

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EDNO DOS SANTOS SOUSA

UMA CARACTERIZAÇÃO DO TORO COM  
CURVATURA MÉDIA CONSTANTE EM FORMAS  
ESPACIAIS

FORTALEZA  
2008

EDNO DOS SANTOS SOUSA

UMA CARACTERIZAÇÃO DO TORO COM  
CURVATURA MÉDIA CONSTANTE EM FORMAS  
ESPACIAIS

Dissertação Submetida à Coordenação do  
Curso de Pós-Graduação em Matemática,  
da Universidade Federal do Ceará, como  
requisito parcial para obtenção do grau  
de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial.  
Orientador: Prof. Dr. Antonio Gervasio Colares.

FORTALEZA  
2008

S714c Sousa, Edno dos Santos  
Uma caracterização do toro com curvatura média constante em formas espaciais. 2008.  
54 f.; enc.  
Orientador: Prof. Dr. Antonio Gervasio Colares.  
Área de concentração: Geometria Diferencial.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Departamento de Matemática, Fortaleza, 2008.

1. Curvatura Média 2. Toro 3. Formas Espaciais I. Colares, Antonio Gervasio (Orientador) II. Universidade Federal do Ceará - Curso de Mestrado em Matemática III. Título  
CDD 516.36

À minha família e amigos.

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente ao professor Gervasio Colares por tudo o que me ensinou e por sua inesgotável paciência ao me ajudar ao longo de todos esses anos, motivo pelo qual sinto muito orgulho. Gostaria de agradecer também aos professores Oscar Palmas e ao professor Abdênago Barros por terem aceitado participar da banca examinadora. Ao professor Oscar cabe também agradecer pelos conhecimentos transmitidos no curso de verão de 2006. E ao professor Abdênago os meus sinceros agradecimentos por suas valorosas sugestões e pelos vários erros apontados.

Também merecem aqui uma menção de agradecimento a todos os meus familiares, especialmente minha mãe.

É claro que também não poderia deixar de mencionar meus amigos Inácio, Loester, Aurineide, Murilo, Michel, Leidmar, Tiago, Nívea, Luiz Antônio, Raimundo, Flávio, Jonathan e Heloiza pelas conversas sobre matemática e outras coisas mais. A Andrea pela sua competência na orientação dada aos alunos e pela sua paciência para com os mesmos e que sem a sua ajuda a concretização deste trabalho teria sido muito difícil.

Também gostaria de agradecer Universidade Federal do Ceará e à CAPES pelo apoio financeiro.

"É impossível para um homem aprender aquilo  
que ele acha que já sabe."

*Epíteto.*

# Resumo

Nesta dissertação fazemos um estudo de geometria das superfícies isometricamente imersas numa forma espacial tridimensional impondo algumas condições sobre as curvaturas média e gaussiana. Se a curvatura é não positiva prova-se que a superfície é uma esfera, um produto de círculos ou um cilindro. Também é provado que se uma superfície localmente H-deformável é um toro, então sua curvatura média é constante.

**Palavras Chave:** toro, curvatura média, forma espacial, diferencial quadrática de Hopf.

# Abstract

In this dissertation we study the geometry of surfaces isometrically immersed in a 3-dimensional space form imposing some conditions on its mean and gaussian curvature. If the gaussian curvature is non-positive we prove that the surface is a sphere, a product of circles or a cylinder. It is also proved that if a surface locally H-deformable is a torus; then its mean curvature is constant.

**Keywords:** torus, mean curvature, space form, Hopf's quadratic differential.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	<b>3</b>
2.1	Introdução . . . . .	3
2.2	Estrutura riemanniana . . . . .	3
2.3	Imersões . . . . .	3
2.4	Orientação . . . . .	5
2.5	Isometrias . . . . .	6
2.6	Superfícies de Riemann . . . . .	6
2.7	Espaços de recobrimento de uma superfície de Riemann . . . .	8
2.8	Espaços de recobrimento universal . . . . .	9
2.9	Métricas conformemente equivalentes . . . . .	9
2.10	Funções subharmônicas e superharmônicas . . . . .	9
2.11	Superfícies parabólicas . . . . .	10
2.12	Resultados de EDO . . . . .	10
2.13	Teorema de existência e unicidade de imersões . . . . .	11
2.14	Teorema de Cartan . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Formas Simétricas</b>	<b>12</b>
3.1	Introdução . . . . .	12
3.2	Equações de Estrutura . . . . .	12
3.3	Equações de Gauss e Codazzi . . . . .	16
3.4	Formas Quadráticas . . . . .	19
3.5	Laplaciano . . . . .	25
3.6	Métrica com curvatura zero . . . . .	29
<b>4</b>	<b>H-deformações</b>	<b>33</b>
4.1	Introdução . . . . .	33
4.2	Superfícies homeomorfas ao toro H-deformáveis . . . . .	33
4.3	Umbilicidade e H-deformações . . . . .	39

<i>SUMÁRIO</i>	viii
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>44</b>
<b>Índice Remissivo</b>	<b>46</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Seja  $M$  uma superfície munida com uma estrutura riemanniana e  $E^3(c)$  uma forma espacial com curvatura constante  $c$ . Considere  $x : M \rightarrow E^3(c)$  uma imersão isométrica e veja  $M$  como uma superfície de Riemann. O método usado é o da diferencial quadrática de Hopf que consiste na construção da segunda forma fundamental de  $x$ , uma forma quadrática complexa globalmente definida. Quando uma tal forma é holomorfa, isto tem implicações na geometria de  $x$ . Os resultados deste trabalho foram obtidos por Tribuzy em [16]. A metodologia usada é mesma que a usada por Tribuzy, ou seja, o método da diferencial quadrática de Hopf.

Considere em  $M$  um tensor simétrico  $T$  satisfazendo formalmente as equações de Codazzi e considere uma forma quadrática  $\psi(T)$  definida globalmente em  $M$ . Se  $\text{traço}(T)=\text{const.}$ , então ela é uma forma holomorfa em  $M$  como enunciado no lema abaixo. Este simples fato junto com outras propriedades dos tensores simétricos que satisfazem as equações de Codazzi, têm um número de implicações das quais listamos algumas abaixo.

Começamos enunciando o principal lema usado nas demonstrações dos teoremas.

**Lema 1.1.** *Seja  $T$  uma forma bilinear e simétrica sobre uma superfície conexa  $M$ . Se duas quaisquer das condições abaixo são satisfeitas, então todas elas valem:*

- i) o traço de  $T$  é constante;*
- ii)  $T$  satisfaz as equações de Codazzi;*
- iii)  $\psi(T)$  é holomorfa.*

Supondo agora que  $T$  satisfaz as equações de Codazzi e tem traço constante igual a  $t$ , temos

**Lema 1.2.** *Para cada ponto não umbílico de  $M$  (com respeito a  $T$ ) temos*

$$\Delta D = (4D - t^2) \left\{ K + \frac{4|dD|^2}{(4D - t^2)^2} \right\},$$

onde  $D = \det(T)$ .

De posse destes lemas e da noção de superfície H-deformável é possível demonstrarmos os seguintes resultados:

**Teorema 1.1.** *Seja  $M$  uma superfície homeomorfa ao toro  $T^2$  e seja  $x : M \rightarrow E^3(c)$  uma imersão isométrica localmente H-deformável. Então a curvatura média  $H(x)$  da imersão é constante.*

O resultado acima dar uma caracterização do toro com curvatura média constante. A recíproca deste resultado é verdadeira para todas as superfícies por um resultado de Lawson em [11].

Se a imersão for analítica, então as hipóteses sobre  $x$  podem ser enfraquecidas, como mostra o teorema abaixo.

**Corolário 1.1.** *Seja  $M$  uma superfície homeomorfa ao toro  $T^2$  e seja  $x : M \rightarrow E^3(c)$  uma imersão isométrica analítica. Se existe um subconjunto aberto de  $M$  restrito ao qual  $x$  é H-deformável, então  $H(x)$  é constante.*

Tilla Klotz e Robert Osserman em [10] classificaram as imersões em  $\mathbb{R}^3$  de superfícies completas com  $H = \text{const} \neq 0$  e curvatura gaussiana  $K$  tendo sinal constante.

Observe que no caso  $K \leq 0$ , a hipótese  $H = \text{const} \neq 0$  implica que a imersão não contém pontos umbílicos. O próximo teorema generaliza o resultado de Tilla Klotz e Robert Osserman para imersões no espaço hiperbólico ( $c < 0$ ).

**Teorema 1.2.** *Seja  $M$  uma superfície completa e seja  $x : M \rightarrow E^3(c)$ ,  $c < 0$ , uma imersão isométrica com  $H(x) = \text{constante}$ . Assuma que a curvatura gaussiana  $K$  de  $M$  não muda de sinal. Se  $K \leq 0$ , assuma também que  $x$  não contém pontos umbílicos. Então  $x(M)$  é uma esfera geodésica em  $E^3(c)$  ou então  $x(M)$  é o conjunto de pontos equidistantes de uma geodésica completa de  $E^3(c)$ .*

Hoffman em [6] generalizou o resultado de Tilla Klotz e Robert Osserman para imersões em formas espaciais  $E^4(c)$ , com  $c \geq 0$ .

# Capítulo 2

## Preliminares

### 2.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos alguns resultados e definições que são de fundamental importância para todo o restante deste trabalho, todos sem demonstração.

### 2.2 Estrutura riemanniana

**Definição 2.1.** Uma métrica riemanniana (ou estrutura riemanniana) em uma variedade diferenciável  $M$  é uma correspondência que associa a cada ponto  $p \in M$  um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  (i.e., uma forma bilinear, simétrica, positiva definida) no espaço tangente  $T_p M$ , que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: se  $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  é um sistema de coordenadas locais em torno de  $p$ , com  $x(x_1, x_2, \dots, x_n) = q \in x(U)$  e  $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , então  $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$  é uma função diferenciável em  $U$ .

**Exemplo 2.1.** A métrica euclidiana  $g$  em  $\mathbb{R}^n$  com o sistema de coordenadas natural  $x_1, \dots, x_n$  definida por  $g(\partial/\partial x_i, \partial/\partial x_j) = \delta_{ij}$ , onde  $\delta_{ij}$  é o símbolo de Kronecker.

### 2.3 Imersões

**Definição 2.2.** Sejam  $M^m$  e  $N^n$  variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável  $\varphi : M \rightarrow N$  é uma imersão se  $d\varphi_p : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} N$  é injetiva para todo  $p \in M$ . Se, além disto,  $\varphi$  é um homeomorfismo sobre  $\varphi(M) \subset N$ , onde  $\varphi(M)$  tem a topologia induzida por  $N$  diz-se que  $\varphi$  é um mergulho.

**Exemplo 2.2.** A curva  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\alpha(t) = (t^3, t^2)$  é uma aplicação diferenciável mas não é uma imersão, pois a condição de imersão neste caso é equivalente a  $\alpha'(t) \neq 0$ , para todo  $t$ , o que não acontece em  $t = 0$ .

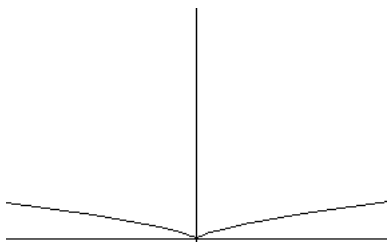


Figura 2.1:

**Exemplo 2.3.** A curva  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\beta(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$  é uma imersão que possui uma auto-interseção para  $t = 0$ . Portanto não é um mergulho.

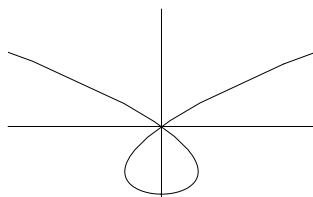


Figura 2.2:

**Exemplo 2.4.** O catenóide dado por  $x(u, v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v)$ ,  $u, v \in \mathbb{R}^2$ .

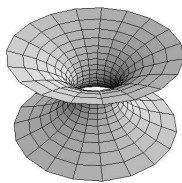


Figura 2.3:

**Exemplo 2.5.** O helicóide dado por  $x(u, v) = (\operatorname{senh}v \cos u, \operatorname{senh}v \operatorname{sen}u, u)$ .

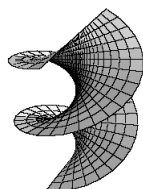


Figura 2.4:

## 2.4 Orientação

**Definição 2.3.** Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Diz-se que  $M$  é orientável se  $M$  admite uma estrutura diferenciável  $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$  tal que para todo par  $\alpha, \beta$ , com  $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = w \neq \emptyset$ , a diferencial da mudança de coordenadas  $x_\beta \circ x_\alpha^{-1}$  tem determinante positivo. Caso contrário diz-se que  $M$  é não-orientável.

**Exemplo 2.6.** A esfera  $\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$  é orientável.

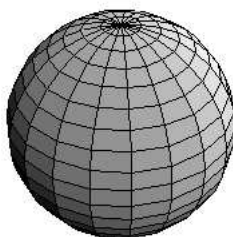


Figura 2.5:

**Exemplo 2.7.** A faixa de Möbius não é orientável.

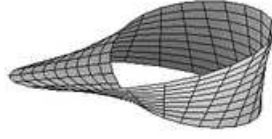


Figura 2.6:

## 2.5 Isometrias

**Definição 2.4.** Sejam  $M$  e  $N$  variedades Riemannianas. Um difeomorfismo  $f : M \rightarrow N$  é chamado uma isometria se :

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)},$$

para todo  $p \in M$ ,  $u, v \in T_p M$ .

**Definição 2.5.** Sejam  $M$  e  $N$  variedades Riemannianas. Uma aplicação diferenciável  $f : M \rightarrow N$  é uma isometria local em  $p \in M$  se existe uma vizinhança  $U \subset M$  de  $p$  tal que  $f : U \rightarrow f(U)$  é uma isometria.

**Proposição 2.1.** *Seja  $x : M \rightarrow E^3(c)$  uma imersão isométrica. Suponhamos que, ou*

(a)  *$M$  é conexa e o conjunto de pontos umbílicos tem um ponto de acumulação, ou*

(b)  *$M$  é homeomorfa ao toro  $T^2$  e contém um ponto umbílico.*

*Então, qualquer outra imersão isométrica  $\tilde{x} : M \rightarrow E^3(c)$ , satisfazendo  $\tilde{H}(\tilde{x}(p)) = H(x(p))$ , para cada  $p \in M$ , coincide com  $x$  a menos de uma isometria de  $E^3(c)$ .*

Para uma demonstração desta proposição veja [17] pag.26.

