UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

DAVID CARNEIRO DE SOUZA

Superfícies Invariantes com Curvatura Média Constante no Grupo de Heisenberg.

FORTALEZA
2009

David Carneiro de Souza

Superfícies Invariantes com Curvatura Média Constante no Grupo de Heisenberg.

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Geometria Diferencial.
Orientador: Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira.

FORTALEZA
2009

O47h

Carneiro, David de Carneiro.
Superfícies Invariantes com Curvatura Média Constante no Grupo de Heisenberg.- David Carneiro de Souza. - Fortaleza: 2009.
57f.
Orientador: Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira
Dissertação(Mestrado)- Universidade Federal do Ceará. Departamento de Matemática, 2009.
1- Geometria Diferencial.
CDD 516.36

FOLHA DE APROVAÇÃO

Dedico este trabalho ao meu Senhor Jesus Cristo, pelo ensinamento do amor nas dificuldades. Aos meus pais Sr. Moacyr e Dona Edna, pelo total amor, apoio, investimento, orgulho e confiança em mim. Ao meu irmão do peito Demétrio pelas poucas, mas edificantes palavras de força. E a minha amada e eterna Neguinha Linda, por ser o meu porto seguro dado por Deus e principal motivo desta conquista.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos os meus amigos de graduação e mestrado. Em especial ao Jonatan Floriano, Sibério Albuquerque e Alisson Pessoa, resistentes aos quatro anos de graduação, pelas muitas horas de estudo diárias juntos, conversas jogadas fora, apoio mútuo em momentos difíceis, ajuda em minhas dificuldades nas dúvidas das disciplinas. A todos os outros amigos conquistados no decorrer dos anos de graduação e mestrado: José Wilker, Carpegianne, Darlan, Flávio, Jocel, Tiago Caula, Damião Júnior, Fabrício, Denize, Luíza, Samuel, Luíz Farias, Joserlan, Michel, Gleydson, Loester, Mário e Luiz Antônio.

À amável e super secretária Andréa Costa Dantas pela boa vontade constante em nos ajudar nos processos burocráticos e nos conselhos sobre a vida.

Ao meu querido e paciente professor Jorge Herbert pela orientãção de estudo desde a minha graduação. Aos professores Caminha, Abdênago e Levi pelo excelente nível de aula e, principalmente a cobrança excessiva, muitas vezes ríspida, pelo meu melhor. Ao professor Pacceli por mostrar o real valor do título conquistado.

Ao CNPq pelo apoio financeiro essencial desde a graduação.

Em especial a minha Neguinha linda. Pelo amor, compreensão, muitas noites e finais de semana "trocada"pelos livros de matemática, ao cólo nos momentos de angústia, por te ver feliz com a minha felicidade. Por ser o alicerce que Deus colocou em minha vida.

“Confie no SENHOR de todo o coração e não se apóie na sua própria inteligência. Lembre de Deus em tudo que fizer, e Ele lhe mostrará o caminho certo..”
(Provérbios 3:5-6)

Resumo

Neste trabalho vamos estudar as superfícies invariantes com curvatura média constante no grupo de Heisenberg. Este grupo será gerado por uma combinação de quatro movimentos rígidos, que definirão os movimentos de rotação e translação. O grupo de Heisenberg é formado pelas matrizes triangulares superiores com a diagonal principal tendo somente o número 1 como elemento e contida em $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$. Veremos que este grupo com a operação de multiplicação de matrizes é um grupo de Lie. Iremos estudar dois teoremas de classificação destas superfícies, que serão geradas pelas rotações e as translações nos elementos do grupo de Heisenberg.

Abstract

In this paper we study the invariant surfaces with constant mean curvature in the Heisenberg group.This group will generated by a combination of four rigid movements, which define the movements of rotation and translation. The group of Heisenberg is formed by the upper triangular matrices with main diagonal and only the number 1 and as a contained in $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$. We will see that this group with the operation of multiplication of matrices is a Lie group. We two theorems study the classification of these areas, which will be generated by rotations and translations in the group of elements Heisenberg.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A geometria diferencial tem estudado constantemente superfícies em espaços homogêneos. No caso deste trabalho, serão estudadas superfícies no espaço homogêneo de dimensão três, as chamadas geometrias tridimensionais.

Como caso especial, iremos estudar superfícies de curvatura média constante no grupo de Heisenberg. Este grupo de Heisenberg caracteriza-se por possuir quatro movimentos rígidos, que definirão os movimentos de rotações e translações. Iremos classificar superfícies de curvatura média constante no grupo de Heisenberg $\mathbb{H}_3$. O grupo de Heisenberg é formado pelas matrizes triangulares superiores com a diagonal principal tendo somente o número 1 como elemento e contida em $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$. Veremos que este grupo com a operação de multiplicação de matrizes é um grupo de Lie.

Nesse trabalho será dada uma generalização de [4] no seguinte sentido: enquanto em [4] definimos o grupo de Heisenberg $\mathbb{H}_3$ a partir da álgebra de Lie

$$\mathfrak{h}'_3 = \left\{ M = \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\},$$

neste trabalho construiremos uma família de grupos de Heisenberg, com relação ao parâmetro τ. Com isso, a álgebra de Lie usada será

$$\mathfrak{h}_3 = \left\{ M = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2\tau}\, x & z \\ 0 & 0 & \sqrt{2\tau}\, y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\},$$

e conseqüentemente toda a geometria que desenvolveremos ficará na dependencia de τ. Como caso particular do trabalho citado em [4], foi usado o valor de $\tau = \frac{1}{2}$.

A classificação das superfícies será dada como resultado principal de dois teoremas. São eles:

Teorema 1.1. *As superfícies helicoidais em $\mathbb{H}_3$ com curvatura média constante são classificadas em termos de H e k da seguinte forma:*

1. *Helicóides, incluindo planos horizontais $z =$ cte., no caso em que $H = 0$ e $k = 0$.*

2. *Superfícies tipo-catenóide, no caso em que $H = 0$ e $k \neq 0$.*

3. *Uma família de superfícies compactas difeomorfas a esfera, quando $H \neq 0$ e $k = 0$.*

4. *Cilindros retos, regrados por linhas de fluxo de ∂_z, e superfícies tipo-Delaunay, quando $H \neq 0$ e $k \neq 0$.*

Teorema 1.2. *As superfícies invariantes por translação com curvatura média constante H em $\mathbb{H}_3$ são classificadas do seguinte modo:*
1. As superfícies mímimas ($H = 0$) são planos verticais ou gráficos descritos pelas funções

$$z = z(x,y) = \tau xy - \frac{c}{2\tau}\left(\tau\sqrt{1+4\tau^2y^2}\,y + \frac{1}{2}\ln|\sqrt{1+4\tau^2y^2}+y|\right),$$

onde $c \in \mathbb{R}$.
2. As superfícies com curvatura média constante $H \neq 0$ são gráficos das funções

$$z(x,y) = \tau xy \pm \frac{\tau}{H}\left(\sqrt{1-y^2H^2}\sqrt{\frac{1}{4\tau^2}+y^2} + \frac{1+\frac{H^2}{4\tau^2}}{H}\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{1-y^2H^2}}{\sqrt{1+\frac{H^2}{4\tau^2}}}\right),$$

onde $-\frac{1}{H} \leq y \leq \frac{1}{H}$, O primeiro se refere a superfícies invariantes por rotações e o segundo a superfícies invariantes por translações. Algumas definições e resultados sobre grupos de Lie como álgebra de Lie, colchete de Lie, campos invariantes à esquerda e à direita, campos de Killing e exponencial de matrizes (em $\mathbb{H}_3$) são abordados nas preliminares.

As superfícies invariantes são formadas a partir de rotações e translações de elementos do grupo de Heisenberg $\mathbb{H}_3$. As superfícies que são invariantes por movimentos de translação e rotação irão definir, através do quociente destes por grupos fechados, o chamado espaço das órbitas. Neste caso, a parte regular do espaço das órbitas $\mathcal{B} = \mathbb{H}_3/G$ é uma variedade de dimensão dois e a projeção de uma superfície $G-$invariante $\sum$ em $\mathcal{B}$ é uma curva $\gamma = \sum/G \subset \mathcal{B}$. Denotaremos por u e v as duas funções $G-$invariantes que parametrizam $\mathcal{B}$, que serão obtidas por uma relação de equivalência $\sim$.

Achamos uma relação entre a curvatura média H e a curvatura geodésica κ_g e, juntamente com as derivadas das funções invariantes u e v montaremos um sistema de EDO's, satisfeito pela curva γ, geratriz da superfície helicoidal.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Grupos de Lie

Definição 1. *Um grupo de Lie é uma variedade diferenciável G dotada de uma estrutura de grupo, definida por uma operação $*$, de modo que a aplicação $(g,h) \in G \times G \mapsto g * h^{-1} \in G$ é diferenciável, onde h^{-1} denota o elemento inverso de h.*

Decorre imediatamente da definição que, num grupo de Lie, as aplicações

$$\begin{array}{rccc} L_x: & G & \to & G \\ & x & \mapsto & x \cdot y \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rccc} R_x: & G & \to & G \\ & x & \mapsto & y \cdot x \end{array}$$

são difeormorfismos, para cada $x \in G$. Estas aplicações são chamadas respectivamente **translação à esquerda** por x e **translação à direita** por x. Indicaremos por e o elemento identidade de G. Abaixo, temos alguns exemplos de grupos de Lie.

Exemplo 1. *O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais com a estrutura da soma e a estrutura diferenciável usual.*

Exemplo 2. *Seja $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$, onde $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos. Consideremos em S^1 a estrutura de grupo multiplicativo: se α e $\beta \in S^1$, então $\alpha \cdot \beta$ é o produto dos números complexos α e β. Como as aplicações*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ (x,y) & \mapsto & x \cdot y \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} - \{0\} & \to & \mathbb{C} - \{0\} \\ x & \mapsto & x^{-1} \end{array}$$

são diferenciáveis e suas restrições a S^1 têm imagem em S^1, S^1 é um grupo de Lie.

Exemplo 3. *O produto $G \times H$ de dois grupos de Lie G e H é um grupo de Lie com a estrutura de variedade produto e com a estrutura de produto direto de grupos:*

$$(g_1, h_1) \odot (g_2, h_2) = (g_1 \cdot g_2, h_1 \cdot h_2),$$

quaisquer que sejam g_1, g_2 em G e h_1, h_2 em H. Dessa forma, podemos generalizar o exemplo 1 e 2. Consequentemente, para o primeiro exemplo, concluíremos que o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ é um grupo de Lie. De modo análogo, o toro $n-$dimensional $T^n = S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1$ também é um grupo de Lie.

O próximo exemplo será interessante do ponto de vista dessa dissertação. Ele nos dará uma certa base para que no capítulo 1 se possa definir o espaço de Heisenberg. Para isso, será necessária a operação de exponenciação de uma matriz em $GL(n, \mathbb{R})$.

Exemplo 4. *Consideramemos neste exemplo, K como um dos corpos $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Seja*

$$GL(n, K) = \{A \in M_{n \times n}; \det A \neq 0\}.$$

Então os subconjuntos

$$GL(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$$

é um aberto e um grupo de Lie com a operação de multiplicação de matrizes. Os seguintes subconjuntos de $GL(n, \mathbb{R})$ são de uso frequente:

$$O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}); A \cdot A^t = I\},$$

onde A^t indica a transposta de A. $O(n)$ é chamado de grupo ortogonal.

$$U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}); A \cdot A^* = I\},$$

onde A^* indica a adjunta de A. $U(n)$ é chamado de grupo unitário. Em $GL(n, \mathbb{R})$, o elemento e é a matriz identidade

$$e = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Para $\mathbb{R}$ a estrutura de variedade diferenciável é a usual, como citamos no exemplo 1. Um grupo linear com identidade é o conjunto aberto

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{X; \det X \neq 0\}$$

do espaço das matrizes $n \times n$, denotado por $\mathbf{M}_{n\times n}$. Mas $\mathbf{M}_{n\times n}$ é isomorfo a $\mathbb{R}^{n^2}$, onde identificaremos cada coordenada com as entradas das matrizes x_{ij} de X. Assim com essa identificação, temos que a dimensão de $\mathbf{M}_{n\times n}$ é de ordem n^2. Assim, $\mathbf{M}_{n\times n}$ é um grupo de Lie com a operação de multiplicação de matrizes.

