UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

Samuel Barbosa Feitosa

# Folheações

## por hipersuperfícies de curvatura média constante

Fortaleza
2009

**Samuel Barbosa Feitosa**

# Folheações

## por hipersuperfícies de curvatura média constante

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto.

Fortaleza

2009

F336f Feitosa, Samuel Barbosa.
Código Folheações por hipersuperfícies de curvatura média constante/ Samuel Barbosa Feitosa. Fortaleza, 2009.
40 folhas.
Orientador: Antonio Caminha Muniz Neto.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Departamento de Matemática, Fortaleza, 2009.
1 - Geometria riemaniana.
2 - Folheações(matemática).
Código 516.373

# Folha de Aprovação

*Dedido este trabalho aos meus pais, Bernadete e Eguiberto, ao meu irmão David e a minha namorada Débora.*

## Agradecimentos


Primeiramente, agradeço a Deus por tudo.

Agradeço ao departamento de matemática da UFC por tudo o que aprendi durante o tempo em que lá estive.

Agradeço à paciência do meu orientador por suportar os constantes atrasos no envio deste trabalho. Seus conselhos e sua amizade foram e são muito valorosos.

Agradeço ao CNPQ pelo apoio financeiro, desde os tempos de graduação até os dias de hoje.

Agradeço à OBM por todas as oportunidas educacionais durante minha formação.

Agradeço à Andreia Dantas por toda sua competência na secretaria da PGMAT.

Agradeço aos excelentes professores que tive durante minha formação, em especial a, Antonio Caminha, Levi Lima, Abdênago Barros, Robério Rogério, Fábio Montenegro, Pacceli Bessa, Luquésio Petrola, Alexandre Fernandes, Manoel de Azevedo e Afonso.

Agradeço a todos os meus amigos e colegas do Departamento de Matemática da UFC, em especial a, Bruno Holanda, Cícero Thiago, Carlos Augusto,Daniel Sobreira, Frederico Girão, Davi Máximo, Emanuel Carneiro, Marcelo Mendes, Rafel Montezuma, Onofre Campos, Yuri Lima.

Agradeço aos funcionários da Biblioteca, em especial ao Sr. Erivan e a Dona Fernanda(a Tia).

Agradeço à minha namorada pela compreensão nos momentos difíceis e à Sra Quélzia pelas palavras de incentivo.

"Se um dia nós se gostasse;
Se um dia nós se queresse;
Se nós dos se impariásse,
Se juntinho nós dois vivesse!
Se juntinho nós dois morasse
Se juntinho nós dois drumisse;
Se juntinho nós dois morresse!
Se pro céu nós assubisse?
Mas porém, se acontecesse
qui São Pêdo não abrisse
as portas do céu e fosse,
te dizê quarqué toulíce?
E se eu me arriminasse
e tu cum insistisse,
prá qui eu me arrezorvesse
e a minha faca puxasse,
e o buxo do céu furasse?...
Tarvez qui nós dois ficasse
tarvez qui nós dois caísse
e o céu furado arriasse
e as virge tôdas fugisse!!!"

*Ai! Se Sêsse!...*, Poeta Zé da Luz.

## Resumo

O presente trabalho apresenta resultados objetivando classificar folheações de codimensão 1 em variedades Riemannianas cujas folhas têm curvatura média constante. O principal resultado é o teorema de Barbosa-Kenmotsu-Oshikiri([3]),

**Teorema**: Seja $M$ uma variedade Riemanniana compacta com curvatura de Ricci não negativa e $\mathcal{F}$ um folheação de codimensão 1 e classe $C^3$ de $M$, transversalmente orientável, cujas folhas têm curvatura média constante. Então, qualquer folha de $\mathcal{F}$ é uma subvariedade totalmente geodésica de $M$. Além disso, $M$ é localmente um produto Riemanniano de uma folha de $\mathcal{F}$ e uma curva normal e a curvatura de Ricci na direção normal às folhas é zero.

O resultado anterior não pode ser estendido para o caso onde $M$ é não compacta. Uma folheação contra-exemplo pode ser contruída a partir de uma função $f$ que não satisfaz a conjectura de Bernstein. Quando a variedade é uma forma espacial de curvatura seccional não positiva, tem-se:

**Teorema**: Sejam $Q^n(a)$ uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional constante $a$ e $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão 1 e classe $C^3$ de $Q^{n+1}(a)$ tal que cada folha $L$ tem curvatura média constante $H_L$. Se $a \leq 0$ e $|H_L| \geq \sqrt{-a}$ então $\inf |H_L| = \sqrt{-a}$.

que generaliza um resultado de [2].

No final, são apresentados resultados recentes sobre os problemas abordados e uma prova da desigualdade de Heinz-Chern.

# Abstract


In this paper, we work showing results aiming classify foliations of codimension-one in Riemannian manifolds whose leaves have constant mean curvature. The main result is the theorem by Barbosa-Kenmotsu-Oshikiri([3]).

**Theorem**: Let $M$ be a compact Riemannian manifold with nonnegative Ricci curvature e $\mathcal{F}$, a codimension-one $C^3$-foliation of $M$ whose leaves have constant mean curvature. The any leaf of $\mathcal{F}$ is totally geodesic submanifold of $M$. Futhermore $M$ is locally a Riemannian product of a leaf of $\mathcal{F}$ and a normal curve, and the Ricci curvature in the direction normal to the leaves is zero.

The previous result can not be extended for the case where $M$ is not compact. A foliation counter-example can be built from a function $f$ that does not satisfy the Bernstein's conjecture. Where the manifold is a space form of sectional not positive curvature, has been:

**Theorem**: Let $\mathcal{F}$ be a codimension-one $C^3$- foliation of $Q^{n+1}(a)$ such that each leaf $L$ has constant mean curvature $H_L$. Assume $a \leq 0$ and $|H_l| \geq \sqrt{-a}$. Then $\inf |H_L| = \sqrt{-a}$.

that generalizes a result of [2].

At the end, they are present recent results about the boarded problems and a proof of the Heinz-Chern inequality.

# Sumário

# Capítulo 1

# Introdução

Neste primeiro capítulo, trataremos de modo informal sobre alguns problemas que motivam o estudo de aspectos geométricos de folheações. Uma folheação de uma variedade é uma partição em subvariedades conexas de mesma dimensão e que localmente se comportam como planos paralelos em um espaço euclideano. O nome provavelmente está ligado a idéia intuitiva que fazemos de folhas empilhadas. Uma das motivações para estudarmos tais partições vem das curvas integrais de uma equação diferencial ordinária.

Um dos marcos para a criação da teoria das folheações reside nos trabalhos de G. Reeb e C. Ehresmann durante a década de 40. Um dos problemas mais famosos, motivado por H. Hopf, é o:

**Problema 1.1.** *Existe na esfera $S^3$ uma folheação de dimensão 2?*

G. Reeb deu uma resposta afirmativa à pergunta anterior. O exemplo apresentado motivou outra pergunta:

**Problema 1.2.** *É verdade que toda folheação de dimensão dois de $S^3$ possui uma folha compacta?*

O estudo de folhas compactas produz muitos resultados interessantes, dentre os quais citamos:

**Teorema 1.3.** *(Teorema de Estabilidade de Reeb) Se a folha compacta $L$ da folheação $\mathcal{F}$ de $M$ tem holonomia trivial, então existe uma vizinhança de $L$ na variedade $M$ que é uma união de folhas que são homeomorfas a $L$.*

Outro fenômeno interessante é a transversalidade. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão $q$ em $M$. Uma subvariedade mergulhada $S \hookrightarrow M$ sem bordo, compacta, de dimensão q, conexa e transversal à $\mathcal{F}$ é chamada de fechado transversal.

No caso de codimensão 1, sempre existe uma folheação transversal à $\mathcal{F}$ de dimensão 1. Essa é uma das razões para o bom entendimento das folheações de codimensão 1. Ainda nessa situação, um fechado transversal é um círculo mergulhado em $S$ que não é tangente a folheação. Vale mencionar o seguinte resultado:

**Proposição 1.4.** *Se $\mathcal{F}$ é transversalmente orientável de codimensão 1 e $M$ é compacta, então toda folha $L$ de $\mathcal{F}$ que não intersecta um fechado transversal é compacta.*

Uma $p$-forma $\theta$ é transversal a $\mathcal{F}$ se $\theta_{|L}$ é não singular para cada folha $L$ de $\mathcal{F}$. Uma folheação $\mathcal{F}$ é topologicamente plana se toda folha intersecta um fechado transversal. Em codimensão 1, temos uma caracterização bastante curiosa de tais folheações:

**Proposição 1.5.** *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão* 1, *orientável, transversalmente orientável de uma variedade compacta e conexa $M$. Então são equivalentes*

*(i) $\mathcal{F}$ é topologicamente plana*

*(ii) Existe uma $(n-1)$-forma fechada transversal à $\mathcal{F}$.*

Uma folheação é geometricamente plana se existe uma métrica riemanniana $g$ sobre $M$ tal que todas as folhas são subvariedades mínimas. A proposição anterior, juntamente com o próximo resultado, mostram que em codimensão 1 ser plana topologicamente ou geometricamente são equivalentes.

**Teorema 1.6.** *(Rummler, 1979) Uma folheação de dimensão $p$ é geometricamente plana se, e somente se, existe uma $p$-forma fechada sobre $M$ transversal à $\mathcal{F}$.*

Uma condição mais forte do que ser mínima é ser totalmente geodésica. Dizemos que uma folheação $\mathcal{F}$ de $M$ é totalmente geodésica se toda folha é uma subvariedade totalmente geodésica. Duas perguntas naturais podem ser formuladas:

**Problema 1.7.** *Dada uma variedade Riemanniana $M$, ela admite uma folheação totalmente geodésica de uma dada codimensão?*

**Problema 1.8.** *Dada uma folheação $\mathcal{F}$ sobre uma variedade $M$, existe uma métrica Riemanniana sobre $M$ de modo que $\mathcal{F}$ é totalmente geodésica?*

Um resultado de H. Gluck ([14]) mostra que qualquer variedade fechada de dimensão 3 admite uma folheação totalmente geodésica de dimensão 1. Um resultado de ([18]) mostra que dada qualquer variedade compacta $M$ com $\chi(M) = 0$, existem folheações de codimensão 1 que não podem ser totalmente geodésicas. Estaremos interessados na direção da primeira das duas perguntas anteriores. Quais condições garatem que uma folheação de codimensão 1 seja totalmente geodésica?

Os dois capítulos iniciais apresentam resultados básicos de Geometria Riemanniana e Folheações. O terceiro capítulo apresenta uma demonstração do principal resultado deste trabalho, obtido por Barbosa-Kenmotsu-Oshikiri([3]),

**Teorema**: Seja $M$ uma variedade Riemanniana compacta com curvatura de Ricci não negatia e $\mathcal{F}$ um folheação de codimensão 1 e classe $C^3$ de $M$, transversalmente orientável, cujas folhas têm curvatura média constante. Então qualquer folha de $\mathcal{F}$ é uma subvariedade totalmente geodésica de $M$. Além disso, $M$ é localmente um produto Riemanniano de uma folha de $\mathcal{F}$ e uma curva normal e a curvatura de Ricci na direção normal às folhas é zero.

# Capítulo 2

# Preliminares em Variedades Riemannianas

Denotaremos por $\chi(M)$, $\mathcal{D}(M)$ e $(M, g)$, respectivamente, o conjunto dos campos vetoriais diferenciáveis em $M$, o anel das funções reais de classe $C^\infty$ em $M$ e uma variedade $M$ munida de uma métrica riemanniana $g$.

## 2.1 Imersões Isométricas

Dada uma imersão $f : M \to \overline{M}$, o *pullback* de uma métrica Riemanniana de $\overline{M}$ induz uma métrica Riemanniana em $M$ que torna a imersão isométrica. Como $f$ é localmente um mergulho, podemos estender campos de vetores locais em $M$ à campos de vetores locais em $\overline{M}$. Identificando $v \in T_P M$ com $df_p(v) \in T_{f(p)}\overline{M}$ e utilizando a métrica de $\overline{M}$, podemos escrever:

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp$$

Seja $\overline{\nabla}$ a conexão Riemanniana de $\overline{M}$. Immplicitamente também estamos indentificando uma vizinhança $U$ onde $f$ é um mergulho com $f(U)$. Se $X, Y$ são campos de vetores locais sobre $M$ e $\overline{X}, \overline{Y}$ são suas extensões locais em $\overline{M}$, podemos definir uma conexão Riemmaniana relativa à métrica induzida sobre $M$ por

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^T.$$

É fácil ver que $\nabla$ é realmente uma conexão compatível com a métrica induzida em $M$. Além disso, definamos

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

É fácil ver que $B(X, Y)$ não depende das extensões $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ e que é um campo em $\overline{M}$ normal à $M$.

Com a notação anterior, temos:

**Proposição 2.1.** *Se $X, Y$ pertencem a $\chi(U)$, a aplicação $B : \chi(U) \times \chi(U) \to \chi(U)^\perp$ dada por*

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

*e bilinear e simétrica.*

**Prova.** *Veja [8] página 127.*

Dado $p$ em $M$ e $\eta$ em $(T_pM)^{\perp}$. A aplicação $H_\eta : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta \rangle, \;\; x, y \in T_pM,$$

é, pela proposição anterior, bilinear e simétrica.

