de Problemas de Petróleo", *XIII COBEM*, Belo Horizonte, MG, 1995b.
55. \_\_\_\_\_: "Comparação de Métodos Estacionários e GMRES em Simulação de Reservatórios de Petróleo Utilizando Malhas Não-Estruturadas de Voronoi", *RBCM*, XVII, 1995c, pp. 360-372.
56. MEIJRINK, J. A. e van der VORST, H. A.: "Guidelines for the Usage of Incomplete Decompositions in Solving Sets of Linear Equations as they Occur in Practical Problems", *J. Comput. Physics*, 44, 1981, pp. 134-155.
57. MEZZOMO, R. F.: "O Escoamento em Meios Porosos na Indústria do Petróleo", *B. Técnico PETROBRÁS*, Rio de Janeiro, 35, 1992, pp. 21-32.
58. MOTA, M. A. A.: "*Simulação Numérica de Reservatórios de Petróleo Utilizando Coordenadas Generalizadas e Esquema de Interpolação TVD*", Dissertação de mestrado, UFSC, Florianópolis, SC, 1994.
59. MOTA, M. A. A. e MALISKA, C. R.: "Simulação Numérica de Reservatórios de Petróleo Utilizando Coordenadas Generalizadas e Interpolação TVD", *V ENCIT*, São Paulo, SP, Dezembro, 1994, pp. 325 - 328.
60. NACUL, E. C.: "Use of Domain Decomposition and Local Grid Refinement in Reservoir Simulation", PhD dissertation, Stanford University, Stanford, 1991.
61. PALAGI, C.: "Generation and Application of Voronoi Grid to Model Flow in Heterogeneous Reservoirs", PhD dissertation, Stanford University, Stanford, 1992.
62. PATHAK, P.; Winterfeld, P. H., Davis, H. T. e Scriven L. E.: "Rock Structure and Transport there in: Unifying with Voronoi Models and Percolation Concepts", paper SPE 8846, *First Joint SPE/DOE Symposium on Enhanced Oil Recovery*, Tulsa, April, 1980.

63. PEACEMAN, D. W.: "*Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation*", Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, 1977.
64. \_\_\_\_\_: "Interpretation of Well-Block Pressures in Numerical Reservoir Simulation", *Soc. Pet. Eng. J.*, 1978, pp. 183-194.
65. \_\_\_\_\_: "Interpretation of Well-Block Pressures in Numerical Reservoir Simulation with Nonsquare Grid Blocks and Anisotropic Permeability", *Soc. Pet. Eng. J.* 1983.
66. \_\_\_\_\_: "Interpretation of Well-Block Pressures in Numerical Reservoir Simulation-Part 3: Some Additional Well Geometries", artigo SPE 16976, *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, Dallas, 1987.
67. PEDROSA, O. A. and AZIZ, K.: "Use of a Hybrid Grid in Reservoir Simulation", *SPERE*, 1986, pp. 611-621.
68. PINTO, A. C. C.: "*Esquemas de Alta Resolução Para Controle de Dispersão Numérica em Simulação de Reservatórios*", Dissertação de Mestrado, UNICAMP, Campinas, SP, 1991.
69. PRAIS, F. e CAMPAGNOLO, E. A.: "Modelagem do Escoamento Multifásico em Simulação de Reservatório", XI COBEM, 1991, São Paulo, SP, pp. 545-548.
70. PRICE, H. S. e COATS, K. H.: "Direct Methods in Reservoir Simulation", *Trans. SPE of AIME*, 257, 1974, pp. 295-308.
71. PRUESS, K. and BODVARSSON, G. S.: "A Seven-Point Finite Difference Method for Improved Grid Orientation Performance in Pattern Steamfloods", artigo SPE 12252, *Seventh Symposium on Reservoir Simulation*, San Francisco, 1983.
72. QUANDALLE, P. and BESSET, P.: "The Use of Flexible Gridding for Improved Reservoir Modeling", artigo SPE 12239, *Seventh Symposium on Reservoir Simulation*, San Francisco, 1983.
73. RAW, M. J. and SCHNEIDER, G. E.: "A Skewed Positive Influence Coefficient Upwinding Procedure for Control-Volume-Based Finite Element Convection-Diffusion Computation", *Numer. Heat Transfer*, 9, 1986, pp. 1-26.
74. RUBIN, B. and BLUNT, M. J.: "High-Order Implicit Flux Limiting Schemes for Black-Oil Simulating", artigo SPE 21222, *Eleventh SPE Symposium on Reservoir Simulation*, Anaheim, 1991, pp. 219-229.
75. RUSSELL, T. F.: "Stability Analysis and Switching Criteria for Adaptive Implicit Methods Based on the CFL Condition", artigo SPE 18416, *Tenth Symposium on Reservoir*

*Simulation*, Houston, 1989.