Esses subgrupos citados são subvariedades de $(GL(n, K))$. Por exemplo, tomando-se $\mathbf{M}_{n\times n}$ e $\mathfrak{S}_n$ o subconjunto das matrizes reais simétricas, isto é, $A = A^t$. Definamos $f : \mathbf{M}_{n\times n} \to \mathfrak{S}_n$ por $f(A) = A \cdot A^t$. A função f está bem definida, pois $(A \cdot A^t)^t = (A^t)^t \cdot A^t = A \cdot A^t$. Observemos que $f^{-1}(I) = O(n)$; então para ver que $O(n)$ é uma subvariedade de $GL(n, \mathbb{R})$, basta mostrar que I é um valor regular de f. Com efeito, se $X, H \in M_{n\times n} \cong \mathbb{R}^2$, teremos

$$\begin{aligned} df_X(H) &= \lim_{r\to 0} \frac{f(X + rH) - f(X)}{r} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{(X + rH)(X + rH)^t - XX^t}{r} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{rXH^t + rHX^t + r^2 HH^t}{r} = XH^t + HX^t. \end{aligned}$$

Dados $X \in f^{-1}(I)$ e $S \in \mathfrak{S}_n$, escolhamos $Y = \frac{SX}{2} \in M(n)$. Pelo visto acima,

$$df_X(Y) = X(\frac{SX}{2})^t + (\frac{SX}{2})X^t = \frac{XX^tS^t}{2} + \frac{SXX^t}{2} = \frac{S^t}{2} + \frac{S}{2} = S.$$

Decorre daí que df_X é sobrejetiva para $X \in f^{-1}(I)$, isto é, I é valor regular de f o que prova a afirmação.

Exemplo 5. $S^3 = \{p \in \mathbb{R}^4; |p| = 1\}$ *é um grupo de Lie. Para ver isto, introduzimos os quatérnios* Q*, como sendo o conjunto dos* $q = a+bi+cj+dk$*, onde* a, b, c *e* d *estão em* $\mathbb{R}$ *e* i, j *e* k *se multiplicam segundo a tabela*

$\cdot$	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1

Definimos agora o produto de dois quatérnios q *e* $q' = a' + b'i + c'j + d'k$ *de maneira trivial. Com isto obtemos uma álgebra não comutativa. Definimos ainda a norma* $|\ |$ *e o conjugado de um quatérnio pelas relações:* $|q|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ *e* $\overline{q} = a - bi - cj - dk$*. Temos que* $Q \cong \mathbb{R}^4$ *e* $S^3 = \{q \in Q; |q| = 1\}$*. Consideramos em* S^3 *a estrutura de grupo induzida por* Q*, e temos que* S^3 *é um grupo de Lie.*

Definição 2. *Dizemos que um campo* X *de vetores tangentes a um grupo de Lie* G *é invariante à esquerda quando* $X_{xy} = dL_x \cdot X_y$*, quaisquer que sejam* $x, y \in G$*, onde* X_x *indica o valor do campo* X *no ponto* x *de* G*.*

O conjunto dos campos invariantes à esquerda de um grupo de Lie é denotado por $\mathfrak{g}$. Um campo invariante à esquerda fica completamente determinado quando se conhece X_e, pois $X_x = dL_x \cdot X_e$.

A definição de álgebra de Lie é um fato importante para a composição das preliminares dessa dissertação.

Definição 3. *Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial* $\mathfrak{g}$*, com uma operação bilinear* $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$*, satisfazendo*

1. $[X, Y] = -[Y, X]$ (anti-comutatividade)
2. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (identidade de Jacobi),

para todo X, Y e Z pertencentes a $\mathfrak{g}$.
Logo abaixo, temos alguns exemplos de álgebras de Lie:

Exemplo 6. $a)$ *O conjunto* $gl(n, \mathbb{R})$ *de todas as matrizes* $n \times n$ *reais é uma álgebra de Lie relativamente a operação*

$$[A, B] = AB - BA,$$

onde AB *indica o produto usual de matrizes.*
$b)$ *Seja* M *uma variedade diferenciável e seja* $\mathfrak{X}(M)$ *o espaço vetorial dos campos* C^∞ *tangentes a* M*. Para* $f : M \to \mathbb{R}$ *de classe* C^∞ *e para casa* $X,\ Y\ \in \mathfrak{X}(M)$*, definimos* $[X, Y]$ *como o campo*

$$[X, Y]f = XY(f) - YX(f). \tag{2.1}$$

Para o estudo dos espaços de Heisenberg, precisamos do exemplo clássico, já citado anteriormente, dos grupos de Lie que são encontrados no espaço vetorial $M_n(\mathbb{R})$ das matrizes $n \times n$ reais, como subgrupos do grupo $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ das matrizes invertíveis. A álgebra de Lie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ é isomorfa a $M_n(\mathbb{R})$ com o colchete usual de matrizes

$$[M, N] = MN - NM.$$

Define-se a *exponencial de matrizes* segundo a fórmula costumeira

$$\exp M = I + M + \frac{1}{2}M^2 + \ldots + \frac{1}{k!}M^k + \ldots .$$

A exponencial de matriz está realmente bem definida, pois ao consideramos a exponencial de um número real x qualquer, teremos:

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots . \tag{2.2}$$

E esta última expressão é o resultado da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ que é convergente, fato de fácil constatação com o uso do teste da razão. Assim, tomando-se uma norma $|\ |$ apropriada para matrizes, teremos

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X^n}{n!} \right| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|X^n|}{n!} \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|X|^n}{n!}$$

e esta última é convergente por (2.2).

Neste caso, temos $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Uma fórmula a ser utilizada mais adiante, relacionando o colchete de Lie na álgebra e o produto no grupo, é a exponencial, aplicadas nas matrizes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, definida por

$$\exp tM \ \exp tN = \exp\big(t(M+N) + \frac{t^2}{2}[M,N] + O(t^3)\big), \tag{2.3}$$

onde os termos de terceira ordem dependem de aplicações repetidas do colchete de Lie. A teoria clássica de grupos de Lie é exposta com detalhes nas referências [5] e [7] e [9].

Definição 4. *Uma métrica em G é invariante à esquerda (resp. direita) se as translações à esquerda (resp. direita) são isometrias.*

Uma tal métrica pode ser construída fixando-se um produto interno em T_eG. Dada, então, uma base ortonormal $e_1, \dots, e_n$ em T_eG e os campos invariantes à esquerda $E_1, \dots, E_n$ correspondentes, definimos a métrica em G declarando os vetores $E_i|_g$ ortonormais em T_gG.

Alguns resultados sobre conexão devem ser mencionados. Seja $(G, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda. Lembramos que a conexão riemanniana associada ∇ é determinada pela condição de simetria

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \tag{2.4}$$

e pela identidade

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle = X\langle Y, Z\rangle, \tag{2.5}$$

quaisquer que sejam os campos X, Y e Z. Permutando X, Y e Z nas relações (2.4) e (2.5), obtemos a conhecida *fórmula de Koszul*

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle &= \langle [X, Y], Z\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [Z, X], Y\rangle \\ &\quad + X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \end{aligned} \tag{2.6}$$

O produto interno de campos invariantes à esquerda é constante, pois

$$\langle X_x, Y_x\rangle = \langle (dL_x)_e X_e, (dL_x)_e Y_e\rangle = \langle X_e, Y_e\rangle. \tag{2.7}$$

Conseqüentemente a fórmula da conexão riemanniana se reduz a

$$2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \langle [X, Y], Z\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [Z, X], Y\rangle. \tag{2.8}$$

Utilizando a fórmula de Koszul, deduzimos a seguinte fórmula para a conexão riemanniana ∇ associada a uma métrica invariante à esquerda $\langle\cdot,\cdot\rangle$ em G:

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}(\,[X, Y] - \mathrm{ad}_X^* Y - \mathrm{ad}_Y^* X), \tag{2.9}$$

dados campos invariantes à esquerda $X, Y \in \mathfrak{g}$. Nesta fórmula

$$\langle \mathrm{ad}_X^* Y, Z\rangle = \langle [X, Z], Y\rangle, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Também iremos usar o conceito de *curvatura* R de uma variedade Riemanniana M.

Definição 5. *A curvatura R é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z,$$

onde $Z \in \mathfrak{X}(M)$ e ∇ é a conexão Riemanniana da variedade M.

Um outro conceito importante a ser utilizado no decorrer dessa dissertação é o de *submersão riemanniana.*

Definição 6. *Uma aplicação diferenciável $f : M^{n+k} \to N^n$ é uma submersão riemanniana se f é sobrejetiva e para todo $p \in M$ vale $df_p : T_pM \to T_{f(p)N}$ tem posto máximo, isto é, a diferencial tem posto n.*

Neste caso, para todo ponto $p \in N$, a *fibra* $f^{-1}(p) = F(p)$ é uma subvariedade de M e um vetor tangente de M, tangente a algum $F_p, p \in N$ é chamado um *vetor vertical* da submersão.

Seja M uma variedade riemanniana com uma conexão ∇. Dado um campo diferenciável Y em M, denotamos por ∇Y a aplicação que associa a cada campo X o campo $\nabla_X Y$.

Definição 7. *Dizemos que Y é um* **campo de Killing** *se a aplicação ∇Y é anti-simétrica, isto é,*

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle = 0, \tag{2.10}$$

quaisquer que sejam X e Z.

Um campo Y de M é chamado **isometria infinitesimal** se o grupo local a um parâmetro de difeomorfismos locais, gerados por Y em uma vizinhança de cada ponto de M, são isometrias locais.

Proposição 1. *Um campo é de Killing se, e somente se, é uma isometria infinitesimal.*

Demonstração. A prova desta proposição encontra-se em [11].
Observação. Em um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda, todo campo invariante à direita Y é de Killing. De fato, os difeomorfismos locais ϕ_t são da forma

$$\phi_t : x \mapsto (\exp tY) \cdot x, \tag{2.11}$$

e portanto são isometrias globais. As **variedades homogêneas** também serão abordadas nesta dissertação. Mas antes de defini-las, precisamos de outras definições com respeito a subgrupos de Lie.

Definição 8. *Se G e H são grupos de Lie e se $\varphi : G \to H$ é de classe C^∞ e também homomorfismo de grupos, chamamos φ de* **homomorfismo de Lie;** *se φ é um difeomorfismo e um isomorfismo de grupos, então φ é chamado* **isomorfismo de Lie;** *se $\varphi : V \subset G \to H$ é diferenciável, onde V é uma vizinhança de G tal que x, y com $x \cdot y \in V$, implica que $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$, então φ é chamado* **homomorfismo local de Lie;** *analogamente, definimos* **isomorfismo local de Lie.**

Definição 9. *Um par (H, φ) é chamado um* **subgrupo de Lie** *do grupo de Lie G se:*

a) H é um grupo de Lie;

b) $\varphi : H \to G$ é uma imersão $1 - 1$ e é um homomorfismo.

Usando essas definições anteriores, temos agora as condições para a seguinte

Definição 10. *Chamamos de espaços homogêneos os espaços quocientes de grupos de Lie por subgrupos fechados, munidos com a topologia quociente.*

Também se fará necessário o uso do seguinte

Teorema 2.1. *Seja H um subgrupo fechado de um grupo de Lie G e seja*

$$G/H = \{xH; x \in G\}.$$

Seja ainda

$$\begin{array}{rccc} \pi : & G & \to & G/H \\ & x & \mapsto & xH \end{array}$$

a aplicação quociente. Então existe uma única estrutura de variedade diferenciável em G/H satisfazendo:

a) π é diferenciável;

b) Para todo ponto xH de G/H existe uma vizinhança de xH em G/H e uma aplicação diferenciável $\tau : W \to G$ tal que $\pi \circ \tau = id_W$. Uma τ aplicação é chamada uma **secção local de aplicação π.**

Demonstração. A demonstração encontra-se em [10].
Assim, usando o teorema anterior, podemos dar a seguinte

Definição 11. *Variedades da forma G/H, onde G é um grupo de Lie, $H \subset H$ é um subgrupo fechado de Lie, e a estrutura diferenciável dada pelo teorema 2.1 são chamadas de* **variedades homogêneas.**

Nos capítulos 1 e 2, falaremos sobre métrica e espaço orbitais. Para isto precisamos de algumas definições e resultados que envolvem as variedades homogêneas.