**Definição 2.2.** *A forma quadrática $\Pi_\eta$ definida em $T_pM$ por $\Pi_\eta(x) = H_\eta(x,x)$ é chamada a segunda forma fundamental de $f$ em $p$ segundo o vetor normal $\eta$.*

**Definição 2.3.** *Associada à aplicação bilinear $\Pi_\eta$ fica associada uma aplicação linear auto-adjunta $A_\eta : T_pM \to T_pM$ por*

$$\langle A_\eta(x), y \rangle = \Pi_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta \rangle.$$

**Proposição 2.4.** *Sejam $p \in M$, $x \in T_pM$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. Seja $N$ uma extensão local de $\eta$ normal a $M$. Então $A_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^T$*

**Prova.** *Veja [8] página 128.*

**Definição 2.5.** *Uma imersão $f : M \to \overline{M}$ é geodésica em $p \in M$ se para todo $\eta \in (T_pM)^{\perp}$ a segunda forma fundamental $\Pi_\eta$ é identicamente nula em $p$. A imersão $f$ é totalmente geodésica se ela é geodésica para todo $p$ em $M$.*

**Proposição 2.6.** *Uma imersão $f : M \to \overline{M}$ é geodésica em $p$ pertencente a $M$ se e só se toda geodésica $\gamma$ de $M$ partindo de $p$ é geodésica de $\overline{M}$ em $p$.*

**Prova.** *Veja [8] página 132.*

**Definição 2.7.** *Uma imersão $f : M \to \overline{M}$ é mínima se para todo $p$ em $M$ e todo $\eta$ em $(T_pM)^{\perp}$ tem-se que o traço de $S_\eta$ é nulo.*

Escolhendo um referencial ortonormal $E_1, E_2, \ldots, E_m$ de vetores em $(\chi(U))^{\perp}$, onde $U$ é uma vizinhança de $p$ em que $f$ é um mergulho, podemos escrever em $p$,

$$B(x,y) = \sum_i H_{E_i}(x,y) E_i \;\; x, y \in T_pM.$$

Denotemos por $\operatorname{tr} A$ o traço de um operador $A$. Definimos o vetor curvatura média $H$ de $f$ por

$$H = \frac{1}{n} \sum_i (\operatorname{tr} E_i) E_i = \frac{1}{n} \operatorname{tr} B$$

Como $\operatorname{tr}$ não depende do referencial escolhido, o mesmo se passa com o campo $H$. Claramente $f$ é mínima se, e somente se, $H(p) = 0$ para todo $p$ em $M$.

## 2.2 O Método do Referencial Móvel

Seja $M$ uma variedade Riemanniana e $U \subset M$ uma vizinhança de $p \in M$ onde seja possível definir um referencial ortonormal $\{e_i\}$. Associado a esse referencial, podemos definir um coreferencial de 1-formas diferenciáveis $\{w_i\}$, que satisfazem $w_i(e_k) = \delta_{ij}$.
Para o que segue, precisaremos da seguinte proposição:

**Proposição 2.8.** *(Diferencial exterior de uma* 1*-forma) Para qualquer* 1*-forma diferenciável $w$ e campos de vetores diferenciáveis $X$ e $Y$ temos*

$$dw(X,Y) = X(w(y)) - Y(w(X)) - w([X,Y]).$$

*Demonstração.* Como qualquer uma forma diferenciável pode ser expressa localmente como soma de termos da forma $udv$ onde $u, v$ são funções diferenciáveis é sufuciente considerar o caso em que $w = udv$. O lado esquerdo da expressão acima se torna:

$$\begin{aligned} d(udv)(X,Y) &= du \wedge dv(X,Y) \\ &= du(X)dv(Y) - dv(X)du(Y) \\ &= XuYv - XvYu. \end{aligned}$$

Enquanto que o lado direito se torna:

$$\begin{aligned} & X(udv(Y)) - Y(udv(X)) - udv([X,Y]) \\ &\qquad = X(uYv) - Y(uXv) - u[X,Y]v \\ &\qquad = (XuYv + uXYv) - (YuXv + uYXv) - u(XYv - YXv) \\ &\qquad = XuYv - XvYu. \end{aligned}$$

□

Por outro lado, se $\nabla$ é a conexão de Levi-Civitta de $M$ e, para $1 \leq i, j \leq N$ definimos

$$(w_{ij})_p(v) = \langle \nabla_v e_i, e_j \rangle$$

para todo $p \in M$ e $v \in T_pM$, então $w_{ij}$ é uma 1-forma em $M$, e a compatibilidade entre a conexão e a métrica de $M$ garantem imediatamente que

$$w_{ij} + w_{ji} = 0$$

Em particular, $w_{ii} = 0$ para todo $i$. Tais 1-formas $w_{ij}$ são denominadas as 1-formas da conexão de $M$, e temos o seguinte importante resultado.

**Proposição 2.9.** *(Levi-Civitta) Escolhido o referencial $\{e_i\}$ em um aberto $U \subset M$ de uma variedade Riemanniana $M$ temos*

$$dw_i = \sum_j w_j \wedge w_{ij}$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned}(dw_i)(X,Y) &= X(w_i(Y)) - Y(w_i(X)) - w_i([X,Y]) \\ &= X\langle Y, e_i\rangle - Y\langle X, e_i\rangle - \langle [X,Y], e_i\rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, e_i\rangle + \langle Y, \nabla_X e_i\rangle - \langle \nabla_Y X, e_i\rangle - \langle X, \nabla_Y e_i\rangle - \langle \nabla_X Y - \nabla_Y X, e_i\rangle \\ &= \sum_j \langle Y, e_j\rangle\langle e_j, \nabla_X e_i\rangle - \sum_j \langle X, e_j\rangle\langle \nabla_Y e_i, e_j\rangle \\ &= \sum_j \{w_{ij}(X)w_j(Y) - w_{ij}(Y)w_j(X)\} \\ &= \sum_j (w_{ij} \wedge w_j)(X,Y)\end{aligned}$$

□

## 2.3 Formas de Volume em Variedades Riemannianas

Dada uma variedade Riemanniana orientável $M$, podemos definir uma forma elemento de volume $\Omega$ em $M$ como mostra a próxima proposição:

**Proposição 2.10.** *Suponha $M$ é uma variedade Riemanniana orientável e de dimensão $n$. Existe uma única $n$-forma $\Omega$ tal que*

$$\Omega(E_1, E_2, \ldots, E_n) = 1$$

*para todo referencial ortonormal local $(E_1, E_2, \ldots, E_N)$ compatível com a orientação de $M$.*

*Demonstração.* Suponha que tal forma existe. Se $(E_1, E_2, \ldots, E_N)$ é um referencial ortonormal compatível com a orientação de $M$, seja $(w_1, w_2, \ldots, w_N)$ seu coreferencial dual. Então podemos escrever $\Omega = f w_1 \wedge w_2 \ldots w_N$. A condição do enunciado implica que

$$1 = \Omega(E_1, E_2, \ldots, E_N) = f w_1(E_1) \wedge w_2(E_2) \wedge \ldots w_N(E_N) = f$$

Logo $\Omega = w_1 \wedge w_2 \ldots w_N$ e obtemos sua unicidade. Para provarmos a existência, definamos $\Omega$ numa vizinhança de cada ponto de $M$ por $w_1 \wedge w_2 \ldots w_N$. Precisamos mostrar que esta definição independe do referencial local escolhido. Sejam $(F_1, F_2, \ldots, F_N)$ outro referencial ortonormal compatível com a orientação de $M$ e $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ seu coreferencial associado. Seja $\overline{\Omega} = x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_N$. Escrevendo cada campo $F_i$ no referencial $(E_i)$, obtemos uma matriz $(A_{ij})$ definida por

$$F_i = \sum_j A_{ij} E_j.$$

Como os referenciais locais $(F_i)$ e $(E_i)$ são ortonormais e compatíveis com a orientação de $M$, temos $det(A_{ij}) = 1$. Então

$$\begin{aligned}\Omega(F_1, F_2, \ldots, F_N) &= \det(w_j(F_i)) \\ &= \det(A_{ij}) \det(w_j(E_j)) \\ &= 1 \\ &= \overline{\Omega}(F_1, F_2, \ldots, F_N)\end{aligned}$$

Logo $\Omega = \overline{\Omega}$. $\square$

Denotaremos a forma de volume $\Omega$ de uma variedade Riemanniana orientável $M$ com métrica $g$, mencionada na proposição anterior, por $dV_g$. O próximo lema fornece uma expressão em coordenadas locais para tal forma de volume.

**Lema 2.11.** *Seja $M$ uma variedade Riemanniana orientada com métrica $g$. Se $(x_i)$ é um sistema de coordenadas locais compatível com a orientação de $M$ então $dV_g$, em coordenadas locais, tem a forma*

$$dV_g = \sqrt{(\det g_{ij})}dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

*onde $g_{ij}$ são as componentes de $g$ nessas coordenadas*

*Demonstração.* Seja $(U,(x_i))$ uma carta compatível com a orientação de $M$ numa vizinhança de $p \in M$. Nessas coordenadas, $dV_g = f dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n$ para alguma função positiva $f$. Seja $(E_i)$ um referencial local ortonormal definido numa vizinhaça de $p$ e seja $w_i$ seu coreferencial dual associado. Podemos escrever o referencial coordenado em termos do referencial ortonormal como

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_j A_{ij} E_j.$$

Então

$$\begin{aligned} f &= dV_g\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \\ &= w_1 \wedge \ldots \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \\ &= \det\left(w_j\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right) \\ &= \det(A_{ij}) \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle_q \\ &= \langle A_{ik}E_k, A_{jl}E_l \rangle_g \\ &= A_{ik}A_{jl}\langle E_k, E_l \rangle_g \\ &= \sum_k A_{ik}A_{jk} \end{aligned}$$

Como $\sum_k A_{ik}A_{jk}$ é a entrada $(i,j)$ da matriz $A^TA$, onde $A = (A_{ij})$, temos

$$\det(g_{ij}) = \det(A^TA) = \det A^T \det A = (\det A)^2.$$

Daí segue que $f = \det A = \sqrt{\det(g_{ij})}$. $\square$

**Definição 2.12.** *O volume de uma variedade Riemanniana orientável $M$ é a integral $\int_M dV_g$.*

O lema anterior no induz a procurar um sistema de coordenadas locais coveniente para facilitarmos o cálculo do volume. Antes de procedermos nessa direção, precisaremos de alguns resultados:

**Teorema 2.13.** *(Hadamard) Seja $M$ uma variedade Riemanniana, simplesmente conexa, com curvatura seccional não positiva. Então $M$ é difeomorfa a $\mathbb{R}^n$ onde $n = \dim M$. Além disso, a aplicação exponencial* $\exp : T_pM \to M$ *é um difeomorfismo.*

*Demonstração.* Veja [8] página 149.

Seja $p$ um ponto de uma variedade Riemanniana completa $M$. Sabemos que para $v \in T_pM$ de norma suficientemente pequena, a curva definida por $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ para $t \in [0, 1]$ é uma geodésica minimizante.

**Definição 2.14.** *O cut locus de $p$ no espaço tangente $T_pM$, $Cut(p)$, é definido como o conjunto de todos os vetores $v \in T_pM$ tais que $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ é uma geodésica minimizante para $t \in [0, 1]$ mas não é minimizante para $t \in [0, 1+\epsilon]$, para qualquer $\epsilon > 0$. O cut locus de $p$ em $M$ é definido como a imagem do cut locus de $p$ no espaço tangente sobre a aplicação exponencial $\exp_p$. Denotaremos por $U_p$ o conjunto dos vetores $v \in T_pM$ tais que $\gamma$ é minimizante para $t \in [0, 1+\epsilon]$ para algum $\epsilon > 0$.*

**Proposição 2.15.** *Se $M$ é completa, para qualquer $p \in M$, temos*

$$M = exp_p(U_p) \cup Cut(p)$$

*Demonstração.* Como $M$ é completa, segue do Teorema de Hopf-Rinow que, dado qualquer $x \in M$, existe uma geodésica minimizante de $p$ até $x$. ☐

**Lema 2.16.** *Para qualquer $p \in M$, o cut locus $Cut(p)$ tem volume zero.*

*Demonstração.* De fato, cada raio através de origem de $T_pM$ encontra $Cut(p)$ em no máximo um ponto. ☐

**Proposição 2.17.** *Sejam $M$ uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante $K$, $\gamma : [0, l] \to M$ uma geodésica normalizada sobre $M$ e $w(t)$ um campo paralelo ao longo de $\gamma$ com $\langle \gamma'(t), w(t)\rangle = 0$ e $|w(t)| = 1$. Então*

$$J(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}} w(t), & \text{se} \quad K > 0, \\ t w(t), & \text{se} \quad K = 0, \\ \dfrac{\operatorname{senh}(t\sqrt{-K})}{\sqrt{-K}} w(t), & \text{se} \quad K < 0, \end{cases}$$

*são campos de Jacobi com condições iniciais $J(0) = 0$ e $J'(0) = w(0)$.*

**Proposição 2.18.** *Seja $\gamma : [0, a] \to M$ uma geodésica. Então um campo de Jacobi $J$ ao longo de $\gamma$ com $J(0) = 0$ é dado por*

$$J(t) = (d\exp_p)_{t\gamma'(0)}(tJ'(0)), \quad t \in [0, a].$$

*Demonstração.* Veja em [8] página 114

Em virtude do lema anterior, expressando $dV_g$ em uma carta exponencial, o volume de $M$ pode ser calculado por $\int_{U_M} \exp_p^* dV_g$. Utilizaremos campos de Jacobi para calcular $\exp_p^* dV_g$.

Seja $c(t) = \exp_p tu$ uma geodésica através de $p$. Sejam $\{u = e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal de $T_pM$, $E_i(t)$ os transportes paralelos de $e_i$ ao longo de $c$ e $Y_i$ campos de Jacobi ao longo de $c$ satisfazendo $Y_i(0) = 0$ e $Y_i'(0) = e_i$.

