UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

RAIMUNDO ALVES LEITÃO JÚNIOR

ÍNDICE E ESTABILIDADE DE HIPERSUPERFÍCIES MÍNIMAS E DE CURVATURA MÉDIA CONSTANTE NA ESFERA

FORTALEZA
2008

RAIMUNDO ALVES LEITÃO JÚNIOR

ÍNDICE E ESTABILIDADE DE HIPERSUPERFÍCIES MÍNIMAS E DE CURVATURA MÉDIA CONSTANTE NA ESFERA

Dissertação apresentada ao colegiado do curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará como requesito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Área de concentração:
Geometria Diferencial.

Orientador:
Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros.

FORTALEZA
2008

Leitão Júnior, Raimundo Alves

L548i Índice e estabilidade de hipersuperfícies mínimas e de curvatura média constante na esfera / Raimundo Alves Leitão Júnior. - Fortaleza: 2008.

62f.

Orientador: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Depto de Matemática, 2008.

CDD

Agradecimentos

Gostaria de expressar meus agradecimentos ao Prof. Abdênago Alves de Barros pela sua paciência e responsabilidade. A este que me mostrou o valor do esforço e o do conhecimento.

Agradeço enormemente à minha mãe Maria Mable Feitosa Leitão, ao meu falecido pai Raimundo Alves Leitão, à minha irmã Maria Tereza Feitoza Leitão, ao meu cunhado Cosme Nogueira Maia e à minha sobrinha Alexandra Feitoza Leitão Maia. Não poderia esquecer a minha irmã Maria Lizete Feitosa Leitão Teixeira, meu irmão Henrique Jorge Feitosa Leitão e meu cunhado Francisco Fernando Teixeira.

Como não poderia deixar de ser, agradeço aos meus amigos: Anderson Feitoza Leitão Maia, Héladio Andrade, Johnatan Feitosa Teixeira, Paulo Henrique Ricardo Maia e Paulo Ricardo Pinheiro Sampaio pelo apoio e confiança que me concederam durante minha vida acadêmica.

Finalmente, agradecimentos são devidos à CAPES pelo apoio financeiro e ao Departamento de Matemática pelo apoio intelectual.

Resumo

Neste trabalho estudaremos o índice de hipersuperfícies mínimas e de curvatura média constante imersas na esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$. Mais precisamente, definiremos o operador de Jacobi de hipersuperfícies mínimas e de curvatura média constante usando as fórmulas de variação de área, e em seguida estabeleceremos estimativas por baixo para o índice de hipersuperfícies mínimas imersas em $\mathbb{S}^{n+1}$. Além disso, caracterizaremos os toros de Clifford mínimos como as hipersuperfícies compactas, orientáveis e mínimas em $\mathbb{S}^{n+1}$ tais que $\lambda_1 = -2n$, onde λ_1 é o primeiro autovalor do operador de Jacobi. Mostraremos que as esferas totalmente umbílicas $\mathbb{S}^n(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$, com $0 < r < 1$, são as hipersuperfícies fracamente estáveis em $\mathbb{S}^{n+1}$. Por último, estabeleceremos estimativas por baixo para o índice fraco de hipersuperfícies de curvatura média constante em $\mathbb{S}^{n+1}$ e caracterizaremos os toros de Clifford $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}\left(\sqrt{1-r^2}\right)$ de curvatura média constante como as hipersuperfícies de curvatura média constante tais que o índice fraco é igual a $n+2$, *onde* $\sqrt{\frac{k}{n+2}} \leq r \leq \sqrt{\frac{k+2}{n+2}}$.

Abstract

The aim of this work is to study the index either of compact minimal or constant mean curvature hypersurfaces immersed into the Euclidean unit sphere $\mathbb{S}^{n+1}$. The main ingredient to do that is the Jacobi operator which appears on the second formula of variation of area. On the minimal case we shall present low estimative for the index and we shall show that the minimal Clifford tori are the unique minimal hypersurfaces over which $\lambda_1 = -2n$, where λ_1 stands for the first eigenvalue of the Jacobi operator. Moreover, it is easy to see that totally umbilical sphere $\mathbb{S}^n(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$, with $0 < r < 1$, are weakly stable. Finally we shall show that the index is bigger that or equal to $n+2$ for compact constant mean curvature hypersurfaces of $\mathbb{S}^{n+1}$ provides they have constant scalar curvature. Moreover , Clifford tori $\mathbb{S}^k\left(r\right) \times \mathbb{S}^{n-k}\left(\sqrt{1-r^2}\right)$ attain such index provided $\sqrt{\frac{k}{n+2}} \leq r \leq \sqrt{\frac{k+2}{n+2}}$.

Sumário

Introdução

Seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável imersa na esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$, com vetor normal N. Denotaremos por A o operador de Weingarten de Σ^n. Mais precisamente, temos

$$AX = -\nabla^\circ_X N = -\overline{\nabla}_X N, \quad X, Y \in T\Sigma^n,$$

onde ∇° e $\overline{\nabla}$ denotam, respectivamente, as conexões Riemannianas de $\mathbb{R}^{n+2}$ e $\mathbb{S}^{n+1}$. Sabemos que para cada $p \in \Sigma^n$ A define uma aplicação em $T_p\Sigma^n$ simétrica. Definimos a curvatura média H de Σ^n por

$$H = \frac{1}{n} tr\left(A\right).$$

Seja $C^\infty\left(\Sigma^n\right)$ o conjunto das funções diferenciáveis. Dada $f \in C^\infty\left(\Sigma^n\right)$ existe $\varepsilon_f > 0$ tal que $\Psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ definida por

$$\Psi\left(t, p\right) = Exp_{\psi(p)}\left(tf\left(p\right) N\left(p\right)\right),$$

define uma a variação normal de ψ. Assim, podemos considerar a função área $A : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$A\left(t\right) = \int_\Sigma d\Sigma_t,$$

onde Σ_t representa a variedade Σ munida com a métrica induzida por ψ_t e $d\Sigma_t$ é o elemento de área dessa métrica induzida em Σ.

Pela fórmula da primeira variação de área temos

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{t=0} = -n \int_\Sigma fH d\Sigma,$$

isto é, hipersuperfícies mínimas são caracterizadas como pontos críticos do funcional área.

O operador de estabilidade desse problema variacional, Σ^n mínima, é dado pela segunda variação de área

$$\left.\frac{d^2A}{dt^2}\right|_{t=0} = -\int_\Sigma \left\{f\Delta f + \left(|A|^2 + n\right) f^2\right\} d\Sigma = -\int_\Sigma fJf d\Sigma, \quad f \in C^\infty\left(\Sigma^n\right),$$

onde Δ representa o Laplaciano de Σ^n, $|A|^2$ denota o traço de A^2 enquanto $J : C^\infty\left(\Sigma^n\right) \longrightarrow C^\infty\left(\Sigma^n\right)$ denota o operador de Jacobi de Σ^n dado por

$$J\left(f\right) = \Delta f + |A|^2 f + nf.$$

Sabemos da teoria espectral de variedades Riemannianas compactas que o espectro de J

$$\begin{aligned} Spec\,(J) &= \{\lambda \in \mathbb{R} : \; Jf = -\lambda f,\, f \in C^{\infty}\left(\Sigma^{n}\right),\; f \neq 0\} \\ &= \{\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \cdots\} \end{aligned}$$

é formado por autovalores λ_k com multiplicidades finitas m_k e tais que

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \lambda_k = +\infty.$$

O primeiro autovalor λ_1 é simples e satisfaz a seguinte caracterização do min-max

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \frac{-\int_{\Sigma} fJf d\Sigma}{\int_{\Sigma} f^2 d\Sigma} : \; f \in C^{\infty}\left(\Sigma^{n}\right),\; f \neq 0 \right\}.$$

O operador de Jacobi induz uma forma quadrática $Q : C^{\infty}\left(\Sigma^{n}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$Q\left(f\right) = -\int_{\Sigma} fJf d\Sigma,$$

e o índice de Σ, denotado por $Ind\left(\Sigma^{n}\right)$, é definido por

$$Ind\left(\Sigma^{n}\right) = \max\left\{dimV : \; V \subset C^{\infty}\left(\Sigma^{n}\right),\; Q\left(f\right) < 0, \forall f \in V\right\}.$$

Simons em [19] caracterizou os equadores $\mathbb{S}^{n} \subset \mathbb{S}^{n+1}$ totalmente geodésicos como as únicas hipersuperfícies compactas e mínimas em $\mathbb{S}^{n+1}$ com índice igual a 1. Para o caso de dimensão dois, Urbano em [20] mostrou que $Ind\left(\Sigma^{2}\right) \geq 5$. Além disso, ocorre igualdade se, e somente se, Σ^{2} for um toro de Clifford. Para dimensões maiores que dois, El Soufi em [15], provou que se Σ^{n} não é um equador totalmente geodésico, então $Ind\left(\Sigma^{n}\right) \geq n+3$.

Assim, temos o seguinte teorema.

Teorema 1 (Simons, Urbano e El Soufi). *Seja Σ^{n} uma hipersuperfície compacta, orientável e mínima imersa na esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$. Então*

1. $Ind\left(\Sigma^{n}\right) = 1$ *(e Σ^{n} é um equador totalmente geodésico $\mathbb{S}^{n} \subset \mathbb{S}^{n+1}$),*
2. *ou $Ind\left(\Sigma^{n}\right) \geq n+3$. Além disso, se $n = 2$ ocorre igualdade se, e somente se, Σ^{2} for um toro de Clifford.*

A fórmula de Simons para o cálculo do Laplaciano da função $tr\left(A^{2}\right)$ para hipersuperfícies de curvatura média constante em $\mathbb{S}^{n+1}$ é dada por

$$\frac{1}{2}\Delta\left(trA^{2}\right) = |\nabla A|^{2} + \left(n - |A|^{2}\right)|A|^{2} + nH\left(trA^{3}\right) - n^{2}H^{2}.$$

Usando a fórmula de Simons obtemos o seguinte resultado.

Teorema 2 (Simons, Chern, do Carmo, Kobayashi e Lawson). *Seja Σ^n uma hipersuperfície compacta, orientável e mínima imersa na esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$, e assuma que $|A| \leq \sqrt{n}$ em Σ^n. Então*

1. *$|A| = 0$ (e Σ^n é um equador totalmente geodésico $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$),*
2. *ou $|A| = \sqrt{n}$ e Σ^n é um toro mínimo de Clifford.*

A parte 1 e a igualdade na parte 2 do Teorema 2 são feitas por Simons em [19]. Além disso, a caracterização do toro mínimo de Clifford, a qual é local, foi obtida independentemente e simultaneamente por Chern, do Carmo e Kobayashi [10] e Lawson [14].

O resultado a seguir obtido em [7] por Barros, Brasil e Sousa será útil na demonstração de um dos teoremas deste trabalho.

Lema 1. *Seja Σ^n uma variedade Riemanniana mínima imersa em $\mathbb{S}^{n+1}$. Então*

$$|\nabla|A|^2|^2 \leq \frac{4n}{n+2}|A|^2|\nabla A|^2,$$

onde A é o tensor de Weingarten.

Usando o Teorema 2 e o Lema 1 obtemos o seguinte teorema devido a Simons [19] e Perdomo [18].

Teorema 3 (Simons e Perdomo). *Sejam Σ^n uma hipersuperfície compacta, orientável e mínima imersa na esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$ e λ_1 o primeiro autovalor do operador de Jacobi. Então*

1. *$\lambda_1 = -n$ (e Σ^n é um equador totalmente geodésico $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$),*
2. *ou $\lambda_1 \leq -2n$, com igualdade se, e somente se, é um toro mínimo de Clifford $\mathbb{S}^k\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right) \times \mathbb{S}^{n-k}\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right) \subset \mathbb{S}^{n+1}$.*

Em [19] Simons mostrou que se Σ^n não é um equador totalmente geodésico, então $\lambda_1 \leq -2n$. Perdomo [18] deu uma caracterização do toro mínimo de Clifford pelo primeiro autovalor de estabilidade λ_1.

Uma outra consequência da primeira fórmula de variação de área é que Σ^n tem curvatura média constante (não necessariamente zero) se, e somente se, $\frac{dA}{dt}(0) = 0$ para toda $f \in C^\infty(\Sigma^n)$ satisfazendo $\int_\Sigma f d\Sigma = 0$.

Geometricamente a condição $\int_\Sigma f d\Sigma = 0$ significa que a variação preserva uma certa função volume. De fato, se $\Psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ é a variação normal induzida por $f \in C^\infty(\Sigma^n)$, então a função volume $V : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$V(t) = \int_{[0,t]\times\Sigma} \Psi^*(dV),$$

onde dV denota o elemento de volume $(n+1)$-dimensional de $\mathbb{S}^{n+1}$. Então a primeira variação do volume de V é dada por

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=0} = \int_{\Sigma} f d\Sigma.$$

Dizemos que a variação preserva volume se $V(t) = V(0), \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Barbosa, do Carmo e Eschenburg, mostraram em [6] que dada uma função $f \in C^{\infty}(\Sigma^n)$ satisfazendo $\int_{\Sigma} f d\Sigma = 0$, existe uma variação normal preservando volume onde o campo variacional é fN. Daí, as hipersuperfícies de curvatura média constante (não necessariamente zero) são caracterizadas como pontos críticos do funcional área quando restritos às variações que preservam volume.

O índice forte é dado pelo índice $Ind(\Sigma^n)$ de Σ^n. O índice fraco $Ind_T(\Sigma^n)$ é dado por

$$Ind(\Sigma^n) = \max\left\{dimV : \ V \subset C_T^{\infty}(\Sigma^n), \ Q(f) < 0, \ \forall f \in V\right\},$$

onde $C_T^{\infty}(\Sigma^n) = \left\{f \in C^{\infty}(\Sigma^n) : \ \int_{\Sigma} f d\Sigma = 0\right\}$.

Diremos que Σ^n é fortemente estável se, e somente se,

$$Ind(\Sigma^n) = 0.$$

Ademais, diz-se que Σ^n é fracamente estável se, e somente se,

$$Ind_T(\Sigma^n) = 0.$$

Barbosa, do Carmo e Eschenburg em [6] caracterizaram as esferas totalmente umbílicas $\mathbb{S}^n(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$, com $0 < r < 1$, como as únicas hipersuperfícies de curvatura média constante em $\mathbb{S}^{n+1}$ fracamente estáveis. Mais precisamente, temos o seguinte teorema.

Teorema 4 (Barbosa, do Carmo e Eschenburg). *Seja Σ^n uma hipersuperfície compacta e orientável imersa na esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura média constante. Então Σ^n é fracamente estável se, e somente se, Σ^n é uma esfera totalmente umbílica $\mathbb{S}^n(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$.*

Alías, Brasil e Perdomo [3] provaram o seguinte resultado.

Teorema 5 (Alías, Brasil e Perdomo). *Seja Σ^n uma hipersuperfície compacta e orientável imersa na esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura média constante. Assuma que Σ^n tem curvatura escalar constante. Então*

1. *$Ind_T(\Sigma^n) = 0$ (e Σ^n é uma esfera totalmente umbílica em $\mathbb{S}^{n+1}$),*
2. *ou $Ind_T(\Sigma^n) \geq n+2$, com igualdade se, e somente se, Σ^n é um toro de Clifford de curvatura média constante $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}\left(\sqrt{1-r^2}\right)$ com $\sqrt{\frac{k}{n+2}} \leq r \leq \sqrt{\frac{k+2}{n+2}}$.*

Demonstrar estes teoremas citados acima é o objetivo principal desta dissertação.

Nosso trabalho é constituído de três capítulos. No capítulo 1 apresentaremos alguns resultados que serão utilizados nas demonstrações dos resultados principais. Mais precisamente, demonstraremos a Fórmula de Simons para hipersuperfícies em $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura média constante, usando cálculo tensorial. Ademais, demonstraremos as Fórmulas de Variação de área e calcularemos o Laplaciano das funções suportes $l_v = \langle \psi, v \rangle$ e $f_v = \langle N, v \rangle$, para $v \in \mathbb{R}^{n+2}$ fixado.

No capítulo 2 faremos uma estimativa por baixo do índice de uma hipersuperfície Σ^n compacta, orientável e mínima imersa em $\mathbb{S}^{n+1}$. Além disso, mostraremos que as hipersuperfícies compactas, orientáveis imersas minimamente em $\mathbb{S}^{n+1}$ com primeiro autovalor de estabilidade igual a $-2n$ são os toros mínimos de Clifford.

Finalmente, no capítulo 3 mostraremos que as esferas totalmente umbílicas $\mathbb{S}^n(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$, com $0 < r < 1$, são as hipersuperfícies fracamente estáveis em $\mathbb{S}^{n+1}$. Por último, estabeleceremos estimativas por baixo para o índice fraco de hipersuperfícies de curvatura média constante em $\mathbb{S}^{n+1}$ e caracterizaremos os toros de Clifford $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}\left(\sqrt{1-r^2}\right)$ de curvatura média constante como as hipersuperfícies de curvatura média constante tais que o índice fraco é igual a $n+2$.

Capítulo 1

Preliminares

Seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável imersa na esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$, com vetor normal N. Denotaremos por A o operador de Weingarten de Σ^n. Mais precisamente, temos

$$AX = -\nabla^{\circ}_X N = -\overline{\nabla}_X N, \quad X, Y \in T\Sigma^n,$$

onde ∇° e $\overline{\nabla}$ denotam, respectivamente, as conexões Riemannianas de $\mathbb{R}^{n+2}$ e $\mathbb{S}^{n+1}$. Sabemos que para cada $p \in \Sigma^n$ A define uma aplicação em $T_p\Sigma^n$ simétrica. Definimos a curvatura média H de Σ^n por

$$H = \frac{1}{n} tr\,(A)\,.$$

A curvatura R de Σ^n é dada por

$$R\,(X,Y)\,Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z,$$

para $X, Y, Z \in T\Sigma^n$.