Definição 12. *Dizemos que um grupo de Lie age em uma variedade M, se existe uma aplicação diferenciável*

$$\eta : G \times M \to M$$

indicada por $\eta(x, p) = xp$, tal que

a) $ep = p$;

b) $(xy)p = x(yp)$.

Neste caso, η é chamada ação de G em M.

Dada uma ação η de G em M, definimos a **órbita** de um ponto $p \in M$ como sendo o conjunto

$$Gp = \{xp; x \in G\}.$$

Em outras palavras, a órbita de um ponto $p \in M$ é a imagem da aplicação

$$\begin{array}{ccc} G \times \{p\} & \longrightarrow & M \\ (x,p) & \longmapsto & \eta(x,p) \end{array}.$$

Dizemos que a ação η é *transitiva* ou que G *age transitivamente* em M através de η se $Gp = M$, para todo $p \in M$, isto é, para todo $p, q \in M$, existe $x \in G$ tal que $xp = q$. Para todo $p_0 \in M$, definimos o *grupo de isotropia do ponto* p_0

$$G_{p_0} = \{x \in G; xp_0 = p_0\}.$$

Sendo G_{p_0} um subgrupo fechado de G, G_{p_0} é um subgrupo de Lie. Se $g \cdot x = y$, então o subgrupo de isotropia de y é conjugado ao de x, ou seja, $G_y = g \cdot G_x \cdot g^{-1}$. Um subgrupo de transformações age *livremente* em M se todos os subgrupos de isotropia são triviais, $G_x = e$ para cada $x \in M$. Isto significa que, para $e \neq g \in G$, temos $g \cdot x \neq x$ para cada $x \in M$. A ação é *localmente livre* se isto vale para todos os $g \neq e$ em uma vizinhança dab identidade e.

2.2 Espaço de Heisenberg

Nesta seção, iremos expor algumas noções iniciais da geometria de espaços de Heisenberg. Faremos uso dos conceitos e resultados expostos na seção anterior. Consideramos, na álgebra de Lie das matrizes triangulares superiores em $M_3(\mathbb{R})$, matrizes M e N da forma

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2\tau}\, x & z \\ 0 & 0 & \sqrt{2\tau}\, y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2\tau}\, x' & z' \\ 0 & 0 & \sqrt{2\tau}\, y' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde τ é um parâmetro real. Sendo assim, temos

$$MN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\tau\, xy' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad NM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\tau\, x'y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daí, resulta que o colchete de Lie é dado por

$$[M, N] = MN - NM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\tau xy' - 2\tau x'y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Além disso, calcula-se

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\tau\, xy \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deste modo, percebemos que $M^3 = M^2M = 0$, onde 0 é a matriz nula de ordem 3×3. Logo, exponenciando a matriz M, obtemos

$$A \equiv \exp M = I + M + \frac{1}{2}M^2 + \ldots = I + M + \frac{1}{2}M^2.$$

Portanto

$$A = \exp M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2\tau}\, x & z \\ 0 & 0 & \sqrt{2\tau}\, y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tau\, xy \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deste modo, deduzimos que

$$A = \exp M = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2\tau}\, x & z + \tau\, xy \\ 0 & 1 & \sqrt{2\tau}\, y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, exponenciando a álgebra de Lie

$$\mathfrak{h}_3 = \left\{ M = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2\tau}\, x & z \\ 0 & 0 & \sqrt{2\tau}\, y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\},$$

geramos o grupo de Heisenberg das matrizes em $GL(3, \mathbb{R})$:

$$\mathbb{H}_3 = \left\{ A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2\tau}\, x & z + \tau\, xy \\ 0 & 1 & \sqrt{2\tau}\, y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

A matriz $A = \exp M$ em $\mathbb{H}_3$, onde M é a matriz em $\mathfrak{h}_3$ dada por

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2\tau}\, x & z \\ 0 & 0 & \sqrt{2\tau}\, y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

é representada pelas coordenadas $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, denominadas *coordenadas exponenciais* de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2\tau}\, x & z + \tau\, xy \\ 0 & 1 & \sqrt{2\tau}\, y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O uso destas coordenadas permite explicitar a estrutura de grupo em $\mathbb{H}_3$. O produto em $\mathbb{H}_3$ é obtido por restrição do produto usual de matrizes em $M_3(\mathbb{R})$. Fixando

$$A = \exp M$$

e

$$B = \exp N,$$

calculamos

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2\tau}\, x & z + \tau\, xy \\ 0 & 1 & \sqrt{2\tau}\, y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2\tau}\, x' & z' + \tau\, x'y' \\ 0 & 1 & \sqrt{2\tau}\, y' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2\tau}x + \sqrt{2\tau}x' & z + z' + 2\tau xy' + \tau xy + \tau x'y' \\ 0 & 1 & \sqrt{2\tau}y + \sqrt{2\tau}y' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por outro lado, podemos calcular

$$\begin{aligned} AB &= \exp M \cdot \exp N \\ &= \exp\big(M + N + \frac{1}{2}[M, N]\big). \end{aligned}$$

Assim,

$$M + N + \frac{1}{2}[M, N] = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2\tau}x + \sqrt{2\tau}x' & z + z' + \tau xy' - \tau x'y \\ 0 & 0 & \sqrt{2\tau}y + \sqrt{2\tau}y' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é a matriz em $\mathfrak{h}_3$ cuja exponencial resulta em $AB = \exp M \exp N$. Portanto, se (x, y, z) e (x', y', z') são, respectivamente, as coordenadas exponenciais de A e B, então as coordenadas exponencias de AB são

$$(x + x', y + y', z + z' + \tau xy' - \tau x'y).$$

De fato, se escrevermos AB na forma

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2\tau}x + \sqrt{2\tau}x' & Z + \tau(x + x')(y + y') \\ 0 & 1 & \sqrt{2\tau}y + \sqrt{2\tau}y' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

para algum Z, devemos ter

$$Z + \tau(x + x')(y + y') = z + z' + 2\tau xy' + \tau xy + \tau x'y'$$

ou seja,

$$\begin{aligned} Z &= z + z' + 2\tau xy' + \tau xy + \tau x'y' - \tau(xy + x'y' + xy' + x'y) \\ &= z + z' + \tau xy' - \tau x'y. \end{aligned}$$

Assim, dadas as matrizes A e B, representadas em coordenadas exponenciais por

$$A \mapsto (x, y, z)$$

e

$$B \mapsto (x', y', z'),$$

o produto de matrizes

$$(A, B) \mapsto AB$$

é representado nestas mesmas coordenadas por

$$(x, y, z) * (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + \tau x y' - \tau x' y). \tag{2.12}$$

2.2.1 Geometria do Espaço de Heisenberg

Na álgebra de Lie $\mathfrak{h}_3$, destacamos os vetores tangentes

$$e_1 = \partial_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_2 = \partial_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$e_3 = \partial_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observemos que $[e_1, e_2] = e_3$, sendo nulas as demais relações. Deduzimos igualmente que, dadas matrizes $M = \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & x' & z' \\ 0 & 0 & y' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $P = \begin{pmatrix} 0 & x'' & z'' \\ 0 & 0 & y'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ quaisquer em $\mathfrak{h}_3$, obtemos

$$\big[[M, N], P\big] = \left[\begin{pmatrix} 0 & & xy' - x'y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & x'' & z'' \\ 0 & 0 & y'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = 0.$$

Assim
$$[\mathfrak{h}_3, \mathfrak{h}_3] = \mathbb{R} \cdot e_3 \equiv \mathfrak{h}$$
e
$$[[\mathfrak{h}_3, \mathfrak{h}_3], \mathfrak{h}_3] = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}_3] = \{0\}.$$
Assim, a álgebra de Lie é nilpotente a dois passos, com centro dado por $\mathfrak{h}$.

Em seguida, determinamos os campos invariantes à esquerda associados aos vetores e_1, e_2, e_3. O subgrupo a um parâmetro gerado por e_1 é a curva passando pela identidade com velocidade e_1, dada pela exponencial
$$\exp(te_1) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Em coordenadas exponenciais, esta curva corresponde a $t \mapsto (t, 0, 0)$. Denotamos por E_1 o campo invariante à esquerda gerado por e_1. A curva integral do campo E_1 passando pelo ponto $A \in \mathbb{H}_3$ com coordenadas (x, y, z) é dada por
$$L_A(\exp te_1) = A(\exp te_1)$$
Em coordenadas exponenciais, temos a curva
$$(x, y, z) * (t, 0, 0) = (x + t, y, z - \tau yt).$$
Derivando em $t = 0$, temos o campo E_1 em $A = A(x, y, z)$:
$$\begin{aligned} E_1|_{(x,y,z)} &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(x + t, y, t - \tau ty) \\ &= \partial_x - \tau y \partial_z. \end{aligned}$$
Da mesma forma, dado o vetor tangente e_2 na álgebra de Lie $\mathfrak{h}_3$, definimos a curva
$$\exp(te_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
ou, em coordenadas exponenciais, $t \mapsto (0, t, 0)$. Daí, a curva integral de E_2 passando por $A = A(x, y, z)$ é
$$L_A(\exp te_2) = A(\exp te_2).$$

Em coordenadas exponenciais, esta curva integral é dada por

$$(x,y,z)*(0,t,0)=(x,y+t,z+\tau xt).$$

Calculando sua derivada em $t=0$, temos

$$\begin{array}{rcl} E_2|_{(x,y,z)} & = & \dfrac{d}{dt}|_{t=0}(x,y+t,z+\tau xt) \\ & = & \partial_y+\tau x\partial_z. \end{array}$$

Finalmente, dado o vetor tangente e_3, definimos a curva

$$\exp(te_3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A curva integral de E_3 passando por $A=A(x,y,z)$ é dada por

$$A\exp(te_3)=L_A(\exp te_3).$$

Em coordenadas exponenciais,

$$(x,y,z)*(0,0,t)=(x,y,z+t)$$

Daí, derivando esta curva em $t=0$, obtemos

$$E_3|_{(x,y,z)}=\partial_z.$$

Assim, os campos invariantes à esquerda gerados por

$$e_1=\partial_x, e_2=\partial_y, e_3=\partial_z$$

na álgebra de lie são, respectivamente,

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} E_1 & = & \partial_x & - & \tau y\partial_z \\ E_2 & = & \partial_y & + & \tau x\partial_z \\ E_3 & = & \partial_z & & \end{array} \right.$$

Calculando os colchetes de Lie, temos por exemplo

$$\begin{array}{rcl} [E_1,E_2] & = & [\partial_x-\tau y\partial_z, \partial_y+\tau x\partial_z] \\ & = & 2\tau\partial_z=2\tau E_3, \end{array}$$

as demais relações sendo identicamente nulas.