Pela proposição 2.18, $d(\exp_p)_{tu}(u) = c'(t)$ e $d(\exp_p)_{tu}(e_i) = \dfrac{1}{t} Y_i(t)$. Obtemos, pelo lema (2.11), que

$$\begin{aligned}
\exp_p^* dV_g &= \sqrt{(\det g_{ij})} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n \\
&= t^{-(n-1)/2} \sqrt{\det(\langle Y_i(t), Y_j(t) \rangle)} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n \\
&= J(u,t) t^{n-1} dt du
\end{aligned}$$

onde $du$ denota a forma de volume canônica sobre a esfera unitária de $T_pM$ e

$$J(u,t) = t^{-\frac{(n-1)}{2}} \sqrt{\det(\langle Y_i(t), Y_j(t) \rangle)}.$$

Segue-se que $J(u,t)$ não depende de $\{e_2, \ldots, e_n\}$. Seja $\rho(u)$ a distância da origem até o cut locus na direção de $u$, pelo teorema de Fubini temos:

$$vol(M,g) = \int_{S^{n-1}} \int_0^{\rho(u)} J(u,t) t^{n-1} dt du$$

**Exemplo 2.19.** *(Volume da esfera $S^n$ com a métrica canônica) Como $Y_i(t) = \operatorname{sen} t E_i(t)$, temos*

$$\begin{aligned}
vol(S^n, can) &= \int_{s^{n-1}} \int_0^{\pi} \left( \frac{\operatorname{sen} t}{t} \right)^{n-1} t^{n-1} du dt \\
&= vol(S^{n-1}, can) \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^{n-1} t dt.
\end{aligned}$$

*Então obtemos*
$vol(S^{2n}, can) = \dfrac{(4\pi)^n (n-1)!}{(2n-1)!}$ *e* $vol(S^{2n+1}, can) = 2\dfrac{\pi^{n+1}}{n!}$.

**Exemplo 2.20.** *(Volume da bola no espaço Hiperbólico de curvatura seccional $K < 0$) Como $Y_i(t) = \dfrac{\operatorname{senh}(t\sqrt{-K})}{\sqrt{-K}} E_i(t)$, temos*

$$vol(B_p(R)) = vol(S^{n-1}, can) \int_0^R \left( \frac{\operatorname{senh}(r\sqrt{-K})}{\sqrt{-K}} \right)^{n-1} dr.$$

## 2.4 Alguns resultados sobre hipersuperfícies mínimas

Uma subvariedade $N \subset (M,g)$ é totalmente geodésica se para cada $p \in N$, uma vizinhança de $0 \in T_pN$ é mapeada em $N$ pela aplicação exponencial $\exp_p$ de $M$. No último capítulo, estaremos interessados em partições de uma variedade em que cada elemento da partição seja uma subvariedade totalmente geodésica. Em certas circunstâncias, tal condição limita substancialmente o "tamanho"(dimensão) de cada pedaço como mostra o:

**Teorema 2.21.** *(Frankel) Seja $M$ um variedade Riemanniana de dimensão $n$, completa e de curvatura seccional positiva. Se $A$ e $B$ são duas subvariedades fechadas*[1] *totalmente geodésicas de $M$, que satisfazendo a condição*

$$\dim A + \dim B \geq n,$$

*então $A \cap B$ é não vazio.*

*Demonstração.* Veja [11].

Nas hipóteses do teorema anterior, para $n \geq 2$, quaisquer duas hipersuperfícies totalmente geodésicas se intersectam. Isso ainda acontece se as hipersuperfícies forem apenas mínimas como mostra o:

**Teorema 2.22.** *Se $M$ é uma variedade Riemanniana completa, conexa e de curvatura de Ricci positiva, quaisquer duas hipersuperfícies mínimas fechadas têm interseção não vazia.*

Antes da demonstração, precisaremos de ferramentas auxiliares:

**Teorema 2.23.** *(Synge - Segunda variação do Comprimento de arco) Seja $c : [0,l] \to M$ uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco e $V(s,t)$ uma variação de $c$ com as propriedades que $V(0,t) = c(t)$ e o campo $\frac{\partial V}{\partial s}(0,t) = E(t)$ é unitário, normal e paralelo ao longo de $c$. Então para o funcional do comprimento de arco,*

$$L(s) = \int_0^1 \left|\frac{\partial V}{\partial t}\right| dt,$$

*temos*

$$\frac{dL}{ds}(0) = 0$$

*e*

$$\frac{d^2L}{ds^2}(0) = -\int_0^1 K(E,c')dt + \left\langle c', (\nabla_{\frac{\partial V}{\partial s}} \frac{\partial V}{\partial s})(0,t) \right\rangle \Big|_0^t,$$

*onde $K$ denota a curvatura seccional.*

Veja em [22] página 158.

**Lema 2.24.** *Sejam $N_1$ e $N_2$ duas subvariedades fechadas disjuntas de uma variedade Riemanniana completa. Então a distância entre $N_1$ e $N_2$ é assumida por uma geodésica $\gamma$ perpendicular a ambas.*

[1] Ao longo desta seção, o adjetivo fechado denotará uma variedade compacta e sem bordo

*Demonstração.* Como $M$ é completa e as subvariedades $N_1, N_2$ são compactas, existem $p_1 \in N_1, p_2 \in N_2$ e uma geodésica $c : [0,l] \to M$, parametrizada pelo comprimento de arco, satisfazendo $c(0) = p_1$ e $c(l) = p_2$ e que realiza a distância entre $N_1$ e $N_2$. Dado $v \in T_{c(0)}N_1$, considere uma variação $V$ ao longo de $c$ com $V(0) = v$ e $V(l) = 0$. Pela fórmula da primeira variação de energia, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}E'(0) \\ &= -\int_0^a \langle V(t), \frac{D}{dt}\frac{dc}{dt}\rangle dt - \langle V(0), \frac{dc}{dt}(0)\rangle + \langle V(a), \frac{dc}{dt}\rangle \\ &= -\langle V(0), \frac{dc}{dt}(0)\rangle. \end{aligned}$$

Logo $v$ é ortogonal a $c'(0)$. Analogamente $c'(l)$ é ortogonal à $T_{c(l)}N_2$.

□

Podemos agora provar o teorema (2.2),

*Demonstração.* Sejam $N_1, N_2 \subset M$ hipersuperfícies mínimas fechadas e consideremos a notação do lema anterior juntamente com seu resultado. Seja $\{E_1, \ldots, E_n\}$ um referêncial ortonormal de campos paralelos ao longo de $c$ com $E_n = c'$. Então, em $p_1$ e $p_2$, $E_1, \ldots, E_{n-1}$ são tangentes às hipersuperfícies. Tomemos variações $V_1, \ldots, V_{n-1}$ com a propriedade que $V_j(s,0) \in N_1$, $V_j(s,l) \in N_2$ para $s$ pequeno e $\frac{\partial V_i}{\partial s}(0,t) = E_j$. Pela fórmula da segunda variação de energia, temos:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{d^2 L_j(0)}{ds^2} = -\sum_{j=1}^{n-1} \int_0^l sec(E_j, c')dt + \sum_{j=1}^{n-1} \langle c', \nabla_{\frac{\partial V_j}{\partial s}} \frac{\partial V_j}{\partial s}(0,t)\rangle\Big|_0^l$$

Agora, observe que,

$$\sum_{j=1}^{n-1} \langle c', \nabla_{\frac{\partial V_j}{\partial s}} \frac{\partial V_j}{\partial s}(0,0)\rangle$$

e

$$\sum_{j=1}^{n-1} \langle c', \nabla_{\frac{\partial V_j}{\partial s}} \frac{\partial V_j}{\partial s}(0,l)\rangle$$

são, a menos de uma constante, as curvaturas médias de $N_1$ em $p_1$ e $N_2$ em $p_2$, respectivamente. Então essas contribuições são zero e obtemos uma contradição como segue:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{d^2 L_j(0)}{ds^2} &= -\sum_{j=1}^{n-1} \int_0^l K(E_j, c')dt \\ &= -(n-1)\int_0^l Ric(c'(t))dt \\ &< 0. \end{aligned}$$

□

# Capítulo 3

# Folheações

Curvas integrais de um campo de vetores diferenciável determinam uma decomposição da variedade em curvas de dimensão 1 ou zero(no caso de singularidades). O que aconteceria se algum objeto tivesse variação diferenciável ao longo dos espaços tangentes dos pontos da variedade assim como um campo? Trataremos de estudar essas ditribuições e suas conexões com folheações. Todos os resultados mencionados podem ser encontrados nas referências [17], [15] e no clássico [6].

## 3.1 Distribuições Tangentes

**Definição 3.1.** *Uma distribuição $D$ de dimensão $k$ em uma variedade diferenciável $M$(ou se preferir, um campo de $k$-planos) é uma associação entre cada ponto $p$ de $M$ a um subespaço $D_p$ de $T_pM$. A distribuição é diferenciável se todo ponto $p \in M$ admite uma vizinhança $U$ e $k$ campos diferenciáveis $X_1, X_2, \ldots, X_k$ que formem uma base de $D_q$ para todo $q$ em $U$.*

Uma pergunta natural é saber quando uma distribuição pode ser obtida como fibrado tangente de alguma subvariedade de $M$.

**Definição 3.2.** *Seja $D$ uma distribuição suave sobre $M$. Uma subvariedade imersa $N \subset M$ é uma variedade integral de $D$ se $T_pN = D_p$ para cada ponto $p$ de $N$. Neste caso $D$ é chamada de distribuição integrável.*

**Definição 3.3.** *A distribuição $D$ é involutiva se $[X, Y]$ é um campo de vetores em $D$ para quaisquer dois campos de vetores $X$ e $Y$ em $D$.*

**Exemplo 3.4.** *Em $\mathbb{R}^n$, os campos de vetores $\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \dfrac{\partial}{\partial x^2}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x^k}$ geram uma distribuição diferenciável de dimensão $k$. Os subespaços paralelos a $\mathbb{R}^k = \{x \in \mathbb{R}^n | x_{k+1} = x_{k+2} = \ldots = x_n\}$ são as variedades integrais de tal distribuição.*

**Proposição 3.5.** *Toda distribuição integrável é involutiva.*

*Demonstração.* Seja $D \subset TM$ uma distribuição integrável. Suponha que $X$ e $Y$ são seções locais suaves de $D$ definidas em alguma aberto $U$ de $M$. Seja $p$ um ponto qualquer de $U$ e seja $N$ a variedade integral de $D$ contendo $p$. Como $X$ e $Y$ são seções de $D$, $X$ e $Y$ são tangentes a $N$ e consequentemente $[X,Y]_p \in D_p$. □

**Exemplo 3.6.** *Os campos de vetores* $X = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}, Y = \frac{\partial}{\partial y}$ *geram uma distribuição diferenciável de* $\mathbb{R}^3$ *e dimensão* 2. *Como* $[X,Y] = -\frac{\partial}{\partial z}$ *não é um campo em* $Z$, *tal distribuição não é involutiva e, pela proposição anterior, também não é integrável.*

**Exemplo 3.7.** *No exemplo* 3.4, *como* $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$, *a distribuição apresentada é involutiva*

**Lema 3.8.** *Seja* $D \subset TM$ *uma distribuição. Se em uma vizinhança de todo ponto* $p \in M$ *existe um referencial local* $(V_1, V_2, \ldots, V_k)$ *para* $D$ *tal que* $[V_i, V_j]$ *é um campo vetorial em* $D$, *para cada* $i, j = 1, \ldots, k$, *então* $D$ *é involutivo.*

*Demonstração.* Veja em [17] na página 496.

## 3.2 Formas diferenciais e involutibilidade

Dada uma uma forma diferenciável $w$ não singular sobre $M$ o núcleo de $w$ fornece uma distribuição diferenciável sobre $M$. Suponha que $w$ é exata, i.e., $w = df$ para alguma $f : M \to \mathbb{R}$. Como $w$ é não singular, $f$ não tem pontos críticos e consequentemente os conjuntos de nível de $f$ fornecem uma decomposição de $M$ em subvariedades imersas de codimenão 1. O espaço tangente em cada ponto dessas subvariedades é o núcleo de $w$ avaliado naquele ponto. Sabemos que nem toda 1-forma fechada é exata, logo, nem sempre conseguiremos obter uma $f$. Por outro lado, a multiplicação de $w$ por uma função não nula $h$ não modifica seu núcleo. Podemos nos questionar se existem $f, g : U \to \mathbb{R}$, $g$ não nula no aberto $U$ de $M$, tais que $w = gdf$ (aqui $g$ faz o papel de $\frac{1}{h}$). Graças ao teorema de Frobenius, veremos que a condição que devemos impor para que $w$ seja "integrável" nesse sentido é a mesma para que sua distribuição seja integrável.

**Lema 3.9.** *(Critério de 1-formas) Seja* $M$ *uma variedade diferenciável de dimensão* $n$ *e seja* $D \subset TM$ *uma distribuição de dimensão* $k$. *Então* $D$ *é diferenciável se, e somente se, cada ponto* $p \in M$ *admite uma vizinhança* $U$ *sobre a qual existem* 1*-formas diferenciais* $w_1, w_2, \ldots, w_{n-k}$ *tais que para cada* $q \in U$,

$$D_q = \operatorname{Ker} w_1|_q \cap \operatorname{Ker} w_2|_q \cap \ldots \cap \operatorname{Ker} w_{n-k}|_q$$

*Demonstração.* Veja em [17] na página 496.

Qualquer conjunto de $n-k$ 1-formas independentes $w_1, w_2, \ldots, w_{n-k}$ definidas sobre um conjunto aberto $U \subset M$ e satisfazendo a condição do lema anterior para cada $q$ em $U$ são chamada de formas locais definidoras para $D$. Uma $p$-forma $w$ anula $D$ se $w(X_1, X_2, \ldots, X_p) = 0$ para quaisquer campos de vetores locais $X_1, X_2, \ldots, X_p$ em $D$.

**Lema 3.10.** *Suponha que* $M$ *é uma variedade diferençiável e* $D$ *é uma distribuição diferenciável de dimensão* $k$ *sobre* $M$. *Então uma* $p$*-forma* $\eta$ *anula* $D$ *se, e somente se, dadas* $n-k$ 1*-formas* $w_1, \ldots, w_{n-k}$

*locais definidoras para $D$ sobre um subconjunto aberto $U \subset M$, tem-se $\eta|U$ é da forma*

$$\eta|_U = \sum_{i=1}^{n-k} w_i \wedge \beta_i$$

*para algum conjunto $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-k}\}$ de p-formas sobre $U$.*

*Demonstração.* Veja [17] página 496.

**Proposição 3.11.** *(Critério de 1-formas para involutibilidade) Suponha que $D \subset TM$ é uma distribuição diferenciável. Então $D$ é involutiva se, e somente se, a seguinte condição é satisfeita: para toda 1-forma $\eta$ que anula $D$ em um aberto $U \subset m$, tem-se $d\eta$ também anula $D$ sobre $U$.*

*Demonstração.* Veja [17] página 496.

