UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Jonatan Floriano da Silva

Unicidade de Hipersuperfícies Tipo-Espaço com Curvatura Média de Ordem Superior Constante em Espaço-Tempo de Robertson-Walker Generalizado

Fortaleza
2007

Jonatan Floriano da Silva

Unicidade de Hipersuperfícies Tipo-Espaço com Curvatura Média de Ordem Superior Constante em Espaço-Tempo de Robertson-Walker Generalizado

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Gervásio Colares.

Fortaleza
2007

Aos meus pais Afonso e Inês e à minha amada noiva Stefanie Cavalcanti.

.

.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Deus, por sua infinita graça e misericórdia;

Aos meus pais Afonso Xavier da Silva e Maria Inês Floriano da Silva, pelo incentivo, apoio (sem eles não estaria aqui);

À minha querida e amada noiva Stefanie Cavalcanti de Lima, pelo amor, carinho, companhia e compreensão, e a sua família e amigos, pela consideração demonstrada;

Aos meus colegas de graduação Sibério, David, Alisson, Cícero Thiago, Jobson, Gleydson, Carpegiani, Jânio, Darlan Veras, Wilker, Valdenize, Mário, pela companhia na jornada dos primeiros anos de formação;

Aos professores Pacceli Bessa, Abdou Garba, Nelson (Nelsão), Luquésio Petrola, Jorge Herbert, Othon Dantas, Celso Barbosa, José Romildo, Plácido Andrade, pelas aulas na graduação;

Aos professores Fernando Pimentel, Antonio Caminha, Francisco Pimentel, Lev Birbrair, Levi Lima e Orlando Stanley Juriaans pelas aulas na pós-graduação;

Ao professor Gervásio Colares, pela orientação competente e pela escolha deste belo artigo que tive o privilégio de estudar, ao professor Abdênago Barros, pelos conselhos valiosos desde os primeiros anos de graduação (sem eles, talvez fosse físico), e a professora Rosa, pelas importantes observações e correções finais;

Aos meus colegas e ex-colegas da pós-graduação Marcílio Miranda, Jonas Roberto, Marcelo Ferreira, Marcos Ferreira, Flávio França, Júnio, Jocel Faustino, Marcelo Rêgo, Marcêlo, Elivaldo, Tony, Silvana, Michel Pinho, Joserlan Perote, Luís Farias, Juscelino, Paulo, Luíza, Marcus Samuel, Francisco, Joseílson, Anselmo, Henrique, Feliciano, Davi Máximo, Darlan Girão, Ivy, Marcelo Mendes, Carlos Sérgio, Carlos Augusto, Yuri e a Tiago Caúla;

Aos secretários da pós-graduação Adriano, Catarina e Andréa Costa Dantas, pela simpatia e competência em resolver os assuntos de natureza burocrática e aos bibliotecários Rocilda, Fernanda e Erivan, pelo eficiente desempenho de suas atividades;

Finalmente, ao CNPq, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio;

" Confia no Senhor de todo o teu coração e não te estribes no teu próprio entendimento. Reconhece-o em todos os teus caminhos, e ele endireitará as tuas veredas."

Pv 3.5, 6.

RESUMO

Estudaremos, de acordo com Alías e Colares em [11], o problema de unicidade para hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média de ordem superior constante em um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado (GRW). Em particular, consideraremos a seguinte pergunta: Sob quais condições deve uma hipersuperfície tipo-espaço compacta com curvatura média de ordem superior constante em um espaço-tempo GRW espacialmente fechado ser uma fatia tipo-espaço? Provaremos que isto ocorre, essencialmente, sob a então chamada condição de convergência nula. Nossa abordagem é baseada no uso das transformações de Newton (e seus operadores diferenciais associados) e nas fórmulas de Minkowski para hipersuperfícies tipo-espaço.

ABSTRACT

We'll study according Alías end Colares in [11] the problem of uniqueness for spacelike hypersurfaces with constant higher order mean curvature in generalized Robertson-Walker(GRW) spacetimes. In particular, we consider the following question: under what conditions must a compact spacelike hypersurfaces with constant higher order mean curvature in spatially closed GRW spacetime be a spacelike slice? We prove, according Alías end Colares, that this happens, essentially, under the so called null converge condition. Our approach is based on the use of the Newton transformations(and their associated differential operators) end Minkowski formulae for spacelike hypesurfaces.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Estudaremos, de acordo com Alías e Colares em [11], o problema de unicidade para hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura média de ordem superior constante em um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado (GRW). Em particular, consideraremos a seguinte pergunta: Sob quais condições deve uma hipersuperfície tipo-espaço compacta com curvatura média de ordem superior constante em um espaço-tempo GRW espacialmente fechado ser uma fatia tipo-espaço? Provaremos que isto ocorre, essencialmente, sob a então chamada condição de convergência nula. Nossa abordagem é baseada no uso das transformações de Newton (e seus operadores diferenciais associados) e nas fórmulas de Minkowski para hipersuperfícies tipo-espaço.

Uma variedade de Lorentz (ou ambiente espaço-tempo) $(\overline{M}^{n+1}, \langle , \rangle)$ é uma variedade diferenciável $\overline{M}^{n+1}$ munida de uma métrica $\langle , \rangle$ de índice 1, denominda métrica de Lorentz. Um exemplo simples de variedade de Lorentz é o espaço de Lorentz-Minkowski $(\mathbb{R}^{n+1}, \langle , \rangle)$, onde $\langle , \rangle$ é dada por

$$\langle u, v\rangle = -u_0v_0 + \sum_{i=1}^{n} u_iv_i,\ u = (u_0, \cdots, u_n),\ v = (v_0, \cdots, v_n).$$

O espaço de De Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$ é a hipersuperfície do espaço de Lorentz-Minkowski $(\mathbb{R}^{n+2}, \langle , \rangle)$ definida por $\mathbb{S}_1^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+2}; \langle x, x\rangle = 1\}$ a qual, com métrica induzida, é uma variedade de Lorentz de curvatura seccional constante igual a 1. Uma imersão $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$ numa variedade de Lorentz $\overline{M}^{n+1}$ é dita uma hipersuperfície tipo-espaço se a métrica induzida via ψ em Σ for uma métrica Riemanniana.

Dada uma variedade de Lorentz $(\overline{M}, \langle , \rangle)$, um campo de vetores $K \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ é dito conforme se a derivada de Lie com respeito a K da métrica de Lorentz satisfaz

$$\mathfrak{L}_K \langle V, W\rangle = 2\phi \langle V, W\rangle\ ,\ \forall\ V, W \in \mathfrak{X}(\overline{M}),$$

onde, $\phi \in C^\infty(\overline{M})$. Dizemos que K é fechado se para qualquer $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, $\overline{\nabla}_V K = \phi V$ (ou equivalentemente, quando sua 1-forma dual ω_K for fechada).

Um ambiente espaço-tempo $\overline{M}$ é dito conformemente estacionário (CS) se está equipado com um campo vetorial conforme K tipo-tempo (isto é, $\langle K, K\rangle < 0$) globalmente definido. Estão incluidos , por exemplo, a família dos espaços-tempo de Robertson-Walker generalizado (GRW). Por um espaço-tempo GRW, queremos dizer um produto torcido Lorentziano $-I \times_f M^n$ com fibra Riemanniana M^n e função de torção f. Em particular, quando o fator Riemanniano M^n tem curvatura seccional constante, $-I \times_f M^n$ é classicamente chamado um espaço-tempo de Robertson-Walker (RW). Em um espaço-tempo GRW, o campo vetorial dado por $K(t,x) = f(t)(\partial/\partial_t)_{(t,x)}$ define globalmente um campo conforme tipo-tempo, que é também fechado. Em particular , o espaço de De Sitter $\mathbb{S}_1^n$ pode ser considerado como o espaço-tempo GRW $\mathbb{R} \times_{\cosh t} \mathbb{S}^n$ onde $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é munida com a métrica induzida. Como observado por Montiel em [19], cada espaço-tempo CS que é equipado com um campo vetorial conforme tipo-tempo fechado é localmente isométrico a um GRW.

Nesta Dissertação, estamos interessados no estudo da unicidade de hipersuperfícies tipo-espaço compactas com curvatura média de ordem superior constante em espaço-tempo GRW. Em primeiro lugar, recordemos que se um espaço-tempo GRW $-I \times_f M^n$ admite uma hipersuperfície tipo-espaço compacta, então ela deve ser espacialmente fechada, isto é, o fator Riemanniano deve ser compacto [[12], Proposição 3.2 (i)]. Por outro lado, observe que, para um espaço-tempo GRW espacialmente fechado $-I \times_f M^n$, a família de fatias $M_t^n = \{t\} \times M^n$ constituem uma folhação de $-I \times_f M^n$, por folhas compactas totalmente umbílicas com curvatura média $H(t) = f'(t)/f(t)$ constante e, mais geralmente, a k-ésima curvatura média $H_k(t) = (f'(t)/f(t))^k$ constante (para detalhes veja [12]). Portanto, é natural dirigir-se a seguinte pergunta:

> Sob quais condições deve uma hipersuperfície tipo-espaço compacta com curvatura média de ordem superior constante em um espaço-tempo GRW espacialmente fechada ser uma fatia tipo-espaço $M_t^n = \{t\} \times M^n$?

Foi observado em [13], por Alías, Romero e Sánchez, que quando o espaço ambiente obdecia a então chamada condição de convergência nula (um espaço-tempo obedece NCC, por definição, se sua curvatura de Ricci é não negativa em direções nulas (ou seja, tipo-luz, isto é, $\langle X, X\rangle = 0$, com $X \neq 0$), observe que cada espaço-tempo com curvatura seccional constante trivialmente obedece NCC) era suficiente para garantir que a hipersuperfície era totalmente umbílica, não somente para hipersuperfícies em espaço-tempo GRW mas, mais geralmente, para hipersuperfícies em espaço-tempo CS equipado com um campo vetorial conforme tipo-tempo que é um auto-campo do operador de Ricci (e, em particular, para espaços-tempo CS que são equipados com um campo vetorial conforme tipo-tempo fechado). Mais tarde, Montiel [19] considerou novamente esta questão e, depois de uma cuidadosa classificação das hipersuperfícies umbílicas com curvatura média constante, ele demonstrou que as únicas hipersuperfícies tipo-espaço compactas com curvatura média constante em um espaço-tempo GRW que satisfazem a condição de convergência nula são as fatias tipo-espaço, a não ser no caso onde o espaço-tempo é o espaço de De Sitter e a hipersuperfície é a esfera umbílica.

Com respeito ao caso de hipersuperfícies com curvatura média de ordem superior constante, em [19] Montiel também obteve um resultado de unicidade para hipersuperfícies com curvatura escalar constante (equivalentemente, curvatura média de segunda ordem constante) em espaço-tempo CS com curvatura seccional constante. Mais recentemente, Alías, A. Brasil Jr. e Colares, iniciaram o estudo de hipersuperfícies com curvatura média de ordem superior constante em espaço-tempo CS [15].

Em todas as referencias acima considerando esta pergunta, a principal ferramenta usada para extrair informações acerca de hipersuperfícies tipo-espaço e provas de resultados são as fórmulas de Minkowski. De fato, o uso das fórmulas integrais tipo Minkowski neste contexto foi primeiro iniciado por Montiel em [18] no estudo de hipersuperfícies com curvatura média constante no espaço de De Sitter, e teve continuidade mais tarde por Alías, Romero e Sánchez em [12, 13, 14] para hipersuperfícies com curvatura média constante em um espaço-tempo GRW e, mais geralmente, em um espaço-tempo CS. Contudo, para o caso de curvatura média de ordem superior, precisamos usar sucessivamente as fórmulas de Minkowski, que envolvem a derivada covariante do tensor de Ricci no ambiente espaço-tempo.

Nesta dissertação, seguindo o que foi feito em [11], iremos a fundo no estudo de hipersuperfícies tipo-espaço com curvatura de ordem superior constante em um espaço-tempo GRW espacialmente fechado. Nossa abordagem, que é baseada no uso das então chamadas transformações de Newton P_k e seus operadores diferenciais associados de segunda ordem L_k (veja Capítulo 3), nos permite estender o resultado de unicidade anterior para o caso onde o ambiente espaço-tempo não tem curvatura seccional constante. Por exemplo, e como uma primeira aplicação, no Capítulo 5 obtemos o seguinte (manteremos a numeração da dissertação):

Teorema 1. Seja $-I \times_f M^n$ um espaço-tempo GRW espacialmente fechado tal que sua função de torção satisfaz a seguinte condição

$$ff'' - f'^2 \leq 0,$$

(isto é, tal que $-\log f$ é convexo, $(-\log f)'' \geq 0$). Seja Σ^n uma hipersuperfície tipo-espaço compacta imersa em $-I \times_f M^n$, cuja k-ésima trasformação de Newton P_k é definida em Σ para algum $k = 0, 1, \cdots, n-1$. Se o quociente H_{k+1}/H_k é constante, então a hipersuperfície é uma fatia mergulhada $\{t_0\} \times M$, onde $t_0 \in I$ satisfaz $f'(t_0) \neq 0$ se $k \geq 1$.

A prova do Teorema 1 é baseada fortemente na elipticidade do operador diferencial L_k. Nos Corolários 1 e 2 aplicamos o resultado acima para situações onde a elipticidade de L_k pode ser obtida de hipóteses geométricas.

Por outro lado, no Cápitulo 6, obtemos as fórmulas gerais de Minkowski para hipersuperfícies em um espaço-tempo GRW que podem ser aplicadas para o estudo de hipersuperfícies com curvatura média de ordem superior constante em um espaço-tempo RW arbitrário, mesmo se o espaço-tempo não tiver curvatura seccional constante.

Como uma primeira aplicação dessas fórmulas de Minkowski, no Capítulo 7, obtemos o seguinte resultado de unicidade, sob a hipótese da condição de convergência nula (NCC):

Teorema 6. Seja $-I \times_f M^n$ um espaço-tempo RW espacialmente fechado obedecendo a condição de convergência nula, com $n \geq 3$, isto é,

$$\kappa \geq sup_I(ff'' - f'^2),$$

onde κ representa a curvatura seccional constante de M^n. Então, cada hipersuperfície tipo-espaço compacta imersa em $-I \times_f M^n$ com H_2 constante positiva é totalmente umbílica. Além disso, Σ deve ser uma fatia $\{t_0\} \times M^n$ (necessariamente com $f'(t_0) \neq 0$), a menos no caso onde $-I \times_f M^n$ tiver curvatura seccional constante positiva e Σ será então uma hiperesfera umbílica. Este último caso não pode ocorrer se a desigualdade em (7.2) for estrita.

Veja também, Teoremas 7 e 8 para duas versões diferentes do Teorema 6 para o caso geral de hipersuperfícies com curvatura média de ordem superior constante H_k, onde $k \geq 3$.

Finalmente, no Capítulo 9, e como outra aplicação dos operadores diferenciais de segunda ordem associados às transformações de Newton, obtemos o seguinte resultado de unicidade para hipersuperfícies em um espaço-tempo GRW:

Teorema 10. Seja $-I \times_f M^n$ um espaço-tempo GRW espacialmente fechado obedecendo a condição de convergência nula forte, com $n \geq 3$, isto é,

$$\kappa_M \geq sup_I(ff'' - f'^2),$$

onde κ_M representa a curvatura seccional de M^n. Suponha que Σ^n é uma hipersuperfície tipo-espaço compacta imersa em $-I \times_f M^n$ que está contida em um bloco $\Omega(t_1, t_2) = (t_1, t_2) \times M^n$ em que f' não se anula. Se H_k é constante, com $2 \leq k \leq n$, então Σ é totalmente umbílica. Além disso, Σ deve ser uma fatia $\{t_0\} \times M$ (necessariamente com $f'(t_0) \neq 0$), a menos no caso onde $-I \times_f M^n$ tiver curvatura seccional constante positiva e Σ será então uma hiperesfera umbílica. Este último caso não pode ocorrer se a desigualdade em (9.4) for estrita.

A prova do Teorema 10 é baseada fortemente na elipticidade dos operadores diferenciais associados às transformações de Newton.

Capítulo 2

Preliminares

Considere M^n uma variedade Riemanniana n-dimensional, e seja I uma variedade 1-dimensional (um círculo ou um intervalo aberto de $\mathbb{R}$). Denotaremos por $-I \times_f M^n$ a variedade produto $(n+1)$-dimensional $I \times M$ munida da métrica Lorentziana

$$\langle , \rangle = -dt^2 + f^2(t) \langle , \rangle_M ,$$

onde $f > 0$ é uma função suave positiva em I, e $\langle , \rangle_M$ representa a métrica Riemanniana em M^n. Isto é, $-I \times_f M^n$ é um "produto torcido"Lorentziano com base Lorentziana $(I, -dt^2)$, fibra Riemanniana $(M^n, \langle , \rangle_M)$ e função de torção f. $-I \times_f M^n$ é um espaço-tempo de Robertson-Walker generalizado (GRW). Em particular, quando a fibra Riemanniana $(M^n, \langle , \rangle_M)$ tem curvatura seccional constante, então $-I \times_f M^n$ é classicamente chamado de um espaço-tempo Robertson-Walker (RW).

Considere uma imersão suave $\psi : \Sigma^n \longrightarrow -I \times_f M^n$ de uma variedade conexa n-dimensional Σ em um espaço-tempo GRW, e suponha que a métrica induzida via ψ é uma métrica Riemanniana em Σ, isto é, Σ é uma hipersuperfície tipo-espaço. Neste caso, visto que

$$\partial_t = (\partial/\partial_t)_{(t,x)} , \ (t,x) \in -I \times_f M^n,$$

é um campo vetorial unitário de tipo-tempo (isto é, $\langle \partial_t, \partial_t \rangle < 0$) globalmente definido no ambiente espaço-tempo GRW, pois,

$$\langle \partial_t, \partial_t \rangle = - \langle (\pi_I)_*(\partial_t), (\pi_I)_*(\partial_t) \rangle_I + f^2(\pi_I(\partial_t)) \langle (\pi_M)_*(\partial_t), (\pi_M)_*(\partial_t) \rangle_M = -1,$$

onde π_I e π_M são as projeções de $-I \times_f M^n$ sobre I e M, respectivamente, temos que, $-I \times_f M^n$ admite uma orientação temporal determinada por ∂_t. Então, existe um único campo normal unitário de tipo-tempo, N, globalmente definido em Σ que está na mesma orientação temporal de ∂_t (isto é, $\langle N, \partial_t \rangle < 0$). De fato, dado $p \in \Sigma$, $T_pM = T_p\Sigma + T_p\Sigma^\perp$, como $T_p\Sigma$ é Riemanniano (Σ é tipo-espaço), $T_p\Sigma^\perp$ é de tipo-tempo (isto é, dados $X, Y \in T_p\Sigma^\perp$, $\langle X, Y \rangle_p < 0$, veja [3] Lema 26, pag 141). Sendo Σ uma hipersuperfície, existe, localmente, tal N. Seja agora $\{U_\alpha\}$ uma cobertura aberta de Σ com a propriedade que em cada aberto tenhamos N como procuramos, e $\{f_\alpha\}$ uma partição da unidade estritamente subordinada a $\{U_\alpha\}$. Obtemos então o campo de tipo-tempo,

$$N = \frac{\sum_\alpha f_\alpha N_\alpha}{|\sum_\alpha f_\alpha N_\alpha|} \in \mathfrak{X}(\Sigma).$$

Sendo $\langle \partial_t, N \rangle < 0$ e $|\langle \partial_t, N \rangle| \geq |\partial_t|$ (veja desigualdade em [3], Proposição 30, pag.144), tem-se

$$-|\langle \partial_t, N \rangle| \leq -|\partial_t| = -1 < 0$$

$\therefore$

$$\langle \partial_t, N \rangle \leq -1 < 0 \ em \ \Sigma.$$

Nos referimos ao campo normal N como a aplicação de Gauss apontando para o futuro da hipersuperfície. Seu contrário, como a aplicação de Gauss apontando para o passado.

Seja $A : \mathfrak{X}(\Sigma) \longrightarrow \mathfrak{X}(\Sigma)$ o operador de forma em Σ com respeito a ambas aplicações de Gauss, N, apontando para o futuro ou apontando para o passado. Como sabemos, A define um operador linear auto-adjunto em cada espaço tangente $T_p\Sigma$ e seus auto-valores $\kappa_1(p), \cdots, \kappa_n(p)$ são as curvaturas principais da hipersuperfície. Associado ao operador de forma, existem n invariantes algébricos, dados por

$$S_k(p) = \sigma_k(\kappa_1(p), \cdots, \kappa_n(p)), \ 1 \leq k \leq n,$$

onde $\sigma_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é a função elementar simétrica em $\mathbb{R}^n$ dada por

$$\sigma_k(x_1, \cdots, x_n) = \Sigma_{i_1 < \cdots < i_k} x_{i_1} \cdots x_{i_k}.$$

Observe que o polinômio característico de A pode ser escrito em termos dos $S_k's$ como

$$det(tI - A) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k S_k t^{n-k}, \tag{2.1}$$

onde $S_0 = 1$ por definição. A k-ésima curvatura média, H_k, da hipersuperfície é então definida por

$$\binom{n}{k} H_k = (-1)^k S_k = \sigma_k(-\kappa_1, \cdots, -\kappa_k), \ \forall \ 0 \leq k \leq n$$

e

$$H_k = 0, \ se \ k > n.$$

Em particular, quando $k = 1$

$$H_1 = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\kappa_i = -\frac{1}{n}tr(A) = H$$

é a curvatura média de Σ. A escolha do sinal $(-1)^k$ em nossa definição de H_k, é motivada pelo fato que o vetor curvatura média (que é definido por $\overrightarrow{H} = -\frac{1}{n}tr(A)N$) é dado por $\overrightarrow{H} = HN$. Portanto, $H(p) > 0$ em um ponto $p \in \Sigma$ se, e somente se, $\overrightarrow{H}(p)$ está na mesma orientação temporal de N, pois $\left\langle \overrightarrow{H}, N \right\rangle = H \langle N, N\rangle = -H$. Observe que quando k é par o sinal de H_k não depende da escolha da aplicação de Gauss.