A métrica invariante à esquerda, definida tomando-se os campos E_1, E_2, E_3 como ortonormais, é calculada em termos de coordenadas exponenciais da maneira a seguir. Inicialmente, escrevemos

$$\begin{cases} \partial_z & = & E_3 \\ \partial_x & = & E_1 + \tau y E_3 \\ \partial_y & = & E_2 - \tau x E_3 \end{cases}$$

Assim, obtemos as componentes da métrica em termos de coordenadas exponenciais:

$$\begin{array}{rcl} \langle \partial_x, \partial_x \rangle & = & 1 + \tau^2 y^2 \\ \langle \partial_y, \partial_y \rangle & = & 1 + \tau^2 x^2 \\ \langle \partial_z, \partial_z \rangle & = & 1 \\ \langle \partial_x, \partial_y \rangle & = & -\tau^2 xy \\ \langle \partial_x, \partial_z \rangle & = & \tau y \\ \langle \partial_y, \partial_z \rangle & = & -\tau x. \end{array}$$

Assim, reunidos estes componentes, obtém-se

$$\begin{aligned} ds^2 &= (1 + \tau^2 y^2) dx^2 + (1 + \tau^2 x^2) dy^2 + dz^2 - 2\tau^2 xy dx dy + 2\tau y dx dz \\ &\quad -2\tau x dy dz \\ &= dx^2 + dy^2 + (\tau y dx - \tau x dy)\tau y dx + (\tau x dy - \tau y dx)\tau x dy + 2\tau y dx dz \\ &\quad -2\tau x dy dz + dz^2 \\ &= dx^2 + dy^2 + (\tau y dx - \tau x dy)(\tau y dx - \tau x dy) + 2(\tau y dx - \tau x dy) dz + dz^2 \\ &= dx^2 + dy^2 + (\tau y dx - \tau x dy + dz)^2. \end{aligned}$$

Logo, a métrica invariante à esquerda que fixamos em $\mathbb{H}_3$ é dada por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + (\tau y dx - \tau x dy + dz)^2.$$

Determinamos, agora, isometrias em $\mathbb{H}_3$ e os campos de Killing correspondentes. Obviamente, translações à esquerda são isometrias, uma vez que a métrica é invariante à esquerda. A partir de (2.12), escrevemos

$$(a, b, c) * (x, y, z) = (a + x, b + y, c + z + \tau a y - \tau b x).$$

Em particular, dada a translação à esquerda

$$\begin{aligned} L_{(a,0,0)}(x,y,z) = R_{(x,y,z)}(a,0,0) &= (a,0,0) * (x,y,z) \\ &= (a+x, y, z+\tau ay), \end{aligned}$$

calculamos

$$\begin{aligned} \partial_x + \tau y \partial_z &= \frac{d}{da}|_{a=0} L_{(a,0,0)}(x,y,z) \\ &= \frac{d}{da}|_{a=0} R_{(x,y,z)}(a,0,0) \\ &= dR_{(x,y,z)} \cdot \frac{d}{da}|_{a=0}(a,0,0) \\ &= dR_{(x,y,z)} \cdot \frac{d}{da}|_{a=0}(\exp ae_1) \\ &= dR_{x,y,z} \cdot e_1, \end{aligned}$$

a expressão do campo invariante à direita gerado por e_1. Da mesma forma, escrevemos

$$\begin{aligned} L_{(0,b,0)}(x,y,z) = R_{(x,y,z)}(0,b,0) &= (0,b,0) * (x,y,z) \\ &= (x, b+y, z-\tau xb), \end{aligned}$$

obtendo

$$\begin{aligned} \partial_y - \tau x \partial z &= \frac{d}{db}|_{b=0} L_{(0,b,0)}(x,y,z) \\ &= \frac{d}{db}|_{b=0} R_{(x,y,z)}(0,b,0) \\ &= dR_{(x,y,z)} \cdot \frac{d}{db}|_{b=0}(0,b,0) \\ &= dR_{(x,y,z)} \cdot \frac{d}{db}|_{b=0}(\exp ce_2) \\ &= dR_{x,y,z} \cdot e_2, \end{aligned}$$

o campo invariante à direita gerado por e_2. Finalmente, definimos

$$\begin{aligned} L_{(0,0,c)}(x,y,z) = R_{(x,y,z)}(0,0,c) &= (0,0,c) * (x,y,z) \\ &= (x, y, z+c), \end{aligned}$$

cuja diferencial resulta no campo invariante à esquerda gerado por e_3:

$$\begin{aligned}
\partial_z = \frac{d}{dc}(x,y,z+c) &= \frac{d}{dc}|_{c=0} L_{(0,0,c)}(x,y,z) \\
&= \frac{d}{dc}|_{c=0} R_{(x,y,z)}(0,0,c) \\
&= dR_{(x,y,z)} \cdot \frac{d}{dc}|_{c=0}(0,0,c) \\
&= dR_{(x,y,z)} \cdot \frac{d}{dc}|_{c=0}(\exp ce_3) \\
&= dR_{x,y,z} \cdot e_3.
\end{aligned}$$

Assim, uma vez que estes campos invariantes à direita correspondem a diferenciais de translações à esquerda, definem campos de Killing. A expressão final destes campos de Killing invariantes à direita é:

$$\begin{cases} F_1 &= \partial_x + \tau y \partial_z \\ F_2 &= \partial_y - \tau x \partial_z \\ F_3 &= \partial_z \end{cases}$$

Finalmente, verificamos que as rotações geradas pelo campo

$$F_4 = -y\partial_x + x\partial_y$$

também são isometrias.

A existência de isometrias por rotação motiva a definição de coordenadas rotacionalmente invariantes em $\mathbb{H}_3$, as *coordenadas cilíndricas*, dadas na formulação usual

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z \end{cases}$$

A métrica em termos destas coordenadas é calculada da seguinte forma

$$\begin{aligned}
ds^2 &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + [\tau r \mathrm{sen}\theta(\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta) \\
&\quad -\tau r\cos\theta(\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta) + dz]^2 \\
&= dr^2 + r^2 d\theta^2 + [-\tau r^2 d\theta + dz]^2 \\
&= dr^2 + (r^2 + \tau^2 r^4) d\theta^2 - r^2 d\theta dz + dz^2.
\end{aligned}$$

Organizando as parcelas, obtemos a expressão da métrica em coordenadas cilíndricas

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + (\tau r^2 d\theta - dz)^2.$$

Alternativamente, escrevemos

$$ds^2 = dr^2 + (r^2 + \tau^2 r^4)d\theta^2 - r^2 d\theta dz + dz^2.$$

A partir da determinação do colchete de Lie calculada acima, utilizando a fórmula de Koszul enunciada na seção anterior, deduzimos que a conexão riemanniana em $\mathbb{H}_3$ é dada por

$$\begin{array}{ll} \nabla_{E_1} E_2 = \tau E_3 & \nabla_{E_1} E_3 = -\tau E_2 \\ \nabla_{E_2} E_3 = \tau E_1 & \nabla_{E_3} E_3 = 0. \end{array}$$

De fato, usando a fórmula de Koszul deduzida em (2.8), teremos

$$\langle \nabla_{E_1} E_2, X \rangle = \frac{1}{2}(\langle [E_1, E_2], X \rangle - \langle [E_1, X], E_2 \rangle - \langle [E_2, X], E_1 \rangle) \qquad (2.13)$$

O campo X é dado por uma combinação linear dos campos ortonormais E_1, E_2 e E_3. E somente para $X = E_3$ temos componente de $\langle \nabla_{E_1} E_2, X \rangle$, sendo

$$\langle \nabla_{E_1} E_2, E_3 \rangle = \tau. \qquad (2.14)$$

Logo,

$$\nabla_{E_1} E_2 = \tau E_3. \qquad (2.15)$$

Analogamente, calcularemos as demais conexões.

$$\langle \nabla_{E_1} E_3, X \rangle = \frac{1}{2}(\langle [E_1, E_3], X \rangle - \langle [E_1, X], E_3 \rangle - \langle [E_3, X], E_1 \rangle). \qquad (2.16)$$

O campo X é dado por uma combinação linear dos campos ortonormais E_1, E_2 e E_3. E somente para $X = E_2$ temos componente de $\langle \nabla_{E_1} E_3, E_2 \rangle$, sendo

$$\langle \nabla_{E_1} E_3, E_3 \rangle = -\tau. \qquad (2.17)$$

Logo,

$$\nabla_{E_1} E_2 = -\tau E_3. \qquad (2.18)$$

E

$$\langle \nabla_{E_2} E_3, X \rangle = \frac{1}{2}(\langle [E_2, E_3], X \rangle - \langle [E_2, X], E_3 \rangle - \langle [E_3, X], E_2 \rangle). \qquad (2.19)$$

O campo X é dado por uma combinação linear dos campos ortonormais E_1, E_2 e E_3. E somente para $X = E_1$ temos componente de $\langle \nabla_{E_2} E_3, X \rangle$, sendo

$$\langle \nabla_{E_2} E_3, E_1 \rangle = \tau. \qquad (2.20)$$

Logo,

$$\nabla_{E_2} E_3 = \tau E_1. \tag{2.21}$$

O tensor de curvatura em $\mathbb{H}_3$ satisfaz

$$R(E_1, E_2)E_1 = -3\tau^2\, E_2,$$
$$R(E_1, E_3)E_1 = R(E_2, E_3)E_2 = \tau^2\, E_3.$$

De fato,

$$\begin{aligned} R(E_1, E_2)E_1 &= \nabla_{E_2}\nabla_{E_1}E_1 - \nabla_{E_1}\nabla_{E_2}E_1\nabla_{[E_1,\, E_2]}E_1 \\ &= \nabla_{E_2}\nabla_{E_1}E_1 - \nabla_{E_1}\nabla_{E_2}E_1 + 2\tau\nabla_{E_3}E_1 \end{aligned}$$

Calculando separadamente as conexões pela fórmula de Koszul dada em (2.8), temos

$$\langle \nabla_{E_1}E_1, X\rangle = -\langle [E_1,\, X], E_1\rangle,$$

Atribuindo os valores de E_1, E_2 e E_3 para X, temos $\nabla_{E_1}E_1 = 0$. Da mesma forma, calculamos $\nabla_{E_2}E_1$. Por (2.8), verificamos que $\langle \nabla_{E_2}E_1, X\rangle$ tem componente para $X = E_3$, donde obtemos que $\nabla_{E_2}E_1 = -\tau E_3$. Calculando ainda $-\tau\nabla_{E_1}E_3$. Por (2.8), concluímos que $\langle \nabla_{E_1}E_3, X\rangle$ só tem componente quando $X = E_2$, o que nos dá $\nabla_{E_1}E_3 = -\tau E_2$. Por fim, de maneira análoga, concluí-se que $\nabla_{E_3}E_1 = -\tau E_2$. Logo,

$$R(E_1, E_2)E_1 = -3\tau^2 E_3.$$

De maneira análoga, concluímos que

$$R(E_1, E_3)E_1 = R(E_2, E_3)E_2 = \tau^2\, E_3.$$

Portanto, obtemos a expressão da curvatura seccional:

$$\langle R(E_1, E_2)E_1, E_2\rangle = -3\tau^2, \quad \langle R(E_1, E_3)E_1, E_3\rangle = \tau^2,$$
$$\langle R(E_2, E_3)E_2, E_3\rangle = \tau^2.$$

Detalhes destes cálculos podem ser vistos em [2], [3] e [6].

A aplicação $\pi : \mathbb{H}_3 \to \mathbb{R}^2$, dada por

$$\pi(r, \theta, z) = (r, z - a\theta)$$

é uma submersão riemanniana. De fato, π é claramente sobrejetiva, pois a um ponto dado $(r', z' - a\theta') \in \mathbb{R}^2$, claramente podemos associar um ponto $(r', \theta', z') \in \mathbb{H}_3$. Em outras palavras, o ponto (r', θ', z') representa uma superfície helicoidal Σ contida em $\mathbb{H}_3$. Além disso, dado um ponto $(r_0, \theta_0, z_0) \in \mathbb{H}_3$, temos que

$$d\pi_{(r_0,\theta_0,z_0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial \theta} & \frac{\partial u}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial \theta} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 \end{pmatrix}.$$

Claramente, $d\pi$ tem posto 2 e a aplicação π é uma submersão.

