UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
MESTRADO EM MATEMÁTICA

HALYSON IRENE BALTAZAR

SOBRE A APLICAÇÃO DE GAUSS PARA HIPERSUPERFÍCIES COM CURVATURA DE ORDEM SUPERIOR CONSTANTE EM ESFERAS

FORTALEZA-CE

2009

HALYSON IRENE BALTAZAR

SOBRE A APLICAÇÃO DE GAUSS PARA HIPERSUPERFÍCIES COM CURVATURA DE ORDEM SUPERIOR CONSTANTE EM ESFERAS

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial

Orientador: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros

FORTALEZA-CE
2009

B158s Baltazar, Halyson Irene

Sobre a Aplicação de Gauss para Hipersuperfícies com Curvatura de Ordem Superior Constante em Esferas / Halyson Irene Baltazar. 2009.

54 f.

Orientador: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros

Área de concentração: Geometria Diferencial

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Departamento de Matemática, Fortaleza, 2009

1. Geometria Diferencial I. Barros, Abdênago Alves de (Orientador) II. Universidade Federal do Ceará - Curso de Mestrado em Matemática III.Título

CDD 516.36

A minha mãe Lúcia Maria, meu pai Luiz Vitor e minha irmã Pollyana.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por ter concedido força para vencer esse desafio.

Aos meus pais, Luiz Vitor Borges Baltazar e Lúcia Maria Irene Baltazar por estarem sempre ao meu lado, incentivando, passando valores e princípios que hoje levo em minha vida e acima de tudo por levantarem sempre minha auto estima, a minha irmã, Pollyana pela confiança e amizade fiel em todos os momentos.

Aos professores da Univeridade Federal do Piauí, pela minha formação e oportunidade que me proporcionaram em concorrer ao mestrado e acreditarem no meu sucesso. Agradeço em especial aos professores João Xavier, Jurandir e Cícero, os quais tiveram papel fundamental no inicio do curso de verão.

Com muita satisfação dedico meus sinceros agradecimentos ao professor Abdênago Barros pelas suas orientações.

Aos professores Gervasio Colares e Juscelino Silva por aceitarem o convite de participar da minha banca de defesa.

A meus grandes amigos de apartamento Manoel Vieira e Ernani Ribeiro, pelos momentos de conversas, descontrações e experiências adquiridas nesses 2 anos. Agradeço pelas amizades formadas no decorrer do mestrados: Kelton, Aurineide, Adam, Rondinelle, Wilson, Ednardo, João, Tadeu, Tiago, Edvan, Leon, Filipe, Deibson... dentre outros.

Meus colegas e amigos do mestrado e doutorado: Edno, Luís Antônio, Raimundo, Michel, Jobson, Flávio, Jonathan, Nazareno e Walber.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

“Não se preocupe com as suas dificuldades em matemática. Eu posso garantir a você que as minhas são maiores.”

Albert Einstein

Resumo

Nesse trabalho iremos considerar uma hipersuperfície conexa, completa e orientável da esfera unitária euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura de ordem superior constante positiva. Provaremos sob certas condições geométricas, que caso a imagem da Aplicação de Gauss de M estiver contida em um hemisfério fechado, então M é uma hipersuperfície totalmente umbílica de $\mathbb{S}^{n+1}$.

Palavras-chave: Curvatura de ordem superior. Aplicação de Gauss. Totalmente umbílica.

Abstract

In this work we will consider connected, complete and orientable hypersurface of the unit euclidean sphere $\mathbb{S}^{n+1}$ with constant positive high order curvature. We will prove that under certain geometric conditions, if the image of the Gauss mapping of M is contained in a closed hemisphere, then M is a totally umbilic hypersurface of $\mathbb{S}^{n+1}$.

Keywords: High order curvature. Gauss mapping. Totally umbilic.

Conteúdo

Introdução

Considere M^n uma variedade riemanniana de dimensão n, compacta, orientada e seja $\psi : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma imersão isométrica sobre a esfera $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$. Desde que M é orientável, podemos escolher um campo normal unitário global N. Denotaremos as conexões riemannianas ∇ e $\overline{\nabla}$ de M e $\mathbb{S}^{n+1}$, respectivamente, e que estão relacionadas por

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle A(X), Y\rangle N,$$

onde A é o operador relacionado com a segunda forma da imersão, definido por

$$\overline{\nabla}_X N = -A(X).$$

Sejam $k_1, \ldots, k_n$ os autovalores de A. Nós definimos a r-ésima curvatura média de uma imersão em um ponto p da seguinte forma:

$$H_r = \frac{1}{\binom{n}{r}} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n} k_{i_1} \ldots k_{i_r} = \frac{1}{\binom{n}{r}} S_r,$$

onde S_r é a r-ésima função simétrica associada ao operador A. No sentido de unificar a notação, definimos $H_0 = 1$ e $H_r = 0$, para todo $r \geq n+1$. Para $r = 1$, $H_1 = H$ é a curvatura média da imersão e no caso $r = n$, H_n é a curvatura de Gauss-Kronecker.

A aplicação de Gauss $\phi : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ é definida por

$$\phi(p) = N(p) \in \mathbb{S}^{n+1}.$$

O conjunto $\phi(M)$ é chamado de imagem de Gauss de M.

Então de posse dessas considerações podemos enunciar o objetivo principal dessa dissertação que é estendermos para r-ésima curvatura média constante o seguinte teorema provado por K. Nomizu e B. Smyth [NS].

Teorema 0.1 (Nomizu-Smyth) *Seja M uma variedade compacta, conexa e orientável de dimensão $n \geq 2$ imersa na esfera $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura média constante. Se a imagem de Gauss de M estiver contida num hemisfério fechado de $\mathbb{S}^{n+1}$, então M é uma hiperesfera em $\mathbb{S}^{n+1}$.*

Os resultados desse trabalho foram obtidos por H. Alencar, H. Rosenberg e W. Santos [ARS] no qual os autores estenderam o resultado anterior para $2 \leq r \leq n-1$. Vamos tratar apenas o caso onde $H_{r+1} > 0$ conforme o seguinte teorema:

Teorema 0.2 *Seja $M^n \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta e conexa de $\mathbb{S}^{n+1}$ com $(r+1)$-ésima curvatura média H_{r+1} constante positiva para algum $r = 0, \ldots, n-2$. Suponha que a imagem de Gauss de M esteja contida num hemisfério fechado, $H_r \geq 0$ e a seguinte desigualdade vale:*

$$H_1 H_r \geq H_{r+1}.$$

Então M é totalmente umbílica.

No caso $r = 2$, parte da hipótese do teorema acima é trivialmente satisfeita, e obtemos o seguinte resultado.

Teorema 0.3 *Seja $M^n \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta e orientável de $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura escalar constante $H_2 > 0$. Se a imagem da aplicação de Gauss de M estiver sobre um hemisfério fechado de $\mathbb{S}^{n+1}$, então M é totalmente umbílica.*

Capítulo 1

Preliminares

Nos capítulos 1 e 2 iremos estabelecer a notação a ser usada na dissertação e lembrar de alguns conceitos e fatos básicos, necessário ao desenvolvimento dos capítulos seguintes. Sendo assim a prova de alguns resultados não será feita, mas em todo o texto ficará clara a referência para obter tais justificativas.

Para este trabalho iremos considerar M^n uma variedade riemanniana de dimensão n e classe C^∞, $D(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M, ∇ e $\langle , \rangle$ representará sua conexão e métrica riemanniana. Se $p \in M$ então T_pM denotará o espaço tangente a M em p e TM o fibrado tangente a M.

1.1 Curvatura

Definição 1.1 *A curvatura R em uma variedade riemanniana M^n é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in TM$ uma aplicação $R(X,Y) : TM \to TM$ dada por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \quad \forall \ Z \in TM.$$

Proposição 1.1 *A curvatura satisfaz as seguintes propriedades, $\forall \ X, Y, Z, T \in TM$:*

a) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle + \langle R(Y,Z)X, T\rangle + \langle R(Z,X)Y, T\rangle = 0$;

b) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = -\langle R(Y,X)Z, T\rangle$;

c) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = -\langle R(X,Y)T, Z\rangle$;

d) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = \langle R(Z,T)X, Y\rangle$.

Definição 1.2 *Seja $\sigma \subset T_pM$ um subespaço bidimensional do espaço tangente T_pM e sejam $x, y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então*

$$K(x,y) = \frac{\langle R(x,y)x, y\rangle}{|x \wedge y|^2},$$

onde $|x \wedge y|^2 = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle^2$. K é denominado a curvatura seccional de M em p segundo σ.

Consideremos agora $x \in T_pM$ um vetor unitário e uma base ortonormal $\{z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n = x\}$ de T_pM.

Definição 1.3 *A curvatura de Ricci de M na direção de x em p é definida por*

$$Ric(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\langle R(x, z_i)x, z_i\rangle.$$

Definição 1.4 *A curvatura escalar de M em p é definida como*

$$R(p) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Ric_p(z_i).$$

1.2 Gradiente, Divergente e Laplaciano

Definição 1.5 *Seja $f \in D(M)$. O gradiente de f é o campo de vetores em M, definido pela seguinte condição:*

$$\langle grad(f), X\rangle = X(f), \quad \forall \ X \in TM.$$

Decorre da definição que se $f, g \in D(M)$ então:

1. $grad(f + g) = grad(f) + grad(g)$;
2. $grad(fg) = ggrad(f) + fgrad(g)$.

Definição 1.6 *Seja $X \in TM$. A divergência de X é a função $divX : M \to \mathbb{R}$, definida por*

$$divX(p) = tr[Y(p) \mapsto (\nabla_Y X)(p)],$$

onde tr significa o traço da aplicação.

As propriedades abaixo decorrem diretamente da definição.

1. $div(X+Y) = divX + divY$;

2. $div(fX) = fdivX + \langle grad(f), X\rangle$,

para quaisquer $X, Y \in TM$ e qualquer $f \in D(M)$.

Teorema 1.1 *Seja M uma variedade riemanniana compacta com bordo e $X \in C^1(M)$. Então*

$$\int_M divX dM = \int_{\partial M} \langle X, \nu\rangle dS,$$

onde ν é o campo unitário normal a ∂M apontando para fora de M.

Definição 1.7 *Seja $f \in D(M)$. O Laplaciano de f é o operador $\Delta : D(M) \to D(M)$ definido por*

$$\Delta f = div(grad(f)).$$

Usando as propriedades do gradiente e divergente, temos :

1. $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$;

2. $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle grad(f), grad(g)\rangle$,

para quaisquer $f, g \in D(M)$.

Observação 1.1 (Referencial móvel) *Seja M^n uma variedade riemanniana de dimensão n, e $p \in M$. Então existe uma vizinhança $U \subset M$ de p e n campos de vetores linearmente independentes $E_1, \ldots, E_n \in TM$ tais que, $\langle E_i, E_j\rangle = \delta_{ij}\ \ \forall\ \ ij \in 1, \ldots, n$.*

Proposição 1.2 *Se $\{E_1, \ldots, E_n\}$ é um referencial ortonormal local em M, então*

$$grad(f) = \sum_{i=1}^{n} E_i(f)E_i.$$

Demonstração: Escrevendo

$$grad(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i E_i,$$

temos que

$$E_j(f) = \langle grad(f), E_j\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} a_i E_i, E_j\rangle = a_j.$$

Logo,

$$grad(f) = \sum_{i=1}^{n} E_i(f) E_i. \tag{1.1}$$

Proposição 1.3 *Se* $X = \sum_{i=1}^{n} X_i E_i$*, onde* $\{E_1, \ldots, E_n\}$ *é um referencial local em* M*, então*

$$divX = \sum_{i=1}^{n}(E_i(X_i) - \langle \nabla_{E_i} E_i, X\rangle).$$

Demonstração: Inicialmente temos que

$$\begin{aligned} divX &= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{E_i} X, E_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{E_i}(\sum_{j=1}^{n} X_j E_j), E_i\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n}\langle E_i(X_j)E_j, E_i\rangle + \langle X_j \nabla_{E_i} E_j, E_i\rangle. \end{aligned}$$