76. SAAD, Y. e SCHULTZ, M. H.: "GMRES: A General Minimal residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems", *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 7, 1986, pp. 856-869.
77. SANTOS, R. L. A.: "*Estudo de Injeção de Traçadores em Meios Porosos A través do Método de Diferenças Finitas com Discretização Exponencial*", Dissertação de Mestrado, UNICAMP, Campinas, SP, 1990.
78. SHARPE, H. N.: "Validation of an Adaptive, Orthogonal, Curvilinear Gridding Procedure for Reservoir Simulation", artigo SPE 25262, *Twelfth SPE Symposium on Reservoir Simulation*, New Orleans, 1993.
79. SHARPE, H. N. e ANDERSON, D. A.: "Orthogonal Curvilinear Grid Generation with Present Internal Boundaries for Reservoir Simulation", artigo SPE 21235, *Eleventh SPE Symposium on Reservoir Simulation*, Anaheim, 1991.
80. SHAKIB, F., HUGES, J. R. e JOHAN, Z.: "A Multi-Element Group Preconditioned GMRES Algorithm for Nonsymmetric Systems Arising in Finite Element Analysis", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 75, 1989, pp. 415-456.
81. SHAW, D. C.: "The Treatment of wells, Faults and Other Singularities in a Black-Oil Finite-Element Reservoir Simulator", *Twelfth Symposium on Reservoir Simulator*, New Orleans, 1993.
82. SIMON, H. D.: "Incomplete LU Preconditioners for Conjugate-Gradient-Type Iterative Methods", *SPE J. Res. Engrg.*, 3, 1988, pp. 302-306.
83. SONNEVELD, P.: "CGS, A Fast Lanczos-Type Solver for Nonsymmetric Linear Systems", *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, 10, 1989, pp. 36-52.
84. SPIVAK, A., PRICE, H. S. e SETTARI, A.: "Solution of the Equations for Multidimensional, Two-Phase, Immiscible Flow by Variational Methods", paper SPE 5723, *SPE-AIM Fourth Symposium on Numerical Simulation of Reservoir Performance*, Los Angeles, 1976.
- ✕ 85. SUGIHARA, K., IRI, M.: "Construction of the Voronoi Diagram for one Million Generators in Single-Precision Arithmetic". *Proc. of the IEEE*, vol. 80, pp 1471 - 1484.
86. STEVENSON, M. D., KAGAN, M. e PINCZEWSKI, W. V.: "Computational Methods in Petroleum Reservoir Simulation", *Computers & Fluids*, 19, 1991, pp. 1-19.
87. TANIGUCHI, N., Arakawa, C., e Kobayoshi, T. : "Construction of a Flow - Simulating Method with Finite Volume Based on a Voronoi Diagram", *ISME International Journal*, 31,

1991, pp. 19 - 23.