**Lema 3.12.** *Sejam $D$ uma distribuição diferenciável de dimensão $k$ sobre uma variedade $M$ de dimensão $n$ e $w_1, w_2, \ldots, w_{n-k}$ 1-forma definidoras de $D$ sobre um aberto $U \subset M$. Então $D$ é involutiva sobre $U$ se e somente se existem 1-formas $\alpha_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n-k$, tais que*

$$dw_i = \sum_{j=1}^{n-k} w_j \wedge \alpha_{ij}.$$

*Demonstração.* Veja [17] página 497.

**Definição 3.13.** *Dada uma distribuição $D \subset TM$ de dimenssão $k$, dizemos que uma carta coordenada $(U, \phi)$ sobre $M$ é plana se $\phi(U)$ é o produto de abertos conexos $U' \times U'' \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ e, em pontos de $U$, $D$ é gerado pelos primeiros $k$ campos vetoriais coordenados $\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_k$.*

Nessa situação, cada fatia da forma $x_{k+1} = c_{k+1}, \ldots, x_n = c_n$ para constantes $c_{k+1}, \ldots, c_n$ é uma variedade integral para $D$. Uma distribuição $D \subset TM$ é *completamente integrável* se existe uma carta plana para $D$ em uma vizinhança de todo ponto de $M$. Segue facilmente que toda distribuição completamente integrável é involutiva. O próximo teorema afirma o recíproco:

**Teorema 3.14.** *(Frobenius) Toda distribuição involutiva é completamente integrável.*

*Demonstração.* Veja [17] página 500.

**Exemplo 3.15.** *Seja $D \subset T\mathbb{R}^3$ a distribuição gerada pelos campos de vetores*

$$\begin{aligned} V &= x\frac{\partial}{\partial x} + x(y+1)\frac{\partial}{\partial z} \\ W &= \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

*Como $[V, W] = -\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial z} = -W \in D$, pelo teorema de Frobenius, $D$ é involutiva.*

**Proposição 3.16.** *(Estrutura local de variedades integráveis.) Sejam $D$ uma distribuição involutiva de dimensão $k$ sobre uma variedade $M$ e $(U, \phi)$ uma carta plana para $D$. Se $N$ é qualquer variedade integrável para $D$, então $N \cap U$ é uma união enumerável de subconjuntos abertos disjuntos de fatias paralelas de $U$ de dimensão $k$, cada uma aberta em $N$ e mergulhada em $M$.*

*Demonstração.* Veja [17] página 503.

## 3.3 Folheações

Uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão $k$ sobre uma variedade $M^n$ é uma coleção de subvariedades de dimensão $k$, *disjuntas, conexas* e *imersas* de $M$(chamadas de folhas da folheação) cuja união é $M$ e tal que em uma vizinhança de cada ponto $p$ de $M$ existe uma carta $(U, \phi)$ com a propriedade que $\phi(U)$ é o produto de dois abertos conexos $U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, e cada folha da folheação intersecta $U$ ou em um conjunto vazio ou em uma coleção enumerável de fatias de dimensão $k$ da forma $x_{k+1} = c_{k+1}, \ldots, x_n = c_n$ (tal carta, é chamada de carta plana da folheação). Os conjuntos da forma $\phi^{-1}(U_1 \times \{c\})$ são chamados de placas de $U$, ou ainda, placas de $\mathcal{F}$. As placas são subvariedades conexas de dimensão $k$ e de classe $C^r$ em $M$. Um caminho de placas de $\mathcal{F}$ é uma sequência $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ de placas, tal que $\alpha_i \cap \alpha_{i+1} \neq \emptyset$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$. Dizemos que $p$ e $q$ em $M$ estão relacionados se existe um caminho de placas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ tal que $p \in \alpha_1$ e $q \in \alpha_l$. É evidente que essa relação é uma relação de equivalência. Suas classes de equivalência são as folhas de $\mathcal{F}$.

A situação mais natural para encontrarmos uma folheação é quando tempos uma submersão $f : M^n \to N^n$ de classe $C^r$. Pela forma local da submersões, dado $p \in M$ com $f(p) = q$, existem cartas locais $(U, \phi)$ em $M$ e $(V, \psi)$ em $N$ tais que $p \in U, q \in V, \phi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n$ e $\psi(V) = V_2 \supset U_2$ e tal que $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : U_1 \times U_2 \to U_2$ coincide com a projeção na segunda coordenada $(x, y) \mapsto y$. Claramente as cartas $(U, \phi)$ definem um atlas que satisfaz a definição de folheação e as componentes conexas das superfícies de nível $f^{-1}(c)$ são as folhas.

**Exemplo 3.17.** *Se $X \in \chi(M)$ é não singular, então fluxo local definido por $X$ define uma folheação de dimensão 1. De fato, como $X$ é não singular, existe uma vizinhança coordenada $(U, x)$ sobre $x$ tal que*

$$-\epsilon < x_i < \epsilon, \;\; 1 \leq i \leq n$$

*e*

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = X_{|U}.$$

*As linhas do fluxo $X_{|U}$ são as curvas de nível*

$$x_i = c_i, \;\; 2 \leq i \leq n.$$

*Quando $M$ é o toro $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ e $X$ é o campo constante $X = (a, b)$ com $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$, obtemos uma folheação em que toda folha é densa na variedade. Para ver isto, basta usar o fato que todo subgrupo aditivo da reta que não é discreto é denso.*

**Exemplo 3.18.** *Seja $f : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ suave e, para cada $c \in \mathbb{R}$, seja $f_c = f + c$. Seja*

$$L_c = \{(x, f_c(x))\}_{x \in \mathbb{R}^{n-1}}.$$

*O gráfico de $f_c$ é $\mathbb{R}^n$. Denotemos $x = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ e $y = x_n$. Então*

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ (x, y) & \mapsto & (x, y - f(x)) \end{array}$$

*é um difeomorfismo com inversa*

$$\phi^{-1}(x, y) = (x, y + f(x)).$$

*Como*

$$\phi(L_c) = \{(x,c)\}_{x\in\mathbb{R}^{n-1}}, c \in \mathbb{R},$$

*temos que a única carta coordenada* $(\mathbb{R}^n, \phi)$ *é uma carta plana tendo como placas os gráficos* $L_c$*.*

**Exemplo 3.19.** *Um em fibrado* $(M, B, \pi, F)$*, temos uma folheação natural de* $M$ *dada pelas fibras* $\pi^{-1}(x)$*.*

**Lema 3.20.** *Seja* $\mathcal{F}$ *uma folheação sobre uma variedade diferenciável* $M$*. A coleção de todos os espaços tangentes as folhas de* $\mathcal{F}$ *forma uma distribuição involutiva sobre* $M$*.*

O lema anterior e a próxima proposição fornecem uma conexão, já esperada, entre distribuições involutivas e folheações.

**Proposição 3.21.** *(Teorema de Frobenius Global) Seja* $D$ *uma distribuição involutiva sobre uma variedade diferenciável* $M$*. A coleção de todas as variedades integrais, conexas e maximais(com respeito à inclusão) de* $D$ *forma uma folheação de* $M$*.*

*Demonstração.* Veja [17] página 511

## 3.4 Topologia das Folhas

Dada uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão $n$ de uma variedade $M^m$ (com $n < m$) diremos que $x$ é equivalente a $y$ se pertencem a uma mesma folha de $\mathcal{F}$. É claro que esta relação é de equivalência. Denotemos por $M/\mathcal{F}$ o espaço quociente de $M$ por esta relação e por $\pi : M \to M/\mathcal{F}$ a projeção que associa a cada elemento a sua classe de equivalência.

**Definição 3.22.** *O Saturado de um conjunto* $A$ *é definido por* $\pi^{-1}(\pi(A))$*. Dizemos que um conjunto* $A \subset M$ *é invariante ou saturado por* $\mathcal{F}$ *quando* $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$*.*

**Exemplo 3.23.** *Trivialmente* $M$ *e o conjunto vazio são exemplos de conjuntos invariantes. Qualquer coleção de folhas é invariante.*

**Teorema 3.24.** *A projeção* $\pi$ *é uma aplicação aberta, ou seja, o saturado* $\mathcal{F}(A)$ *de um subconjunto aberto* $A$ *de* $M$ *é aberto.*

*Demonstração.* Dado $p \in \mathcal{F}(A)$, queremos mostrar que $p \in \operatorname{int}\mathcal{F}(A)$. Seja $F$ a folha de $\mathcal{F}$ que passa por $p$. Seja $q \in F \cap A$ e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ uma caminho de placas entre $p$ e $q$(com $p \in \alpha_1$ e $q \in \alpha_k$). Suponhamos que cada $\alpha_j$ é placa de $U_j$ com $(U_j, \phi_j) \in \mathcal{F}$ e escrevamos $\phi(U_j) = U_j' \times U_j''$ onde $U_j'$ e $U_j''$ são discos abertos de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^{n-m}$, respectivamente. Suponha que existe $x \in \operatorname{int}\mathcal{F}(A) \cap U_j = V$. Como $\phi_j : U_j' \times U_j''$ é homeomorfimsmo, $\phi_j(V)$ é aberto de $U_j' \times U_j''$. Seja $\pi_2 : U_j' \times U_j'' \to U_j''$ a projeção na segunda coordenada. Como $\pi_2$ é uma aplicação aberta e $\phi_j$ é contínua, segue que $W = \phi_j^{-1}(\pi_2^{-1}(\pi_2(\phi_j(V))))$ é aberto. Além disso, $\alpha_j \subset W \subset \mathcal{F}(A)$ mostrando que $\alpha_j$ está no interior de $\mathcal{F}(A)$. Como $A$ é aberto e $q \in A \cup U_1$, segue que $\alpha_1 \in \operatorname{int}\mathcal{F}(A)$. Como $\alpha_1 \cap \alpha_2 \subset \operatorname{int}\mathcal{F}(A) \cup U_2$, segue que $\alpha_2 \in \operatorname{int}\mathcal{F}(A)$. O mesmo argumento mostra que $\alpha_i \in \operatorname{int}\mathcal{F}(A)$ se $\alpha_{i-1} \in \operatorname{int}\mathcal{F}(A)$. Daí, $\alpha_k \in \operatorname{int}\mathcal{F}(A)$ e consequentemente $p \in \operatorname{int}\mathcal{F}(A)$. $\square$

Seja $M$ uma variedade onde está definida uma folheação $\mathcal{F}$. Um subconjunto $\mu \subset M$ é minimal se satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\mu$ é fechado, não vazio e invariante por $\mathcal{F}$.

(ii) Se $\mu' \subset \mu$ é um conjunto fechado e invariante por $\mathcal{F}$, então $\mu' = \emptyset$ ou $\mu' = \mu$.

**Exemplo 3.25.** *Em um fibrado $(M, B, \pi, F)$, cada folha de $\pi : M \to B$ é um conjunto minimal.*

**Exemplo 3.26.** *Toda folha fechada de $\mathcal{F}$ é um subconjunto minimal.*

**Lema 3.27.** *Seja $A \subset M$ um subconjunto invariante por $\mathcal{F}$. Então $\operatorname{int}(A), \overline{A}$ e $\partial A$ são invariantes. A interseção qualquer de invariantes é invariante.*

*Demonstração.* Seja $B = \operatorname{int} A$, como $\pi$ é aberta, $\pi^{-1}(\pi(B))$ é aberto e satisfaz $\operatorname{int} A \subset \pi^{-1}(\pi(B)) \subset A$. Logo $\pi^{-1}(\pi(B)) = \operatorname{int} A = B$. Se $A$ é invariante, $M - A$ também é. Consequentemente, $\operatorname{int}(M - A) = M - \overline{A}$ ém invariante, ou seja, $\overline{A}$ é invariante. A diferença entre conjuntos invariantes também é invariante, logo $\partial A = \overline{A} - \operatorname{int} A$ é invariante. □

**Teorema 3.28.** *Toda folha de uma variedade compacta possui um conjunto minimal.*

*Demonstração.* Denotemos por $C$ a coleção de todos os subconjuntos compactos não vazios de $M$ e invariantes por $\mathcal{F}$. Se $\mathcal{F}$ é uma folha da folheação, $\overline{F}$ é fechado e invariante. Logo $C$ é não vazio. Consideremos em $C$ a relação de ordem parcial dada pela inclusão de conjuntos. Dada uma sequência totalmente ordenada $\mu_1 \supset \mu_2 \supset \ldots$ de elementos de $C$, $\mu = \cap_{i=1}^{\infty} \mu_i$ é não vazio (pois $M$ é compacto). Além disso, $\mu$ é invariante (pelo lema anterior) e compacto. Logo, $\mu \in C$ e $C$ é indutivo. Pelo lema de Zorn, $C$ admite um elemento minimal. □

**Teorema 3.29.** *Seja $\mu$ um subconjunto minimal de $\mathcal{F}$. Valem as seguintes propriedades.*

*(i) Toda folha de $\mathcal{F}$ contida em $\mu$ é densa em $\mu$.*

*(ii) Se $M$ é conexa e $\mu$ tem interior não vazio, então $\mu = M$.*

*(iii) Sejam $p = \operatorname{cod} \mathcal{F}$ e $\Sigma$ um disco de dimensão $p$ transversal a $\mathcal{F}$ e tal que $\mu \cap \Sigma \neq \emptyset$. Se $\mu$ não se reduz a uma folha fechada, então $\mu \cap \Sigma$ é um conjunto perfeito, i.e., sem pontos isolados.*

*(iv) Se, além disso, $p = 1$, $\partial\Sigma \cap \mu = \emptyset$, e $\mu$ tem interior vazio e não é uma folha fechada, então $\mu \cap \Sigma$ é homeomorfo a um conjunto de Cantor. Neste caso, dizemos que $\mu$ é um minimal excepcional.*

*Demonstração.* (i) Se $F \subset \mu$ é uma folha de $\mathcal{F}$, pelo lema 3.1, $\overline{F}$ é um minimal invariante de $M$. Como $\overline{F} \subset \mu$ e $\overline{F}$ é não vazio, segue da minimalidade de $\mu$ que $\overline{F} = \mu$.