Como $\langle E_i, E_j\rangle = \delta_{ij}$, tem-se que
$0 = E_i\langle E_i, E_j\rangle = \langle \nabla_{E_i} E_i, E_j\rangle + \langle E_i, \nabla_{E_i} E_j\rangle$, ou seja, $\langle \nabla_{E_i} E_j, E_i\rangle = -\langle \nabla_{E_i} E_i, E_j\rangle$.
Daí,

$$\begin{aligned} divX &= \sum_{i=1}^{n} E_i(X_i) - \sum_{i,j=1}^{n} X_j\langle \nabla_{E_i} E_i, E_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} E_i(X_i) - \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{E_i} E_i, X\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}(E_i(X_i) - \langle \nabla_{E_i} E_i, X\rangle). \end{aligned}$$

Definição 1.8 *Seja $f \in D(M)$.Definimos hessiano de f em $p \in M$ como o operador linear $Hessf : T_pM \to T_pM$, dado por*

$$(Hessf)Y = \nabla_Y grad(f), \quad \forall \ Y \in TM.$$

Podemos considerar $Hessf$ como um tensor tal que para cada par de campos $X, Y \in TM$, temos:

$$(Hessf)(X, Y) = \langle (Hessf)(X), Y \rangle.$$

Capítulo 2

Imersões Isométricas

2.1 A segunda forma fundamental

Seja $(\overline{M}^{n+m}, \langle\, ,\, \rangle, \overline{\nabla}, \overline{R})$ uma variedade riemanniana com métrica $\langle\, ,\, \rangle$, conexão riemanniana $\overline{\nabla}$ e operador curvatura $\overline{R}$. Seja M^n uma variedade diferenciável n-dimensional e $x : M \rightarrow \overline{M}$ uma imersão, ou seja, dado $p \in M$ temos que a derivada $dx_p : T_pM \rightarrow T_{x(p)}\overline{M}$ é injetora. Nestas condições, podemos munir M de uma métrica riemanniana através da definição

$$\langle u, v\rangle_p = \langle dx_p(u), dx_p(v)\rangle_{x(p)}, \qquad p \in M, \quad u, v \in T_pM.$$

Dizemos então que M tem a métrica induzida pela variedade riemanniana $\overline{M}$, e portanto $x(M)$ é chamada uma subvariedade riemanniana imersa de $\overline{M}$. A aplicação x é dita então uma imersão isométrica.

Dado $p \in M$, existe um aberto $U \subset M$ contendo p tal que $x(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade mergulhada de $\overline{M}$. É possível mostrar que existe um difeomorfismo entre abertos, digamos $\Lambda : \overline{U} \subset \overline{M} \rightarrow V \subset \mathbb{R}^{n+m}$, tal que $x(p) \in \overline{U}$ e tal que Λ aplica difeomorficamente $x(U) \cap \overline{U}$ em um aberto do subespaço $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$, com $0 \in \mathbb{R}^m$.

Identificamos então U com $x(U)$ e cada vetor $v \in T_qM$, onde $q \in U$, com o vetor $dx_q(v) \in T_q\overline{M}$. Além disso, usando o difeomorfismo Λ podemos estender localmente campos de vetores X, Y de M definidos em $x(U) \cap \overline{U}$, a campos de vetores $\overline{X}, \overline{Y}$ definidos em $\overline{U}$. Assim, podemos considerar o espaço tangente a M em p como um subespaço do espaço tangente a $\overline{M}$ em p e escrevemos

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus T_p^{\perp}M,$$

onde $T_p^\perp M$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Desta decomposição obtemos um fibrado vetorial, $T^\perp M = \bigcup_{p\in M} T_p^\perp M$, chamado o *fibrado normal* a M.

Dessa forma, podemos escrever $v \in T_p\overline{M}$ da seguinte maneira:

$$v = v^\top + v^\perp, \ \ \textit{onde}\ v^\top \in T_pM,\ v^\perp \in T_p^\perp M.$$

Se X e Y são campos locais de vetores em M e $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ são extensões locais a $\overline{M}$, definimos

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^\top.$$

É possível provar que ∇ é a conexão riemanniana relativa à métrica induzida de M por x. Dessa forma, obtemos a *Fórmula de Gauss*:

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y),$$

onde a aplicação $h : TM \times TM \to T^\perp M$ é denominada a *segunda forma fundamental de x*. Pelas propriedades das conexões de Levi-Civita ∇ e $\overline{\nabla}$, temos que h é bilinear e simétrica.

Lema 2.1 *Dado $\eta \in T_p^\perp M$, existe uma aplicação auto-adjunta $A_\eta : T_pM \to T_pM$, chamada aplicação de Weingarten na direção η, tal que*

$$\langle A_\eta X, Y\rangle = \langle h(X,Y), \eta\rangle$$

para todos $X, Y \in T_pM$.

Demonstração: Defina $A_\eta(X) = -(\overline{\nabla}_X\eta)^\top$. Denotando também por X e Y extensões locais em M de $X, Y \in T_pM$, segue de $\langle Y, \eta\rangle = 0$, que

$$0 = X\langle Y,\eta\rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y, \eta\rangle + \langle Y, \overline{\nabla}_X \eta\rangle = \langle h(X,Y),\eta\rangle - \langle Y, A_\eta X\rangle.$$

Logo, $\langle A_\eta X, Y\rangle = \langle h(X,Y),\eta\rangle$. A_η é auto-adjunta devido às simetrias de h e da métrica.

A partir da definição de A_η, obtemos a Fórmula de Weingarten

$$\overline{\nabla}_X\eta = -A_\eta X + \nabla_X^\perp \eta,$$

onde $\nabla_X^\perp\eta = (\overline{\nabla}_X\eta)^\perp$.

Sejam R e $\overline{R}$ os tensores curvatura de M e $\overline{M}$, respectivamente, definidos por

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z,$$

$$\overline{R}(X,Y)Z = \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z + \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z.$$

Analogamente, temos o tensor curvatura do fibrado normal $T^{\perp}M$ de M definido por

$$R^{\perp}(X,Y)\xi = \nabla^{\perp}_Y \nabla^{\perp}_X \xi - \nabla^{\perp}_X \nabla^{\perp}_Y \xi + \nabla^{\perp}_{[X,Y]} \xi,$$

com $X, Y \in TM$ e $\xi \in T^{\perp}M$.

Agora, usando as fórmulas de Gauss e de Weingarten, podemos obter as equações básicas para uma imersão isométrica, que são *as equações de Gauss, Codazzi e Ricci* dadas, respectivamente, por

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z, T\rangle = \langle R(X,Y)Z, T\rangle - \langle h(Y,T), h(X,Z)\rangle + \langle h(X,T), h(Y,Z)\rangle,$$

$$\langle \overline{R}(X,Y)Z, \eta\rangle = (\overline{\nabla}_Y h)(X,Z,\eta) - (\overline{\nabla}_X h)(Y,Z,\eta),$$

$$\langle \overline{R}(X,Y)\xi, \eta\rangle = \langle R^{\perp}(X,Y)\xi, \eta\rangle + \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y\rangle,$$

onde $X, Y, Z, T \in TM$, $\xi, \eta \in T^{\perp}M$ e $[A_\xi, A_\eta] = A_\xi A_\eta - A_\eta A_\xi$. A prova deste fato pode ser encontrada em ([dCM]).

Para uma imersão isométrica $x : M^m \to N^{n+m}(c)$, o tensor curvatura $\overline{R}$ de N é dado por $\overline{R}(X,Y) = c(X \wedge Y)$, onde

$$(X \wedge Y)Z = \langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y,$$

para $X, Y, Z \in TN$. Nesse caso, para $X, Y, Z, W \in TM$ e $\xi, \eta \in T^{\perp}M$, as equações de Gauss, Codazzi e Ricci são respectivamente

$$\langle R(X,Y)Z, W\rangle = c\langle (X \wedge Y)Z, W)\rangle + \langle h(X,Z), h(Y,W)\rangle - \langle h(X,W), h(Y,Z)\rangle$$

$$(\nabla_Y A_\xi)(X) = (\nabla_X A_\xi)(Y)$$

$$\langle R^{\perp}(X,Y)\xi, \eta\rangle = \langle [A_\eta, A_\xi]X, Y\rangle.$$

2.2 O r-ésimo Tensor de Newton

Nessa secção iremos definir o r-ésimo polinômio simétrico elementar do operador linear A, associado à segunda forma fundamental.

Definição 2.1 *Seja $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica entre duas variedades riemannianas e seja A o operador linear associado à sua segunda forma fundamental. O r-ésimo polinômio simétrico associado a A, $S_r(A) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é definido como*

$$S_r(A) = \begin{cases} 1, & se\ r{=}0 \\ \displaystyle\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq n} k_{i_1} \ldots k_{i_n}, & se\ r \leq n \\ 0, & se\ r > n, \end{cases}$$

onde $k_1, \ldots, k_n$ são os auto-valores do operador auto-adjunto A.

Definição 2.2 *Nas condições da definição anterior definimos $w_r(A) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por*

$$w_r(A)(k_1, \ldots, k_n) = \sum_{i=1}^{n} (k_i)^r$$

como a r-ésima soma de potência dos auto-valores de A.

Agora introduziremos o r-ésimo Tensor de Newton $P_r(A) : T_pM \to T_pM$, para cada $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, como sendo:

$$\begin{aligned} P_0(A) &= I \\ P_1(A) &= S_1 I - A \\ &\vdots \\ P_r(A) &= S_r I - A P_{r-1}(A)\ , \end{aligned}$$

onde I é a identidade. Mais geralmente,

$$P_r(A) := \begin{cases} I, & \text{se } r = 0 \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{r} (-1)^j S_{r-j}(A) A^j, & \text{se } r \in \{1, 2, \ldots, n-1\} \\ 0, & \text{se } r \geq n, \end{cases}$$

onde 0 denota a transformação linear identicamente nula.

Observação 2.1 *Por simplicidade, de agora em diante, escreveremos apenas P_r e S_r para denotarmos, respectivamente, o r-ésimo tensor de Newton e o r-ésimo polinômio simétrico elementar associado à segunda forma fundamental de uma imersão $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$.*

Proposição 2.1 *Seja $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica entre duas variedades riemannianas e seja A o operador linear associado à sua segunda forma fundamental. O r-ésimo tensor de Newton associado a A satisfaz:*

(1) $tr(P_r) = (n-r)S_r$;

(2) $tr(AP_r) = (r+1)S_{r+1}$;

(3) $tr(A^2P_r) = S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}$.

Demonstração: Mostremos inicialmente que $P_r(E_i) = S_r(A_i)E_i$, onde $\{E_i\}_{i=1}^n$ é uma base que diagonaliza A e $S_r(A_i)$ é o r-ésimo polinômio simétrico associado a A_i, isto é,

$$S_r(A_i) := \begin{cases} 1, & \text{se } r = 0 \\ S_r(k_1, \ldots, \widehat{k_i}, \ldots, k_n), & \text{se } r \in \{1, 2, \ldots, n-1\} \\ 0, & \text{se } r \geq n, \end{cases}$$

onde $\widehat{k_i}$ indica que a função k_i foi omitida.

A prova é feita por indução sobre r. Para $r = 1$, temos: $P_1 = S_1 I - A$. Portanto,

$$\begin{aligned} P_1(E_i) &= S_1E_i - AE_i \\ &= (S_1 - k_i)E_i \\ &= S_1(A_i)E_i. \end{aligned}$$

Suponhamos verdadeiro para $r-1$. Então

$$\begin{aligned} P_r(E_i) &= S_rE_i - AP_{r-1}(E_i) \\ &= S_rE_i - A(S_{r-1}(A_i)E_i) \\ &= (S_r - S_{r-1}(A_i)k_i)E_i \\ &= S_r(A_i)E_i. \end{aligned}$$

Assim pela definição de traço de P_r e pelo que vimos acima, teremos

$$\begin{aligned}
tr(P_r) &= \sum_{i=1}^{n} \langle P_r(E_i), E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle S_r(A_i)E_i, E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} S_r(A_i) \\
&= (n-r) \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n} k_{i_1} \ldots k_{i_r} \\
&= (n-r)S_r,
\end{aligned}$$

o que prova o item (1).

Para o item (2) devemos observar a seguinte igualdade,

$$AP_r = S_{r+1}I - P_{r+1}. \tag{2.1}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
tr(AP_r) &= tr(S_{r+1}I) - tr(P_{r+1}) \\
&= nS_{r+1} - (n-r-1)S_{r+1} \\
&= (r+1)S_{r+1}.
\end{aligned}$$

Aplicando A a ambos os membros de (2.1), obtemos

$$A^2P_r = S_{r+1}A - AP_{r+1}.$$

Então

$$\begin{aligned}
tr(A^2P_r) &= tr[S_{r+1}A - AP_{r+1}] \\
&= S_{r+1}tr(A) - tr(AP_{r+1}) \\
&= S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}.
\end{aligned}$$

2.3 O operador L_r

O operador L_r definido em função do Tensor de Newton P_r aparece, naturalmente, no estudo da estabilidade de hipersuperfícies com S_{r+1} constante. Tal operador é elíptico, se P_r for positivo definido. Passemos então ao conceito de L_r.