Observação. A curvatura H_2 está diretamente relacionada com a curvatura escalar de Σ, sendo então, H_2 uma curvatura intrínsica de Σ, que é dada por

$$n(n-1)H_2 = \overline{S} - S + 2\overline{Ric}(N,N), \tag{2.2}$$

onde S e $\overline{S}$ são, respectivamente, a curvatura escalar de Σ e $-I \times_f M^n$, e $\overline{Ric}$ representa o tensor de Ricci do ambiente espaço-tempo GRW. De fato, seja $\{E_i, \cdots, E_n\}$ um referencial local ortonormal em Σ. Notemos que sendo Σ tipo-espaço, $\langle E_i, E_j\rangle = \delta_{ij}$. Assim, como

$$R(X,Y)Z = (\overline{R}(X,Y)Z)^{\top} - \langle AX, Z\rangle AY + \langle AY, Z\rangle AX$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ (veja [3], Teorema 5, pag. 100), onde R e $\overline{R}$ (usamos de acordo com [3], $\overline{R}(X,Y)Z = \overline{\nabla}_{[X,Y]}Z - [\overline{\nabla}_X, \overline{\nabla}_Y]Z$) são, respectivamente, os tensores de curvatura de M^n e $-I \times_f M^n$, temos

$$\langle R(X,E_j)Y, E_j\rangle = \left\langle \overline{R}(X,E_j)Y, E_j\right\rangle - \langle AX, Y\rangle \langle AE_j, E_j\rangle + \langle AE_j, Y\rangle \langle AX, E_j\rangle,$$

pata todo $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, $1 \leq j \leq n$. Logo, como $E_i, \cdots, E_n, N$ é um referencial local ortonormal em $-I \times_f M^n$ e $\langle N, N\rangle = -1$, temos

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= \overline{Ric}(X,Y) + \left\langle \overline{R}(X,N)Y, N\right\rangle - \langle AX, Y\rangle \sum_{j=1}^{n} \langle AE_j, E_j\rangle + \\ &+ \sum_{j=1}^{n} \langle AE_j, Y\rangle \langle AX, E_j\rangle, \end{aligned}$$

onde $Ric(X,Y) := \sum_{i=1}^{n} \langle R(X,E_i)Y, E_i\rangle$ e $\overline{Ric}(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{R}(X,E_i)Y, E_i\right\rangle - \left\langle \overline{R}(X,N)Y, N\right\rangle$, definem, respectivamente, os tensores de Ricci de Σ e de $-I \times_f M^n$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \langle AE_j, Y\rangle \langle AX, E_j\rangle &= \sum_{j=1}^{n} \langle E_j, AY\rangle \langle E_j, AX\rangle = \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} \langle E_j, AY\rangle \langle E_k, AX\rangle \delta_{jk} = \\
&= \left\langle \sum_{j=1}^{n} \langle E_j, AY\rangle E_j, \sum_{k=1}^{n} \langle E_k, AX\rangle E_k \right\rangle = \\
&= \langle AY, AX\rangle .
\end{aligned}$$

Assim,

$$Ric(X,Y) = \overline{Ric}(X,Y) + \left\langle \overline{R}(X,N)Y, N\right\rangle - tr(A)\langle AX, Y\rangle + \langle AX, AY\rangle ,$$

$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} Ric(E_j, E_j) &= \sum_{j=1}^{n} \overline{Ric}(E_j, E_j) - \overline{Ric}(N,N) + \overline{Ric}(N,N) + \\
&+ \sum_{j=1}^{n} \left\langle \overline{R}(E_j, N)E_j, N\right\rangle - tr(A)\sum_{j=1}^{n} \langle AE_j, E_j\rangle + \\
&+ \sum_{j=1}^{n} \langle AE_j, AE_j\rangle .
\end{aligned}$$

Registremos agora a definição da curvatura escalar de Σ e $-I \times_f M^n$, respectivamente, como

$$S := \sum_{j=1}^{n} Ric(E_j, E_j) \ e \ \overline{S} := \sum_{j=1}^{n} \overline{Ric}(E_j, E_j) - \overline{Ric}(N,N),$$

onde $E_1, \cdots, E_n$ é um referencial local ortonormal em Σ. Portanto, para $E_1, \cdots, E_n$ um referencial local ortonormal em Σ que diagonaliza o operador de forma A num ponto $p \in \Sigma$, isto é, $AE_j = \kappa_j E_j, \ j = 1, \cdots, n$, obtemos

$$S = \overline{S} + 2\overline{Ric}(N,N) - (\sum_{i=1}^{n} \kappa_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} \kappa_i^2$$

ou ainda, como $(\sum_{i=1}^{n} \kappa_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} \kappa_i^2 = 2\sum_{1\leq i<j\leq n} \kappa_i\kappa_j$,

$$S = \overline{S} + 2\overline{Ric}(N,N) - n(n-1)H_2.$$

Capítulo 3

As Transformações de Newton e seus Operadores Diferenciais Associados

As tranformações de Newton $P_k : \mathfrak{X}(\Sigma) \longrightarrow \mathfrak{X}(\Sigma)$ são definidas indutivamente de A por

$$P_0 = I \ e \ P_k = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) H_k I + A \circ P_{k-1},$$

para cada $k = 1, \cdots, n$, onde I é a identidade em $\mathfrak{X}(\Sigma)$. Equivalentemente,

$$P_k = \sum_{j=0}^{k} \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right) H_j A^{k-j}.$$

Note que quando k é par, a definição de P_k não depende da escolha da aplicação de Gauss, mas quando k é impar, existe uma escolha de sinal na definição de P_k.

Observações. (i) Veja que, em cada ponto $p \in \Sigma$, $P_k : T_p(\Sigma) \longrightarrow T_p(\Sigma)$ é um operador liner auto-adjunto que comuta com o operador A.

De fato, sendo $A : T_p(\Sigma) \longrightarrow T_p(\Sigma)$ auto-adjunto, $\forall \ v, w \in T_p(\Sigma)$ temos

$$\begin{aligned} \langle P_k v, w \rangle &= \left\langle (\sum_{j=0}^{k} \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right) H_j A^{k-j}) v, w \right\rangle = \sum_{j=0}^{k} \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right) H_j \left\langle A^{k-j} v, w \right\rangle = \\ &= \sum_{j=0}^{k} \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right) H_j \left\langle v, A^{k-j} w \right\rangle = \left\langle v, (\sum_{j=0}^{k} \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right) H_j A^{k-j}) w \right\rangle = \langle v, P_k w \rangle, \end{aligned}$$

ademais,

$$\begin{aligned} P_k \circ A &= (\sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} H_j A^{k-j}) \circ A = \sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} H_j A^{k-j+1} = \\ &= \sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} H_j A \circ A^{k-j} = A \circ (\sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} H_j A^{k-j}) = A \circ P_k. \end{aligned}$$

(ii) Sendo o polinômio característico do operador A dado por

$$p_A(t) = det(tI - A) = \prod_{i=1}^{n}(t - \kappa_i) = \sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} H_j t^{n-j},$$

pelo Teorema de Cayley-Hamilton

$$P_n = \sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} H_j A^{n-j} = p_A(A) = 0.$$

Como $A(p)$ comuta com $P_k(p)$, eles podem ser simultaneamente diagonalizados. Se $\{e_1, \cdots, e_n\}$ são os auto-vetores de $A(p)$, correspondendo aos auto-valores $\kappa_1(p), \cdots, \kappa_n(p)$, respectivamente, então eles são também auto-vetores de $P_k(p)$.

Proposição 1. *Sejam $E_1, \cdots, E_n$ um referencial local ortonormal que diagonaliza o operador de forma A em um ponto $p \in \Sigma^n$, isto é, $AE_i = \kappa_i E_i$, $i = 1, \cdots, n$ e P_k, transformação de Newton, $0 \leq k \leq n$. Então, em $p \in \Sigma^n$,*

$$P_k E_i = \mu_{i,k} E_i, \tag{3.1}$$

onde $\mu_{i,k} = (-1)^k \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \kappa_{i_1} . \cdots . \kappa_{i_k}$ se $0 < k \leq n$ e $\mu_{i,0} = 1$;

$$tr(P_k) = c_k H_k; \tag{3.2}$$

$$tr(A \circ P_k) = -c_k H_{k+1}; \tag{3.3}$$

$$tr(A^2 \circ P_k) = \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} (nH_1 H_{k+1} - (n-k-1)H_{k+2}), \tag{3.4}$$

onde $c_k = (n-k) \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = (k+1) \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix}$.

Para a prova desta proposição, veja [9], Lema 2.1.

Seja ∇ a conexão de Levi-Civita de Σ. Associado a cada transformação de Newton P_k, consideremos o operador linear diferencial de segunda ordem $L_k : C^\infty(\Sigma) \longrightarrow C^\infty(\Sigma)$ dado por

$$L_k(f) = tr(P_k \circ \nabla^2 f).$$

Aqui $\nabla^2 f : \mathfrak{X}(\Sigma) \longrightarrow \mathfrak{X}(\Sigma)$ denota o operador liner auto-adjunto dado por

$$\left\langle \nabla^2 f(X), Y \right\rangle := Hessf(X,Y) = \langle \nabla_X(\nabla f), Y \rangle\,, \ X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$$

Observe que

$$\begin{aligned} L_k(f) &= tr(P_k \circ \nabla^2 f) = \sum_{i=1}^n \langle P_k(\nabla_{E_i}\nabla f), E_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i}\nabla f, P_k(E_i) \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^n \left\langle \nabla_{P_k(E_i)}\nabla f, E_i \right\rangle = tr(\nabla^2 f \circ P_k), \end{aligned} \tag{3.5}$$

onde $\{E_1, \cdots, E_n\}$ é um referencial local ortonormal em Σ. Além disso, também temos que

$$\begin{aligned} div(P_k(\nabla f)) &= tr(\nabla P_k(\nabla f)) = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} P_k(\nabla f), E_i \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{E_i} P_k)(\nabla f) + P_k(\nabla_{E_i}\nabla f), E_i \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{E_i} P_k)(\nabla f), E_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle P_k(\nabla_{E_i}\nabla f), E_i \rangle\,. \end{aligned}$$

Note que,

$$\langle divP_k, \nabla f \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n (\nabla_{E_i} P_k)E_i, \nabla f \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{E_i} P_k)E_i, \nabla f \rangle = \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{E_i} P_k)\nabla f, E_i \rangle\,.$$

Portanto,

$$div(P_k(\nabla f)) = \langle divP_k, \nabla f \rangle + L_k(f). \tag{3.6}$$

Em particular, se P_k é livre de divergente, isto é, $div(P_k) = 0$, então $L_k(f) = div(P_k(\nabla f))$. Isto ocorre trivialmente quando $k = 0$, pois $\forall\ X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$,

$$(\nabla_X I)(Y) = \nabla_X(I(Y)) - I(\nabla_X Y) = \nabla_X Y - \nabla_X Y = 0,$$

assim,

$$divP_0 = divI = \sum_{i=1}^{n}(\nabla_{E_i} I)(E_i) = 0,$$

e então, L_0 é exatamente o operador Laplaciano Δ. Por outro lado, por [[15], Corolário 3.2], isto também ocorre para $k = 0, \cdots, n$ quando o ambiente espaço-tempo GRW tem curvatura seccional constante. Isto é uma consequência do próximo resultado.

Lema 1. *As divergências das transformações de Newton P_k de uma hipersuperfície tipo-espaço Σ^n imersa em um espaço-tempo $(n+1)$-dimensional são dadas por*

$$\langle divP_k, X\rangle = \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{R}(E_i, A^{k-1-j}X)N, P_jE_j\right\rangle, \;\; k = 1, \cdots, n-1,$$

(vimos também que $divP_0 = 0$) para cada campo vetorial tangente $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, onde $\overline{R}$ denota o tensor curvatura do espaço-tempo.

Veja a prova deste lema em [[15], Lema 3.1].

Segue de (3.6) que o operador L_k é elíptico se, e somente se, P_k é positivo definido e $L_0 = \Delta$ é sempre elíptico (veja [6] e Apêndice, Proposição 2). Para nossas aplicações, será útil termos algumas condições que garantem a elipticidade de L_k quando $k \geq 1$.

Lema 2. *Seja Σ uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em um espaço-tempo GRW. Se $H_2 > 0$ em Σ, então L_1 é elíptico ou, equivalentemente, P_1 é positiva definida (para uma escolha apropriada da aplicação de Gauss N).*

Demonstração. Observe que,

$$\begin{aligned} H_1^2 - H_2 &= \frac{1}{n^2}(\sum_{i=1}^{n}\kappa_i)^2 - \frac{2}{n(n-1)}\sum_{1\leq i<j\leq n}\kappa_i\kappa_j = \\ &= \frac{1}{n(n-1)}\left\{(1-\frac{1}{n})(\sum_{i=1}^{n}\kappa_i)^2 - 2\sum_{1\leq i<j\leq n}\kappa_i\kappa_j\right\} = \\ &= \frac{1}{n(n-1)}\left\{(\sum_{i=1}^{n}\kappa_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}\kappa_i\kappa_j) - 2\sum_{1\leq i<j\leq n}\kappa_i\kappa_j - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}\kappa_i)^2\right\} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n(n-1)} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \kappa_i^2 - \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^{n} \kappa_i)^2 \right\}.$$

Por outro lado, aplicando a desiqualdade de Cauchy-Schwarz para os vetores $v = (\kappa_1, \cdots, \kappa_n)$ e $u = (1, \cdots, 1)$, obtemos:

$$(\sum_{i=1}^{n} \kappa_i)^2 = \langle u, v \rangle^2 \leq |u|^2 |v|^2 = n \sum_{i=1}^{n} \kappa_i^2.$$

Logo,

$$H_1^2 - H_2 = \frac{1}{n(n-1)} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \kappa_i^2 - \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^{n} \kappa_i)^2 \right\} \geq 0,$$

isto é, $H_1^2 \geq H_2 > 0$, pois H_2 não se anula em Σ. Para uma escolha apropriada da aplicacão de Gauss, podemos supor que $H_1 > 0$. Relembremos que H_2 não depende da escolha de N. Visto que $n^2 H_1^2 = \sum_i \kappa_i^2 + n(n-1)H_2 > \kappa_i^2$ para cada $i = 1, \cdots, n$, então

$$\mu_{i,j} = -\sum_{j=1, j \neq i}^{n} \kappa_j = n \left[-\frac{1}{n} (\sum_{j=1, j \neq i}^{n} \kappa_j + \kappa_i - \kappa_i) \right] = nH_1 + \kappa_i > |\kappa_i| + \kappa_i \geq 0,$$

para cada i, e assim P_1 é positivo definido.

□

Definição 1. *Um ponto elíptico em uma hypersurperfície tipo-espaço, Σ, é um ponto de Σ onde todas as curvaturas principais são negativas, com respeito a uma escolha apropriada da aplicação de Gauss N.*

Quando $2 \leq k \leq n-1$, a existência de um ponto elíptico em Σ também implica que o operador L_k é elíptico em Σ, sob a hipótese que H_{k+1} é positiva em Σ para alguma escolha de N (se k é par). Temos o seguinte resultado.

Lema 3. *Seja Σ hipersuperfície tipo-espaço imersa em um espaço-tempo GRW. Se existe um ponto elíptico de Σ, com respeito a uma escolha apropriada da aplicação de Gauss N, e $H_{k+1} > 0$ em Σ, para algum $2 \leq k \leq n-1$, então para todo $1 \leq j \leq k$ o operador L_j é elíptico ou, equivalentemente, P_j é positivo definido em Σ.*

Para a prova, veja [[20], Proposição 3.2] (veja também a prova de [[9], Proposição 3.2]).

Capítulo 4

O Operador L_k Atuando na Função Altura

O campo vetorial dado por

$$K(t,x) = f(t)(\partial/\partial t)_{(t,x)}, \quad (t,x) \in -I \times_f M^n,$$

determina um campo vetorial conforme fechado não nulo em $-I \times_f M^n$, onde

$$\overline{\nabla}_Z K = f'(t)Z \tag{4.1}$$

para cada vetor tangente Z a $-I \times_f M^n$ em um ponto (t,x), onde $\overline{\nabla}$ denota a conexão de Levi-Civita em $-I \times_f M^n$ (veja Apêndice, Proposição 6).

Lema 4. *Seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow -I \times_f M^n$ uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em um espaço-tempo GRW, com aplicação de Gauss N. Se $h = \pi_I \circ \psi$ denota a função altura de Σ, e $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é qualquer primitiva de f, então, para cada $k = 0, ..., n-1$, temos*

$$L_k(h) = -(\log f)'(h)(c_k H_k + \langle P_K(\nabla h), \nabla h\rangle) - \langle N, \partial_t\rangle\, c_k H_{k+1}, \tag{4.2}$$

e

$$L_k(g(h)) = -c_k(f'(h)H_k + \langle N, K\rangle\, H_{k+1}), \tag{4.3}$$

onde

$$c_k = (n-k)\binom{n}{k} = (k+1)\binom{n}{k+1}$$

Demonstração. Temos que

$$L_k(g(h)) = tr(P_k \circ \nabla^2 g(h)).$$

Observe que, dado $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$

$$\langle \nabla g(h), X \rangle = d(g \circ h)X = g'(h).dhX = g'(h) \langle \nabla h, X \rangle,$$

donde

$$\nabla g(h) = g'(h)\nabla h.$$

Por outro lado, como

$$\overline{\nabla}\pi_I = \nabla(\pi_I \circ \psi) + (\overline{\nabla}\pi_I)^{\perp} = \nabla h + (\overline{\nabla}\pi_I)^{\perp},$$

temos que $\nabla h = (\overline{\nabla}\pi_I)^{\top}$, onde $(\overline{\nabla}\pi_I)^{\top}$ é a componente tangencial de $(\overline{\nabla}\pi_I)$. Notemos agora que

$$\overline{\nabla}\pi_I = -\partial_t(\pi_I)\partial_t = -\left\langle \overline{\nabla}\pi_I, \partial_t \right\rangle \partial_t = -\partial_t,$$

pois se $\{\partial_t, X_1, ..., X_n\}$ é um referencial ortonormal,

$$\overline{\nabla}\pi_I = -\partial_t(\pi_I)\partial_t + \sum_{i=1}^{n} X_i(\pi_I)X_i,$$

onde

$$X_i(\pi_I) = d\pi_I X_i = 0.$$

Assim,

$$\nabla h = (\nabla\pi_I)^{\top} = -\partial_t^{\top}, \tag{4.4}$$

onde

$$\partial_t^{\top} = \partial_t + \langle \partial_t, N \rangle N \quad (\textit{visto que } \langle N, N \rangle = -1)$$

Logo

$$\nabla g(h) = f(h)\nabla h = -f(h)\partial_t^{\top} = -K^{\top}, \tag{4.5}$$

onde $K^{\top}$ denota a componente tangente de K ao longo da hipersuperfície.

$$K^{\top} = K + \langle K, N \rangle N. \tag{4.6}$$

A equação 4.1 implica que

$$\overline{\nabla}_X K = f'(h)X, \tag{4.7}$$

para cada $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, visto que todo ponto de $-I \times_f M^n$ se escreve da forma $(\pi_I(p), \pi_M(p))$, $p \in -I \times_f M^n$. Vemos assim que,

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X K^{\top} &= \overline{\nabla}_X (K + \langle K, N \rangle N) = \overline{\nabla}_X K + \overline{\nabla}_X \langle K, N \rangle N = \\ &= f'(h)X + \langle K, N \rangle \overline{\nabla}_X N + (X \langle K, N \rangle) N = \\ &= f'(h)X - \langle K, N \rangle AX + \left(\left\langle \overline{\nabla}_X K, N \right\rangle + \left\langle K, \overline{\nabla}_X N \right\rangle \right) N = \\ &= f'(h)X - \langle K, N \rangle AX + (\langle f'(h)X, N \rangle + \langle f'(h)\partial_t, AX \rangle) N = \\ &= f'(h)X - \langle K, N \rangle AX = \\ &= f'(h)X - f(h) \langle \partial_t, N \rangle AX \end{aligned} \tag{4.8}$$

Como $\overline{\nabla}_X K^{\top}$ só tem componentes tangentes, $\overline{\nabla}_X K^{\top} = \nabla_X K^{\top}$, daí

$$\nabla_X K^{\top} = f'(h)X - f(h) \langle \partial_t, N \rangle AX$$

Portanto, de 4.5, temos que

$$\nabla_X (\nabla g(h)) = -\nabla_X K^{\top} = -f'(h)X + \langle N, K \rangle AX, \tag{4.9}$$

e então, por 3.2 e 3.3, concluimos que

$$\begin{aligned} L_k(g(h)) &= tr(P_k \circ \nabla^2 g(h)) = tr(\nabla^2 g(h) \circ P_k) = tr((-f'(h)I + \langle N, K \rangle A) \circ P_k) = \\ &= -f'(h) tr(P_k) + \langle N, K \rangle tr(A \circ P_k) = \\ &= -c_k (f'(h) H_k + \langle N, K \rangle H_{k+1}). \end{aligned}$$

Por outro lado, levando em conta que

$$\nabla h = (1/f(h)) \nabla g(h), \ (por\ 4.5)$$

temos de 4.9 que

$$
\begin{aligned}
\nabla_X(\nabla h) &= \nabla_X((1/f(h))\nabla g(h)) = (1/f(h))\nabla_X g(h) + X(1/f(h))\nabla g(h) = \\
&= (1/f(h))(-f'(h)X + \langle N, K\rangle AX) + (X(f(h))/f^2(h))f(h)\partial_t^\top = \\
&= (-f'(h)/f(h))X + (f(h)/f(h))\langle N, \partial_t\rangle AX + (X(f(h))/f(h))\partial_t^\top = \\
&= -(f'(h)/f(h))X - (f'(h)/f(h))\langle \nabla h, X\rangle \nabla h + \langle N, \partial_t\rangle AX = \\
&= -(\log f)'(h)(X + \langle \nabla h, X\rangle \nabla h) + \langle N, \partial_t\rangle AX. \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
L_k(h) &= tr(P_k \circ \nabla^2 h) = tr(\nabla^2 h \circ P_k) = \sum_i \left\langle \nabla_{P_k(E_i)}\nabla h, E_i\right\rangle = \\
&= -(\log f)'(h) tr(P_k) + \langle N, \partial_t\rangle tr(A \circ P_k) - \\
&- (\log f)'(h)\sum_i \langle\langle \nabla h, P_k E_i\rangle \nabla h, E_i\rangle .
\end{aligned}
$$

onde $\{E_i\}$ é um referencial ortonormal. Observe que

$$
\begin{aligned}
\sum_i \langle\langle \nabla h, P_k E_i\rangle \nabla h, E_i\rangle &= \sum_i \langle\langle P_k\nabla h, E_i\rangle \nabla h, E_i\rangle = \\
&= \left\langle \sum_i \langle P_k \nabla h, E_i\rangle E_i, \nabla h\right\rangle = \\
&= \langle P_k\nabla h, \nabla h\rangle .
\end{aligned}
$$

Daí

$$
\begin{aligned}
L_k(h) &= -(\log f)'(h)(tr(P_k) + \langle P_k\nabla h, \nabla h\rangle) + \langle N, \partial_t\rangle tr(A \circ P_k) = \\
&= -(\log f)'(h)(c_k H_k + \langle P_k\nabla h, \nabla h\rangle) - \langle N, \partial_t\rangle c_k H_{k+1}.
\end{aligned}
$$

□

Capítulo 5

Primeiras Aplicações

Como uma aplicação do Lema 4 provaremos o Teorema 1 abaixo. Antes de apresentarmos o resultado, relembremos de [[12], Proposição 3.2 (i)] que se um espaço-tempo GRW admite uma hipersuperfície tipo-espaço compacta, então o fator Riemanniano M^n é necessariamente compacto. Neste caso, dizemos que $-I \times_f M^n$ é um espaço-tempo GRW *espacialmente fechado*.