(ii) Seja $A \subset \mu$ um aberto. Por $(i)$, todas as folhas de $\mu$ intersectam $A$, logo $\mathcal{F}(A) \supset \mu$. Como $\mu$ é invariante, $\mathcal{F}(A) \subset \mu$ e consquentemente, $\mathcal{F}(A) = \mu$. Pelo teorema 3.2, sabemos que $\mathcal{F}(A)$ é aberto. A conexidade de $M$ implica que $\mu = M$.

(iii) Dado $x \in \Sigma \cap \mu$, seja $F$ a folha de $\mathcal{F}$ por $x$. Como $\mu$ não se reduz a uma folha fechada, existe outra folha $F' \neq F$ que é densa em $\mu$(devido ao item $(i)$. Como $F'$ é denso, usando uma carta trivializadora, concluímos que para toda vizinhança suficientemente pequena de $x$, $F'$ intersecta $\Sigma$ transversalmente nessa vizinhança. Em particular, $x$ é ponto de acumulação de $F' \cap \Sigma \subset \mu \cap \Sigma$.

(iv) Basta usar o seguinte lema:

**Lema 3.30.** *Seja $K \subset \mathbb{R}$ um subconjunto compacto, com interior vazio e perfeito. Então existe um homeomorfismo $h : K \to C$ onde $C$ é o conjunto de Cantor triádico de $[0, 1]$.*

□

*Demonstração.* Veja [12]

**Lema 3.31.** *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de uma variedade $M$. Existe uma cobertura $C = \{U_i | i \in I\}$ de $M$ por domínios de cartas locais de $\mathcal{F}$ tal que se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então $U_i \cap U_j$ está contido no domínio de uma carta local de $\mathcal{F}$.*

**Prova.** *Podemos munir $M$ de uma métrica riemanniana e de uma estrutura de espaço métrico. Daí, podemos cobrir $M$ por uma coleção de compactos $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $K_n \subset \operatorname{int} K_{n+1}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, fixemos uma cobertura de $K_n$ por domínios de cartas trivializadoras de $\mathcal{F}$, $\{V_i^n | i = 1, \ldots, k\}$. Seja $\delta_n > 0$ o número de Lesbegue deste cobertura com respeito à métrica riemanniana de $M$(lembremo-nos que a topologia induzida por esta métrica coincide com a topologia inicial de $M$). Podemos supor que a sequência $\delta_n$ é decrescente. Escolhamos uma cobertura de $K_n$ por domínios de cartas trivializadoras, $\{U_j^n | j = 1, \ldots, l_n\}$ tal que o diâmetro de $U_j^n$ seja menor que $\delta_n/2$ para $j = 1, 2, \ldots, l_n$. Se $U_i^n \cap U_j^n \neq \emptyset$, como o dimâmetro de $U_i^n \cup U_j^n$ é menor que $\delta_n/2 + \delta_n/2 = \delta_n$, existe um $V_\mu^n$ tal que $U_i^n \cup U_i^n \subset_\mu^n$ para algum $\mu \in \{1, 2, \ldots, k_n\}$. Então $C = \{U_j^n | j = 1, 2 \ldots, l_n\}$ satisfaz o enunciado do lema.*

**Teorema 3.32.** *(Teorema da Uniformidade Transversal de $\mathcal{F}$) Seja $F$ folha de $\mathcal{F}$. Dados $q_1, , q_2 \in F$, existem seções transversais de $\mathcal{F}$, $\Sigma_1, \Sigma_2$ com $q_i \in \Sigma_i$ e um difeomorfismo $C^r$, $f : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ tal que para qualquer folha $F'$, tem-se $f(F' \cap \Sigma_1) = F' \cap \Sigma_2$.*

**Prova.** *Como $q_1, q_2$ pertencem a $\mathcal{F}$, existe um caminho de placas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ tal que $q_1 \in \alpha_1, q_2 \in \alpha_2$ e $\alpha_i \cap \alpha_{i+1} \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, i-1\}$. Suponhamos que $\alpha_j$ é placa da carta $(U_j, \phi_j) \in \mathcal{F}$. Pelo lema anterior, podemos supor que $U_i \cap U_i \neq \emptyset$, então $U_i \cap U_j$ está contido em algum aberto coordenado de $\mathcal{F}$. Seja $\phi_j(U_j) = U_1^j \times U_2^j \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$. Escolhamos pontos $p_j \in \alpha_j \cap \alpha_{j+1}$, com $1 \leq j \leq k-1$, $p_0 = q_1$ e $p_k = q_2$. Sejam $(x_j, y_j) = \phi_j(p_j)$ e $D_j = \phi^{-1}(\{x_j\} \times U_2^j)$ um disco transversal à $\mathcal{F}$ por $p_j$. Como tempos uma carta local de $\mathcal{F}$ contendo $U_j \cap U_{j+1}$, existe um disco $B_j$ de dimensão $s$ com $p_j \in B_j \subset D_j \cap U_{j+1}$ tal que cada placa de $U_{j+1}$ corta $B_j$ no máximo uma vez. Seja $f_j : B_j \to D_{j+1}$ a aplicação que envia $p$ ao ponto de interseção da placa que passa por $p$ em $U_{j+1}$ com $D_{j+1}$. Evidentemente, $f_j : B_j \to f(B_j)$ é bijeção. Como $f_j$ opera numa carta trivializadora como a aplicação identidade, podemos concluir que $f_j$ é um difeomorfismo $C^r$(pois cada carta é um difeormorfimos $C^r$). Por construção, $f_j(F' \cap B_j) = F' \cap f_j(B)$ se $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Seja $\Sigma_1$ um disco contendo $p_0$ e contido em $B_0 \cap f_0^{-1}(B_1) \cap \ldots \cap f_0^{-1}(f_1^{-1}(\ldots(f{-}1_{k-1}(D_k))\ldots))$ e definamos $f : \Sigma_1 \to D_k$ por $f(p) =$*

$f_{k-1}(f_{k-2}(\ldots(f_1(f_0(p))\ldots))$. *É evidente que* $f$ *é um difeomorfismo sobre* $\Sigma_2 = f(\Sigma_1) \subset D_k$ *e que para toda folha* $F'$ *de* $\mathcal{F}$ *temos* $f(f' \cap \Sigma_1) = F' \cap \Sigma_2$.

**Teorema 3.33.** *Sejam* $\mathcal{F}$ *uma folheção em* $M$, $F$ *uma folha de* $\mathcal{F}$ *e* $\Sigma$ *uma seção transversal de* $\mathcal{F}$ *tal que* $\Sigma \cap F \neq \emptyset$. *Temos três possibilidades:*

*(i)* $\Sigma \cap F$ *é discreto e neste caso,* $F$ *é folha mergulhada. Também vale o recíproco.*

*(ii) O fecho de* $\Sigma \cap F$ *em* $\Sigma$ *contém um aberto. Isto ocorre se, e somente se, o fecho* $\overline{F}$ *tem interior não vazio e* $\operatorname{int} \overline{F} = \overline{F} - \partial\overline{F}$ *é um aberto que contém* $F$. *Neste caso, dizemos que* $F$ *é localmente densa.*

*(iii)* $\overline{\Sigma \cap F}$ *é um conjunto perfeito com interior vazio. Neste caso, dizemos que* $F$ *é folha excepcional.*

*Demonstração.* A ferramenta principal é mostrarmos que existem vizinhanças de pontos distintos de $\Sigma \cap F$ que são homeomorfas. Sejam $p \in \Sigma\ capF$ e $q \in F$, pelo teorema de uniformidade transversal, existe um difeomorfismo $f : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ entre discos transversais $\Sigma_1$ e $\Sigma_2$ à folheação com $p \in \Sigma_1$ e $q \in \Sigma_2$ tal que $f(F' \cap \Sigma_1) = F' \cap \Sigma_2$ para toda folha $F'$ de $\mathcal{F}$. Podemos tomar $\Sigma_1$ contido em $\Sigma$. Quando $F = F'$, o difeomorfismo anterior mostra que existe um homeomorfismo entre $F \cap \Sigma_1$ e $F \cap \Sigma_2$. Consequentemente, $\overline{F \cap \Sigma}$ é homeomorfo a $\overline{F \cap \Sigma_2}$. Se $q \in \Sigma$, podemos tomar $\Sigma_2 \subset \Sigma$. Daí, resulta as seguintes possibilidades:

(i) $p$ é ponto isolado de $\Sigma \cap F$ e consequentemente $\Sigma \cap F$ é discreto.

(ii) $p$ é ponto interior de $\overline{\Sigma \cap F}$ em $\Sigma$ e consequentemente todos os pontos de $\Sigma \cap F$ são pontos interiores de $\overline{\Sigma \cap F}$

(iii) $\overline{\Sigma \cap F}$ tem interior vazio em $\Sigma$ e $\Sigma \cap F$ não é discreto.

No primeiro caso, podemos tomar uma carta $(U, \phi)$ com $\phi(U) = U_1 \times U_2$ de modo que $D^s = \phi^{-1}(\{x\} \times U_2)$ seja um disco transversal a $\mathcal{F}$ e $F \cap D^s$ contém apenas $p \in \Sigma \cap F$. Então $\phi^{-1} : U_1 \times U_2 \to M$ é um mergulho $C^r$ tal que $F \cap \phi^{-1}(U_1 \times U_2)$ contém apenas uma placa de $U$ e consequentemente, $F$ é subvariedade $C^r$ de $M$. Reciprocamente, se $F$ é subvariedade $C^r$ de $M$, localmente uma seção transversal intersecta $F$ em apenas uma placa. Daí, $\Sigma \cap F$ é discreto. No segundo caso, seja $(U, \phi)$ uma carta triavializadora com $\phi(U) = U_1 \times U_2$ de modo que $D^s = \phi^{-1}(\{x\} \times U_2)$ seja um disco contendo $p$ transversal a $\mathcal{F}$ com $p$ no interior de $\overline{F \cap D^s}$. Podemos restringir $U_2$ a $\overline{U}_2$, obtendo um disco aberto $D = \phi^{-1}(\{x\} \times \overline{U}_2)$ contido em $\overline{F \cap D^s}$ e contendo $p$. Logo, $\overline{F}$ contém o aberto $A = \phi^{-1}(U_1 \times \overline{U}_2)$. Como $\overline{F}$ é invariante por $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}(A) \subset \overline{F}$. Além disso, $F \subset \mathcal{F}(A)$. Daí, $\mathcal{F}(A) = \overline{F} - \partial\overline{F}$. O terceiro caso é a negação dos dois anteriores. □

Podemos concluir que existem três tipos de conjuntos minimais $\mu \subset \mathcal{F}$ :

1. $\mu$ é uma folha fechada.

2. $\mu$ é igual a $M$.

3. O fecho de $\mu$ tem interior vazio e é igual a união de folhas excepcionais.

**Teorema 3.34.** *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão 1 sobre uma variedade compacta $M$. Suponha que $\mu$ é um conjunto minimal e excepcional de $\mathcal{F}$. Então existe uma vizinhança aberta saturada de $W$ de $\mu$ em $M$ tal que $\mu \subset \overline{F}$ para qualquer folha $F$ de $\mathcal{F}$ em $W$.*

*Demonstração.* Veja em [15] página 94.

A próxima proposição é uma importante aplicação da proposição anterior.

**Proposição 3.35.** *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão 1 e de classe $C^3$ de uma variedade Riemanniana compacta e conexa $M$ e seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função contínua que é constante ao longo das folhas de $\mathcal{F}$. Se $f$ é não constante sobre $M$, então o conjunto $A = \{x \in M; f(x) = max_M(f(x))\}$ contém pelo menos uma folha compacta.*

*Demonstração.* Como $f$ é contínua, $A \subset M$ é fechado. A compacidade de $M$ implica que $A$ é compacto. Como $f$ é constante ao longo das folhas, $A$ é uma união de folhas, e portanto $A$ é invariante. Pelo teorema 3.3, $A$ contém um conjunto minimal $K$. Como $K$ é fechado, compacidade de $M$ implica na compacidade de $K$. Pelo teorema 3.4, se $K$ tem interior não vazio, então $K$ tem que coincidir com $M$. Neste caso, $f$ seria constante sobre $M$, o que contradiz a nossa hipótese. Pelos teoremas 3.6 e 3.4, ou $K$ é uma folha compacta ou uma união de folhas excepcionais. No último caso, pelo teorema 3.7, existe um aberto saturado $U$ contendo $K$ tal que, para toda folha $L$ de $\mathcal{F}$ em $U$, o fecho $\overline{L}$ de $L$ contém $K$. Como $f$ é constante nas folhas, $L \subset A$. Em particular, $U$ está contido no interior de $A$. Como podemos obter um aberto saturado $U$ para cada $K$, segue que a união de todos eles formam um aberto $V$ saturado contido no interior de $A$ e contendo todos os conjuntos minimais em $A$. Como $M$ é conexa, $A$ compacto e $A \neq M$, segue que $A - V \neq \emptyset$. Além disso, $A - V$ é um conjunto fechado e saturado, consequentemente contém um conjunto minimal que não está em $V$. Este absurdo mostra que $K$ é uma folha compacta.
□

Seja $D$ uma distribuição contínua sobre $M$. Dadas duas bases ordenadas de $D(x)$, $x \in M$, diremos que elas são equivalentes se a matriz de mudança de base tem determinante positivo. Claramente isto define uma relação de equivalência entre as bases ordenandas de $D(x)$. Diremos que $D$ é orientável se é possível escolhermos em cada $D(x)$ uma dessas classes de equivalência de modo coerente ao longo da variedade no seguinte sentido. Existe uma cobertura por vizinhanças coordenadas $(U_i, \phi_i)$ de $M$ e em cada $U_i$ estão definidos $k$ campos de vetores contínuos $X_1^i, X_2^i, \ldots, X_k^i$ que geram $D(x)$, para $x$ em $U_i$, de modo que se $x \in U_i \cap U_j$ então o determinante da matriz de mudança de base de $X_1^i(x), X_2^i(x), \ldots, X_k^i(x)$ para $X_1^j, X_2^j, \ldots, X_k^j$ seja positivo. Isto quer dizer que estamos escolhendo em $x$ a classe da base $\{X_1^i(x), \ldots, X_k^i\}$ e esta escolha independe do aberto $U_i$ que contém $x$. Denotemos por $O^+(x)$ e $O^-(x)$ as duas classes de $D(x)$ definidas pela relação de equivalência anteiror. O recobrimento duplo orientável de $D$, é a distribuição $\widetilde{D}$ no recobrimento duplo orientável de $\widetilde{M}$ de $M$ definida por

$$\widetilde{D}(x) = D\pi(x)^{-1}(D(\pi(x)))$$

onde $\pi : \widetilde{M} \to M$ é a projeção canônica

**Teorema 3.36.** *Seja $M$ uma variedade conexa e $D$ uma distribuição contínua em $M$. Se $(\widetilde{M}, \pi, \widetilde{D})$ é o recobrimento duplo de $D$, então:*

*(i)* $\widetilde{D}$ *é orientável.*

*(ii)* $\widetilde{M}$ *é conexa se, e somente se,* $P$ *é não orientável.*

*Demonstração.* Veja [6]

**Corolário 3.37.** *Se* $M$ *é simplesmente conexa, então toda distribuição é orientável. Em particular,* $M$ *é orientável.*

**Definição 3.38.** *Uma distribuição* $D$ *é transversalmente orientável se existe uma distribuição complementar,* $\widetilde{D}$ *tal que*

$$D(x) + \widetilde{D}(x) = T_xM, D(x) \cap \widetilde{D}(x) = \{0\}$$

*e* $\widetilde{D}$ *é orientável.*

Naturalmente, temos uma definição correspondente para folheações.