Definição 2.3 *Dada uma função diferenciável $f : M^n \to \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{N}$, com $0 \leq r \leq n-1$, definimos o operador diferencial de segunda ordem L_r em M^n por:*

$$L_r(f)(p) = tr[(P_r Hess f)(p)].$$

Observe que para $r = 0$, L_0 é o Laplaciano, o qual é sempre um operador elíptico. Se $\overline{M}^{n+1}$ tem curvatura seccional constante usando as equações de Codazzi mostraremos que L_r pode ser escrito na forma divergente, mais precisamente

$$L_r(f) = div_M(P_r grad(f)).$$

Considere, agora, um referencial ortonormal $\{E_1, \ldots, E_n\}$ que diagonaliza o operador linear A associado à segunda forma fundamental da imersão $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$, num ponto $p \in M$. De posse dessas considerações, provaremos o seguinte resultado:

Teorema 2.1 *Sejam $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica entre as variedades riemannianas M^n e $\overline{M}^{n+1}$ e ξ um campo normal a M. Então para cada $r \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ e qualquer campo $Y \in TM$, vale a seguinte fórmula*

$$tr[X \mapsto (\nabla_X P_r)Y] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j-1} k_i^{j-1} \langle \overline{R}(E_i, P_{r-j}Y)\xi, E_i \rangle,$$

onde $\overline{R}$ é o tensor curvatura de $\overline{M}$.

Demonstração: Inicialmente provemos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned}
\langle(\nabla_{E_i}P_r)Y,E_i\rangle &= E_i(S_r)Y_i - P_{r-1}Y(k_i) + \langle\overline{R}(E_i,P_{r-1}Y)\xi,E_i\rangle - k_i\langle(\nabla_{E_i}P_{r-1})Y,E_i\rangle\\
&= \sum_{j=1}^{r}[E_i(S_{r-j+1})k_i^{j-1}(-1)^{j-1}Y_i] + \sum_{j=1}^{r}(-1)^j P_{r-j}Y\left(\frac{1}{j}k_i^j\right) +\\
&\quad + \sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}k_i^{j-1}\langle\overline{R}(E_i,P_{r-j}Y)\xi,E_i\rangle,
\end{aligned}$$

onde $Y_i = \langle Y,E_i\rangle$.

Faremos a prova por indução sobre r. Para $r=1$, temos

$$(\nabla_{E_i}P_1)Y = (\nabla_{E_i}(S_1I - A))Y = (\nabla_{E_i}S_1I)Y - (\nabla_{E_i}A)Y. \tag{2.2}$$

Usando propriedades de derivação covariante de tensores e da conexão riemanniana ∇ de M, temos

$$\begin{aligned}
(\nabla_{E_i}S_1I)Y &= \nabla_{E_i}(S_1I(Y)) - S_1I(\nabla_{E_i}Y)\\
&= \nabla_{E_i}(S_1Y) - S_1\nabla_{E_i}Y\\
&= E_i(S_1)Y + S_1\nabla_{E_i}Y - S_1\nabla_{E_i}Y\\
&= E_i(S_1)Y.
\end{aligned}$$

Então (2.2) equivale a

$$(\nabla_{E_i}P_1)Y = E_i(S_1)Y - (\nabla_{E_i}A)Y.$$

Logo,

$$\langle(\nabla_{E_i}P_1)Y,E_i\rangle = E_i(S_1)\langle Y,E_i\rangle - \langle(\nabla_{E_i}A)Y,E_i\rangle. \tag{2.3}$$

Pela equação de Codazzi, temos que

$$\langle\overline{R}(E_i,Y)\xi,E_i\rangle = \langle(\nabla_Y A)E_i,E_i\rangle - \langle(\nabla_{E_i}A)Y,E_i\rangle. \tag{2.4}$$

Portanto (2.3) se torna

$$\langle(\nabla_{E_i}P_1)Y,E_i\rangle = E_i(S_1)\langle Y,E_i\rangle + \langle\overline{R}(E_i,Y)\xi,E_i\rangle - \langle(\nabla_Y A)E_i,E_i\rangle. \tag{2.5}$$

Observe que,

$$(\nabla_Y A)E_i = \nabla_Y A(E_i) - A(\nabla_Y E_i).$$

Como $A(E_i) = k_i E_i$ e A é auto-adjunto temos

$$\begin{aligned}
\langle(\nabla_Y A)E_i, E_i\rangle &= \langle\nabla_Y A(E_i), E_i\rangle - \langle A(\nabla_Y E_i), E_i\rangle \\
&= \langle\nabla_Y (k_i E_i), E_i\rangle - \langle\nabla_Y E_i, A(E_i)\rangle \\
&= \langle Y(k_i)E_i + k_i\nabla_Y E_i, E_i\rangle - k_i\langle\nabla_Y E_i, E_i\rangle \\
&= Y(k_i) + k_i\langle\nabla_Y E_i, E_i\rangle - k_i\nabla_Y E_i, E_i\rangle \\
&= Y(k_i).
\end{aligned}$$

Portanto (2.5) equivale a

$$\langle(\nabla_{E_i} P_1)Y, E_i\rangle = E_i(S_1)Y_i + \langle\overline{R}(E_i, Y)\xi, E_i\rangle - Y(k_i). \tag{2.6}$$

Suponhamos que a igualdade (2.6) seja verdadeira para $r-1$. Como $P_r = S_r I - AP_{r-1}$, segue que

$$(\nabla_{E_i} P_r)Y = (\nabla_{E_i} S_r I)Y - (\nabla_{E_i} AP_{r-1})Y. \tag{2.7}$$

Temos

$$\begin{aligned}
(\nabla_{E_i} S_r I)Y &= \nabla_{E_i}(S_r I(Y)) - S_r I(\nabla_{E_i} Y) \\
&= \nabla_{E_i}(S_r Y) - S_r\nabla_{E_i} Y \\
&= E_i(S_r)Y + S_r\nabla_{E_i} Y - S_r\nabla_{E_i} Y \\
&= E_i(S_r)Y.
\end{aligned}$$

Assim de (2.7) concluímos que

$$\begin{aligned}
\langle(\nabla_{E_i} P_r)Y, E_i\rangle &= \langle(\nabla_{E_i} S_r I)Y, E_i\rangle - \langle(\nabla_{E_i} AP_{r-1})Y, E_i\rangle \\
&= \langle E_i(S_r)Y, E_i\rangle - \langle(\nabla_{E_i} AP_{r-1})Y, E_i\rangle \\
&= E_i(S_r)\langle Y, E_i\rangle - \langle(\nabla_{E_i} AP_{r-1})Y, E_i\rangle.
\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
(\nabla_{E_i} AP_{r-1})Y &= \nabla_{E_i} AP_{r-1} Y - AP_{r-1}(\nabla_{E_i} Y) && (2.8) \\
(\nabla_{E_i} A)P_{r-1} Y &= \nabla_{E_i} AP_{r-1} Y - A(\nabla_{E_i} P_{r-1} Y). && (2.9)
\end{aligned}$$

De (2.8) e (2.9), obtemos

$$(\nabla_{E_i} AP_{r-1})Y = A(\nabla_{E_i} P_{r-1} Y) - AP_{r-1}(\nabla_{E_i} Y) + (\nabla_{E_i} A)P_{r-1} Y.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\langle(\nabla_{E_i}AP_{r-1})Y,E_i\rangle &= \langle A(\nabla_{E_i}P_{r-1}Y),E_i\rangle - \langle AP_{r-1}(\nabla_{E_i}Y),E_i\rangle + \langle(\nabla_{E_i}A)P_{r-1}Y,E_i\rangle\\
&= \langle \nabla_{E_i}P_{r-1}Y,A(E_i)\rangle - \langle P_{r-1}(\nabla_{E_i}Y),A(E_i)\rangle + \langle(\nabla_{E_i}A)P_{r-1}Y,E_i\rangle\\
&= k_i\langle \nabla_{E_i}P_{r-1}Y,E_i\rangle - k_i\langle P_{r-1}(\nabla_{E_i}Y),E_i\rangle + \langle(\nabla_{E_i}A)P_{r-1}Y,E_i\rangle.
\end{aligned}$$

Como $(\nabla_{E_i}P_{r-1})Y = \nabla_{E_i}P_{r-1}Y - P_{r-1}(\nabla_{E_i}Y)$, obtemos

$$\langle(\nabla_{E_i}AP_{r-1})Y,E_i\rangle = k_i\langle(\nabla_{E_i}P_{r-1})Y,E_i\rangle + \langle(\nabla_{E_i}A)P_{r-1}Y,E_i\rangle.$$

Portanto,

$$\langle(\nabla_{E_i}P_r)Y,E_i\rangle = E_i(S_r)\langle Y,E_i\rangle - k_i\langle(\nabla_{E_i}P_{r-1})Y,E_i\rangle - \langle(\nabla_{E_i}A)P_{r-1}Y,E_i\rangle.$$

Usando Novamente a equação de Codazzi, obtemos que

$$\begin{aligned}
\langle(\nabla_{E_i}P_r)Y,E_i\rangle &= E_i(S_r)\langle Y,E_i\rangle - k_i\langle(\nabla_{E_i}P_{r-1})Y,E_i\rangle + \langle\overline{R}(E_i,P_{r-1}Y)\xi,E_i\rangle\\
&\quad -\langle(\nabla_{P_{r-1}Y}A)E_i,E_i\rangle. \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

Observando que

$$\begin{aligned}
(\nabla_{P_{r-1}Y}A)E_i &= \nabla_{P_{r-1}Y}A(E_i) - A(\nabla_{P_{r-1}Y}E_i)\\
&= \nabla_{P_{r-1}Y}(k_iE_i) - A(\nabla_{P_{r-1}Y}E_i)\\
&= P_{r-1}Y(k_i)E_i + k_i\nabla_{P_{r-1}Y}E_i - A(\nabla_{P_{r-1}Y}E_i).
\end{aligned}$$

Usando o fato de A ser auto-adjunto, obtemos

$$\langle(\nabla_{P_{r-1}Y}A)E_i,E_i\rangle = P_{r-1}Y(k_i).$$

Portanto (2.10) se torna

$$\langle(\nabla_{E_i}P_r)Y,E_i\rangle = E_i(S_r)Y_i + \langle\overline{R}(E_i,P_{r-1}Y)\xi,E_i\rangle - P_{r-1}Y(k_i) - k_i\langle(\nabla_{E_i}P_{r-1})Y,E_i\rangle,$$

onde $Y_i = \langle Y,E_i\rangle$.