Teorema 1. *Seja $-I \times_f M^n$ um espaço-tempo GRW espacialmente fechado tal que sua função de torção satisfaz a seguinte condição*

$$ff'' - f'^2 \leq 0, \tag{5.1}$$

(isto é, tal que $-\log f$ é convexo, $(-\log f)'' \geq 0$). Seja Σ^n uma hipersuperfície tipo-espaço compacta imersa em $-I \times_f M^n$, cuja k-ésima trasformação de Newton P_k é definida em Σ para algum $k = 0, 1, \cdots, n-1$. Se o quociente H_{k+1}/H_k é constante, então a hipersuperfície é uma fatia mergulhada $\{t_0\} \times M$, onde $t_0 \in I$ satisfaz $f'(t_0) \neq 0$ se $k \geq 1$.

Antes de darmos a prova do Teorema 1, é interessante obtermos algumas aplicações deste para situações onde a hipótese sobre P_k pode ser derivada de hipóteses geométricas. Por exemplo, do Lema 2, temos o seguinte resultado.

Corolário 1. *Seja $-I \times_f M^n$ um espaço-tempo GRW espacialmente fechado tal que sua função de torção satisfaz a condição*

$$ff'' - f'^2 \leq 0.$$

Então as únicas hipersuperfícies tipo-espaço compactas, Σ, imersas em $-I \times_f M^n$ tal que $H_2 \geq 0$ em Σ e o quociente H_2/H_1 é constante, são as fatias mergulhadas $\{t_0\} \times M$, com $t_0 \in I$ satisfazendo $f'(t_0) \neq 0$.

Demonstração. Como $H^2 > 0$ em Σ, o Lema 2 nos garante que P_1 é positivo definido. Visto que a função f satisfaz 5.1 e H_2/H_1 é constante, o Teorema 1 implica que Σ é uma fatia mergulhada $\{t_0\} \times M$, com $t_0 \in I$ satisfazendo $f'(t_0) \neq 0$, pois $k = 1$. □

Por outro lado, para aplicar o Lema 3, é conveniente termos alguma condição geométrica que implique a existência de um ponto elíptico. O seguinte resultado é uma consequência de um resultado mais geral dado em [[15], Lema 5.4 e observação 5.7], que será essencial para nossas aplicações.

Lema 5 (Existência de um ponto elíptico)**.** *Seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow -I \times_f M^n$ uma hipersuperfície tipo-espaço compacta imersa em um espaço-tempo GRW espacialmente fechado, e suponha que $f'(h)$ não se anula em Σ (equivalentemente, $\psi(\Sigma)$ está contida em um bloco*

$$\Omega(t_1, t_2) = (t_1, t_2) \times M \subset -I \times_f M^n$$

em que f' não se anula).

(1) Se $f'(h) > 0$ em Σ (equivalentemente, $f' > 0$ em (t_1, t_2)), então existe um ponto elíptico de Σ com respeito a sua aplicação de Gauss apontando para o futuro.

(2) Se $f'(h) < 0$ em Σ (equivalentemente, $f' < 0$ em (t_1, t_2)), então existe um ponto elíptico de Σ com respeito a sua aplicação de Gauss apontando para o passado.

Demonstração. Observe que todos os pontos de $\psi(\Sigma)$ são da forma $(\pi_I(\psi(p)), \pi_M(\psi(p)))$, onde $p \in \Sigma$. Por outro lado, sendo Σ compacta, existem t_1 e $t_2 \in \mathbb{R}$ tal que $t_1 \leq h = \pi_I \circ \psi \leq t_2$, donde $\psi(\Sigma) \subset \Omega(t_1, t_2)$.

Se $f'(h) > 0$, escolhemos em Σ a aplicação de Gauss apontando para o futuro N e seja $p_0 \in \Sigma$ um ponto onde a função altura atinge seu mínimo em Σ. Então, temos que $\nabla h(p_0) = 0, \langle N, \partial_t \rangle (p_0) = -1$ e por (4.10) temos

$$\begin{aligned}
\nabla^2 h_{p_0}(e_i, e_i) &= \langle \nabla_{e_i} \nabla h, e_i \rangle (p_0) = \\
&= \langle -(\log f)'(h)(e_i + \langle \nabla h, e_i \rangle \nabla h) + \langle N, \partial_t \rangle A e_i, e_i \rangle (p_0) = \\
&= -(\log f)'(h_{min}) - k_i(p_0) \geq 0
\end{aligned}$$

para cada $i = 1, ..., n$, onde $\{e_i\}_{i=1}^n$ é uma base de direções principais em p_0. Visto que $f'(h_{min}) > 0$,

$$k_i(p_0) \leq -(\log f)'(h_{min}) = -(f'/f)(h_{min}) < 0,$$

como desejado.

Por outro lado, quando $f'(h) < 0$ escolhemos em Σ a aplicação de Gauss apontando para o passado e consideremos $p_0 \in \Sigma$ um ponto onde a função altura atinge seu máximo em Σ. Agora, temos que $\nabla h(p_0) = 0, \langle N, \partial_t \rangle = 1$ e por (4.10) temos

$$\nabla^2 h_{p_0}(e_i, e_j) = -(\log f)'(h_{max}) + k_i(p_0) \leq 0$$

para cada $i = 1, \cdots, n$ com $\{e_i\}_{i=1}^n$ uma base de direções principais em p_0. Visto que agora $f'(h_{max}) < 0$, temos que

$$k_i(p_0) \leq (\log f)'(h_{max}) = (f'/f)(h_{max}) < 0$$

□

Agora, usando o Lema 3 e Lema 5, podemos também dar a seguinte aplicação.

Corolário 2. *Seja $-I \times_f M^n$ um espaço-tempo GRW espacialmente fechado tal que sua função de torção satisfaz a condição*

$$ff'' - f'^2 \leq 0.$$

Suponha que $\Sigma^n, n \geq 3$, é uma hipersuperfície tipo-espaço compacta imersa em $-I \times_f M^n$ que está contida em um bloco $\Omega(t_1, t_2) \subset -I \times_f M^n$ em que f' não se anula. Se $H_{k+1} > 0$ em Σ para algum $k \geq 2$ e um dos quocientes H_{j+1}/H_j é constante para algum $1 \leq j \leq k$, então Σ é necessariamente uma fatia mergulhada $\{t_0\} \times M$, com $t_0 \in (t_1, t_2)$.

Demonstração. Como Σ está contido em um bloco $\Omega(t_1, t_2) \subset -I \times_f M^n$ onde f' não se anula, pelo Lema 5, existe um ponto elíptico em Σ. Se $H_{k+1} > 0$ em Σ para algum $k \geq 2$, pelo Lema 3, P_j é positivo definido para $1 \leq j \leq k$. Daí, se também, H_{j+1}/H_j for contante para algum $1 \leq j \leq k$, pelo Teorema 1, Σ é necessarimente uma fatia mergulhada $\{t_0\} \times M$, com $t_0 \in (t_1, t_2)$, pois f satisfaz (5.1). □

A prova do Teorema 1 será uma consequência do seguinte resultado, que é uma generalização do Lema 3 e Corolário 4 em [16].

Lema 6. *Seja $-I \times_f M^n$ um espaço-tempo GRW espacialmente fechado, e seja Σ^n uma hipersuperfície tipo-espaço compacta imersa em $-I \times_f M^n$. Suponha que para algum $k \in \{0, \cdots, n-1\}$, a k-ésima transformação de Newton P_k é semi-definida em Σ e a função H_k não se anula em Σ. Então o quociente H_{k+1}/H_k satisfaz*

$$min\left(\frac{H_{k+1}}{H_k}\right) \leq (\log f)'(h_{max}) \text{ e } max\left(\frac{H_{k+1}}{H_k}\right) \geq (\log f)'(h_{min}), \tag{5.2}$$

onde h_{min} e h_{max} denotam, respectivamente, o valor mínimo e máximo da função altura em Σ. Em particular, se a função de torção satisfaz a condição (5.1) então

$$min\left(\frac{H_{k+1}}{H_k}\right) \leq (\log f)'(h_{max}) \leq (\log f)'(h_{min}) \leq max\left(\frac{H_{k+1}}{H_k}\right). \tag{5.3}$$

Demonstração. Escolha em Σ a aplicação de Gauss apontando para o futuro N. Visto que, Σ é compacta, existem pontos $P_{min}, P_{max} \in \Sigma$ onde a função altura assume seus valores de máximo e mínimo, respectivamente, isto é,

$$h(P_{min}) = min_{\Sigma}\ h = h_{min} \leq h_{max} = h(P_{max}) = max_{\Sigma}\ h.$$

Em particular, $\nabla h(P_{min}) = 0$ e $\nabla h(P_{max}) = 0$, e de (4.4) temos que $N(P_{min}) = (\partial_t)_{P_{min}}$ e $N(P_{max}) = (\partial_t)_{P_{max}}$. Usando isto em (4.2), obtemos que

$$L_k(h)(P_{min}) = (-(\log f)'(h)(c_k H_k + \langle P_k(\nabla h), \nabla h\rangle) - \langle N, \partial_t\rangle\, c_k H_{k+1})(P_{min})$$

Daí,

$$(1/c_k)L_k(h)(P_{min}) = H_{k+1}(P_{min}) - (\log f)'(h_{min})H_k(P_{min}) \tag{5.4}$$

e

$$(1/c_k)L_k(h)(P_{max}) = H_{k+1}(P_{max}) - (\log f)'(h_{max})H_k(P_{max}). \tag{5.5}$$

Consideremos primeiro o caso onde P_k é positivo semi-definido em Σ. Então $H_k > 0$ em Σ, visto que por (3.2) $c_k H_k = tr(P_k) \geq 0$, $c_k \geq 0$ e por hipótese $H_k \neq 0$. Neste caso, levando em conta que $L_k(h) = tr(P_k \circ \nabla^2 h)$, onde $\nabla^2 h(P_{min})$ é positiva semi-definida e $\nabla^2 h(P_{max})$ é negativa semi-definida, temos que $L_k(h)(P_{min}) \geq 0$ e $L_k(h)(P_{max}) \leq 0$, pois P_k é positiva semi-definida, Σ é uma variedade Riemanniana (métrica positiva-definida) e $\nabla^2 h$ é auto-adjunta. Logo, o teorema espectral, garante a afirmação acima. Portanto, as equações (5.4) e (5.5) implicam

$$max\left(\frac{H_{k+1}}{H_k}\right) \geq \frac{H_{k+1}}{H_k}(P_{min}) \geq (\log f)'(h_{min}) \tag{5.6}$$

pois

$$0 \leq (1/c_k)L_k(h)(P_{min})(1/H_k(P_{min})) = \frac{H_{k+1}}{H_k}(P_{min}) - (\log f)'(h_{min}) \quad (por\ 5.4)$$

e

$$min\left(\frac{H_{k+1}}{H_k}\right) \leq \frac{H_{k+1}}{H_k}(P_{max}) \leq (\log f)'(h_{max}) \tag{5.7}$$

Isto prova (5.2). Finalmente, se $(-\log f)$ é convexo, isto é, $(-\log f)'' \geq 0$, então $(\log f)'' \leq 0$, donde $(\log f)'$ é não-crescente e assim

$$(\log f)'(h_{max}) \leq (\log f)'(h_{min}),$$

que juntamente com (5.2) dá (5.3). Isto completa a prova no caso onde P_k é positiva semi-definida. Quando P_k é negativa semi-definida, $H_k < 0$, $L_k(h)(P_{min}) \leq 0$ e $L_k(h)(P_{max}) \geq 0$. Por outro lado, notemos que tanto (5.6) como (5.7) não se alteram. De fato, por (5.4)

$$0 \geq (1/c_k)L_k(h)(P_{min}) = H_{k+1}(P_{min}) - (\log f)'(h_{min})H_k(P_{min})$$

Daí,

$$0 \leq \frac{(1/c_k)L_k(h)(P_{min})}{H_k(P_{min})} = \frac{H_{k+1}}{H_k}(P_{min}) - (\log f)'(h_{min}),$$

donde (5.6). Analogamente para (5.7). Portanto, seque-se o resultado. □

Demonstração. (**Teorema 1**) Escolha novamente a aplicação de Gauss apontando para o futuro N em Σ. Viste que P_k é definida e o quociente H_{k+1}/H_k é constante em Σ, sabemos por (5.3) que $H_{k+1}/H_k = (\log f)'(h_{min}) = (\log f)'(h_{max})$. Portanto,

$$(\log f)'(h) = \frac{f'(h)}{f(h)} = \frac{H_{k+1}}{H_k} = \alpha$$

é constante em Σ, devido $(\log f)'$ ser não-crescente pela hipótese de convexidade de $(-\log f)$. Então, (4.3) se reduz a

$$\begin{aligned} L_k(g(h)) &= -c_k(f'(h)H_k + \langle N, K\rangle H_{k+1}) = -c_k\left(\left(f(h)\frac{H_{k+1}}{H_k}\right)H_k + \langle N, K\rangle H_{k+1}\right) = \\ &= -c_k(f(h) + \langle N, K\rangle)H_{k+1}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Observe que $H_{k+1} = \alpha H_k$ não muda de sinal em Σ, visto que $\alpha = \frac{H_{k+1}}{H_k}$ e H_k é positivo ou negativo caso P_k seja positivo-definido ou negativo-definido, respectivamente (note que até aqui H_{k+1} pode ser 0). Observe também que a função $\langle N, K\rangle$ satisfaz

$$\langle N, K\rangle = \langle N, f(h)\partial_t\rangle = f(h)\langle N, \partial_t\rangle \leq -f(h) < 0 \quad em\ \Sigma. \tag{5.9}$$

Portanto, por (5.8) temos que $L_k(g(h))$ não muda de sinal em Σ, pois de (5.9), $\langle N, K\rangle + f(h) < 0$ em Σ e H_{k+1} não muda de sinal (observe que pode ser 0), onde Σ é uma variedade Riemanniana compacta. No caso em que P_k é positiva definida, L_k é um operador elíptico, e podemos aplicar o princípio clássico do máximo para tal operador e concluir que a função $g(h)$ é constante no compacto Σ (veja Apêndice). Se P_k é negativo-definido, então o operador $-L_k$ é agora elíptico, mas sendo $g(t)$ uma função crescente em t ($g'(t) = f(t) > 0$), a função altura h é constante em Σ e então a hipersuperfície é uma fatia $\{t_0\} \times M$. Finalmente, quando $k > 0$, ocorre necessariamente $f'(t_0) \neq 0$, visto que fatias $\{t\} \times M$ com $f'(t) = 0$ são totalmente geodésicas em $-I \times_f M^n$ (sendo $K = f(t)\partial_t$ um campo normal em $T(\{t\} \times M)^\perp$ e $\langle II(X,Y), K\rangle = \langle A_K X, Y\rangle = \left\langle -\overline{\nabla}_X K, Y\right\rangle = \langle f'(t)X, Y\rangle = 0$ (por 4.1), temos que $II \equiv 0$, onde II é a segunda forma fundamental de $\{t\} \times M^n$), e então $P_k = 0$, para cada $k > 0$, visto que $A = 0$ (agora, como $f'(t_0) \neq 0$, $H_{k+1} \neq 0$).

□

Vale ressaltar que se a função de torção satisfaz a condição $ff'' - f'^2 \leq 0$ com igualdade somente em pontos isolados de I, no máximo. Então o Teorema 1 permanece verdadeiro sob a hipótese que P_k é semi-definido e a função H_k não se anula em Σ.

Teorema 2. *Seja $-I \times_f M^n$ um espaço-tempo GRW espacialmente fechado com sua função de torção satisfazendo a condição (5.1), com igualdade somente em pontos isolados de I, no máximo. Seja Σ^n uma hipersuperfície tipo-espaço compacta imersa em $-I \times_f M^n$, cuja k-ésima trasformação de Newton P_k é semi-definida em Σ e H_k não se anula em Σ para algum $k = 0, 1, \cdots, n-1$. Se o quociente H_{k+1}/H_k é constante, então a hipersuperfície é uma fatia mergulhada $\{t_0\} \times M$, onde $t_0 \in I$ satisfaz $f'(t_0) \neq 0$ se $k > 0$.*

Demonstração. Observe que ainda estamos nas condições do Lema 6, donde por 5.3,

$$\frac{H_{k+1}}{H_k} = (\log f)'(h_{max}) = (\log f)'(h_{min})$$

Porém, a hipótese sobre a função de torção implica agora que $(\log f)'$ é estritamente decrescente, visto que $(\log f)'' \leq 0$ e a igualdade ocorre somente em pontos isolados. Portanto, $h_{max} = h_{min}$, donde h é constante em Σ. Analogamente à demostração do Teorema 1, segue-se o resultado.

□

Capítulo 6

Fórmulas de Minkowski para Hipersuperfícies em Espaço-Tempo GRW

O uso da fórmulas integrais tipo-Minkowski para hipersuperfícies tipo-espaço compactas em um espaço-tempo de Lorentz foi primeiramente iniciada por Montiel em [18] em seus estudos de hipersuperfícies com curvatura média constante no espaço de De Sitter, e foi continuado mais tarde por Alías, Romero e Sánchez em [12, 13, 14] para hipersuperfícies de curvatura média constante em espaço-tempo GRW e, mais geralmente, em tipo-espaço conformemente estacionário. Observe que para o caso da curvatura média, somente a primeira e a segunde fórmula de Minkowski está em jogo. Em [8], Aldo, Alías e Romero desenvolveram a fórmula geral de Minkowski para hipersuperfícies tipo-espaço compactas no espaço de De Sitter e a aplicaram, então, ao estudo de hipersuperfícies com a k-ésima curvatura média constante. Por outro lado, em [19], Montiel deu também outra prova da primeira e segunda fórmula de Minkowski para hipersuperfícies tipo-espaço em espaço-tempo conformemente estacionário com um campo conforme fechado, assim como uma prova da terceira fórmula de Minkowski para o caso onde o espaço-tempo tem curvatura seccional constante. Como observado por Montiel, seu método da prova, que seque as idéias de Hsiung [4] e usa hipersuperfícies paralelas, tem uma interpretação geométrica muito agradável, mas ela é muito difícil para carregar para nossas sucessivas fórmulas de Minkowski. A razão é que ela envolve derivadas covariantes do tensor de Ricci do espaço ambiente, e é necessário supor pelo menos que o espaço ambiente é de Einstein para termos algum controle. Em [15] L.J. Alías e A.G. Colares, juntamente com Brasil Jr., desenvolveram outro método para obter a fórmula geral de Minkowski para hipersuperfície tipo-espaço comformemente estacionário. Embora mais análitico que geométrico, este método, que segue as idéias de Reilly em [17], tem a vantagen de funcionar para sucessivas fórmulas de Minkowiski. Contudo, para obtermos alguma aplicação interessante deste, precisamos supor que o espaço-ambiente tem curvatura seccional constante.