**Definição 3.39.** *Uma folheação* $\mathcal{F}$ *de classe* $C^r (r \leq 1)$ *é orientável se a sua distribuição correspondente é orientável. Analogamente,* $\mathcal{F}$ *é transversamente orientável se a distribuição correspondente é transversalmente orientável.*

**Teorema 3.40.** *Seja* $D$ *uma distribuição de classe* $C^r$ *em* $M$*. Valem as seguintes propriedades*

*(i) Se* $D$ *é orientável e transversalmente orientável, então* $M$ *é orientável.*

*(ii) Se* $M$ *é orientável, então* $D$ *é orientável se, e somente se, é transversalmente orientável.*

*Demonstração.* Veja [6]

Terminamos este capítulo comum lema útil de [19] sobre coordenadas locais de duas distribuições complementares:

**Lema 3.41.** *Se* $T$ *e* $T'$ *são duas distribuições integráveis sobre uma variedade* $M$ *que são completamentares em cada ponto de* $M$*, então para cada ponto* $y$ *de* $M$*, existe um sistema de coordenadas locais* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *com origem em* $y$ *tal que* $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_k}\right)$ *e* $\left(\frac{\partial}{\partial x_{k+1}}, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ *formam uma base local para* $T$ *e* $T'$*, respectivamente. Em outras palavras, para qualquer conjunto de constantes* $(c_1, \ldots, c_k, c_{k+1}, \ldots, c_n)$*, as equações* $x_i = c_i$*,* $1 \leq i \leq k$*, (respectivamente* $x_j = c_j$*,* $k+1 \leq j \leq n$*) definem uma variedade integrável de* $T$ *(respectivamente* $T'$*).*

*Demonstração.* Como $T'$ é integrável, existe um sistema de coordenadas locais $y_1, \ldots, y_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$ com origem em $y$ tal que $(\frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_k})$ formem uma base para $T'$. Em outras palavras, as equações $x_j = c_j$, $k+1 \leq j \leq n$, definem uma variedade integral de $T$. Analogamente, existe um sitema de coordenadas locais $x_1, \ldots, x_k, z_{k+1}, \ldots, z_n$ com origem em $y$ tais que $(\frac{\partial}{\partial z_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n})$ formam uma base local para $T''$. Então $x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$ é um sistema de coordenadas locais com a propriedade desejada. $\square$

# Capítulo 4

# Folheações de codimensão 1 em Variedades Riemannianas

## 4.1 Resultados Preliminares

Seja $M^{n+1}$ uma variedade Riemanniana orientável e $\mathcal{F}$ uma folheação de classe $C^3$ de codimensão 1 sobre $M$. Dado $p \in M$, se $N$ é um campo vetorial unitário normal às folhas de $\mathcal{F}$ em alguma vizinhança de $p$, podemos obter um referencial ortonormal adaptado $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, e_{n+1} = N\}$ de modo que $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sejam tangentes às folhas de $\mathcal{F}$. A imersão de cada folha em $M$ nos permite considerar o vetor curvatura média $H$ na direção de $N$. Para campos de vetores tangentes às folhas de $\mathcal{F}$, podemos definir a divergência ao longo de uma folha $L$ por

$$\operatorname{div}_L(V) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} N, e_i \rangle$$

Como $\langle N, N \rangle = 1$, segue-se que $2\langle \nabla_N Z, N \rangle = 0$, para todo campo $Z$, consequentemente, o campo de vetores $X = \nabla_N N$ é tangente as folhas de $\mathcal{F}$.

**Teorema 4.1.** *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão e de classe $C^3$ de uma variedade Riemanniana $M$. Seja $N$ um campo de vetores unitário e normal às folhas de $\mathcal{F}$ em algum aberto $U$ de $M$. Então, fixada uma folha $F$ em $U$ temos:*

*(i)* $\operatorname{div} N = -nH$

*(ii)* $\operatorname{div}_L(X) = -nN(H) + \|A_N\|^2 + \operatorname{Ric} N + |X|^2$

*(iii)* $\operatorname{div} X = \operatorname{div}_L X - |X|^2$

*onde $H$ é a curvatura média de $\mathcal{F}$ na direção de $N$ e $A_N$ é a segunda forma fundamental da imersão de $F$ na direção de $N$.*

*Demonstração.* Dado $p$ em $U$, considere um referencial adaptado $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}\}$ em uma vizinhança de $p$, com $e_{n+1} = N$. Para $(i)$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} N &= \sum_{i=1}^{n+1} \langle \nabla_{e_i} N, e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} N, e_i \rangle + \langle \nabla_N N, N \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} N, e_i \rangle \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \langle A_N e_i, e_i \rangle \\
&= -\operatorname{tr} A_N = -nH
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Para $(ii)$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}_L X &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle \\
&= \sum \langle \nabla_{e_i} \nabla_N N, e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} \nabla_N N - \nabla_N \nabla_{e_i} N + \nabla_{[e_i,N]} N, e_i \rangle + \sum_i \langle \nabla_N \nabla_{e_i} N, e_i \rangle - \sum \langle \nabla_{[e_i,N]} N, e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle R(N, e_i) N, e_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} N \langle \nabla_{e_i} N, e_i \rangle - \sum_i \langle \nabla_{e_i} N, \nabla_N e_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{[e_i,N]} N, e_i \rangle
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Como $\langle N, N \rangle = 1$, obtemos $2\langle \nabla_{e_i} N, N \rangle = 0$. Consequentemente, $\nabla_{e_i} N$ é tangentes à folheação, portanto

$$\langle \nabla_{e_i} N, \nabla_N e_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} N, e_j \rangle \langle \nabla_N e_i, e_j \rangle.$$

Então, em (4.2), obtemos

$$\operatorname{div}_L X = \operatorname{Ric} N - N \left( \sum_{i=1}^{n} \langle A_N e_i, e_i \rangle \right) - \sum_{i,j=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} N, e_j \rangle \langle \nabla_N e_i, e_j \rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{[e_i,N]} N, e_i \rangle \tag{4.3}$$

Sejam $h_{ij} = \langle A_N e_i, e_j \rangle = -\langle \nabla_{e_i} N, e_j \rangle$ e $l_{ij} = \langle \nabla_N e_i, e_j \rangle$. Temos

$$
\begin{aligned}
[e_i, N] &= \sum_{j=1}^{n} \langle [e_i, N], e_j\rangle e_j + \langle [e_i, N], N\rangle N \\
&= \sum_{j=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} N - \nabla_N e_i, e_j\rangle e_j + \langle \nabla_{e_i} N - \nabla_N e_i, N\rangle N \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(-\langle A_N e_i, e_j\rangle - \langle \nabla_N e_i, e_j\rangle\right) e_j + \sum_{j=1}^{n} \left(\langle \nabla_N N, e_i\rangle - N\langle N, e_i\rangle\right) N \\
&= \sum_{j=1}^{n} \{\left(-\langle A_N e_i, e_j\rangle - \langle \nabla_N e_i, e_j\rangle\right) e_j + \langle \nabla_N N, e_i\rangle N\} \\
&= -\sum_{j=1}^{n} (h_{ij} + l_{ij}) e_j + \langle e_i, X\rangle N. \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

Como $A_n$ é auto-adjunta, $h_{ij} = \langle A_N e_i, e_j\rangle = \langle e_i, A_N e_j\rangle = h_{ij}$.
Substituindo (4.4) em (4.3), obtemos:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}_L X &= \operatorname{Ric} N - N(\operatorname{tr}(A_N)) - \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} l_{ij} - \sum_{i,j=1}^{n} (h_{ij} + l_{ij}) \langle \nabla_{e_i} N, e_i\rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, X\rangle \langle \nabla_N N, e_i\rangle \\
&= \operatorname{Ric} N - nN(H) + 2\sum_{i,j} h_{ij} l_{ij} + \sum_{i,j} h_{ij}^2 + |X|^2 \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

Como $0 = N\langle e_i, e_j\rangle = \langle \nabla_N e_i, e_j\rangle + \langle e_i, \nabla_N e_j\rangle$, obtemos $l_{ij} = -l_{ji}$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
2\sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} l_{ij} &= \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} l_{ij} + \sum_{i,j=1}^{n} h_{ji} l_{ji} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} l_{ij} - \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} l_{ij} = 0. \qquad (4.6)
\end{aligned}
$$

Substituindo $|A_n|^2 = \sum h_{ij}^2$ em (4.5), temos

$$
\operatorname{div}_L X = \operatorname{Ric} N - nN(H) + |A_n|^2 + |X|^2
$$

Para $(iii)$, usando que

$$
\langle X, N\rangle = \langle \nabla_N N, N\rangle = 0
$$

temos

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} X, e_i\rangle + \langle \nabla_N X, N\rangle \\
&= \operatorname{div}_L X + N\langle X, N\rangle - \langle X, \nabla_N N\rangle \\
&= \operatorname{div}_L X - |X|^2 \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

$\square$

Escolhendo $N$ de acordo com a outra orientação possível para $M$, como $\nabla_{-N}(-N) = \nabla_N N$, o campo $X = \nabla_N N$ não se altera e consequentemente pode ser definido globamente em $M$. Com mais razão, o mesmo se passará com a função $N(H)$. Portanto, $(ii)$ da proposição anterior é válida em toda $L$. Além disso, podemos considerar a 1-forma dual de $X$ definida por

$$\theta(\cdot) := \langle X, \cdot \rangle.$$

**Proposição 4.2.** *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão 1 e classe $C^3$ de uma variedade Riemanniana $M$. Seja $X$ o campo de vetores definido localmente por $\nabla_N N$, onde $N$ é qualquer campo de vetores unitário normal às folhas de $\mathcal{F}$. Sejam $\theta$ sua forma dual e $d_L$ a derivação exterior ao longo da folha $L$. Se $f : M \to \mathbb{R}$ é qualquer função diferenciável que é constante ao longo das folhas de $\mathcal{F}$, então*

$$d_L N(f) = N(f)\theta$$

*ao longo de qualquer folha $L$ de $\mathcal{F}$.*

*Demonstração.* Dado $p$ em $M$, considere um referencial adaptado $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, e_{n+1} = N\}$ em uma vizinhança de $p$, assim como na proposição anterior. Dado um campo de vetores $Z$ sobre $M$, podemos escrever $Z = \sum a_i e_i$. Como $f$ é constante ao longo das folhas, $e_i(f) = 0$ se $i \leq n$. Consequentemente:

$$Z(f) = \langle Z, N \rangle N(f).$$

Daí, se $Z$ é tangente às folhas, $Z(f) = 0$. Portanto, para $Y \in \chi(L)$,

$$\begin{aligned} d_L N(f)(Y) &= Y(N(f)) \\ &= Y(N(f)) - NY(f)) \\ &= [Y, N](f) = (\nabla_Y N - \nabla_N Y)(f) \\ &= -(A_N Y)(f) - \langle \nabla_N Y, N \rangle N(f) \\ &= -(A_N Y)(f) - N\langle Y, N \rangle N(f) + \langle Y, \nabla_N N \rangle N(f) \\ &= N(f)\theta(Y) \end{aligned}$$

pois $A_N Y$ também é tangente às folhas de $\mathcal{F}$. $\square$

Quando a codimensão é 1, orientabilidade transversal implica na existência de um campo de vetores $N$ normal e unitário à folheação. Se as folhas de $\mathcal{F}$ também são orientadas, podemos tomar um referencial adaptado $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1} = N\}$ tal que $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ seja positivamente orientada com respeito às folhas. Com respeito a este referencial, definamos um elemento de volume sobre as folhas, dado por:

$$\phi(X_1, \ldots, X_n) = det([X_1, X_2, \ldots, X_n, N]_{\{e_i\}}) \tag{4.8}$$

onde $X_j = \sum_{i=1}^{n+1} a_{ij} e_i$ e $[X_1, \ldots, X_n]_{\{e_i\}}$ denota a matriz $(a_{ij})$. Como $\phi$ é uma $n$-forma diferenciável, temos

$$\phi = \sum_{i=1}^{n+1} a_i w_i \wedge \ldots \wedge \widehat{w}_i \wedge \ldots w_{n+1},$$

onde $\{w_i\}$ é o coreferencial associado à $\{e_i\}$ como na seção (2.2). Além disso, como $\phi(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0$, quando algum $X_i$ é igual a $N$ a expressão acima se reduz à:

$$\phi = a_{n+1} w_1 \wedge \ldots \wedge w_n$$

donde

$$a_{n+1} = \phi(e_1, \ldots, e_n) = det([e_1, \ldots, e_n, N]_{\{e_i\}}) = det(Id) = 1.$$

Nosso próximo interesse será relacionar a derivada exterior de $\phi$ e a curvatura média $H$.