Estamos supondo verdadeiro que

$$\begin{aligned}
\langle(\nabla_{E_i}P_{r-1})Y,E_i\rangle &= \sum_{j=1}^{r-1}[E_i(S_{r-1-j+1})k_i^{j-1}(-1)^{j-1}Y_i] + \sum_{j=1}^{r-1}(-1)^jP_{r-1-j}Y\left(\frac{1}{j}k_i^j\right) +\\
&\quad + \sum_{j=1}^{r-1}(-1)^{j-1}k_i^{j-1}\langle\overline{R}(E_i,P_{r-1-j}Y)\xi,E_i\rangle.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\langle(\nabla_{E_i}P_r)Y,E_i\rangle &= E_i(S_r)Y_i - P_{r-1}Y(k_i) + \langle\overline{R}(E_i,P_{r-1}Y)\xi,E_i\rangle\\ &-k_i\sum_{j=1}^{r-1}[E_i(S_{r-1-j+1})k_i^{j-1}(-1)^{j-1}Y_i]\\ &-k_i\sum_{j=1}^{r-1}\left[(-1)^jP_{r-1-j}Y\left(\frac{1}{j}k_i^j\right)\right]\\ &-k_i\sum_{j=1}^{r-1}[(-1)^{j-1}k_i^{j-1}\langle\overline{R}(E_i,P_{r-1-j}Y)\xi,E_i\rangle]. \quad (2.11)\end{aligned}$$

Portanto (2.11) se escreve como

$$\begin{aligned}\langle(\nabla_{E_i}P_r)Y,E_i\rangle &= \sum_{j=1}^{r}[E_i(S_{r-j+1})k_i^{j-1}(-1)^{j-1}Y_i] + \sum_{j=1}^{r}(-1)^jP_{r-j}Y\left(\frac{1}{j}k_i^j\right)+\\ &+\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}k_i^{j-1}\langle\overline{R}(E_i,P_{r-j}Y)\xi,E_i\rangle. \quad (2.12)\end{aligned}$$

Então

$$tr[X\mapsto(\nabla_XP_r)Y] = \sum_{i=1}^{n}\langle(\nabla_{E_i}P_r)Y,E_i\rangle. \quad (2.13)$$

Substituindo (2.12) e (2.13), obtemos

$$\begin{aligned}tr[X\mapsto(\nabla_XP_r)Y] &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}E_i(S_{r-j+1})k_i^{j-1}(-1)^{j-1}Y_i+\\ &+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}(-1)^jP_{r-j}Y\left(\frac{1}{j}k_i^j\right)+\\ &+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}k_i^{j-1}\langle\overline{R}(E_i,P_{r-j}Y)\xi,E_i\rangle. \quad (2.14)\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}(1)\quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}E_i(S_{r-j+1})k_i^{j-1}(-1)^{j-1}Y_i &= \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{n}E_i(S_{r-j+1})k_i^{j-1}(-1)^{j-1}Y_i\\ &= \sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}\sum_{i=1}^{n}E_i(S_{r-j+1})k_i^{j-1}Y_i.\end{aligned}$$

Como $\{E_1,\ldots,E_n\}$ é um referencial ortonormal, temos que

$$grad(S_{r+1-j}) = \sum_{k=1}^{n}E_k(S_{r+1-j})E_k.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\langle grad(S_{r+1-j}), E_i\rangle &= \sum_{k=1}^{n} E_k(S_{r+1-j})\langle E_k, E_i\rangle \\
&= E_i(S_{r+1-j}).
\end{aligned}$$

Como $Y = \sum_{l=1}^{n} Y_l E_l$, temos que a expressão (1) equivale a

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r} E_i(S_{r-j+1})k_i^{j-1}(-1)^{j-1}Y_i = \sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}\langle grad(S_{r+1-j}), A^{j-1}Y\rangle.$$

Aqui usamos o fato que $A^{j-1}(E_i) = k_i^{j-1}E_i$.

$$(2)\quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j}P_{r-j}Y\left(\frac{1}{j}k_i^j\right) = \sum_{j=1}^{r}(-1)^{j}\sum_{i=1}^{n}P_{r-j}Y\left(\frac{1}{j}k_i^j\right).$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} P_{r-j}Y\left(\frac{1}{j}k_i^j\right) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{j}(P_{r-j}Y)\left(k_i^j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{j}\langle P_{r-j}Y, grad(k_i^j)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle P_{r-j}Y, \frac{1}{j}grad(k_i^j)\rangle \\
&= \left\langle P_{r-j}Y, \frac{1}{j}grad\left(\sum_{i=1}^{n}k_i^j\right)\right\rangle.
\end{aligned}$$

Então a expressão (2) se escreve como

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j}P_{r-j}Y\left(\frac{1}{j}k_i^j\right) = \sum_{j=1}^{r}(-1)^{j}\langle P_{r-j}Y, \frac{1}{j}grad(t_j)\rangle,$$

onde

$$t_j = \sum_{i=1}^{n}k_i^j.$$

De (1) e (2), segue então que (2.14) se expressa como

$$\begin{aligned}
tr[X \mapsto (\nabla_X P_r)Y] &= \sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}\langle grad(S_{r-j+1}), A^{j-1}Y + \\
&\quad + \sum_{j=1}^{r}(-1)^{j}\langle P_{r-j}Y\frac{1}{j}grad(t_j)\rangle + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}k_i^{j-1}\langle \overline{R}(E_i, P_{r-j}Y)\xi, E_i\rangle.
\end{aligned}$$

Considere

$$\begin{aligned} T_1 &= \sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}\langle grad(S_{r-j+1}), A^{j-1}Y \\ T_2 &= \sum_{j=1}^{r}(-1)^{j}\langle P_{r-j}Y\frac{1}{j}grad(t_j)\rangle. \end{aligned}$$

Então para terminar a prova do teorema, basta mostrarmos que $T_1 + T_2 = 0$. Temos, pela definição de P_r, que para cada $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ vale

$$P_{r-j} = \sum_{l=0}^{r-j}(-1)^l S_{r-j-l}A^l. \tag{2.15}$$

Substituindo (2.15) em T_2, obtemos

$$\begin{aligned} T_2 &= \sum_{j=1}^{r}(-1)^j\left\langle \sum_{l=0}^{r-j}(-1)^l S_{r-j-l}A^lY, \frac{1}{j}grad(t_j)\right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{r}(-1)^j\sum_{l=0}^{r-j}(-1)^l S_{r-j-l}\langle A^lY, \frac{1}{j}grad(t_j)\rangle. \end{aligned}$$

Assim, fazendo $l = k-1$, obtemos a seguinte expressão para T_2:

$$T_2 = \sum_{j=1}^{r}\left\langle A^{k-1}Y, \sum_{j=1}^{r-k+1}(-1)^{k-1}\frac{(-1)^j}{j}S_{r-k-j+1}grad(t_j)\right\rangle. \tag{2.16}$$

Agora provemos que

$$grad(S_{r+1-k}) = \sum_{j=1}^{r-k+1}\frac{(-1)^{j-1}}{j}S_{r-k-j+1}grad(t_j). \tag{2.17}$$

Observe que para provar (2.17) é equivalente a provar que

$$grad(S_r) = \sum_{j=1}^{r}\frac{(-1)^{j-1}}{j}S_{r-j}grad(t_j). \tag{2.18}$$

Para provar a igualdade em (2.18), usaremos indução sobre r e a seguinte identidade de Jacobi:

$$S_r = \frac{1}{r}\sum_{l=1}^{r}(-1)^{l-1}S_{r-l}t_l. \tag{2.19}$$

Para $r = 1$, temos claramente que a identidade em (2.18) é satisfeita. Calculando o gradiente de S_r na expressão (2.19), obteremos

$$grad(S_r) = \frac{1}{r}\sum_{l=1}^{r-1}(-1)^{l-1}t_l grad(S_{r-l}) + \frac{1}{r}\sum_{l=1}^{r}(-1)^{l-1}S_{r-l}grad(t_l).$$

Observação 2.2 *Quando $l = r$, temos $S_{r-l} = S_0 = 1$ e com isso $grad(S_0) = 0$.*

Dado $r \in \{1, 2, \dots, n\}$, suponhamos que a igualdade (2.18) seja verdadeira para todo $j \in \{1, 2, \dots, r-1\}$. Ponhamos

$$I = \frac{1}{r}\sum_{l=1}^{r-1}(-1)^{l-1}t_l grad(S_{r-l}), \tag{2.20}$$

$$II = \frac{1}{r}\sum_{l=1}^{r}(-1)^{l-1}S_{r-l} grad(t_l). \tag{2.21}$$

Pela hipótese de indução, segue que

$$I = \frac{1}{r}\sum_{l=1}^{r-1}(-1)^{l-1}\left[\sum_{j=1}^{r-l}\frac{(-1)^{j-1}}{j}S_{r-l-j}grad(t_j)\right]t_l. \tag{2.22}$$

Reordenando os termos da equação (2.22), obtemos

$$I = \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r}\left[\frac{(-1)^{k-1}}{k}(r-k)S_{r-k}\right]grad(t_k).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I + II &= \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}\left[\frac{r-k}{k}+1\right]S_{r-k}grad(t_k) \\ &= \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}\left(\frac{r}{k}\right)S_{r-k}grad(t_k) \\ &= \sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}S_{r-k}grad(t_k). \end{aligned}$$

Assim provamos a identidade em (2.18). Portanto, de (2.16), obtemos mediante a igualdade acima provada, que

$$\begin{aligned} T_2 &= \sum_{j=1}^{r}(-1)^{j}\langle grad(S_{r+1-j}), A^{j-1}Y\rangle \\ &= -\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}\langle grad(S_{r+1-j}, A^{j-1}Y\rangle = -T_1. \end{aligned}$$

Portanto, $T_1 + T_2 = 0$ e com isso o teorema está provado.

O resultado seguite dá uma importante caracterização do tensor curvatura de uma variedade riemanniana de curvatura seccional constante e sua prova pode ser encontrada em [dCM].

Proposição 2.2 *Seja $M^n(c)$ uma variedade riemanniana de curvatura seccional constante e igual a c. Então o tensor curvatura R satisfaz*

$$R(X,Y)Z = c[\langle Z, X\rangle Y - \langle Z, Y\rangle X], \quad \forall\, X, Y, Z \in TM.$$

Proposição 2.3 *Seja $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica. Se $\overline{M}^{n+1}$ tem curvatura seccional constante, então*

$$L_r(f) = div_M(P_r gradf), \quad \forall f \in D(M).$$

Demonstração: Consideremos $\{E_1, \ldots, E_n\}$ um referencial ortonormal que diagonaliza a segunda forma fundamental A da imersão x num ponto $p \in M$. Por definição, temos

$$div_M X = tr[Y \mapsto \nabla_Y X], \quad X, Y \in TM.$$

Então, pela ortonormalidade da base $\{E_i\}_{i=1}^n$, temos

$$div_M(P_r gradf) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}(P_r gradf), E_i\rangle.$$

Observando que $(\nabla_{E_i} P_r) gradf = \nabla_{E_i}(P_r gradf) - P_r(\nabla_{E_i} gradf)$, obtemos

$$\begin{aligned} div_M(P_r gradf) &= \sum_{i=1}^{n} \langle (\nabla_{E_i}(P_r) gradf + P_r(\nabla_{E_i} gradf), E_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[\langle (\nabla_{E_i}(P_r) gradf, E_i\rangle + \langle P_r(\nabla_{E_i} gradf), E_i\rangle\right]. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$L_r(f) = tr[P_r Hessf] = \sum_{i=1}^{n} \langle (P_r Hessf)E_i, E_i\rangle.$$

Como $(Hessf)E_i = \nabla_{E_i} gradf$, obteremos

$$L_r(f) = \sum_{i=1}^{n} \langle P_r(\nabla_{E_i} gradf), E_i\rangle.$$

Agora, podemos reescrever a expressão do divergente de $P_r gradf$ como

$$\begin{aligned} div_M(P_r gradf) &= L_r(f) + \sum_{i=1}^{n} \langle (\nabla_{E_i} P_r) gradf, E_i \rangle \\ &= L_r(f) + tr[(\nabla P_r) gradf]. \end{aligned}$$

Pelo teorema (2.1), temos que

$$tr[(\nabla P_r) gradf] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j-1} k_i^{j-1} \langle \overline{R}(E_i, P_{r-j} gradf)\xi, E_i \rangle,$$

onde $\overline{R}$ é o tensor curvatura de $\overline{M}$ e ξ é a normal a M. Como $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante, temos pela proposição (2.2), que $\overline{R}(E_i, P_{r-j} gradf)\xi = 0, \ \forall \ i = 1, \ldots, n \ \ e \ \ \forall \ j = 1, \ldots, r$. Assim

$$tr[(\nabla P_r) gradf] = 0.$$

Portanto

$$L_r(f) = div_M(P_r gradf).$$

Logo L_r é um operador auto-adjunto. Em geral, para $r \geq 1$ L_r não é um operador elíptico. As seguintes proposições darão condições necessárias para L_r ser elíptico.

Proposição 2.4 *Seja M^n uma variedade riemanniana compacta, conexa e orientável, e seja $x : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma imersão isométrica com H_{r+1} constante. Se M^n tem um ponto onde todas as curvaturas são positivas, então L_r é um operador elíptico.*

Proposição 2.5 *Seja M uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^{n+1}$ ou $\mathbb{S}^{n+1}$ com $H_r = 0$, $2 \leq r < n$. Então o operador $L_{r-1}(f) = div(P_{r-1} grad(f))$ é elíptico em $p \in M$ se e somente se $H_{r+1}(p) \neq 0$.*

As respectivas demonstrações encontram-se em [BC] e [HL].

Provaremos agora uma proposição que se encontra na tese de A. Caminha [Ca], onde estaremos relacionando algumas desigualdades algébricas sobre as curvaturas médias de ordem superior H_r, que são denominadas desigualdades de Newton. Apresentaremos uma versão mais geral das mesmas as quais serão úteis no capítulo de caracterização de hipersuperfícies umbílicas.