Nesta seção, e como outra aplicação de nossa fórmula no Lema 4, obtemos a fórmula geral tipo-Minkowski para hipersuperfícies tipo-espaço compactas imersas em um espaço-tempo GRW. O maior interesse nesta nova procura é que nossa nova formula de Minkowski pode ser aplicada ao estudo de hipersuperfícies com curvatura média de ordem superior constante em espaço-tempo de Robertson-Walker arbitrário, até quando o espaço-ambiente não tem curvatura seccional constante.

Seja Σ^n uma hipersuperfície tipo-espaço compacta sem-bordo imersa em um espaço-tempo GRW. A fórmula geral de Minkowski para Σ, como obtida em [2], é justamente uma simples consequência de nossa fórmula (4.3) e expressão (3.6). De fato, seque de (3.6) e (4.3) que

$$\begin{aligned} div(P_k(\nabla g(h))) &= \langle div\ P_k, \nabla g(h)\rangle \ + \ L_k(g(h)) = \\ &= f(h)\,\langle div\ P_k, \nabla h\rangle \ - \ c_k(f'(h)H_k \ + \ \langle N, K\rangle\, H_{k+1}) \end{aligned}$$

para cada $k = 0, \cdots, n-1$. Portanto, integrando esta igualdade na variedade Riemanniana compacta sem-bordo Σ, o Teorema da Divergência dá a sequinte fórmula de Minkowski,

$$\int_\Sigma div(P_k(\nabla g(h)))d\Sigma = 0$$

Dái,

$$c_k\int_\Sigma (f'(h)H_k \ + \ \langle N, K\rangle\, H_{k+1})d\Sigma = \int_\Sigma f(h)\,\langle div\ P_k, \nabla h\rangle\, d\Sigma, \tag{6.1}$$

onde $d\Sigma$ é o elemento de volume n-dimensional de Σ com respeito a métrica induzida (e orientação escolhida). Isto é justamente o Teorema 4.1 em [2] para o caso de hipersuperfície em um espaço-tempo GRW.

Teorema 3. *Seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow -I \times_f M^n$ uma hipersuperfície tipo-espaço compacta sem-bordo imersa em um espaço-tempo GRW. Então*

$$\int_\Sigma (f'(h) \ + \ \langle N, K\rangle\, H_1)d\Sigma = 0, \tag{6.2}$$

e

$$\begin{aligned} n(n-1)\int_\Sigma (f'(h)H_1 \ + \ \langle N, K\rangle\, H_2)d\Sigma = \\ = \int_\Sigma \langle N, K\rangle\,(Ric_M(N^*, N^*) \ - (n-1)(\log f)''(h)|\nabla h|^{\ 2})d\Sigma \end{aligned} \tag{6.3}$$

onde $(\log f)'' = (\log f)''(\pi_I)$, Ric_M *denota o tensor de Ricci da variedade Riemanniana* M^n *e* $N^* = (\pi_M)_*(N)$ *denota a projeção sobre a fibra* M *do campo* N *definido em* $-I \times_f M^n$.

Demonstração. Se $k = 0$, então $P_0 = I$, $div\ P_0 = 0$ e $H_0 = 1$, donde por 6.1

$$\int_\Sigma (f'(h) \ + \ \langle N, K\rangle \, H_1) d\Sigma$$

isto nos dá (6.2). Por outro lado, quando $k = 1$, temos que $c_1 = n(n-1)$ e por (6.1)

$$(*) \quad n(n-1)\int_\Sigma (f'(h)H_1 \ + \ \langle N, K\rangle \, H_2) d\Sigma = \int_\Sigma f(h) \, \langle div\ P_1, \nabla h\rangle \, d\Sigma.$$

Pelo Lema 1 temos:

$$\langle div\ P_1, \nabla h\rangle = \sum_{i=1}^n \left\langle \overline{R}(E_i, \nabla h)N, E_i\right\rangle = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \left\langle \overline{R}(E_i, \nabla h)N, E_i\right\rangle,$$

onde $\{E_0 = N, E_1, \cdots, E_n\}$ é um referencial ortonormal de $-I \times_f M^n$ e $\varepsilon_i = \langle E_i, E_i\rangle$. Observe que $\varepsilon_i = 1$ para todo $1 \leq i \leq n$, visto que Σ é uma variedade Riemanniana. Assim,

$$\begin{aligned}
\langle div\ P_1, \nabla h\rangle &= \sum_{i=0}^n \varepsilon_i \left\langle \overline{R}(E_i, \nabla h)N, E_i\right\rangle = \sum_{i=0}^n \varepsilon_i \left\langle \overline{R}(N, E_i)E_i, \nabla h\right\rangle = \\
&= -\sum_{i=0}^n \varepsilon_i \left\langle \overline{R}(N, E_i)\nabla h, E_i\right\rangle := -\overline{Ric}(N, \nabla h),
\end{aligned}$$

onde $\overline{Ric}$ denota o tensor de Ricci de $-I \times_f M^n$. Um cálculo direto usando a relação geral entre o tensor de Ricci do produto torcido e o tensor de Ricci de sua base e sua fibra, assim como a derivada de sua função de torção, implica que, para o caso especial de nosso espaço-tempo GRW, temos que

$$\begin{aligned}
\overline{Ric}\,(U, V) &= Ric_M\,(U^*, V^*) \ + \ (n((\log f)')^2 \ + \ (\log f)'')\,\langle U, V\rangle \ - \\
&- \ (n-1)(\log f)''\,\langle U, \partial_t\rangle\,\langle V, \partial_t\rangle\,, \qquad (6.4)
\end{aligned}$$

(veja [[3], Corolário 43]) para campos vetoriais arbitrários U e V em $-I \times_f M^n$, onde, para simplificar, estamos escrevendo $\log f = \log f(\pi_I)$, $(\log f)' = (\log f)'(\pi_I)$ e $(\log f)'' =$

$(\log f)''(\pi_I)$. Aqui Ric_M denota o tensor de Ricci da variedade Riemanniana M^n e $U^* = (\pi_M)_*(U)$ denota a projeção sobre a fibra M de um campo vetorial U definido em $-I \times_f M^n$, donde

$$U = U^* \; - \; \langle U, \partial_t \rangle \, \partial_t$$

visto que,

$$U = (\pi_I)_*(U) \; + \; (\pi_M)_*(U) = U^* \; + \; \frac{\langle U, \partial_t \rangle}{\langle \partial_t, \partial_t \rangle} \, \partial_t = U^* \; - \; \langle U, \partial_t \rangle \, \partial_t.$$

Observe que como na decomposição de U, acima, estamos usando a mesma notação $(\pi_I)_*(U)$, $(\pi_M)_*(U)$ para indicar levantamentos verticais e horizontais, respectivamente.

Como por (4.4), $\nabla h = -\partial_t \; - \; \langle N, \partial_t \rangle \, N$, temos que

$$(\nabla h)^* = -\underbrace{(\pi_M)_*(\partial_t)}_{0} \; - \; \langle N, \partial_t \rangle \, (\pi_M)_*(N) = -\langle N, \partial_t \rangle \, N^*.$$

Assim, segue-se de (6.4) que,

$$\begin{aligned}
\langle div \; P_1, \nabla h \rangle \;\; &= \;\; -\overline{Ric}\,(N, \nabla h) = \\
&= \;\; -\left(Ric_M(N^*, (\nabla h)^*) \; + \; (n((\log f)')^2 \; + \right. \\
&+ \;\; (\log f)'') \underbrace{\langle N, \nabla h \rangle}_{0} \; - \\
&- \;\; (n-1)\,(\log f)''(h)\, \langle N, \partial_t \rangle \, \langle \nabla h, \partial_t \rangle) = \\
&= \;\; \langle N, \partial_t \rangle \left(Ric_M\,(N^*, N^*) \; + \; (n-1)(\log f)''(h)\, \langle \nabla h, \partial_t \rangle\right)
\end{aligned}$$

Notemos agora que,

$$|\nabla h|^{\,2} \;\; = \;\; \langle \nabla h, \nabla h \rangle \;\; = \;\; \langle \nabla h, -\partial_t \; - \; \langle N, \partial_t \rangle \, N \rangle = -\langle \nabla h, \partial_t \rangle$$

Logo,

$$\langle div \; P_1, \nabla h \rangle \;\; = \;\; \langle N, \partial_t \rangle \left(Ric_M\,(N^*, N^*) \; - \; (n-1)(\log f)''(h) |\nabla h|^{\,2} \right)$$

Portanto, a segunda fórmula de Minkowski ($k = 1$) para uma hipersuperfície tipo-espaço compacta imersa em um espaço-tempo GRW se torna, por (*)

$$\begin{aligned}
n(n-1) \int_\Sigma (f'(h) H_1 \; + \; \langle N, K \rangle \, H_2) d\Sigma \;\; &= \\
= \int_\Sigma f(h)\, \langle N, \partial_t \rangle \left(Ric_M\,(N^*, N^*) \; - \; (n-1)(\log f)''(h) |\nabla h|^{\,2} \right) d\Sigma \;\; &= \\
= \int_\Sigma \langle N, K \rangle \left(Ric_M\,(N^*, N^*) \; - \; (n-1)(\log f)''(h) |\nabla h|^{\,2} \right) d\Sigma &
\end{aligned}$$

que nos dá (6.3).

$\square$

As fórmulas (6.2) e (6.3) são chamadas de primeira e segunda fórmula de Minkowski, respectivamente.

Para encontrarmos uma expressão útil para a fórmula geral de Minkowski dada por (6.1), no caso onde $n \geq 3$, iremos supor que $-I \times_f M^n$ é um (clássico) espaço-tempo de Robertson-Walker, isto é, a variedade Riemanniana M^n tem curvatura seccional κ constante.

Teorema 4. *Seja $\psi : \Sigma^n \longrightarrow -I \times_f M^n$ uma hipersuperfície tipo-espaço compacta sem-bordo imersa em um espaço-tempo RW, isto é, M^n é uma variedade Riemanniana com curvatura seccianal κ constante. Então, para cada $k = 2, \cdots, n-1$, a k-ésima fórmula de Minkowski é dada por*

$$\begin{aligned} &\binom{n}{k} \int_\Sigma \left(f'(h) H_k \ + \ \langle N, K \rangle H_{k+1}\right) d\Sigma = \\ &= \int_\Sigma \left(\frac{\kappa}{f^2(h)} \ - \ (\log f)''(h) \right) \langle N, K \rangle \langle P_{k-1} \nabla h, \nabla h \rangle \, d\Sigma. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Demonstração. Para encontrarmos tal expressão, devemos calcular $\langle div \ P_k, \nabla h \rangle$ quando $2 \leq k \leq n-1$. Do Lema 1, sabemos que

$$\langle div \ P_k, \nabla h \rangle = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{R} \left(E_i, A^{k-1-j} \nabla h \right) N, P_j E_i \right\rangle, \tag{6.6}$$

onde $\{E_i, \cdots, E_n\}$ é um referencial ortonormal local arbitrário em Σ. Usando a relação geral entre o tensor curvatura do produto torcido e o tensor curvatura de sua base e de sua fibra, assim como a derivada da sua função de torção, implica que, para nosso espaço-tempo GRW, temos a sequinte expressão

$$\begin{aligned} \overline{R}\,(U, V)\,W \ &= \ R_M\,(U^*, V^*)\,W^* \ + \ ((\log f)')^2 \left(\langle U, W \rangle V \ - \ \langle V, W \rangle U \right) \ + \\ &+ \ (\log f)'' \langle W, \partial_t \rangle \left(\langle V, \partial_t \rangle U \ - \ \langle U, \partial_t \rangle V \right) \ - \\ &- \ (\log f)'' \left(\langle V, \partial_t \rangle \langle U, W \rangle \ - \ \langle U, \partial_t \rangle \langle V, W \rangle \right) \partial_t, \end{aligned} \tag{6.7}$$

(veja [[3], Proposição 42]) para campos vetoriais arbitrários $U, V, W \ \in -I \times_f M^n$. Aqui R_M denota o tensor curvatura da variedade Riemanniana M^n. Tal fórmula é geral, independente de M^n ter curvatura seccional constante. Em particular, (6.7) implica

$$\begin{aligned}
\overline{R}\,(E_i, X)\,N &= R_M\,(E_i^*, X^*)\,N^* \;+ \\
&+ \;(\log f)''(h)\,\langle N, \partial_t\rangle\,(\langle X, \partial_t\rangle\,E_i \;-\; \langle E_i, \partial_t\rangle\,X) = \\
&= R_M\,(E_i^*, X^*)\,N^* \;+ \\
&+ \;(\log f)''(h)\,\langle N, \partial_t\rangle\,(-\,\langle X, \nabla h\rangle\,E_i \;+\; \langle E_i, \nabla h\rangle\,X) = \\
&= R_M\,(E_i^*, X^*)\,N^* \;- \\
&- \;(\log f)''(h)\,\langle N, \partial_t\rangle\,(\langle X, \nabla h\rangle\,E_i \;-\; \langle E_i, \nabla h\rangle\,X) \qquad (6.8)
\end{aligned}$$

para cada campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Pela decomposição

$$N = N^* \;-\; \langle N, \partial_t\rangle\,\partial_t,\;\; E_i = E_i^* \;-\; \langle E_i, \partial_t\rangle\,\partial_t \;\; e \;\; X = X^* \;-\; \langle X, \partial_t\rangle\,\partial_t$$

temos que,

$$\begin{aligned}
(N^*)^\top &= N^* \;-\; \frac{\langle N^*, N\rangle}{\langle N, N\rangle} N = \\
&= N^* \;+\; \langle N \;+\; \langle N, \partial_t\rangle\,\partial_t, N\rangle\,N = \\
&= N^* \;+\; \langle N, N\rangle\,N \;+\; \langle N, \partial_t\rangle^2\,N = \\
&= N^* \;-\; N \;+\; \langle N, \partial_t\rangle^2\,N = \\
&= \langle N, \partial_t\rangle\,\partial_t \;+\; \langle N, \partial_t\rangle^2\,N = \\
&= -\,\langle N, \partial_t\rangle\,(-\partial_t \;-\; \langle N, \partial_t\rangle\,N) = \\
&= -\,\langle N, \partial_t\rangle\,\nabla h, \qquad (6.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(E_i^*)^\top &= E_i^* \;+\; \langle E_i^*, N\rangle\,N = E_i^* \;+\; \langle E_i \;+\; \langle E_i, \partial_t\rangle\,\partial_t, N\rangle\,N = \\
&= E_i^* \;+\; \langle E_i, \partial_t\rangle\,\langle \partial_t, N\rangle\,N = E_i^* \;-\; \langle E_i, \nabla h\rangle\,\langle \partial_t, N\rangle\,N = \\
&= E_i \;+\; \langle E_i, \partial_t\rangle\,\partial_t \;-\; \langle E_i, \nabla h\rangle\,\langle \partial_t, N\rangle\,N = \\
&= E_i \;-\; \langle E_i, \nabla h\rangle\,\partial_t \;-\; \langle E_i, \nabla h\rangle\,\langle \partial_t, N\rangle\,N = \\
&= E_i \;+\; \langle E_i, \nabla h\rangle\,(-\partial_t \;-\; \langle \partial_t, N\rangle\,N) = \\
&= E_i \;+\; \langle E_i, \nabla h\rangle\,\nabla h, \qquad (6.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(X^*)^\top &= X^* + \langle X^*, N\rangle N = \\
&= X + \langle X, \partial_t\rangle \partial_t + \langle X + \langle X, \partial_t\rangle \partial_t, N\rangle N = \\
&= X + \langle X, \partial_t\rangle \partial_t + \langle X, \partial_t\rangle \langle \partial_t, N\rangle N = \\
&= X - \langle X, \nabla h\rangle \partial_t - \langle X, \nabla h\rangle \langle \partial_t, N\rangle N = \\
&= X + \langle X, \nabla h\rangle (-\partial_t - \langle \partial_t, N\rangle N) = \\
&= X + \langle X, \nabla h\rangle \nabla h, \qquad (6.11)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle N^*, N^*\rangle_M &= \frac{1}{f^2(h)} (\langle N, N\rangle + \langle (\pi_I)_*(N), (\pi_I)_*(N)\rangle_I) = \\
&= \frac{1}{f^2(h)} (-1 + \langle - \langle N, \partial_t\rangle \partial_t, - \langle N, \partial_t\rangle \partial_t\rangle_I) = \\
&= \frac{1}{f^2(h)} \left(-1 + \langle N, \partial_t\rangle^2 \langle \partial_t, \partial_t\rangle_I\right) = \\
&= \frac{1}{f^2(h)} \left(-1 + \langle N, \partial_t\rangle^2\right) = \\
&= \frac{1}{f^2(h)} |\nabla h|^{\ 2}, \qquad (6.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle N^*, {E_i}^*\rangle_M &= \frac{1}{f^2(h)} (\langle N, E_i\rangle + \langle (\pi_I)_*(N), (\pi_I)_*(E_i)\rangle_I) = \\
&= \frac{1}{f^2(h)} (\langle - \langle N, \partial_t\rangle \partial_t, - \langle E_i, \partial_t\rangle \partial_t\rangle_I) = \\
&= \frac{1}{f^2(h)} \langle N, \partial_t\rangle \langle E_i, \partial_t\rangle \langle \partial_t, \partial_t\rangle_I = \\
&= -\frac{1}{f^2(h)} \langle N, \partial_t\rangle \langle E_i, \nabla h\rangle, \qquad (6.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle N^*, X^*\rangle_M &= \frac{1}{f^2(h)} (\langle N, X\rangle + \langle (\pi_I)_*(N), (\pi_I)_*(X)\rangle_I) = \\
&= -\frac{1}{f^2(h)} \langle N, \partial_t\rangle \langle X, \nabla h\rangle . \qquad (6.14)
\end{aligned}$$

Observemos que as equações ((6.9)-(6.14)) são verdadeiras para qualquer fibra Riemanniana M^n, visto que não usamos que M^n tem curvatura seccional constante.

Se M^n tem curvatura seccional constante κ, então também temos que

$$(R_M(E_i^*, X^*)N^*)^\top = \kappa \left(\langle E_i^*, N^* \rangle_M (X^*)^\top \; - \; \langle X^*, N^* \rangle_M (E_i^*)^\top \right)$$

Então, usando as equacões (6.10), (6.11), (6.13) e (6.14) obtemos

$$\begin{aligned}
(R_M(E_i^*, X^*)N^*)^\top &= \kappa[-\frac{1}{f^2(h)} \langle N, \partial_t \rangle \langle E_i, \nabla h \rangle (X \; + \; \langle X, \nabla h \rangle \nabla h) \; + \\
&+ \quad \frac{1}{f^2(h)} \langle N, \partial_t \rangle \langle X, \nabla h \rangle (E_i \; + \; \langle E_i, \nabla h \rangle \nabla h)] = \\
&= \frac{\kappa}{f^2(h)} \langle N, \partial_t \rangle (\langle X, \nabla h \rangle E_i \; - \; \langle E_i, \nabla h \rangle X) \, ,
\end{aligned}$$

que juntamente com (6.8) dá

$$\begin{aligned}
(\overline{R}(E_i, X)N)^\top &= (R_M(E_i^*, X^*)N^*)^\top - (\log f)''(h) \langle N, \partial_t \rangle (\langle X, \nabla h \rangle E_i - \langle E_i, \nabla h \rangle X) = \\
&= \left(\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h) \right) \langle N, \partial_t \rangle (\langle X, \nabla h \rangle E_i - \langle E_i, \nabla h \rangle X).
\end{aligned}$$

Portanto, para cada $j = 0, \cdots, k-1$ fixo, encontramos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{R}\,(E_i, X)\,N, P_j E_i \right\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \left(\overline{R}\,(E_i, X)\,N\right)^\top, P_j E_i \right\rangle = \\
&= \left(\frac{\kappa}{f^2(h)} \; - \; (\log f)''\,(h) \right) \langle N, \partial_t \rangle \sum_{i=1}^{n} (\langle X, \nabla h \rangle \langle E_i, P_j E_i \rangle \; - \\
&- \quad \langle E_i, \nabla h \rangle \langle X, P_j E_i \rangle) = \\
&= \left(\frac{\kappa}{f^2(h)} \; - \; (\log f)''\,(h) \right) \langle N, \partial_t \rangle (tr\,(P_j) \langle X, \nabla h \rangle \; - \\
&- \quad \sum_{i=1}^{n} \langle \langle P_j X, E_i \rangle E_i, \nabla h \rangle) = \\
&= \left(\frac{\kappa}{f^2(h)} \; - \; (\log f)''\,(h) \right) \langle N, \partial_t \rangle (tr\,(P_j) \langle X, \nabla h \rangle \; - \\
&- \quad \langle P_j X, \nabla h \rangle)
\end{aligned}$$

para cada campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Usando esta expressão em (6.6) temos

$$\begin{aligned} \langle divP_k, \nabla h\rangle &= \left(\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h)\right)\langle N, \partial_t\rangle \sum_{j=0}^{k-1}(tr(P_j)\left\langle A^{k-1-j}\nabla h, \nabla h\right\rangle - \\ &- \left\langle P_j \circ A^{k-1-i}\nabla h, \nabla h\right\rangle). \end{aligned} \tag{6.15}$$

Agora afirmamos que

$$\sum_{j=0}^{k-1}(tr(P_j)A^{k-1-j} - P_j \circ A^{k-1-j}) = (n-k)P_{k-1}, \tag{6.16}$$

para cada $2 \leq k \leq n$.