## 2.6 Superfícies de Riemann

**Definição 2.6.** Uma superfície de Riemann  $M$  é um espaço de Hausdorff com uma família  $\{U_\alpha, Z_\alpha\}$  de homeomorfismos  $Z_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{C} \rightarrow M$  tais que :

- i)  $\{Z_\alpha(U_\alpha)\}$  é uma cobertura de  $M$  por abertos;
- ii)  $Z_\beta^{-1} \circ Z_\alpha : Z_\alpha^{-1}(Z_\alpha(U_\alpha) \cap Z_\beta(U_\beta)) \rightarrow Z_\beta^{-1}(Z_\alpha(U_\alpha) \cap Z_\beta(U_\beta))$  é holomorfa para todo  $\alpha$  e  $\beta$ ;
- iii) A família  $\{Z_\alpha(U_\alpha), Z_\alpha\}$  é maximal com respeito a i) e ii).



**Exemplo 2.8.** O plano complexo  $\mathbb{C}$  com estrutura dada pela identidade.

**Exemplo 2.9.** A esfera de Riemann, i.e., a esfera unitária  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  munida da estrutura definida pelas projeções estereográficas segundo os pólos norte ( $N=(0,0,1)$ ) e sul ( $S=(0,0,-1)$ ) é uma superfície de Riemann.

**Exemplo 2.10.** Os abertos conexos de  $\mathbb{C}$  com a topologia induzida.

**Exemplo 2.11.** O toro: Suponha que  $w_1$  e  $w_2 \in \mathbb{C}$  são linearmente independentes sobre  $\mathbb{R}$ . Defina  $\Gamma := \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2 = \{nw_1 + mw_2; n, m \in \mathbb{Z}\}$ .  $\Gamma$  é chamado um reticulado gerado por  $w_1$  e  $w_2$ . O conjunto de todas as classes de equivalência é denotado por  $\mathbb{C}/\Gamma$ . Seja  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$  a projeção canônica, i.e., a aplicação que associa a cada ponto  $z \in \mathbb{C}$  sua classe de equivalência módulo  $\Gamma$ .

Introduza a seguinte topologia (topologia quociente) em  $\mathbb{C}/\Gamma$ : Um subconjunto  $U \subset \mathbb{C}/\Gamma$  é aberto se  $\pi^{-1}(U) \subset \mathbb{C}$  o é. Com esta topologia  $\mathbb{C}/\Gamma$  é um espaço topológico de Hausdorff e a aplicação  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$  é contínua. Uma vez que  $\mathbb{C}$  é conexo,  $\mathbb{C}/\Gamma$  também o é, bem como compacto, pois é coberto pela imagem de  $\pi$  do paralelogramo compacto  $P := \{\lambda w_1 + \mu w_2; \lambda, \mu \in [0, 1]\}$ .

A aplicação  $\pi$  é aberta, i.e., a imagem de cada aberto  $V \subseteq \mathbb{C}$  é aberta. De fato,  $\widehat{V} := \pi^{-1}(\pi(V))$  é aberto. Mas ,

$$\widehat{V} = \bigcup_{w \in \Gamma} (w + V).$$

Como cada  $w + V$  é aberto,  $\widehat{V}$  também o é.

A estrutura complexa em  $\mathbb{C}/\Gamma$  é definida da seguinte maneira. Seja  $V \subset \mathbb{C}$  um aberto tal que dois quaisquer de seus pontos não são equivalentes módulo  $\Gamma$ . Então  $U := \pi(V)$  é aberto e  $\pi|_V : V \rightarrow U$  é um homeomorfismo. Sua inversa  $\varphi : U \rightarrow V$  é uma carta complexa em  $\mathbb{C}/\Gamma$ . Se  $\mathcal{A}$  é o conjunto de todas as cartas obtidas deste modo. Mostremos que dadas duas cartas quaisquer  $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$ ,  $i=1, 2$ , pertencendo a  $\mathcal{A}$  são holomorficamente compatíveis (ou seja  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$  é holomorfa). Considere a aplicação  $\psi := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ . Para cada  $z \in \varphi_1(U_1 \cap U_2)$  temos  $\pi(\psi(z)) = \varphi_2^{-1}(\psi(z)) = \pi(z)$  e então  $\psi(z) - z \in \Gamma$ . Uma vez que  $\Gamma$  é discreto e  $\psi$  é contínua, isto implica que  $\psi(z) - z$  é constante em cada componente conexa de  $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$ . Então  $\psi$  é holomorfa. Analogamente  $\psi^{-1}$  também é holomorfa.

Considere em  $\mathbb{C}/\Gamma$  a estrutura complexa definida por  $\mathcal{A}$ . Considere agora a aplicação que a cada ponto de  $\mathbb{C}/\Gamma$  representado por  $\lambda w_1 + \mu w_2$ , ( $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ) associa o ponto  $(e^{2\pi i \lambda}, e^{2\pi i \mu}) \in S^1 \times S^1$ . Esta aplicação é um homeomorfismo de  $\mathbb{C}/\Gamma$  sobre o toro  $S^1 \times S^1$ .

**Definição 2.7.** Seja  $M$  uma superfície de Riemann e  $W \subset M$  um subconjunto aberto. Uma função  $f : W \rightarrow \mathbb{C}$  é holomorfa se para cada  $\psi : U \rightarrow V$  em  $M$  a função  $f \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap W) \rightarrow \mathbb{C}$  é holomorfa no sentido usual sobre o conjunto aberto  $\psi(U \cap W) \subset \mathbb{C}$ .

## 2.7 Espaços de recobrimento de uma superfície de Riemann

**Definição 2.8.** Sejam  $M$  e  $\widetilde{M}$ . Uma aplicação de recobrimento  $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$  é uma aplicação de recobrimento se :

- i)  $\pi$  é conforme e  $\pi(\widetilde{M}) = M$ ;
- ii) Para todo  $p \in M$  existe uma vizinhança  $U_p$  de  $p$  em  $M$  tal que  $\pi^{-1}(U_p) = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$ , onde os  $V_{\alpha}$  são abertos disjuntos de  $\widetilde{M}$  tais que  $\pi|_{V_{\alpha}} : V_{\alpha} \rightarrow U_p$  é um homeomorfismo conforme de  $V_{\alpha}$  sobre  $U_p$ .

Os abertos  $U_p$  são chamados abertos admissíveis do recobrimento e  $\widetilde{M}$  é chamado superfície de recobrimento ou espaço de recobrimento de  $M$ .

**Exemplo 2.12.** Seja  $M$  a coroa no plano dada por

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 1 < r < e\}$$

$$\widetilde{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < 1, -\infty < y < \infty\}.$$

A aplicação  $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$  dada por  $\pi(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$  é uma aplicação de recobrimento que leva cada retângulo  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < 1, 2k\pi \leq y < 2(k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$  homeomorficamente sobre a coroa  $M$ .

**Exemplo 2.13.** Seja  $M$  o toro gerado pela rotação de um círculo centrado no ponto  $(a, 0, 0)$  de raio  $r$ ,  $(x - a)^2 + z^2 = r^2$  em torno do eixo pertencente ao plano do círculo, situado a uma distância  $a > r$  do centro círculo e  $\widetilde{M} = \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ . Considere a aplicação  $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$  dada por

$$\pi(\alpha, \beta) = ((a + r \cos \alpha) \cos \beta, (a + r \cos \alpha) \sin \beta, r \sin \alpha),$$

onde  $\beta$  é o ângulo meridiano e  $\alpha$  é o ângulo latitude.

Observe que  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (\arccos \alpha)^2 + r^2 d\alpha^2$ , onde  $u = \beta$  e  $v = \int_0^{\alpha} \frac{r}{a+r \cos \alpha} d\alpha$ . Assim  $du^2 = d\beta^2$  e  $d\alpha^2 = \frac{a+r \cos \alpha}{r^2} dv^2$ . Logo  $ds^2 = (a + r \cos \alpha)^2 (du^2 + dv^2)$ . Portanto  $u$  e  $v$  são coordenadas isotérmicas.

Como  $\alpha$  e  $\beta$  variam entre  $-\pi$  e  $\pi$ , temos que  $u$  varia entre  $-\pi$  e  $\pi$ , e  $v$  varia de  $-l$  a  $l$ , onde  $l = \int_0^{\pi} \frac{r}{a+r \cos \alpha} d\alpha$ .

Portanto usando as coordenadas isotérmicas  $(u, v)$  podemos transformar cada retângulo  $R = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u_0 - \pi \leq u < u_0 + \pi, v_0 - l \leq v < v_0 + l\}$

conformemente sobre o toro  $M$ , onde  $(u_0, v_0)$  é um ponto qualquer de  $\widetilde{M}$ , porém fixado.

## 2.8 Espaços de recobrimento universal

**Teorema 2.1.** *Uma superfície de Riemann  $M$  conexa admite um espaço de recobrimento  $\widetilde{M}$  simplesmente conexo.*

Para mais detalhes veja [1].

O espaço de recobrimento  $\widetilde{M}$  do teorema acima contém todos os outros espaços de recobrimento de  $M$  e é chamado espaço de recobrimento universal de  $M$  (ver [12] pag.163). Sejam  $M$  uma superfície de Riemann e  $\widetilde{M}$  o seu espaço de recobrimento. Dada uma estrutura sobre  $M$  a aplicação de recobrimento  $\pi$  induz naturalmente, a mesma estrutura sobre  $\widetilde{M}$ .

Também se  $I$  é uma métrica sobre  $M$  o recobrimento  $\pi$  induz uma métrica  $\widetilde{I}$  sobre  $\widetilde{M}$ . E se  $M$  for completa com a métrica  $I$  então  $\widetilde{M}$  será completa com a métrica  $\widetilde{I}$  desde que  $I \leq \widetilde{I}$ . Na verdade se o recobrimento for universal com a métrica  $\widetilde{I}$  então  $M$  será completa se e só se  $\widetilde{M}$  for completa.

## 2.9 métricas conformemente equivalentes

**Definição 2.9.** Sejam  $M$  e  $\widetilde{M}$  superfícies de Riemann com métricas  $I$  e  $\widetilde{I}$  respectivamente e  $F : M \rightarrow \widetilde{M}$  um homeomorfismo conforme. Se existe uma função  $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\widetilde{I} = e^{2\rho}I$ , diremos que as métricas são conformemente equivalentes.

## 2.10 Funções subharmônicas e superharmônicas

**Definição 2.10.** Seja  $M$  uma superfície de Riemann e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável de classe  $C^2$ . Dizemos que  $f$  é subharmônica se  $\Delta f \geq 0$  e superharmônica se  $\Delta f \leq 0$ .

**Teorema 2.2** (Hopf). *Se  $M$  é uma superfície compacta e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável subharmônica (ou superharmônica), então  $f$  é constante. Se  $M$  é parabólica e  $f$  é superharmônica limitada inferiormente (ou subharmônica limitada superiormente), então  $f$  é constante.*

Para mais detalhes veja [7].

**Teorema 2.3** (Hopf). *Se  $M$  é uma superfície compacta de gênero zero, imersa em  $\mathbb{R}^3$  com curvatura média  $H$  constante, então  $M$  é uma esfera de raio  $\frac{1}{H}$ .*

## 2.11 Superfícies parabólicas

**Definição 2.11.** Uma superfície de Riemann  $M$  é chamada parabólica se não existem funções subharmônicas negativas não constantes em  $M$ .

**Teorema 2.4** (Blanc-Fiala-Huber). *Se uma superfície de Riemann  $M$  aberta admite uma métrica conforme completa  $d\sigma$  e se  $\iint_M K^- d\sigma$  é finita, então  $M$  é parabólica.*

Para ver a demonstração consulte [8].

## 2.12 Resultados de EDO

**Lema 2.1.** *O seguinte sistema de funções:*

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y) &= A(x, y, \varphi(x, y)) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y) &= B(x, y, \varphi(x, y)).\end{aligned}$$

onde  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  e  $B$  diferenciáveis tem solução se e somente se  $\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial y}$ . Além disso, impondo-se uma condição inicial  $\varphi(x_0, y_0) = r_0$ , então a solução é única.

A demonstração segue do teorema de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias e a diferenciabilidade das soluções com respeito as condições iniciais.

O lema acima pode ser reenunciado em termos de variáveis complexas como segue:

**Proposição 2.2.** *O sistema de equações*

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial z}(z) &= A(z, W) \\ \frac{\partial W}{\partial \bar{z}}(z) &= B(z, W)\end{aligned}$$

tem solução se e somente se  $\frac{\partial A}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial B}{\partial z}$ . Além disso impondo-se a condição  $W(z_0) = r_0$ , a solução é única.

A demonstração destes fato pode ser encontrada em [14] ou [9].

## 2.13 Teorema de existência e unicidade de imersões

**Teorema 2.5** (Teorema de Existência e Unicidade de Imersões). *Seja  $M$  uma superfície simplesmente conexa e suponhamos que existe uma forma bilinear simétrica  $B$  definida em  $M$ , satisfazendo as equações de Gauss, para algum  $c \in \mathbb{R}$  e às equações de Codazzi. Então existe uma imersão isométrica  $x : M \rightarrow E^3(c)$ , tal que  $B$  é a segunda forma fundamental  $II$  de  $x$ . Se  $\tilde{x} : M \rightarrow E^3(c)$  é uma outra imersão isométrica tal que  $\widetilde{II} = II$ , onde  $\widetilde{II}$  é a segunda forma fundamental de  $\tilde{x}$ . Então  $x$  e  $\tilde{x}$  coincidem a menos de uma isometria de  $E^3(c)$ , isto é, existe uma isometria  $L$  de  $E^3(c)$  tal que  $\tilde{x} = L \circ x$ .*

Para uma prova deste teorema veja [15], pag.80.