Lema 2.2 *Se um polinômio $f \in \mathbb{R}[X]$ possui $k \geq 1$ raízes reais, então sua derivada f' possui ao menos $k-1$ raízes reais. Em particular, se todas as raízes de f forem reais então todas as raízes de f' também serão reais.*

Demonstração: Podemos supor $k > 1$. Sejam $x_1 < \ldots < x_l$ raízes reais de f, com multiplicidades respectivamente $m_1, \ldots, m_l$ tais que $m_1 + \ldots + m_l = k$. Então cada x_i é a raiz de f' com multiplicidade $m_i - 1$. Por outro lado, entre x_i e x_{i+1} há, pelo teorema de Rôlle, ao menos uma outra raiz de f', de modo que contabilizamos ao menos

$$(m_1 - 1) + \ldots + (m_l - 1) + (l - 1) = k - 1$$

raízes reais para f'. O resto é imediato.

Proposição 2.6 *Sejam $n > 1$ inteiro, e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ números reais. Defina, para $0 \leq r \leq n$, $S_r = S_r(\lambda_i)$ como polinômio simétrico associado aos números reais, e $H_r = H_r(\lambda_i) = \binom{n}{r}^{-1} S_r(\lambda_i)$.*

1. *Para $1 \leq r < n$, tem-se $H_r^2 \geq H_{r-1}H_{r+1}$. Ademais, se a iqualdade ocorre para $r = 1$ ou para algum $1 < r < n$, com $H_{r+1} \neq 0$ neste último caso, então $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n$.*

2. *Se $H_1, H_2, \ldots, H_r > 0$ para algum $1, < r \leq n$, então $H_1 \geq \sqrt{H_2} \geq \sqrt[3]{H_3} \ldots \geq \sqrt[r]{H_r}$. Ademais, se a igualdade ocorre para algum, $1 \leq j < r$, então $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n$.*

3. *Se, para algum $1 \leq r < n$, tivermos $H_r = H_{r+1} = 0$, então $H_j = 0$ para todo $r \leq j \leq n$. Em particular, no máximo $r - 1$ dos λ_i serão não-nulos neste caso.*

Demonstração: Para provarmos o item (1) usaremos indução sobre a quantidade de números reais. Para $n = 2$, ${H_1}^2 \geq H_2$ é equivalente a $(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \geq 0$, com igualdade se é só se $\lambda_1 = \lambda_2$.

Suponhamos que as desigualdades sejam válidas para quaisquer $n - 1$ números reais, com a igualdade ocorrendo para $H_{r+1} \neq 0$ se e só se os $n - 1$ números forem todos iguais. Dados $n \geq 3$ reais $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, seja

$$f(x) = (x + \lambda_1) \ldots (x + \lambda_n) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} H_r(\lambda_i) x^{n-r}.$$

Então

$$f'(x) = \sum_{r=0}^{n-1}(n-r)\binom{n}{r}H_r(\lambda_i)x^{n-r-1}.$$

Por outro lado, pelo lema anterior, existem reais $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ tais que

$$\begin{aligned} f'(x) &= n(x+\gamma_1)\ldots(x+\gamma_{n-1}) = n\sum_{r=0}^{n-1} S_r(\gamma_i)x^{n-1-r} \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} n\binom{n-1}{r}H_r(\gamma_i)x^{n-1-r}. \end{aligned}$$

Desde que $(n-r)\binom{n}{r} = n\binom{n-1}{r}$, comparando os coeficientes obtemos $H_r(\lambda_i) = H_r(\gamma_i)$ para $0 \leq r \leq n-1$. Portanto, segue da hipótese de indução que, para $1 \leq r \leq n-2$,

$$H_r^2(\lambda_i) = H_r(\gamma_i) \geq H_{r-1}(\gamma_i)H_{r+1}(\gamma_i) = H_{r-1}(\lambda_i)H_{r+1}(\lambda_i).$$

Ademais, se tivermos igualdade para os λ_i com $H_{r+1}(\lambda_i) \neq 0$, então também teremos igualdade para os γ_i, com $H_{r+1}(\gamma_i) \neq 0$. Novamente pela hipótese de indução, segue que $\gamma_1 = \ldots = \gamma_{n-1}$, e daí $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n$. Para terminarmos, é suficiente provarmos que $H_{n-1}^2(\lambda_i) \geq H_{n-2}(\lambda_i)H_n(\lambda_i)$, com igualdade para $H_n \neq 0$ se e só se todos os λ_i forem iguais. Se algum $\lambda_i = 0$ a igualdade é óbvia. Senão, $H_n \neq 0$ e

$$\begin{aligned} H_{n-1}^2 \geq H_{n-2}H_n \;&\Leftrightarrow\; \left[\binom{n}{n-1}^{-1}\sum_i \frac{H_n}{\lambda_i}\right]^2 \geq \left[\binom{n}{n-2}^{-1}\sum_{i<j}\frac{H_n}{\lambda_i\lambda_j}\right]H_n \\ &\Leftrightarrow\; (n-1)\left(\sum_i \frac{1}{\lambda_i}\right)^2 \geq 2n\sum_{i<j}\frac{1}{\lambda_i\lambda_j}. \end{aligned}$$

Denotamos $\alpha_i = \frac{1}{\lambda_i}$, temos a última desigualdade acima equivalente a

$$(n-1)\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^2 \geq 2n\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j.$$

Fazendo $T(\alpha_i) = (n-1)\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^2 - 2n\sum_{i<j} \alpha_i\alpha_j$, obtemos

$$
\begin{aligned}
T(\alpha_i) &= n\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^2 - 2n\sum_{i<j} \alpha_i\alpha_j \\
&= n\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^2 - 2\sum_{i<j} \alpha_i\alpha_j\right] - \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^2 \\
&= n\sum_{i=1}^{n} {\alpha_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)^2 \;\geq\; 0,
\end{aligned}
$$

pela desigualdade de Cauchy-Schwarz. É ainda óbvio que, nesse caso, a igualdade ocorre se e só se todos os α_i (e então todos os λ_i) forem iguais.

Note que o argumento acima também prova que $H_1^2 = H_2$ se e só se todos os λ_i forem iguais, posto que $T(\lambda_i) = n^2(n-1)[H_1^2(\lambda_i) - H_2(\lambda_i)]$.

Para o item (b), observe que $H_1 \geq H_2^{1/2}$ segue de (a). Por outro lado, se $H_1 \geq H_2^{1/2} \geq \ldots \geq H_k^{1/k}$ para algum $2 \leq k < r$, então

$$H_k^2 \geq H_{k-1}H_{k+1} \geq H_k^{\frac{k-1}{k}} H_{k+1},$$

ou ainda $H_k^{1/k} \geq H_{k+1}^{1/(k+1)}$. Segue agora imediatamente das desigualdades acima que, caso $H_k^{1/k} = H_{k+1}^{1/(k+1)}$ para algum $1 \leq k < r$, então $H_k^2 = H_{k-1}H_{k+1}$. Logo, o item (a) garante que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n$.

Para provarmos (c) suponhamos, sem perda de generalidade, que $r < n-1$. Como $H_r = H_{r+1} = 0$, temos igualdade na desigualdade de Newton

$$H_{r+1}^2 \geq H_r H_{r+2}.$$

Se $H_{r+2} \neq 0$, segue de (a) que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \lambda$. Daí, $H_r = 0 \Rightarrow \lambda = 0$, donde $H_{r+2} = 0$, uma contradição. Portanto, $H_{r+2} = 0$ e, analogamente, $H_j = 0$ para todo $r \leq j \leq n$. Para o que falta, basta notar que o polinômio $f(x)$ do item (a) é, nesse caso,

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} S_j x^{n-j} = \sum_{j=0}^{r-1} S_j x^{n-j}.$$

Capítulo 3

Fórmula Integral

Nesse capítulo encontraremos uma formula integral a qual servirá de sustentação aos resultados posteriores. Antes, provaremos uma proposição de fundamental importância para o que se segue.

Proposição 3.1 *Seja* $\psi : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ *uma imersão. Considere* $v \in \mathbb{R}^{n+2}$ *um vetor fixo,* N *um campo de vetores unitário normal a* M *e as funções* $l_v, f_v : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *definidas por:*

$$l_v(p) = \langle \psi(p), v \rangle \quad e \quad f_v(p) = \langle N(p), v \rangle.$$

Então,

$$\begin{aligned} L_r(l_v) &= (r+1)S_{r+1}f_v - (n-r)S_r l_v \\ L_r(f_v) &= -[S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}]f_v + (r+1)S_{r+1}l_v, \end{aligned}$$

onde na última equação, S_{r+1} *é constante.*

Demonstração: Seja $E_1, \ldots, E_n$ um referencial ortonormal numa vizinhança de um ponto $p \in M^n$. Denotaremos por $\nabla^\circ, \overline{\nabla}, \nabla$ como sendo as conexões em $\mathbb{R}^{n+2}, \mathbb{S}^{n+1}$ e M^n, respectivamente.

Observe que $\mathbb{R}^{n+2} = T_pM \oplus [N] \oplus [\psi]$ e portanto, $v \in \mathbb{R}^{n+2}$ pode ser escrito como $v = v^T + aN + b\psi$. Tomando o produto interno por N e ψ, teremos $a = \langle N, v \rangle = f_v$ e $b = \langle v, \psi \rangle = l_v$ e com isso, segue que

$$v = v^T + f_v N + l_v \psi.$$

Iniciaremos com o cálculo de $grad(l_v)$.

$$\begin{aligned} grad(l_v) &= \sum_{i=1}^{n} E_i(l_v)E_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} E_i\langle\psi, v\rangle E_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle\nabla^{\circ}_{Ei}\psi, v\rangle E_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle E_i, v\rangle E_i \\ &= v^T. \end{aligned}$$

Assim, $grad(l_v) = v^T = v - f_v N - l_v\psi$.
Para v fixo teremos a seguinte igualdade:

$$\nabla_X grad(l_v) = f_v AX - l_v X.$$

De fato, sejam $X, Y \in TM$, então

$$\begin{aligned} \langle\nabla_X grad(l_v), Y\rangle &= \langle\nabla_X v^T, Y\rangle \\ &= \langle\nabla^{\circ}_X(v - f_v N - l_v\psi), Y\rangle \\ &= \langle -\nabla^{\circ}_X(f_v N) - \nabla^{\circ}_X(l_v\psi), Y\rangle \\ &= \langle -X(f_v)N - f_v\nabla^{\circ}_X N - X(l_v)\psi - l_v\nabla^{\circ}_X\psi, Y\rangle \\ &= \langle -f_v(\overline{\nabla}_X N)^T - l_v X, Y\rangle \\ &= \langle f_v AX - l_v X, Y\rangle. \end{aligned}$$

Como $Y \in TM$ é qualquer, segue que

$$\nabla_X grad(l_v) = f_v AX - l_v X.$$

Pela definição de L_r, temos

$$
\begin{aligned}
L_r(l_v) &= tr(P_r Hess(l_v)) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle (P_r Hess(l_v)E_i, E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle (P_r(\nabla_{E_i} grad(l_v)), E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle (P_r f_v AE_i - l_v E_i), E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}[f_v\langle P_r(AE_i), E_i\rangle - l_v\langle P_r E_i, E_i\rangle] \\
&= f_v tr(P_r A) - l_v tr(P_r) \\
&= f_v(r+1)S_{r+1} - l_v(n-r)S_r.
\end{aligned}
$$

Calculemos agora $L_r(f_v)$. Primeiramente devemos calcular $grad(f_v)$.

$$
\begin{aligned}
grad(f_v) &= \sum_{i=1}^{n} E_i(f_v)E_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} E_i\langle N, v\rangle E_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla^{\circ}_{E_i} N, v\rangle E_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{\nabla}_{E_i} N + \langle \overline{\nabla}_{E_i} N, N\rangle N + \langle \nabla^{\circ}_{E_i} N, \psi\rangle \psi, v\rangle E_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{\nabla}_{E_i} N, v^T\rangle E_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle -AE_i, v^T\rangle E_i \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\langle E_i, A(v^T)\rangle E_i \\
&= A(v^T).
\end{aligned}
$$

Pela derivada covariante de tensor e equação de Codazzi, teremos

$$
\begin{aligned}
\nabla_X grad(f_v) &= -\nabla_X(Av^T) \\
&= -(\nabla_X A)v^T - A(\nabla_X v^T) \\
&= -(\nabla_{v^T})X - A(f_v AX - l_v X) \\
&= -(\nabla_{v^T} A)X - f_v A^2 X + l_v X.
\end{aligned}
$$