Capítulo 3

Superfícies Helicoidais em $\mathbb{H}_3$

Como vimos no capítulo anterior, o grupo de rotações SO(2) age em $\mathbb{H}_3$ por rotações em torno do eixo z. É, então, conveniente introduzirmos as coordenadas cilíndricas usuais (r, θ, z) em $\mathbb{H}^3$. Em termos destas coordenadas, a métrica invariante à esquerda tem a seguinte forma

$$ds^2 = dr^2 + (r^2 + \tau^2 r^4)d\theta^2 - 2\tau r^2 d\theta dz + dz^2. \tag{3.1}$$

Rotações são mais precisamente definidas como as aplicações $R_t : \mathbb{H}_3 \to \mathbb{H}_3$, onde $R_t(x, y, z)$ é o fluxo gerado pelo campo $F_4 = -y\partial_x + x\partial_y$, dado explicitamente pela expressão

$$R_t(x, y, z) = (\cos tx + \mathrm{sen} ty, -\mathrm{sen} tx + \cos ty, z). \tag{3.2}$$

Movimentos helicoidais combinam rotações e translações ao longo de um eixo que novamente fixamos como o eixo z. Isto significa que são definidos como as aplicações $H_t : \mathbb{H}_3 \to \mathbb{H}_3$, onde $H_t(x, y, z)$ é o fluxo gerado pelo campo $F_4 + aF_3$, ou seja,

$$H_t(x, y, z) = (\cos tx + \mathrm{sen} ty, -\mathrm{sen} tx + \cos ty, z + at). \tag{3.3}$$

Em termos de coordenadas cilíndricas, a aplicação H_t é dada por

$$(r, \theta, z) \mapsto (r, \theta + t, z + at) \tag{3.4}$$

e o campo $F_4 + aF_3$ é escrito como

$$F_4 + aF_3 = \partial_\theta + a\partial_z. \tag{3.5}$$

Pontos em $\mathbb{H}_3$ podem ser identificados se pertencem à mesma órbita. As classes de equivalência constituem o espaço das órbitas B. Com respeito a coordenadas cilíndricas, a relação de equivalência pode ser expressa por

$$(r, \theta, z) \sim (r, \theta + t, z + at). \tag{3.6}$$

Em particular, o ponto em $\mathbb{H}_3$ com coordenadas (r, θ, z) pode ser representado no espaço das órbitas pela órbita passando pelo ponto de coordenadas $(r, 0, z - a\theta)$. Portanto, as funções

$$u = r, \quad v = z - a\theta \tag{3.7}$$

parametrizam o espaço de órbitas B. Verifica-se que estas são funções invariantes, isto é, permanecem constantes ao longo de uma órbita. De fato

$$\partial_\theta u + a\partial_z u = 0$$

e

$$\partial_\theta v + a\partial_z v = a - a = 0.$$

Portanto, os campos gradiente ∇u e ∇v expandem, em cada ponto, o espaço normal às órbitas. Determinamos, com auxílio destes campos, a métrica orbital, isto é, a métrica no espaço de órbitas.

Consideremos, por exemplo, uma geodésica $\alpha(\sigma)$ realizando a distância entre órbitas próximas. Deste modo, $\alpha'(\sigma)$ é, nos pontos inicial e final, perpendicular às órbitas. Suponhamos, para fixar idéias, que $\alpha'(\sigma)$ seja paralela a ∇u. Neste caso

$$\langle \nabla u, \alpha'(\sigma) \rangle = |\nabla u|.$$

Por outro lado,

$$\langle \nabla u, \alpha'(\sigma) \rangle = \frac{du}{d\sigma}.$$

Concluímos que

$$d\sigma = \frac{1}{|\nabla u|}\, du.$$

De modo análogo, tomando geodésicas extremizando a distância entre as órbitas na direção do campo normal ∇v, obtemos

$$d\sigma = \frac{1}{|\nabla v|}\, dv.$$

No caso geral, obtemos a seguinte expressão para o elemento de linha (distância infinitesimal entre as órbitas):

$$d\sigma^2 = \frac{1}{|\nabla u|^2}\, du^2 + \frac{1}{|\nabla v|^2}\, dv^2. \tag{3.8}$$

Calculamos, a seguir, $|\nabla u|$ e $|\nabla v|$. Para tanto, necessitamos determinar os coeficientes da inversa da métrica em $\mathbb{H}_3$. A partir da expressão da métrica em $\mathbb{H}_3$ em coordenadas cilíndricas

$$\big(g_{ij}\big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 + \tau^2 r^4 & -\tau r^2 \\ 0 & -\tau r^2 & 1 \end{pmatrix},$$

obtemos

$$\big(g^{ij}\big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & \tau \\ 0 & \tau & 1 + \tau^2 r^2 \end{pmatrix}.$$

Com isto, calculamos

$$|\nabla u|^2 = g^{11}(\partial_r u)^2 = 1 \tag{3.9}$$

e

$$\begin{aligned} |\nabla v|^2 &= g^{22}(\partial_\theta v)^2 + 2g^{23}\partial_\theta v \partial_z v + g^{33}(\partial_z v)^2 = \frac{1}{u^2}a^2 - 2\tau a + (1 + \tau^2 u^2) \\ &= \frac{1}{u^2}\big(u^2 + (\tau u^2 - a)^2\big). \end{aligned}$$

Portanto, a métrica orbital é dada, em termos dos parâmetros u, v no espaço de órbitas, por

$$d\sigma^2 = du^2 + \frac{u^2}{u^2 + (\tau u^2 - a)^2}\, dv^2. \tag{3.10}$$

No caso particular em que $\tau = \frac{1}{2}$, obtemos a expressão na p. 179 de [4]:

$$d\sigma^2 = du^2 + \frac{4u^2}{4u^2 + (u^2 - 2a)^2}\, dv^2. \tag{3.11}$$

Concluímos da análise acima que a projeção canônica $\pi : \mathbb{H}_3 - \{(0,0,z)\} \to B$, levando um ponto com coordenadas (r, θ, z) em sua órbita, parametrizada por (u,v), é uma submersão riemanniana, se considerarmos B munido da métrica orbital definida acima.

Denotamos

$$U(u)=\sqrt{\frac{u^2}{u^2+(\tau u^2-a)^2}}. \tag{3.12}$$

Com esta notação, determinamos a conexão riemanniana ∇ em B. Temos

$$\langle \nabla_{\partial_u}\partial_u,\partial_u\rangle=\frac{1}{2}\partial_u|\partial_u|^2=0$$

e

$$\langle \nabla_{\partial_u}\partial_u,\partial_v\rangle=-\langle \partial_u,\nabla_{\partial_v}\partial_u\rangle=-\frac{1}{2}\partial_v|\partial_u|^2=0.$$

Deduzimos, deste modo, que

$$\nabla_{\partial_u}\partial_u=0,$$

ou seja, que as curvas coordenadas $v=cte.$ são geodésicas em B. Calculamos

$$\langle \nabla_{\partial_u}\partial_v,\partial_u\rangle=\langle \nabla_{\partial_v}\partial_u,\partial_u\rangle=\frac{1}{2}\partial_v|\partial_u|^2=0$$

e

$$\langle \nabla_{\partial_u}\partial_v,\partial_v\rangle=\frac{1}{2}\partial_u|\partial_v|^2=UU',$$

onde $'$ indica derivada com respeito a u. Analogamente,

$$\langle \nabla_{\partial_v}\partial_v,\partial_u\rangle=-\langle \partial_v,\nabla_{\partial_u}\partial_v\rangle=-\frac{1}{2}\partial_u|\partial_v|^2=-UU'$$

e

$$\langle \nabla_{\partial_v}\partial_v,\partial_v\rangle=\frac{1}{2}\partial_v|\partial_v|^2=0.$$

Sendo assim, deduzimos que

$$\nabla_{\partial_u}\partial_v=\frac{U'}{U}\,\partial_v \tag{3.13}$$

e

$$\nabla_{\partial_v}\partial_v=-UU'\,\partial_u. \tag{3.14}$$

Definimos em B o referencial ortonormal

$$e_1 = \partial_u, \quad e_2 = \frac{1}{U}\,\partial_v. \tag{3.15}$$

Seja γ curva em B, cuja expressão local em coordenadas (u, v) é

$$s \mapsto (u(s), v(s)). \tag{3.16}$$

Representamos o elemento de linha em γ induzido pela métrica orbital por $d\gamma$. Logo,

$$d\gamma^2 = \langle \dot\gamma, \dot\gamma \rangle\, ds^2 = \Big(\dot u^2(s) + \frac{u^2(s)}{u^2(s) + (\tau u(s)^2 - a)^2}\, \dot v^2(s) \Big)\, ds^2.$$

Seja σ o ângulo orientado entre $\dot\gamma$ e a direção e_1. Desta forma, associamos a γ o referencial móvel

$$\begin{aligned} T &= \frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|} = \cos\sigma\, e_1 + \mathrm{sen}\sigma\, e_2,\\ N &= -\mathrm{sen}\sigma\, e_1 + \cos\sigma\, e_2. \end{aligned}$$

Calculamos

$$\nabla_T T \;=\; \nabla_T \big(\cos\sigma e_1 + \mathrm{sen}\sigma e_2 \big) = -\dot\sigma \mathrm{sen}\sigma\, e_1 + \dot\sigma \cos\sigma\, e_2 + \cos\sigma \nabla_T e_1 + \mathrm{sen}\sigma \nabla_T e_2.$$

Portanto, a curvatura geodésica de γ em B é dada por

$$\begin{aligned} \kappa_g &= \langle \nabla_T T, N \rangle = \dot\sigma + \langle \nabla_T e_1, e_2 \rangle\\ &\equiv \dot\sigma + \omega_1^2(T). \end{aligned}$$

No caso particular da métrica orbital, utilizando as fórmulas acima para a derivada covariante dos campos coordenados, obtemos

$$\omega_1^2(T) = \langle \nabla_T e_1, e_2 \rangle = \langle \nabla_T \partial_u, \frac{\partial_v}{U} \rangle = \frac{1}{U^2} \mathrm{sen}\sigma \langle \nabla_{\partial_v} \partial_u, \partial_v \rangle = \frac{U'}{U}\,\mathrm{sen}\sigma.$$

Portanto, a curvatura geodésica de γ em B é dada por

$$\kappa_g = \dot\sigma + \frac{U'}{U}\,\mathrm{sen}\sigma. \tag{3.17}$$

3.1 Superfícies Helicoidais

A decomposição do espaço tangente a um ponto em $\mathbb{H}_3$ em direções tangentes a normais às órbitas permite também decompor a métrica ambiente na métrica da órbita e na métrica orbital. Denotemos, como acima, o parâmetro das órbitas (linhas de fluxo de $F_4 + aF_3$) por t. Denotemos, além disso,

$$\omega = \langle F_4 + aF_3, F_4 + aF_3 \rangle^{1/2} = \sqrt{u^2 + (\tau u^2 - a)^2}. \tag{3.18}$$

Deste modo, escrevemos

$$ds^2 = \omega^2 dt^2 + d\sigma^2. \tag{3.19}$$

Portanto, a métrica em $\mathbb{H}_3$, decomposta em direções tangentes e normais às órbitas, é reescrita como

$$ds^2 = \left(u^2 + (\tau u^2 - a)^2\right) dt^2 + du^2 + \frac{u^2}{u^2 + (\tau u^2 - a)^2}\, dv^2. \tag{3.20}$$

Uma superfície helicoidal Σ em $\mathbb{H}_3$ é, por definição, uma superfície invariante por movimentos helicoidais, isto é, tal que, para t qualquer,

$$H_t(\Sigma) = \Sigma.$$

Portanto, Σ é gerada por uma curva no espaço de órbitas parametrizada por

$$\gamma(s) = (u(s), v(s)).$$

isto significa que Σ admite uma parametrização da forma

$$(s, t) \mapsto H_t(u(s), 0, v(s)).$$

Dito de outro modo, Σ é parametrizada, em termos de coordenadas cilíndricas, por

$$(s, t) \mapsto (u(s), \theta + t, v(s) + at)$$

ou, com respeito a coordenadas exponenciais, por

$$(s, t) \mapsto (x(s) \cos t + y(s)\mathrm{sen} t, -x(s)\mathrm{sen} t + y(s) \cos t, z(s) + at),$$

onde $x(s) = u(s) \cos \theta$, $y(s) = u(s)\mathrm{sen}\theta$ e $z(s) = v(s) + a\theta$. Obviamente, os invariantes geométricos de Σ podem ser determinados a partir destas expressões, como fazemos a seguir.