Provemos (6.16) por indução em k. Quando $k = 2$, usando (3.2), isto é, que $tr(P_k) = c_k H_k$, (6.16) se reduz a

$$\begin{aligned} (tr(P_0)A - P_0 \circ A) + tr(P_1)A^0 - P_1 A^0 &= nA - A + c_1 H_1 I - P_1 = \\ &= (n-1)A + n(n-1)H_1 I - P_1 = \\ &= (n-1)(A + nH_1)I - P_1 = \\ &= (n-2)P_1. \end{aligned}$$

Supondo, agora, que (6.16) é verdadeira para $k - 1 \geq 2$, e escrevendo

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k-1}(tr(P_j)A^{k-1-j} - P_j \circ A^{k-1-j}) &= \sum_{j=0}^{k-2}(tr(P_j)A^{k-2-j} - P_j \circ A^{k-2-j}) \circ A + \\ &+ tr(P_{k-1}) - P_{k-1}. \end{aligned}$$

Usando a hipótese de indução temos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1}\left(tr\,(P_j)\,A^{k-1-j} - P_j \circ A^{k-1-j}\right) &= (n-k+1)\,P_{k-2} \circ A + c_{k-1}H_{k-1}I - P_{k-1} = \\ &= (n-k+1)\,P_{k-2} \circ A + (n-k+1)\binom{n}{k-1}H_{k-1}I - P_{k-1} = \\ &= (n-k+1)\left(\binom{n}{k-1}H_{k-1}I + P_{k-2}A\right) - P_{k-1} = \\ &= (n-k+1)\,P_{k-1} - P_{k-1}\ (\textit{visto que } P_{k-2} \textit{ comuta com } A) = (n-k)\,P_{k-1}, \end{aligned}$$

como afirmado.

Finalmente, usando (6.16) em (6.15), concluimos que,

$$
\begin{aligned}
\langle div\ P_k, \nabla h\rangle &= (n-k)\left(\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h)\right). \\
&. \quad \langle N, \partial_t\rangle \langle P_{k-1}\nabla h, \nabla h\rangle
\end{aligned}
\tag{6.17}
$$

para cada $k \geq 2$. Assim, por (6.1)

$$
c_k \int_\Sigma \left(f'(h)\, H_k + \langle N, K\rangle\, H_{k+1}\right) d\Sigma =
$$

$$
= (n-k)\int_\Sigma \left(\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h)\right)\langle N, K\rangle \langle P_{k-1}\nabla h, \nabla h\rangle\, d\Sigma
$$

Daí,

$$
\binom{n}{k} \int_\Sigma \left(f'(h)\, H_k + \langle N, K\rangle\, H_{k+1}\right) d\Sigma =
$$

$$
= \int_\Sigma \left(\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h)\right)\langle N, K\rangle \langle P_{k-1}\nabla h, \nabla h\rangle\, d\Sigma.
$$

$\square$

Capítulo 7

Umbilicidade de Hipersuperfícies em Espaço- Tempo RW

Em [[19], Teorema 8] Montiel deu um resultado de unicidade para hipersuperfícies tipo-espaço compactas com curvatura escalar constante imersas em um espaço-tempo de curvatura seccional constante equipado com um campo vetorial tipo-tempo conforme fechado (veja também [[15], Teorema 5.3] para o caso em que o campo vetorial tipo-tempo conforme é não necessariamente fechado). Como observado por Montiel em [19], cada espaço-tempo tendo um campo vetorial tipo-tempo conforme fechado é localmente isométrico a um espaço-tempo GRW. Por outro lado, não é difícil ver que um espaço-tempo GRW, $-I \times_f M^n$, tem curvatura seccional constante $\overline{\kappa}$ se, e somente se, o fator Riemanniano M^n tem curvatura seccional constante κ (isto é, $-I \times_f M^n$ é de fato um espaço-tempo RW) e a função de torção f satisfaz a seguinte equação diferencial

$$\frac{f''}{f} = \overline{\kappa} = \frac{(f')^2 + \kappa}{f^2}$$

(veja, por exemplo, [[1], Corolário 9.107]). Portanto, o resultado de Montiel [[19], Teorema 8] essencialmente declara o sequinte:

Teorema 5. *Seja $-I \times_f M^n$ um espaço-tempo RW espacialmente fechado com curvatura seccional constante $\overline{\kappa}$ com $n \geq 3$. Então, cada hipersuperfície tipo-espaço compacta Σ imersa em $-I \times_f M^n$ com curvatura escalar constante S tal que $S < n(n-1)\overline{\kappa}$ é totalmente umbílica. Além disso, se $\overline{\kappa} \leq 0$ então Σ é uma fatia mergulhada $\{t\} \times M^n$ (necessariamente com $f'(t) \neq 0$), e se $\overline{\kappa} > 0$ então Σ ou é uma fatia mergulhada $\{t\} \times M^n$ (necessariamente com $f'(t) \neq 0$) ou uma hiperesfera no espaço de De Sitter.*

Como uma primeira aplicação da fórmula de Minkowski dada no Teorema 4, estenderemos, de acordo com [11], este resultado ao caso de hipersuperfícies imersas em um espaço-tempo RW obedecendo a condição de convergência nula.

Definição 2. *Um espaço-tempo obedece a condição de convergência nula (NCC), por definição, se sua curvatura de Ricci é não negativa em direções nulas (ou seja, tipo-luz, isto é, $\langle X, X\rangle = 0$, com $X \neq 0$).*

Vejamos uma interpretação geométrica para NCC. Se para vetores tipo luz V e W, $\overline{Ric}(V, W) \geq 0$ então, geodésicas tipo-luz α (α' tipo-luz) partindo de um mesmo ponto p, próximas, com $\overline{R}(\cdot, \alpha'(t))\alpha'(t)$ não nulo para algum t_1, convergem para um ponto q (assim p e q são conjugados). Este fato é fundamentado no sequinte resultado:

Seja $\beta(t)$ uma geodésica tipo-luz completa (isto é, definida em toda reta real), com $\overline{Ric}(\beta', \beta') \geq 0$. Se $\overline{R}(\cdot, \beta'(t))\beta'(t)$ é não nulo para algum t_1 real, então β possui um par de pontos conjugados (veja [2], pag. 444).

Observe que cada espaço-tempo com curvatura seccional constante trivialmente obedece NCC, pois dado $\{E_1, \cdots, E_n, E_{n+1}\}$ um referencial ortogonal de tal espaço, com $\langle E_i, E_i\rangle = 1$, $\langle E_{n+1}, E_{n+1}\rangle = -1$ e X tipo-luz, $X = \sum_{i=1}^{n} = a_i E_i \ + \ bE_{n+1}$ temos

$$\begin{aligned}
Ric(X, X) &= \sum_{i=1}^{n} \langle R\,(X, E_i)\,X, E_i\rangle - \langle R\,(X, E_{n+1})\,X, E_{n+1}\rangle = \\
&= \sum_{i=1}^{n} -\kappa\,\langle X, E_i\rangle^2 + \kappa\,\langle X, E_{n+1}\rangle^2 = \\
&= -\kappa\left(\sum_{i=1}^{n} \langle X, E_i\rangle^2 - \langle X, E_{n+1}\rangle^2\right) = \\
&= -\kappa({a_i}^2 - b^2) = -\kappa\,\langle X, X\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Usando a expressão (6.4), vemos que um espaço-tempo GRW, $-I \times_f M^n$, obedece NCC se, e somente se,

$$Ric_M(X, X) \geq (n-1)sup_I(ff'' - f'^2)\,\langle X, X\rangle_M \tag{7.1}$$

para todo compo vetorial, X, em M com Ric_M e $\langle , \rangle_M$ denotando, respectivamente, os tensores de Ricci e métrico de M^n.

De fato, se o espaço-tempo GRW satisfaz (7.1), dado um vetor tipo-luz U, (6.4) nos dá

$$\begin{aligned}\overline{Ric}(U,U) &= Ric_M(U^*,U^*) - (n-1)(\log f)'' \langle U,\partial_t\rangle^2 \geq \\ &\geq (n-1)sup_I(ff''-f'^2)\langle U^*,U^*\rangle_M - (n-1)(\log f)''\langle U,\partial_t\rangle^2 \geq \\ &\geq (n-1)(ff''-f'^2)\langle U^*,U^*\rangle_M - (n-1)\frac{(ff''-f'^2)}{f^2}\langle U,\partial_t\rangle^2 .\end{aligned}$$

Observe que,

$$0 = \langle U,U\rangle = -d\pi_I(U)^2 + f^2\langle U^*,U^*\rangle_M .$$

Daí

$$\langle U^*,U^*\rangle_M = \frac{1}{f^2}\, d\pi_I(U)^2.$$

Por outro lado,

$$\langle U,\partial_t\rangle = -d\pi_I(U),$$

donde

$$\langle U,\partial_t\rangle^2 = d\pi_I(U)^2 = f^2\langle U^*,U^*\rangle_M .$$

Assim,

$$\overline{Ric}(U,U) \geq 0.$$

Agora, se para todo vetor U, tipo-luz, $\overline{Ric}(U,U)\geq 0$, por (6.4) temos

$$\begin{aligned}Ric_M(U^*,U^*) &= \overline{Ric}(U,U) + (n-1)(\log f)''\langle U,\partial_t\rangle^2 \geq \\ &\geq (n-1)\frac{(ff''-f'^2)}{f^2}\langle U^*,U^*\rangle_M f^2 = \\ &= (n-1)(ff''-f'^2)\langle U^*,U^*\rangle_M\end{aligned}$$

$\therefore$

$$(ff''-f'^2)(t) \leq \frac{Ric_M(U^*,U^*)}{(n-1)\langle U^*,U^*\rangle_M}.$$

Como tal desiqualdade independe de $p\in M$ e $t\in I$,

$$sup_I(ff''-f'^2) \leq \frac{Ric_M(U^*,U^*)}{(n-1)\langle U^*,U^*\rangle_M}.$$

Para concluirmos, basta observar que todo vetor X, tangente a M, é projeção sobre M de um vetor tipo-luz do ambiente, a saber, $Y = (f^2\langle X,X\rangle_M)^{1/2}\partial_t + X$. Em particular, um espaço-tempo RW obedece NCC se, e somente se,

$$\kappa \geq sup_I(ff''-f'^2), \tag{7.2}$$

onde κ denota a curvatura seccional constante de M^n.

De fato, se o espaço-tempo RW obedece NCC, tomando um campo vetorial, X, não nulo em M, temos que

$$Ric_M\left(\frac{X}{|X|_M},\frac{X}{|X|_M}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left\langle R_M\left(\frac{X}{|X|_M},E_i\right)\frac{X}{|X|_M},E_i\right\rangle_M=\kappa(n-1)$$

onde $\left\{E_1,\cdots,E_n=\frac{X}{|X|_M}\right\}$ é um referencial ortonormal de M. Por (7.1),

$$\kappa(n-1)|X|_M^2=Ric_M(X,X)\geq(n-1)sup_I(ff''-f'^2)\left\langle X,X\right\rangle_M$$

$\therefore$

$$\kappa\geq sup_I(ff''-f'^2).$$

Agora, se $\kappa\geq sup_I(ff''-f'^2)$ e X é um campo vetorial em M, temos

$$\frac{1}{|X|_M^2}Ric_M(X,X)=\kappa(n-1)\geq(n-1)sup_I(ff''-f'^2).$$

Daí

$$Ric_M(X,X)\geq(n-1)sup_I(ff''-f'^2)\left\langle X,X\right\rangle_M.$$

Por (7.1), segue-se o resultado.

Notemos agora, que a condição de a curvatura escalar S de Σ ser constante e menor que $n(n-1)\overline{\kappa}$ no Teorema 5 é equivalente, da equação (2.2), ao fato de H_2 ser uma constante positiva, pois por (2.2)

$$S=\overline{S}+2\overline{Ric}(N,N)-n(n-1)H_2,$$

sendo $\overline{S}:=\sum_{j=1}^{n}\overline{Ric}(E_j,E_j)-\overline{Ric}(N,N)$ a curvatura escalar do ambiente. Assim,

$$S=\sum_{j=1}^{n}\overline{Ric}(E_j,E_j)+\overline{Ric}(N,N)-n(n-1)H_2.$$

Como $\overline{\kappa}$ é constante, temos

$$\begin{aligned} S &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1,i\neq j}^{n}\left\langle \overline{R}\left(E_j,E_i\right)E_j,E_i\right\rangle - \left\langle \overline{R}\left(N,E_j\right)N,E_j\right\rangle\right) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{R}\left(N,E_i\right)N,E_i\right\rangle - n(n-1)H_2 = \\ &= \sum_{j=1}^{n}(n-2)\overline{\kappa} + \sum_{i=1}^{n}\overline{\kappa} - n(n-1)H_2 = \\ &= n(n-2)\overline{\kappa} + n\overline{\kappa} - n(n-1)H_2 = \\ &= n(n-1)(\overline{\kappa} - H_2). \end{aligned}$$

Daí

$$H_2 = \frac{n(n-1)\overline{\kappa} - S}{n(n-1)}$$

Então o Teorema 5 admite a seguinte extensão.

Teorema 6. *Seja $-I \times_f M^n$ um espaço-tempo RW espacialmente fechado obedecendo a condição de convergência nula, com $n \geq 3$. Então, cada hipersuperfície tipo-espaço compacta imersa em $-I \times_f M^n$ com H_2 constante positiva é totalmente umbílica. Além disso, Σ deve ser uma fatia $\{t_0\} \times M^n$ (necessariamente com $f'(t_0) \neq 0$), a menos no caso onde $-I \times_f M^n$ tem curvatura seccional constante positiva e Σ é uma hiperesfera umbílica. Este último caso não pode ocorrer se a desigualdade em (7.2) for estrita.*

Demonstração. Multiplicando a primeira fórmula de Minkowski (6.2) pela constante $\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} H_2$, temos

$$\int_{\Sigma} \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} H_2\left(f'(h) + \langle N, K\rangle H_1\right) d\Sigma = 0.$$

Subtraindo desta a terceira fórmula de Minkowski (fórmula (6.5) com $k = 2$), obtemos

$$\begin{aligned} &\int_{\Sigma}\left[\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} H_2\left(f'(h) + \langle N,K\rangle H_1\right) - \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}\left(f'(h)H_2 + \langle N,K\rangle H_3\right)\right] d\Sigma = \\ &\qquad = -\int_{\Sigma}\left(\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h)\right)\langle N,K\rangle \langle P_1(\nabla h), \nabla h\rangle\, d\Sigma. \end{aligned}$$

Daí

$$\int_{\Sigma}\left(\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}(H_1H_2 - H_3) + \left(\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h)\right)\langle P_1(\nabla h), \nabla h\rangle\right)\langle N,K\rangle\, d\Sigma = 0 \quad (7.3)$$

Visto que $H_2 > 0$, sabemos pelo Lema 2 que, para uma escolha apropriada da aplicação de Gauss N, a transformação P_1 é positiva definida e $H_1 > 0$ em Σ (veja demonstração do Lema 2). Sabemos pela generalização da desigualdade de Cauchy-Schwarz (veja, para isto, [[7], Teorema 51, p. 52 e Teorema 144, p. 104]) que

$$H_r^2 - H_{r-1}H_{r+1} \geq 0$$

com igualdade se, e somente se, o ponto é umbílico. Então

$$H_1H_2 - H_3 \geq H_1H_2 - \frac{{H_2}^2}{H_1} = \frac{H_2}{H_1}({H_1}^2 - H_2) \geq 0$$

com igualdade se, e somente se, Σ for totalmente umbílica. Por outro lado, visto que P_1 é positivo definido, temos também por NCC (7.2) que

$$\left(\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h)\right)\langle P_1(\nabla h), \nabla h\rangle \geq 0,$$

pois

$$\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h) = \frac{\kappa - (ff'' - f'^2)(h)}{f^2(h)} \geq 0$$

. Portanto, visto que $\langle N, K\rangle$ é não nulo em Σ, concluimos de (7.3) que Σ é totalmente umbílica, pois $H_1H_2 - \frac{{H_2}^2}{H_1} = 0$, e que

$$\left(\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h)\right)\langle P_1(\nabla h), \nabla h\rangle = 0$$

em Σ. Visto que P_1 é positivo definido, segue que ou Σ é uma fatia (equivalentemente $\nabla h = 0$) ou

$$\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h) = 0 \text{ em } \Sigma. \tag{7.4}$$

Primeiramente observe que se Σ é uma fatia $\{t_0\} \times M^n$, então, necessariamente, $f'(t_0) \neq 0$ devido a condição $H_2 > 0$ (relembremos que uma fatia com $f'(t_0) = 0$ é necessariamente totalmente geodésica, veja final da demonstração do Teorema 1). Por outro lado, como Σ é totalmente umbílica, temos que $H_2 = H_1^2$ em Σ, o que implica que Σ tem curvatura média constante, visto que H_2 é constante. Assim, se Σ não for uma fatia, aplicando a classificação de hipersuperfícies tipo-espaço compacta e umbílica com curvatura média constante, dada por Montiel em [[19], Teorema 5], concluimos que o único caso em que Σ não é uma fatia ocorre apenas quando $-I \times_f M^n$ tem curvatura seccional constante positiva e Σ é uma hiperesfera umbílica. Finalmente, observe que se a desigualdade em (7.2) for estrita, então (7.4) não pode ocorrer e Σ é necessariamente uma fatia.

$\square$

Para o caso geral de hipersuperfícies com curvatura de ordem superior constante, daremos, de acordo com [11], a sequinte versão do Teorema 6.

Teorema 7. *Seja $-I \times_f M^n$ um espaço-tempo RW espacialmente fechado obedecendo a condição de convergência nula, com $n \geq 3$. Suponha que Σ^n é uma hipersuperfície tipo-espaço compacta imersa em $-I \times_f M^n$ que está contida em um bloco $\Omega(t_1, t_2) = (t_1, t_2) \times M \subset -I \times_f M^n$ em que f' não se anula. Se H_k é constante, com $3 \leq k \leq n$, então Σ é totalmente umbílica. Além disso, Σ deve ser uma fatia $\{t_0\} \times M^n$ (necessariamente com $f'(t_0) \neq 0$), a menos no caso onde $-I \times_f M^n$ tem curvatura seccional constante positiva e Σ é uma hipersuperfície umbílica. Este último caso não pode ocorrer se a desigualdade em (7.2) for estrita.*

Demonstração. Temos que $f' > 0$ (ou $f' < 0$) em (t_1, t_2). Pelo Lema 5, sabemos que existe um ponto $p_0 \in \Sigma$ elíptico, com respeito a aplicação de Gauss N apontando para o futuro (ou apontando para o passado, se $f' < 0$), isto é, onde todas as curvaturas principais são negativas. Portanto, a constante $H_k = H_k(p_0)$ é positiva, pois

$$\begin{aligned} H_k(p_0) &= \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}^{-1} \sigma_k(-\kappa_1, \cdots, -\kappa_n) = \\ &= \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}^{-1} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} (-\kappa_{i_1}). \cdots .(-\kappa_{i_k}) > 0, \end{aligned}$$

e usando as desigualdades de Garding [10], temos que

$$H_1 \geq H_2^{1/2} \geq \cdots \geq H_{k-1}^{1/k-1} \geq H_k^{1/k} > 0 \text{ em } \Sigma \tag{7.5}$$

onde a igualdade em cada etapa ocorre se, e somente se, o ponto for umbílico. Portanto, visto que $f'(h) > 0$ (ou $f'(h) < 0$) em Σ, temos que $f'(h)H_{k-1} \geq f'(h)H_k^{(k-1)/k}$ (ou $f'(h)H_{k-1} \leq f'(h)H_k^{(k-1)/k}$, se $f'(h) < 0$). Por outro lado, a k-ésima fórmula de Minkowski (isto é, (6.5) com $k-1$ no lugar de k; observe que $2 \leq k-1 \leq n-1$) nos dá

$$\begin{aligned} &\int_\Sigma (f'(h)H_{k-1} + \langle N, K \rangle H_k) \, d\Sigma = \\ &= \int_\Sigma \left(\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h) \right) \langle N, K \rangle \langle P_{k-2}(\nabla h, \nabla h \rangle \, d\Sigma. \end{aligned}$$

Por (7.2), temos que

$$\left(\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h)\right) = \left(\frac{\kappa - (ff'' - f'^2)}{f^2}\right)(h) \geq 0,$$

e visto que H_k é constante positiva, o Lema 3 nos assegura que o operador P_{k-2} é positivo definido, donde

$$\int_\Sigma (f'(h)H_{k-1} + \langle N, K\rangle H_k)\, d\Sigma =$$

$$= \int_\Sigma \left(\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h)\right) \langle N, K\rangle \langle P_{k-2}(\nabla h, \nabla h\rangle\, d\Sigma \leq 0 \ (ou \ \geq 0, \ se \ f'(h) < 0)$$

pois $\langle N, K\rangle = f(h)\langle N, K\rangle \leq -f(h) < 0$ (ou $\langle N, K\rangle = f(h)\langle N, \partial_t\rangle > 0$, se $f(h) < 0$ com $\langle N, K\rangle < 0$). Assim,

$$H_k \int_\Sigma \langle N, K\rangle\, d\Sigma \leq -\int_\Sigma f'(h)H_{k-1} d\Sigma \ \ (ou \ \geq, \ se \ f'(h) < 0).$$

Usando agora que, $f'(h)H_{k-1} \geq f'(h)H_k^{(k-1)/k}$ (ou $\leq$, se $f'(h) < 0$), temos

$$H_k \int_\Sigma \langle N, K\rangle\, d\Sigma \leq -\int_\Sigma f'(h)H_{k-1} d\Sigma \leq -H_k^{(k-1)/k} \int_\Sigma f'(h) d\Sigma$$

(ou $\geq$ em cada desigualdade, se $f'(h) < 0$). Agora, por (6.2), temos que

$$H_k \int_\Sigma \langle N, K\rangle\, d\Sigma \leq -H_k^{(k-1)/k} \int_\Sigma f'(h) d\Sigma = H_k^{(k-1)/k} \int_\Sigma \langle N, K\rangle H_1 d\Sigma$$

(ou $\geq$ na desigualdade, se $f'(h) < 0$). Logo,

$$\int_\Sigma \left(H_1 H_k^{(k-1)/k} - H_k\right) \langle N, K\rangle\, d\Sigma \geq 0 \ \ (ou \ \leq 0, \ se \ f'(h) < 0)$$

$\therefore$

$$\int_\Sigma \left(H_1 - H_k^{1/k}\right) \langle N, K\rangle\, d\Sigma \geq 0 \ \ (ou \ \leq 0, \ se \ f'(h) < 0). \tag{7.6}$$

Visto que N é a aplicação de Gauss apontando para o futuro (ou apontando para o passado, se $f'(h) < 0$), sabemos que $\langle N, K\rangle < 0$ (ou > 0, se $f'(h) < 0$) e, por (7.5) temos que $H_1 - H_k^{1/k} \geq 0$. Portanto, (7.6) implica que $H_1 - H_k^{1/k} = 0$ em Σ, e daí a hipersuperfície é totalmente umbílica. Visto que H_k é uma constante positiva e Σ é totalmente umbílica ($H_1 H_k^{1/k} = 0$ em Σ), sabemos que todas as curvaturas médias H_j, $1 \leq j \leq k$, são constantes positivas (por (7.5)). Em particular, H_2 é uma constante positiva (observe que $3 \leq k \leq n$) e o resultado segue do Teorema 6.