## 2.14 Teorema de Cartan

Sejam  $M$  e  $\widetilde{M}$  duas variedades riemannianas de mesma dimensão  $n$  e sejam  $p \in M$  e  $\tilde{p} \in \widetilde{M}$ . Seja  $i : T_p M \rightarrow T_{\tilde{p}} \widetilde{M}$  uma isometria linear. Considere  $V \subset M$  uma vizinhança normal de  $p$  tal que  $\exp_{\tilde{p}}$  está definida em  $i \circ \exp_p^{-1}(V)$ . Considere também  $f : V \rightarrow \widetilde{M}$  definida por  $f(q) = \exp_{\tilde{p}} \circ i \circ \exp_p^{-1}(q)$ ,  $q \in V$ ,  $\gamma : [0, t] \rightarrow M$  com  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma(t) = q$ , uma geodésica normalizada. Considere ainda  $P_t$  o transporte paralelo ao longo de  $\gamma$  de  $\gamma(0)$  a  $\gamma(t)$  e  $\Phi_t : T_q M \rightarrow T_{f(q)} \widetilde{M}$  definida por  $\Phi_t(v) = \widetilde{P}_t \circ i \circ P_t^{-1}(v)$ ,  $v \in T_q M$ , onde  $\widetilde{P}_t$  é o transporte paralelo ao longo da geodésica normalizada  $\tilde{\gamma} : [0, t] \rightarrow \widetilde{M}$  dada por  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$ ,  $\tilde{\gamma}'(0) = i(\gamma'(0))$ . E também considere  $R$  e  $\widetilde{R}$  as curvaturas de  $M$  e  $\widetilde{M}$ , respectivamente. Então,

**Teorema 2.6** (Cartan). *Com as notações acima, se para todo  $q \in V$  e todo  $x, y, u, v \in T_q M$  tem-se*

$$\langle R(x, y)u, v \rangle = \langle \widetilde{R}(\Phi_t(x), \Phi_t(y))\Phi_t(u), \Phi_t(v) \rangle,$$

então  $f : V \rightarrow f(V) \subset \widetilde{M}$  é uma isometria local e  $df_p = i$ .

Para uma demonstração deste teorema e resultados relacionados veja [3].

# Capítulo 3

## Formas Simétricas

### 3.1 Introdução

No que segue diferenciável significa  $C^\infty$ . Todas as variedades serão diferenciáveis bem como suas aplicações, campos vetoriais e formas exteriores.

### 3.2 Equações de Estrutura

Seja  $E$  uma variedade  $n$ -dimensional,  $\{e_1, \dots, e_n\}$  um referencial móvel definido sobre um subconjunto aberto  $U$  de  $E$ ,  $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  seu coreferencial associado e  $\{\omega_{ij}\}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  as formas de conexão associadas. Temos as seguintes relações:

**Proposição 3.1.**

$$\begin{cases} d\omega_i = \sum_k \omega_k \wedge \omega_{ki} \\ \omega_{ij} = -\omega_{ji} \end{cases} \quad (3.1)$$

que é conhecida como 1ª equação estrutural.

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \Omega_{ij} \quad (3.2)$$

que é conhecida como 2ª equação estrutural, onde  $\Omega_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  são as formas de curvatura de  $E$ .

*Demonstração.* De fato, para qualquer vetor tangente  $X \in TU$  temos uma expansão de  $\nabla_X e_k$  em termos do referencial  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , ou seja

$$\nabla_X e_i := \sum_j \omega_{ij}(X) e_j.$$

Equivalentemente

$$\omega_{ij}(X) = \langle \nabla_X e_i, e_j \rangle.$$

Pela compatibilidade de  $\nabla$ , temos que  $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ .  
 Calculemos a diferencial exterior de  $\omega_i$ :

$$\begin{aligned} d\omega_i(X, Y) &= X(\omega_i(Y)) - Y(\omega_i(X)) - \omega_i([X, Y]) \\ &= X(\langle Y, e_i \rangle) - Y(\langle X, e_i \rangle) - \langle [X, Y], e_i \rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, e_i \rangle + \langle Y, \nabla_X e_i \rangle - \langle \nabla_Y X, e_i \rangle + \\ &\quad - \langle X, \nabla_Y e_i \rangle - \langle [X, Y], e_i \rangle \\ &= \langle \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], e_i \rangle + \langle Y, \nabla_X e_i \rangle + \\ &\quad - \langle X, \nabla_Y e_i \rangle \\ &= \langle Y, \sum_j \omega_{ij}(X) e_j \rangle - \langle X, \sum_j \omega_{ij}(Y) e_j \rangle \\ &= \sum_j \omega_{ij}(X) \langle Y, e_j \rangle - \sum_j \omega_{ij}(Y) \langle X, e_j \rangle \\ &= \sum_j [\omega_{ij}(X) \omega_j(Y) - \omega_{ij}(Y) \omega_j(X)] \\ &= \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j(X, Y) \\ &= \sum_j \omega_j \wedge \omega_{ji}(X, Y). \end{aligned}$$

Logo,

$$d\omega_i = \sum_j \omega_j \wedge \omega_{ji},$$

ficando assim demonstrada a primeira equação estrutural.

Calculemos agora a diferencial de  $\omega_{ij}$ :

$$\begin{aligned}
d\omega_{ij}(X, Y) &= X(\omega_{ij}(Y)) - Y(\omega_{ij}(X)) - \omega_{ij}([X, Y]) \\
&= X(\langle \nabla_Y e_i, e_j \rangle) - Y(\langle \nabla_X e_i, e_j \rangle) - \langle \nabla_{[X, Y]} e_i, e_j \rangle \\
&= \langle \nabla_X \nabla_Y e_i, e_j \rangle + \langle \nabla_Y e_i, \nabla_X e_j \rangle - \langle \nabla_Y \nabla_X e_i, e_j \rangle + \\
&\quad - \langle \nabla_X e_i, \nabla_Y e_j \rangle - \langle \nabla_{[X, Y]} e_i, e_j \rangle \\
&= \langle \nabla_X \nabla_Y e_i - \nabla_Y \nabla_X e_i - \nabla_{[X, Y]} e_i, e_j \rangle + \langle \nabla_Y e_i, \nabla_X e_j \rangle + \\
&\quad - \langle \nabla_X e_i, \nabla_Y e_j \rangle \\
&= -\langle R(X, Y) e_i, e_j \rangle + \langle \sum_k \omega_{ik}(Y) e_k, \sum_l \omega_{jl}(X) e_l \rangle + \\
&\quad - \langle \sum_k \omega_{ik}(X) e_k, \sum_l \omega_{jl}(Y) e_l \rangle \\
&= \langle R(X, Y) e_j, e_i \rangle + \sum_k \omega_{ik}(Y) \omega_{jk}(X) - \sum_k \omega_{ik}(X) \omega_{jk}(Y) \\
&= \langle R(X, Y) e_j, e_i \rangle + \sum_k \omega_{jk} \wedge \omega_{ik}(X, Y) \\
&= \langle R(X, Y) e_j, e_i \rangle - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{jk}(X, Y) \\
&= \langle R(X, Y) e_j, e_i \rangle + \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}(X, Y) \\
&= \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}(X, Y) + \omega_i(R(X, Y) e_j) \\
&= \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}(X, Y) + \Omega_{ij}(X, Y),
\end{aligned}$$

onde  $\Omega_{ij}(X, Y) = \omega_i(R(X, Y) e_j)$  é a forma de curvatura.

Portanto,

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \Omega_{ij}$$

ficando assim demonstrada a segunda equação estrutural.  $\square$

Dizemos que  $E$  tem curvatura constante  $c \in \mathbb{R}$  se  $\Omega_{ij} = -c\omega_i \wedge \omega_j$  em  $E$ . Daqui por diante  $E^3(c)$  denotará uma variedade riemanniana tridimensional, completa, simplesmente conexa com curvatura constante  $c$ , ou seja, é uma forma espacial tridimensional. Consideraremos imersões de superfícies em  $E^3(c)$ . Todas as superfícies consideradas são orientadas e têm uma estrutura riemanniana.

Seja  $M$  uma superfície e  $x : M \rightarrow E^3(c)$  uma imersão isométrica. Em cada



$p \in M$  podemos definir um referencial  $\{e_1, e_2, e_3\}$  numa vizinhança de  $x(p)$  adaptado à imersão. Uma vez que  $x$  é localmente um mergulho, podemos identificar  $M$  com  $x(M)$  (localmente). Via esta identificação  $\{e_1, e_2\}$  é um referencial local em  $M$ . As formas induzidas  $x^*\omega_i$  e  $x^*\omega_{ij}$  (as quais serão denotadas por  $\omega_i$  e  $\omega_{ij}$ ) satisfazem a primeira e a segunda equação estrutural.

**Lema 3.1** (Cartan). *Se  $\omega_1, \dots, \omega_n$  são 1-formas ( $C^\infty$ ) linearmente independentes numa variedade  $\Sigma$  (de dimensão  $n' \geq n$ ), e  $\theta_1, \dots, \theta_n$  são 1-formas ( $C^\infty$ ) em  $\Sigma$  satisfazendo*

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \wedge \theta_i = 0,$$

então existem únicas funções  $f_{ij}(C^\infty)$  definidas em  $\Sigma$  tais que

$$\theta_i = \sum_{j=1}^n f_{ij} \omega_j;$$

mais ainda,

$$f_{ij} = f_{ji}.$$

*Demonstração.* Numa vizinhança de um ponto qualquer podemos escolher 1-formas ( $C^\infty$ )  $\omega_{n+1}, \dots, \omega_{n'}$  tais que  $\omega_1, \dots, \omega_{n'}$  são linearmente independentes nesta vizinhança. Então existem funções ( $C^\infty$ )  $f_{ij}$  ( $i \leq n, j \leq n'$ ) com

$$\theta_i = \sum_{j=1}^{n'} f_{ij} \omega_j.$$

Pela condição sobre as  $\theta_i$ 's, temos que

$$0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n'} f_{ij} \omega_i \wedge \omega_j = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (f_{ij} - f_{ji}) \omega_i \wedge \omega_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j > n} f_{ij} \omega_i \wedge \omega_j.$$

Uma vez que  $\omega_i \wedge \omega_j$ , para  $i < j$ , são linearmente independentes, temos

$$f_{ij} - f_{ji} = 0$$

para  $i, j \leq n$  e  $f_{ij} = 0$  para  $j > n$ . □

Usando o lema de Cartan e que  $\omega_3 = 0$  ( de onde segue que  $0 = d\omega_3 = \sum_k \omega_k \wedge \omega_{k3}$ ) obtemos

$$\omega_{i3} = \sum_j h_{ij}\omega_j, \quad h_{ij} = h_{ji}, \quad (3.3)$$

onde  $h_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$  são funções diferenciáveis.

A segunda forma fundamental  $h$  da imersão é definida por

$$h = \sum_{i,j} h_{ij}\omega_i\omega_j$$

e

$$H = \frac{1}{2} \sum_i h_{ii}$$

é a curvatura média da imersão.

### 3.3 Equações de Gauss e Codazzi

**Lema 3.2.** *A curvatura gaussiana  $K$  de  $M$  satisfaz  $d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2$ .*

*Demonstração.* De fato,

$$\begin{aligned} d\omega_{12}(e_1, e_2) &= e_1(\omega_{12}(e_2)) - e_2(\omega_{12}(e_1)) - \omega_{12}([e_1, e_2]) \\ &= e_1(\langle \nabla_{e_2} e_1, e_2 \rangle) - e_2(\langle \nabla_{e_1} e_1, e_2 \rangle) - \langle \nabla_{[e_1, e_2]} e_1, e_2 \rangle \\ &= \langle \nabla_{e_1} \nabla_{e_2} e_1, e_2 \rangle + \langle \nabla_{e_2} e_1, \nabla_{e_1} e_2 \rangle - \langle \nabla_{e_2} \nabla_{e_1} e_1, e_2 \rangle + \\ &\quad - \langle \nabla_{e_1} e_1, \nabla_{e_2} e_2 \rangle - \langle \nabla_{[e_1, e_2]} e_1, e_2 \rangle \\ &= \langle R(e_1, e_2)e_1, e_2 \rangle + \langle \nabla_{e_2} e_1, e_1 \rangle \langle \nabla_{e_1} e_2, e_1 \rangle + \\ &\quad + \langle \nabla_{e_2} e_1, e_2 \rangle \langle \nabla_{e_1} e_2, e_2 \rangle - \langle \nabla_{e_1} e_1, e_1 \rangle \langle \nabla_{e_2} e_2, e_1 \rangle + \\ &\quad - \langle \nabla_{e_1} e_1, e_2 \rangle \langle \nabla_{e_2} e_2, e_2 \rangle \\ &= -\langle R(e_1, e_2)e_2, e_1 \rangle \\ &= -K(\omega_1 \wedge \omega_2)(e_1, e_2). \end{aligned}$$

□

Ponho

$$\omega_{12} = a\omega_1 + b\omega_2,$$

obtemos,

$$\begin{aligned}
d\omega_{12}(e_1, e_2) &= e_1(\omega_{12}(e_2)) - e_2(\omega_{12}(e_1)) - \omega_{12}([e_1, e_2]) \\
&= e_1(b) - e_2(a) - \omega_{12}(\langle \nabla_{e_1} e_2, e_1 \rangle e_1 - \langle \nabla_{e_2} e_1, e_1 \rangle e_1 + \\
&\quad + \langle \nabla_{e_1} e_2, e_2 \rangle e_2 - \langle \nabla_{e_2} e_1, e_2 \rangle e_2) \\
&= e_1(b) - e_2(a) - a \langle \nabla_{e_1} e_2, e_1 \rangle + a \langle \nabla_{e_2} e_1, e_1 \rangle + \\
&\quad - b \langle \nabla_{e_1} e_2, e_2 \rangle + b \langle \nabla_{e_2} e_1, e_2 \rangle \\
&= e_1(b) - e_2(a) + a^2 + b^2 \\
&= \{-e_2(a) + e_1(b) + a^2 + b^2\} \omega_1 \wedge \omega_2.
\end{aligned}$$

Daí,

$$d\omega_{12} = \{-e_2(a) + e_1(b) + a^2 + b^2\} \omega_1 \wedge \omega_2.$$

Temos então,

$$K = e_2(a) - e_1(b) - a^2 - b^2.$$

Segue de 3.3 e de 3.2 que

$$\begin{aligned}
d\omega_{12} &= \sum_{k=1}^3 \omega_{1k} \wedge \omega_{k2} + \Omega_{12} \\
&= \omega_{13} \wedge \omega_{32} + \Omega_{12} \\
&= -\omega_{13} \wedge \omega_{23} + \Omega_{12} \\
&= -(h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2) \wedge (h_{21}\omega_1 + h_{22}\omega_2) - c\omega_1 \wedge \omega_2 \\
&= -(h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21})\omega_1 \wedge \omega_2 - c\omega_1 \wedge \omega_2 \\
&= -(det(h) + c)\omega_1 \wedge \omega_2.
\end{aligned}$$

Daí,

$$K = c + det(h)$$

que é conhecida como equação de Gauss.