Denotando por $\overline{R}$ a curvatura de $\mathbb{S}^{n+1}$ a equação de Gauss da hipersuperfície Σ^n é

$$\langle R\,(X,Y)\,Z, W\rangle \quad = \quad \langle \overline{R}\,(X,Y)\,Z, W\rangle + \mathfrak{B}(X,Y,Z,W),$$

onde, B representa a segunda forma fundamental, $X, Y, Z, W \in T\Sigma^n$ e denotamos $\mathfrak{B}(X,Y,Z,W) = \langle B\,(Y,W)\,, B\,(X,Z)\rangle - \langle B\,(X,W)\,, B\,(Y,Z)\rangle$. Desde que a curvatura seccional de $\mathbb{S}^{n+1}$ é igual a 1 temos

$$\langle \overline{R}\,(X,Y)\,Z, W\rangle = \langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle - \langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle,$$

para $X, Y, Z, W \in T\Sigma^n$. Então,

$$\begin{aligned}
\langle R\,(X,Y)\,Z, W\rangle &= \langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle - \langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle + \langle B\,(Y,W)\,, B\,(X,Z)\rangle \\
&\quad -\langle B\,(X,W)\,, B\,(Y,Z)\rangle \\
&= \langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle - \langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle + \langle\langle AY, W\rangle N, \langle AX, Z\rangle N\rangle \\
&\quad -\langle\langle AX, W\rangle N, \langle AY, Z\rangle N\rangle \\
&= \langle\langle X, Z\rangle Y - \langle Y, Z\rangle X + \langle AX, Z\rangle AY - \langle AY, Z\rangle AX, W\rangle,
\end{aligned}$$

para $X, Y, Z, W \in T\Sigma^n$.

Portanto,

$$R(X,Y)Z = \langle X, Z\rangle Y - \langle Y, Z\rangle X + \langle AX, Z\rangle AY - \langle AY, Z\rangle AX, \qquad (1.1)$$

para $X, Y, Z \in T\Sigma^n$.

Definição 1. *Seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície. O tensor de Ricci de Σ^n é a aplicação $Ric : T\Sigma^n \times T\Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$Ric(X,Y) = tr(Z \longrightarrow R(X,Z)Y).$$

Usando a definição de tensor de Ricci obtemos

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= \sum_{i=1}^{n} \langle R(X,E_i)Y, E_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\langle X,Y\rangle\langle E_i,E_i\rangle - \langle E_i,Y\rangle\langle X,E_i\rangle) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} (\langle AX,Y\rangle\langle AE_i,E_i\rangle - \langle AE_i,Y\rangle\langle AX,E_i\rangle) \\ &= n\langle X,Y\rangle - \langle X,Y\rangle + \langle AX,Y\rangle \sum_{i=1}^{n}\langle AE_i,E_i\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle E_i,AY\rangle\langle AX,E_i\rangle \\ &= (n-1)\langle X,Y\rangle + nH\langle AX,Y\rangle - \langle AX,AY\rangle. \end{aligned}$$

1.1 Fórmula de Simons

O primeiro resultado que demonstraremos é a fórmula de Simons para o cálculo do Laplaciano da função $tr(A^2)$ para hipersuperfícies em $\mathbb{S}^{n+1}$ de curvatura média constante.

Definição 2. *Sejam $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície e $A : T\Sigma^n \longrightarrow T\Sigma^n$ um 1-tensor. A derivada covariante de A é a aplicação $\nabla A : T\Sigma^n \times T\Sigma^n \longrightarrow T\Sigma^n$ dada por*

$$\nabla A(X,Y) = \nabla_Y(AX) - A(\nabla_Y X).$$

Proposição 1. *Sejam $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície e $A : T\Sigma^n \longrightarrow T\Sigma^n$ um 1-tensor. Então, a derivada covariante ∇A é bilinear.*

Demonstração. De fato, para $X, Y, Z \in T\Sigma$ e f função diferenciável temos

$$\begin{aligned}
\nabla A\left(X+fY, Z\right) &= \nabla_Z\left(A\left(X+fY\right)\right) - A\left(\nabla_Z\left(X+fY\right)\right) \\
&= \nabla_Z\left(AX\right) + \nabla_Z\left(fAY\right) - A\left(\nabla_Z X\right) - A\left(\nabla_Z\left(fY\right)\right) \\
&= \nabla_Z\left(AX\right) - A\left(\nabla_Z X\right) + f\nabla_Z\left(AY\right) + Z\left(f\right)AY \\
&\quad - fA\left(\nabla_Z Y\right) - Z\left(f\right)A\left(Y\right) \\
&= \nabla A\left(X, Z\right) + f\left(\nabla_Z\left(AY\right) - A\left(\nabla_Z Y\right)\right) + Z\left(f\right)AY - Z\left(f\right)AY \\
&= \nabla A\left(X, Z\right) + f\nabla A\left(Y, Z\right).
\end{aligned}$$

Ademais,

$$\begin{aligned}
\nabla A\left(X, Z+fY\right) &= \nabla_{Z+fY}\left(AX\right) - A\left(\nabla_{Z+fY}X\right) \\
&= \nabla_Z\left(AX\right) - A\left(\nabla_Z X\right) + f\left(\nabla_Y\left(AX\right) - A\left(\nabla_Y X\right)\right) \\
&= \nabla A\left(X, Z\right) + f\nabla A\left(Y, Z\right),
\end{aligned}$$

provando o que queríamos. □

Convém observar que a equação de Codazzi de Σ^n é dada por

$$\nabla_X\left(AY\right) - \nabla_Y\left(AX\right) = A\left(\left[X, Y\right]\right), \tag{1.2}$$

onde A é o tensor de Weingarten.

Proposição 2. *Seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície e $A : T\Sigma^n \longrightarrow T\Sigma^n$ o tensor de Weingarten. Então, ∇A é simétrica:*

$$\nabla A\left(X, Y\right) = \nabla A\left(Y, X\right),$$

para $X, Y \in T\Sigma$.

Demonstração. Segue da equação de Codazzi de ψ que

$$\nabla_X\left(AY\right) - \nabla_Y\left(AX\right) = A\left(\left[X, Y\right]\right) = A\left(\nabla_X Y\right) - A\left(\nabla_Y X\right),$$

para $X, Y \in T\Sigma$. □

Definição 3. *Sejam $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície e $A : T\Sigma^n \longrightarrow T\Sigma^n$ um 1-tensor. A segunda derivada covariante de A é a aplicação $\nabla^2 A : T\Sigma^n \times T\Sigma^n \times T\Sigma^n \longrightarrow T\Sigma^n$ dada por*

$$\nabla^2 A\left(X, Y, Z\right) = \nabla_Z\left(A\left(X, Y\right)\right) - A\left(\nabla_Z X, Y\right) - A\left(X, \nabla_Z Y\right),$$

onde $A\left(X, Y\right) = \nabla A\left(X, Y\right)$.

Proposição 3. *A segunda derivada covariante do tensor de Weingarten A satisfaz $\forall X, Y, Z \in T\Sigma$ as seguintes condições:*

1. $\nabla^2 A(X,Y,Z) = \nabla^2 A(Y,X,Z)$,
2. $\nabla^2 A(X,Y,Z) = \nabla^2 A(X,Z,Y) - R(Z,Y)AX + A(R(Z,Y)X)$,

onde R é a curvatura de Σ^n.

Demonstração. A parte 1 segue da proposição 2. Quanto à parte 2 temos

$$\begin{aligned}\nabla^2 A(X,Y,Z) &= \nabla_Z(A(X,Y)) - A(\nabla_Z X, Y) - A(X, \nabla_Z Y)\\ &= \nabla_Z\nabla_Y(AX) - \nabla_Z A(\nabla_Y X) - \nabla_Y(A(\nabla_Z X)) + A(\nabla_Y\nabla_Z X)\\ &\quad -\nabla_{\nabla_Z Y} AX + A(\nabla_{\nabla_Z Y} X).\end{aligned} \tag{1.3}$$

Trocando Y por Z em (1.3) obtemos

$$\begin{aligned}\nabla^2 A(X,Z,Y) &= \nabla_Y\nabla_Z(AX) - \nabla_Y A(\nabla_Z X) - \nabla_Z(A(\nabla_Y X)) + A(\nabla_Z\nabla_Y X)\\ &\quad -\nabla_{\nabla_Y Z} AX + A(\nabla_{\nabla_Y Z} X).\end{aligned}$$

Logo,

$$\nabla^2 A(X,Y,Z) - \nabla^2 A(X,Z,Y) = -R(Z,Y)AX + A(R(Z,Y)X),$$

para $X, Y, Z \in T\Sigma$. □

Definição 4. *Dado um tensor simétrico $T : T\Sigma^n \times T\Sigma^n \longrightarrow T\Sigma^n$, definimos o traço de T como sendo o campo trT dado por*

$$trT = \sum_{i=1}^{n} T(E_i, E_i),$$

onde $\{E_1, \ldots, E_n\}$ é um referencial ortonormal em $T\Sigma^n$.

Proposição 4. *Dada uma hipersuperfície $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ seja $A : T\Sigma^n \longrightarrow T\Sigma^n$ o tensor de Weingarten. Então,*

$$tr(\nabla A) = grad(trA).$$

Demonstração. Seja $\{E_1, \ldots, E_n\}$ um referencial ortonormal tal que A em $p \in \Sigma$ é diagonalizada, e sejam $c_1(p), \ldots, c_n(p)$ os autovalores associados a $E_1(p), \ldots, E_n(p)$, respectivamente. Então,

$$\begin{aligned}\langle grad(trA), X\rangle &= X(trA)\\ &= X\left(\sum_{i=1}^{n}\langle AE_i, E_i\rangle\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_X AE_i, E_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle AE_i, \nabla_X E_i\rangle\end{aligned} \tag{1.4}$$

para todo $X \in T\Sigma$. Além disso, temos

$$\begin{aligned}
\langle \nabla A\left(X,Y\right),Z\rangle &= \langle \nabla_Y\left(AX\right) - A\left(\nabla_Y X\right),Z\rangle \\
&= \langle \nabla_Y\left(AX\right),Z\rangle - \langle A\left(\nabla_Y X\right),Z\rangle \\
&= Y\langle AX,Z\rangle - \langle AX,\nabla_Y Z\rangle - \langle \nabla_Y X, AZ\rangle \\
&= Y\langle X,AZ\rangle - \langle X,A\left(\nabla_Y Z\right)\rangle - \langle \nabla_Y X, AZ\rangle \\
&= Y\langle X,AZ\rangle - \langle X,A\left(\nabla_Y Z\right)\rangle - \{Y\langle X,AZ\rangle - \langle X,\nabla_Y AZ\rangle\} \\
&= \langle X,\nabla_Y AZ\rangle - \langle X,A\left(\nabla_Y Z\right)\rangle \\
&= \langle \nabla A\left(Y,Z\right),X\rangle, \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

para $X,Y,Z \in T\Sigma$.

Usando (1.5) temos

$$\begin{aligned}
\langle tr\left(\nabla A\right),X\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \nabla A\left(E_i,E_i\right),X\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla A\left(E_i,E_i\right),X\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla A\left(E_i,X\right),E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_X\left(AE_i\right) - A\left(\nabla_X E_i\right),E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_X\left(AE_i\right),E_i\rangle - \langle A\left(\nabla_X E_i\right),E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_X\left(AE_i\right),E_i\rangle - \langle AE_i,\nabla_X E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_X\left(AE_i\right),E_i\rangle, \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do seguinte fato:

$$\langle AE_i,\nabla_X E_i\rangle\left(p\right) = \langle c_i E_i,\nabla_X E_i\rangle\left(p\right) = c_i\left(p\right)\langle E_i,\nabla_X E_i\rangle\left(p\right) = \frac{c_i\left(p\right)}{2}X\langle E_i,E_i\rangle\left(p\right) = 0.$$

Portanto, segue de (1.4) e (1.6) que

$$tr\left(\nabla A\right) = grad\left(trA\right).$$

$\square$

Definição 5. *Dados uma hipersuperfície* $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ *e* $X \in T\Sigma^n$ *definimos o tensor* $\Gamma_X : T\Sigma^n \times T\Sigma^n \longrightarrow T\Sigma^n$ *por*

$$\Gamma_X (Y, Z) = \nabla^2 A (Y, Z, X),$$

onde A *é o tensor de Weingarten.*

Notemos que Γ_X é simétrico, pela proposição 3.

Proposição 5. *Nas condições da definição 5 temos*

$$tr\Gamma_X = n\nabla_X \; grad \; H,$$

onde H *é a curvatura média de* Σ^n.

Demonstração. Seja $\{E_1, \dots, E_n\}$ um referencial geodésico em $p \in \Sigma$. Se

$$X = \sum_{j=1}^{n} x_j E_j,$$

então temos em p

$$\begin{aligned} \nabla A (E_i, \nabla_X E_i) &= \nabla A \left(E_i, \nabla_{\sum_{j=1}^{n} x_j E_j} E_i \right) \\ &= \nabla A \left(E_i, \sum_{j=1}^{n} x_j \nabla_{E_j} E_i \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \nabla A \left(E_i, \nabla_{E_j} E_i \right) \\ &= 0, \end{aligned} \tag{1.7}$$

pois $\left(\nabla_{E_j} E_i\right)(p) = 0$ para $i, j = 1, \dots, n$.

Portanto,

$$\begin{aligned} tr\Gamma_X &= \sum_{i=1}^{n} \nabla^2 A (E_i, E_i, X) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \nabla_X (\nabla A (E_i, E_i)) - 2 \sum_{i=1}^{n} \nabla A (E_i, \nabla_X E_i) \\ &= \nabla_X \left(\sum_{i=1}^{n} \nabla A (E_i, E_i) \right) - 2 \sum_{i=1}^{n} \nabla A (E_i, \nabla_X E_i) \\ &= \nabla_X (tr\nabla A) - 2 \sum_{i=1}^{n} \nabla A (E_i, \nabla_X E_i) \\ &= \nabla_X (grad (trA)) \\ &= n\nabla_X (grad \; H), \end{aligned}$$

onde usamos (1.7) e a proposição 4 na penúltima igualdade. □

Definição 6. *Dada uma hipersuperfície* $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ *definimos o Laplaciano de um 1-tensor* $A : T\Sigma^n \longrightarrow T\Sigma^n$ *pelo 1-tensor* $\Delta A : T\Sigma^n \longrightarrow T\Sigma^n$ *dado por*

$$\Delta A(X) = tr\left((Y,Z) \longmapsto \nabla^2 A(X,Y,Z)\right).$$

Proposição 6. *Seja* $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ *uma hipersuperfície com curvatura média* H*. Então*

$$\Delta A(X) = n\nabla_X(grad\ H) - nHX + \left(n - |A|^2\right)AX + nHA^2X,$$

onde A *é o tensor de Weingarten.*

Demonstração. Seja $\{E_1, \ldots, E_n\}$ um referencial ortonormal. Por definição temos

$$\begin{aligned}
\Delta A(X) &= \sum_{i=1}^{n} \nabla^2 A(X, E_i, E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \nabla^2 A(E_i, X, E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \nabla^2 A(E_i, E_i, X) - R(E_i, X)AE_i + A(R(E_i, X)E_i),
\end{aligned}$$

para $X \in T\Sigma$.
Usando a equação (1.1) temos

$$\begin{aligned}
-\sum_{i=1}^{n} R(E_i, X)AE_i &= -\sum_{i=1}^{n} (\langle E_i, AE_i\rangle X - \langle X, AE_i\rangle E_i + \langle AE_i, AE_i\rangle AX) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \langle AX, AE_i\rangle AE_i \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \langle E_i, AE_i\rangle X + \sum_{i=1}^{n} \langle X, AE_i\rangle E_i - \sum_{i=1}^{n} \langle AE_i, AE_i\rangle AX \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \langle AX, AE_i\rangle AE_i \\
&= -nHX + AX - \left(trA^2\right)AX + A^3X, \qquad (1.8)
\end{aligned}$$

para $X \in T\Sigma$.

Analogamente, obtemos

$$\begin{aligned}
A\left(R\left(E_i,X\right)E_i\right) &= A\left(\sum_{i=1}^{n}\langle E_i,E_i\rangle X\right)-A\left(\sum_{i=1}^{n}\langle X,E_i\rangle E_i\right)+A\left(\sum_{i=1}^{n}\langle AE_i,E_i\rangle AX\right)\\
&\quad -A\left(\sum_{i=1}^{n}\langle AX,E_i\rangle AE_i\right)\\
&= nAX-AX+nHA^2X-A^3X, \qquad (1.9)
\end{aligned}$$

para $X\in T\Sigma$.
Considerando a proposição 5 e somando (1.8) e (1.9) obtemos

$$\Delta A\left(X\right) = n\nabla_X\left(grad\ H\right)-nHX+\left(n-|A|^2\right)AX+nHA^2X,$$

para $X\in T\Sigma$. □

Antes de mostrarmos o próximo resultado precisaremos das seguintes definições:

Definição 7. *Sejam* $A:T\Sigma^n\longrightarrow T\Sigma^n$ *e* $B:T\Sigma^n\longrightarrow T\Sigma^n$ 1*-tensores na variedade Riemanniana* Σ^n*. O produto interno dos* 1*-tensores* A *e* B *é a aplicação* $\langle A,B\rangle:\Sigma^n\longrightarrow\mathbb{R}$ *dada por*

$$\langle A,B\rangle\left(p\right)=tr\left(A\left(p\right)\cdot B^*\left(p\right)\right),$$

onde $B^*\left(p\right)$ *é o operador adjunto de* $B\left(p\right)$*.*

Definição 8. *Sejam* $A:T\Sigma^n\times T\Sigma^n\longrightarrow T\Sigma^n$ *e* $B:T\Sigma^n\times T\Sigma^n\longrightarrow T\Sigma^n$ 2*-tensores na variedade Riemanniana* Σ^n*. O produto interno dos* 2*-tensores* A *e* B *é a aplicação* $\langle A,B\rangle:\Sigma^n\longrightarrow\mathbb{R}$ *dada por*

$$\langle A,B\rangle\left(p\right)=\sum_{i,j=1}^{n}\langle A\left(p\right)\left(E_i,E_j\right),B\left(p\right)\left(E_i,E_j\right)\rangle,$$

onde $\{E_1,\ldots,E_n\}$ *é uma base ortonormal de* $T_p\Sigma^n$*.*

Notemos que a teoria de Álgebra Linear garante que o produto interno de dois 2-tensores está bem definido, isto é, não depende da base ortonormal escolhida. Ademais, é fácil ver que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é um produto interno no espaço dos tensores. Na demonstração dos resultados a seguir denotaremos o Laplaciano de funções e tensores pelo mesmo símbolo Δ.