88. TINNEY, W. F. e WALKER, J. W.: "Direct Solutions of Sparse Network Equations by Optimally Ordered Triangular Factorization", *Proc. IEEE*, 55, 1967, pp. 1801-1809.
89. THOMAS, G. W. e THURNAU, D. H.: "Reservoir Simulating Using an Adaptive Implicit Method", *Soc. Pet. Eng. J.*, 1983, pp. 759-768.
90. VASCONCELLOS, J. F. V.: "*Solução Numérica de escoamentos Turbulentos em Dutos com Bifurcação Usando Multidomínios*", Dissertação de Mestrado, UFSC, Florianópolis, SC, 1993.
91. VASCONCELLOS, J. F. V. e MALISKA, C. R.: "Numerical Study of the Turbulent Flow in a Bifurcating Channel using a Multidomain Procedure", *V ENCIT*, São Paulo, SP, 1994, pp. 109-112.
92. VINSOME, P. K. W.: "ORTHOMIN, An Iterative Method for Solving Sparse Sets of Simultaneous Linear Equations", artigo SPE 5729, *Fourth SPE Symposium on Numerical Simulation of Reservoir Performance*, Los Angeles, 1976.
93. VOEVODIN, V.: "The Problem of Non-Self-Adjoint Generalization of the Conjugate Gradient Method is Closed", *U.S.S.R. Comput. Meths. and Math. Phys.*, 23, 1983, pp. 143-144.
94. von ROSENBERG, D. U.: "Local Grid Refinement for Finite Difference Methods", artigo SPE 10974, *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, New Orleans, 1982.
95. WINTERFELD, P. H., Scriven, L. E. e Davis, H. T.: "Percolation and Conductivity of Random Two-Dimensional Composites", *J. Phys. C: Solid State Phys.*, 1981, 14, pp. 2361 - 76.
96. WONG, T. W., FIROOZABADI, A. e AZIZ, K.: "The Relationship of the Volume Balance Method of Compositional Simulation to the Newton-Raphson Method", Artigo SPE 18424, *Tenth SPE Symposium on Reservoir Simulation*, Feb., 1989, Houston, Texas.
97. YOUNG, L. C. and RUSSEL, T. F.: "Implementation of an Adaptive Implicit Method", artigo SPE 25245, *Twelfth Symposium on Reservoir Simulation*, New Orleans, 1993.
98. YANOSIK, J. L., and McCracken, T. A.: "A Nine-Point Finite-Difference Reservoir Simulator for Realistic Prediction of Unfavorable Mobility Ratio Displacements", paper SPE apresentado no *fourth Symposium on Numerical Simulation of Reservoir Performance*, Los Angeles, 1976; *Soc. Pet. Eng. J.*, 18, 1978, pp. 253-262.

Com o objetivo de um maior entendimento a respeito do modelo composicional apresenta-se a formulação descrita em Peaceman (1977). Conforme anteriormente descrito no Cap. 2, suponha que exista  $N_p$  fases (gás (g), óleo(o) e água (w)) e  $N_q$  componentes químicos, onde cada componente  $N_i$  pode estar presente em qualquer uma das fases. O fluxo de massa do componente  $i$  por unidade de área e por unidade de tempo pode ser escrito como,

$$X_{ig} \rho_g \vec{V}_g + X_{io} \rho_o \vec{V}_o + X_{iw} \rho_w \vec{V}_w \quad (109)$$

a massa do componente  $i$  por unidade de volume do reservatório é dada por,

$$\phi (X_{ig} \rho_g S_g + X_{io} \rho_o S_o + X_{iw} \rho_w S_w) \quad (110)$$

e os termos de injeção ou produção podem ser escritos como,

$$X_{ig} \rho_g q_g + X_{io} \rho_o q_o + X_{iw} \rho_w q_w \quad (111)$$

Combinando as relações apresentadas anteriormente e empregando a lei de Darcy para cálculo das velocidades das fases, pode-se escrever a equação de conservação para o componente  $i$  como,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi [\sum_{N_p} X_{ip} \rho_p S_p]) = \vec{\nabla} \cdot [\sum_{N_p} X_{ip} \rho_p \bar{K} \frac{-K_{rp}}{\mu_p} (\vec{\nabla} P_p - \rho_p g \vec{\nabla} D)] + \sum_{N_p} X_{ip} \rho_p q_p \quad (112)$$

onde  $D$  é a profundidade medida de algum plano horizontal, sendo o sentido positivo para baixo, e  $g$  a aceleração da gravidade.

Tab. 26 - Variáveis dependentes para o modelo composicional

Variáveis	Número
$X_{ig}$	$N_q$
$X_{io}$	$N_q$
$X_{iw}$	$N_q$
$P_g, P_o$ e $P_w$	3
$S_g, S_o$ e $S_w$	3
$\mu_g, \mu_o$ e $\mu_w$	3
$\rho_g, \rho_o$ e $\rho_w$	3
$K_{ig}, K_{io}$ e $K_{iw}$	3
Total	$3N_q + 15$

Existem  $N_q$  equações dadas pela Eq. (112) uma para cada componente  $i$ . Entretanto existem  $(3N_q + 15)$  incógnitas, como pode ser observado na Tab. 26. As equações para fechamento do problema são obtidas através de dados experimentais, restrições de volume, restrição de massa, etc. Apresenta-se a seguir as relações adicionais.