Tomando as derivadas em 3.3

$$\begin{aligned}
d\omega_{i3}(e_1, e_2) &= d(h_{i1}\omega_1 + h_{i2}\omega_2)(e_1, e_2) \\
&= e_1(h_{i2}) - e_2(h_{i1}) - (h_{i1}\omega_1 + h_{i2}\omega_2)([e_1, e_2]) \\
&= e_1(h_{i2}) - e_2(h_{i1}) - h_{i1}\langle \nabla_{e_1} e_2, e_1 \rangle + h_{i2}\langle \nabla_{e_2} e_1, e_2 \rangle \\
&= e_1(h_{i2}) - e_2(h_{i1}) + ah_{i1} + bh_{i2},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} d\omega_{13}(e_1, e_2) &= e_1(h_{12}) - e_2(h_{11}) + ah_{11} + bh_{12} \\ d\omega_{23}(e_1, e_2) &= e_1(h_{22}) - e_2(h_{11}) + ah_{21} + bh_{22}. \end{aligned}$$

Usando agora 3.2, obtemos

$$\begin{aligned} d\omega_{13} &= \sum_{k=1}^3 \omega_{1k} \wedge \omega_{k3} + \Omega_{13} \\ &= \omega_{12} \wedge \omega_{23} + \Omega_{13} \\ &= (a\omega_1 + b\omega_2) \wedge (h_{21}\omega_1 + h_{22}\omega_2) + \Omega_{13} \\ &= (ah_{22} - bh_{21})\omega_1 \wedge \omega_2 + \Omega_{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\omega_{23} &= \omega_{21} \wedge \omega_{13} + \Omega_{23} \\ &= -\omega_{12} \wedge \omega_{13} + \Omega_{23} \\ &= -(a\omega_1 + b\omega_2) \wedge (h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2) + \Omega_{23} \\ &= -(ah_{12} - bh_{11})\omega_1 \wedge \omega_2 + \Omega_{23}. \end{aligned}$$

Como  $E^3(c)$  tem curvatura constante  $c$ , temos que

$$\Omega_{13} = -c\omega_1 \wedge \omega_3 = 0 = -c\omega_2 \wedge \omega_3 = \Omega_{23}$$

daí,

$$\begin{aligned} d\omega_{13}(e_1, e_2) &= ah_{22} - bh_{21} \\ d\omega_{23}(e_1, e_2) &= -(ah_{12} - bh_{11}). \end{aligned}$$

Comparando com os valores de  $d\omega_{13}(e_1, e_2)$  e  $d\omega_{23}(e_1, e_2)$ , anteriormente calculados, obtemos

$$\begin{cases} e_1(h_{12}) - e_2(h_{11}) + a(h_{11} - h_{22}) + 2bh_{12} = 0 \\ e_1(h_{22}) - e_2(h_{21}) + 2ah_{12} + b(h_{22} - h_{11}) = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

que são conhecidas como equações de Codazzi.

### 3.4 Formas Quadráticas

Dizemos que uma forma bilinear  $T$  definida em  $M$  é diferenciável se sua expressão num referencial local é dada por funções diferenciáveis.

**Definição 3.1.** Dizemos que uma forma bilinear simétrica  $T$  definida em  $M$  satisfaz as equações de Codazzi se

$$\begin{cases} e_1(T_{12}) - e_2(T_{11}) + a(T_{11} - T_{22}) + 2bT_{12} &= 0 \\ e_1(T_{22}) - e_2(T_{21}) + 2aT_{12} + b(T_{22} - T_{11}) &= 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

onde os  $T_{ij} = T(e_i, e_j)$  são as componentes de  $T$  num referencial local  $\{e_1, e_2\}$  de  $M$ .

Considere a forma quadrática complexa  $\psi(T)$  construída a partir das componentes locais  $T_{ij}$  de uma forma bilinear simétrica  $T$  definida em  $M$ .

$$\psi(T) = \{T_{11} - T_{22} - 2iT_{12}\}(\omega_1 + i\omega_2)^2.$$

**Lema 3.3.** *A forma complexa  $\psi(T)$  não depende do referencial escolhido e assim está globalmente definida.*

*Demonstração.* Considere em  $p \in M$  o referencial  $\{e_1, e_2\}$  e seu coreferencial associado  $\{\omega_1, \omega_2\}$ . Considere agora o referencial  $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$  obtido a partir de  $\{e_1, e_2\}$  por uma rotação de um ângulo  $\theta$ , e seu coreferencial  $\{\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2\}$ . Note que

$$\tilde{e}_1 + i\tilde{e}_2 = e^{i\theta}(e_1 + ie_2).$$

Temos que

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1(\tilde{e}_1) &= \tilde{\omega}_1(\cos\theta e_1 + \sen\theta e_2) = \cos\theta\tilde{\omega}_1(e_1) + \sen\theta\tilde{\omega}_1(e_2) \\ \tilde{\omega}_1(\tilde{e}_2) &= \tilde{\omega}_1(-\sen\theta e_1 + \cos\theta e_2) = -\sen\theta\tilde{\omega}_1(e_1) + \cos\theta\tilde{\omega}_1(e_2) \\ \tilde{\omega}_2(\tilde{e}_1) &= \tilde{\omega}_2(\cos\theta e_1 + \sen\theta e_2) = \cos\theta\tilde{\omega}_2(e_1) + \sen\theta\tilde{\omega}_2(e_2) \\ \tilde{\omega}_2(\tilde{e}_2) &= \tilde{\omega}_2(\sen\theta e_1 + \cos\theta e_2) = -\sen\theta\tilde{\omega}_2(e_1) + \cos\theta\tilde{\omega}_2(e_2) \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1(e_1) &= \cos\theta\tilde{\omega}_1(\tilde{e}_1) - \sen\theta\tilde{\omega}_1(\tilde{e}_2) = \cos\theta\omega_1(e_1) \\ \tilde{\omega}_1(e_2) &= \sen\theta\tilde{\omega}_1(\tilde{e}_1) + \cos\theta\tilde{\omega}_1(\tilde{e}_2) = \sen\theta\omega_2(e_2) \\ \tilde{\omega}_2(e_1) &= \cos\theta\tilde{\omega}_2(\tilde{e}_1) - \sen\theta\tilde{\omega}_2(\tilde{e}_2) = -\sen\theta\omega_1(e_1) \\ \tilde{\omega}_2(e_2) &= \sen\theta\tilde{\omega}_2(\tilde{e}_1) + \cos\theta\tilde{\omega}_2(\tilde{e}_2) = \cos\theta\omega_2(e_2), \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_1 &= \cos\theta\omega_1 + \operatorname{sen}\theta\omega_2 \\ \tilde{\omega}_2 &= -\operatorname{sen}\theta\omega_1 + \cos\theta\omega_2.\end{aligned}$$

Logo,

$$\tilde{\omega}_1 + i\tilde{\omega}_2 = e^{-i\theta}(\omega_1 + i\omega_2).$$

Fazendo  $\tilde{T}_{ij} = T(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j)$ , obtemos

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{11} &= T(\cos\theta e_1 + \operatorname{sen}\theta e_2, \cos\theta e_1 + \operatorname{sen}\theta e_2) \\ &= \cos^2\theta T_{11} + \operatorname{sen}^2\theta T_{22} + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta T_{12} \\ \tilde{T}_{22} &= T(-\operatorname{sen}\theta e_1 + \cos\theta e_2, -\operatorname{sen}\theta e_1 + \cos\theta e_2) \\ &= \operatorname{sen}^2\theta T_{11} + \cos^2\theta T_{22} - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta T_{12} \\ \tilde{T}_{12} &= T(\cos\theta e_1 + \operatorname{sen}\theta e_2, -\operatorname{sen}\theta e_1 + \cos\theta e_2) \\ &= -\cos\theta\operatorname{sen}\theta T_{11} + \cos\theta\operatorname{sen}\theta T_{22} + \cos^2\theta T_{12} - \operatorname{sen}^2\theta T_{12}.\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{11} - \tilde{T}_{22} - 2i\tilde{T}_{12} &= \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta + 2i\cos\theta\operatorname{sen}\theta T_{11} - (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta + \\ &\quad + 2i\cos\theta\operatorname{sen}\theta)T_{22} - 2i(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta + 2i\cos\theta\operatorname{sen}\theta)T_{12}. \\ &= e^{2i\theta}(T_{11} - T_{22} - 2iT_{12}).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\psi(T) &= \{\tilde{T}_{11} - \tilde{T}_{22} - 2i\tilde{T}_{12}\}(\tilde{\omega}_1 + i\tilde{\omega}_2)^2 \\ &= e^{2i\theta}\{T_{11} - T_{22} - 2iT_{12}\}e^{-2i\theta}(\omega_1 + i\omega_2)^2 \\ &= \{T_{11} - T_{22} - 2iT_{12}\}(\omega_1 + i\omega_2)^2,\end{aligned}$$

isto é,  $\psi(T)$  não depende do referencial considerado e assim está globalmente definida. □

**Observação:** Denotemos por  $U(\theta)$  a rotação por  $\theta$  em cada espaço tangente de  $M$  (no sentido positivo da orientação dada), e seja  $\bar{T}$  uma outra forma bilinear simétrica em  $M$ . Suponha que as matrizes de  $T, \bar{T}$  e  $U(\theta)$  na base  $\{e_1, e_2\}$  (denotadas por  $[T], [\bar{T}]$  e  $[U(\theta)]$ , respectivamente) satisfazem

$[\bar{T}] = [U(\theta)]^{-1}[T][U(\theta)]$ , então  $\psi(\bar{T}) = e^{2i\theta}\psi(T)$ .

De fato,

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

nos dá que

$$\begin{aligned} \bar{T}_{11} &= T_{11}\cos^2\theta + T_{12}\text{sen}\theta\cos\theta + T_{21}\cos\theta\text{sen}\theta + T_{22}\text{sen}^2\theta \\ \bar{T}_{12} &= -T_{11}\cos\theta\text{sen}\theta + T_{12}\cos^2\theta - T_{21}\text{sen}^2\theta + T_{22}\text{sen}\theta\cos\theta \\ \bar{T}_{21} &= -T_{11}\text{sen}\theta\cos\theta - T_{12}\text{sen}^2\theta + T_{21}\cos^2\theta + T_{22}\text{sen}\theta\cos\theta \\ \bar{T}_{22} &= T_{11}\text{sen}^2\theta - T_{12}\text{sen}\theta\cos\theta - T_{21}\text{sen}\theta\cos\theta + T_{22}\cos^2\theta. \end{aligned}$$

Usando agora que  $T_{12} = T_{21}$ , obtemos

$$\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22} - 2i\bar{T}_{12} = e^{2i\theta}(T_{11} - T_{22} - 2iT_{12}).$$

Logo,

$$\psi(\bar{T}) = e^{2i\theta}\psi(T). \quad (3.6)$$

**Proposição 3.2.** *Para cada  $p \in M$  existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  com uma parametrização conforme, ou seja, existe um subconjunto aberto  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  e um difeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow V$  satisfazendo*

$$\left| \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right| = \left| \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right| \quad e \quad \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right\rangle = 0,$$

onde  $x$  e  $y$  são as coordenadas de  $\mathbb{R}^2$ .

Uma prova disto pode ser encontrada em [2] pp.15-35.

**Definição 3.2.** Uma forma quadrática complexa  $\psi$  definida em  $M$  é holomorfa se sua expressão em um sistema de coordenadas conforme é dada por  $\psi = fdz^2$ , onde  $z = x + iy$  e  $f$  é uma função holomorfa em  $U$  (por simplicidade, identificamos  $\psi$  e  $\varphi^*(\psi)$ ), onde  $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  é uma carta.

**Lema 3.4.** *Seja  $T$  uma forma bilinear simétrica sobre uma superfície conexa  $M$ . Se duas quaisquer das condições abaixo são satisfeitas, então todas valem*

- i) o traço de  $T$  é constante;
- ii)  $T$  satisfaz as equações de Codazzi;
- iii)  $\psi(T)$  é holomorfa.

*Demonstração.* Seja  $\varphi : U \rightarrow V \subseteq M$  uma parametrização conforme. Tome  $e_1 = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$  e  $e_2 = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ , onde  $\lambda = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|$ . O coreferencial correspondente é dado por  $\omega_1 = \lambda dx$  e  $\omega_2 = \lambda dy$ . Calculemos agora a expressão de  $\omega_{12}$  em termos de  $\omega_1$  e  $\omega_2$ . Por definição,

$$\begin{aligned} \omega_{12}(e_1) &= \langle \nabla_{e_1} e_1, e_2 \rangle = -\langle e_1, \nabla_{e_1} e_2 \rangle = -\frac{1}{\lambda^2} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle \\ &= -\frac{1}{\lambda^3} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado  $\lambda^2 = \langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rangle$ . Daí,

$$2\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\lambda) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rangle) = 2 \langle \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rangle$$

ou seja,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \langle \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \rangle.$$

Multiplicando ambos os lados da equação acima por  $\frac{-1}{\lambda^2}$  obtemos,

$$\frac{-1}{\lambda^2} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\lambda) = \frac{-1}{\lambda^3} \langle \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \rangle$$

logo,

$$\omega_{12}(e_1) = \frac{-1}{\lambda} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\lambda) \omega_1(e_1) = \frac{-1}{\lambda} e_2(\lambda) \omega_1(e_1).$$

De modo análogo mostra-se que

$$\omega_{12}(e_2) = \frac{1}{\lambda} e_1(\lambda) \omega_2(e_2).$$

Portanto,

$$\omega_{12} = \frac{-1}{\lambda} e_2(\lambda) \omega_1 + \frac{1}{\lambda} e_1(\lambda) \omega_2.$$

Substituindo agora os valores de  $a$  e  $b$  em 3.5, obtemos

$$\begin{cases} e_1(T_{12}) - e_2(T_{11}) - \frac{1}{\lambda} e_2(\lambda)(T_{11} - T_{22}) + \frac{2}{\lambda} e_1(\lambda) T_{12} &= 0 \\ e_1(T_{22}) - e_2(T_{21}) - \frac{2}{\lambda} e_2(\lambda) T_{12} - \frac{1}{\lambda} e_1(\lambda)(T_{11} - T_{22}) &= 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

que são as equações de Codazzi.