Proposição 7. *Sejam* $A : T\Sigma^n \longrightarrow T\Sigma^n$ *e* $B : T\Sigma^n \longrightarrow T\Sigma^n$ 1*-tensores na variedade Riemanniana* Σ^n *satifazendo a equação de Codazzi* (1.2). *Então,*

$$\Delta\langle A, B\rangle = \langle \Delta A, B\rangle + \langle A, \Delta B\rangle + 2\langle \nabla A, \nabla B\rangle.$$

Demonstração. Seja $\{E_1, \ldots, E_n\}$ um referencial geodésico em $p \in \Sigma$. Por definição temos

$$\langle A, B\rangle (p) = tr\left(A^*(p) \cdot B(p)\right) = \sum_{i=1}^{n} \langle A^*\left(B\left(E_i\right)\right), E_i\rangle (p) = \sum_{i=1}^{n} \langle AE_i, BE_i\rangle.$$

Então, temos em p

$$\begin{aligned}
\Delta\langle A, B\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \left(E_i E_i \langle A, B\rangle\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E_i E_i \left(\sum_{j=1}^{n} \langle AE_j, BE_j\rangle\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} E_i E_i \langle AE_j, BE_j\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} E_i \left(\langle \nabla_{E_i}\left(AE_j\right), BE_j\rangle + \langle AE_j, \nabla_{E_i}\left(BE_j\right)\rangle\right).
\end{aligned}$$

Logo, em p

$$\begin{aligned}
\Delta\langle A, B\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n} \left\{\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\left(AE_j\right), BE_j\rangle + \langle \nabla_{E_i}\left(AE_j\right), \nabla_{E_i} BE_j\rangle\right\} \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{n} \left\{\langle \nabla_{E_i}\left(AE_j\right), \nabla_{E_i} BE_j\rangle + \langle AE_j, \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\left(BE_j\right)\rangle \right\} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\left(AE_j\right), BE_j\rangle + 2\sum_{i,j=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}\left(AE_j\right), \nabla_{E_i} BE_j\rangle + \\
&\quad \sum_{i,j=1}^{n} \langle AE_j, \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\left(BE_j\right)\rangle. \qquad (1.10)
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos p

$$
\begin{aligned}
\langle \Delta A, B\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\langle \Delta A\left(E_i\right), BE_i\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left\langle \sum_{i=1}^{n}\nabla^2 A\left(E_j, E_i, E_i\right), BE_j\right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\langle \nabla_{E_i}\left(A\left(E_j, E_i\right)\right) - A\left(\nabla_{E_i}E_j, E_i\right) - A\left(E_j, \nabla_{E_i}E_i\right), BE_j\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\langle \nabla_{E_i}\left(A\left(E_j, E_i\right)\right), BE_j\rangle,
\end{aligned}
$$

onde usamos que $\nabla_{E_i}E_j\left(p\right) = 0$, para $i, j = 1, \ldots, n$. Ademais, temos

$$
\begin{aligned}
\nabla_{E_i}\left(A\left(E_j, E_i\right)\right) &= \nabla_{E_i}\left(\nabla_{E_i}\left(AE_j\right) - A\left(\nabla_{E_j}E_i\right)\right) \\
&= \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\left(AE_j\right) - \nabla_{E_i}A\left(\nabla_{E_i}E_j\right) \\
&= \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\left(AE_j\right) - \left\{\nabla_{\nabla_{E_i}E_j}AE_i + A\left(\left[E_i, \nabla_{E_i}E_j\right]\right)\right\},
\end{aligned}
$$

onde usamos a equação de Codazzi na terceira igualdade. Logo,

$$
\begin{aligned}
\langle \Delta A, B\rangle\left(p\right) &= \sum_{i,j=1}^{n}\langle \nabla_{E_i}\left(A\left(E_j, E_i\right)\right), BE_j\rangle\left(p\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\left(AE_j\right), BE_j\rangle\left(p\right). \qquad (1.11)
\end{aligned}
$$

Analogamente,

$$
\langle A, \Delta B\rangle\left(p\right) = \sum_{i,j=1}^{n}\langle AE_j, \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}\left(BE_j\right)\rangle\left(p\right). \qquad (1.12)
$$

Finalmente, por definiçao temos

$$
\begin{aligned}
\langle \nabla A, \nabla B\rangle\left(p\right) &= \sum_{i,j=1}^{n}\langle \nabla A\left(E_i, E_j\right), \nabla B\left(E_i, E_j\right)\rangle\left(p\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\langle \nabla_{E_j}\left(AE_i\right) - A\left(\nabla_{E_j}E_i\right), \nabla_{E_j}\left(BE_i\right) - B\left(\nabla_{E_j}E_i\right)\rangle\left(p\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\langle \nabla_{E_i}\left(AE_j\right), \nabla_{E_i}\left(BE_j\right)\rangle\left(p\right). \qquad (1.13)
\end{aligned}
$$

Por (1.10), (1.11), (1.12) e (1.13) obtemos

$$
\Delta\langle A, B\rangle = \langle \Delta A, B\rangle + \langle A, \Delta B\rangle + 2\langle \nabla A, \nabla B\rangle.
$$

$\square$

Corolário 1 (Fórmula de Simons)**.** *Seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície com curvatura média H constante. Se A é o tensor de Weingarten de Σ^n, então*

$$\frac{1}{2}\Delta\left(trA^2\right) = |\nabla A|^2 + \left(n - |A|^2\right)|A|^2 + nH\left(trA^3\right) - n^2H^2,$$

onde $|\cdot|$ é a norma proveniente do produto interno de tensores.

Demonstração. Usando as igualdades

$$trA^2 = tr\,(AA) = tr\,(A^*A) = \langle A, A\rangle$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta\left(trA^2\right) &= \frac{1}{2}\Delta\langle A, A\rangle \\
&= \frac{1}{2}\left(\langle\Delta A, A\rangle + \langle A, \Delta A\rangle + 2\langle\nabla A, \nabla A\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2\langle\Delta A, A\rangle + 2|\nabla A|^2\right) \\
&= |\nabla A|^2 + \langle A, \Delta A\rangle. \qquad (1.14)
\end{aligned}$$

Pela proposição 6 temos

$$\begin{aligned}
\langle A, \Delta A\rangle &= \langle A, \left(n - |A|^2\right)A + nHA^2 - nHId\rangle \\
&= \left(n - |A|^2\right)\langle A, A\rangle + nH\langle A, A^2\rangle - nH\langle A, Id\rangle \\
&= \left(n - |A|^2\right)|A|^2 + nH\left(trA^3\right) - n^2H^2.
\end{aligned}$$

Portanto, segue de que (1.14)

$$\frac{1}{2}\Delta\left(trA^2\right) = |\nabla A|^2 + \left(n - |A|^2\right)|A|^2 + nH\left(trA^3\right) - n^2H^2.$$

□

1.2 Variação de Área

Agora mostraremos as Fórmulas de Variação de Área de uma imersão $\psi : \Sigma^n \longrightarrow M^{n+m}$ e alguns corolários.

Definição 9. *Seja Σ^n uma variedade Riemanniana. Denotando por B a segunda forma fundamental de Σ^n podemos definir o campo curvatura média*

$$\overrightarrow{H}(p) = \frac{1}{n}tr\left(B\left(p\right)\right),$$

para cada $p \in \Sigma^n$.

Localmente, se $E_1, \ldots, E_n$ são campos ortonormais em torno de p, então

$$\overrightarrow{H}(p) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} B(E_i, E_i)(p).$$

Consideremos M^{n+m} uma variedade Riemanniana e Σ^n uma variedade Riemanniana compacta e orientável com bordo $\partial\Sigma^n$.

Definição 10. *Uma variação da imersão $\psi : \Sigma^n \longrightarrow M^{n+m}$ é uma aplicação diferenciável $\Psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma^n \longrightarrow M^{n+m}$ tal que*

1. *Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ a aplicação $\psi_t = \Psi(t, \cdot) : \Sigma^n \longrightarrow M^{n+m}$ é uma imersão.*
2. *$\psi_0 = \psi$.*
3. *$\psi_t\Big|_{\partial\Sigma^n} = \psi\Big|_{\partial\Sigma^n}$.*

Denotaremos por $\frac{\partial}{\partial t}$ o vetor unitário canônico tangente a $(-\varepsilon, \varepsilon)$ em $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma$. Definamos

$$E = \Psi_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\Bigg|_{t=0}$$

e consideremos a função área $A : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$A(t) = \int_\Sigma d\Sigma_t,$$

onde Σ_t representa a variedade Σ munida com a métrica induzida por ψ_t e $d\Sigma_t$ é o elemento de área dessa métrica induzida em Σ.

Para demonstrarmos a Fórmula da Primeira Variação de Área precisaremos do seguinte resultado:

Lema 1. *Seja $A(t) = (a_{ij}(t)), t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, onde cada a_{ij} é uma função C^∞ de t tal que $A(0) = (\delta_{ij})$. Então*

$$\frac{d}{dt}\det(A(t))\Bigg|_{t=0} = tr\left(A'(0)\right),$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker.

Demonstração. Seja $\{V_1, \ldots, V_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Então $A(t) = (a_{ij}(t))$ pode ser pensada como uma matriz de uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ relativamente a essa base. Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ denotaremos por

$$E_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) V_j$$

os vetores coluna da matriz $A(t)$. Desde que o determinante é uma aplicação n-linear alternada nas colunas tal que $W(V_1,\ldots,V_n)=1$, temos

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dt}det\left(A\left(t\right)\right)\right|_{t=0} &= \sum_{i=1}^{n}\det\left(V_1,\ldots,V_{i-1},\frac{dE_i}{dt}\left(0\right),V_{i+1},\ldots,V_n\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\det\left(V_1,\ldots,V_{i-1},\sum_{j=1}^{n}a'_{ij}\left(0\right)V_j,V_{i+1},\ldots,V_n\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}a'_{ii}\left(0\right)\det\left(V_1,\ldots,V_n\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}a'_{ii}\left(0\right)=trA'\left(0\right).\end{aligned}$$

□

Teorema 1 (Fórmula da Primeira Variação de Área)**.** *Nas condições acima temos*

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{t=0}=-n\int_{\Sigma}\langle\overrightarrow{H},E\rangle d\Sigma.$$

Demonstração. Seja $\{E_1,\ldots,E_n\}$ um referencial geodésico em $p\in\Sigma$. Sejam $\theta_1,\ldots,\theta_n$ as formas duais de $\{E_1,\ldots,E_n\}$. Então,

$$d\Sigma=\theta_1\wedge\ldots\wedge\theta_n=d\Sigma_0.$$

Denotando

$$g_{ij}\left(t\right)=\langle\left(\Psi_t\right)_*E_i,\left(\Psi_t\right)_*E_j\rangle=\langle E_i,E_j\rangle_t,$$

temos

$$ds_t^2=\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}\left(t\right)\theta_i\theta_j.$$

Daí,

$$d\Sigma_t=\sqrt{g\left(t\right)}\;\;\theta_1\wedge\ldots\wedge\theta_n=\sqrt{g\left(t\right)}\;\;d\Sigma_0,$$

onde $g(t)=\det\left(g_{ij}\left(t\right)\right)$. Logo,

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{d}{dt}\left(\int_{\Sigma}d\Sigma_t\right)\right|_{t=0}=\int_{\Sigma}\left(\left.\frac{d}{dt}\left(d\Sigma_t\right)\right|_{t=0}\right),$$

onde usamos a compacidade de Σ na segunda igualdade. Desde que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(d\Sigma_t\right)\bigg|_{t=0} &= \left(\frac{d}{dt}\left(\sqrt{g\left(t\right)}\right)\bigg|_{t=0}\right)d\Sigma_0\\ &= \frac{1}{2\sqrt{g\left(0\right)}}\left(\frac{dg}{dt}\bigg|_{t=0}\right)d\Sigma_0\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{dg}{dt}\bigg|_{t=0}\right)d\Sigma_0,\end{aligned}$$

segue do Lema 1 que

$$\frac{d}{dt}\left(d\Sigma_t\right)\bigg|_{t=0} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{dg_{ii}}{dt}\left(0\right)d\Sigma_0\right).$$

Estendemos os campos $E_1,\ldots,E_n$ a $(-\delta,\delta)\times U\subset(-\varepsilon,\varepsilon)\times\Sigma$ de forma natural, isto é,

$$\widetilde{E}_i\left(t,p\right)=E_i\left(p\right),$$

onde U é um aberto de Σ, temos

$$\left[\frac{\partial}{\partial t},\widetilde{E}_i\right]=0, \tag{1.15}$$

pois

$$T_{(t,p)}\left(\left(-\varepsilon,\varepsilon\right)\times\Sigma\right)=\mathbb{R}\times T_p\Sigma.$$

Sejam

$$Z_0=\Psi_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\quad e\quad Z_i=\Psi_*\left(\widetilde{E}_i\right),$$

para $i=1,\ldots,n$. Então,

$$g_{ii}\left(t\right)=\langle Z_i,Z_i\rangle=\left\langle\Psi_*\left(\widetilde{E}_i\right),\Psi_*\left(\widetilde{E}_i\right)\right\rangle,$$

donde

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}g_{ii}\left(t\right)\bigg|_{t=0} &= \left(Z_0\langle Z_i,Z_i\rangle\right)\bigg|_{t=0}\\ &= 2\left(\langle\overline{\nabla}_{Z_0}Z_i,Z_i\rangle\right)\bigg|_{t=0}\\ &= 2\left(\langle\overline{\nabla}_{Z_i}Z_0,Z_i\rangle\right)\bigg|_{t=0},\end{aligned}$$

onde usamos (1.15) na terceira igualdade. Então,

$$\left.\frac{d}{dt}g_{ii}(t)\right|_{t=0} = 2\left(Z_i\langle Z_0, Z_i\rangle - \left\langle Z_0, \overline{\nabla}_{Z_i}Z_i\right\rangle\right)\Big|_{t=0}. \tag{1.16}$$

Desde que $\nabla_{E_i}E_i(p) = 0$ temos

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{\nabla}_{\widetilde{E}_i}\widetilde{E}_i(p) = B\left(\widetilde{E}_i, \widetilde{E}_i\right)(p) = B(E_i, E_i)(p) = n\overrightarrow{H}(p). \tag{1.17}$$

Usando (1.16) e (1.17) obtemos

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}(d\Sigma_t)\right|_{t=0} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}g_{ii}(0)\right)d\Sigma_0 \\
&= \left\{-\sum_{i=1}^{n}\langle E, \overline{\nabla}_{\widetilde{E}_i}\widetilde{E}_i\rangle(p) + \sum_{i=1}^{n}E_i\langle E, E_i\rangle(p)\right\}d\Sigma_0 \\
&= \left\{-\langle E, n\overrightarrow{H}\rangle(p) + \sum_{i=1}^{n}E_i\langle E, E_i\rangle(p)\right\}d\Sigma_0 \\
&= \left\{-n\langle E, \overrightarrow{H}\rangle(p) + \sum_{i=1}^{n}E_i\langle E, E_i\rangle(p)\right\}d\Sigma_0.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Consideremos agora a seguinte $(n-1)$-forma em Σ

$$\Theta = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\langle E, E_i\rangle\theta_1\wedge\ldots\widehat{\theta_i}\wedge\ldots\wedge\theta_n.$$

Então, temos em p

$$\begin{aligned}
d\Theta(E_1, \ldots, E_n) &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}E_i\Theta\left(E_1, \ldots, \widehat{E_i}, \ldots, E_n\right) + \\
&\quad \sum_{i,j=1}^{n}(-1)^{i+j}\Theta\left([E_i, E_j], E_1, \ldots, \widehat{E_i}, \ldots, \widehat{E_j}\ldots, E_n\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}E_i\Theta\left(E_1, \ldots, \widehat{E_i}, \ldots, E_n\right),
\end{aligned}$$

pois

$$[E_i, E_j](p) = \nabla_{E_i}E_j(p) - \nabla_{E_j}E_i(p) = 0.$$

Portanto, integrando (1.18) e aplicando o Teorema de Stokes obtemos

$$\begin{aligned}\left.\frac{dA}{dt}\right|_{t=0} &= -n\int_{\Sigma}\langle\overrightarrow{H},E\rangle d\Sigma+\int_{\Sigma}d\Theta\\ &= -n\int_{\Sigma}\langle\overrightarrow{H},E\rangle d\Sigma+\int_{\partial\Sigma}\Theta\\ &= -n\int_{\Sigma}\langle\overrightarrow{H},E\rangle d\Sigma,\end{aligned}$$

onde $\Theta\Big|_{\partial\Sigma^n}=0$, pois $E\Big|_{\partial\Sigma^n}=0$.