Assim, pela definição de L_r, teremos

$$\begin{aligned}
L_r(f_v) &= tr(P_r Hess(f_v)) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle (P_r Hess(f_v))(E_i), E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle P_r(\nabla_{E_i} grad(f_v)), E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle P_r(-(\nabla_{v^T}A)E_i - f_v A^2E_i + l_vE_i), Ei\rangle \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\langle P_r(\nabla_{v^T}A)E_i, E_i\rangle - f_v\sum_{i=1}^{n}\langle P_r(A^2E_i), E_i\rangle + l_v\sum_{i=1}^{n}\langle P_r(E_i), Ei\rangle \\
&= -tr(P_r\nabla_{v^T}A) - f_v tr(A^2P_r) + l_v tr(AP_r) \\
&= -tr(P_r\nabla_{v^T}A) - f_v[S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}] + l_v(r+1)S_{r+1}. \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

Afirmamos que $tr(P_{r-1}\nabla_{v^T}A) = v^T(S_r)$. Com efeito, seja $p \in M$, e E_k um referencial móvel em uma vizinhança de $p \in M$, tal que em p, $AE_k = \lambda_k E_k$ para $1 \leq k \leq n$. Observe que por linearidade, é suficiente provar que $tr(P_{r-1}\nabla_{E_k}A) = E_k(S_r)$.

$$\begin{aligned}
tr(P_{r-1}\nabla_{E_k}A) &= \sum_{i=1}^{n}\langle P_{r-1}(\nabla_{E_k}A)E_i, E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} S_{r-1}(A_i)\langle(\nabla_{E_k}A)E_i, E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} S_{r-1}(A_i)\langle\nabla_{E_k}(AE_i), E_i\rangle + \sum_{i=1}^{n} S_{r-1}(A_i)\langle A(\nabla_{E_k}E_i), E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} S_{r-1}(A_i)\langle\nabla_{E_k}(\lambda_iE_i), E_i\rangle + \sum_{i=1}^{n} S_{r-1}(A_i)\langle\nabla_{E_k}E_i, \lambda_iE_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} S_{r-1}(A_i)\langle E_k(\lambda_i)E_i, E_i\rangle + 2\sum_{i=1}^{n} S_{r-1}(A_i)\lambda_i\langle\nabla_{E_k}E_i, E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} S_{r-1}(A_i)E_k(\lambda_i) \\
&= E_k(S_r),
\end{aligned}$$

onde usamos o seguinte resultado

$$\langle E_i, E_i\rangle = 1 \Rightarrow E_k\langle E_i, E_i\rangle = 0 \Rightarrow \langle\nabla_{E_k}E_i, E_i\rangle = 0,$$

o que prova a afirmação. Assim, (3.1) se escreve como

$$L_r(f_v) = -v^T(S_{r+1}) - f_v[(S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}] + l_v(r+1)S_{r+1}.$$

Como S_{r+1} é constante implica que $v^T(S_{r+1}) = 0$. Portanto,

$$L_r(f_v) = -f_v[(S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}] + l_v(r+1)S_{r+1}.$$

Observação 3.1 *Nas condições desta proposição, se tivermos $r = 0$, então*

$$\begin{aligned} \Delta l_v &= L_0(l_v) = S_1 f_v - n l_v \\ \Delta f_v &= L_0(f_v) = -(S_1^2 - 2S_2)f_v + S_1 l_v = -\|A\|^2 f_v + S_1 l_v. \end{aligned}$$

Proposição 3.2 *Seja $M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta, orientável isometricamente imersa em $\mathbb{S}^{n+1}$. Se a $(r+1)$-ésima curvatura média H_{r+1} é constante para algum $r \in (0, n-2)$, então*

$$\int_M [(n-r-1)S_1 S_{r+1} - n(r+2)S_{r+2}] f_v dM = 0. \tag{3.2}$$

Demonstração: Façamos o seguinte cálculo,

$$\begin{aligned} L_r(f_v) + \frac{(r+1)}{n} S_{r+1} \Delta l_v &= -(S_1 S_{r+1} + (r+2)S_{r+2}) f_v + (r+1) S_{r+1} l_v \\ &\quad + \frac{(r+1)}{n} S_{r+1}(S_1 f_v - n l_v) \\ &= -S_1 S_{r+1} f_v + (r+2) S_{r+2} f_v + \frac{(r+1)}{n} S_{r+1} S_1 f_v \\ &= -\frac{1}{n}((n-r-1)S_1 S_{r+1} - n(r+2)S_{r+2}) f_v \\ &= -\frac{1}{n}(Q(v)), \end{aligned}$$

onde $Q(v) = ((n-r-1)S_1 S_{r+1} - n(r+2)S_{r+2}) f_v$.

$\Leftrightarrow$

$$div\left[(P_r grad(f_v)) + \frac{(r+1)}{n} S_{r+1} grad(l_v)\right] = -\frac{1}{n}(Q(v)).$$

Integrando a expressão acima e aplicando o teorema de Stokes temos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{n}\int_M (Q(v)) dM &= \int_M div\left(P_r grad(f_v) + \frac{(r+1)}{n} S_{r+1} grad(l_v)\right) dM \\ &= \int_{\partial M} \left\langle P_r grad(f_v) + \frac{(r+1)}{n} S_{r+1} grad(l_v), \nu \right\rangle dS \\ &= 0. \end{aligned}$$

Onde usamos o fato de M ser compacta e assim $\partial M = \emptyset$.

Logo,

$$\int_M [(n-r-1)S_1 S_{r+1} - n(r+2)S_{r+2}] f_v dM = 0.$$

Capítulo 4

Caracterização de hipersuperfícies umbílicas

Iniciaremos esse capítulo com algumas definições sobre métricas conformes e umbilicidade tendo como objetivo provarmos que as esferas geodésicas são as únicas hipersuperfícies totalmente umbílicas de $\mathbb{S}^{n+1}$.

Definição 4.1 (Conexões de métricas conformes) *Seja M uma variedade diferenciável. Duas métricas riemannianas g e $\overline{g}$ em M são* conformes *se existe uma função positiva $\mu : M \to \mathbb{R}$ tal que $\overline{g}(X,Y) = \mu g(X,Y)$, para todo par $X, Y \in TM$ (em nossos cálculos sempre faremos $\mu(p) = e^{\phi(p)}$, onde $p \in M$, tal igualdade está bem definida pois estamos considerando μ positiva).*

Sejam ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões riemannianas de g e $\overline{g}$, respectivamente. Mostremos a seguinte relação entre as conexões,

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + S(X,Y),$$

onde $S(X,Y) = \frac{1}{2}\{X(\phi)Y + Y(\phi)X - g(X,Y)grad(\phi)\}$ e $grad(\phi)$ é calculado na métrica g isto é, $X(\phi) = g(X, grad(\phi))$.

De fato, como $\overline{\nabla}$ é obviamente simétrica, pois S é simétrica, basta mostrar que $\overline{\nabla}$ é compatível com $\overline{g}$, isto é, que

$$X\overline{g}(Y,Z) = \overline{g}(\overline{\nabla}_X Y, Z) + \overline{g}(Y, \overline{\nabla}_X Z).$$

Desenvolvendo o primeiro membro da igualdade acima teremos

$$
\begin{aligned}
X(e^{\phi}g(Y,Z)) &= X(e^{\phi})g(X,Z) + e^{\phi}g(\nabla_X Y, Z) + e^{\phi}g(Y, \nabla_X Z) \\
&= e^{\phi}X(\phi)g(X,Z) + e^{\phi}g(\nabla_X Y, Z) + e^{\phi}g(Y, \nabla_X Z),
\end{aligned}
$$

e o segundo é

$$
e^{\phi}g(\nabla_X Y, Z) + e^{\phi}g(Y, \nabla_X Z) + e^{\phi}\{g(S(X,Y), Z) + g(Y, S(X,Z))\}.
$$

Portanto basta mostrar que

$$
X(\phi)g(Y,Z) = g(S(X,Y), Z) + g(Y, S(X,Z)),
$$

Substituindo a expressão de $S(X,Y)$ teremos,

$$
\begin{aligned}
X(\phi)g(Y,Z) &- g\left(\frac{1}{2}\{X(\phi)Y + Y(\phi)X - g(X,Y)grad(\phi)\}, Z\right) \\
&- g\left(Y, \frac{1}{2}\{X(\phi)Z + Z(\phi)X - g(X,Z)grad(\phi)\}\right) \\
&= X(\phi)g(Y,Z) - X(\phi)g(Y,Z) - \frac{1}{2}Y(\phi)g(X,Z) \\
&\quad + \frac{1}{2}g(X,Y)g(grad(\phi), Z) - \frac{1}{2}Z(\phi)g(Y,X) + \\
&\quad + \frac{1}{2}g(X,Z)g(Y, grad(\phi)) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

o que conclui a afirmação.

Definição 4.2 (Hipersuperfícies umbílicas) *Seja* $(\overline{M}^{n+1}, g)$ *uma variedade com métrica riemanniana* g *e seja* $\overline{\nabla}$ *a sua conexão riemanniana. Diz-se que uma imersão* $x : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ *é (totalmente) umbílica se para todo* $p \in M$*, a segunda forma fundamental* h *de* x *em* p *satisfaz*

$$
\langle h(X,Y), \eta\rangle(p) = \lambda(p)\langle X, Y\rangle, \quad \lambda(p) \in \mathbb{R},
$$

para todo par $X, Y \in TM$ *e todo campo unitário* η *normal a* $x(M)$*; aqui estamos usando* $\langle , \rangle$ *para indicar a métrica* g *em* M *e a métrica induzida por* x *em* M*.*

Provemos que ao mudarmos a métrica g para uma métrica $\overline{g} = e^{\phi}g$, conforme a g, a imersão $x : M^n \to (\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$ continua a ser umbílica.

De fato, basta observar que se η é um campo normal unitário a M na métrica g então $\frac{\eta}{\sqrt{e^{\phi}}}$ é um campo normal unitário na métrica $\overline{g}$. Assim, considerando uma base ortonormal $\{E_1, \ldots, E_n\}$ tal que diagonaliza o operador segunda forma A_η segundo a métrica g, teremos

$$
\begin{aligned}
\langle A_{\frac{\eta}{\sqrt{e^{\phi}}}}(E_i), E_j\rangle_{\overline{g}} &= -\langle \overline{\nabla}_{E_i}\left(\frac{\eta}{\sqrt{e^{\phi}}}\right), E_j\rangle_{\overline{g}} \\
&= -E_i\left(\frac{1}{\sqrt{e^{\phi}}}\right)e^{\phi}\langle \eta, E_j\rangle_g - \frac{1}{\sqrt{e^{\phi}}}\langle \overline{\nabla}_{E_i}\eta, E_j\rangle_{\overline{g}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{e^{\phi}}}\langle \nabla_{E_i}\eta + S(E_i,\eta), E_j\rangle_{\overline{g}} \\
&= -\frac{e^{\phi}}{\sqrt{e^{\phi}}}\langle \nabla_{E_i}\eta, E_j\rangle_g \\
&\quad -\frac{1}{\sqrt{e^{\phi}}}\left\langle \frac{1}{2}\{(E_i(\phi)\eta + \eta(\phi)E_i - g(E_i,\eta)grad(\phi)\}, E_j\right\rangle_{\overline{g}} \\
&= \sqrt{e^{\phi}}\langle A_\eta E_i, E_j\rangle_g - \frac{\eta(\phi)}{2\sqrt{e^{\phi}}}\langle E_i, E_j\rangle_{\overline{g}} \\
&= \sqrt{e^{\phi}}\langle A_\eta E_i, E_j\rangle_g - \frac{\eta(\phi)e^{\phi}}{2\sqrt{e^{\phi}}}\langle E_i, E_j\rangle_g
\end{aligned}
$$

Desde que a base que escolhemos diagonaliza o operador A_η, segue para $i = j$ que

$$\overline{k_i} = \frac{1}{\sqrt{e^{\phi}}}k_i - f,$$

onde $f = \frac{\eta(\phi)}{2\sqrt{e^{\phi}}}$ é uma função de M em $\mathbb{R}$.
Assim,

$$\overline{k_i} - \overline{k_j} = \frac{1}{\sqrt{e^{\phi}}}(k_i - k_j).$$

Logo se M^n uma hipersuperfície umbílica de $\overline{M}^{n+1}$ temos que $k_1 = \ldots = k_n$, o que implica pela expressão acima que $\overline{k}_1 = \ldots = \overline{k}_n$, o que prova nossa afirmação.