Uma vez que

$$(\omega_1 + i\omega_2)^2 = (\lambda dx + i\lambda dy)^2 = \lambda^2(dx + idy)^2 = \lambda^2 dz^2,$$



segue que

$$\psi(T) = \lambda^2 \{T_{11} - T_{22} - 2iT_{12}\} dz^2.$$

Daí segue que

$$f = \lambda^2 \{T_{11} - T_{22} - 2iT_{12}\}.$$

Escrevamos  $f$  na forma  $f = u + iv$ , onde  $u = \lambda^2(T_{11} - T_{22})$  e  $v = -2\lambda^2 T_{12}$ . Uma vez que  $\varphi$  é conforme, segue que  $f$  satisfaz as equações de Cauchy-Riemann se, e somente se,

$$\begin{cases} e_1(u) = e_2(v) \\ e_1(v) = -e_2(u). \end{cases}$$

Mas,

$$\begin{aligned} e_1(u) - e_2(v) &= e_1[\lambda^2(T_{11} - T_{22})] - e_2(-2\lambda^2 T_{12}) \\ &= e_1[\lambda^2(T_{11} - T_{22})] + 2e_2(\lambda^2 T_{12}) \\ &= 2\lambda e_1(\lambda)(T_{11} - T_{22}) + \lambda^2 e_1(T_{11}) - \lambda^2 e_1(T_{22}) + 4\lambda e_2(\lambda)T_{12} + \\ &\quad 2\lambda^2 e_2(T_{12}) \\ &= 2\lambda^2 \left\{ \frac{e_1(\lambda)}{\lambda} (T_{11} - T_{22}) + \frac{1}{2} [e_1(T_{11}) - e_1(T_{22})] + \frac{2}{\lambda} e_2(\lambda)T_{12} + \right. \\ &\quad \left. e_2(T_{12}) \right\} \\ &= 2\lambda^2 \left\{ \frac{1}{2} [e_1(T_{11}) - e_1(T_{22})] + \frac{2}{\lambda} e_2(\lambda)T_{12} + e_2(T_{12}) + \frac{e_1(\lambda)}{\lambda} (T_{11} + \right. \\ &\quad \left. - T_{22}) \right\}. \end{aligned}$$

De modo análogo, obtemos

$$\begin{aligned}
e_2(u) + e_1(v) &= e_2[\lambda^2(T_{11} - T_{22})] - 2e_1(\lambda^2 T_{12}) \\
&= 2\lambda e_2(\lambda)(T_{11} - T_{22}) + \lambda^2 e_2(T_{11}) - \lambda^2 e_2(T_{22}) - 4\lambda e_1(\lambda)T_{12} + \\
&\quad - 2\lambda^2 e_1(T_{12}) \\
&= 2\lambda^2 \left\{ \frac{e_2(\lambda)}{\lambda}(T_{11} - T_{22}) + \frac{1}{2}[e_2(T_{11}) - e_2(T_{22})] - \frac{2}{\lambda}e_1(\lambda)T_{12} + \right. \\
&\quad \left. e_1(T_{12}) \right\} \\
&= 2\lambda^2 \left\{ \frac{1}{2}[e_2(T_{11}) - e_2(T_{22})] - \frac{2}{\lambda}e_1(\lambda)T_{12} - e_1(T_{12}) + \frac{e_2(\lambda)}{\lambda}(T_{11} + \right. \\
&\quad \left. - T_{22}) \right\}.
\end{aligned}$$

Então,  $f$  é holomorfa se, e somente se,

$$\begin{cases} \frac{1}{2}[e_1(T_{11}) - e_1(T_{22})] + \frac{2}{\lambda}e_2(\lambda)T_{12} + e_2(T_{12}) + \frac{e_1(\lambda)}{\lambda}(T_{11} - T_{22}) = 0 \\ \frac{1}{2}[e_2(T_{11}) - e_2(T_{22})] - \frac{2}{\lambda}e_1(\lambda)T_{12} - e_1(T_{12}) + \frac{e_2(\lambda)}{\lambda}(T_{11} - T_{22}) = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Suponhamos agora que i) é válido e mostremos que ii) é equivalente a iii). Uma vez que o traço de  $T$  é constante, segue que  $e_i(T_{11}) = -e_i(T_{22})$ ,  $i = 1, 2$ . Daí, trocando  $-e_2(T_{22})$  por  $e_2(T_{11})$  na segunda equação de 3.8 obtemos que esta é equivalente a primeira equação em 3.7. De modo análogo, trocando  $e_1(T_{11})$  por  $-e_1(T_{22})$  na primeira equação de 3.8, obtemos que esta é equivalente a segunda equação de 3.7.

Portanto  $i) \implies ii) \iff iii)$ .

Suponhamos agora que ii) e iii) são válidas. Então, somando a segunda equação de 3.7 com a primeira de 3.8, obtemos

$$e_1(T_{11} + T_{22}) = 0.$$

Somando agora a primeira equação de 3.7 com a segunda de 3.8, obtemos

$$e_2(T_{11} + T_{22}) = 0.$$

Como  $M$  é conexa, segue que  $T_{11} + T_{22}$  é constante. Logo  $ii) \text{ e } iii) \implies i)$ .  $\square$

### 3.5 Laplaciano

Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Usando um referencial local e as formas associadas  $\omega_i, \omega_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , podemos escrever  $df = \sum_i f_i \omega_i$  e definir  $f_{i;j}$  pelas equações,

$$\sum_j f_{i;j} \omega_j = df_i + \sum_j f_j \omega_{ji}, \quad i, j = 1, 2.$$

Se definirmos o laplaciano de  $f$  por  $\Delta f = \sum_i f_{i;i}$  e escrevendo  $\omega_{12} = a\omega_1 + b\omega_2$ , obtemos

$$\Delta f = e_1[e_1[f]] + e_2[e_2[f]] - ae_2[f] + be_1[f].$$

**Definição 3.3.** Dizemos que  $p \in M$  é um ponto umbílico com respeito a uma dada forma bilinear simétrica  $T$  se existir  $k_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $T(x, x) = k_0$  para cada  $x \in T_p M$  com  $|x| = 1$ .

Observe que nos pontos umbílicos a matriz  $(T_{ij})$  de  $T$  (em qualquer base) satisfaz  $T_{ij} = k_0 \delta_{ij}$ , onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker.

**Lema 3.5.** *Seja  $M$  uma superfície imersa em  $E^3(c)$ , então  $p \in M$  é umbílico com relação a  $T$  se, e somente se,  $4\det(T) = \{tr(T)\}^2$  em  $p$ .*

*Demonstração.* De fato,

$$T(\underbrace{e_1 + e_2}_u, \underbrace{e_1 - e_2}_v) = T(e_1, e_1) - T(e_1, e_2) + T(e_2, e_1) - T(e_2, e_2) = 0$$

$$\begin{aligned} T(e_1, e_2) &= \frac{1}{4}T(u + v, u - v) = \frac{1}{4}\{T(u, u) - T(v, v)\} = \frac{1}{2}\{T(\frac{u}{\sqrt{2}}, \frac{u}{\sqrt{2}}) + \\ &\quad -T(\frac{v}{\sqrt{2}}, \frac{v}{\sqrt{2}})\} = \frac{1}{2}\{k_0 - k_0\} = 0. \end{aligned}$$

Daí, se  $p$  é umbílico, tem-se  $4\det(T) = \{tr(T)\}^2$ .

Reciprocamente suponhamos que  $4\det(T) = \{tr(T)\}^2$ . Seja  $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$  uma base que diagonaliza  $T$ . Façamos  $\tilde{T}_{ij} = T(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j)$ . Então,  $\tilde{T}_{12} = 0 = \tilde{T}_{21}$  e  $4\tilde{T}_{11}\tilde{T}_{22} = (\tilde{T}_{11} + \tilde{T}_{22})^2$ .

De onde,

$$0 = (\tilde{T}_{11} + \tilde{T}_{22})^2, \text{ ou seja, } \tilde{T}_{11} = \tilde{T}_{22}.$$

Por outro lado, dado  $x \in T_p M$ ,  $|x| = 1$ ,  $x = a\tilde{e}_1 + b\tilde{e}_2$ ,  $a^2 + b^2 = 1$ , temos

$$T(x, x) = a^2\tilde{T}_{11} + b^2\tilde{T}_{22} = (a^2 + b^2)\tilde{T}_{11} = \tilde{T}_{11} = k_0.$$

□

No que segue  $T$  será uma forma bilinear simétrica sobre uma superfície  $M$  satisfazendo as equações de Codazzi e com traço constante igual  $t$ ,  $D$  denotará o determinante de  $T$ .

**Lema 3.6.** *Em cada ponto não umbílico de  $M$  (com respeito  $T$ ) temos*

$$\Delta D = (4D - t^2) \left\{ K + \frac{4|dD|^2}{(4D - t^2)^2} \right\}.$$

*Demonstração.* Numa vizinhança de cada ponto não umbílico existe um referencial  $\{e_1, e_2\}$  que diagonaliza  $T$ , uma vez que  $T$  é simétrica e varia diferenciavelmente. As equações de Codazzi nos dão que

$$\begin{aligned} -e_2(T_{11}) + a(T_{11} - T_{22}) &= 0 \\ e_1(T_{22}) - b(T_{11} - T_{22}) &= 0. \end{aligned}$$

Como  $D = T_{11}T_{22}$ , obtemos a partir das equações acima e do fato de que  $T_{11} + T_{22} = \text{const.}$  que

$$\begin{aligned} e_1(D) = e_1(T_{11})T_{22} + T_{11}e_1(T_{22}) &= -e_1(T_{22})T_{22} + T_{11}e_1(T_{22}) \\ &= e_1(T_{12})(T_{11} - T_{22}) = b(T_{11} - T_{22})^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

e

$$\begin{aligned} e_2(D) = e_2(T_{11})T_{22} + T_{11}e_2(T_{22}) &= e_2(T_{11})T_{22} - T_{11}e_2(T_{11}) \\ &= -e_2(T_{11})(T_{11} - T_{22}) = -a(T_{11} - T_{22})^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Usando 3.9, 3.10 e as equações de Codazzi, obtemos

$$\begin{aligned} e_1e_1(D) &= e_1(b)(T_{11} - T_{22})^2 + 2b(T_{11} - T_{22})e_1(T_{11} - T_{22}) \\ &= e_1(b)(T_{11} - T_{22})^2 + 2b(T_{11} - T_{22})[e_1(T_{11}) - e_1(T_{22})] \\ &= e_1(b)(T_{11} - T_{22})^2 - 2b(T_{11} - T_{22})2e_1(T_{22}) \\ &= e_1(b)(T_{11} - t_{22})^2 - 4b^2(T_{11} - T_{22})^2 = (T_{11} - T_{22})^2\{e_1(b) - 4b^2\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} e_2e_2(D) &= -e_2(a)(T_{11} - T_{22})^2 - 2a(T_{11} - T_{22})[e_2(T_{11}) - e_2(T_{22})] \\ &= -e_2(a)(T_{11} - T_{22})^2 - 4a^2(T_{11} - T_{22})^2 \\ &= -(T_{11} - T_{22})^2\{e_2(a) + 4a^2\}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\Delta D &= e_1 e_1(D) + e_2 e_2(D) - a e_2(D) + b e_1(D) \\
&= (T_{11} - T_{22})^2 \{e_1(b) - 4b^2\} - (T_{11} - T_{22})^2 \{e_2(a) + 4a^2\} + a^2 (T_{11} - T_{22})^2 + \\
&\quad + b^2 (T_{11} - T_{22})^2 \\
&= (T_{11} - T_{22})^2 \{e_1(b) - e_2(a) - 3(a^2 + b^2)\}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, note que  $dT_{11} = -dT_{22}$ , e assim

$$\begin{aligned}
(T_{11} - T_{22})^2 &= T_{11}^2 - 2T_{11}T_{22} + T_{22}^2 = T_{11}^2 + 2T_{11}T_{22} + T_{22}^2 - 4T_{11}T_{22} \\
&= (T_{11} + T_{22})^2 - 4D = t^2 - 4D
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
dD &= (dT_{11}T_{22} + T_{11}dT_{22} = T_{22}\{e_1(T_{11})e_1 + e_2(T_{11})e - 2\} + T_{11}\{e_1(T_{22})e_1 + \\
&\quad e_2(T_{22})e_2\} \\
&= T_{22}\{-e_1(T_{22})e_1 + e_2(T_{11})e_2\} + T_{11}\{e_1(T_{22})e_1 - e_2(T_{11})e_2\} \\
&= T_{22}\{-b(T_{11} - T_{22})e_1 + a(T_{11} - T_{22})e_2\} + T_{11}\{b(T_{11} - T_{22})e_1 - a(T_{11} + \\
&\quad -T_{22})e_2\} \\
&= b(T_{11} - T_{22})^2 e_1 - a(T_{11} - T_{22})^2 e_2,
\end{aligned}$$

donde

$$|dD|^2 = (a^2 + b^2)(T_{11} - T_{22})^4 = (a^2 + b^2)(t^2 - 4D)^2,$$

ou seja,

$$a^2 + b^2 = \frac{|dD|^2}{(t^2 - 4D)^2}.$$

Lembrando que

$$K = e_2(a) - e_1(b) - (a^2 + b^2)$$

obtemos finalmente que

$$\Delta D = (4D - t^2) \left\{ K + \frac{4|dD|^2}{(t^2 - 4D)^2} \right\}.$$

□

**Lema 3.7.** *Se  $t = 0$ , temos*

$$\Delta\{\log(-D)\} = 4K,$$

nos pontos onde  $D \neq 0$ .

*Demonstração.* Pelo lema anterior temos que

$$\Delta(D) = 4D \left\{ K + \frac{|dD|^2}{4D^2} \right\} = 4DK + \frac{|dD|^2}{D}.$$

Por outro lado,

$$\Delta(\log(-D)) = e_1 e_1(\log(-D)) + e_2 e_2(\log(-D)) - a e_2(\log(-D)) + b e_1(\log(-D)).$$

Mas,

$$\begin{aligned} e_1(\log(-D)) &= \frac{1}{-D} e_1(D) \\ e_2(\log(-D)) &= \frac{1}{D} e_2(D) \\ e_1 e_1(\log(-D)) &= e_1 \left\{ \frac{1}{D} e_1(D) \right\} = -\frac{1}{D^2} e_1(D)^2 + \frac{1}{D} e_1 e_1(D) \\ e_2 e_2(\log(-D)) &= e_2 \left\{ \frac{1}{D} e_2(D) \right\} = -\frac{1}{D^2} e_2(D)^2 + \frac{1}{D} e_2 e_2(D). \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \Delta(\log(-D)) &= -\frac{1}{D^2} e_1(D)^2 + \frac{1}{D} e_1 e_1(D) - \frac{1}{D^2} e_2(D)^2 + \frac{1}{D} e_2 e_2(D) + \\ &\quad -\frac{a}{D} e_2(D) + \frac{b}{D} \\ &= \frac{1}{D} \left\{ -\frac{1}{D} [e_1(D)^2 + e_2(D)^2] + e_1 e_1(D) + e_2 e_2(D) - a e_2(D) + \right. \\ &\quad \left. + b e_1(D) \right\} \\ &= \frac{1}{D} \left\{ -\frac{1}{D} [e_1(D)^2 + e_2(D)^2] + \Delta D \right\} \\ &= -\frac{1}{D} [e_1(D)^2 + e_2(D)^2] + 4K + \frac{|dD|^2}{D^2} \end{aligned}$$

Pela demonstração do lema anterior

$$e_1(D)^2 + e_2(D)^2 = (a^2 + b^2)(T_{11} - T_{22})^4 = |dD|^2.$$

Portanto,

$$\Delta(\log(-D)) = 4K.$$

□

### 3.6 étrica com curvatura zero

**Lema 3.8.** *Seja  $M$  uma superfície com curvatura gaussiana  $K$ . Se  $x, y$  são coordenadas isotérmicas em  $M$ , então*

$$K = -\frac{1}{2\lambda^2}\Delta^0(\log\lambda^2),$$

onde  $\lambda = \left|\frac{\partial}{\partial x}\right| = \left|\frac{\partial}{\partial y}\right|$  e  $\Delta^0$  é o laplaciano de  $\mathbb{R}^2$ .