□

Corolário 2. *Seja $\psi:\Sigma^n\longrightarrow\mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável e compacta, com vetor normal N. Se a variação $\Psi:(-\varepsilon,\varepsilon)\times\Sigma^n\longrightarrow\mathbb{S}^{n+1}$ é dada por*

$$\psi_t(p)=Exp_{\psi(p)}\left(tf(p)\,N(p)\right),$$

onde $f:\Sigma^n\longrightarrow\mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{t=0}=-n\int_{\Sigma}fHd\Sigma.$$

Demonstração. Desde que

$$\begin{aligned}\Psi_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\Bigg|_{t=0} &= (dExp)_0\left(f(p)\,N(p)\right)\\ &= f(p)\,N(p),\end{aligned}$$

segue da fórmula da primeira variação de área que

$$\begin{aligned}\left.\frac{dA}{dt}\right|_{t=0} &= -n\int_{\Sigma}\langle HN,fN\rangle d\Sigma\\ &= -n\int_{\Sigma}fHd\Sigma.\end{aligned}$$

□

Corolário 3. *Seja $\psi:\Sigma^n\longrightarrow\mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável e compacta, com vetor normal N. Se a variação $\Psi:(-\varepsilon,\varepsilon)\times\Sigma^n\longrightarrow\mathbb{S}^{n+1}$ é dada por*

$$\psi_t(p)=Exp_{\psi(p)}\left(tf(p)\,N(p)\right),$$

onde $f : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então Σ^n tem curvatura média constante (não necessariamente zero) se, e somente se, $\frac{dA}{dt}(0) = 0$ para toda $f \in C^\infty(\Sigma^n)$ satisfanzendo $\int_\Sigma f d\Sigma = 0$.

Demonstração. Suponhamos que $\frac{dA}{dt}(0) = 0$ para toda $f \in C^\infty(\Sigma^n)$ satisfanzendo $\int_\Sigma f d\Sigma = 0$. Escrevendo $H = H_0 + (H - H_0)$, onde

$$H_0 = \frac{1}{Area(\Sigma)} \int_\Sigma H d\Sigma,$$

temos

$$\int_\Sigma (H - H_0)\, d\Sigma = 0.$$

Considerando $f = H - H_0$ como função teste temos

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt}(0) &= -n \int_\Sigma (H - H_0)\, H d\Sigma \\ &= -n \int_\Sigma (H - H_0)\, H_0 d\Sigma - n \int_\Sigma (H - H_0)^2\, d\Sigma \\ &= -n \int_\Sigma (H - H_0)^2\, d\Sigma. \end{aligned}$$

Como $\frac{dA}{dt}(0) = 0$ temos $H = H_0$. Logo H é constante em Σ. A recíproca é óbvia. □

Dada uma imersão $\psi : \Sigma^n \longrightarrow M^{n+m}$ denotaremos por $\overline{R}$ a curvatura de M^{n+m}. Para cada $p \in \Sigma^n$ temos a decomposição

$$T_p M^{n+m} = T_p\Sigma^n \oplus N_p\Sigma^n,$$

onde $N_p\Sigma^n$ é o complementar ortogonal de $T_p\Sigma^n$.

Definição 11. *Sejam $p \in \Sigma^n$ e $\{E_1, \ldots, E_n\}$ um referencial ortonormal em torno de p. Definimos a aplicação $\overline{R} : N_p\Sigma^n \longrightarrow N_p\Sigma^n$ por*

$$\overline{R}(\nu) = \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{R}(E_i, \nu) E_i\right)^N.$$

A teoria da Álgebra Linear garante que $\overline{R}$ não depende da base ortonormal escolhida.

Definição 12. *Dado $p \in \Sigma^n$ definimos a aplicação $\widetilde{B} : N_p\Sigma^n \longrightarrow N_p\Sigma^n$ por*

$$\widetilde{B}(\nu) = B \circ B^t(\nu),$$

onde B é a segunda forma fundamental de Σ^n e B^t é a sua aplicação transposta.

Se $E_1, \ldots, E_n$ são campos ortonormais em torno de p, então

$$\langle \widetilde{B}(\nu), \mu \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle B(E_i, E_j), \nu \rangle \langle B(E_i, E_j), \mu \rangle,$$

para todos $\nu, \mu \in N_p\Sigma^n$.

Seja U uma vizinhança de Σ^n. Denotaremos por $\Gamma(U)$ o espaço dos campos normais a Σ^n em U.

Definição 13. *Seja $\Gamma_0(\Sigma^n)$ o espaço dos campos normais em Σ^n que se anulam em $\partial\Sigma^n$ e possuem suporte compacto em Σ^n. Definimos o Laplaciano $\Delta : \Gamma_0(\Sigma^n) \longrightarrow \Gamma_0(\Sigma^n)$, em cada $p \in \Sigma^n$, por*

$$\Delta\nu(p) = \sum_{i=1}^{n} \left(\nabla^{\perp}_{E_i} \nabla^{\perp}_{E_i} \nu - \nabla^{\perp}_{\nabla_{E_i} E_i} \nu \right)(p),$$

onde $\nabla^{\perp}$ é a conexão normal e $\{E_1, \ldots, E_n\}$ é um referencial ortonormal em torno de p.

Dada uma imersão $\psi : \Sigma^n \longrightarrow M^{n+m}$ seja $\{\nu_1, \ldots, \nu_m\}$ um referencial ortonormal em $\Gamma(U)$, onde U é uma vizinhança de p na qual ψ é uma subvariedade. Se $\{E_1, \ldots, E_n\}$ é um referencial ortonormal tangente a Σ^n numa vizinhança de p, então é útil perceber que para $p \in \Sigma^n$ temos

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{H}(p) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{\nabla}_{E_i} E_i \right)^N \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} \langle \overline{\nabla}_{E_i} E_i, \nu_k \rangle \nu_k \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{E_i} E_i, \nu_k \rangle \right) \nu_k \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \langle \left(-\overline{\nabla}_{E_i} \nu_k \right), E_i \rangle \right) \nu_k \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m} \left(tr\left(A_{\nu_k} \right) \right) \nu_k,
\end{aligned}$$

onde $A_{\nu_k} : T_p\Sigma^n \longrightarrow T_p\Sigma^n$ é dada por

$$A_{\nu_k}(X) = -\left(\overline{\nabla}_X \nu_k \right)^T,$$

para $k = 1, \ldots, m$.

Lema 2. *Seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow M^{n+m}$ uma imersão. Se $E_1, \ldots, E_n$ são campos linearmente independentes em torno de $p \in \Sigma^n$, então*

$$\overrightarrow{H}(p) = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(p) \left(\overline{\nabla}_{E_i} E_j\right)^N (p),$$

onde $g_{ij}(p) = \langle E_i, E_j \rangle (p)$ e $\left(g^{ij}(p)\right)$ é a matriz inversa de $(g_{ij}(p))$.

Demonstração. Seja $\{\nu_1, \ldots, \nu_m\}$ um referencial ortonormal em $\Gamma(U)$, onde U é uma vizinhança de p na qual ψ é uma subvariedade. Se $X \in T_p\Sigma$, então podemos escrever $X = \sum_{j=1}^{n} x_j E_j$, donde

$$\overline{\nabla}_X \nu_k = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{\nabla}_{E_j} \nu_k.$$

Desde que $\langle \nu_k, \nu_k \rangle = 1$, numa vizinhança de p, temos

$$\overline{\nabla}_{E_j} \nu_k = \sum_{l=1}^{n} a_{lj}^k E_l + \sum_{l=1,\ l \neq k}^{m} C_{lj}^k \nu_l. \tag{1.19}$$

Daí,

$$A_{\nu_k}(X) = \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(-a_{lj}^k\right) x_j \right) E_l,$$

isto é, $\left(-a_{ij}^k\right)$ é a matriz de A_{ν_k} na base $\{E_1, \ldots, E_n\}$.

Usando (1.19) obtemos

$$\langle \overline{\nabla}_{E_j} \nu_k, E_i \rangle = \sum_{l=1}^{n} a_{lj}^k g_{il},$$

para $i, j = 1, \ldots, n$. Logo,

$$\left(-a_{ij}^k\right) = \left(-b_{ij}^k\right) \cdot \left(g^{ji}\right),$$

onde $b_{ij}^k = \langle \overline{\nabla}_{E_j} \nu_k, E_i \rangle$. Então,

$$\begin{aligned} trA_{\nu_k} &= -\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^k \\ &= -\sum_{i,j=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{E_j} \nu_k, E_i \rangle g^{ji} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle \nu_k, \overline{\nabla}_{E_i} E_j \rangle g^{ij}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{H}(p) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m}\left(trA_{\nu_k}\right)\nu_k \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\langle\nu_k,\overline{\nabla}_{E_i}E_j\rangle g^{ij}\right)\nu_k \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n}g^{ij}\left(\sum_{k=1}^{m}\langle\nu_k,\overline{\nabla}_{E_i}E_j\rangle\nu_k\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n}g^{ij}\left(\overline{\nabla}_{E_i}E_j\right)^N(p).
\end{aligned}$$

□

Teorema 2 (Fórmula da Segunda Variação de Área)**.** *Dadas uma variedade Riemanniana compacta e orientável com bordo Σ^n e uma imersão mínima $\psi:\Sigma^n\longrightarrow M^{n+m}$ seja $\Psi:(-\varepsilon,\varepsilon)\times\Sigma^n\longrightarrow M^{n+m}$ uma variação de ψ. Então,*

$$\left.\frac{d^2A}{dt^2}\right|_{t=0} = -\int_{\Sigma^n}\left\{\langle\Delta E,E\rangle+\langle\overline{R}(E),E\rangle+\langle\widetilde{B}(E),E\rangle\right\}d\Sigma^n,$$

onde E é a componente normal do vetor variação $\left.\Psi_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right|_{t=0}$.

Demonstração. Pela fórmula da primeira variação de área temos

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d^2A}{dt^2}\right|_{t=0} &= -n\frac{d}{dt}\left.\left(\int_\Sigma\langle\overrightarrow{H_t},E_t\rangle d\Sigma_t\right)\right|_{t=0} \\
&= -n\int_\Sigma\frac{d}{dt}\left.\left(\langle\overrightarrow{H_t},E_t\rangle d\Sigma_t\right)\right|_{t=0} \\
&= -n\int_\Sigma\frac{d}{dt}\left.\left(\langle\overrightarrow{H_t},E_t\rangle\right)\right|_{t=0}d\Sigma_0 - n\int_\Sigma\langle\overrightarrow{H},E\rangle\left(\left.\frac{d}{dt}(d\Sigma_t)\right|_{t=0}\right) \\
&= -n\int_\Sigma\frac{d}{dt}\left.\left(\langle\overrightarrow{H_t},E_t\rangle\right)\right|_{t=0}d\Sigma, \qquad (1.20)
\end{aligned}$$

pois ψ é mínima.

Seja $\{E_1, \ldots, E_n\}$ um referencial geodésico em $p \in \Sigma$. Como no cálculo da primeira variação estendemos o referencial às folhas por

$$(\Psi_t)_* E_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

e definimos

$$g_{ij}(t) = \langle (\Psi_t)_* E_i, (\Psi_t)_* E_j \rangle,$$

donde a métrica induzida por Ψ_t em Σ é

$$ds_t^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(t)\, \theta_i \theta_j,$$

onde $\theta_1, \ldots, \theta_n$ são as formas duais de $\{E_1, \ldots, E_n\}$.

Identificando $(\Psi_t)_* E_i$ com E_i, segue do lema 2 que

$$\overrightarrow{H_t} = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(t) \left(\overline{\nabla}_{E_i} E_j\right)^N,$$

onde $\left(g^{ij}(t)\right)$ denota a matriz inversa de $(g_{ij}(t))$.

Então temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\langle \overrightarrow{H_t}, E_t \rangle\right)\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^n g^{ij}(t)\left\langle \left(\overline{\nabla}_{E_i}E_j\right)^N, E_t\right\rangle\right)\Bigg|_{t=0} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^n \frac{dg^{ij}}{dt}(0)\,\langle \overline{\nabla}_{E_i}E_j, E\rangle + \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^n g^{ij}(0)\left\langle \overline{\nabla}_{E_t}\overline{\nabla}_{E_i}E_j\Big|_{t=0}, E\right\rangle \\
&\quad + \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^n g^{ij}(0)\,\langle \left(\overline{\nabla}_{E_i}E_j\right)^N, \overline{\nabla}_E E\rangle \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^n \frac{dg^{ij}}{dt}(0)\,\langle \overline{\nabla}_{E_i}E_j, E\rangle + \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^n g^{ij}(0)\left\langle \overline{\nabla}_{E_t}\overline{\nabla}_{E_i}E_j\Big|_{t=0}, E\right\rangle \\
&\quad + \langle \overrightarrow{H}, \overline{\nabla}_E E\rangle \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^n \frac{dg^{ij}}{dt}(0)\,\langle \overline{\nabla}_{E_i}E_j, E\rangle + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left\langle \overline{\nabla}_E\overline{\nabla}_{E_i}E_i, E\right\rangle. \qquad (1.21)
\end{aligned}$$

Desde que $\sum_{k=1}^n g^{ik}g_{kj} = \delta_{ij}$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, obtemos

$$\sum_{k=1}^n \frac{dg^{ik}}{dt}(0)\, g_{kj}(0) = -\sum_{k=1}^n g^{ik}(0)\, \frac{dg_{kj}}{dt}(0),$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
\frac{dg^{ij}}{dt}(0) &= -\frac{dg_{ij}}{dt}(0) \\
&= -\frac{d}{dt}\left(\langle E_i, E_j\rangle\right)\bigg|_{t=0} \\
&= -\langle \overline{\nabla}_E E_i, E_j\rangle - \langle E_i, \overline{\nabla}_E E_j\rangle \\
&= -\langle \overline{\nabla}_{E_i} E, E_j\rangle - \langle E_i, \overline{\nabla}_{E_j} E\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_{E_i} E_j, E\rangle + \langle E, \overline{\nabla}_{E_j} E_i\rangle \\
&= 2\langle \overline{\nabla}_{E_i} E_j, E\rangle \\
&= 2\langle B\left(E_i, E_j\right), E\rangle,
\end{aligned}
$$

onde usamos que

$$
\left[E, E_i\right](p) = 0 \quad e \quad \left[\frac{\partial}{\partial t}, E_i\right](p) = 0.
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} \frac{dg^{ij}}{dt}(0)\,\langle \overline{\nabla}_{E_i} E_j, E\rangle &= 2\sum_{i,j=1}^{n} \langle B\left(E_i, E_j\right), E\rangle\langle B\left(E_i, E_j\right), E\rangle \\
&= 2\langle \widetilde{B}\left(E\right), E\rangle. \qquad (1.22)
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\langle \overline{\nabla}_E \overline{\nabla}_{E_i} E_i, E\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{R}\left(E_i, E\right)E_i + \overline{\nabla}_{E_i}\overline{\nabla}_E E_i - \overline{\nabla}_{[E_i,E]} E_i, E\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{R}\left(E_i, E\right)E_i + \overline{\nabla}_{E_i}\overline{\nabla}_E E_i, E\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{R}\left(E_i, E\right)E_i, E\rangle + \sum_{i=1}^{n} E_i\langle \overline{\nabla}_E E_i, E\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{\nabla}_E E_i, \overline{\nabla}_{E_i} E\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{R}\left(E_i, E\right)E_i, E\rangle + \sum_{i=1}^{n} E_i\langle \overline{\nabla}_E E_i, E\rangle \\
&\quad -\sum_{i=1}^{n}|\overline{\nabla}_{E_i} E|^2, \qquad (1.23)
\end{aligned}
$$

onde usamos que $\left[E, E_i\right](p) = 0$ na segunda igualdade.

Ademais, temos

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}|\overline{\nabla}_{E_i}E|^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left|\left(\overline{\nabla}_{E_i}E\right)^T\right|^2+\sum_{i=1}^{n}\left|\left(\overline{\nabla}_{E_i}E\right)^N\right|^2\\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\langle\overline{\nabla}_{E_i}E,E_j\rangle^2+\sum_{i=1}^{n}\left|\left(\overline{\nabla}_{E_i}E\right)^N\right|^2\\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\langle B\left(E_i,E_j\right),E\rangle^2+\sum_{i=1}^{n}\left|\left(\overline{\nabla}_{E_i}E\right)^N\right|^2\\
&= \langle\widetilde{B}\left(E\right),E\rangle+\sum_{i=1}^{n}\left|\left(\overline{\nabla}_{E_i}E\right)^N\right|^2. \qquad (1.24)
\end{aligned}
$$

Usando o fato de que o referencial $\{E_1,\ldots,E_n\}$ é geodésico em p, isto é, $\nabla_{E_i}E_i\left(p\right)=0$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}E_i\langle\overline{\nabla}_{E}E_i,E\rangle &= \sum_{i=1}^{n}E_i\langle\nabla^{\perp}_{E}E_i,E\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla^{\perp}_{E_i}\nabla^{\perp}_{E_i}E,E\rangle+\sum_{i=1}^{n}\left|\left(\overline{\nabla}_{E_i}E\right)^N\right|^2\\
&= \langle\Delta\left(E\right),E\rangle+\sum_{i=1}^{n}\left|\left(\overline{\nabla}_{E_i}E\right)^N\right|^2.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
n\frac{d}{dt}\langle\overrightarrow{H_t},E_t\rangle\Big|_{t=0} &= 2\langle\widetilde{B}\left(E\right),E\rangle+\sum_{i=1}^{n}\langle\overline{R}\left(E_i,E\right)E_i,E\rangle+\sum_{i=1}^{n}E_i\langle\overline{\nabla}_{E}E_i,E\rangle\\
&\quad -\langle\widetilde{B}\left(E\right),E\rangle-\sum_{i=1}^{n}\left|\left(\overline{\nabla}_{E_i}E\right)^N\right|^2\\
&= \langle\widetilde{B}\left(E\right),E\rangle+\langle\overline{R}\left(E\right),E\rangle+\sum_{i=1}^{n}\left|\left(\overline{\nabla}_{E_i}E\right)^N\right|^2\\
&\quad -\sum_{i=1}^{n}\left|\left(\overline{\nabla}_{E_i}E\right)^N\right|^2+\langle\Delta\left(E\right),E\rangle\\
&= \langle\widetilde{B}\left(E\right),E\rangle+\langle\overline{R}\left(E\right),E\rangle+\langle\Delta\left(E\right),E\rangle,
\end{aligned}
$$

onde usamos (1.21), (1.22) e (1.23) na primeira igualdade e (1.24) na segunda igualdade.