□

Quando $n \geq 4$ e H_k é constante com $k \leq n-1$, existe ainda outra versão do Teorema 7 sob a hipótese da existência de um ponto elíptico.

Teorema 8. *Seja $-I \times_f M^n$ um espaço-tempo RW espacialmente fechado obedecendo a condição de convergência nula, com $n \geq 4$. Suponha que Σ^n é uma hipersuperfície tipo-espaço compacta, imersa em $-I \times_f M^n$, que contem um ponto elíptico. Se H_k é constante, com $3 \leq k \leq n-1$, então Σ é totalmente umbílica. Além disso, Σ deve ser uma fatia $\{t_0\} \times M^n$ (necessariamente com $f'(t_0) \neq 0$), a menos no caso onde $-I \times_f M^n$ tem curvatura seccional constante positiva e Σ é uma hiperesfera umbílica. Este último caso não ocorrerá se a desigualdade em (7.2) for estrita.*

Demonstração. Multiplicando a primeira fórmula de Minkowski (6.2) pela constante $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} H_k$, temos

$$\int_\Sigma \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} H_k \left(f'(h) + \langle N, K\rangle H_1\right) d\Sigma = 0.$$

Subtraindo desta a $(k+1)$-ésima fórmula de Minkowski (fórmula (6.5); observe que $3 \leq k \leq n-1$), obtemos

$$\int_\Sigma \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (H_1 H_k - H_{k+1}) + \left(\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h)\right) \langle P_{k-1}(\nabla h), \nabla h\rangle \langle N, K\rangle \, d\Sigma = 0. \quad (7.7)$$

Suponhamos que $p_0 \in \Sigma$ é um ponto elíptico, isto é, um ponto onde todas as curvaturas principais são negativas. Portanto a constante $H_k = H_k(P_0)$ é positiva, pois

$$\begin{aligned} H_k(p_0) &= \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}^{-1} \sigma_k(-\kappa_1, \cdots, -\kappa_n) = \\ &= \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}^{-1} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} (-\kappa_{i_1}). \cdots .(-\kappa_{i_k}) > 0, \end{aligned}$$

e como na prova do Teorema 7, temos (7.5), com igualdade em cada etapa se, e somente se, o ponto é umbílico. Por outro lado, para cada $1 \leq j \leq n$, temos a seguinte generalização da desigualdade de Cauchy-Schwarz (veja, para isto, [[7], Teorema 51 e Teorema 144]),

$$H_{j-1} H_{j+1} \leq H_j^2$$

Visto que cada $H_j > 0$ para $j = 1, \cdots, k$, por (7.5), temos que

$$H_{j-1}H_{j+1} \leq H_j^2 \Leftrightarrow \frac{H_{j-1}H_{j+1}}{H_j} \leq H_j \Leftrightarrow \frac{H_{j+1}}{H_j} \leq \frac{H_j}{H_{j-1}}$$

ou seja, equivalente a

$$\frac{H_{k+1}}{H_k} \leq \frac{H_k}{H_{k-1}} \leq \cdots \leq \frac{H_2}{H_1} \leq H_1.$$

Mas, isto implica que

$$H_1H_k - H_{k+1} \geq 0, \tag{7.8}$$

com igualdade se, e somente se, Σ é totalmente umbílica.

Por outro lado, pelo Lema 3, também sabemos que a transformação P_{k-1} é positiva definida em Σ, o que nos dá

$$\left(\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h)\right)\langle P_{k-1}(\nabla h), \nabla h\rangle \geq 0,$$

visto que, por (7.2), $\left(\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h)\right) \geq 0$. Portanto, como $\langle N, K\rangle$ não muda de sinal em Σ, concluimos, de (7.7), que Σ é totalmente umbílica, pois $H_1H_k = H_{k+1}$ em Σ, e que

$$\left(\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h)\right)\langle P_{k-1}(\nabla h), \nabla h\rangle = 0 \ em\ \Sigma.$$

De modo análogo ao fim da demostração do Teorema 6, segue-se o resultado.

$\square$

Capítulo 8

O Operador L_k Atuando na Função $\langle N, K\rangle$

Nesta seção calcularemos o operador L_k atuando na função $\langle N, K\rangle$.

Lema 7. *Seja Σ^n uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em um espaço-tempo GRW, $-I\times_f M^n$, com aplicação de Gauss N e função altura h. Então, para cada $k = 0, \cdots, n-1$, temos,*

$$\begin{aligned} L_k\left(\langle N, K\rangle\right) &= \binom{n}{k+1}\langle \nabla H_{k+1}, K\rangle + f'(h)c_k H_{k+1} + \\ &+ \binom{n}{k+1}\langle N, K\rangle\left(nH_1H_{k+1} - (n-k-1)H_{k+2}\right) + \\ &+ \langle N, K\rangle\left(tr\left(P_k\circ \overline{R}_N\right) + \frac{f''(h)}{f(h)}c_kH_k\right), \end{aligned} \tag{8.1}$$

onde $\overline{R}_N : \mathfrak{X}(\Sigma) \longrightarrow \mathfrak{X}(\Sigma)$ é o operador dado por $\overline{R}_N(X) = (\overline{R}_N(N, X)N)^{\top}$.

Demonstração. Sabemos, por definição, pag. 22, que

$$L_k\left(\langle N, K\rangle\right) = tr\left(\nabla^2\langle N, K\rangle\circ P_k\right) = \sum_{i=1}^{n}\left\langle \nabla_{P_k(E_i)}\nabla\langle N, K\rangle, E_i\right\rangle$$

onde $\{E_i, \cdots, E_n\}$ é um referencial ortonormal local arbitrário em Σ. De (4.7), vemos que

$$\begin{aligned} X\left(\langle N, K\rangle\right) &= \left\langle \overline{\nabla}_X N, K\right\rangle = \left\langle N, \overline{\nabla}_X K\right\rangle = \\ &= \langle -A(X), K\rangle + \langle N, f'(h)X\rangle = \\ &= -\left\langle X, A(K^{\top})\right\rangle \end{aligned}$$

para cada campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, então

$$\nabla \langle N, K \rangle = -A(K^\top).$$

Portanto,

$$\nabla_X(\nabla \langle N, K \rangle) = -\nabla_X(A(K^\top)) = -(\nabla_X A)(K^\top) - A(\nabla_X K^\top), \tag{8.2}$$

onde $\nabla_X A$ denota a derivada covariante de A,

$$(\nabla_X A)(Y) = \nabla A(Y, X) = \nabla_X(AY) - A(\nabla_X Y),\ \ X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma).$$

Relembremos agora que a equação de Codazzi de uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em um ambiente tipo-tempo arbitrário é dado por

$$\left\langle \overline{R}(X, Y)Z, N \right\rangle = \langle (\nabla_Y A)X - (\nabla_X A)Y, Z \rangle$$

para campos vetoriais tangentes X, Y, Z a Σ, ou, equivalentemente,

$$\left(\overline{R}(X, Y)N\right)^\top = (\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X, \tag{8.3}$$

visto que $\left\langle \overline{R}(X, Y)N, Z \right\rangle = -\left\langle \overline{R}(X, Y)Z, N \right\rangle$. Então, usando (4.8) e (8.3) em (8.2), obtemos que

$$\begin{aligned} \nabla_X(\nabla \langle N, K \rangle) &= -(\overline{R}(X, K^\top)N)^\top - (\nabla_{K^\top} A)X - \\ &- A(f'(h)X - \langle N, K \rangle AX) = \\ &= -(\overline{R}(X, K^\top)N)^\top - (\nabla_{K^\top} A)(X) - \\ &- f'(h)AX + \langle N, K \rangle A^2(X) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} L_k(\langle N, K \rangle) = &- \sum_{i=1}^n \left\langle \overline{R}(E_i, K^\top)N, P_k(E_i) \right\rangle - tr((\nabla_{K^\top} A) \circ P_k) - \\ &- f'(h) tr(A \circ P_k) + \langle N, K \rangle tr(A^2 \circ P_k). \end{aligned}$$

Por (3.3) e (3.4), temos que

$$\begin{aligned} L_k(\langle N, K \rangle) = &- \sum_{i=1}^n \left\langle \overline{R}(E_i, K^\top)N, P_k(E_i) \right\rangle - tr((\nabla_{K^\top} A) \circ P_k) + \\ &+ f'(h) c_k H_{k+1} + \binom{n}{k+1} \langle N, K \rangle (nH_1 H_{k+1} - (n-k-1)H_{k+2}). \end{aligned}$$

Usando o fato geral que

$$tr(\nabla_X A \circ P_k) = tr(P_k \circ \nabla_X A) = -\binom{n}{k+1}\langle \nabla H_{k+1}, X\rangle\,,$$

para cada compo vetorial $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ (veja equação (3.6) em [15]), temos

$$\begin{aligned} L_k(\langle N, K\rangle) &= \binom{n}{k+1}\langle \nabla H_{k+1}, K\rangle - \\ &- \sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{R}(E_i, K^{\top})N, P_k(E_i)\right\rangle + f'(h)c_k H_{k+1} + \\ &+ \binom{n}{k+1}\langle N, K\rangle\,(nH_1H_{k+1} - (n-k-1)H_{k+2}). \end{aligned} \tag{8.4}$$

Notemos agora que, de (4.6), podemos escrever

$$\begin{aligned} \overline{R}(X, K^{\top})N &= \overline{R}(X, K + \langle N, K\rangle\, N)N = \\ &= \overline{R}(X, K)N - \langle N, K\rangle\,\overline{R}(N, X)N. \end{aligned} \tag{8.5}$$

para cada campo vetorial tangente X a Σ. Por outro lado, visto que $K^* = 0$, seque de (6.7) que

$$\begin{aligned} \overline{R}(X, K)N = &- ((\log f)')^2\,\langle K, N\rangle\, X + \\ &+ (\log f)''\,\langle N, \partial_t\rangle\,(\langle K, \partial_t\rangle\, X - \langle X, \partial_t\rangle\, K) + \\ &+ (\log f)''\,\langle X, \partial_t\rangle\,\langle K, N\rangle\,\partial_t. \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \langle X, \partial_t\rangle\,\langle K, N\rangle\,\partial_t &= \langle X, \partial_t\rangle\,\langle f\partial_t, N\rangle\,\partial_t = \\ &= \langle X, \partial_t\rangle\,\langle \partial_t, N\rangle\, f\partial_t = \\ &= \langle X, \partial_t\rangle\,\langle \partial_t, N\rangle\, K, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle N, \partial_t\rangle\,\langle K, \partial_t\rangle\, X &= \langle N, \partial_t\rangle\,\langle f\partial_t, \partial_t\rangle\, X = \\ &= -\langle N, f\partial_t\rangle\, X = -\langle N, K\rangle\, X \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\overline{R}(X,K)N &= -((\log f)')^2 \langle K,N\rangle X - (\log f)'' \langle N,K\rangle X = \\
&= (-((\log f)')^2 - (\log f)'') \langle K,N\rangle X = \\
&= \left(-\frac{f'^2(h)}{f^2(h)} - \frac{(f''f - f'^2)(h)}{f^2(h)}\right) \langle K,N\rangle X = \\
&= -\frac{f''(h)}{f(h)} \langle K,N\rangle X,
\end{aligned}$$

para cada campo vetorial tangente X a Σ. Então (8.5) se torna

$$\overline{R}(X,K^\top)N = -\langle N,K\rangle \left(\frac{f''(h)}{f(h)}X + \overline{R}(N,X)N\right).$$

Portanto, usando (3.2),

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{R}(E_i,K^\top)N, P_kE_i\right\rangle &= -\langle N,K\rangle \sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{f''(h)}{f(h)}E_i + \overline{R}(N,E_i)N, P_kE_i\right\rangle = \\
&= -\langle N,K\rangle \left(\frac{f''(h)}{f(h)}tr(P_k) + \sum_{i=1}^{n} \left\langle P_k(\overline{R}(N,E_i)N), E_i\right\rangle\right) = \\
&= -\langle N,K\rangle \left(\frac{f''(h)}{f(h)}tr(P_k) + tr(P_k \circ \overline{R}_N)\right) = \\
&= -\langle N,K\rangle \left(\frac{f''(h)}{f(h)}c_kH_k + tr(P_k \circ \overline{R}_N)\right). \qquad (8.6)
\end{aligned}$$

Substituindo (8.6) em (8.4) obtemos (8.1).

□

Observe que quando $k = 0$, $L_0 = \Delta$ é o operador Laplaciano em Σ (isto por (3.6) e pelo Lema 1). Assim quando $k = 0$, a expressão (8.1) nos dá o sequinte resultado.

Corolário 3. *Seja Σ^n uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em um espaço-tempo GRW, com aplicação de Gauss N e função altura h. Então,*

$$\begin{aligned}
\Delta\langle N,K\rangle &= n\langle \nabla H,K\rangle + nf'(h)H + \langle N,K\rangle |A|^2 + \\
&+ \langle N,K\rangle (Ric_M(N^*,N^*) - (n-1)(\log f)''(h)|\nabla h|^2). \qquad (8.7)
\end{aligned}$$

Demonstração. Fazendo $k = 0$ em (8.1) temos,

$$\begin{aligned}\Delta\langle N, K\rangle &= n\langle\nabla H, K\rangle + f'(h)nH + \langle N, K\rangle n(nH^2 - (n-1)H_2) + \\ &+ \langle N, K\rangle\left(tr(P_0\circ\overline{R}_N) + \frac{f''(h)}{f(h)}n\right).\end{aligned}$$

Observe que

$$tr(P_0\circ\overline{R}_N) = tr(\overline{R}_N) = \overline{Ric}(N, N), \tag{8.8}$$

onde $\overline{Ric}$ é o tensor de Ricci de $-I\times_f M^n$. Portanto, levando em conta que, por (4.4),

$$\begin{aligned}|\nabla h|^2 &= \langle\nabla h, \nabla h\rangle = \\ &= \left\langle -\partial_t^\top, \partial_t^\top\right\rangle = \\ &= \langle -\partial_t - \langle N, \partial_t\rangle N, -\partial_t - \langle N, \partial_t\rangle N\rangle = \\ &= -1 + \langle N, \partial_t\rangle^2,\end{aligned}$$

isto é,

$$\langle N, \partial_t\rangle^2 = 1 + |\nabla h|^2, \tag{8.9}$$

obtemos de (8.8), (6.4) e (8.9) que

$$\begin{aligned}tr(\overline{R}_N) + n\frac{f''(h)}{f(h)} &= \overline{Ric}(N, N) + n\frac{f''(h)}{f(h)} = \\ &= Ric_M(N^*, N^*) + (n((\log f)')^2(h) + (\log f)''(h))\langle N, N\rangle - \\ &- (n-1)(\log f)''(h)\langle N, \partial_t\rangle^2 + n\frac{f''(h)}{f(h)} = \\ &= Ric_M(N^*, N^*) - (n((\log f)')^2(h) + (\log f)''(h)) - \\ &- (n-1)(\log f)''(h)(1 + |\nabla h|^2) + n\frac{f''(h)}{f(h)}\ .\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}-(n((\log f)')^2(h) + (\log f)''(h)) - (n-1)(\log f)''(h) + n\frac{f''(h)}{f(h)} &= \\ = -n\frac{f'^2}{f^2}(h) - n(\log f)''(h) + n\frac{f''(h)}{f(h)} &= \\ = -n\frac{f'^2(h)}{f^2(h)} - n\left(\frac{f''f - f'^2}{f^2}\right)(h) + n\frac{f''(h)}{f(h)} &= 0\ .\end{aligned}$$

Assim,

$$tr(\overline{R}_N) + n\frac{f''(h)}{f(h)} = Ric_M(N^*, N^*) - (n-1)(\log f)''(h)|\nabla h|^2 \ . \tag{8.10}$$

Temos também, por (3.4) com $k = 0$, que

$$n^2H^2 - n(n-1)H_2 = tr(A^2) := |A|^2.$$

Substituindo (8.10) e o valor de $n^2H^2 - n(n-1)H_2$ em (8.1), obtemos o resultado.

□

Para encontrarmos uma expressão melhor de (8.1) quando $k \geq 1$, observe que de (6.7) também temos

$$\begin{aligned}
\overline{R}(N,X)N &= R_M(N^*, X^*)N^* + ((\log f)')^2(\langle N,N\rangle X - \langle X,N\rangle N) + \\
&+ (\log f)'' \langle N, \partial_t\rangle (\langle X, \partial_t\rangle N - \langle N, \partial_t\rangle X) - \\
&- (\log f)''(\langle X, \partial_t\rangle \langle N, N\rangle - \langle N, \partial_t\rangle \langle X, N\rangle \partial_t = \\
&= R_M(N^*, X^*)N^* - ((\log f)')^2(h)X + \\
&+ (\log f)''(h) \langle N, \partial_t\rangle (\langle X, \partial_t\rangle N - \langle N, \partial_t\rangle X) + \\
&+ (\log f)''(h) \langle X, \partial_t\rangle \partial_t = \\
&= R_M(N^*, X^*)N^* - (((\log f)')^2(h) + (\log f)''(h) \langle N, \partial_t\rangle^2)X + \\
&+ (\log f)''(h) \langle X, \partial_t\rangle \partial_t + (\log f)''(h) \langle N, \partial_t\rangle \langle X, \partial_t\rangle N,
\end{aligned}$$

para cada campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Usando que $\nabla h = -\partial_t^\top$ (por (4.4)) e (8.9), temos que

$$\begin{aligned}
\overline{R}_N(X) &= \overline{R}(N,X)N = R_M(N^*, X^*)N^* - (((\log f)')^2(h) + \\
&+ (\log f)''(h)(1 + |\nabla h|^2))X + (\log f)''(h) \langle X, -\nabla h\rangle \partial_t + \\
&+ (\log f)''(h) \langle N, \partial_t\rangle \langle X, -\nabla h\rangle N.
\end{aligned}$$

Observe que

$$((\log f)')^2(h) + (\log f)''(h) = \frac{f'^2}{f^2}(h) + \frac{(f''f - f'^2)}{f^2}(h) = \frac{f''f}{f^2}(h)$$

e

$$\begin{aligned}
(\log f)''(h)(- \langle X, \nabla h\rangle \partial_t - \langle N, \partial_t\rangle \langle X, \nabla h\rangle N) = \\
= (\log f)''(h) \langle X, \nabla h\rangle (-\partial_t - \langle N, \partial_t\rangle N) = \\
= (\log f)''(h) \langle X, \nabla h\rangle (-\partial_t^\top) = \\
= (\log f)''(h) \langle X, \nabla h\rangle \nabla h,
\end{aligned}$$

visto que $\partial_t = \partial_t^\top - \langle N, \partial_t \rangle N$. Assim,

$$\begin{aligned}\overline{R}_N(X) &= R_M(N^*, X^*)N^* - \left(\frac{f''(h)}{f(h)} + (\log f)''(h)|\nabla h|^2\right) X + \\ &+ (\log f)''(h) \langle X, \nabla h \rangle \nabla h.\end{aligned}$$

Seque então que,

$$\begin{aligned} tr(P_k \circ \overline{R}_N) + \frac{f''(h)}{f(h)} c_k H_k = \\ = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{R}_N(E_i), P_k E_i \right\rangle + \frac{f''(h)}{f(h)} c_k H_k = \\ = \sum_{i=1}^{n} (\langle R_M(N^*, E_i^*)N^*, P_k E_i \rangle + (\log f)''(h) \langle \langle E_i, \nabla h \rangle \nabla h, P_k E_i \rangle) - \\ - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{f''(h)}{f(h)} + (\log f)''(h)|\nabla h|^2\right) \langle E_i, P_k E_i \rangle + \frac{f''(h)}{f(h)} c_k H_k = \\ = \sum_{i=1}^{n} \langle R_M(N^*, E_i^*)N^*, P_k E_i \rangle + (\log f)''(h) \left\langle P_k \nabla h, \sum_{i=1}^{n} \langle E_i, \nabla h \rangle \nabla h \right\rangle - \\ - \left(\frac{f''(h)}{f(h)} + (\log f)''(h)|\nabla h|^2\right) tr(P_k) + \frac{f''(h)}{f(h)} c_k H_k = \\ = \sum_{i=1}^{n} \langle R_M(N^*, E_i^*)N^*, P_k E_i \rangle + (\log f)''(h) \langle P_k \nabla h, \nabla h \rangle - \\ - \left(\frac{f''(h)}{f(h)} + (\log f)''(h)|\nabla h|^2\right) c_k H_k + \frac{f''(h)}{f(h)} c_k H_k = \\ = \sum_{i=1}^{n} \langle R_M(N^*, E_i^*)N^*, P_k E_i \rangle - (\log f)''(h)(c_k H_k |\nabla h|^2 - \langle P_k \nabla h, \nabla h \rangle), \end{aligned} \tag{8.11}$$

onde $\{E_1, \cdots, E_n\}$ é um referencial ortonormal local arbitrário em Σ.