**Proposição 4.3.** *(Rummler[23]) Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão 1 e classe $C^3$ de uma variedade Riemanniana $M$. Se $\mathcal{F}$ é orientável e transversalmente orientável, então*

$$d\phi = (-1)^{n+1} nH\Phi,$$

*onde $\Phi$ é o elemento de volume de $M$.*

Em virtude da observação anteiror, $\phi = w_1 \wedge w_2 \wedge \ldots \wedge w_n$. Usando a primeira equação de estrutura

$$dw_i = \sum_j w_i \wedge w_{ji}$$

obtemos

$$\begin{aligned} d\phi &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} w_1 \wedge \ldots \wedge dw_i \wedge \ldots w_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} w_1 \wedge \ldots \wedge \left( \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \wedge w_j + w_{i,n+1} \wedge w_{n+1} \right) \wedge \ldots w_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} w_1 \wedge \ldots \wedge w_{i-1} \wedge w_{i,n+1} \wedge w_{n+1} \wedge w_{i+1} \wedge \ldots w_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} w_1 \wedge \ldots \wedge w_{i-1} \wedge w_{i,n+1} \wedge w_{i+1} \ldots \wedge w_n \wedge w_{n+1} \wedge \ldots w_n \end{aligned}$$

Como $\langle \nabla_X e_i, e_j \rangle = w_{ij}(X)$ e $\langle A_N e_i, e_j \rangle = -\langle N, \nabla_{e_i} e_j \rangle$ temos:

$$\begin{aligned} w_{i,n+1} &= \sum_{j=1}^{n+1} w_{i,n+1}(e_j) w_j = \sum_{j=1}^{n+1} \langle \nabla_{e_j} e_i, e_{n+1} \rangle w_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \langle A_N e_j, e_i \rangle w_j + \langle \nabla_N e_i, N \rangle w_{n+1} \\ &= \sum_{j=1}^{n} h_{ij} w_j - \langle X, e_i \rangle w_{n+1} \end{aligned}$$

Substituindo no somatório anterior e lembrando que $w \wedge w = 0$, temos

$$\begin{aligned} d\phi &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-1}w_1 \wedge \ldots \wedge w_{i-1} \wedge (h_{ii}w_i) \wedge \ldots w_n \wedge w_{n+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-1}h_{ii}(w_1 \wedge \ldots \wedge w_{i-1} \wedge w_i \wedge w_{i+1} \wedge \ldots \wedge w_n \wedge w_{n+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-1}h_{ii}\Phi = (-1)^{n-1}nH\Phi. \end{aligned}$$

## 4.2 Resultados Principais

Estudaremos agora folheações $\mathcal{F}$ de codimensão 1 e classe $C^3$ de uma variedade Riemanniana orientável $M$, tal que cada folha $L$ tem curvatura média constante $H_L$. Podemos supor que a folheação é orientável e, em virtude do teorema (3.40), transversalmente orientável, pois, caso contrário, basta considerar o recobrimento duplo orientável de $\mathcal{F}$ e traduzir os resultado obtidos via a projeção $\pi$. Como a codimensão é 1, tal suposição garante a existência de um campo de vetores normal às folhas de $\mathcal{F}$ e, além disso, a curvatura média $H_L$ ao longo da folha $L$ representará a curvatura média na direção de $N$. Daí, podemos considerar a função $H : M \to \mathbb{R}$ cujo valor em cada ponto $p$ é $H_L$, sendo $L$ a folha de $\mathcal{F}$ que passa por $p$.

Apresentamos agora nosso resultado principal, obtido por Barbosa-Kenmotsu-Oshikiri em [3]:

**Teorema 4.4.** *Seja $M$ uma variedade Riemanniana compacta com curvatura de Ricci não negativa e $\mathcal{F}$ um folheação de codimensão* 1 *e classe $C^3$ de $M$, transversalmente orientável, cujas folhas têm curvatura média constante. Então qualquer folha de $\mathcal{F}$ é uma subvariedade totalmente geodésica de $M$. Além disso, $M$ é localmente um produto Riemanniano de uma folha de $\mathcal{F}$ e uma curva normal e a curvatura de Ricci na direção normal às folhas é zero.*

Para a demonstração, utilizaremos um resultado de [21]:

**Teorema 4.5.** *Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão 1 de uma variedade Riemanniana $M$ com curvatura de Ricci não negativa e $N$ um campo normal unitário às folhas de $\mathcal{F}$. Então $N$ é um campo de vetores paralelo, i.e., $\nabla_N N \equiv 0$.*

*Demonstração.* (do teorema (4.4)) Como a função curvartura média $H : M \to \mathbb{R}$, que associa a cada ponto o valor da curvatura média de cada folha de $\mathcal{F}$ que passa por aquele ponto, é constante ao longo das folhas, pela proposição (3.35), ou $H$ é constante sobre $M$ ou existe uma folha compacta $L$ de $\mathcal{F}$ tendo a propriedade que $H_L = max_M H(p)$. Suponha que $H$ não é constante em $M$. Isto implica que $N(H) = 0$ ao longo de $L$. Segue do teorema (4.1) que

$$\operatorname{div}_L X = ||A_N||^2 + |X|^2 + \operatorname{Ric}(N). \tag{4.9}$$

Como $L$ é compacta, usando o teorema da divergência temos:

$$0 \le \int_L \{||A_N||^2 + |X|^2 + \operatorname{Ric}(N)\} dV_g = \int_L \operatorname{div}_L X dV_g = 0$$

Como $\mathrm{Ric}\,(N) \geq 0$ temos

$$||A_N|| = 0, |X| \equiv 0 \text{ e } \mathrm{Ric}\, N \equiv 0.$$

ao longo de $L$. Portanto, $L$ é totalmente geodésica e $max_H(p) \leq 0$. Repetindo o argumento anterior para $-H$, concluímos que $min_M H(p) = max_M - H(p) \geq 0$. Então $H \equiv 0$ e obtemos um absurdo. Sendo $H$ constante ao longo de $M$, $N[H] \equiv 0$ e usando o teorema (4.1) temos:

$$\mathrm{div}\, X = ||A_N||^2 + \mathrm{Ric}\, N.$$

Novamente, pelo teorema da divergência, encontramos

$$||B|| \equiv 0 \text{ e } \mathrm{Ric}\, N \equiv 0.$$

Seja $y$ um ponto na folha $L$ de $\mathcal{F}$. Pelo lema (3.41), existe um sistema de coordenadas $(x, V)$ adaptado à $(M, \mathcal{F}, \mathcal{F}^\perp)$ onde $V$ é uma vizinhança de $y$ definida por $|x_i| < c$, $1 \leq i \leq n$, e $c$ é suficientemente pequeno de modo que o sistema de coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dá um difeomorfismo de $V$ sobre o cubo $|x_i| < c$ em $\mathbb{R}^{n+1}$. Seja $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ para $1 \leq i \leq n+1$. Podemos supor que o campo $X_{n+1}$ gera $\mathcal{F}^\perp$. Seja $V'$(respectivamente $V''$) o conjunto dos pontos em $V$ definido por $|x_i| < c, 1 \leq i \leq n$ e $x_{n+1} = 0$ (respectivamente $x_i = 0, 1 \leq i \leq n$ e $|x_{n+1}| < c$). Queremos mostrar que $(V, g)$ é isométrico à variedade produto $(V' \times V'', g_{|V'} + g_{|V''})$. Basta mostrarmos que:

(i) $g_{ij} = g(X_i, X_j)$ é independente de $x_{n+1}$ para $1 \leq i, j \leq n$;

(ii) $g_{ij} = g(X_i, X_{n+1}) = 0$ para $1 \leq i \leq n$;

(iii) $g_{n+1,n+1} = g(X_{n+1}, X_{n+1})$ é idependente de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

A segunda condição é óbvia pois $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}^\perp$ são ortogonais. As folhas de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}^\perp$ são paralelas (i.e., $\nabla_X Y \in T\mathcal{F}$ se $X, Y \in T\mathcal{F}$ e $\nabla_X Y \in T\mathcal{F}^\perp$ se $X, Y \in T\mathcal{F}^\perp$) pois são totalmente geodésicas; então

$$\nabla_{X_i} X_j \in T\mathcal{F} \text{ e } \nabla_{X_{n+1}} X_{n+1} \in T\mathcal{F}^\perp.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 0 = X_i \langle X_{n+1}, X_j \rangle &= \langle \nabla_{X_i} X_{n+1}, X_j \rangle + \langle X_{n+1}, \nabla_{X_i} X_j \rangle \\ &= \langle \nabla_{X_i} X_{n+1}, X_j \rangle \\ 0 = X_{n+1} \langle N, X_j \rangle &= \langle \nabla_{X_{n+1}} X_{n+1}, X_i \rangle + \langle X_{n+1}, \nabla_{X_{n+1}} X_j \rangle \\ &= \langle X_{n+1}, \nabla_{X_{n+1}} X_j \rangle \end{aligned}$$

para todos $1 \leq i, j \leq n$. Isso mostra que $\nabla_{X_i} X_{n+1} \in T\mathcal{F}^\perp$ e $\nabla_{X_{n+1}} X_j \in T\mathcal{F}$. Como $[X_i, X_{n+1}] = 0$ temos $\nabla_{X_i} X_{n+1} = \nabla_{X_{n+1}} X_j = 0$. Então:

$$\begin{aligned} X_{n+1}(g_{ij}) &= \langle \nabla_{X_{n+1}} X_i, X_j \rangle + \langle X_i, \nabla_{X_{n+1}} X_j \rangle \\ &= 0 \\ X_i(g(n+1, n+1)) &= \langle \nabla_{X_i} X_{n+1}, X_{n+1} \rangle + \langle X_{n+1}, \nabla_{X_i} X_{n+1} \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

**Corolário 4.6.** *Não existe folheação de codimensão* 1 *e classe* $C^3$ *da esfera euclideana* $S^n(1)$ *cujas folhas têm curvatura média constante.*

**Prova.** *Como as geodésicas na esfera são os grandes círculos, duas folhas distintas teriam interseção não vazia pois quaisquer dois grandes círculos se intersectam. Uma contradição.*

**Corolário 4.7.** *Seja* $M$ *uma variedade Riemanniana compacta orientável e plana e* $\mathcal{F}$ *uma folheação de codimensão* 1 *e classe* $C^3$ *de* $M$ *cujas folhas têm curvatura média constante. Então* $\mathcal{F}$ *é induzida por uma folheação por hiperplanos do recobrimento universal de* $M$.

*Demonstração.* De fato, uma folheação de $\mathbb{R}^n$ por subvariedades de codimensão 1 e totalmente geodésicas é uma folheação por hiperplanos. □

**Proposição 4.8.** *Seja* $M$ *uma variedade Riemanniana com curvatura de Ricci positiva. Qualquer folheação de codimensão 1 e classe* $C^3$ *de* $M$ *cujas folhas têm a mesma curvatura média constante não pode ter uma folha compacta.*

*Demonstração.* Suponha, por absurdo, que $M$ admite uma folha compacta $L$. Como todas as folhas têm a mesma curvatura média constante, a equação (4.9) é verdade sobre $L$. Como $\operatorname{Ric} N > 0$, o teorema da divergência aplicado à equação mencionada produz um absurdo. □

No que segue, denotaremos por $Q^n(a)$ uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional constante $a$.

**Teorema 4.9.** *Seja* $\mathcal{F}$ *uma folheação de codimensão 1 e classe* $C^3$ *de* $Q^{n+1}(a)$ *tal que cada folha* $L$ *tem curvatura média constante* $H_L$. *Se* $a \leq 0$ *e* $|H_L| \geq \sqrt{-a}$ *então* $\inf |H_L| = \sqrt{-a}$

*Demonstração.* Podemos assumir sem perda de generalidade que $Q^{n+1}(a)$ é simplesmente conexo. Caso contrário, basta considerar seu recobrimento universal e a folheação induzida. Pelo teorema de classificação das formas espaciais, $Q^{n+1}(a)$ é o espaço Euclideano $\mathbb{R}^{n+1}$(caso $a = 0$) ou o espaço hiperbólico $H^{n+1}(a)$ (caso $a < 0$). Como $Q^{n+1}(a)$ é simplesmente conexo, $\mathcal{F}$ é orientável e transversalmente orientável. Se existe uma folha $L$ tal que $|H_L| = \sqrt{-a}$ não há o que fazer. Suponha que $|H_L| > \sqrt{-a}$. Como $\mathcal{F}$ é transversalmente orientável e tem codimensão 1, podemos escolher um campo unitário $N$ normal às folhas tal que a curvatura média $H_L$, computada na direção de $N$ satisfaça

$$(-1)^{n+1} H_L > \sqrt{-a}.$$

Seja $c = \inf |H_L|$. Se $c = \sqrt{-a}$ obtemos o resultado desejado. Suponha que $c > \sqrt{-a}$. Seja $B_R$ uma bola de raio $R$ sobre $Q^{n+1}(a)$. A proposição (4.3) fornece uma relação entre o elemento de volume $\Phi$ de $Q^{n+1}(a)$ e o elemento de volume $\phi$ de cada folha. Então obtemos a seguinte estimativa para o volume de $B_R$:

$$\begin{aligned} vol(B_R) = \int_{B_R} \Phi &= \int_{B_R} \frac{(-1)^{n+1}}{nH} d\phi \\ &= \int_{B_R} \frac{1}{n|H|} d\phi \\ &\leq \frac{1}{nc} \int_{\partial B_R} \phi. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Seja $w$ o elemento de volume de $\partial B_R$. Seja $\{X_1, \ldots, X_n\}$ um referencial local ortonormal tangente a $\partial B_R$ e tal que $w(X_1, \ldots, X_n) = 1$. Como $|X_1 \wedge \ldots \wedge X_N| = 1$, por (4.8) obtemos

$$\phi(X_1, \ldots, X_n) = \langle X_1 \wedge \ldots \wedge X_N, N \rangle \leq 1.$$