Portanto, segue de (1.20) que

$$
\frac{d^2A}{dt^2}\Big|_{t=0}=-\int_{\Sigma^n}\left\{\langle\Delta E,E\rangle+\langle\overline{R}\left(E\right),E\rangle+\langle\widetilde{B}\left(E\right),E\rangle\right\}d\Sigma^n.
$$

$\square$

Corolário 4. *Seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície mínima, compacta e orientável, com vetor normal N. Se a variação $\Psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ é dada por*

$$\psi_t(p) = Exp_{\psi(p)}(tf(p)\,N(p)),$$

onde $f : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então

$$\left.\frac{d^2A}{dt^2}\right|_{t=0} = -\int_\Sigma \left\{ f\Delta f + \left(|A|^2 + n\right) f^2 \right\} d\Sigma.$$

Demonstração. Seja $\{E_1, \ldots, E_n\}$ um referencial ortonormal em torno de $p \in \Sigma$ o qual diagonalisa o operador de Weingarten A em p. Então temos

$$\nabla^\perp_{E_i} N = \left(\overline{\nabla}_{E_i} N\right)^N = 0,$$

pois

$$\langle \overline{\nabla}_{E_i} N, N \rangle = 0,$$

para $i = 1, \ldots, n$, pois $\langle N, N \rangle = 1$. Daí,

$$\begin{aligned} \nabla^\perp_{E_i}(E) &= \nabla^\perp_{E_i}(fN) \\ &= E_i(f)\,N + f\nabla^\perp_{E_i} N \\ &= E_i(f)\,N, \end{aligned}$$

onde

$$E = \Psi_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\Big|_{t=0} = fN.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \nabla^\perp_{E_i}\nabla^\perp_{E_i}(E) &= \nabla^\perp_{E_i}(E_i(f)\,N) \\ &= E_iE_i(f)\,N + E_i(f)\,\nabla^\perp_{E_i} N \\ &= E_iE_i(f)\,N. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Analogamente, obtemos

$$\nabla^\perp_{\nabla_{E_i}E_i}(fN) = \nabla_{E_i}E_i(f)\,N. \tag{1.26}$$

Então, usando (1.23) e (1.24) obtemos

$$\begin{aligned}\langle \Delta E, E\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \{E_i E_i(f) - \nabla_{E_i} E_i(f)\} N, fN \right\rangle \\ &= f\Delta f. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Ademais,

$$\begin{aligned}\langle \overline{R}(E), E\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{R}(E_i, fN) E_i), fN\rangle \\ &= f^2 \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{R}(E_i, N) E_i), N\rangle. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Finalmente, temos

$$\begin{aligned}\langle \widetilde{B}(E), E\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle B(E_i, E_j), E\rangle \langle B(E_i, E_j), E\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle B(E_i, E_j), fN\rangle \langle B(E_i, E_j), fN\rangle \\ &= f^2 \sum_{i,j=1}^{n} \langle B(E_i, E_j), N\rangle^2 \\ &= f^2 \sum_{i,j=1}^{n} \left(-\langle E_j, \overline{\nabla}_{E_i} N\rangle\right)^2 \\ &= f^2 |A|^2, \end{aligned} \tag{1.29}$$

onde A é o operador de Weingarten.

Portanto, usando (1.27), (1.28) e (1.29) concluímos da fórmula da segunda variação de área que

$$\left.\frac{d^2 A}{dt^2}\right|_{t=0} = -\int_{\Sigma} \left\{ f\Delta f + \left(|A|^2 + n\right) f^2 \right\} d\Sigma.$$

$\square$

Supondo Σ^n com curvatura média constante H no corolário 4 e usando as equações (1.18), (1.20) e (1.21) temos

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^2 A}{dt^2}\right|_{t=0} &= -\int_{\Sigma} \left\{ f\Delta f + \left(|A|^2 + n\right) f^2 - n\langle \overrightarrow{H}, E\rangle^2 + n\langle \overrightarrow{H}, \overline{\nabla}_E E\rangle \right\} d\Sigma \\ &= -\int_{\Sigma} \left\{ f\Delta f + \left(|A|^2 - nH^2\right) f^2 + nf^2 + nH\langle N, \overline{\nabla}_E E\rangle \right\} d\Sigma, \end{aligned}$$

onde $E = fN$.

1.3 Funções suportes

O objetivo desta seção é calcularmos o Laplaciano das funções suportes. Inicialmente seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável imersa na esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$, com vetor normal N. Dado um vetor $v \in \mathbb{R}^{n+2}$ fixado, consideremos as funções suportes $l_v = \langle \psi, v \rangle$ e $f_v = \langle N, v \rangle$ definidas em Σ^n. Por outro lado se ∇ denota a conexão Riemanniana de Σ^n e A denota o operador de forma de Σ^n, então as fórmulas de Gauss e Weingarten da imersão ψ são

$$\nabla^\circ_X Y = \overline{\nabla}_X Y - \langle X, Y \rangle \psi = \nabla_X Y + \langle AX, Y \rangle N - \langle X, Y \rangle \psi, \qquad (1.30)$$

e

$$AX = -\nabla^\circ_X N = -\overline{\nabla}_X N, \quad X, Y \in T\Sigma^n, \qquad (1.31)$$

onde ∇° e $\overline{\nabla}$ denotam, respectivamente, as conexões Riemanniana de $\mathbb{R}^{n+2}$ e $\mathbb{S}^{n+1}$. Ademais, se ∇A denota a derivada covariante de A,

$$\nabla A (X, Y) = (\nabla_Y A) X = \nabla_Y (AX) - A (\nabla_Y X), \quad X, Y \in T\Sigma^n,$$

então a equação de Codazzi de Σ^n é

$$\nabla A (X, Y) = \nabla A (Y, X). \qquad (1.32)$$

Antes de calcularmos o Laplaciano das funções suportes necessitaremos do seguinte lema.

Lema 3. *Sejam A o operador de Weingarten e H a curvatura média de Σ^n. Então,*

$$tr (\nabla_X A) = n\langle X, \nabla H \rangle, \quad X \in T\Sigma^n.$$

Demonstração. Seja $\{E_1 \dots, E_n\}$ um referencial ortonormal tal que A em $p \in \Sigma$ é diagonalizada, e sejam $c_1 (p), \dots, c_n (p)$ os autovalores associados a $E_1 (p), \dots, E_n (p)$, respectivamente. Em p, temos

$$\begin{aligned} tr (\nabla_X A) &= \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_X A) E_i, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_X (AE_i) - A (\nabla_X E_i), E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_X (AE_i), E_i \rangle - \sum_{i=1}^n \langle A (\nabla_X E_i), E_i \rangle, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} tr\left(\nabla_X A\right) &= \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_X\left(AE_i\right), E_i\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n}\langle X, E_j\rangle\langle\nabla_{E_j}\left(AE_i\right), E_i\rangle. \end{aligned}$$

Levando em consideração que $\langle\nabla_{E_j}\left(AE_i\right), E_i\rangle = E_j\langle AE_i, E_i\rangle - \langle AE_i, \nabla_{E_j}E_i\rangle$ obtemos

$$\begin{aligned} tr\left(\nabla_X A\right) &= \sum_{i,j=1}^{n}\langle X, E_j\rangle\left(E_j\langle AE_i, E_i\rangle\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\langle X, E_j\rangle\left[E_j\left(\sum_{i=1}^{n}\langle AE_i, E_i\rangle\right)\right] \\ &= n\sum_{j=1}^{n}\langle X, E_j\rangle\left(E_j\left(H\right)\right) \\ &= n\langle X, \nabla H\rangle, \end{aligned}$$

onde usamos as igualdades

$$0 = c_i\left(p\right)\langle\nabla_X E_i, E_i\rangle\left(p\right) = \langle\nabla_X E_i, AE_i\rangle\left(p\right) = \langle A\left(\nabla_X E_i\right), E_i\rangle\left(p\right).$$

□

Com este lema poderemos fazer o cálculo desejado. De fato, temos a seguinte proposição.

Proposição 8. *Seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável imersa na esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$, com vetor normal N. Então,*

1. $\nabla l_v = v^T$ *e* $\nabla f_v = -A\left(v^T\right)$.
2. $\nabla^2 l_v\left(X, Y\right) = f_v\langle AX, Y\rangle - l_v\langle X, Y\rangle, \quad \forall X, Y \in T\Sigma^n$.
3. $\nabla^2 f_v\left(X, Y\right) = -\langle\nabla A\left(v^T, X\right), Y\rangle - f_v\langle AX, AY\rangle + l_v\langle AX, Y\rangle, \quad \forall X, Y \in T\Sigma^n$.
4. $\Delta l_v = -nl_v + nHf_v$ *e* $\Delta f_v = -n\langle v^T, \nabla H\rangle + nHl_v - |A|^2 f_v$.

Demonstração. Dado $p \in \Sigma^n$ consideremos $\{E_1, \ldots, E_n\}$ um referencial ortonormal em torno de p. Então temos, em p,

$$\nabla l_v = \sum_{i=1}^{n} E_i\left(l_v\right)E_i = \sum_{i=1}^{n}\langle E_i, v\rangle E_i = v^T. \tag{1.33}$$

Analogamente, temos

$$\begin{aligned}\nabla f_v &= \sum_{i=1}^{n} E_i\left(f_v\right) E_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{Ei} N, v^T \rangle E_i \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \langle A E_i, v^T \rangle E_i = -\sum_{i=1}^{n} \langle A\left(v^T\right), E_i \rangle E_i = -A\left(v^T\right). \quad (1.34)\end{aligned}$$

Usando a igualdade $v^T = v - f_v N - l_v \psi$ ao longo da imersão ψ e as equações (1.30) e (1.31) temos

$$\begin{aligned}\nabla^2 l_v\left(X, Y\right) &= \langle \nabla_X \nabla l_v, Y \rangle \\ &= \langle \nabla^{\circ}_X \nabla l_v, Y \rangle \\ &= \langle \nabla^{\circ}_X v^T, Y \rangle \\ &= \langle \nabla^{\circ}_X \left(v - f_v N - l_v \psi\right), Y \rangle \\ &= -\langle \nabla^{\circ}_X \left(f_v N\right), Y \rangle - \langle \nabla^{\circ}_X \left(l_v \psi\right), Y \rangle \\ &= f_v \langle -\nabla^{\circ}_X N, Y \rangle - l_v \langle \nabla^{\circ}_X \psi, Y \rangle \\ &= f_v \langle AX, Y \rangle - l_v \langle X, Y \rangle. \quad (1.35)\end{aligned}$$

para $X, Y \in T\Sigma$, onde a orientação de $\mathbb{S}^{n+1}$ é a identidade. Ademais, usando a equação de Codazzi (1.32) temos

$$\begin{aligned}\nabla^2 f_v\left(X, Y\right) &= \langle \nabla_X \nabla f_v, Y \rangle \\ &= \langle \nabla_X \left(-A\left(v^T\right)\right), Y \rangle \\ &= -\langle \left(\nabla_X A\right)\left(v^T\right) + A\left(\nabla_X v^T\right), Y \rangle \\ &= -\langle \left(\nabla_{v^T} A\right)\left(X\right), Y \rangle - \langle A\left(\nabla_X v^T\right), Y \rangle \\ &= -\langle \left(\nabla_{v^T} A\right)\left(X\right), Y \rangle - \langle \nabla_X v^T, AY \rangle \\ &= -\langle \nabla A\left(v^T, X\right), Y \rangle - \nabla^2 l_v\left(X, AY\right) \\ &= -\langle \nabla A\left(v^T, X\right), Y \rangle - f_v \langle AX, AY \rangle \\ &\quad + l_v \langle AX, Y \rangle. \quad (1.36)\end{aligned}$$

Segue da equação (1.35) que

$$\Delta l_v = tr\left(\nabla^2 l_v\right) = -n l_v + nH f_v, \quad (1.37)$$

onde H é a curvatura média de Σ^n. Finalmente, usando o lema 3 e as equações (1.34) e (1.35) temos

$$\begin{aligned}\Delta f_v = tr\left(\nabla^2 f_v\right) &= -tr\left(\nabla_{v^T} A\right) + nH l_v - |A|^2 f_v \\ &= -n \langle v^T, \nabla H \rangle + nH l_v - |A|^2 f_v. \quad (1.38)\end{aligned}$$

□

Capítulo 2

Índice e Estabilidade de Hipersuperfícies Mínimas na Esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$.

Sejam $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta e orientável imersa na esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$ e $C^\infty(\Sigma^n)$ o conjunto das funções diferenciáveis em Σ^n. Para $f \in C^\infty(\Sigma^n)$ existe $\varepsilon_f > 0$ tal que podemos considerar a variação normal $\Psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ dada por

$$\Psi(t, p) = Exp_{\psi(p)}(tf(p) N(p)).$$

Considerando a função área $A : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$A(t) = \int_\Sigma d\Sigma_t,$$

onde Σ_t representa a variedade Σ munida com a métrica induzida por ψ_t e $d\Sigma_t$ é o elemento de área dessa métrica induzida em Σ temos pela fórmula da primeira variação de área que

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{t=0} = -n \int_\Sigma fH d\Sigma.$$

Convém observar que hipersuperfícies mínimas são caracterizadas como pontos críticos do funcional área.

Definição 14. *Sejam $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície e $A : T\Sigma^n \longrightarrow T\Sigma^n$ o tensor de Weingarten. O operador de Jacobi é a aplicação $J : C^\infty(\Sigma^n) \longrightarrow C^\infty(\Sigma^n)$ dada por*

$$J(f) = \Delta f + |A|^2 f + nf,$$

onde Δ denota o operador Laplaciano de Σ^n e $|A|^2$ é o traço de A^2.

O operador de estabilidade desse problema variacional, Σ^n mínima, é dado pela segunda variação de área

$$\left.\frac{d^2A}{dt^2}\right|_{t=0} = -\int_\Sigma fJfd\Sigma, \quad f \in C^\infty(\Sigma^n).$$

Sabemos da teoria espectral de variedades Riemannianas compactas que o espectro de J

$$\begin{aligned} Spec(J) &= \{\lambda \in \mathbb{R} : \ Jf = -\lambda f, \, f \in C^\infty(\Sigma^n), \ f \neq 0\} \\ &= \{\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \cdots\} \end{aligned}$$

é formado por autovalores λ_k com multiplicidades finitas m_k e tais que

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \lambda_k = +\infty.$$

O primeiro autovalor λ_1 é simples e satisfaz a seguinte caracterização do min-max

$$\lambda_1 = \inf\left\{\frac{-\int_\Sigma fJfd\Sigma}{\int_\Sigma f^2 d\Sigma} : \ f \in C^\infty(\Sigma^n), \ f \neq 0\right\}. \tag{2.1}$$

O operador de Jacobi induz uma forma quadrática $Q : C^\infty(\Sigma^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$Q(f) = -\int_\Sigma fJfd\Sigma.$$

Definição 15. *Seja $J : C^\infty(\Sigma^n) \longrightarrow C^\infty(\Sigma^n)$ o operador de Jacobi. O índice de Σ^n, denotado por $Ind(\Sigma^n)$, é definido por*

$$Ind(\Sigma^n) = \max\{dimV : \ V \subset C^\infty(\Sigma^n), \ Q(f) < 0, \forall f \in V\},$$

onde $Q(f) = -\int_\Sigma fJfd\Sigma$.

É útil notar que $Ind(\Sigma^n)$ é o número de autovalores negativos de J (contados com a multiplicidade)

$$Ind(\Sigma^n) = \sum_{\lambda_k < 0} m_k < \infty.$$

Intuitivamente, o índice mede o número de direções independentes nas quais a hipersuperfície não minimiza área.

Definição 16. *Seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície mínima. Diremos que Σ^n é estável se, e somente se, $Ind(\Sigma^n) = 0$.*

Se Σ^n é uma hipersuperfície mínima e compacta em $\mathbb{S}^{n+1}$ temos

$$\begin{aligned} Q(1) &= -\int_\Sigma \left(|A|^2+n\right) d\Sigma \\ &= -nArea(\Sigma) - \int_\Sigma |A|^2 d\Sigma \\ &\leq -nArea(\Sigma) < 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

isto é, hipersuperfícies mínimas e compactas em $\mathbb{S}^{n+1}$ são instáveis. Além disso,

$$\lambda_1 \leq \frac{Q(1)}{Area(\Sigma^n)} \leq -n - \frac{1}{Area(\Sigma^n)} \int_\Sigma |A|^2 d\Sigma \leq -n, \tag{2.3}$$

donde $\lambda_1 = -n$ se, e somente se, $|A| = 0$, isto é, se, e somente se, Σ^n é um equador totalmente geodésico $\mathbb{S}^n$ em $\mathbb{S}^{n+1}$.

Seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície. Então, segue da equação de Gauss que

$$R(X,Y)Z = \langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X + \langle AX,Z\rangle AY - \langle AY,Z\rangle AX, \tag{2.4}$$

para $X,Y,Z \in T\Sigma^n$. A definição de curvatura que estamos considerando é

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z.$$

Segue de (2.4) que a curvatura de Ricci de Σ^n é dada por

$$Ric(X,Y) = (n-1)\langle X,Y\rangle + nH\langle AX,Y\rangle - \langle AX,AY\rangle.$$

Então a curvatura escalar S de uma hipersuperfície mínima em $\mathbb{S}^{n+1}$ satisfaz

$$S = tr(Ric) = n(n-1) - |A|^2 \leq n(n-1), \tag{2.5}$$

com igualdade somente nos pontos onde Σ^n é totalmente geodésica. Assim, as únicas hipersuperfícies mínimas em $\mathbb{S}^{n+1}$ isométricas à esfera são os equadores totalmente geodésicos.

Antes de demonstrarmos o primeiro resultado precisaremos do seguinte lema.

Lema 4. *Seja* $V = \left\{f_v \ : \ v \in \mathbb{R}^{n+2}\right\}$. *Então* V *é um espaço linear com dimensão menor ou igual a* $n+2$.

Demonstração. A linearidade de V segue da linearidade de $\mathbb{R}^{n+2}$. Vamos supor por absurdo que existem $f_{v_1}, f_{v_2}, \ldots, f_{v_m}$ linearmente independentes, onde $m > n+2$. Se

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m = 0, \quad \alpha_i \in \mathbb{R},\ i = 1,2,\ldots,m,$$

então

$$0 = \langle N, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m \rangle = \alpha_1 f_{v_1} + \alpha_2 f_{v_2} + \cdots + \alpha_m f_{v_m},$$

donde $\alpha_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m$.
Então, $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ é linearmente independente, o que é um absurdo. Logo, $dimV \leq n + 2$.

□

Simons em [19] caracterizou os equadores $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$ totalmente geodésicos como as únicas hipersuperfícies compactas e mínimas em $\mathbb{S}^{n+1}$ com $Ind\,(\Sigma^n) = 1$. Depois, Urbano em [20] para $n = 2$, e El Soufi em [15] para o caso geral n, provaram que se Σ^n não é um equador totalmente geodésico, então $Ind\,(\Sigma^n) \geq n + 3$.

Assim, temos o seguinte teorema.

Teorema 3 (Simons, Urbano e El Soufi)**.** *Seja Σ^n uma hipersuperfície compacta, orientável e mínima imersa na esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$. Então*

1. *$Ind\,(\Sigma^n) = 1$ (e Σ^n é um equador totalmente geodésico $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$),*
2. *ou $Ind\,(\Sigma^n) \geq n + 3$.*

Demonstração. Se Σ^n é um equador totalmente geodésico em $\mathbb{S}^{n+1}$, então o operador de Jacobi é dado por $J = \Delta + n$, onde Δ é o operador Laplaciano na esfera unitária $\Sigma^n = \mathbb{S}^n$. Assim, os autovalores de J são dados por

$$\lambda_i = \mu_i - n,$$

onde μ_i é o i-ésimo autovalor do Laplaciano de $\mathbb{S}^n$, com a mesma multiplicidade. Logo, $\lambda_1 = -n$ com multiplicidade 1 e $\lambda_2 = 0$, donde

$$Ind\,(\Sigma^n) = 1.$$

Resta mostrar que se Σ^n não é um equador totalmente geodésico, então $Ind\,(\Sigma^n) \geq n + 3$. Por (2.3) temos $\lambda_1 < -n$ com multiplicidade $m_1 = 1$. Se mostrarmos que $-n$ é um autovalor com multiplicidade pelo menos $n + 2$ obtemos $Ind\,(\Sigma^n) \geq n + 3$. Com efeito, usando a proposição 8 e o fato de Σ^n ser mínima obtemos

$$\Delta f_v = -|A|^2 f_v,$$

donde

$$J\,(f_v) - n f_v = 0,$$

para todo $v \in \mathbb{R}^{n+2}$. Então, toda $f_v \neq 0$ é autofunção de J com autovalor $-n$. Seja $V = \left\{ f_v \ :\ v \in \mathbb{R}^{n+2} \right\}$, mostraremos que $dimV = n+2$. Pelo lema

4 temos $dimV \leq n+2$. Se $dimV < n+2$, então exite $v \in \mathbb{R}^{n+2}$ unitário tal que $f_v = 0$. Segue do item 2 da proposição 8 que

$$\nabla^2 l_v = -l_v \langle , \rangle. \tag{2.6}$$

Ademais, usando a igualdade $v^T = v - f_v N - l_v \psi$ ao longo da imersão, temos

$$1 = \langle v, v \rangle = |\nabla l_v|^2 + f_v^2 + l_v^2 = |\nabla l_v|^2 + l_v^2 \tag{2.7}$$

donde l_v não é constante. De fato, se l_v fosse constante teríamos $|l_v| = 1$, por (2.7). Usando (2.6) obtemos uma contradição.

Desde que l_v não é constante segue do teorema A de Obata [12] que Σ^n é isométrica a uma esfera unitária. Por (2.5) obtemos que Σ^n é um equador totalmente geodésico, o que é um absurdo. Portanto, $dimV = n+2$. $\square$

Definição 17. *Se* $\mathbb{S}^k\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right) \hookrightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ *e* $\mathbb{S}^{n-k}\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n-k+1}$, *representam as imersões usuais para cada* $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, *então o produto das imersões*

$$\mathbb{S}^k\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right) \times \mathbb{S}^{n-k}\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right) \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$$

é chamado toro de Clifford mínimo.

Por um cálculo direto, mostra-se que um toro Clifford mínimo é uma variedade Riemanniana mínima. Por esse motivo algumas vezes chamaremos o toro de Clifford mínimo de toro mínimo de Clifford.

Dado um toro de Clifford mínimo $\mathbb{S}^k\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right) \times \mathbb{S}^{n-k}\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right)$ o campo

$$N(x, y) = \left(\sqrt{\frac{n-k}{k}}x, -\sqrt{\frac{k}{n-k}}y\right),$$

define uma normal em $\mathbb{S}^k\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right) \times \mathbb{S}^{n-k}\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right)$. De fato, dado $(x, y) \in \mathbb{S}^k\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right) \times \mathbb{S}^{n-k}\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right)$ temos

$$\begin{aligned}
\langle N(x, y), (x, y) \rangle &= \sqrt{\frac{n-k}{k}}|x|^2 - \sqrt{\frac{k}{n-k}}|y|^2 \\
&= \sqrt{\frac{n-k}{k}}\frac{k}{n} - \sqrt{\frac{k}{n-k}}\frac{n-k}{n} \\
&= \sqrt{\frac{n-k}{n}}\sqrt{\frac{k}{n}} - \sqrt{\frac{k}{n}}\sqrt{\frac{n-k}{n}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

O resultado a seguir complementa o teorema 3.

Lema 5. *Se Σ^n é um toro de Clifford mínimo, então* $Ind\,(\Sigma^n) = n + 3$.

Demonstração. Seja $\Sigma^n = \mathbb{S}^k\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right) \times \mathbb{S}^{n-k}\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right)$ um toro de Clifford mínimo. Definimos um campo normal em $\mathbb{S}^k\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right) \times \mathbb{S}^{n-k}\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right)$ por

$$N\,(x, y) = \left(\sqrt{\frac{n-k}{k}}x, -\sqrt{\frac{k}{n-k}}y\right),$$

para $(x, y) \in \mathbb{S}^k\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right) \times \mathbb{S}^{n-k}\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right)$. Nessa orientação suas curvaturas principais $c_1, \ldots, c_n$ são dadas por

$$c_1 = \cdots = c_k = -\sqrt{\frac{n-k}{k}},\ c_{k+1} = \cdots = c_n = \sqrt{\frac{k}{n-k}}.$$

De fato, seja $\{E_1 \ldots, E_k, E_{k+1}, \ldots, E_n\}$ um referencial ortornormal adaptado, isto é, tal que $E_1, \ldots, E_k$ são tangentes à $\mathbb{S}^k\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right)$ e $E_{k+1}, \ldots, E_n$ são tangentes à $\mathbb{S}^{n-k}\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right)$. Então

$$\begin{aligned} -\overline{\nabla}_{E_i}N &= -\nabla^k_{E_i}N + \nabla^{n-k}_{E_i}N \\ &= -\nabla^k_{E_i}N \\ &= -\sqrt{\frac{n-k}{k}}E_i, \end{aligned}$$

para $i = 1, \ldots, k$, e

$$\begin{aligned} -\overline{\nabla}_{E_i}N &= -\nabla^k_{E_i}N + \nabla^{n-k}_{E_i}N \\ &= \nabla^{n-k}_{E_i}N \\ &= \sqrt{\frac{k}{n-k}}E_i, \end{aligned}$$

para $i = k+1, \ldots, n$, onde ∇^k e ∇^{n-k} denotam as conexões Riemanniana de $\mathbb{S}^k\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right)$ e $\mathbb{S}^{n-k}\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right)$, respectivamente. Então o operador de Jacobi de Σ^n é dado por

$$J = \Delta + 2n,$$

onde Δ é o Laplaciano de Σ^n. Assim, os autovalores de J são dados por

$$\lambda_i = \mu_i - 2n,$$

onde μ_i é o i-ésimo autovalor de Δ. Logo, o índice de Σ^n é o número de autovalores de Δ (contados com a multiplicidade) estritamente menores que $2n$. Desde que os autovalores do Laplaciano de $\mathbb{S}^k\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right)$ são dados por

$$\alpha_i = \frac{n\,(i-1)\,(k+i-2)}{k},\ i = 1, 2, 3, \ldots,$$

com multiplicidades

$$m_{\alpha_1} = 1,\ m_{\alpha_2} = k+1,$$

e com multiplicidades

$$m_{\alpha_i} = \left(\begin{array}{c} k+i-1 \\ i-1 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c} k+i-3 \\ i-3 \end{array}\right),\ i = 3, 4, \ldots,$$

e os autovalores do Laplaciano de $\mathbb{S}^{n-k}\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right)$ são dados por

$$\beta_j = \frac{n\,(j-1)\,(n-k+j-2)}{n-k},\ j = 1, 2, 3, \ldots,$$

com multiplicidades

$$m_{\beta_1} = 1,\ m_{\beta_2} = n-k+1,$$

e com multiplicidades

$$m_{\beta_j} = \left(\begin{array}{c} n-k+j-1 \\ j-1 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c} n-k+j-3 \\ j-3 \end{array}\right),\ j = 3, 4, \ldots,$$

segue que os autovalores do Laplaciano de Σ^n são dados por $\alpha + \beta$ com multiplicidade igual a soma dos produtos $m_\alpha m_\beta$, onde α é autovalor de $\mathbb{S}^k\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right)$ com multiplicidade m_α e β é autovalor de $\mathbb{S}^{n-k}\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right)$ com multiplicidade m_β (veja [8]). Como $\mu_1 = 0$ com multiplicidade 1, $\mu_2 = \alpha_1 + \beta_2 = \alpha_2 + \beta_1 = n$ com multiplicidade $n+2$ e $\mu_3 = 2n$, segue que $Ind\,(\Sigma^n) = n+3$.

$\square$

Em [20] Urbano caracterizou o toro mínimo de Clifford em $\Sigma^2 \subset \mathbb{S}^3$ como sendo a única superfície mínima, compacta e orientável em $\mathbb{S}^3$ tal que $Ind\left(\Sigma^2\right) = 5$.

Lembremos que a fórmula de Simons para o cálculo do Laplaciano da função $tr\left(A^2\right)$ para hipersuperfícies em $\mathbb{S}^{n+1}$ de curvatura média constante é dada por

$$\frac{1}{2}\Delta\left(trA^2\right) = |\nabla A|^2 + \left(n - |A|^2\right)|A|^2 + nH\left(trA^3\right) - n^2H^2.$$

Em particular, para hipersuperfícies mínimas em $\mathbb{S}^{n+1}$ temos

$$\frac{1}{2}\Delta|A|^2 = |\nabla A|^2 + \left(n - |A|^2\right)|A|^2. \tag{2.8}$$

Usaremos (2.8) para mostrar o seguinte teorema devido a Simons em [19] e Chern, do Carmo e Kobayashi em [10] ou Lawson [14].

Teorema 4 (Simons, Chern, do Carmo, Kobayashi e Lawson)**.** *Seja Σ^n uma hipersuperfície compacta, orientável e mínima imersa na esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$, e assuma que $|A| \leq \sqrt{n}$ em Σ^n. Então*

1. $|A| = 0$ *(e Σ^n é um equador totalmente geodésico $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$),*

2. *ou $|A| = \sqrt{n}$ e Σ^n é um toro mínimo de Clifford.*

Demonstração. Integrando (2.8) em Σ^n e aplicando o teorema de Stokes obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}\int_\Sigma \Delta|A|^2 d\Sigma \\ &= \int_\Sigma |\nabla A|^2 d\Sigma + \int_\Sigma \left(n - |A|^2\right)|A|^2 d\Sigma. \end{aligned}$$

Por hipótese $n-|A|^2 \geq 0$. Logo $|\nabla A|^2 = 0$ e $\left(n - |A|^2\right)|A|^2 = 0$. Se $n-|A|^2 > 0$, então $|A|^2 = 0$ e Σ^n é um equador totalmente geodésico. Caso contrário $|A| = \sqrt{n}$.

Resta mostrar que $|A| = \sqrt{n}$ implica que Σ^n é um toro de Clifford. Sejam $\gamma : [0,1] \longrightarrow \Sigma^n$ uma curva diferenciável e V um campo paralelo ao longo de γ. Então, AV é um campo paralelo ao longo de γ. De fato,

$$0 = \nabla A\left(V, \gamma'\right) = \nabla_{\gamma'}(AV) - A\left(\nabla_{\gamma'}V\right)$$

donde

$$\nabla_{\gamma'}(AV) = A\left(\nabla_{\gamma'}V\right) = A(0) = 0. \tag{2.9}$$

Seja $\{E_1, \ldots, E_n\}$ um referencial ortonormal diagonalizando A em $p \in \Sigma$, e sejam $c_1, \ldots, c_n$ os respectivos autovalores. Então, temos em p

$$\langle R(E_i, E_j)E_i, E_j\rangle = 0, \ i \neq j,$$

pois (2.9) implica que $HA = AH$, para todo transporte paralelo H ao longo de uma curva fechada em p, isto é, $H(V_i) \subset V_i$, onde V_i é o autoespaço gerado por E_i (veja [14]). Assim, segue da equação de Gauss que

$$0 = \langle R(E_i, E_j)E_i, E_j\rangle = (1 + c_i c_j), \ i \neq j,$$

donde A_p tem dois autovalores distintos, e satisfazem

$$c_1 = -\frac{1}{c_2}.$$

Desde que Σ^n é mínima e $|A| = \sqrt{n}$ obtemos (a menos de orientação)

$$c_1 = -\sqrt{\frac{n-k}{k}} \text{ e } c_2 = \sqrt{\frac{k}{n-k}}$$

com multiplicidades $k \geq 1$ e $n-k \geq 1$, respectivamente. Logo, Σ^n é uma hipersuperfície isoparamétrica de $\mathbb{S}^{n+1}$ com dois autovalores distintos, donde segue do resultado clássico de Cartan [9] que Σ^n é um toro mínimo de Clifford $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}\left(\sqrt{1-r^2}\right) \subset \mathbb{S}^{n+1}$, onde $r = \sqrt{\frac{k}{n}}$. □

Para o que segue, consideremos o seguinte lema devido a Barros, Brasil e Sousa [7].

Lema 6. *Seja Σ^n uma variedade Riemanniana mínima imersa em $\mathbb{S}^{n+1}$. Então*

$$|\nabla|A|^2|^2 \leq \frac{4n}{n+2}|A|^2|\nabla A|^2,$$

onde A é o tensor de Weingarten.

Demonstração. Dado $p \in \Sigma$ consideremos $\{E_1, \dots, E_n\}$ um referencial ortonormal que diagonaliza A, e sejam $c_1, \dots, c_n$ os respectivos autovalores. Então, temos em p

$$|\nabla|A|^2|^2 = 4\sum_k \left(\sum_{i,j} A_{ij}A_{ijk}\right)^2 = 4\sum_k \left(\sum_i c_i A_{iik}\right)^2,$$

onde $|A|^2 = \sum_{i,j} A_{ij}^2$ e $|\nabla A|^2 = \sum_{i,j,k} (A_{ijk})^2$.