*Demonstração.* Seja  $\varphi : U \rightarrow V \subset M$  uma parametrização conforme. Tome o referencial ortonormal  $e_1 = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial x}$  e  $e_2 = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial y}$  e o seu coreferencial associado  $\omega_1 = \lambda dx$ ,  $\omega_2 = \lambda dy$ . Temos por um lado que

$$d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2 = -K\lambda^2 dx \wedge dy.$$

Por outro lado,

$$\omega_{12} = -\frac{1}{\lambda}e_2(\lambda)\omega_1 + \frac{1}{\lambda}e_1(\lambda)\omega_2.$$

Mas,  $d\omega_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2 = -\frac{e_2(\lambda)}{\lambda}\omega_1 \wedge \omega_2$  e  $d\omega_2 = \omega_{21} \wedge \omega_1 = \frac{e_1(\lambda)}{\lambda}\omega_1 \wedge \omega_2$ . Donde,

$$\begin{aligned} d\omega_{12} &= d\left(-\frac{1}{\lambda}e_2(\lambda)\right) \wedge \omega_1 - \frac{1}{\lambda}e_2(\lambda)d\omega_1 + d\left(\frac{1}{\lambda}e_1(\lambda)\right) \wedge \omega_2 + \frac{e_2(\lambda)}{\lambda}d\omega_2 \\ &= \left(\frac{e_2(\lambda)^2}{\lambda^2} - \frac{e_2e_2(\lambda)}{\lambda}\right)\omega_2 \wedge \omega_1 + \left(-\frac{e_1(\lambda)^2}{\lambda^2} + \frac{e_1e_1(\lambda)}{\lambda}\right)\omega_1 \wedge \omega_2 + \\ &\quad + \left(\frac{e_2(\lambda)^2}{\lambda^2} + \frac{e_1(\lambda)^2}{\lambda^2}\right)\omega_1 \wedge \omega_2 \\ &= \left(\frac{e_1e_1(\lambda)}{\lambda} + \frac{e_2e_2(\lambda)}{\lambda}\right)\omega_1 \wedge \omega_2 \\ &= \left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log(\lambda) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\log(\lambda)\right\}dx \wedge dy \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log(\lambda)^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\log(\lambda)^2\right\}dx \wedge dy \\ &= \frac{1}{2}\Delta^0(\log\lambda^2)dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Daí,

$$K = -\frac{1}{2\lambda^2}\Delta^0(\log\lambda^2).$$

□

**Lema 3.9.** *Seja  $M$  uma superfície imersa em  $E^3(c)$ ,  $z = x + iy$  coordenadas isotérmicas em  $M$ , com referencial associado  $\{e_1, e_2\}$ ,  $(T_{ij})$  a matriz da forma quadrática relativa a  $\{e_1, e_2\}$  e  $\Phi = \{T_{11} - T_{22} - 2iT_{12}\}\lambda^2 dz^2$ . Então numa vizinhança de um ponto não umbílico, existe um sistema de coordenadas isotérmicas  $W$  tal que  $\Phi = dW^2$ .*

*Demonstração.* Seja  $p \in M$  um ponto não umbílico. Suponha, sem perda de generalidade, que  $z(p) = 0$ . Defina como  $f(z) = (T_{11} - T_{22} - 2iT_{12})\lambda^2$  e

$$W = W(z) = \int_0^z \sqrt{f(z)} dz.$$

Uma vez que  $p$  é não umbílico segue que  $f(z) \neq 0$ . De fato,  $f = 0$  se e somente se  $\Phi = 0$  e  $\Phi = 0$  se e somente se  $T_{11} - T_{22} - 2iT_{12} = 0$ , ou seja,  $T_{11} = T_{22}$  e  $T_{12} = 0$ . Portanto a matriz  $(T_{ij})$  de  $T$  é diagonal, e portanto  $p$  é umbílico se e só se  $T_{11}(p) = T_{22}(p)$ . Sendo  $f(p) \neq 0$ , existe um ramo holomorfo da raiz quadrada de  $f(z)$  definido em uma vizinhança de zero. Pelo teorema de Cauchy, a integral independe do caminho já que  $f$  é holomorfa. Logo,

$$W(z) = \int_0^z \sqrt{f(z)} dz$$

está bem definido.

Como  $W = \int_0^z \sqrt{f(z)} dz$ , temos que  $dW = \sqrt{f(z)} dz$  ou  $f(z) dz^2 = dW^2$ .

Portanto,

$$\Phi = \{T_{11} - T_{22} - 2iT_{12}\}\lambda^2 dz^2 = f(z) dz^2 = dW^2.$$

Observe que  $W$  é um sistema de coordenadas isotérmico, pois  $z$  é isotérmico e  $\sqrt{f(z)}$  é um ramo holomorfo da raiz quadrada de  $f(z)$ .  $\square$

**Lema 3.10.** *O sistema de coordenadas isotérmicas do lema anterior diagonaliza  $(T_{ij})$ .*

*Demonstração.* Seja  $(T_{ij})$  a matriz  $T$  com relação ao referencial local ortonormal  $\{\tilde{e}_1 = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x}, \tilde{e}_2 = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial y}\}$ , onde  $W = \tilde{x} + i\tilde{y}$  ( $\tilde{\lambda} = |\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}| = |\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}|$ ) é o sistema de coordenadas isotérmicas dado pelo lema anterior. Uma vez que  $\Phi$  independe do referencial, temos

$$\Phi = \{\tilde{T}_{11} - \tilde{T}_{22} - 2i\tilde{T}_{12}\}\tilde{\lambda}^2 dW^2.$$

Pelo lema anterior temos que  $\Phi = dW^2$ .

Logo,

$$\{\tilde{T}_{11} - \tilde{T}_{22} - 2i\tilde{T}_{12}\}\tilde{\lambda}^2 = 1.$$



O que implica,  $\tilde{T}_{11} = \frac{1}{\tilde{\lambda}} + \tilde{T}_{22} = \tilde{T}'_{22}$  e  $\tilde{T}_{12} = 0$ , já que  $\tilde{\lambda} \neq 0$ . Provando assim o lema.  $\square$

**Lema 3.11.** *Em cada ponto não umbílico de  $M$ , existem coordenadas isotérmicas  $\tilde{x}, \tilde{y}$  em termos das quais a primeira forma fundamental  $I$  se escreve como  $I = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 4D}}(d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2)$ , onde  $t = \text{tr}(T)$  e  $D = \det(T)$ .*

*Demonstração.* Considere  $\Phi$  como no lema 3.9. Segue do lema 3.4 que  $\Phi$  é holomorfa, e pelo lema 3.9, os pontos umbílicos de  $M$  são dados pelos zeros de  $\Phi$ , logo são isolados ou  $M$  é totalmente umbílica. Pelos lemas 3.10 e 3.9 existe um sistema de coordenadas isotérmicas  $W = \tilde{x} + i\tilde{y}$  em termo do qual  $(T_{ij})$  é diagonal, com

$$(\tilde{T}_{11} - \tilde{T}_{22} - 2i\tilde{T}_{12})\tilde{\lambda}^2 = 1.$$

Logo,  $\tilde{T}_{12} = 0$  e  $(\tilde{T}_{11} - \tilde{T}_{22})\tilde{\lambda}^2 = 1$ .

Sendo  $\tilde{T}$  diagonal,  $\tilde{T}_{11} + \tilde{T}_{22} = t$  e  $\tilde{T}_{11}\tilde{T}_{22} = D$ . Mas,

$$t^2 - 4D = (\tilde{T}_{11} + \tilde{T}_{22})^2 - 4\tilde{T}_{11}\tilde{T}_{22} = \tilde{T}_{11}^2 + 2\tilde{T}_{11}\tilde{T}_{22} + \tilde{T}_{22}^2 - 4\tilde{T}_{11}\tilde{T}_{22} = (\tilde{T}_{11} - \tilde{T}_{22})^2,$$

ou seja,  $\tilde{T}_{11} - \tilde{T}_{22} = \sqrt{t^2 - 4D}$ .

Logo,

$$\tilde{\lambda}^2 = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 4D}}.$$

Uma vez que,

$$I = \tilde{\lambda}^2(d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2)$$

segue que,

$$I = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 4D}}(d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2),$$

o que demonstra o lema.  $\square$

**Lema 3.12.** *Suponha que  $t^2 - 4D \geq \alpha > 0$ . Então, a métrica  $d\sigma^2 = \sqrt{t^2 - 4D}ds^2$ , onde  $ds^2$  é a métrica de  $M$ , tem curvatura nula. Além disso, se  $M$  for completa, então  $M$  é parabólica.*

*Demonstração.* Pelo lema anterior segue que  $d\sigma^2 = d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2$ . Logo,

$$K = -\frac{1}{2\tilde{\lambda}^2}\Delta^0 \log 1^2 = 0.$$

Portanto  $d\sigma^2$  tem curvatura nula.

Suponha agora que  $M$  é completa com a métrica  $ds^2$ . Então  $\sqrt{\alpha}ds^2$  também é completa. Logo  $\sqrt{t^2 - 4D}ds^2 \geq \sqrt{\alpha}ds^2$  é completa. Pelo teorema de Blanc-Fiala-Huber segue que  $M$  é parabólica, já que  $\int_M K^- d\sigma^2 = 0$ .  $\square$

Uma outra prova deste lema pode ser encontrada em [17].

**Lema 3.13.** *O conjunto das formas bilineares simétricas em  $M$  que satisfazem as equações de Codazzi é um subespaço do espaço vetorial formado pelas formas bilineares em  $M$ .*

*Demonstração.* De fato, denotando por  $\mathfrak{S}(M)$  o espaço das formas bilineares simétricas em  $M$  que satisfazem as equações de Codazzi, obtemos que:

- $0 \in \mathfrak{S}(M)$ ;
- se  $p, q \in \mathbb{C}$ ,  $\phi, \psi \in \mathfrak{S}(M)$ , então  $\theta = p\phi + q\psi \in \mathfrak{S}(M)$ , onde  $\theta_{ij} = p\phi_{ij} + q\psi_{ij}$ .

Logo  $\mathfrak{S}(M)$  é um subespaço do espaço vetorial formado pelas formas bilineares em  $M$ .  $\square$

# Capítulo 4

## H-deformações

### 4.1 Introdução

Neste capítulo fazemos um estudo das superfícies imersas isometricamente em  $E^3(c)$  impondo algumas condições sobre as curvaturas média e gaussiana.

### 4.2 Superfícies homeomorfas ao toro H-deformáveis

Seja  $x : M \rightarrow E^3(c)$  uma imersão isométrica. Denotaremos por  $H(x(p))$  a curvatura média de  $x$  em  $p \in M$ . Uma  $H$ -deformação de  $x$  é uma aplicação contínua  $F : (-\epsilon, \epsilon) \times M \rightarrow E^3(c)$ , tal que denotando  $x_t(p) = F(t, p)$ , temos:

- i)  $x_t$  é uma imersão isométrica;
- ii)  $x_0 = x$ ;
- iii)  $H(x_t(p)) = H(x_0(p))$ , para cada  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$  e  $p \in M$ .

Uma  $H$ -deformação é dita trivial se para cada  $t$  existe uma isometria  $L$  de  $E^3(c)$  tal que  $x_t = L \circ x_0$ . Uma imersão isométrica  $x$  é  $H$ -deformável se admite uma  $H$ -deformação não trivial. Dizemos que  $x$  é localmente  $H$ -deformável se para cada ponto de  $M$  existe uma vizinhança restrita a qual  $x$  é  $H$ -deformável. Diz-se que  $x$  está fora de um ponto umbílico se existe um número real  $r$  tal que  $K - c - H^2 \leq r < 0$ .

Seja  $x : M \rightarrow E^3(c)$  uma imersão. Para cada ponto  $p \in M$  existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  e uma parametrização conforme  $\varphi : U \rightarrow V$ , onde  $U$  é um aberto de  $\mathbb{R}^2$ . A forma quadrática  $\psi(h)$  do lema 3.3 pode ser descrita nesta vizinhança por  $\psi(h) = f(z)dz^2$ , onde  $z = x + iy$  e  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Consideremos ainda os seguintes operadores

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Pelas equações de Cauchy-Riemann uma função complexa  $h(z)$  é holomorfa se e somente se  $\frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = 0$  (ou  $\frac{\partial \bar{h}}{\partial z} = 0$ ).

**Proposição 4.1.** *Seja  $V \subset M$  um subconjunto aberto e simplesmente conexo,  $\varphi : U \rightarrow V$  uma parametrização conforme e seja  $x : V \rightarrow E^3(c)$  uma imersão isométrica sem pontos umbílicos. Então  $x$  admite uma  $H$ -deformação não trivial se e somente se a função complexa  $f$  definida em  $U$  por  $\psi(h) = f(z)dz^2$ , satisfaz*

$$\Delta^0(\log f) = 4 \left| \frac{\partial \log f}{\partial \bar{z}} \right|^2,$$

onde  $\Delta^0$  é o laplaciano na métrica canônica de  $\mathbb{R}^2$ , dado por

$$\Delta^0 = 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z}.$$

*Demonstração.* Para cada função real  $\theta : M \rightarrow \mathbb{R}$  seja  $U(\theta(p))$  a rotação do ângulo  $\theta(p)$  em  $T_p M$  na direção positiva de uma orientação dada. Chamamos atenção para o fato de que se existe uma  $H$ -deformação  $x_t$  de  $x$ , as matrizes de  $h$  e  $h_t$  são semelhantes, onde  $h_t$  é a segunda forma fundamental da imersão  $x_t$ . A razão é que  $h$  e  $h_t$  são simétricas, com mesmo traço e mesmo determinante. Na verdade, dado  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$  existe uma função  $\theta_t$  tal que

$$[h_t] = [U(\theta_t)]^{-1} [h] [U(\theta_t)],$$

onde  $[h_t]$ ,  $[U(\theta_t)]$  e  $[h]$  são as matrizes de  $h_t$ ,  $U(\theta_t)$  e  $h$  respectivamente.