Restrição volumétrica

$$S_g + S_o + S_w = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ Equação} \quad (113)$$

. Restrição mássica

$$\sum_{i=1}^{N_p} X_{ig} = \sum_{i=1}^{N_p} X_{io} = \sum_{i=1}^{N_p} X_{iw} \quad \Rightarrow \quad 3 \text{ Equações} \quad (114)$$

. Densidade

$$\rho_p = \rho_p(P_p, X_{ip}) \quad \Rightarrow \quad 3 \text{ Equações} \quad (115)$$

. Viscosidades

$$\mu_p = \mu_p(P_p, X_{ip}) \quad \Rightarrow \quad 3 \text{ Equações} \quad (116)$$

. Permeabilidade relativas

$$K_{rp} = K_{rp}(P_p, X_{ip}) \quad \Rightarrow \quad 3 \text{ Equações} \quad (117)$$

. Pressão capilar

$$P_g = P_o + P_{cgo}(S_g, S_o, S_w) \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ Equação} \quad (118)$$

$$P_w = P_o - P_{cow}(S_g, S_o, S_w) \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ Equação} \quad (119)$$

. Relações de equilíbrio ( $K_{iq}$ ) - Para cada par de fases existe uma constante de distribuição para cada componente. Esta constante é função da pressão, temperatura ( $T$ ) e composição das fases.

$$\frac{X_{ig}}{X_{io}} = K_{igo}(T, P_g, P_o, X_{ig}, X_{io}) \quad \Rightarrow \quad N_q \text{ Equações} \quad (120)$$

$$\frac{X_{ig}}{X_{iw}} = K_{igw}(T, P_g, P_w, X_{ig}, X_{iw}) \quad \rightarrow N_q \text{ Equações} \quad (121)$$

$$\frac{X_{io}}{X_{iw}} = K_{iow} = \frac{X_{io}}{X_{ig}} \frac{X_{ig}}{X_{iw}} = \frac{K_{igw}}{K_{igo}} \quad \Rightarrow N_q \text{ Equações} \quad (122)$$

Das equações de equilíbrio observa-se que existem apenas  $2N_q$  relações adicionais uma vez que  $N_q$  relações podem ser obtidas das outras equações. Somando-se as Eqs. (113)-(121) nota-se que se têm  $2N_q + 15$  equações. Somando-se as mesmas as  $N_q$  equações fornecidas pela Eq. (112) tem-se o equacionamento do problema.

Na modelagem apresentada anteriormente as incógnitas são: frações mássicas, saturações e pressão. A confecção de um código computacional empregando as equações descritas anteriormente é de difícil programação. A principal dificuldade ocorre quando uma das fases desaparece, por exemplo, todo o gás encontram-se diluído na fase óleo. Neste caso as equações de restrição e as variáveis primárias têm que ser alteradas. Uma forma de se evitar este inconveniente é utilizar como variáveis primárias, a pressão e a fração mássica global ( $Z_i$ ), Wong *et al.* (1989), Prais e Campagnolo (1991). A fração mássica global é definida por,

$$Z_i = \frac{\text{massa do componente } i}{\text{massa do total da mistura}} = \frac{m_i}{m} \quad (123)$$

onde

$$m = \sum_{N_q} m_i = \sum_{N_p} m_p \quad (124)$$

A densidade média da mistura pode ser calculada por,

$$\rho_m = \frac{\text{massa total da mistura}}{\text{volume total mistura}} = \sum_{N_p} S_p \rho_p \quad (125)$$

Empregando-se as Eqs. (123)-(125) pode-se escrever a equação de conservação da massa do componente  $i$  como,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho_m Z_i) = \sum_{N_p} \vec{\nabla} \cdot [X_i \bar{K} \frac{K_{rp}}{\mu_p} (\vec{\nabla} P_p - \rho_p g \vec{\nabla} D)] + \sum_{N_p} \rho_p X_i q_p \quad (126)$$

Utilizando a equação de conservação, Eq. (126), as frações mássicas são obtidas através de rotinas *flash* (Wong, *et al.*, 1989, Prais e Campagnolo, 1991) e as saturações por sua vez são obtidas a partir das frações mássicas. Este tipo de formulação vem sendo utilizado para resolver escoamentos trifásicos empregando o modelo *black-oil* (Maliska *et al.*, 1995; Cunha, 1996).