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$|\nabla|A|^2|^2 \leq 4\sum_i c_i^2 \sum_{i,k} (A_{iik})^2.$$

Daí,

$$4|A|^2\left(\sum_i (A_{iii})^2 + \sum_{i,k,i\neq k} (A_{iik})^2\right) \geq |\nabla|A|^2|^2. \tag{2.10}$$

Fixemos um índice i. Desde que $tr\,(A) = 0$, temos que

$$A_{iii} = -\sum_{k,k\neq i} A_{kki}.$$

Novamente, por Cauchy-Schwarz obtemos

$$\sum_i (A_{iii})^2 = \sum_i \left(\sum_{k,k\neq i} A_{kki}\right)^2 \leq (n-1)\sum_{k,i,i\neq k} (A_{iik})^2. \tag{2.11}$$

Segue de (2.10) e (2.11) que

$$|\nabla|A|^2|^2 \leq 4n|A|^2 \sum_{i,k,i\neq k} (A_{iik})^2. \tag{2.12}$$

Desde que $A_{ik} = A_{ki}$ obtemos $A_{iki} = A_{kii}$. Usando a equação de Codazzi obtemos

$$A_{iik} = A_{iki} = A_{kii}. \tag{2.13}$$

Desde que $|\nabla A|^2 = \sum_{ijk} (A_{ijk})^2$ e

$$\sum_{ijk} (A_{ijk})^2 = \sum_i (A_{iii})^2 + \sum_{i,k,i\neq k} \left((A_{iik})^2 + (A_{iki})^2 + (A_{kii})^2\right) + 6\sum_{i<j<k} (A_{ijk})^2.$$

Usando (2.13) obtemos

$$|A|^2|\nabla A|^2 = |A|^2 \left(\sum_i (A_{iii})^2 + 3\sum_{i,k,i\neq k} (A_{iik})^2 + 6\sum_{i<j<k} (A_{ijk})^2\right).$$

Daí,

$$|A|^2|\nabla A|^2 \geq 2|A|^2 \sum_{i,k,i\neq k} (A_{iik})^2 + |A|^2 \left(\sum_{i,k,i\neq k} (A_{iik})^2 + \sum_i (A_{iii})^2\right).$$

Usando (2.12) e o segundo termo de (2.10)

$$|A|^2|\nabla A|^2 \geq \frac{1}{2n}|\nabla|A|^2|^2 + \frac{1}{4}|\nabla|A|^2|^2.$$

Portanto,

$$|\nabla|A|^2|^2 \leq \frac{4n}{n+2}|A|^2|\nabla A|^2.$$

□

Em [19] Simons mostrou que se Σ^n não é um equador totalmente geodésico, então $\lambda_1 \leq -2n$. Perdomo [18] deu uma caracterização do toro mínimo de Clifford pelo primeiro autovalor de estabilidade λ_1. Então, temos o seguinte resultado.

Teorema 5 (Simons e Perdomo)**.** *Seja Σ^n uma hipersuperfície compacta, orientável e mínima imersa na esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$, e seja λ_1 o primeiro autovalor do operador de Jacobi. Então*

1. *$\lambda_1 = -n$ (e Σ^n é um equador totalmente geodésico $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$),*
2. *ou $\lambda_1 \leq -2n$, com igualdade se, e somente se, é um toro mínimo de Clifford $\mathbb{S}^k\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right) \times \mathbb{S}^{n-k}\left(\sqrt{\frac{n-k}{n}}\right) \subset \mathbb{S}^{n+1}$.*

Demonstração. Pela desigualdade (2.3) temos que $\lambda_1 \leq -n$ com igualdade se, e somente se, Σ^n é um equador totalmente geodésico $\mathbb{S}^n$. Suponhamos que Σ^n não é um equador totalmente geodésico. Para cada $\varepsilon > 0$ consideraremos a função positiva $f_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon + |A|^2}$. Notemos que

$$\Delta f_\varepsilon = \frac{1}{2f_\varepsilon}\Delta|A|^2 - \frac{1}{4f_\varepsilon^3}|\nabla|A|^2|^2.$$

Usando a fórmula de Simons obtemos

$$f_\varepsilon \Delta f_\varepsilon = \left(n - |A|^2\right)|A|^2 + |\nabla A|^2 - \frac{1}{4f_\varepsilon^2}|\nabla|A|^2|^2.$$

Pelo lema 6 temos

$$|\nabla A|^2 - \frac{1}{4f_\varepsilon^2}|\nabla|A|^2|^2 \quad \geq \quad |\nabla A|^2 - \frac{n}{n+2}|\nabla A|^2 = \frac{2}{n+2}|\nabla A|^2.$$

Daí,

$$f_\varepsilon \Delta f_\varepsilon \geq \left(n - |A|^2\right)|A|^2 + \frac{2}{n+2}|\nabla A|^2.$$

Então,

$$\begin{aligned}
-f_\varepsilon J f_\varepsilon &= -f_\varepsilon \Delta f_\varepsilon - \left(n + |A|^2\right) f_\varepsilon^2 \\
&\leq -\frac{2}{n+2}|\nabla A|^2 + \left(|A|^2 - n\right)|A|^2 - \left(n + |A|^2\right)\left(\varepsilon + |A|^2\right) \\
&= -\frac{2}{n+2}|\nabla A|^2 - n|A|^2 - \varepsilon\left(n + |A|^2\right) - n|A|^2 \\
&= -2n|A|^2 - \frac{2}{n+2}|\nabla A|^2 - \varepsilon\left(n + |A|^2\right).
\end{aligned}$$

Usando f_ε como função teste em (2.1) obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \int_\Sigma f_\varepsilon^2 d\Sigma &\leq -\int_\Sigma f_\varepsilon J f_\varepsilon d\Sigma \qquad (2.14)\\
&\leq -2n \int_\Sigma |A|^2 d\Sigma - \frac{2}{n+2}\int_\Sigma |\nabla A|^2 d\Sigma - \varepsilon \int_\Sigma \left(n + |A|^2\right) d\Sigma.
\end{aligned}$$

Ademais,

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Sigma f_\varepsilon^2 d\Sigma &= \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon Area\left(\Sigma^n\right) + \int_\Sigma |A|^2 d\Sigma\\
&= \int_\Sigma |A|^2 d\Sigma > 0,
\end{aligned}$$

pois Σ^n não é um equador totalmente geodésico.

Fazendo $\varepsilon \longrightarrow 0$ em (2.14) obtemos

$$\lambda_1 \leq -2n - \frac{2}{n+2}\frac{\int_\Sigma |\nabla A|^2 d\Sigma}{\int_\Sigma |A|^2 d\Sigma} \leq -2n.$$

Logo, se $\lambda_1 = -2n$ então $|\nabla A|^2 = 0$ em Σ^n, e pelo lema 6 obtemos $|A|^2$ uma constante. Daí, o operador de Jacobi é dado por $J = \Delta + |A|^2 + n$, onde $|A|^2 + n$ é uma constante, e o primeiro autovalor de J é a constante $-\left(|A|^2 + n\right) = \lambda_1 = -2n$. Portanto, $|A|^2 = n$ e o teorema 4 mostra que Σ^n é um toro de Clifford mínimo. A recíproca do item 2 segue do lema 5.

□

Capítulo 3

Índice e Estabilidade de Hipersuperfícies com Curvatura Média Constante na Esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$

Uma outra consequência da primeira fórmula de variação de área é que Σ^n tem curvatura média constante (não necessariamente zero) se, e somente se, $\frac{dA}{dt}(0) = 0$ para toda $f \in C^\infty(\Sigma^n)$ satisfazendo $\int_\Sigma f d\Sigma = 0$, onde $A : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função área da variação normal induzida por f.

Geometricamente a condição $\int_\Sigma f d\Sigma = 0$ significa que a variação preserva uma certa função volume. De fato, se $\Psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ é a variação normal induzida por $f \in C^\infty(\Sigma^n)$, então a função volume $V : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$V(t) = \int_{[0,t]\times\Sigma} \Psi^*(dV),$$

onde dV denota o elemento de volume $(n+1)$-dimensional de $\mathbb{S}^{n+1}$. Então a primeira variação do volume de V é dada por

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=0} = \int_\Sigma f d\Sigma.$$

Dizemos que a variação preserva volume se $V(t) = V(0)\ \forall\, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Barbosa, do Carmo e Eschenburg, mostraram em [6] que dada uma função $f \in C^\infty(\Sigma^n)$ satisfazendo $\int_\Sigma f d\Sigma = 0$, existe uma variação normal preservando volume onde o campo variacional é fN. Daí, as hipersuperfícies de curvatura média constante (não necessariamente zero) são caracterizadas como pontos críticos do funcional área quando restrito a variações que preservam volume. Notemos que a fórmula da segunda variação para uma variação normal induzida por uma função diferenciável satisfazendo $\int_\Sigma f d\Sigma = 0$ é dada por

$$\left.\frac{d^2 A}{dt^2}\right|_{t=0} = -\int_\Sigma \left\{ f\Delta f + \left(|A|^2 + n\right) f^2 \right\} d\Sigma.$$

Definição 18. *Seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície com curvatura média constante. O índice forte $Ind\,(\Sigma^n)$ de Σ^n é definido por*

$$Ind\,(\Sigma^n) = \max\left\{dimV : \ V \subset C^\infty(\Sigma^n),\ Q(f) < 0, \forall f \in V\right\},$$

onde $Q(f) = -\int_\Sigma fJf d\Sigma$.

Definição 19. *Definimos o índice fraco $Ind_T\,(\Sigma^n)$ de Σ^n por*

$$Ind\,(\Sigma^n) = \max\left\{dimV : \ V \subset C_T^\infty(\Sigma^n),\ Q(f) < 0, \forall f \in V\right\},$$

onde $C_T^\infty(\Sigma^n) = \left\{f \in C^\infty(\Sigma^n) : \ \int_\Sigma f d\Sigma = 0\right\}$.

Definição 20. *Seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície com curvatura média constante. Diremos que Σ^n é fortemente estável se, e somente se,*

$$Ind\,(\Sigma^n) = 0.$$

Ademais, diz-se que Σ^n é fracamente estável se, e somente se,

$$Ind_T\,(\Sigma^n) = 0.$$

Segue do princípio do min-max que

$$\lambda_1 < \lambda_1^T \leq \lambda_2 \leq \lambda_2^T \leq \cdots,$$

onde

$$Spec\,(J) = \{\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \cdots\}$$

é o espectro usual de J e

$$Spec_T\,(J) = \left\{\lambda_1^T \leq \lambda_2^T \leq \lambda_3^T \cdots\right\}$$

é o espectro de $J\big|_{C_T^\infty(\Sigma^n)}$.

Quando tratamos com hipersuperfícies de curvatura média constante é conveniente considerarmos o tensor simétrico $\phi = A - HI$, onde I é o operador identidade em $T\Sigma^n$. Notemos que o operador de Jacobi é dado por

$$J = \Delta + |\phi|^2 + n\left(1 + H^2\right).$$

Usando a função $f = 1$ como função teste obtemos

$$\begin{aligned} Q(1) &= -\int_{\Sigma} \left(|\phi|^2 + n\left(1 + H^2\right)\right) d\Sigma \\ &= -n\left(1 + H^2\right) Area\,(\Sigma) - \int_{\Sigma} |\phi|^2 d\Sigma \\ &\leq -n\left(1 + H^2\right) Area\,(\Sigma) < 0, \end{aligned}$$

donde $Ind\,(\Sigma^n) \geq 1$ para toda hipersuperfícies de curvatura média constante em $\mathbb{S}^{n+1}$, isto é, não existem hipersuperfícies de curvatura média constante em $\mathbb{S}^{n+1}$ fortemente estáveis. Analogamente, ao caso de hipersuperfícies mínimas em $\mathbb{S}^{n+1}$ temos

$$\begin{aligned} \lambda_1 \leq \frac{Q(1)}{Area\,(\Sigma^n)} &= -n\left(1 + H^2\right) - \frac{1}{Area\,(\Sigma^n)} \int_{\Sigma} |\phi|^2 d\Sigma \\ &\leq -n\left(1 + H^2\right), \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $\lambda_1 = -n\left(1 + H^2\right)$ se, e somente se, $|\phi| = 0$, isto é, se, e somente se, Σ^n é uma esfera totalmente umbílica $\mathbb{S}^n(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$, onde $0 < r < 1$. Notemos que, em geral, $\lambda_1 < 0$ contribui para $Ind\,(\Sigma^n)$ mas não para $Ind_T\,(\Sigma^n)$ pois seu autoespaço é gerado por uma função positiva $f \in C^\infty(\Sigma^n)$ a qual não satisfaz $\int_\Sigma f d\Sigma = 0$. Por outro lado, em [16], El Soufi e Ilias mostram que o operador de Jacobi de uma hipersuperfície de curvatura média constante em $\mathbb{S}^{n+1}$ satisfaz

$$\lambda_2 \leq -\frac{1}{Area\,(\Sigma^n)} \int_{\Sigma} |\phi|^2 d\Sigma \leq 0, \tag{3.2}$$

com igualdade se, e somente se, Σ^n é totalmente umbílica.

Barbosa, do Carmo e Eschenburg em [6] caracterizaram as esferas totalmente umbílicas $\mathbb{S}^n(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$, com $0 < r < 1$, como as únicas hipersuperfícies de curvatura média constante em $\mathbb{S}^{n+1}$ fracamente estáveis. Mais precisamente, temos o seguinte teorema.

Teorema 6 (Barbosa, do Carmo e Eschenburg)**.** *Seja Σ^n uma hipersuperfície compacta e orientável imersa na esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura média constante. Então Σ^n é fracamente estável se, e somente se, Σ^n é uma esfera totalmente umbílica $\mathbb{S}^n(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$, onde $0 < r < 1$.*

Demonstração. Se Σ^n é uma esfera totalmente umbílica $\mathbb{S}^n(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$, com $0 < r < 1$, então

$$H^2 + 1 = \frac{1 - r^2}{r^2} + 1 = \frac{1}{r^2}.$$

Daí, o operador de Jacobi é dado por

$$J = \Delta + \frac{n}{r^2}.$$

Assim, os autovalores de J são dados por

$$\lambda_i = \mu_i - \frac{n}{r^2},$$

onde μ_i é o i-ésimo autovalor do Laplaciano de $\mathbb{S}^n$ com a mesma multiplicidade. Em particular,

$$\lambda_1 = -\frac{n}{r^2} < 0$$

com multiplicidade 1, donde as autofunções f de λ_1 satisfazem

$$\Delta f = \Delta f + \frac{n}{r^2} f - \frac{n}{r^2} f = Jf + \lambda_1 f = 0.$$

Então, segue do Teorema de Stokes que as autofunções de λ_1 são constantes. Ademais, se f é uma autofunção correspondendo a um autovalor $\lambda \neq \lambda_1$ temos

$$\int_\Sigma f d\Sigma = \frac{1}{\lambda + \frac{n}{r^2}} \int_\Sigma \Delta f d\Sigma = 0.$$

Logo,

$$\lambda_i^T = \lambda_{i+1} = \mu_{i+1} - \frac{n}{r^2},$$

para $i \geq 1$. Sendo $\mu_2 = \frac{n}{r^2}$ obtemos

$$\lambda_1^T = \lambda_2 = 0.$$

Portanto, Σ^n é fracamente estável.

Reciprocamente, seja Σ^n uma hipersuperfície compacta e orientável com curvatura média constante em $\mathbb{S}^{n+1}$ que é fracamente estável. Desde que H é constante temos

$$\Delta f_v = nHl_v - |A|^2 f_v = -nH\left(Hf_v - l_v\right) - |\phi|^2 f_v.$$

Consideremos a função auxiliar $g_v = Hf_v - l_v$. Então, $ng_v = \Delta l_v$, donde

$$\int_\Sigma g_v d\Sigma = \frac{1}{n} \int_\Sigma \Delta l_v d\Sigma = 0.$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned}
\Delta g_v &= H\Delta f_v - \Delta l_v \\
&= H\left[-nH\left(Hf_v - l_v\right) - |\phi|^2 f_v\right] - ng_v \\
&= -nH^2\left(Hf_v - l_v\right) - H|\phi|^2 f_v - ng_v \\
&= -n\left(1 + H^2\right) g_v - H|\phi|^2 f_v.
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
Jg_v &= \Delta g_v + |\phi|^2 g_v + n\left(1+H^2\right) g_v \\
&= -n\left(1+H^2\right) g_v - H|\phi|^2 f_v + |\phi|^2 g_v + n\left(1+H^2\right) g_v \\
&= -|\phi|^2\left(Hf_v - g_v\right) \\
&= -|\phi|^2\left(Hf_v - Hf_v + l_v\right) \\
&= -|\phi|^2 l_v.
\end{aligned}$$

Então,

$$Q\left(g_v\right) = -\int_\Sigma g_v J g_v d\Sigma = H\int_\Sigma |\phi|^2 f_v l_v d\Sigma - \int_\Sigma |\phi|^2 l_v^2 d\Sigma \geq 0,$$

para todo $v \in \mathbb{R}^{n+2}$, pois Σ^n é fracamente estável. Escolhendo $v = E_i$ como sendo o i-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^{n+2}$ temos

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n+2} Q\left(g_{E_i}\right) = H\int_\Sigma |\phi|^2 \sum_{i=1}^{n+2} f_{E_i} l_{E_i} d\Sigma - \int_\Sigma |\phi|^2 \sum_{i=1}^{n+2} l_{E_i}^2 d\Sigma = -\int_\Sigma |\phi|^2 d\Sigma \leq 0,$$

pois

$$\sum_{i=1}^{n+2} f_{E_i} l_{E_i} = \langle N, \psi\rangle = 0 \quad e \quad \sum_{i=1}^{n+2} l_{E_i}^2 = \langle \psi, \psi\rangle = 1.$$

De fato, podemos escrever $\psi = \sum_{i=1}^{n+2} l_{E_i} E_i$ e $N = \sum_{j=1}^{n+2} f_{E_j} E_j$, donde

$$\langle N, \psi\rangle = \sum_{i,j=1}^{n+2} l_{E_i} f_{E_j} \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n+2} f_{E_i} l_{E_i},$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. Analogamente, obtemos $\sum_{i=1}^{n+2} l_{E_i}^2 = \langle \psi, \psi\rangle$.

Portanto, $|\phi| = 0$ em Σ^n, isto é, Σ^n é totalmente umbílica. $\square$

Supondo que Σ^n é fracamente estável segue da equação (3.2) que

$$0 \leq \lambda_1^T \leq \lambda_2 \leq -\frac{1}{Area\left(\Sigma^n\right)} \int_\Sigma |\phi|^2 d\Sigma \leq 0,$$

donde $|\phi| = 0$ em Σ^n, isto é, Σ^n é totalmente umbílica.