Por 3.6 segue que

$$\psi(h_t) = e^{2i\theta_t} \psi(h). \quad (4.1)$$

Pelo lema 3.13 temos que  $h - h_t$  satisfaz as equações Codazzi e tem traço nulo. Pelo lema 3.4 segue que  $\psi(h - h_t)$  é holomorfa. Como  $f(z)dz^2$  é a expressão de  $\psi(h)$  em  $U$ , segue de 4.1 que  $(1 - e^{2i\theta_t})f dz^2$  é a expressão de  $\psi(h - h_t)$ .

De fato, temos que

$$\psi(h) = (h_{11} - h_{22} - 2ih_{12})\lambda^2 dz^2$$

$$\psi(h_t) = (h^t_{11} - h^t_{22} - 2ih^t_{12})\lambda^2 dz^2.$$

De  $\psi(h_t) = e^{2i\theta_t} \psi(h)$ , obtemos

$$(h^t_{11} - h^t_{22} - 2ih^t_{12}) = e^{2i\theta_t} (h_{11} - h_{22} - 2ih_{12}).$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\psi(h - h_t) &= (h_{11} - h_{11}^t - h_{22} + h_{22}^t - 2i(h_{12} - h_{12}^t))\lambda^2 dz^2 \\
&= (h_{11} - h_{22} - 2ih_{12} - (h_{11}^t - h_{22}^t - 2ih_{12}^t))\lambda^2 dz^2 \\
&= (1 - e^{2i\theta_t})(h_{11} - h_{22} - 2ih_{12})\lambda^2 dz^2 \\
&= (1 - e^{2i\theta_t})f dz^2.
\end{aligned}$$

Então a função  $f(1 - e^{2i\theta_t})$  é holomorfa.

Consideremos agora as seguintes famílias de funções:  $\eta_t = 2\theta_t$  e  $g_t = e^{2i\eta_t}$ . Claramente as funções  $g_t$  satisfazem  $\frac{\partial g_t}{\partial \eta_t} = ig_t$ ,  $\bar{g}_t = g_t^{-1}$  e  $\frac{\partial \bar{g}_t}{\partial \eta_t} = -i\bar{g}_t$ . Para simplificar a notação escreveremos nos cálculos  $\eta = \eta_t$  e  $g = g_t$ . Uma vez que  $f(1 - g)$  é holomorfa, temos

$$0 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}[f(1 - g)] = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(1 - g) - ifg \frac{\partial \eta}{\partial \bar{z}}.$$

Então,

$$ifg \frac{\partial \eta}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(1 - g).$$

O que nos dá,

$$\frac{\partial \eta}{\partial \bar{z}} = -ig^{-1} \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(1 - g) = -i\bar{g}(1 - g) \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\log f) = -i(\bar{g} - 1) \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\log f) \quad (4.2)$$

Além disso,  $f(1 - g)$  nos dá que

$$0 = \frac{\partial}{\partial z}[\bar{f}(1 - \bar{g})] = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}(1 - \bar{g}) + i\bar{f}\bar{g} \frac{\partial \eta}{\partial z},$$

donde

$$-i\bar{f}\bar{g} \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}(1 - \bar{g})$$

e assim

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = i\bar{g}^{-1}(1 - \bar{g}) \frac{1}{\bar{f}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = ig(1 - \bar{g}) \frac{\partial}{\partial z}(\log \bar{f}) = i(g - 1) \frac{\partial}{\partial z}(\log \bar{f}). \quad (4.3)$$

Pelo teorema de Schwarz,  $\frac{\partial^2 \eta}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial \bar{z} \partial z}$ . Então,

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ (\bar{g} - 1) \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\log f) \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (g - 1) \frac{\partial}{\partial z}(\log \bar{f}) \right\} = 0.$$

Agora note que  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}$  e  $\log \bar{f} = \overline{(\log f)}$ .

Usando as expressões em 4.2 e 4.3 e a observação acima obtemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left\{ (\bar{g} - 1) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\log f) \right\} &= \frac{\partial \bar{g}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\log f) + (\bar{g} - 1) \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\log f) \\
&= -i\bar{g} \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\log f) + (\bar{g} - 1) \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\log f) \\
&= \bar{g}(g - 1) \frac{\partial}{\partial z} (\log \bar{f}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\log f) + (\bar{g} - 1) \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\log f) \\
&= -(\bar{g} - 1) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\log f) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\log f) + \frac{1}{4} (\bar{g} - 1) \Delta^0 (\log f) \\
&= -(\bar{g} - 1) \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\log f) \right|^2 + \frac{1}{4} (\bar{g} - 1) \Delta^0 (\log f) \\
&= (\bar{g} - 1) \left\{ \frac{1}{4} \Delta^0 (\log f) - \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\log f) \right|^2 \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left\{ (\bar{g} - 1) \frac{\partial}{\partial z} (\log f) \right\} &= \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} (\log \bar{f}) + (g - 1) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} (\log \bar{f}) \\
&= ig \frac{\partial \eta}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} (\log \bar{f}) + (g - 1) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} (\log \bar{f}) \\
&= g(\bar{g} - 1) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\log f) \frac{\partial}{\partial z} (\log \bar{f}) + \frac{1}{4} (g - 1) \Delta^0 (\log \bar{f}) \\
&= -(g - 1) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\log f) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\log f) + \frac{1}{4} (g - 1) \Delta^0 (\log \bar{f}) \\
&= -(g - 1) \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\log f) \right|^2 + \frac{1}{4} (g - 1) \Delta^0 (\log \bar{f}) \\
&= (g - 1) \left\{ \frac{1}{4} \Delta^0 (\log \bar{f}) - \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\log f) \right|^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$(\bar{g} - 1) \left\{ \frac{1}{4} \Delta^0 (\log f) - \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\log f) \right|^2 \right\} + (g - 1) \left\{ \frac{1}{4} \Delta^0 (\log \bar{f}) - \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\log f) \right|^2 \right\} = 0.$$

Multiplicando esta equação por  $g$ , obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= (1-g) \left\{ \frac{1}{4} \Delta^0(\log f) - \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\log f) \right|^2 \right\} + (g^2 - g) \left\{ \frac{1}{4} \Delta^0(\log \bar{f}) + \right. \\
&\quad \left. - \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\log f) \right|^2 \right\} \\
&= \left\{ \frac{1}{4} \Delta^0(\log f) - \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\log f) \right|^2 \right\} - g \left\{ \frac{1}{4} (\Delta^0(\log f) + \Delta^0(\log \bar{f})) + \right. \\
&\quad \left. - 2 \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\log f) \right|^2 \right\} + g^2 \left\{ \frac{1}{4} \Delta^0(\log \bar{f}) - \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\log f) \right|^2 \right\}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Observe que o lado direito de 4.4 é um polinômio complexo  $P$  de grau 2 que se anula em  $g$ . Então, se para um ponto em  $U$  a família de funções  $g$  assume mais que dois valores os coeficientes de  $P$  são nulos neste ponto, pois neste caso  $P$  teria mais de duas raízes e pelo teorema fundamental da álgebra segue que  $P$  deve ser identicamente nulo. Se isto acontece em um subconjunto denso de  $U$  então  $P \equiv 0$ , pois  $P$  sendo um polinômio é holomorfo e daí ou suas raízes são isoladas ou  $P \equiv 0$ . Neste caso,

$$\Delta^0(\log f) = 4 \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\log f) \right|^2.$$

Então basta mostrarmos que existe um tal subconjunto denso. Se para cada isometria  $L$  de  $E^3(c)$ ,  $x_{t_1} \neq L \circ x_{t_2}$ , então existe um subconjunto aberto e denso  $U_{12}$  em  $U$  onde  $g_{t_1} \neq g_{t_2}$ .

De fato, observe que

$$\psi(h_{t_1}) = \{T^{t_1}_{11} - T^{t_1}_{22} - 2iT^{t_1}_{12}\} \lambda^2 dz^2$$

$$\psi(h_{t_2}) = \{T^{t_2}_{11} - T^{t_2}_{22} - 2iT^{t_2}_{12}\} \lambda^2 dz^2$$

e

$$\psi(h_{t_1} - h_{t_2}) = \{(T^{t_1}_{11} - T^{t_2}_{11}) - (T^{t_1}_{22} - T^{t_2}_{22}) - 2i(T^{t_1}_{12} - T^{t_2}_{12})\} \lambda^2 dz^2$$

Como  $h_{t_1}$  e  $h_{t_2}$  satisfazem as equações de Codazzi,  $h_{t_1} - h_{t_2}$  também as satisfaz. Além disso,  $tr(h_{t_1}) = tr(h_{t_2})$ , daí  $h_{t_1} - h_{t_2}$  tem traço constante igual a zero. Pelo lema 3.4  $\psi(h_{t_1} - h_{t_2})$  é holomorfa.

Mas,  $\psi(h_{t_1} - h_{t_2}) = 0$  se e somente se  $T^{t_1}_{11} - T^{t_2}_{11} = T^{t_1}_{22} - T^{t_2}_{22}$  e  $T^{t_1}_{12} - T^{t_2}_{12} = 0$ ,

ou seja, se e somente se

$T^{t_1}_{11} - T^{t_1}_{22} = T^{t_2}_{11} - T^{t_2}_{22}$  e  $T^{t_1}_{12} = T^{t_2}_{12}$ . O que por sua vez é equivalente a  $\psi(h_{t_1}) = \psi(h_{t_2})$  e isto é equivalente a  $g_{t_1} = g_{t_2}$  (desde que  $\psi(h_{t_1}) = \underbrace{e^{2i\theta_{t_1}}}_{g_{t_1}} \psi(h)$

e  $\psi(h_{t_2}) = \underbrace{e^{2i\theta_{t_2}}}_{g_{t_2}} \psi(h)$ ).

Pela holomorfia de  $\psi(h_{t_1} - h_{t_2})$  segue que os pontos em  $U$  em que  $g_{t_1} = g_{t_2}$  são isolados. Logo o conjunto  $U_{12}$  dos pontos de  $U$  em que  $g_{t_1} \neq g_{t_2}$  é aberto e denso em  $U$ . Seja  $t_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , satisfazendo as condições acima e tome  $V = \cap(U_{ij})$ , então  $V$  é denso em  $U$  e  $g_t$  assume mais de dois valores em  $U$ .

Suponhamos agora que

$$\Delta^0(\log f) = 4 \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\log f) \right|^2.$$

Mostremos que existe uma  $H$ -deformação não trivial de  $x$ . Usando a notação da proposição 2.2, temos no sistema 4.2, 4.3

$$A = i(g - 1) \frac{\partial}{\partial z}(\log \bar{f})$$

$$B = -i(\bar{g} - 1) \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\log f)$$

Pelo teorema de Schwarz,

$$\frac{\partial A}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial B}{\partial z} = 0$$

o que é equivalente a equação 4.4 e 4.4 segue de  $\Delta^0(\log f) = 4 \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\log f) \right|^2$ . Pela proposição 2.2, para cada  $t \in \mathbb{R}$  existe uma função  $\eta_t$  satisfazendo 4.2, 4.3 e  $\eta_t(p_0) = t$ ,  $p_0 \in U$ . Seja  $\theta_t = \frac{1}{2}\eta_t$  e considere a forma bilinear  $h_t$  dada por

$$[h_t] = [U(\theta_t)]^{-1}[h][U(\theta_t)].$$

As formas  $h_t$  são as segundas formas fundamentais das imersões  $x_t$ . Para provar isso, mostremos que  $h_t$  satisfaz as equações de Gauss e Codazzi. Como  $h_t$  e  $h$  têm o mesmo determinante e  $h$  satisfaz a equação de Gauss segue que  $h_t$  também a satisfaz. Uma vez que  $h_t$  e  $h$  têm o mesmo traço, as formas  $h - h_t$  têm traço igual a zero. Pelo lema 3.4  $h - h_t$  satisfazem as equações de Codazzi se e somente se  $\psi(h - h_t)$  é holomorfa. Como as formas  $h_t$  foram obtidas a partir de funções  $\eta_t$  satisfazendo 4.2 e 4.3,  $\psi(h - h_t)$  é holomorfa. Então  $h - h_t$  satisfazem as equações de Codazzi. Uma vez que  $h$  satisfaz as equações de Codazzi, segue que o mesmo vale para  $h_t$ .



Considerando agora as condições iniciais em  $p_0 \in U$ , ou seja,  $x_t(p_0) = x(p_0)$  e  $dx_t(p_0) = dx(p_0)$ , obtemos pelo teorema de existência e unicidade para imersões a  $H$ -deformação que queremos.  $\square$

**Teorema 4.1.** *Seja  $M$  uma superfície homeomorfa ao toro  $T^2$  e seja  $x : M \rightarrow E^3(c)$  uma imersão localmente  $H$ -deformável. Então  $H(x) = \text{const}$ .*

*Demonstração.* Considere  $x : M \rightarrow E^3(c)$  uma imersão satisfazendo as hipóteses do teorema. Seja  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  um recobrimento conforme. Então as conclusões da proposição anterior são válidas nesse caso, ou seja,

$$\Delta^0(\log f) = 4 \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\log f) \right|^2,$$

onde  $f$  está definida em  $\mathbb{R}^2$ . Então, a parte imaginária de  $\log f$  é harmônica e a parte real é subharmônica. Como  $|f|$  é limitado,  $\log|f|$  é limitado superiormente. Além disso temos que os pontos onde  $\log f$  não está definido, ou seja, os pontos umbílicos, são isolados e portanto em número finito. Então podemos concluir que  $\log|f|$  é constante. Então  $\Delta^0(\log|f|) = 0$  e

$$0 = \Delta^0(\log f) = \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\log f) \right|^2.$$

Segue que  $\log f$  e assim  $f$  é holomorfa. Uma vez que  $h$  satisfaz as equações de Codazzi e  $\psi(h)$  é holomorfa, segue do lema 3.4 que  $H(x)$  é constante.  $\square$

**Corolário 4.1.** *Seja  $M$  uma superfície homeomorfa ao toro  $T^2$  e seja  $x : M \rightarrow E^3(c)$  uma imersão isométrica analítica. Se existe um subconjunto aberto de  $M$  restrito ao qual  $x$  é  $H$ -deformável, então  $H(x) = \text{const}$ .*

*Demonstração.* Isto segue do teorema anterior e da analiticidade de  $x$ .  $\square$

### 4.3 Umbilicidade e H-deformações

**Proposição 4.2.** *Seja  $M$  uma superfície completa e  $x : M \rightarrow E^3(c)$  uma imersão isométrica com  $H(x)$  constante. Se  $K \geq 0$ , ou  $K \leq 0$  e  $K - c - H^2 \leq \text{const} < 0$ , então  $K = \text{const}$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $K \geq 0$ . Observe que se  $x$  é umbílica, então  $K = \text{const}$ . Isto segue pela equação de Gauss  $K = c + H^2$ . Suponha que  $x$

não é umbílica. Então, uma vez que  $\psi(h)$  é holomorfa e os zeros de  $\psi(h)$  são precisamente os pontos umbílicos, estes são isolados. Pelo lema 3.6

$$\Delta K = \Delta(K - c) = 4(K - c - H^2) \left\{ K + \frac{1}{4} \frac{|d(k - c)|^2}{(K - c - H^2)^2} \right\} \leq 0$$

nos pontos não umbílicos. Por continuidade  $\Delta K \leq 0$ .