Consideremos primeiro o caso onde $n = 2$ ou $n \geq 3$ e M^n tem curvatura seccional constante. Em ambos os casos (para o caso $n = 2$, veja [5], Lema 3.4), temos que

$$(R_M(N^*, X^*)N^*)^\top = \kappa \langle N^*, N^* \rangle_M (X^*)^\top - \kappa \langle N^*, X^* \rangle (N^*)^\top$$

onde κ (não necessariamente constante) é a curvatura Gaussiana de M^2 ao longo da imersão ψ (onde $n = 2$) ou a curvatura seccional constante de M^n (quando $n \geq 3$). Usando agora as equações (6.9), (6.11), (6.12), (6.14) e (8.9), obtemos que

$$\begin{aligned}
(R_M(N^*, X^*)N^*)^\top &= \frac{\kappa}{f^2(h)}|\nabla h|^2(X + \langle X, \nabla h\rangle \nabla h) - \\
&- \kappa\left(-\frac{1}{f^2(h)}\langle N, \partial_t\rangle \langle X, \nabla h\rangle\right)(-\langle N, \partial_t\rangle \nabla h) = \\
&= \frac{\kappa}{f^2(h)}(|\nabla h|^2 X + \langle X, \nabla h\rangle \nabla h|\nabla h|^2 - \\
&- \langle N, \partial_t\rangle^2 \langle X, \nabla h\rangle \nabla h) = \\
&= \frac{\kappa}{f^2(h)}(|\nabla h|^2 X + \langle X, \nabla h\rangle \nabla h|\nabla h|^2 - \\
&- (1 + |\nabla h|^2)\langle X, \nabla h\rangle \nabla h) = \\
&= \frac{\kappa}{f^2(h)}(|\nabla h|^2 X - \langle X, \nabla h\rangle \nabla h)
\end{aligned}$$

e (8.11) torna-se

$$\begin{aligned}
tr(P_k \circ \overline{R}_N) + \frac{f''(h)}{f(h)}c_k H_k &= \sum_{i=1}^{n}\langle R_M(N^*, E_i^*)N^*, P_k E_i\rangle - \\
&- (\log f)''(h)(c_k H_k|\nabla h|^2 - \langle P_k\nabla h, \nabla h\rangle) = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{\kappa}{f^2(h)}\left\langle|\nabla h|^2 E_i - \langle E_i, \nabla h\rangle \nabla h, P_k E_i\right\rangle - \\
&- (\log f)''(h)(c_k H_k|\nabla h|^2 - \langle P_k\nabla h, \nabla h\rangle) = \\
&= \frac{\kappa}{f^2(h)}(|\nabla h|^2 tr(P_k) - \langle P_k\nabla h, \nabla h\rangle) - \\
&- (\log f)''(h)(c_k H_k|\nabla h|^2 - \langle P_k\nabla h, \nabla h\rangle) = \\
&= \frac{\kappa}{f^2(h)}(|\nabla h|^2 c_k H_k - \langle P_k\nabla h, \nabla h\rangle) - \\
&- (\log f)''(h)(c_k H_k|\nabla h|^2 - \langle P_k\nabla h, \nabla h\rangle) = \\
&= \left(\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h)\right)(c_k H_k|\nabla h|^2 - \langle P_k\nabla h, \nabla h\rangle).
\end{aligned} \tag{8.12}$$

Usando esta expressão em (8.1), obtemos os sequintes resultados.

Corolário 4. *Seja* $\psi : \Sigma^2 \longrightarrow -I \times_f M^2$ *uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em um espaço-tempo GRW de dimensão* 3*, com aplicação de Gauss* N *e função altura* h*. Então,*

$$\begin{aligned} L_1(\langle N, K\rangle) &= \langle \nabla H_2, K\rangle + 2f'(h)H_2 + \langle N, K\rangle\, 2H_1H_2 - \\ &- \langle N, K\rangle \left(\frac{\kappa_M(\pi)}{f^2(h)} - (\log f)''(h)\right)\langle A\nabla h, \nabla h\rangle\,, \end{aligned}$$

onde $\pi : \Sigma^2 \longrightarrow M^2$ *denota a projeção de* Σ^2 *em* M^2*,* $\pi = \pi_M \circ \psi$*.*

Demonstração. Fazendo $k = 1$ e $n = 2$ em (8.1), temos que

$$\begin{aligned} L_1(\langle N, K\rangle) &= \langle \nabla H_2, K\rangle + f'(h)c_1H_2 + \langle N, K\rangle\, 2H_1H_2 + \\ &+ \langle N, K\rangle \left(tr(P_1 \circ \overline{R}_N) + \frac{f''(h)}{f(h)}c_1H_1\right) = \\ &= \langle \nabla H_2, K\rangle + 2f'(h)H_2 + \langle N, K\rangle\, 2H_1H_2 - \\ &- \langle N, K\rangle \left(-\left(tr(P_1 \circ \overline{R}_N) + \frac{f''(h)}{f(h)}c_1H_1\right)\right). \end{aligned}$$

Substituindo (8.12), com $k = 1$, na expressão acima, temos

$$\begin{aligned} L_1(\langle N, K\rangle) &= \langle \nabla H_2, K\rangle + 2f'(h)H_2 + \langle N, K\rangle\, 2H_1H_2 - \\ &- \langle N, K\rangle \left(-\left(\frac{\kappa_M(\pi)}{f^2(h)} - (\log f)''(h)\right)(c_1H_1|\nabla h|^2 - \langle P_1\nabla h, \nabla h\rangle)\right). \end{aligned}$$

Observe que pela definição de c_1 e P_1, temos

$$\begin{aligned} c_1H_1|\nabla h|^2 - \langle P_1\nabla h, \nabla h\rangle &= 2H_1|\nabla h|^2 - \langle 2H_1\nabla h + A\nabla h, \nabla h\rangle = \\ &= 2H_1|\nabla h|^2 - (2H_1|\nabla h|^2 + \langle A\nabla h, \nabla h\rangle) = \\ &= -\langle A\nabla h, \nabla h\rangle\,. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} L_1(\langle N, K\rangle) &= \langle \nabla H_2, K\rangle + 2f'(h)H_2 + \langle N, K\rangle\, 2H_1H_2 - \\ &- \langle N, K\rangle \left(\frac{\kappa_M(\pi)}{f^2(h)} - (\log f)''(h)\right)\langle A\nabla h, \nabla h\rangle\,. \end{aligned}$$

□

Corolário 5. *Seja Σ^n uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em um espaço-tempo RW com fibra Riemanniana M^n de curvatura seccional constante κ, e seja N e h a aplicação de Gauss e a função altura, respectivamente. Então, para cada $k = 0, \cdots, n-1$, temos que*

$$\begin{aligned} L_k(\langle N, K\rangle) &= \binom{n}{k+1}\langle \nabla H_{k+1}, K\rangle + f'(h)c_k H_{k+1} + \\ &+ \binom{n}{k+1}\langle N, K\rangle\left(nH_1H_{k+1} - (n-k-1)H_{k+2}\right) + \\ &+ \langle N, K\rangle\left(\frac{\kappa}{f^2(h)} - (\log f)''(h)\right)(c_kH_k|\nabla h|^2 - \langle P_k\nabla h, \nabla h\rangle). \end{aligned}$$

Demonstração. A prova é uma substituição direta da expressão (8.12) em (8.1).

□

Obteremos uma expressão melhor de (8.1) para um caso mais geral, analizando o somatório em (8.11). Calcularemos tal somatório usando um referencial ortonormal de Σ que diagonaliza A. A dificuldade que encontramos é que tal referencial nem sempre existe, e o problema ocorre quando a multiplicidade das curvaturas principais mudam. Por esta razão, trabalharemos em um subconjunto Σ_0 de Σ consistindo de todos os pontos em que o número de curvaturas principais distintas é localmente constante, que é um subconjunto aberto e denso de Σ [[1], Parágrafo 16.10]. Então, para cada $p \in \Sigma_0$ existe um referencial ortonormal local $\{E_1, \cdots, E_n\}$ definido em uma vizinhança de p que diagonaliza A e, portanto, diagonaliza P_k, isto é, tal que $A(E_i) = \kappa_i E_i$ e $P_k E_i = \mu_{i,k}E_i$. Portanto, denotando por $\kappa_M(N^* \wedge E_i^*)$ a curvatura seccional em M^n no plano gerado por N^* e E_i^*, temos

$$\begin{aligned} \langle R_M(N^*, E_i^*)N^*, P_kE_i\rangle &= \mu_{i,k}\langle R_M(N^*, E_i^*)N^*, E_i\rangle = \\ &= \mu_{i,k}f^2(h)\langle R_M(N^*, E_i^*)N^*, E_i^*\rangle_M = \\ &= \mu_{i,k}f^2(h)\kappa_M(N^* \wedge E_i^*)|N^* \wedge E_i^*|_M^2 = \\ &= \frac{\mu_{i,k}}{f^2(h)}\kappa_M(N^* \wedge E_i^*)|N^* \wedge E_i^*|^2, \end{aligned}$$

onde usamos o fato que,

$$|N^* \wedge E_i^*|^2 = f^4(h)|N^* \wedge E_i^*|_M^2,$$

visto que,

$$|N^* \wedge E_i^*|^2 = \langle N^*, N^* \rangle \langle E_i^*, E_i^* \rangle - \langle N^*, E_i^* \rangle^2 ,$$

onde,

$$\begin{aligned} \langle N^*, N^* \rangle &= \langle N + \langle N, \partial_t \rangle \partial_t, N + \langle N, \partial_t \rangle \partial_t \rangle = \\ &= \langle N, N \rangle + \langle N, \partial_t \rangle^2 = \\ &= -1 + \langle N, \partial_t \rangle^2 = \\ &= -1 + (1 + |\nabla h|^2) \ (por \ (8.9)) = \\ &= |\nabla h|^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle E_i^*, E_i^* \rangle &= \langle E_i + \langle E_i, \partial_t \rangle \partial_t, E_i + \langle E_i, \partial_t \rangle \partial_t \rangle = \\ &= \langle E_i, E_i \rangle + \langle E_i, \partial_t \rangle^2 = \\ &= 1 + \langle E_i, \partial_t \rangle^2 = \\ &= 1 + \langle E_i, -\nabla h - \langle N, \partial_t \rangle N \rangle^2 = \\ &= 1 + (- \langle E_i, \nabla h \rangle)^2 = \\ &= 1 + \langle E_i, \nabla h \rangle^2 ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle N^*, E_i^* \rangle &= \langle N + \langle N, \partial_t \rangle \partial_t, E_i + \langle E_i, \partial_t \rangle \partial_t \rangle = \\ &= \langle E_i, \partial_t \rangle \langle N, \partial_t \rangle + \langle N, \partial_t \rangle \langle \partial_t, E_i \rangle - \langle N, \partial_t \rangle \langle E_i, \partial_t \rangle = \\ &= \langle E_i, \partial_t \rangle \langle N, \partial_t \rangle = \\ &= - \langle E_i, \nabla h \rangle \langle N, \partial_t \rangle . \end{aligned}$$

$\therefore$

$$\begin{aligned} |N^* \wedge E_i^*|^2 &= |\nabla h|^2 (1 + \langle E_i, \nabla h \rangle^2) - (\langle E_i, \nabla h \rangle^2 \langle N, \partial_t \rangle^2) = \\ &= |\nabla h|^2 (1 + \langle E_i, \nabla h \rangle^2) - \langle E_i, \nabla h \rangle^2 (1 + |\nabla h|^2) = \\ &= |\nabla h|^2 - \langle E_i, \nabla h \rangle^2 \end{aligned}$$

e, por outro lado,

$$|N^* \wedge E_i^*|_M^2 = \langle N^*, N^* \rangle_M \langle E_i^*, E_i^* \rangle_M - \langle N^*, E_i^* \rangle_M^2 ,$$

onde,

$$\langle N^*, N^* \rangle_M = \frac{|\nabla h|^2}{f^2(h)} \ (por \ (6.12));$$

$$\begin{aligned}
\langle E_i^*, E_i^* \rangle_M &= \frac{1}{f^2(h)}(\langle E_i, E_i \rangle + \langle (\pi_I)_*(E_i), (\pi_I)_*(E_i) \rangle_I) = \\
&= \frac{1}{f^2(h)}(\langle E_i, E_i \rangle + \langle - \langle E_i, \partial_t \rangle \partial_t, - \langle E_i, \partial_t \rangle \partial_t \rangle_I) = \\
&= \frac{1}{f^2(h)}(1 + \langle E_i, \partial_t \rangle^2);
\end{aligned}$$

$$\langle N^*, E_i^* \rangle_M = -\frac{1}{f^2(h)} \langle N, \partial_t \rangle \langle E_i, \nabla h \rangle \ \ (por \ (6.13))$$

$\therefore$

$$\begin{aligned}
|N^* \wedge E_i^*|_M^2 &= \frac{|\nabla h|^2}{f^2(h)} \left(\frac{1}{f^2(h)}(1 + \langle E_i, \partial_t \rangle^2) \right) - \frac{1}{f^4(h)} \langle N, \partial_t \rangle^2 \langle E_i, \nabla h \rangle^2 = \\
&= \frac{1}{f^4(h)} \left(|\nabla h|^2 (1 + \langle E_i, \nabla h \rangle^2) - \langle N, \partial_t \rangle^2 \langle E_i, \nabla h \rangle^2 \right) = \\
&= \frac{1}{f^4(h)}(|\nabla h|^2 - \langle E_i, \nabla h \rangle^2) = \\
&= \frac{1}{f^4(h)} |N^* \wedge E_i^*|^2.
\end{aligned}$$

Então, temos o seguinte resultado.

Corolário 6. *Seja Σ^n uma hipersuperfície tipo-espaço imersa em um espaço-tempo GRW, com aplicação de Gauss N e função altura h. Então, para cada $k = 0, \cdots, n-1$, temos*

$$\begin{aligned}
L_k(\langle N, K \rangle) &= \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} \langle \nabla H_{k+1}, K \rangle + f'(h) c_k H_{k+1} + \\
&+ \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} \langle N, K \rangle (n H_1 H_{k+1} - (n-k-1) H_{k+2}) + \\
&+ \frac{\langle N, K \rangle}{f^2(h)} \sum_{i=1}^n \mu_{i,k} \kappa_M (N^* \wedge E_i^*) |N^* \wedge E_i^*|^2 - \\
&- \langle N, K \rangle (\log f)''(h) (c_k H_k |\nabla h|^2 - \langle P_k \nabla h, \nabla h \rangle).
\end{aligned} \tag{8.13}$$

Demonstração. A demonstração é uma substituição direta, em (8.1), da análise do somatório em (8.11), que fizemos acima.

□

Capítulo 9

Umbilicidade de Hipersuperfícies em Espaço-Tempo GRW

Quando $k = 0$, nossas fórmulas para o operador $L_0 = \Delta$ atuando na função $g(h)$ (relembremos que $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é qualquer primitiva de f) e $\langle N, K\rangle$ nos permite reobter o resultado de unicidade dado por Montiel em [[19], Teorema 6] para hipersuperfícies com curvatura média constante.

Teorema 9. *Seja $-I \times_f M^n$ um espaço-tempo GRW spatially closed obedecendo a condição de convergência nula, isto é, satisfazendo*

$$Ric_M(X, X) \geq (n-1)sup_I(ff'' - f'^2)\,\langle X, X\rangle_M \tag{9.1}$$

para todo compo vetorial, X, em M, onde Ric_M e $\langle , \rangle_M$ são, respectivamente, o tensor de Ricci e métrico da variedade Riemanniana compacta M^n. Então as únicas hipersuperfícies tipo-espaço compacta imersa em $-I \times_f M^n$ com curvatura média constante são as fatias mergulhadas $\{t\} \times M^n$, $t \in I$, a menos no caso onde $-I \times_f M^n$ é isométrico ao espaço de De Sitter em uma vizinhança de Σ, que deve ser uma hiperesfera umbílica. Este último caso não pode ocorrer se a desigualdade em (9.1) for estrita.

Demonstração. Escolhamos em Σ a aplicação de Gauss N apontando para o futuro e consideremos a função $\phi = Hg(h) + \langle N, K\rangle \in C^\infty(\Sigma)$. Visto que H é constante, temos que

$$\begin{aligned}
\Delta\phi &= \Delta(Hg(h) + \langle N, K\rangle) = \\
&= \Delta(Hg(h)) + \Delta(\langle N, K\rangle) = \\
&= H\Delta(g(h)) + \Delta(\langle N, K\rangle).
\end{aligned}$$

Mostremos que ϕ é superharmônica em Σ, isto é, $\Delta\phi \leq 0$. De fato, por (4.3) e (8.7), temos que

$$\begin{aligned}
\Delta\phi &= -H(c_0(f'(h)H_0 + \langle N, K\rangle H_1)) + (n\langle \nabla H, K\rangle + nf'(h)H + \\
&+ \langle N, K\rangle |A|^2 + \langle N, K\rangle (Ric_M(N^*, N^*) - (n-1)(\log f)''(h)|\nabla h|^2)) = \\
&= H(-nf'(h) - n\langle N, K\rangle H_1) + nf'(h)H + \langle N, K\rangle |A|^2 + \\
&+ \langle N, K\rangle (Ric_M(N^*, N^*) - (n-1)(\log f)''(h)|\nabla h|^2) = \\
&= \langle N, K\rangle (-nH^2 + |A|^2 + Ric_M(N^*, N^*) - (n-1)(\log f)''(h)|\nabla h|^2).
\end{aligned} \tag{9.2}$$

Por (3.4), com $k = 0$, temos

$$|A|^2 = tr(A^2) = n(nH_1^2 - (n-1)H_2).$$

Daí,

$$\begin{aligned}
|A|^2 - nH^2 &= n^2H_1^2 - n(n-1)H_2 - nH^2 = \\
&= (n^2 - n)H_1^2 - n(n-1)H_2 = \\
&= n(n-1)(H_1^2 - H_2).
\end{aligned}$$

Por (7.8), com $k = 1$, temos que $H_1^2 - H_2 \geq 0$, donde $|A|^2 - nH^2 \geq 0$ em Σ, com igualdade se, e somente se, o ponto é umbílico. Além disso, de (9.1), temos

$$Ric_M(N^*, N^*) \geq (n-1)sup_I(ff'' - f'^2)\langle N^*, N^*\rangle_M$$

Por (6.12),

$$Ric_M(N^*, N^*) \geq (n-1)sup_I(ff'' - f'^2)\frac{|\nabla h|^2}{f^2(h)} \geq (n-1)(\log f)''(h)|\nabla h|^2,$$

donde,

$$Ric_M(N^*, N^*) - (n-1)(\log f)''(h)|\nabla h|^2 \geq 0.$$

Portanto, visto que $\langle N, K\rangle < 0$ em Σ, por (9.2) temos que ϕ é superharmônica em Σ. Como Σ é compacta, temos, pelo Teorema de Hoff, que ϕ é constante (veja Proposição 4 no Apêndice). Daí, $\Delta\phi = 0$, donde, de (9.2), $|A|^2 - nH^2 = 0$ em Σ, que implica que Σ é totalmente umbílica e

$$Ric_M(N^*, N^*) - (n-1)(\log f)''(h)|\nabla h|^2 = 0 \; em \; \Sigma. \tag{9.3}$$

Se a desigualdade em (9.1) for estrita (para vetores não nulos), (9.3) é maior que zero (para vetores não nulos), portanto (9.3) é equivalente a $N^*(p) = 0$, para todo $p \in \Sigma$, isto é, $|\nabla h(p)| = 0$, para todo $p \in \Sigma$, visto que por (6.12), $\langle N^*, N^* \rangle = \frac{|\nabla h|^2}{f^2(h)}$. Então, h deve ser constante e Σ uma fatia. No caso geral, obtemos que Σ é totalmente umbílica e tem curvatura média constante em $-I \times_f M^n$. Assim, o resultado segue observando que neste caso, sendo a hipersuperfície compacta, mas não uma fatia, pode ocorrer somente se $-I \times_f M^n$ é localmente o espaço-tempo de De Sitter e Σ é uma hiperesfera umbílica (veja a classificação de hipersuperfície tipo-espaço compacta com curvatura média constante dada por Montiel em [[19], Teorema 5].