Agora, deduzimos uma formulação analítica da curvatura média em Σ. Consideramos Σ munida da métrica induzida pela imersão em $\mathbb{H}_3$:

$$\begin{aligned}\omega^2(s)\,dt^2 + d\gamma^2 &= \big(u^2(s) + (\tau u^2(s) - a)^2\big)\,dt^2 \\ &+ \Big(\dot u^2(s) + \frac{u^2(s)}{u^2(s) + (\tau u(s)^2 - a)^2}\,\dot v^2(s)\Big)\,ds^2\end{aligned}$$

O elemento de área em Σ é dado por

$$\omega|\dot\gamma|\,dtds, \tag{3.21}$$

onde, nesta fórmula,

$$\omega = \omega(s) = \sqrt{u^2(s) + (\tau u^2(s) - a)^2}$$

e

$$|\dot\gamma| = \sqrt{\dot u^2(s) + \frac{u^2(s)}{u^2(s) + (\tau u(s)^2 - a)^2}\,\dot v^2(s)}.$$

Portanto, a área de Σ corresponde a

$$A(\gamma) = \int\int \omega|\dot\gamma|\,dtds, \tag{3.22}$$

onde, ao escrevermos $A(\gamma)$, enfatizamos o fato de que variações da área de Σ são determinadas por variações da curva geratriz γ. Derivando a área com respeito a uma variação a um parâmetro γ_μ de γ, obtemos

$$\frac{d}{d\mu}A(\gamma_\mu)|_{\mu=0} = \int\int \big(\omega'|\dot\gamma| + \omega|\dot\gamma|'\big)\,dtds = \int\int \left(\frac{\omega'}{\omega} + \frac{|\dot\gamma|'}{|\dot\gamma|}\right)\omega|\dot\gamma|\,dtds,$$

onde a derivada com respeito a μ é indicada por $'$. Estas derivadas são calculadas em $\mu = 0$. Suponhamos que a variação γ_μ que ora consideramos seja uma variação normal, isto é, tal que o campo variacional η seja da forma $\eta = \varphi N$, onde N é o campo normal unitário N ao longo de γ. Neste caso, calculamos

$$|\dot\gamma|'|_{\mu=0} = \varphi\,\frac{1}{|\dot\gamma|}\langle\nabla_N\dot\gamma, \dot\gamma\rangle = -\varphi\,\frac{1}{|\dot\gamma|}\langle\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma, N\rangle.$$

Assim, obtemos

$$\frac{|\dot\gamma|'}{|\dot\gamma|}|_{\mu=0} = -\langle\nabla_{\frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|}}\frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|}, n\rangle\,\varphi = -\kappa_g\,\varphi,$$

onde κ_g denota a curvatura geodésica de γ no espaço das órbitas. Logo, deduzimos a seguinte fórmula para a variação da área

$$\frac{d}{d\mu}A(\gamma_\mu)|_{\mu=0} = \int\int \big(\partial_N \ln\omega - \kappa_g\big)\varphi\,\omega|\dot\gamma|\,dtds.$$

Do fato de que π é uma submersão riemanniana e o campo variacional η é normal às órbitas, concluímos que os campos $\hat N$ e $\hat\eta$, dados por

$$\pi_*\hat N = N, \quad \pi_*\hat\eta = \eta, \tag{3.23}$$

são, respectivamente, o campo normal unitário ao longo de Σ e o campo variacional de Σ. Temos, em particular

$$\langle \hat N, \hat\eta\rangle = \langle N, \eta\rangle = \varphi. \tag{3.24}$$

Retornando ao cálculo da variação da área, é um fato clássico que

$$\frac{d}{d\mu}A(\gamma_\mu)|_{\mu=0} = -2\int\int H\langle \hat N, \hat\eta\rangle\omega|\dot\gamma|dsdt.$$

Comparando as duas expressões para a variação da área, concluímos (pela arbitrariedade da variação) que

$$2H = \kappa_g - \partial_N \ln\omega. \tag{3.25}$$

Para efeito de simplificação, escreveremos essa última equação da forma

$$H = \kappa_g - \partial_N \ln\omega. \tag{3.26}$$

Verificamos, utilizando a notação previamente definida, que

$$\omega = \frac{u}{U},$$

o que permite calcular

$$\partial_N \ln\omega = \mathrm{sen}\sigma\partial_u \ln\omega = -\mathrm{sen}\sigma\Big(\frac{1}{u} - \frac{U'}{U}\Big),$$

onde $'$ denota, desta vez, derivada com respeito ao parâmetro u. Concluímos, portanto, que

$$H = \kappa_g - \partial_N \ln\omega = \dot\sigma + \frac{1}{u}\mathrm{sen}\sigma.$$

Obtemos, desta forma, o seguinte sistema de EDO's satisfeito pela curva γ, geratriz da superfície helicoidal:

$$\begin{cases} \dot{u} &= \cos\sigma \\ \dot{v} &= \frac{1}{U}\,\mathrm{sen}\sigma \\ \dot{\sigma} &= H - \frac{1}{u}\,\mathrm{sen}\sigma \end{cases} \tag{3.27}$$

Do fato de que o elemento de área não depende explicitamente de $\dot{v}$, deduzimos uma lei de conservação, que resulta no análogo da relação de Clairaut para superfícies rotacionais. Demonstram-se facilmente os seguintes fatos.

Proposição 2. *Transladando-se uma curva que é solução do sistema (3.27) na direção de v, obtém-se uma outra solução para o sistema citado.*

De fato, basta observarmos que o sistema (3.27) independe da variável v. Logo, dada uma solução $\gamma(s) = (u(s), v(s))$ do sistema e uma constante v_0 arbitrária, a curva $\tilde{\gamma}(s) = (u(s), v(s) + v_0)$, é também uma solução.

Proposição 3. *Seja $\gamma(s)$ uma solução de (3.27) definida em $(s_0 - \varepsilon, s_0]$, com $\sigma(s_0) = \pm\frac{\pi}{2}$. Então γ pode ser estendida ao intervalo $(s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$ pela reflexão em torno da linha $v \equiv v(s_0)$*

Observemos que, dada $\gamma(s) = (u(s), v(s))$, então $\tilde{\gamma}(s) = (u(s), 2v_0 - v(s))$ resulta numa solução para (3.27).

Proposição 4. *A função $J(s) = u\,\mathrm{sen}\sigma - \frac{1}{2}Hu^2$ é constante ao longo de soluções $\gamma(s)$ de (3.27). Desta forma, as soluções do sistema (3.27) são caracterizadas por $J(s) \equiv k$, para alguma constante $k \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Basta apenas verificarmos que $\dot{J}(s) = 0$. Calculemos a derivada desta função, obtendo

$$\dot{J}(s) \quad = \quad \dot{u}(s)\,\mathrm{sen}\sigma + u(s)\dot{\sigma}\cos\sigma - u\dot{u}H.$$

Usando o sistema (3.27),

$$\begin{aligned} \dot{J}(s) &= \cos\sigma\mathrm{sen}\sigma + u(s)(H - u(s)^{-1}\mathrm{sen}\sigma)\cos\sigma - u(s)\cos\sigma H \\ &= \cos\sigma\mathrm{sen}\sigma + u(s)H\cos\sigma - \frac{u(s)}{u(s)}\mathrm{sen}\sigma\cos\sigma - u(s)\cos\sigma H \\ &= 0. \end{aligned}$$

Isto encerra a demonstração da proposição. □

3.2 Teorema de Classificação

Passamos, agora, ao enunciado do resultado principal demonstrado em [4] a respeito de superfícies helicoidais.

Teorema 3.1. *As superfícies helicoidais em $\mathbb{H}_3$ com curvatura média constante são classificadas em termos de H e k da seguinte forma:*

1. *helicóides, incluindo planos horizontais $z =$ cte., no caso em que $H = 0$ e $k = 0$.*

2. *Superfícies tipo-catenóide, no caso em que $H = 0$ e $k \neq 0$.*

3. *Uma família de superfícies compactas difeomorfas a esfera, quando $H \neq 0$ e $k = 0$.*

4. *Cilindros retos, regrados por linhas de fluxo de ∂_z, e superfícies tipo-Delaunay, quando $H \neq 0$ e $k \neq 0$.*

Demonstração. Trataremos de cada caso separadamente. Iniciamos pelo estudo das superfícies mínimas.
Caso 1. $H \equiv 0$. Da integral primeira da proposição (4), temos $J(s) = u\text{sen}\sigma = k$. Dependendo do valor de k, temos duas possibilidades:
1. $k = 0$: neste caso, temos $u\,\text{sen}\sigma = 0$ e, portanto, $\text{sen}\sigma = 0$. Assim, o ângulo σ entre γ e ∂_u é identicamente nulo. Do sistema (3.27), deduzimos que

$$\begin{aligned} du &= \cos\sigma ds = ds, \\ dv &= \frac{1}{U}\,\text{sen}\sigma\, ds \end{aligned}$$

Pela regra da cadeia, temos

$$\frac{dv}{du} = \frac{1}{U}\,\text{sen}\sigma\, \cos\sigma = 0,$$

o que implica que $v = b$, para alguma constante b. Então, a superfície é dada por $z = a\theta + b$, o que corresponde a um helicóide euclidiano.
2. $k > 0$: nesta situação, temos $\text{sen}\sigma = \frac{k}{u}$. Uma vez que

$$\cos\sigma = \sqrt{1 - \text{sen}^2\sigma} = \sqrt{1 - \frac{k^2}{u^2}} = u^{-1}(u^2 - k^2)^{\frac{1}{2}},$$

utilizando novamente a regra da cadeia, deduzimos a equação

$$\frac{dv}{du} = \frac{1}{U}\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma} = \frac{\sqrt{u^2 + (\tau u^2 - a)^2}}{u}\frac{k}{\sqrt{u^2 - k^2}}.$$

Portanto, considerando $u > k$, temos

$$\frac{dv}{du} = \frac{k}{u}\frac{\sqrt{u^2 + (\tau u^2 - a)^2}}{\sqrt{u^2 - k^2}}. \tag{3.28}$$

Alguns pontos merecem atenção. A integral para esta equação é, em geral, do tipo elíptica e (3.28) é válida se, e somente se, u assume o valor k, onde a curva torna-se paralela à direção ∂_v. Além disso, temos $\frac{dv}{du} > 0$, o que significa que $v(u)$ é crescente e, finalmente,

$$\lim_{u \to \infty} \frac{dv}{du} = \tau k.$$

Portanto, segundo a Proposição 2, podemos considerar a única solção de (3.27) determinada pelas condições iniciais

$$u(0) = k, \quad v(0) = 0 \quad \text{e} \quad \gamma(0) = \frac{\pi}{2},$$

estendida por uma reflexão em torno de $v = 0$. Estas curvas são do tipo catenária. Se $a = 0$, obtemos uma analogia exata com o catenóide. Se $a = \frac{1}{4\tau}$, a equação (3.28) pode ser integrada explicitamente. Fazendo isso e reescrevendo as funções invariantes da solução em temos de coordendas cilíndricas, descrevemos superfícies mínimas do tipo helicoidal dadas por

$$z(r,\theta) = -\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(kr^{-1}) + \frac{k}{2}\sqrt{r^2 - k^2},$$

onde $r \geq k$. De fato, considerando $a = \frac{1}{4\tau}$, escrevemos a equação na forma

$$\begin{aligned} \frac{dv}{du} &= \frac{k}{u}\sqrt{\frac{u^2 + (\tau u^2 - a)^2}{u^2 - k2}} \\ &= \frac{k}{u}\sqrt{\frac{(\tau u^2 + a)^2}{u^2 - k^2}} \\ &= \frac{k}{\sqrt{u^2 - k^2}}\frac{\tau u^2 + a}{u} \end{aligned}$$

Desta forma, obtemos a seguinte integral

$$v = \tau \int \frac{k}{\sqrt{u^2 - k^2}} \big(u + \frac{a}{\tau u}\big) du$$

Definindo $x = u^2 - k^2$ e $y = \frac{1}{u}$, temos $dx = 2udu$ e $dy = -\frac{1}{u^2}du$. Realizando esta mudança de variáveis nas parcelas da integral acima, temos

$$\begin{aligned} v &= \frac{\tau}{2} \int \frac{k}{\sqrt{x}}\, dx - a \int y \frac{k}{\sqrt{\frac{1}{y^2} - k^2}} u^2 dy = \tau k \sqrt{x} - ak \int \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 y^2}}\, dy \\ &= \tau k \sqrt{u^2 - k^2} - a \operatorname{arcsen} ky = \tau k \sqrt{u^2 - k^2} - \frac{1}{4\tau} \operatorname{arcsen} \frac{k}{u}. \end{aligned}$$

Utilizando-se da definição das funções invariantes em (3.7), chegamos a

$$z(r, \theta) = \frac{1}{4\tau}\, \theta + \tau k \sqrt{r^2 - k^2} - \frac{1}{4\tau} \operatorname{arcsen} \frac{k}{r}.$$

Esta superfície é denominada *catenóide helicoidal*.