Definição 21. *Considerando as imersões usuais* $\mathbb{S}^k(r) \hookrightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ *e* $\mathbb{S}^{n-k}\left(\sqrt{1-r^2}\right) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n-k+1}$, *onde* $0 < r < 1$, *para cada* $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, *então o produto das imersões*

$$\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}\left(\sqrt{1-r^2}\right) \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$$

é chamado toro de Clifford de curvatura média constante.

O lema a seguir justifica a definição de toro de Clifford de curvatura média constante.

Lema 7. *Seja* Σ^n *um toro de Clifford* $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}\left(\sqrt{1-r^2}\right)$ *de curvatura média constante com* $\sqrt{\frac{k}{n+2}} \leq r \leq \sqrt{\frac{k+2}{n+2}}$. *Então,*

$$Ind_T\left(\Sigma^n\right) = n+2.$$

Demonstração. Desde que as curvaturas principais de $\Sigma^n = \mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}\left(\sqrt{1-r^2}\right)$ são dadas por

$$c_1 = \cdots = c_k = -\frac{\sqrt{1-r^2}}{r},\ c_{k+1} = \cdots = c_n = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}},$$

obtemos

$$\begin{aligned} nH(r) &= \left(-\sum_{i=1}^{k} \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\right) \\ &= \left(-k\frac{\sqrt{1-r^2}}{r} + (n-k)\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\right) \\ &= \frac{-k\left(1-r^2\right) + (n-k)r^2}{r\sqrt{1-r^2}} \\ &= \frac{nr^2-k}{r\sqrt{1-r^2}}. \end{aligned}$$

Para um toro de Clifford temos

$$\begin{aligned} |A|^2 + n &= \sum_{i=1}^{k} \frac{1-r^2}{r^2} + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{r^2}{1-r^2} + n \\ &= k\frac{1-r^2}{r^2} + (n-k)\frac{r^2}{1-r^2} + n \\ &= \frac{k\left(1-r^2\right)}{r^2} + \frac{(n-k)r^2}{1-r^2} + n \\ &= \frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}, \end{aligned}$$

donde o operador de Jacobi de Σ^n é dado por

$$J = \Delta + \frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}.$$

Daí, os autovalores de J são dados por

$$\lambda_i = \mu_i - \left(\frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}\right),$$

onde μ_i é o i-ésimo autovalor de Δ com a mesma multiplicidade. Assim,

$$\lambda_1 = -\left(\frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}\right) < 0$$

com multiplicidade 1, donde as autofunções de λ_1 satisfazem

$$\Delta f = \Delta f + \left(\frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}\right) f - \left(\frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}\right) f = Jf + \lambda_1 f = 0.$$

Então, segue do Teorema de Stokes que as autofunções de λ_1 são constantes. Ademais, se f é uma autofunção correspondendo a um autovalor $\lambda \neq \lambda_1$ temos

$$\int_\Sigma f d\Sigma = \frac{1}{\lambda + \left(\frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}\right)} \int_\Sigma \Delta f d\Sigma = 0.$$

Daí,

$$\lambda_i^T = \lambda_{i+1} = \mu_{i+1} - \left(\frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}\right),$$

para $i \geq 1$. Sendo $\mu_2 = \left(\frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}\right)$ obtemos

$$\lambda_1^T = \lambda_2 = 0.$$

Logo, $Ind_T\left(\Sigma^n\right)$ é o número de autovalores positivos de Δ (contados com a multiplicidade) os quais são estritamente menores que $\left(\frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}\right)$. Então, basta contar quando

$$\alpha_i + \beta_j < \frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2} = \alpha_2 + \beta_2$$

para $i = 1,\ j > 1$, e $j = 1,\ i > 1$, onde α_i e β_j são autovalores do operador Laplaciano de $\mathbb{S}^k\left(r\right)$ e $\mathbb{S}^{n-k}\left(\sqrt{1-r^2}\right)$, respectivamente. Notemos que

$$\alpha_1 + \beta_2 = \frac{n-k}{1-r^2} < \frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}$$

com multiplicidade $n-k+1$ e

$$\alpha_2 + \beta_1 = \frac{k}{r^2} < \frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}$$

com multiplicidade $k+1$. Logo, $Ind_T\left(\Sigma^n\right) \geq n+2$. Ademais, $Ind_T\left(\Sigma^n\right) = n+2$ acontece quando

$$\alpha_1 + \beta_3 = \beta_3 \geq \frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2} \quad e \quad \alpha_3 + \beta_1 = \alpha_3 \geq \frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2},$$

isto é, se, e somente se,

$$\frac{k}{n+2} \leq r^2 \leq \frac{k+2}{n+2}.$$

Particularmente, quando $r^2 = \frac{k}{n}$, temos Σ^n um toro de Clifford mínimo.

$\square$

Considerando o lema 7 temos o seguinte resultado, provado por Alías, Brasil e Perdomo [3].

Teorema 7 (Alías, Brasil e Perdomo). *Seja Σ^n uma hipersuperfície compacta e orientável imersa na esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura média constante. Assuma que Σ^n tem curvatura escalar constante. Então*

1. *$Ind_T(\Sigma^n) = 0$ (e Σ^n é uma esfera totalmente umbílica em $\mathbb{S}^{n+1}$),*

2. *ou $Ind_T(\Sigma^n) \geq n+2$, com igualdade se, e somente se, Σ^n é um toro de Clifford de curvatura média constante $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}\left(\sqrt{1-r^2}\right)$ com $\sqrt{\frac{k}{n+2}} \leq r \leq \sqrt{\frac{k+2}{n+2}}$.*

Demonstração. Sabemos do teorema 6 que $Ind_T(\Sigma^n) = 0$ para uma esfera totalmente umbílica Σ^n e $Ind_T(\Sigma^n) \geq 1$ para o restante das hipersuperfície compactas e orientáveis com curvatura média constante em $\mathbb{S}^{n+1}$. Suponhamos que Σ^n não é totalmente umbílica. Mostraremos que existe um subespaço V de $C_T^\infty(\Sigma^n)$ com $dim V \geq n+2$ em que Q é negativa definida.

Se $H = 0$ tomamos $V = \left\{ f_v \ : \ v \in \mathbb{R}^{n+2} \right\}$. De fato,

$$J(f_v) - nf_v = 0,$$

e

$$\int_\Sigma f_v d\Sigma = \frac{1}{|A|} \int_\Sigma \Delta f_v d\Sigma = 0,$$

pois $|A|$ é uma constante positiva (equação (2.5)). Além disso, quando Σ^n é mínima e não é totalmente umbílica obtemos $dim\ V = n+2$ (3).

Para o caso $H \neq 0$ tomamos $V = U_- \oplus U_+$, onde

$$U_- = \left\{ l_v - \alpha_- f_v : \ \ v \in \mathbb{R}^{n+2} \right\} \ \ e \ \ U_+ = \left\{ l_v - \alpha_+ f_v : \ \ v \in \mathbb{R}^{n+2} \right\},$$

e α_- e α_+ são as raízes distintas do equação quadrática

$$nH\alpha^2 + \left(n - |A|^2\right)\alpha - nH = 0,$$

isto é,

$$\alpha_- = \frac{|A|^2 - n - \sqrt{D}}{2n} H \ \ e \ \ \alpha_+ = \frac{|A|^2 - n + \sqrt{D}}{2n} H,$$

onde $D = \left(n - |A|^2\right)^2 + 4n^2H^2 > 0$. Então, para $f = l_v - \alpha_+ f_v$, temos

$$\begin{aligned}
Jf &= \Delta f + |A|^2 f + nf \\
&= \Delta\left(l_v - \alpha_+ f_v\right) + |A|^2\left(l_v - \alpha_+ f_v\right) + n\left(l_v - \alpha_+ f_v\right) \\
&= \Delta l_v - \alpha_+ \Delta f_v + |A|^2\left(l_v - \alpha_+ f_v\right) + n\left(l_v - \alpha_+ f_v\right) \\
&= -nl_v + nHf_v - \alpha_+\left(nHl_v - |A|^2 f_v\right) + |A|^2\left(l_v - \alpha_+ f_v\right) + n\left(l_v - \alpha_+ f_v\right) \\
&= -nl_v + nHf_v + nl_v + |A|^2 l_v + \alpha_+\left(-nHl_v + |A|^2 f_v - |A|^2 f_v - nf_v\right) \\
&= nHf_v + |A|^2 l_v + \alpha_+\left(-nHl_v - nf_v\right)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\lambda_+ f &= \left(nH\alpha_+ - |A|^2\right)\left(l_v - \alpha_+ f_v\right) \\
&= \alpha_+ nHl_v - \alpha_+^2 nHf_v - |A|^2 l_v + \alpha_+ |A|^2 f_v \\
&= \alpha_+ nHl_v + \left(n - |A|^2\right)\alpha_+ f_v - nHf_v - |A|^2 l_v + \alpha_+ |A|^2 f_v \\
&= -nHf_v - |A|^2 l_v - \alpha_+\left(-nHl_v - nf_v\right),
\end{aligned}$$

onde $\lambda_+ = \frac{-\left(n+|A|^2\right)+\sqrt{D}}{2}$. Daí,

$$Jf + \lambda_+ f = 0.$$

Analogamente, se $f = l_v - \alpha_- f_v$, obtemos

$$Jf + \lambda_- f = 0,$$

onde $\lambda_- = \frac{-\left(n+|A|^2\right)-\sqrt{D}}{2} < 0$. Ademais, somando as equações

$$\frac{1}{nH}\Delta f_v = l_v - \frac{|A|^2}{nH} f_v$$

e

$$\frac{1}{n}\Delta l_v = -l_v + Hf_v$$

obtemos

$$\int_\Sigma f d\Sigma = \frac{nH}{nH^2 - |A|^2}\left(\frac{1}{nH}\int_\Sigma \Delta f_v d\Sigma + \frac{1}{n}\int_\Sigma \Delta l_v d\Sigma\right) = 0.$$

Logo,

$$Ind_T\left(\Sigma^n\right) \geq dim\ V = dim\ U_- + dim\ U_+,$$

pois U_- e U_+ estão em autoespaços do Laplaciano associados a autovalores diferentes.

Para obtermos estimativas das dimensões de U_- e U_+ usaremos as aplicações lineares $\varphi_- : \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow U_-$ e $\varphi_+ : \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow U_+$ dadas por

$$\varphi_- (v) = l_v - \alpha_- f_v \quad e \quad \varphi_+ (v) = l_v - \alpha_+ f_v.$$

Pelo teorema do núcleo e da imagem temos

$$dim\ U_- = n + 2 - dim\ ker\varphi_- \quad e \quad dim\ U_+ = n + 2 - dim\ ker\varphi_+.$$

Notemos que $ker\varphi_- \cap ker\varphi_+ = 0$. De fato, se existe um vetor unitário $v \in ker\varphi_- \cap ker\varphi_+$, então

$$l_v - \alpha_- f_v = 0 = l_v - \alpha_+ f_v,$$

donde

$$\alpha_+ (l_v - \alpha_- f_v) = 0 = \alpha_- (l_v - \alpha_+ f_v),$$

isto é,

$$(\alpha_+ - \alpha_-)\, l_v = 0.$$

Então $l_v = 0$, isto é, Σ^n é um equador totalmente geodésico de $\mathbb{S}^{n+1}$, o que é um absurdo. Logo,

$$dim\ ker\varphi_- + dim\ ker\varphi_+ \leq n + 2,$$

donde

$$Ind_T (\Sigma^n) \geq 2 (n + 2) - (dim\ ker\varphi_- + dim\ ker\varphi_+) \geq n + 2.$$

Suponhamos que $Ind_T (\Sigma^n) = n + 2$. Então, $dim\,(ker\varphi_- \oplus ker\varphi_+) = n + 2$, ou seja,

$$\mathbb{R}^{n+2} = ker\varphi_- \oplus ker\varphi_+.$$

Assim, para $p \in \Sigma^n$ temos

$$T_p\Sigma = T_p\Sigma \cap \mathbb{R}^{n+2} = T_p\Sigma^- \oplus T_p\Sigma^+,$$

$T_p\Sigma^- = T_p\Sigma \cap ker\varphi_-$ e $T_p\Sigma^+ = T_p\Sigma \cap ker\varphi_+$. Assumamos que $T_p\Sigma^- \neq \{0\}$ e tomamos $v \in T_p\Sigma^- - \{0\}$. Daí,

$$l_v - \alpha_- f_v = 0,$$

donde $\alpha_- \neq 0$, pois $l_v = 0$ implica que Σ^n é um equador totalmente geodésico de $\mathbb{S}^{n+1}$, com $Ind_T (\Sigma^n) = n + 2$, o que é uma contradição. Ademais,

$$\nabla (l_v - \alpha_- f_v) = v^T + \alpha_- A \left(v^T\right) = 0.$$

Desde que $v^T(p) = v$ temos

$$A_p(v) = -\frac{1}{\alpha_-}v.$$

Concluímos que se $T_p\Sigma^- \neq \{0\}$, então $T_p\Sigma^-$ é um subespaço de $T_p\Sigma$ de direções principais com curvatura principal constante $-\frac{1}{\alpha_-}$. Analogamente, se $T_p\Sigma^+ \neq \{0\}$, então $T_p\Sigma^+$ é um subespaço de $T_p\Sigma$ de direções principais com curvatura principal constante $-\frac{1}{\alpha_+}$.

Se para algum $p \in \Sigma^n$ tivermos $T_p\Sigma^- = 0$ ou $T_p\Sigma^+ = 0$ temos

$$T_p\Sigma^+ = T_p\Sigma \quad ou \quad T_p\Sigma^- = T_p\Sigma,$$

respectivamente. Então, p é um ponto umbílico, donde Σ^n é umbílica, pois a função $|\phi|^2$ é constante (Σ^n tem curvatura escalar constante), uma contradição, desde que $Ind_T(\Sigma^n) = n + 2$. Logo, Σ^n tem duas curvaturas principais $-\frac{1}{\alpha_-}$ e $-\frac{1}{\alpha_+}$ em todo ponto. Segue do resultado de Cartan já mencionado que Σ^n é um toro de Clifford de curvatura média constante $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}\left(\sqrt{1-r^2}\right)$. Portanto, usando o lema 7 o resultado está provado.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] ALÍAS, L. J. On the stability index of minimal and constant mean curvature hypersurfaces in spheres. **Union Mat. Arg.**, v. 47, p. 39-61, 2006.

[2] ALÍAS, L. J.; BARROS, A.; BRASIL Jr., A. A spectral characterization of the $H(r)$-torus by the first stability eigenvalue. **Proc. Amer. Math. Soc.**, v. 133, p. 875-884, 2005.

[3] ALÍAS, L. J.; BRASIL Jr., A.; PERDOMO, O. On the stability index of hypersurfaces with constant mean curvature in spheres. **Proc. Amer. Math. Soc.**, v. 135, p. 3685-3693, 2007.

[4] BARBOSA, J. L.; BÉRARD, P. Eigenvalue and "twisted "eigenvalue problems. Applications to CMC surfaces, **J. Math. Pures Appl.**, v. 79, n. 9, p. 427-450, 2000.

[5] BARBOSA, J. L.; CARMO, M. Stability of hypersurfaces with constant mean curvature. **Math. Z.**, v. 185, p. 339-353, 1984.

[6] BARBOSA, J. L.; CARMO, M.; ESCHEBURG, J. Stability of hypersurfaces with constant mean curvature in Riemannian manifolds. **Math. Z.**, v. 197, p. 123-138, 1988.

[7] BARROS, A.; BRASIL Jr., A.; SOUSA Jr., L. A. M. A new characterization of submanifolds with parallel mean curvature vector in $\mathbb{S}^{n+p}$. **Kodai Math. J.**, v. 27, p. 45-56, 2004.

[8] BERGER, M.; GAUDUCHON, P.; MAZET, E. **Le spectre d´une variété Riemannienne.** Berlin-New York: Springer-Verlag, 1971. 251 p. (Lecture notes in mathematics; v. 194)

[9] CARTAN, E. Families de surface isoparamétriques dans les espaces à coubure constante. **Annali di Mat.**, v. 17, p. 177-191, 1938.

[10] CHERN, S. S.; CARMO, M.; KOBAYASHI, S. Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constante length. In: **Functional Analysis and Related Fields**, New York: Springer, 1970. p. 59-75.

[11] CARMO, M.P. **Geometria Riemanniana.** 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005, 332p. (Projeto Euclides)

[12] OBATA, M. Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere. **J. Math. Soc. Japan**, v. 14 (1962), p. 333-340, 1962.

[13] LAWSON, B. Lectures on minimal submanifolds. Berkeley: Publish or Perish, 1973. 178 p.

[14] LAWSON, B. Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces. **Ann. of Math.**, v. 89 (2), p. 187-197, 1969.

[15] El SOUFI. Applications harmoniques, immersions minimales et transformations conformes de la sphere. **Compositio Math.**, v. 85, p. 281-298, 1993.

[16] El SOUFI, A.; ILIAS, S. Second eingenvalue of schrodinger operators and mean curvature. **Comm. Math. Phys.**, v. 208., p. 761-770, 2000.

[17] PERDOMO, O. Low index minimal hypersurfaces of spheres. **Asian J. Math.**, v. 5, p. 741-749, 2001.

[18] PERDOMO, O. First stability eigenvalue characterization of clifford hypersurfafces. **Proc. Amer. Math. Soc.**, v. 130, p. 3379-3384, 2002.

[19] SIMONS, J. Minimal varieties in Riemannian manifolds. **Ann. of Math.**, v. 88, n. 2, p. 62-105, 1968.

[20] URBANO, F. Minimal surfaces with low index in the three-dimensional sphere. **Proc. Amer. Math. Soc.**, v. 108, p. 989-992, 1990.