Seja M uma variedade riemanniana orientável e completa de dimensão n e $\psi : M \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma imersão isométrica de M na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$ em $\mathbb{R}^{n+2}$ com centro na origem. Uma hiperesfera Σ^n em $\mathbb{S}^{n+1}$ significa a interseção de $\mathbb{S}^{n+1}$ com um hiperplano em $\mathbb{R}^{n+2}$. Σ^n é chamada uma hiperesfera grande (equatorial) ou pequena (não equatorial), respectivamente, de acordo com os hiperplanos, passando pela origem de $\mathbb{R}^{n+2}$ ou não. Podendo ser um único ponto.

De posse dessas considereções tomemos a esfera $\mathbb{S}^{n+1}$ através da inversa da projeção estereográfica, a qual sabemos que é conforme e logo implica dos fatos provados acima que, se M^n é uma hipersuperfície umbílica de $\mathbb{S}^{n+1}$ temos que sua imagem pela projeção também o é. Desde que as únicas umbílicas do $\mathbb{R}^{n+1}$ são as esferas de dimensão n e hiperplanos de $\mathbb{R}^{n+1}$, segue pela inversa da projeção esfereográfica que as únicas hipersuperfícies umbílicas de $\mathbb{S}^{n+1}$ são as grandes e pequenas hiperesferas.

A seguir enunciaremos um teorema provado por K. Nomizu e B. Smyth, publicado em seu artigo sobre aplicação de Gauss para hipersuperfície de curvatura média constante em esfera, o mesmo terá grande importância no exemplo 4.1 que descreveremos em seguida e na demonstração do teorema 4.2 na qual analisaremos o caso $H_{r+1} > 0$.

Teorema 4.1 *Seja M uma variedade riemanniana completa e orientável de dimensão $n \geq 2$ isometricamente imersa em $\mathbb{S}^{n+1}$ e seja ϕ a aplicação de Gauss associada.*

1. *Se $\phi(M)$ está contida em uma grande hiperesfera de $\mathbb{S}^{n+1}$ então M mergulha em uma grande hiperesfera e $\phi(M)$ é simplesmente um ponto.*

2. *Se $\phi(M)$ está contida em uma pequena hiperesfera de $\mathbb{S}^{n+1}$ mas não é simplesmente um ponto, então M mergulha em uma pequena hiperesfera e $\phi(M)$ é uma pequena hiperesfera.*

Sua demosntração encontra-se na seguinte referência [NS].

Relembremos agora o principal objetivo desse trabalho, que será generalizar o teorema 0.1 (ver introdução) para as curvaturas de ordem superior. No caso em que $H_r = 0$ apresentaremos um exemplo, que é uma generalização do exemplo apresentado por Nomizu e Smyth, de uma hipersuperfície em que $H_r = 0$, a imagem da aplicação de Gauss está contida em um hemisfério fechado, mas a mesma não é totalmente geodésica. Entretanto essa hipersuperfície não é completa. Isto mostra que para obtermos uma generalização do teorema 0.1, não podemos usar um argumento local. Assim fica em aberto o caso $H_r = 0$ para hipersuperfícies compactas.

Exemplo 4.1

Mostremos inicialmente que o levantamento por geodésica de uma hipersuperfície de $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$, onde $n \geq 2$, é uma imersão e em seguida encontraremos uma relação entre as matrizes segunda forma fundamental de cada imersão (essa afirmação corresponde ao exemplo apresentado por Nomizu e Smyth em seu trabalho).

De fato, seja ψ uma imersão isométrica de uma variedade N, conexa, orientável de dimensão $(n-1)$ sobre uma grande hiperesfera de $\mathbb{S}^n$ em $\mathbb{S}^{n+1}$. Denotaremos e_{n+2} um vetor unitário ortogonal ao hiperplano de $\mathbb{S}^n$ em $\mathbb{R}^{n+2}$ e o ângulo θ a coordenada sobre o círculo unitário $\mathbb{S}^1$.

O levantamento $f : N \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^{n+1}$ da imersão ψ por geodésica para o polo norte e sul de $\mathbb{S}^{n+1}$ é definido por,

$$f(p,\theta) = cos(\theta)\psi(p) + sen(\theta)e_{n+2},$$

onde p é um ponto qualquer de N e $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Escolhendo coordenadas locais $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ em N, vemos que

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = cos(\theta)\frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \leq n-1 \tag{4.1}$$

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right) = -sen(\theta)\psi + cos(\theta)e_{n+2}. \tag{4.2}$$

Como os vetores são linearmente independentes segue que f imerge em $M = \{(p,\theta) \in N \times \mathbb{S}^1; \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$ em $\mathbb{S}^{n+1}$.

Seja η um campo de vetor unitário normal a N em $\mathbb{S}^n$ e seja B sua matriz da segunda forma fundamental nas coordenadas $(x_1, \ldots, x_{n+1})$. Se ξ é o campo de vetor normal unitário a M em $\mathbb{S}^{n+1}$ então temos que ξ é ortogonal a $f(p,\theta)$, $f_*(\frac{\partial}{\partial x_i})$ e $f_*(\frac{\partial}{\partial \theta})$ e portanto a $\psi(p)$, e_{n+2} e $\frac{\partial \psi}{\partial x_i}$ (observar as igualdades em (4.1) e (4.2)). Isso implica η paralelo a ξ e assim escolhemos a direção de ξ tal que $\xi_{f(p,\theta)} = \eta_{\psi(p)}$ para todo $(p,\theta) \in M$. Em particular $\langle \xi, e_{n+2} \rangle \equiv 0$ em M, isto é, a imagem da aplicação de Gauss de M está contida em uma grande hiperesfera de $\mathbb{S}^{n+1}$. Por outro lado, facilmente temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} &= cos(\theta)\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial \theta} &= -sen(\theta)\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} &= -cos(\theta)\psi - sen(\theta)e_{n+2},
\end{aligned}$$

segue que a matriz segunda forma fundamental de M nas coordenadas $(x_1, \ldots, x_{n+1}, \theta)$ é dada por

$$A = \frac{1}{cos(\theta)} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que o fator $\frac{1}{cos(\theta)}$ encontrado acima, não é tão trivial o quanto parece, para obtê-lo basta escrevermos a expressão da matriz segunda forma como

$$A \;=\; (\overline{a}_{ij}) = -(\overline{h}_{ij})(\overline{g}^{ij}) \;\; i, j = 1, \ldots, n-1, n = \theta, \tag{4.3}$$

onde $\overline{g}_{ij}$ e g_{ij} representam as expressões das métricas riemannianas e $\overline{g}^{ij}$, g^{ij} suas inversas, respectivamente.
Como

$$\begin{gathered}
\overline{g}_{ij} = \langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j} \rangle = cos^2(\theta)\langle \frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \rangle = cos^2(\theta) g_{ij} \\
\Longrightarrow \;\; (\overline{g}_{ij}) = cos^2(\theta)(g_{ij}) \;\; \Longrightarrow \;\; (\overline{g}^{ij}) = \frac{1}{cos^2(\theta)}(g^{ij})
\end{gathered}$$

e

$$\begin{gathered}
\overline{h}_{ij} = cos(\theta) h_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n-1 \\
\overline{h}_{i\theta} = \overline{h}_{\theta i} = \overline{h}_{\theta\theta} = 0, \quad i = 1, \ldots, n-1.
\end{gathered}$$

Teremos pela igualdade (4.3) que

$$A = -(\overline{h}_{ij})(\overline{g}^{ij}) = -\frac{cos(\theta)}{cos^2(\theta)} \begin{pmatrix} (h_{ij})(g^{ij}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

o que implica

$$A = \frac{1}{cos(\theta)} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $B = -(h_{ij})(g^{ij}),\ \ i,j = 1,\ldots,n-1.$

Para nosso propósito iremos considerar uma pequena hiperesfera $S^{n-r}_{(\rho_o)}$, onde ρ_o pertence ao intervalo $(0,1)$ e esteja imersa em $\mathbb{S}^{n-r+1} \subset \ldots \subset \mathbb{S}^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$. Denotaremos e_j o vetor unitário ortogonal ao hiperplano de $\mathbb{S}^{j-2}$ em $\mathbb{R}^j$, onde $j = n-r+3,\ldots,n+2$ e $1 < r < n-1$, consideremos ainda e_{n-r+2} o vetor unitário ortogonal ao hiperplano de $S^{n-r}_{(\rho_o)}$ em $\mathbb{R}^{n-r+2}$.

Assim, construiremos à variedade desejada apartir de uma sucessão de levantamentos, a qual descrevemos em seguida.

Iniciemos com a imersão

$$\begin{aligned} \psi_o:\ \ M_o^{n-r} &\longrightarrow \mathbb{S}^{n-r+1} \\ (p) &\longmapsto \psi_o(p), \end{aligned}$$

onde $M_o^{n-r} = S^{n-r}_{(\rho_o)}$.

Fazemos o levantamento de ψ_o em direção ao polo norte e sul de $\mathbb{S}^{n-r+2}$, isto é,

$$\begin{aligned} \psi_1:\ \ M_o^{n-r}\times\mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^{n-r+2} \\ (p,\theta_1) &\longmapsto \psi_1(p,\theta_1) = cos(\theta_1)\psi_o + sen(\theta_1)e_{n-r+3}, \end{aligned}$$

façamos $\psi_1(M_o^{n-r}\times\mathbb{S}^1) = M_1^{n-r+1}$ e prosseguimos,

$$\begin{aligned} \psi_2:\ \ M_1^{n-r+1}\times\mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^{n-r+3} \\ (p,\theta_1,\theta_2) &\longmapsto \psi_2(p,\theta_1,\theta_2) = cos(\theta_2)\psi_1(p,\theta_1) + sen(\theta_2)e_{n-r+4}, \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} \psi_r:\ \ M_{r-1}^{n-1}\times\mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^{n+1} \\ (p,\theta_1,\ldots,\theta_r) &\longmapsto \psi_r(p,\theta_1,\ldots,\theta_r) = cos(\theta_r)\psi_{r-1}(p,\theta_1,\ldots,\theta_{r-1}) + sen(\theta_r)e_{n+2}, \end{aligned}$$

onde $\psi_r(M_{r-1}^{n-1}\times\mathbb{S}^1) = M_r^n$.

Devemos observar que M_r^n é uma variedade imersa em $\mathbb{S}^{n+1}$, isso porque os levantamentos são imersões em cada etapa da construção (ver inicio do exemplo).

Considerando η campo normal unitário a M_o^{n-r} e $\xi_1,\ldots,\xi_r$ campos normais e unitários a $M_1^{n-r+1},\ldots,M_r^n$ respectivamente, segue que

$$\eta_{\psi_o(p)} = \xi_{\psi_1(p,\theta_1)} = \xi_{\psi_2(p,\theta_1,\theta_2)} = \ldots = \xi_{\psi_r(p,\theta_1,\ldots,\theta_r)}. \tag{4.4}$$

Afirmamos que $\langle \eta_{\psi_o(p)}, e_{n-r-2} \rangle$ é constante diferente de zero.

De fato, como $M_o^{n-r} = \mathbb{S}^{n-r}_{(\rho_o)}$ $(\rho_o \in (0,1))$, podemos considerar a imersão $\psi_o : M_o^{n-r} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-r+1}$ tal que $\langle \psi_o(p), e_{n-r+2} \rangle = b$, onde $b \in (0,1)$ é constante. Sendo D a derivada usual de $\mathbb{R}^{n-r+2}$ e ∇ a conexão riemanniana de M_o^{n-r}, segue que

$$\begin{aligned} 0 &= X\langle \psi_o, e_{n-r+2} \rangle \\ &= \langle D_X \psi_o, e_{n-r+2} \rangle \\ &= \langle X, e_{n-r+2} \rangle, \quad \forall\, X \in T_p M_o^{n-r}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} X\langle \eta_{\psi_o}, e_{n-r+2} \rangle &= \langle D_X \eta_{\psi_o}, e_{n-r+2} \rangle \\ &= \langle \nabla_X \eta_{\psi_o} + \langle \eta_{\psi_o}, D_X \eta_{\psi_o} \rangle \eta_{\psi_o} + \langle \psi_o, D_X \eta_{\psi_o} \rangle \psi_o, e_{n-r+2} \rangle \\ &= \langle \nabla_X \eta_{\psi_o}, e_{n-r+2} \rangle. \end{aligned}$$

Desde que $\nabla_X \eta_{\psi_o} \in T_p M_o^{n-r}$, obtemos

$$\langle \eta_{\psi_o}, e_{n-r+2} \rangle = b',$$

onde b' é constante e diferente de zero, pois do contrário teriamos pelo teorema (4.1) que M_o^{n-r} mergulharia em uma grande hiperesfera de $\mathbb{S}^{n-r+1}$ o que é uma contradição.