Caso 2: $H \neq 0$. Consideramos, inicialmente, o caso em que $k = 0$. A partir de (4), concluímos que

$$\operatorname{sen}\sigma = \frac{H}{2}\, u.$$

Portanto,

$$\cos\sigma = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\sigma} = \sqrt{1 - \frac{H^2}{4}\, u^2}.$$

Desta forma, deduzimos do sistema (3.27) a equação

$$\begin{aligned} \frac{dv}{du} &= \frac{1}{U} \frac{\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma} = \frac{1}{U} \frac{\frac{H}{2}\, u}{\frac{\sqrt{4 - H^2 u^2}}{2}} = \frac{\sqrt{u^2 + (\tau u^2 - a)^2}}{u} \frac{H\, u}{\sqrt{4 - H^2 u^2}} \\ &= H \sqrt{\frac{u^2 + (\tau u^2 - a)^2}{4 - H^2 u^2}}, \end{aligned}$$

onde $u \in [0, 2H^{-1})$, de modo que $\frac{dv}{du}$ esteja bem definida. Novamente, esta equação é do tipo elíptica e é válida se, e somente se, u assume o valor de $\frac{2}{H}$, onde a curva fica paralela à direção de ∂_v. Além disso, se $u = 0$, temos $\sigma = 0$, isto é, γ é paralela à direção ∂_u e $\frac{dv}{du} > 0$, isto é, $v(u)$ é crescente.

Para alguns valores de a, a equação pode ser integrada explicitamente em termos de funções elementares. Por exemplo, tomando $a = 0$, reduzimos a equação à integral

$$v = \frac{H}{2} \int u \sqrt{\frac{1+\tau^2 u^2}{1-\frac{H^2}{4}u^2}}\, du,$$

onde $u \in [0, 2H^{-1})$. Integrando, obtemos a parametrização

$$z(r,\theta) = -\frac{1}{2H}\sqrt{(1+\tau^2\, u^2)(4-H^2\, u^2)} - \frac{2\tau}{H^2}\big(1+\frac{H^2}{4\tau^2}\big)\,\text{arcsen}\frac{\sqrt{1-\frac{H^2}{4}u^2}}{\sqrt{1+\frac{H^2}{4\tau^2}}}. \tag{3.29}$$

De fato, efetuando a mudança de variáveis, $\text{sen}\,\vartheta = \frac{H}{2}u$, com diferencial $\frac{H}{2}\,du = \cos\vartheta\, d\vartheta$, obtemos

$$\begin{aligned}
v &= \frac{H}{2}\int \frac{2}{H}\text{sen}\vartheta \sqrt{\frac{1+\frac{4\tau^2}{H^2}\text{sen}^2\vartheta}{1-\text{sen}^2\vartheta}}\,\frac{2}{H}\cos\vartheta d\vartheta = \frac{2}{H}\int \text{sen}\vartheta\frac{\sqrt{1+\frac{4\tau^2}{H^2}\text{sen}^2\vartheta}}{\cos\vartheta}\cos\vartheta d\vartheta \\
&= \frac{2}{H}\int \text{sen}\vartheta\sqrt{1+\frac{4\tau^2}{H^2}\text{sen}^2\vartheta}\, d\vartheta = \frac{2}{H}\int \text{sen}\vartheta\sqrt{1+\frac{4\tau^2}{H^2}-\frac{4\tau^2}{H^2}\cos^2\vartheta} d\vartheta \\
&= -\frac{2}{H}\int \sqrt{1+\frac{4\tau^2}{H^2}-\frac{4\tau^2}{H^2}x^2}\, dx = -\frac{4\tau}{H^2}\int\sqrt{\frac{H^2}{4\tau^2}+1-\, x^2}\, dx \\
&= -\frac{4\tau}{H^2}\Big(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{H^2}{4\tau^2}+1-\, x^2} + \frac{\frac{H^2}{4\tau^2}+1}{2}\,\text{arcsen}\frac{x}{\sqrt{\frac{H^2}{4\tau^2}+1}}\Big),
\end{aligned}$$

onde $x = \cos\vartheta$ e, portanto, $1 - x^2 = \text{sen}^2\vartheta = \frac{H^2}{4}\, u^2$. Daí, escrevemos

$$\begin{aligned}
v &= -\frac{2\tau}{H^2}\Big(\cos\vartheta\sqrt{\frac{H^2}{4\tau^2}+\text{sen}^2\vartheta} + \big(1+\frac{H^2}{4\tau^2}\big)\,\text{arcsen}\frac{\cos\vartheta}{\sqrt{1+\frac{H^2}{4\tau^2}}}\Big) \\
&= -\frac{2\tau}{H^2}\left(\sqrt{1-\frac{H^2}{4}\, u^2}\sqrt{\frac{H^2}{4\tau^2}+\frac{H^2}{4}\, u^2} + \big(1+\frac{H^2}{4\tau^2}\big)\,\text{arcsen}\frac{\sqrt{1-\frac{H^2}{4}\, u^2}}{\sqrt{1+\frac{H^2}{4\tau^2}}}\right) \\
&= -\frac{2\tau}{H^2}\left(\frac{H}{4\tau}\sqrt{4-H^2\, u^2}\sqrt{1+\tau^2\, u^2} + \big(1+\frac{H^2}{4\tau^2}\big)\,\text{arcsen}\frac{\sqrt{1-\frac{H^2}{4}u^2}}{\sqrt{1+\frac{H^2}{4\tau^2}}}\right).
\end{aligned}$$

Portanto, a expressão final para $z(r,\theta)=v(u)$, neste caso, é, como enunciado acima,

$$z(r,\theta)=-\frac{1}{2H}\sqrt{(1+\tau^2\,u^2)(4-H^2\,u^2)}-\frac{2\tau}{H^2}\big(1+\frac{H^2}{4\tau^2}\big)\,\mathrm{arcsen}\frac{\sqrt{1-\frac{H^2}{4}u^2}}{\sqrt{1+\frac{H^2}{4\tau^2}}}.$$

No caso particular em que $\tau=\frac{1}{2}$, temos

$$z(r,\theta)=-\frac{1}{4H}\sqrt{(4+r^2)(4-H^2r^2)}-\frac{1+H^2}{H^2}\mathrm{arcsen}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4-H^2r^2}{1+H^2}}$$

Observamos que, neste caso, a curva γ gera uma superfície compacta com curvatura média constante H.

Por fim, consideramos a escolha $a=\frac{1}{4\tau}$, demosntrando que, novamente, a equação diferencial correspondente pode ser integrada em termos de funções elementares. A superfície será do tipo helicoidal, com a equação diferencial dada, após completamento de quadrados, por

$$\begin{aligned}\frac{dv}{du} &= H\sqrt{\frac{(\tau u^2+a)^2}{4-H^2u^2}}\\ &= H\tau\frac{u^2+\frac{1}{4\tau^2}}{\sqrt{4-H^2u^2}}\end{aligned}$$

com $u\in[0,2H^{-1})$. Por integração desta equação e utilizando a definição das funções invariantes, temos a seguinte equação em coordenadas cilíndricas:

$$z(r,\theta)=-\frac{1}{2}\theta+\frac{2+H^2}{2H^2}\mathrm{arcsen}\frac{Hr}{2}-\frac{r\sqrt{4-H^2r^2}}{4H},$$

com $r\in[0,2H^{-1})$. De fato, reduzimos a equação a

$$v=H\tau\int\frac{u^2+\frac{1}{4\tau^2}}{\sqrt{4-H^2u^2}}du.$$

Com a mudança de variáveis $\frac{H}{2}u=\mathrm{sen}\vartheta$ e a consequente expressão diferencial $\frac{H}{2}\,du=\cos\vartheta d\vartheta$, obtém-se

$$\begin{aligned}v &= H\tau\int\frac{\frac{1}{4\tau^2}+\frac{4}{H^2}\mathrm{sen}^2\vartheta}{\sqrt{4-4\mathrm{sen}^2\vartheta}}\frac{2}{H}\cos\vartheta d\vartheta=\tau\int\Big(\frac{1}{4\tau^2}+\frac{4}{H^2}\,\mathrm{sen}^2\vartheta\Big)\,d\vartheta\\ &= \frac{1}{4\tau}\,\vartheta+\frac{4\tau}{H^2}\int\,\mathrm{sen}^2\vartheta\,d\vartheta=\frac{1}{4\tau}\,\vartheta+\frac{2\tau}{H^2}\int(1-\cos 2\vartheta)d\vartheta\\ &= \Big(\frac{1}{4\tau}+\frac{2\tau}{H^2}\Big)\,\vartheta-\frac{\tau}{H^2}\mathrm{sen}\,2\vartheta.\end{aligned}$$

Uma vez que $\operatorname{sen} 2\vartheta = 2\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta$, deduzimos que, em termos de u,

$$\begin{aligned} v &= \left(\frac{1}{4\tau} + \frac{2\tau}{H^2}\right)\operatorname{arcsen}\frac{Hu}{2} - \frac{2\tau}{H^2}\frac{Hu}{2}\sqrt{1 - \frac{H^2}{4}u^2} \\ &= \left(\frac{1}{4\tau} + \frac{2\tau}{H^2}\right)\operatorname{arcsen}\frac{Hu}{2} - \frac{\tau}{H}u\sqrt{1 - \frac{H^2}{4}u^2}. \end{aligned}$$

Com isso, temos

$$z(r,\theta) = \frac{1}{4\tau}\theta + \left(\frac{1}{4\tau} + \frac{2\tau}{H^2}\right)\operatorname{arcsen}\frac{Hr}{2} - \frac{\tau}{H}r\sqrt{1 - \frac{H^2}{4}r^2}.$$

Encerrando a classificação, supomos, desta vez, $k \neq 0$. Sendo assim, a integral primeira pode ser vista como uma equação do segundo grau em u:

$$k - u\operatorname{sen}\sigma + \frac{1}{2}Hu^2 = 0,$$

cujas raízes são

$$u = (\operatorname{sen}\sigma \pm \sqrt{\operatorname{sen}^2\sigma - 2kH}). \tag{3.30}$$

Consideramos duas situações. Na primeira, impondo $k = \frac{1}{2H}$, temos necessariamente, a fim de dar um sentido à raiz acima, $\operatorname{sen}\sigma = 1$, ou seja, $\sigma = \frac{\pi}{2}$ ao longo da curva geratriz. Isto caracteriza $r = \frac{1}{H}$. Portanto, a superfície é um cilindro regrado pelas geodésicas na direção do campo E_3.