$\square$

Nosso objetivo agora é estender o argumento acima ao caso de hipersuperfícies com curvatura média de ordem superior constante, usando nossa fórmula geral para o operador L_k atuando nas funções $g(h)$ e $\langle N, K \rangle$. Especificamente, o seguinte resultado de unicidade, estende o Teorema 7 para o caso do espaço-tempo GRW. Aqui, em vez da condição de convergência nula, precisamos impor em $-I \times_f M^n$ uma condição mais forte, isto é,

$$\kappa_M \geq sup_I(ff'' - f'^2) \tag{9.4}$$

onde κ_M representa a curvatura seccional de M^n. Nos referimos a (9.4) como a condição de convergencia nula forte. Notemos que (9.4) implica na condição de convergência nula (NCC), pois,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|X|_M^2} Ric_M(X,X) &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle R_M\left(\frac{X}{|X|_M}, E_i\right)\frac{X}{|X|_M}, E_i \right\rangle_M \geq \\ &\geq (n-1)sup_I(ff'' - f'^2), \end{aligned}$$

onde $\left\{E_1, \cdots, E_n = \frac{X}{|X|_M}\right\}$ é um referencial ortonormal de M.

Teorema 10. *Seja $-I \times_f M^n$ um espaço-tempo GRW espacialmente fechado obedecendo a condição de convergência nula forte, com $n \geq 3$. Suponha que Σ^n é uma hipersuperfície tipo-espaço compactas imersas em $-I \times_f M^n$ que está contida em um bloco $\Omega(t_1, t_2) = (t_1, t_2) \times M^n$ em que f' não se anula. Se H_k é constante, com $2 \leq k \leq n$, então Σ é totalmente umbílica. Além disso, Σ deve ser uma fatia $\{t_0\} \times M$ (necessariamente com $f'(t_0) \neq 0$), a menos no caso onde $-I \times_f M^n$ tem curvatura seccional constante positiva e Σ é uma hiperesfera umbílica. Este último caso não pode ocorrer se a desigualdade em (9.4) for estrita.*

Demonstração. Temos que $f'(h) > 0$ (ou $f'(h) < 0$) em Σ. Sabemos, do Lema 5, que existe um ponto $p_0 \in \Sigma$ onde todas as curvaturas principais com respeito a aplicação de Gauss N apontando para o futuro (ou apontando para o passado, se $f'(h) < 0$) são negativas, isto é, um ponto elíptico. Em particular, H_k é constante positiva, pois H_k é constante e

$$H_k(p) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}^{-1} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} (-\kappa_{i_1}). \cdots .(-\kappa_{i_k})$$

é positiva. Consideremos a função $\phi = H_k^{1/k} g(h) + \langle N, K \rangle \in C^\infty(\Sigma)$. Visto que H_k é constante e pela definição de L_{k-1}, temos que

$$L_{k-1}\phi = H_k^{1/k} L_{k-1}(g(h)) + L_{k-1}(\langle N, K \rangle).$$

Por (4.3) e (8.13) temos que

$$\begin{aligned} L_{k-1}\phi &= H_k^{1/k}(-c_{k-1}(f'(h)H_{k-1} + \langle N, K \rangle H_k)) + \\ &+ \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \langle \nabla H_k, K \rangle + f'(h) c_{k-1} H_k + \\ &+ \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \langle N, K \rangle (nH_1 H_k - (n - (k-1) - 1) H_{k+1}) + \\ &+ \frac{\langle N, K \rangle}{f^2(h)} \sum_{i=1}^{n} \mu_{i,k-1} \kappa_M (N^* \wedge E_i^*) |N^* \wedge E_i^*|^2 - \\ &- \langle N, K \rangle (\log f)''(h)(c_{k-1} H_{k-1} |\nabla h|^2 - \langle P_{k-1} \nabla h, \nabla h \rangle). \end{aligned}$$

Fazendo

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{1}{f^2(h)} \sum_{i=1}^{n} \mu_{i,k-1} \kappa_M (N^* \wedge E_i^*) |N^* \wedge E_i^*|^2 - \\ &- (\log f)''(h)(c_{k-1} H_{k-1} |\nabla h|^2 - \langle P_{k-1} \nabla h, \nabla h \rangle), \end{aligned}$$

e visto que $c_{k-1} = k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$, temos

$$\begin{aligned} L_{k-1}\phi &= k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f'(h) \left(H_k - H_k^{1/k} H_{k-1} \right) + \\ &+ \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \langle N, K \rangle \left(nH_1 H_k - (n-k) H_{k+1} - kH^{(1+k)/k} \right) + \\ &+ \langle N, K \rangle \Theta, \end{aligned} \tag{9.5}$$

onde $P_{k-1}E_i = \mu_{i,k-1}E_i$, para cada $i = 1, \cdots, n$.

Visto que Σ tem um ponto elíptico, das provas dos Teoremas 7 e 8, respectivamente, sabemos que as desigualdades (7.5) e (7.8) ocorrem em Σ para $1 \leq k \leq n$ (a desigualdade (7.8) foi obtida na prova do Teorema 8, onde supomos que $k \leq n-1$, contudo (7.8) trivialmente ocorre para $k = n$, visto que $H_{n+1} = 0$ por definição). De (7.5), temos que

$$H_k - H_k^{1/k}H_{k-1} = H_k^{1/k}(H_k^{(k-1)/k} - H_{k-1}) \leq 0 \tag{9.6}$$

(pois $H_{k-1}^{1/(k-1)} \geq H_k^{1/k}$) em Σ, com igualdade se, e somente se, Σ é totalmente umbílica. Usando (7.8) e (7.5) temos

$$\begin{aligned} nH_1H_k - (n-k)H_{k+1} - kH_k^{(k+1)/k} &= \\ = (n-k+k)H_1H_k - (n-k)H_{k+1} - kH_k^{(k+1)/k} &= \\ = (n-k)(H_1H_k - H_{k+1}) + kH_k(H_1 - H^{1/k}) &\geq \\ \geq kH_k(H_1 - H^{1/k}) \geq 0 & \end{aligned} \tag{9.7}$$

em Σ, visto que $H_1H_k - H_{k+1} \geq 0$ e $H_1 - H_k^{1/k} \geq 0$ por (7.8) e (7.5) respectivamente. Por outro lado, o Lema 2 (quando $k = 2$) e o Lema 3 (quando $k \geq 3$) implica que o operador L_{k-1} é elíptico ou, equivalentemente, P_{k-1} é positivo definido. Em particular, seus auto-valores $\mu_{i,k-1}$ são todos positivos em Σ, e de (9.4) temos

$$\mu_{i,k-1}\kappa_M(N^* \wedge E_i^*)|N^* \wedge E_i^*|^2 \geq \mu_{i,k-1}\alpha|N^* \wedge E_i^*|^2 \tag{9.8}$$

para cada $i = 1, \cdots, n$, onde $\alpha = sup_I(ff'' - f'^2)$. Da decomposição

$$N = N^* - \langle N, \partial_t\rangle \partial_t,\ E_i = E_i^* - \langle E_i, \partial_t\rangle \partial_t \ e\ \partial_t = -\nabla h - \langle N, \partial_t\rangle N \ (este\ por\ (4.4))$$

vemos que

$$|N^* \wedge E_i^*|^2 = |\nabla h|^2 - \langle E_i, \nabla h\rangle^2$$

(veja os calculos feitos logo antes do Corolário 6). Portanto, (9.8) implica que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mu_{i,k-1}\kappa_M(N^* \wedge E_i^*)|N^* \wedge E_i^*|^2 &\geq \alpha\left(\sum_{i=1}^n \mu_{i,k-1}(|\nabla h|^2 - \langle E_i, \nabla h\rangle^2)\right) = \\ &= \alpha\left(tr(P_{k-1})|\nabla h|^2 - \sum_{i=1}^n \mu_{i,k-1}\langle E_i, \nabla h\rangle^2\right). \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \mu_{i,k-1} \langle E_i, \nabla h\rangle^2 &= \sum_{i=1}^{n} \mu_{i,k-1} \langle E_i, \nabla h\rangle \langle E_i, \nabla h\rangle = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle P_{k-1} E_i, \nabla h\rangle \langle E_i, \nabla h\rangle = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle E_i, P_{k-1} \nabla h\rangle \langle E_i, \nabla h\rangle = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \langle E_i, \nabla h\rangle E_i, P_{k-1} \nabla h\rangle = \\
&= \langle \nabla h, P_{k-1} \nabla h\rangle .
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \mu_{i,k-1} \kappa_M (N^* \wedge E_i^*) |N^* \wedge E_i^*|^2 &\geq \alpha (tr(P_{k-1}) |\nabla h|^2 - \langle P_{k-1}(\nabla h), \nabla h\rangle) = \\
&= \alpha (c_{k-1} H_{k-1} |\nabla h|^2 - \langle P_{k-1}(\nabla h), \nabla h\rangle)
\end{aligned}$$

e então,

$$\Theta \geq \left(\frac{\alpha}{f^2(h)} - (\log f)''(h) \right) (c_{k-1} H_{k-1} |\nabla h|^2 - \langle P_{k-1}(\nabla h), \nabla h\rangle) \geq 0. \tag{9.9}$$

Para a última desigualdade, observe que $\frac{\alpha}{f^2(h)} - (\log f)''(h) \geq 0$, devido a definição de α, e também note que,

$$\begin{gathered}
c_{k-1} H_{k-1} |\nabla h|^2 - \langle P_{k-1}(\nabla h), \nabla h\rangle = \\
tr(P_{k-1}) |\nabla h|^2 - \langle P_{k-1}(\nabla h), \nabla h\rangle = \\
|\nabla h|^2 \left(tr(P_{k-1}) - \left\langle P_{k-1} \left(\frac{\nabla h}{|\nabla h|} \right), \frac{\nabla h}{|\nabla h|} \right\rangle \right) \geq 0,
\end{gathered}$$

pois se $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, $|X|_M = 1$ e $X = \sum_{i=1}^{n} a_i E_i$, onde $\{E_i, \cdots, E_n\}$ é um referencial ortonormal de Σ, que num ponto $p \in \Sigma$ diagonaliza P_{k-1},

$$\begin{aligned} tr(P_{k-1}) - \langle P_{k-1}X, X\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \mu_{i,k-1} - \left\langle \sum_{i=1}^{n} \mu_{i,k-1} a_i E_i, \sum_{j=1}^{n} a_j E_j \right\rangle = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mu_{i,k-1} - \sum_{i=1}^{n} \mu_{i,k-1} a_i^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mu_{i,k-1}(1 - a_i^2) \geq 0, \end{aligned}$$

visto que $a_i^2 \leq 1$ (pois, $|X|_M = 1$) e $\mu_{i,k-1} \geq 0$ (pois, P_{k-1} é positivo definido).

Agora, usando (9.6), (9.7) e (9.9), e levando em conta que $f'(h) > 0$ (ou $f'(h) < 0$) e $\langle N, K\rangle < 0$ (ou $\langle N, K\rangle > 0$, se $f'(h) < 0$), obtemos de (9.5) que $L_{k-1}\phi \leq 0$ (ou, $L_{k-1}\phi \geq 0$, se $f'(h) < 0$ e, por conseguinte, $\langle N, K\rangle > 0$) em Σ. Visto que L_{k-1} é um operador elíptico na variedade Riemanniana Σ, que é compacta, temos, pelo princípio do máximo (veja Proposição 3 no Apêndice), que ϕ é constante. Portanto, $L_{k-1}\phi = 0$ e os três termos em (9.5) se anulam em Σ. Em particular, (9.6) é uma igualdade e Σ é totalmente úmbilica, logo, por (7.5), todas as curvaturas médias de ordem superior, H_j, $1 \leq j \leq k$, são constantes. Em particular, H_1 (veja que $k \geq 2$) é constante positiva e o resultado seque do Teorema 9, visto que (9.4) implica NCC.

$\square$

Capítulo 10

Apêndice

10.1 Operadores Elípticos de Segunda Ordem

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, um operador (diferenciável linear) de segunda ordem L em Ω é um operador do tipo

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c,$$

onde $a_{ij}, b_j, c : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas, com $a_{ij} = a_{ji}$ para todos $1 \leq i, j \leq n$. Para $f \in C^2(\Omega)$, definimos

$$Lf = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + cf.$$

Um operador L como acima é elíptico em $x \in \Omega$ se a matriz $(a_{ij}(x))$ for positiva definida. L é elíptico em Ω se o for em todo $x \in \Omega$. Segue do teorema espectral para operadores lineares auto-adjuntos que L é elíptico em $x \in \Omega$ se e só se os auto-valores da matriz (a_{ij}) forem todos positivos.

Proposição 2. *Se M^n é uma variedade Riemanniana e Φ é um campo auto- adjunto de operadores sobre M, então o operador $L : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$, dado por*

$$Lf = div(\Phi \nabla f) - \langle div\Phi, \nabla f \rangle,$$

é um operador diferencial linear de segunda ordem em M^n. Ademais, L é elíptico em $p \in M$ se e só se $\Phi_p : T_pM \longrightarrow T_pM$ for positivo definido.

Proposição 3. *Seja M^n uma variedade Riemanniana conexa, Φ um campo auto-adjunto e positivo definido de operadores lineares em M, e $Lf = div(\Phi\nabla f) - \langle div\Phi, \nabla f\rangle$. Se $f \in C^2(M)$ assume um máximo global em M^n e é tal que $Lf \geq 0$, então f é constante em M.*

Proposição 4. *Se M^n é uma variedade Riemanniana conexa compacta sem bordo, então toda função subharmônica $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é constante.*

Para as provas das proposições anteriores, veja [6].

10.2 Variedade Produto. Produto Torcido

Para relacionarmos a geometria da variedade produto $B \times F$ com a geometria das variedades B e F, é necessário o conceito de levantamento para $B \times F$ de funções de vetores tangentes de B e de F, que daremos a sequir:

(a) Se $f \in C^\infty(B)$ o levantamento de f para $B \times F$ é $\overline{f} = f \circ \pi_B \in C^\infty(B \times F)$;

(b) Se $x \in T_pB$ e $q \in F$, o levantamento $\overline{x}$ de x para $B \times F$ é o único vetor em $T_{p,q}B \times q$ tal que $d\pi_B(\overline{x}) = x$;

(c) Se $X \in \mathfrak{X}(B)$, o levantamento de X para $B \times F$ é o campo de vetores $\overline{X}$ que em cada (p, q) é o levantamento de $X(p)$ para $B \times F$. Equivalentemente, o levantamento $\overline{X}$ de X para $B \times F$ é o único campo $\overline{X} \in \mathfrak{X}(B \times F)$ tal que $d\pi_B(\overline{X}) = X$ e $d\pi_F(\overline{X}) = 0$. Neste caso, $\overline{X}$é dito um levantamento horizontal.

O conjunto dos levantamentos horizontais é denotado po $\mathcal{H}(B)$.

Funções, vetores tangentes e campos de vetores em F são levantados para $B \times F$ de maneira análoga usando a projeção π_F. Deste modo, obtemos o conjunto $\mathcal{V}(F)$ dos levantamentos verticais.

Notemos que $\mathcal{H}(B)$ e $\mathcal{V}(F)$ são subespaços de $\mathfrak{X}(B \times F)$.

Proposição 5. *Seja o produto torcido $\overline{M} = B \times_f F$. Se $X, Y \in \mathcal{H}(B)$ e $V, W \in \mathcal{V}(F)$, então*

(i) $\overline{\nabla}_X Y \in \mathcal{H}(B)$ é o levantamento de $\overline{\nabla}_X Y$ em B.

(ii) $\overline{\nabla}_X V = \overline{\nabla}_V X = \frac{X(f)}{f} V$.

Veja a prova em [3].

Proposição 6. *Seja $(\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$ um espaço-tempo GRW com base $(I, -dt^2)$, fibra Riemanniana (F^n, g) e função de torção f. Então, $\overline{M}$ é um espaço-tempo conformemente* *estacionário, sendo $K = f(\pi_I)\partial/\partial_t \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ um campo conforme de vetores de tipo-tempo globalmente definido em $\overline{M}$, onde $\pi_I : \overline{M} \longrightarrow I$ é a projeção sobre I.*

Demonstração. Denotando por $\partial_t = \partial/\partial_t$, $\langle , \rangle = \overline{g}$ e identificando $f = f(\pi_I)$ temos que $\langle K, K\rangle = -f^2 < 0$. Por outro lado, como $\langle \partial_t, \partial_t\rangle = -1$, temos que $0 = \partial_t \langle \partial_t, \partial_t\rangle = 2\left\langle \overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t, \partial_t\right\rangle$; assim, pela Proposição 5 (i), $\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t = 0$. Logo, para todo $V \in \mathfrak{X}(\overline{M})$ temos que $V = -v_0\partial_t + V_F$, onde $v_0 \in C^\infty(\overline{M})$ e $V_F \in \mathcal{V}(F)$, e, usando a Proposição 5 (ii),

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_V K &= \overline{\nabla}_{-v_0\partial_t + V_F} f\partial_t = -v_0\overline{\nabla}_{\partial_t} f\partial_t + \overline{\nabla}_{V_F} f\partial_t = -v_0 f\overline{\nabla}_{\partial_t}\partial_t - v_0\partial_t(f)\partial_t + \frac{f\partial_t(f)}{f}V_F = \\ &= f'(-v_0\partial_t + V_F) = f'V.\end{aligned}$$

Portanto, para quaisquer $V, W \in \mathfrak{X}(\overline{M})$,

$$\left\langle \overline{\nabla}_V K, W\right\rangle + \left\langle V, \overline{\nabla}_W K\right\rangle = \langle f'V, W\rangle + \langle V, f'W\rangle = 2f'\langle V, W\rangle$$

. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] A.L. Besse, *Einstein Manifolds*, Springer-Verlag, Berlin 1987.

[2] Beem, John K., Ehrlich, Paul E. and Easley, Kevin L., *Global lorentzian geometry,* 2nd. edition, Marcel Dekker, 1996.

[3] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press, New York, 1983.

[4] C.C. Hsiung, *Some integral formulas for closed hypersurfaces*, Math. Scand. 2 (1954), 286-294.

[5] do Carmo, M. *Geometria Riemanniana* Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

[6] Gilbarg, D. e Trudinger, N. S. *Elliptic Partial Differencial Equations of Second Order*, Springer-Verlag, New York, (1977).

[7] G. Hardy, J.E. Littlewood and G. Póyla, *Inequalities*, 2nd. edition, Cambridge Mathematical Library, Cambridge, 1989.

[8] J.A. Aledo, Alías and Romero, *Integral formulas for compact spacelike hypersurfaces in de Sitter space. Applications to the case of constant higher order meancurvature*, J. Geom. Phys. 31 (1999), 195-208.

[9] J.L. Barbosa and A.G. Colares, *Stability of hypersurfaces with constant r-mean curvature*, Ann. Global Anal. Geom. 15 (1997), 277-297.

[10] L. Garding, *An inequality for hyperbolic polynomials*, J. Math. Mech. 8 (1959), 957-965.

[11] L.J. Alías and A.G. Colares, *Uniqueness of spacelike hypersurfaces with constant higher order mean curvature in generalized Robertson-Walker spacetimes*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 2008.

[12] L.J. Alías, A. Romero and M. Sánchez, *Uniqueness of complete spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in Generalized Robertson-Walker spacetimes*, Gen. Relativity Gravitation 27 (1995), 71-84.

[13] L.J. Alías, A. Romero and M. Sánchez, *Spacelike hypersurfaces of constant mean curvature and Calabi-Bernstein type problems*, Tôhoku Math. J. 49 (1997), 337-345.

[14] L.J. Alías, A. Romero and M. Sánchez, *Spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in certain spacetimes*, Nonlinear Anal. 30 (1997), 655-661.

[15] L.J. Alías, A. Brasil Jr. and A.G. Colares, *Integral formulae for spacelike hypersurfaces in conformally stationary spacetimes and applications*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 46 (2003), 465-488.

[16] L.J. Alías and S.Montiel, *Uniqueness of spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in generalized Robertson-Walker spacetimes.* Differential geometry, Valencia, 2001, 59-69, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2002.

[17] R.C. Reilly, *Variational properties of functions of the mean curvature for hypersurfaces in space forms*, J. Differential Geom. 8 (1973), 465-477.

[18] S. Montiel , *An integral inequality for compact spacelike hypersurfaces in de Sitter space and applications to the case of constant mean curvature*, Indiana Univ. Math. J. 37 (1988), 909-917.

[19] S. Montiel, *Uniqueness of spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in foliated spacetimes*, Math. Ann. 314 (1999), 529-553.

[20] X. Cheng and H. Rosenberg, *Embedded positive constant r-mean curvature hypersurfaces in* $M^m \times R$, An. Acad. Brasil. Ciênc. 77 (2005), 183-199.