Assim, as igualdades em (4.4) juntamente com a afirmação acima, implicará que

$$\langle \xi_{\psi_r(p,\theta_1,\ldots,\theta_r)}, e_{n-r+2} \rangle = const.,$$

onde e_{n-r+2} é visto como vetor de $\mathbb{R}^{n+2}$, isto é, $(e_{n-r+2}, 0, \ldots, 0)$ com r parcelas iguais a zero. E logo $\xi_{\psi_r(p,\theta_1,\ldots,\theta_r)}$ está contido em um hemisfério fechado.

Analisemos agora a matriz da segunda forma fundamental de tais levantamentos.

Seja $A_o, A_1, \ldots, A_r$ as respectivas matrizes de $M_o^{n-r}, M_1^{n-r+1}, \ldots, M_r^n$, então teremos a seguinte relação entre as mesmas,

$$A_1 = \frac{1}{cos(\theta_1)} \begin{pmatrix} A_o & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{(n-r+1)\times(n-r+1)},$$

$$A_2 = \frac{1}{cos(\theta_2)}\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{(n-r+2)\times(n-r+2)} = \frac{1}{cos(\theta_1)cos(\theta_2)}\begin{pmatrix} A_o & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{(n-r+2)\times(n-r+2)},$$

$$\vdots$$

$$A_r = \frac{1}{cos(\theta_r)}\begin{pmatrix} A_{r-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{n\times n} = \frac{1}{cos(\theta_1)\dots cos(\theta_r)}\begin{pmatrix} A_o & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

Por último observe que a matriz acima nos fornece $H_j = 0$ para todo $j = r, \dots, n$ e mais, sendo A_o a matriz segunda forma de $S^{n-r}_{(\rho_o)} = M^{n-r}_o$, segue que $A_o \neq 0$ (onde 0 representa a matriz nula) e logo os pontos de M^n_r não são umbílicos, o que conclui nosso exemplo.

Para o caso $H_{r+1} > 0$ temos o seguinte resultado:

Teorema 4.2 *Seja $M^n \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta e conexa de $\mathbb{S}^{n+1}$ com $(r+1)$-ésima curvatura média H_{r+1} constante positiva para algum $r = 0, \dots, n-2$. Suponha que a imagem de Gauss de M esteja contida num hemisfério fechado, $H_r \geq 0$ e a seguinte desigualdade vale:*

$$H_1 H_r \geq H_{r+1}. \tag{4.5}$$

Então M é totalmente umbílica.

Demonstração: Pela proposição (3.2), temos que para $v \in \mathbb{R}^{n+2}$ fixo, a função $f_v(p) = \langle N(p), v\rangle$ satisfaz

$$\int_M [(n-r-1)S_1 S_{r+1} - n(r+2)S_{r+2}] f_v dM = 0. \tag{4.6}$$

Provemos que o integrando tem sinal fixo, para algum $v \in \mathbb{R}^{n+2}$. Desde que a imagem de Gauss de M, está contida num hemisfério fechado, existe um vetor $v \in \mathbb{R}^{n+2}$ tal que

$$f_v(p) = \langle N(p), v\rangle \geq 0, \quad \forall p \in M. \tag{4.7}$$

Por outro lado a relação $H_1H_r \geq H_{r+1}$ implica que $H_1H_{r+1} \geq H_{r+2}$. De fato, pela proposição (2.6) item 1 teremos que

$$H_rH_{r+2} \leq H_{r+1}^2 \leq H_rH_1H_{r+1}. \tag{4.8}$$

Observe que $H_r \neq 0$, isso ocorre pois a desigualdade acima implicaria que $H_{r+1} = 0$ o que é uma contradição. Logo $H_r > 0$ e com isso podemos dividir (4.8) por H_r, implicando

$$H_1H_{r+1} \geq H_{r+2}. \tag{4.9}$$

Desde que

$$H_i = \binom{n}{i}^{-1} S_i. \tag{4.10}$$

Por (4.9), temos

$$\frac{S_1}{n}\frac{S_{r+1}}{\binom{n}{r+1}} \geq \frac{S_{r+2}}{\binom{n}{r+2}}.$$

Isto implica que

$$(n-r-1)S_1S_{r+1} - n(r+2)S_{r+2} \geq 0. \tag{4.11}$$

As desigualdades (4.7) e (4.11) implicam que

$$[(n-r-1)S_1S_{r+1} - n(r+2)S_{r+2}]f_v \geq 0.$$

Daí, por (4.6), temos que

$$[(n-r-1)S_1S_{r+1} - n(r+2)S_{r+2}]f_v = 0.$$

Observe agora que a função f_v não é identicamente zero, do contrário pelo teorema (4.1), M seria totalmente geodésica, o que implica $H_r = 0$ (contradição).

Seja $B \subset M$ o conjunto aberto não vazio onde $f_v > 0$. Ao longo de B temos

$$(n-r-1)S_1S_{r+1} - n(r+2)S_{r+2} = 0.$$

Isso implica a igualdade em (4.9). Substituindo essa igualdade em (4.8) teremos que

$$H_{r+1}^2 = H_rH_{r+2}.$$

Pela proposição (2.6), segue que todos os pontos de B são umbílicos. Observando que B é uma subvariedade totalmente umbílica de M, isto é, $\forall\, p \in B$, temos: $k_1(p) = \ldots = k_n(p) = a(p)$, onde $a(p)$ é uma constante positiva, teremos que M tem um ponto elíptico e $S_r = \text{const.} > 0$. Assim, pela proposição (2.4) o operador L_r é um operador elíptico.

Analisando os casos:

1. $f_v > 0$ *em* B;

2. $f_v \equiv 0$ *em* $M - \overline{B}$.

Somente 1) pode ocorrer, pois em $M - \overline{B}$ teríamos $H_r \equiv 0$, mais já sabemos que $H_r > 0$ em M e com isso $M = \overline{B}$. Pelo princípio da continuação analítica, segue que $f_v > 0$ em M o que implica $M = B$.

Corolário 4.1 *Seja $M^n \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta e orientável de $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura escalar constante $H_2 > 0$. Se a imagem da aplicação de Gauss de M estiver sobre um hemisfério fechado de $\mathbb{S}^{n+1}$, então M é totalmente umbílica.*

Demonstração: De fato, temos que a hipótese (4.5) no teorema (4.2) vale

$$H_1^2 \geq H_2.$$

O que é sempre verdadeira pela desigualdade obtida na proposição (2.6). A desigualdade acima também diz que H_1 é diferente de zero em M. Logo podemos escolher a orientação de M tal que $H_1 > 0$. O sinal de H_2 não depende da orientação, então o resultado segue diretamente do teorema 4.2 .

Proposição 4.1 *Se $H_i \geq 0$ para todo $i = 1, \ldots, r-1$, então*

$$H_1 H_i \geq H_{i+1}, \quad \forall\, i = 1, \ldots, r-1. \tag{4.12}$$

Mais ainda,

$$(n-i) S_1 S_i - n(i+1) S_{i+1} \geq 0, \quad \forall\, i = 1, \ldots, r-1. \tag{4.13}$$

Demonstração: Pela proposição (2.6) item 1 segue que, para todo $k = 1, \ldots, n-1$,

$$H_k^2 \geq H_{k-1}H_{k+1}. \tag{4.14}$$

Além disso, se a igualdade ocorrer para $k = 1$ ou para algum $k = 2, \ldots, n-1$, com $H_{k+1} \neq 0$, neste último caso, então $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n$.

Se, para algum $k = 1, \ldots, n$, tivermos $H_k = H_{k+1} = 0$, então $H_j = 0$ para todo $j = k, \ldots, n$.

Vamos fazer a prova por indução em i. Para $i = 1$, basta fazer $k = 1$ na desigualdade (4.14) e observar que $H_0 = 1$. Assim,

$$H_1^2 \geq H_0 H_2 = H_2.$$

Suponha, por hipótese de indução, que a desigualdade no enuciado vale para algum $k = 1, \ldots, r-2$, ou seja, que

$$H_1 H_k \geq H_{k+1},$$

para algum $k = 1, \ldots, r-2$, fixo. Dessa forma, pela desigualdade (4.14), temos

$$H_{k+1}^2 \geq H_k H_{k+2}.$$

Agora, pela hipótese de indução (multiplicando por H_{k+1}), temos

$$H_1 H_k H_{k+1} \geq H_{k+1}^2 \geq H_k H_{k+2}.$$

Se $H_k \neq 0$, basta dividir a última desigualdade por H_k e temos o resultado que queríamos. Se $H_k = 0$, pela última desigualdade, temos $0 \geq H_{k+1}^2 \geq 0 \;\; \Rightarrow H_{k+1} = 0$ e portanto, temos $H_j = 0$ para todo $j = k, \ldots, n$. Donde, $H_{k+2} = 0$ e temos o nosso resultado. A segunda desigualdade segue pela definição de H_k e da desigualdade (4.12),

$$\frac{S_1}{n}\frac{S_i}{\binom{n}{i}} \geq \frac{S_{i+1}}{\binom{n}{i+1}}.$$

Isto implica que

$$(n-i)S_1 S_i - n(i+1)S_{i+1} \geq 0, \;\; \forall\, i = 1, \ldots, r-1$$

o que completa a demonstração da proposição.

Corolário 4.2 *Seja* $M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ *uma hipersuperfície compacta e conexa de* $\mathbb{S}^{n+1}$ *com* r*-ésima curvatura média constante positiva* H_r*, para algum* $r = 1, \ldots, n-1$*. Suponha que a imagem da aplicação de Gauss de* M *esteja contida num hemisfério fechado e* $H_i \geq 0$*,* $\forall\ i = 1, \ldots, r-1$*. Então* M *é totalmente umbílica.*

A seguinte proposição nos fornece uma outra condição geométrica para obtermos $H_i > 0 \ \ \forall\, i = 1, \ldots, r-1$ (para uma demonstração ver [BC]).

Proposição 4.2 *Seja* M^n *uma variedade riemanniana compacta e conexa, e seja* $x : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ *uma imersão isométrica. Se* $H_r > 0$ *e* $x(M)$ *está sobre um hemisfério aberto de* $\mathbb{S}^{n+1}$*, então* $H_i > 0$ *para todo* $i = 1, \ldots, r-1$*.*

Corolário 4.3 *Seja* $x : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ *uma imersão isométrica de uma hipersuperfície compacta e conexa de* $\mathbb{S}^{n+1}$ *com* r*-ésima curvatura média constante positiva* H_r*, para algum* $r = 1, \ldots, n-1$*. Suponha que a imagem de Gauss de* M *esteja contida num hemisfério fechado e que* $x(M)$ *esteja contido num hemisfério aberto de* $\mathbb{S}^{n+1}$*. Então* M *é totalmente umbílica.*

Bibliografia

[ARS] Alencar, H., Rosenberg, H. and Santos, W. - *On the Gauss map of hypersurfaces with constante scalar curvature in spheres.* Amer. Math. Soc. 132, 3731-3739 (2004).

[BC] Barbosa, J.L. and Colares, A. - *Stability of hypersurfaces with constant r-mean curvature*, Annals of Global Analysis and Geometry 15, 277-297 (1997).

[Ca] Caminha, A. - *On hypersurfaces in space of constant sectional curvature.* Tese (Doutorado em Matemática), Universidade Federal do Ceará, coordenação de aperfeiçoamento de pessoal de nível superior. Ano de obtenção:2004.

[HL] Hounie, J. and Leite, M.L. - *Two-ended hypersurfaces with zero scalar curvature.* Indiana Univ. Math. J. 48, 867-882 (1999).

[dCM] do Carmo, M., *Geometria Riemanniana*, Coleção Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.

[NS] Nomizu, K. and Smyth, B. - *On the Gauss mapping for hypersurfaces of constant mean curvature in sphere.* Comm. Math. Helv. 44, 484-490 (1969).