A análise da segunda situação não é realizada em [4]. Segundo os autores, os exemplos correspondentes, análogos às superfícies de Delaunay em $\mathbb{R}^3$, são estudados em [8]. $\square$

Capítulo 4

Superfícies Invariantes por Translação

Neste capítulo, classificamos superfícies com curvatura média constante invariantes por translações. Em termos precisos, dado o campo invariante à esquerda $F_1 = \partial_x + \tau y \partial_z$ e o fluxo correspondente

$$T_t(x, y, z) = (x + t, y, z + t\tau y), \quad t \in \mathbb{R},$$

uma superfície Σ é dita invariante por translações se $T_t(\Sigma) = \Sigma$. As órbitas (linhas de fluxo) da ação do grupo de translações $\{T_t\}$ são as classes de equivalência definidas a partir da relação

$$(x, y, z) \sim (x + t, y, z + t\tau y).$$

Em particular, um ponto em $\mathbb{H}_3$ com coordenadas exponenciais (x, y, z) é representado pela órbita passando pelo ponto $(0, y, z - \tau xy)$. De fato (tomando $t = x$),

$$T_x(0, y, z - \tau xy) = (x, y, z).$$

Portanto, as funções invariantes cujos campos gradientes expandem o espaço normal às órbitas em cada ponto são, desta vez,

$$u = y, \quad v = \tau\, xy - z. \tag{4.1}$$

É fácil constatar que as derivadas direcionais destas funções na direção do campo F_1 são nulas. O espaço de órbitas é parametrizado pelo par de coordenadas (u, v). Calculamos, a seguir, os gradientes destas funções. Temos

$$\nabla u = \sum_{i=1}^{3} \langle \nabla u, E_i \rangle E_i.$$

Dessa forma, temos

$$|\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^{3} \langle \nabla u, E_i \rangle^2.$$

Analogamente,

$$\nabla v = \sum_{i=1}^{3} \langle \nabla v, E_i \rangle \ E_i$$

e portanto

$$|\nabla v|^2 = \sum_{i=1}^{3} \langle \nabla v, E_i \rangle^2.$$

Calculando os coeficientes de ∇u, temos

$$\langle \nabla u, E_1 \rangle = 0, \quad \langle \nabla u, E_2 \rangle = 1, \quad \langle \nabla u, E_3 \rangle = 0.$$

Da mesma forma,

$$\langle \nabla v, E_1 \rangle = \langle \nabla v, \partial_x - \tau y \partial_z \rangle = \frac{\partial v}{\partial x} - \tau y \frac{\partial v}{\partial z} = \tau y + \tau y = 2\tau y$$

e

$$\langle \nabla v, E_2 \rangle \ = \ \langle \nabla v, \partial_y - \tau x \partial_z \rangle = \frac{\partial v}{\partial y} - \tau x \frac{\partial v}{\partial y} = \tau x - \tau x = 0$$

e

$$\langle \nabla v, E_3 \rangle = \langle \nabla v, \partial_z \rangle = -1.$$

Dessa forma, substituindo os coeficientes acima em e , temos

$$|\nabla u|^2 = 1, \quad |\nabla v|^2 = 1 + 4\tau^2 y^2.$$

Portanto, a métrica orbital é dada por

$$d\sigma^2 = \frac{1}{|\nabla u|^2} du^2 + \frac{1}{|\nabla v|^2} du^2 = du^2 + \frac{1}{1 + 4\tau^2 u^2} dv^2.$$

Agora, definimos como em (3.12), a função

$$U = \sqrt{\frac{1}{1 + 4\tau^2 u^2}}.$$

Utilizaremos novamente as fórmulas (3.17) e (3.25). Escrevendo $F_1 = E_1 + 2\tau y E_3$, calculamos

$$\omega = \sqrt{\langle F_1, F_1 \rangle} = \sqrt{1 + 4\tau^2 u^2} = \frac{1}{U},$$

de onde deduzimos

$$\partial_n \ln \omega = \text{sen}\sigma \partial_u \ln \omega = \text{sen}\sigma \partial_u \ln \frac{1}{U} = \text{sen}\sigma \big(U(-\frac{U'}{U}) \big) = -\frac{U'}{U}\text{sen}\sigma.$$

Então, utilizando a fórmula (3.25), calculamos

$$H = \dot{\sigma} + \frac{U'}{U}\text{sen}\sigma - \frac{U'}{U}\text{sen}\sigma = \dot{\sigma}$$

4.1 Teorema de Classificação

Concluímos acima que uma curva $\gamma(s) = (u(s), v(s))$ no espaço de órbitas gera uma superfície invariante por translações com curvatura média constante H se o sistema de EDO's abaixo é satisfeito.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{u}(s) & = & \text{sen}\sigma \\ \dot{v}(s) & = & \sqrt{1 + 4\tau^2 u^2} \cos \sigma \\ \dot{\sigma}(s) & = & H. \end{array} \right. \tag{4.2}$$

O teorema abaixo, demonstrado em [4], classifica tais superfícies.

Teorema 4.1. *As superfícies invariantes por translação com curvatura média constante H em $\mathbb{H}_3$ são classificadas do seguinte modo:*
1. As superfícies mínimas ($H = 0$) são planos verticais ou gráficos descritos pelas funções

$$z = z(x, y) = \tau x y - \frac{c}{2\tau} \left(\tau \sqrt{1 + 4\tau^2 y^2}\, y + \frac{1}{2} \ln |\sqrt{1 + 4\tau^2 y^2} + y| \right),$$

onde $c \in \mathbb{R}$.

2. As superfícies com curvatura média constante $H \neq 0$ são gráficos das funções

$$z(x,y) = \tau xy \pm \frac{\tau}{H}\left(\sqrt{1-y^2H^2}\sqrt{\frac{1}{4\tau^2}+y^2} + \frac{1+\frac{H^2}{4\tau^2}}{H}\text{arcsen}\frac{\sqrt{1-y^2H^2}}{\sqrt{1+\frac{H^2}{4\tau^2}}}\right),$$

onde $-\frac{1}{H} \leq y \leq \frac{1}{H}$.

Observamos que, em concordância com o Teorema 2.2, os gráficos no item 2 no enunciado do teorema não são completos.

Demonstração. Iniciamos pelo caso de superfícies mínimas. Da terceira das equações no sistema acima, segue que $\sigma(s) = k$, para uma dada constante k. Deste modo, temos $u(s) = \text{sen} k\, s + u_0$, para alguma constante u_0, e $\dot{v}(s) = \sqrt{1+4\tau^2\, u^2}\cos k$. Analisamos algumas possibilidades separadamente.
1. $k \neq 0, \pi$: neste caso, vale $dv = \cot k\sqrt{1+4\tau^2\, u^2}du$. Pondo $c = \cot k$, temos

$$v = c\int\sqrt{1+4\tau^2u^2}du.$$

Então, utilizando a substituição trigonométrica $2\tau u = \tan\vartheta$, temos $2\tau du = \sec^2\vartheta d\vartheta$.

$$v = \frac{c}{2\tau}\int\sec^3\vartheta d\vartheta = \frac{c}{2\tau}\big(\frac{1}{2}\sec\vartheta\tan\vartheta + \frac{1}{2}\ln|\sec\vartheta + \tan\vartheta|\big).$$

Substituindo $u = \frac{1}{2\tau}\tan\vartheta$ e $\sqrt{1+4\tau^2u^2} = \sec\vartheta$ na expressão acima, obtemos

$$v = \frac{c}{2\tau}\big(\tau\sqrt{1+4\tau^2u^2}\,u + \frac{1}{2}\ln|\sqrt{1+4\tau^2u^2}+u|\big). \tag{4.3}$$

Em termos de coordenadas exponenciais, escrevemos

$$z(x,y) = \tau xy - \frac{c}{2\tau}\left(\tau\sqrt{1+4\tau^2y^2}\,y + \frac{1}{2}\ln|\sqrt{1+4\tau^2y^2}+y|\right),$$

onde c é uma constante arbitrária.

2. $k = 0$: neste caso, temos $\dot{u}(s) = u_0$, para alguma constante u_0. Desta forma, os exemplos correspondem a planos verticais.

Por fim, analisamos os exemplos com curvatura média constante H não-nula. Segue que $\sigma(s) = Hs + \sigma_0$, para alguma constante σ_0 e, portanto, $\dot{u}(s) = \text{sen}(Hs + \sigma_0)$. Desta forma, temos

$$u(s) = -\frac{1}{H}\cos(Hs + \sigma_0).$$

A partir destas expressões, podemos montar o seguintes sistema de equações:

$$\begin{cases} \cos\sigma &= -Hu \\ \text{sen}\sigma &= \pm\sqrt{1 - H^2u^2} \end{cases}$$

de modo que $dv = \pm Hu\sqrt{(1 + 4\tau^2u^2)(1 - H^2u^2)^{-1}}$ ou, sob a forma de integral,

$$v = \pm\int Hu\sqrt{\frac{1 + 4\tau^2u^2}{1 - H^2u^2}}.$$

Eetuando a mudança de variável

$$u = \frac{1}{H}\text{sen}\vartheta,$$

temos

$$du = \frac{1}{H}\cos\vartheta d\vartheta$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} v &= \pm\frac{1}{H}\int \text{sen}\vartheta\sqrt{1 + \frac{4\tau^2}{H^2}\text{sen}^2\vartheta}\, d\vartheta \\ &= \pm\frac{2\tau}{H^2}\int\sqrt{\frac{H^2}{4\tau^2} + 1 - \cos^2\vartheta}\, d(\cos\theta) \\ &= \pm\frac{2\tau}{H^2}\left(\frac{\cos\vartheta}{2}\sqrt{\frac{H^2}{4\tau^2} + 1 - \cos^2\vartheta} + \frac{1 + \frac{H^2}{4\tau^2}}{2}\text{arcsen}\frac{\cos\vartheta}{\sqrt{1 + \frac{H^2}{4\tau^2}}}\right). \end{aligned}$$

Substituindo $\text{sen}\vartheta = uH$ e $\cos\vartheta = \sqrt{1 - u^2H^2}$ e $u = y$ na expressão acima, concluímos que

$$\begin{aligned} v &= \frac{2\tau}{H^2}\left(\frac{\sqrt{1 - u^2H^2}}{2}\sqrt{\frac{H^2}{4\tau^2} + u^2H^2} + \frac{1 + \frac{H^2}{4\tau^2}}{2}\text{arcsen}\frac{\sqrt{1 - u^2H^2}}{\sqrt{1 + \frac{H^2}{4\tau^2}}}\right) \\ &= \frac{\tau}{H}\left(\sqrt{1 - y^2H^2}\sqrt{\frac{1}{4\tau^2} + y^2} + \frac{1 + \frac{H^2}{4\tau^2}}{H}\text{arcsen}\frac{\sqrt{1 - y^2H^2}}{\sqrt{1 + \frac{H^2}{4\tau^2}}}\right), \end{aligned}$$

onde devemos impor a restrição $-\frac{1}{H} \leq y \leq \frac{1}{H}$. Em termos de coordenadas exponenciais, escrevemos este exemplo como gráfico (incompleto) da função

$$z(x,y) = \tau xy \pm \frac{\tau}{H}\left(\sqrt{1-y^2H^2}\sqrt{\frac{1}{4\tau^2}+y^2} + \frac{1+\frac{H^2}{4\tau^2}}{H}\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{1-y^2H^2}}{\sqrt{1+\frac{H^2}{4\tau^2}}}\right),$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] BERNDT, R.; TRICERRI, F.; VANHECKE, L., *Generalized Heisenberg groups and Damek-Ricci harmonic spaces.*Berlin: Springer-Verlag 1995. 125 p. (Lecture Notes in Mathematics 1598).

[2] DANIEL, B., em Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds, a aparecer em Commentari Mathematici Helvetici.

[3] EBERLEIN, P., Geometry of 2-step nilpotent groups with a left invariant metric. *Annales de l'Ecole Normal Sup.,* v.27 , p. $611-660, 1994$.

[4] FIGUEROA, C.;MERCURI, F.;PEDROSA, R., Invariant surfaces of the Heisenberg groups,*Annali di Matematica pura et applicata*, v. 176, p. $173-194, 1999$.

[5] HSIANG, W.-Y. *Lectures in Lie groups.* Singapore: World Scientific, 2000. 108p.

[6] DE LIRA, J.; MELO, M., Isometric immersions into some Lie groups(em preparação).

[7] SPIVAK, M. *A comprehensive introduction to Differential Geometry.* Boston: Publish or Perish, 2005.

[8] TOMTER, P. Constant mean curvature surfaces in the Heisenberg group. AMS Symp. Pure Math.,v. 54,p. $485-496$, 1993.

[9] WARNER, F. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups.*Berlin: Springer-Verlag, 1983.

[10] CARMO,Manfredo, P. do; ASPERTI, A. *Notas de um Curso de Grupos de Lie.*Rio de Janeiro: IMPA, 1974. 92 p.

[11] KOBAYASHI, S.; NOMIZU, K. *Fountations of Differential Geometry.* New York: Interscience, 1969. 2v.