Portanto,

$$\phi \leq w. \tag{4.11}$$

Obtemos de (4.11) e (4.10) que

$$nc \leq \frac{vol(\partial B_R)}{vol(B_R)} \tag{4.12}$$

Quando $a = 0$, em virtude do exemplo (2.19), obtemos da desigualdade anterior:

$$0 < c < \frac{n+1}{nR}$$

Fazendo $R \to \infty$ obtemos $c \leq 0$, uma contradição. Logo $\inf |H_L| = c = 0$. Quando $a < 0$, pelo exemplo (2.20), temos

$$vol(B_R) \quad = \quad \int_0^R V_0 S_a^n(t) dt \tag{4.13}$$

e

$$vol(\partial B_R) \quad = \quad V_0 S_a^n(R) \tag{4.14}$$

onde $V_0 = vol(S^n(1))$ e $S_a(t) = \dfrac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{senh} \sqrt{-a}t$. Seja $C_a(t) = \cosh \sqrt{-a}t$. Temos $S_a'(t) = C_a(t)$ e

$$vol(\partial B_R) = \int_0^R n V_0 S_a^{n-1}(t) C_a(t) dt.$$

Substituindo (4.13) em (4.12) obtemos

$$c \leq \frac{\int_0^R V_0 S_a^{n-1}(t) C_a(t) dt}{\int_0^R V_0 S_a^n(t) dt}$$

Tomando o limite do lado direito da desigualdade anterior quando $R \to \infty$, obtemos

$$c \leq \lim_{R \to \infty} \frac{C_a(R)}{S_a(R)} = \sqrt{-a}.$$

Como $c > \sqrt{-a}$, obtemos uma contradição. Então $c = \sqrt{-a}$. $\square$

**Corolário 4.10.** *Se todas as folhas de uma folheação de codimensão 1 de uma variedade Riemanniana completa e plana têm a mesma curvatura média constante então as folhas são subvariedades mínimas de $M$.*

**Corolário 4.11.** *Se todas as folhas de uma folheação de codimensão 1 e classe $C^3$ de $Q^n(a)$, $a < 0$ têm a mesma curvatura média constante $H$ e $|H| \geq \sqrt{-a}$ então $|H| = \sqrt{-a}$.*

## 4.3 Outros Resultados

Considere uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+1}$ descrita pelo gráfico de uma função $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, de classe $C^2$. A área deste gráfico é

$$A(f) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dv,$$

onde $dv$ é o elemento de volume de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que o gráfico de $f$ é mínimo se $f$ é um valor crítico do funcional área $A$. O gráfico de $f$ é uma superfície mínima se satisfaz à equação

$$(1 + |\nabla f|^2) \sum_{i=1}^{n} f_{ii} - \sum_{i,j=1}^{n} f_i f_j f_{ij} = 0 \tag{4.15}$$

O adjetivos empregados não trazem ambiguidade pois as duas noções de minimalidade coincidem. Bernstein, em [4], mostrou o seguinte resultado:

**Teorema 4.12.** *Um gráfico mínimo e completo em $\mathbb{R}^3$ é um plano.*

Além disso, ele propôs a seguinte conjectura:

*Conjectura de Bernstein*: Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma solução de (1) em $\mathbb{R}^n$, então $f$ é um funcional linear.

Uma hipersuperfície mínima é estável se é um mínimo local do funcional área com respeito às deformações de suporte compacto. Um gráfico mínimo é um exemplo de hipersuperfície estável. A conjectura é verdadeira para $n \leq 7$ e falsa para $n \geq 8$ (veja [5]).

Em [2], Barbosa-Gomes-Silveira mostraram que se $\mathcal{F}$ é uma folheação de codimensão 1 em $\mathbb{R}^3$ cujas folhas têm curvatura média constante $H$, então $\mathcal{F}$ é uma folheação mínima. Tal resultado não vale quando $n \geq 8$, basta considerar uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que é um contra exemplo para a conjectura de Bernstein e a folheação de $\mathbb{R}^{n+1}$ cujas folhas são os gráficos de $f + c, c \in \mathbb{R}$(veja exemplo (3.4)).

Heinz estudou as soluções de (4.15) sobre um disco em $\mathbb{R}^2$ de centro $p$ e raio $R$. Ele mostrou que existe uma constante universal $C$ tal que

$$|A(p)| \leq \frac{C}{R^2}$$

onde $|A|$ é a norma da segunda forma fundamental sobre o gráfico. Na mesma direção do resultado acima, com as ferramentas anteriores, podemos provar o seguinte resultado:

**Proposição 4.13.** *Sejam $F : D \to \mathbb{R}$ de classe $C^3$ onde $D = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq r^2\}$ e $H$ a curvatura da hipersuperfície não paramétrica de $\mathbb{R}^{n+1}$ definida por $F$. Se $c = \inf |H| > 0$ então $c \cdot r \leq 1$.*

*Demonstração.* Considere a folheação $\mathcal{F}$ de $D \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ cujas folhas são as translações dos gráficos de $F$, $\{x, F(x)) = (x, z) : x \in D\}$ na direção do eixo $z$. Seja $N$ o campo de vetores normal e unitário às folhas de $\mathcal{F}$ tal que o vetor curvatura média em cada folha, na direção de $N$, satisfaça

$$(-1)^{n+1} H > .0$$

Da relação entre o elemento de volume $\Phi$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ e o elemento de volume $\phi$ de cada folha, fornecida pela proposição (4.3), obtemos

$$2a\frac{r^n}{n}volS^{n-1}(1) = \int_{D\times[-a,a]} \Phi \leq \frac{1}{nc}\int_{\partial(D\times[-a,a])} \phi.$$

Pelo mesmo argumento de (3.11), obtemos

$$\int_{\partial(D\times[-a,a])} \phi \leq vol(\partial(D \times [a,-a])).$$

Como $vol(\partial D \times [-a,a]) = 2ar^{n-1}vol(S^{n-1}(1)) + \dfrac{2r^n}{n}vol(S^{n-1}(1))$. Das duas últimas desigualdades, temos:

$$cr \leq \frac{\frac{1}{n}\int_{\partial(D\times[-a,a])}\phi}{\frac{2a}{n}r^{n-1}volS^{n-1}(1)} \leq 1 + \frac{r}{an}.$$

Fazendo $a \to \infty$ concluímos que $cr \leq 1$ □

Os mesmos argumentos funcionam no caso de um retângulo de lados $2l_1, \ldots, 2l_n$ e a desigualdade resultante é

$$c \leq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{l_1} + \ldots + \frac{1}{l_n}\right).$$

Fazendo $n-k$ dos $l_j \to \infty$ concluímos que

**Proposição 4.14.** *Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $C^3$ definida sobre $D = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\} : |x_i| < l_i, 1 \leq i \leq k\}$. Se a curvatura média $H$ da hipersuperfície não-paramétrica de $\mathbb{R}^{n+1}$ definida por $F$ satisfaz $|H| \geq c > 0$ então*

$$c \leq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{l_1} + \ldots \frac{1}{l_k}\right).$$

Se $z = z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é de classe $C^2$ e está definida em um aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com $\partial\Omega$ suave e se as curvaturas média $H$ e escalar $S$ satisfazem

$$|H(x_1, \ldots, x_n)| \geq b > 0, \tag{4.16}$$

$$S(x_1, \ldots, x_n) \geq b > 0 \tag{4.17}$$

então,

$$n \cdot b \leq \frac{vol_{n-1}(\partial\Omega)}{vol(\Omega)}, \tag{4.18}$$

$$\sqrt{n(n-1)b} \leq \frac{vol_{n-1}(\partial\Omega)}{vol_n(\Omega)}. \tag{4.19}$$

Para uma demonstração, veja [9] e [10]. As desigualdades anteirores são conhecidas como desigualdades de Chern-Heinz para gráficos. Como corolário, $z : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tem curvatura média $H$ constante se e somente se $H = 0$ e tem curvatura escalar $S$ constante se e somente se $S = 0$. As desigualdades de Chern-Heinz podem ser estendidas para gráficos $G(f)$ de funções $f : M \to \mathbb{R}$:

**Teorema 4.15.** *Se $\Omega \subset M$ é um domínio compacto orientado e $n = \dim M$ então,*

$$n \cdot \inf{}_{\Omega} |H_{G(f)}| \leq \frac{vol_{n-1}(\partial\Omega)}{vol_n(\Omega)}$$

Para uma prova, veja [16].

No presente contexto, é natural pensarmos no gráfico de $z : \Omega \to \mathbb{R}$ como uma folha de uma folheação transversalmente orientável de codimensão 1 de $\Omega \times \mathbb{R}$ obtida pelas translações verticais do gráfico. As desigualdades anteriores dizem que para esta folheação particular de $\Omega \times \mathbb{R}$ o ínfimo das curvaturas médias das folhas de qualquer folheação transversalmente orientável de codimensão 1 e classe $C^2$ de $\Omega \times \mathbb{R}$ é limitada superiormente por $h(\Omega) = \inf{}_{\Omega} \left( \dfrac{vol_{n-1}(\partial\Omega)}{vol_n(\Omega)} \right)$.

O tom fundamental $\lambda^*$ de um conjunto aberto $\Omega \subset M$ de uma variedade Riemanniana $M$ é definida por

$$\lambda^*(\Omega) = \inf \left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla f|^2}{\int_\Omega f^2}, f \in H_0^1(\Omega)/\{0\} \right\}$$

onde $H_0^1$ é o completamento de $C_0^\infty(\Omega)$ com respeito à norma $||\phi||_\Omega^2 = \int_\Omega \phi^2 + \int_\Omega |\nabla\phi|^2$.

Em [1], Barbosa-Bessa-Montenegro, estenderam os resultados anteriores obtendo:

**Teorema 4.16.** *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de classe $C^2$ e codimensão 1 de um aberto conexo $\Omega$ de uma variedade Riemanniana $M$ de dimensão $n+1$. Então*

$$2\sqrt{\lambda^*(\Omega)} \geq n \cdot \inf{}_{F \in \mathcal{F}} \inf{}_{x \in F} |H^F(x)|$$

*onde $H^F$ denota a função curvatura média na folha $F$.*

**Teorema 4.17.** *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de classe $C^2$ e codimensão 1, transversalmente orientável, de uma variedade Riemanniana $M$ com curvatura de Ricci não negativa. Suponha que as folhas são hipersuperfícies completas com mesma curvatura média constante $H$. Então $H = 0$ e cada folha é estável. Se, além disso, uma folha de $F$ é compacta, então é totalmente geodésica e a curvatura de Ricci de $M$ na direção normal à $\mathcal{F}$ é zero.*

# Referências Bibliográficas


[1] J. L. M. Barbosa, G. P. Bessa, e J.F. Montenegro. *On Bernstein-Heinz-Chern-FLanders inequalities.* Math. Proc. Comb. Phil. Soc. (2008), 457-464.

[2] J. L. M. Barbosa, J. M. Gomes e A. M. Silveira. *Foliations of* 3*-dimensional Space Forms by Surfaces with Constant Mean Curvature.* Bol. Soc. Bras. Mat. **18** (1987), $1-12$

[3] J. L. M. Barbosa, K. Kenmotsu e G. Oshikiri. *Foliations by hypersurfaces with constant mean curvature.* Mathematische Zeitschrift. **207**(1991),97-108 .

[4] Bernstein. *Sur un théorème de géométrie et ses applications aux équations aux dérivées partielles du type elliptique.* Comm. de La Soc. Math. de Kharkov. **15** (1915-1917), $38-45$.

[5] E. Bombieri, E. de Giorgi e E. Giusti. *Minimal cones and the Bernstein problem.* Inv. Math. **82** (1968), 243-269.

[6] C. Camacho e A.L. Neto. *Teoria Geométrica das Folheações.* IMPA. Rio de Janeiro. (1979)

[7] M.P. do Carmo. *O Método do Referencial Móvel.* III Escola Latino-Americana de Matemática. IMPA, Rio de Janeiro, (1976).

[8] M.P. do Carmo. *Riemannian Geometry.* Boston: Birkhauser, (1993).

[9] S.S. Chern. *On the curvature of a piece of hypersurface in Euclidean space.* Abh. Math. Se Hamburg **29** (1965), 77-91.

[10] H. Flanders. *Remark on Mean curvature.* J. London Math. Soc. (2)**41** (1966), 364-366.

[11] T. Frankel. *Manifolds with positive curvature.* Pacific J. Math. **11** (1961), 165-174.

[12] W. Franz. *Topología general y algebraica.* Sleciones Cientificas, Madrid., Traduzido do Alemão: Topologie, I: Allegemeine topologie e II Algebraische topologie.

[13] S. Gallot, D. Hullin e J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Berli-Heidelbeg: Springer-Verlag, (1987).

[14] H. Gluck, *Can space be filled by geodesics, and if so, how?*, Preprint.

[15] G. Hector e U. Hirsch, *Introduction to the geometry of foliations.* Part B, Vieweg and Sohn, Braunschweig, (1983).

[16] I. M. C. Salavessa. *Graphs with parallel mean curvatura.* Proc. Amer. Math. Soc. **107** (1989).

[17] J. M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds.* Springer, 2002.

[18] D. L. Johnson e L. B. Whitt, *Totally goedesic foliations on 3-manifolds.* Proc. Amer. Math. Soc. **76** (1979) 355-357.

[19] S. Kobayashi e K. Nomizu. *Foudations of Differential Geometry.* vol I, Interscience Publishers, (1963).

[20] H. Lawson e H. Blaine Jr. *Foliations*, Bull. of the A.M.S. **80**(1974), 3, 369-418.

[21] G. Oshikiri. *A remark on Minimal Foliations.* Tohoku Math. J. **33**(1981), 133-137 .

[22] P. Petersen. *Riemannian Geometry.* Springer-Verlag, (2005).

[23] H. Rummler. *Quelques Notions Simples en Géométrie Riemannienne et Leurs Applications sur Feuilletages Compacts.* Math. Helv. **54**(1979), 224-239.