Uma vez que  $M$  é completa e  $K \geq 0$ , segue pelo teorema de Blanka-Fiala-Huber que  $M$  é compacta ou parabólica. Como  $K$  é superharmônica e limitada inferiormente segue pelo teorema de Hopf que  $K \equiv \text{const}$ .

Suponha agora que  $K \leq 0$  e  $K - c - H^2 \leq \text{const} < 0$ . Considere a forma  $T = h - Hds^2$ . Uma vez que  $h$  e  $Hds^2$  satisfazem as equações de Codazzi, segue do lema 3.13 que  $T$  também as satisfaz. Seja  $D = \det(T)$ , então

$$D = K - c - H^2 \leq \text{const} < 0.$$

uma vez que  $\text{tr}(T) = 0$ , segue do lema 3.12 que  $M$  é parabólica. Mais ainda, a função  $\log(-D)$  está bem definida e é limitada inferiormente. Segue do lema 3.7 que  $\Delta\{\log(-D)\} \leq 0$ . Assim  $D$  é constante. Pelo lema 3.6 temos que  $0 = \Delta D = 4DK$  e  $D \neq 0$ , então  $K \equiv 0$ . □

**Proposição 4.3.** *Seja  $M$  uma superfície de curvatura constante  $K$  e seja  $x : M \rightarrow E^3(c)$  uma imersão isométrica com  $H(x) = \text{const}$ . Então,  $x$  é umbílica ou  $K$  é igual a zero.*

*Demonstração.* Seja  $D = \det(h) = K - c$ . Então  $D$  é constante e daí  $\Delta D = 0$ . Pelo lema 3.6 se  $p \in M$  é não umbílico então

$$\Delta D(p) = 4(D - H^2)K = 0.$$

Mais ainda, como  $D \neq H^2$  nos pontos não umbílicos,  $K(p) = 0$ . Assim,  $K \equiv 0$  em  $M$ . □

**Proposição 4.4.** *Sejam  $M$  e  $N$  superfícies completas com a mesma curvatura  $K = \text{const}$ . e seja  $x : M \rightarrow E^3(c)$  e  $y : N \rightarrow E^3(c)$  imersões isométricas, com a mesma curvatura média  $H$  constante. Então, existe uma isometria  $L$  de  $E^3(c)$ , tal que  $y(N) = L \circ x(M)$ .*

*Demonstração.* Podemos supor sem perda de generalidade que  $M$  e  $N$  são simplesmente conexas. De fato, se esse não é o caso considere o recobrimento universal com a métrica do recobrimento  $\pi_M : \tilde{M} \rightarrow M$  dada por  $\tilde{I}_p(v, w) = I_{\pi(p)}(\pi_*(v), \pi_*(w)) = \langle \pi_*(v), \pi_*(w) \rangle$ , onde  $\pi_*$  é a derivada de  $\pi$  e  $I$  é a

métrica de  $M$ . Então a imersão isométrica  $\tilde{x} = x \circ \pi$  satisfaz:  $\tilde{H} = H$  e  $\tilde{x}(\tilde{M}) = x(M)$ , onde  $\tilde{H}$  é a curvatura média de  $\tilde{x}$ . De modo análogo considerando o recobrimento universal de  $N$  com a métrica do recobrimento  $\pi_N : \tilde{N} \rightarrow N$ , obtemos as mesmas conclusões.

Pelo teorema de Cartan, existe uma isometria  $f : M \rightarrow N$ . Considere a imersão  $\bar{x} = y \circ f$  de  $M$  em  $E^3(c)$ . Se  $x$  é umbílica, segue que existe uma isometria  $L$  de  $E^3(c)$  tal que  $\bar{x}(M) = L \circ x(M)$ . Assim,  $y(N) = L \circ x(M)$ . Se  $x$  não é umbílica, segue da proposição 4.3 que  $K \equiv 0$ .

Mostremos que existe uma imersão  $\hat{x}$  cuja segunda forma fundamental  $\hat{h}$  coincide com  $h$ .

As formas  $h$  e  $\bar{h}$  determinam em  $M$  dois pares de campos de direções ortogonais  $\{v_1, v_2\}$  e  $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$  que são os campos das direções principais (ou seja direções tais que tomando vetores ortonormais positivos, definidos nos pontos não umbílicos, eles diagonalizam  $h$  e  $\bar{h}$ , respectivamente). Como  $M$  é simplesmente conexa, podemos orientar esses campos de direções. Tomemos então os referenciais ortonormais  $\{e_1, e_2\}$  e  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$  obtidos a partir de  $\{v_i\}$  e  $\{\bar{v}_i\}$ . Note que estes referenciais podem ser tomados positivos. Seja  $\theta(p)$  o ângulo entre  $e_1$  e  $\bar{e}_1$  em que  $T_p M$  e  $U(\theta(p))$  a rotação em  $T_p M$  do ângulo  $\theta(p)$ . Segue que  $\bar{h}(p) = U(\theta(p))^{-1}h(p)U(\theta(p))$  e daí que

$$\psi(\bar{h}(p)) = e^{2i\theta(p)}\psi(h(p)). \quad (4.5)$$

Mostremos que  $\theta(p)$  é constante. Como  $h$  e  $\bar{h}$  têm a traços constantes e satisfazem as equações de Codazzi, segue que  $\psi(h)$  e  $\psi\bar{h}$  são holomorfas. Seja  $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset M$ , onde  $U$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$ , uma parametrização conforme. Segue de 4.5 que a função  $q \mapsto e^{2i\theta(\varphi(q))}$  é holomorfa. Como  $|e^{2i\theta(\varphi(q))}| = 1$ , segue que  $\theta$  é constante. Portanto,  $\bar{h} = H(\theta)$ .

Suponha que existe uma isometria  $g : M \rightarrow M$  tal que  $dg_p = U(\theta(p))$  para cada  $p \in M$ . Então  $dg(e_i) = \bar{e}_i$ ,  $i=1,2$ . Assim se  $\hat{x} = x \circ g$ , então  $\hat{x}$  é uma imersão isométrica cuja segunda forma fundamental  $\hat{h}$  é diagonalizada por  $\{e_1, e_2\}$ .

Aplicando agora o argumento acima  $\hat{h} = h$ . Pelo teorema de existência e unicidade de imersões,  $x$  e  $\hat{x}$  coincidem a menos de uma isometria de  $E^3(c)$ . Então  $y(N) = \hat{x}(M)$  coincide com  $x(M)$  exceto por uma isometria de  $E^3(c)$ . Assim é suficiente mostrarmos que existe uma isometria  $g$  nas condições acima. Mas isto segue do fato de que  $M$  é isométrica ao  $\mathbb{R}^2$ . □

**Teorema 4.2.** *Seja  $M$  uma superfície completa e seja  $x : M \rightarrow E^3(c)$ ,  $c < 0$ , uma imersão isométrica com  $H(x)$  constante. Assuma que a curvatura*

gaussiana  $K$  de  $M$  não muda de sinal; se  $K \leq 0$ , assumamos também que  $x$  está fora de pontos umbílicos. Então  $x(M)$  ou é uma esfera geodésica em  $E^3(c)$  ou então  $x(M)$  é um conjunto de pontos equidistantes de uma geodésica completa de  $E^3(c)$ .

*Demonstração.* Seja  $x : M \rightarrow E^3(c)$  uma imersão nas hipóteses acima. Note que pela proposição 4.2 as superfícies imersas nas hipóteses do teorema têm  $K = \text{const} \geq 0$ . Pelas proposições 4.2 e 4.3,  $x$  é umbílica ou  $K \equiv 0$ . Suponhamos sem perda de generalidade  $H \geq 0$ . Consideramos os seguintes casos:

caso1:  $K > 0$ .

Para cada  $t > 0$  considere a esfera geodésica com curvatura média  $H = t$  e aplique a proposição 4.4.

caso2:  $K \equiv 0$ .

Pela equação de Gauss segue que  $H \geq \sqrt{-c}$ . As horoesferas são superfícies completas com  $K \equiv 0$  contida em  $E^3(c)$  com  $H = \sqrt{-c}$ . A inclusão de horoesferas é umbílica e assim não satisfaz  $K - c - H^2 < \text{const} < 0$ . Para cada  $t > \sqrt{-c}$ , mostremos que existe uma superfície equidistante de uma geodésica com  $H = t$ .

Para cada  $\rho > 0$ , seja  $S(\rho)$  a superfície dos pontos a uma distância  $\rho$  de uma geodésica completa de  $E^3(c)$ . As curvaturas principais em  $S(\rho)$  são dadas por

$$k_1 = \sqrt{-c} \cotgh(\rho\sqrt{-c})$$

e

$$k_2 = \sqrt{-c} \tgh(\rho\sqrt{-c})$$

A curvatura média  $H$  de  $S(\rho)$ , dada por

$$H = H(\rho) = \frac{\sqrt{-c}}{2} \{ \cotgh(\rho\sqrt{-c}) + \tgh(\rho\sqrt{-c}) \} \quad (4.6)$$

é constante. Mais ainda, pela equação de Gauss temos  $K \equiv 0$ .

Dado  $t > \sqrt{-c}$ , segue de 4.6 que podemos escolher  $\rho_t$  tal que  $H = t$  para  $S(\rho_t)$ . Pela proposição 6,  $S(\rho_t)$  é a única superfície nas condições do teorema que satisfaz  $H = t$ .

□

**Corolário 4.2.** *Seja  $M$  uma superfície completa e seja  $x : M \rightarrow E^3(c)$ ,  $c < 0$ , uma imersão isométrica com  $H(x) = \text{const}$ . Se  $K \leq c$ , então  $x(M)$  é uma superfície mínima.*

*Demonstração.* De fato, suponha que  $H \neq 0$ , então  $K - c - H^2 \leq -H^2 < 0$ . Logo,  $K \equiv 0$ , contradizendo assim o fato de que  $K \leq c < 0$ .

□

**Corolário 4.3.** *Seja  $M$  uma superfície completa com  $K \leq 0$  e  $K \not\equiv 0$ . Se  $x : M \rightarrow E^3(c)$  é uma imersão isométrica com  $H(x) = \text{const.}$ , então  $c \leq -H^2$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $c > H^2$ , então  $K - c - H^2 \leq -c - H^2 < 0$ . Assim devemos ter  $K \geq 0$  constante, o que contradiz o fato de ser  $K \leq 0$  e  $K \not\equiv 0$ .

□

# Referências Bibliográficas

- [1] Alfors, L. and Sario, L. *Riemann Surfaces*, Princeton University Press, Princeton (1960).
- [2] Bers, L. *Riemann Surfaces*, New York University Institute of Mathematical Sciences, New York, 1957-58.
- [3] Carmo, M.P. do. *Geometria Riemanniana (3ª edição)*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.
- [4] Carmo, M.P. do. *O Método do Referencial Móvel*, III Escola Latino-Americana de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1976.
- [5] Forster, O. *Lectures on Riemann Surfaces*. Springer-Verlag, New York, 1981.
- [6] Hoffman, D.A. *Surfaces of constante Mean Curvature in Manifolds of Constant Curvature*, J. Differential Geometry, 8(1973)161-176.
- [7] Hopf, H. *Lectures on differential Geometry in the Large (2ª edition)*. Springer, Berlin, 1989.
- [8] Huber, A. *On Subharmonic Functions and Differential Geometry in the Large*, Comment. Math. Helv. 32(1957)13-72.
- [9] Hurewicz, W. *Lectures on Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons, New York, 1958.
- [10] Klotz, T. and Osserman, R. *Complete Surfaces in  $E^3$  With Constant Mean Curvature*, Comment. Math. Helv. 41(1966-67)313-318.
- [11] Lawson, H.B. Jr. *Complete Surfaces in  $S^3$* . Ann. of Math. 92(1970).
- [12] Lima, E. *Grupo Fundamental e Espaço de Recobrimento (2ª ed.)*. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1998.

- [13] Rocha, M. A. *Superfícies Completas em  $\mathbb{R}^3$  com Curvatura Média Constante*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Ceará, UFC, (1980).
- [14] Sotomayor, J. *Lições de equações Diferenciais Ordinarias*. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro.1979.
- [15] Spivak, M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Vol.IV. Publish or Perish, Boston, 1970-1975.
- [16] Tribuzy, R.A. *A Characterization of Tori With Constant Mean Curvature in Space Form*. Bol.Soc.Bras.Mat.,vol.11.Nº2 (1980),259-274.
- [17] Trybuzy, R.A. *Deformações de Superfícies Preservando a Curvatura Média*, Teses,IMPA, Rio de Janeiro, 1978.
- [18] Tribuzy, R.A. *Hopf's Method and Deformations of Surfaces Preserving Mean Curvature*. An. Acad. Bras. ciênc.(1978)50(4).

# Índice Remissivo

- equação de Gauss, 17
- Equações de Codazzi, 18
- Estrutura
  - equações de, 12
  - riemanianna, 3
- Forma espacial, 15
- Funções
  - subharmônicas, 9
  - superharmônicas, 9
- H-deformação, 33
  - trivial, 33
- imersão, 3
  - isométrica, 6
- Imersão isométrica
  - H-deformável, 33
  - localmente H-deformável, 33
- isometria, 6
- Laplaciano, 25
- Lema de Cartan, 15
- Métricas conformemente equivalentes,  
9
- orientação, 5
- Parâmetro isotérmico, 21
- Ponto umbílico, 25
- Recobrimento Universal, 9
- Superfície de Riemann, 7
  - espaço de recobrimento de, 8
- Teorema
  - de Cartan, 11
  - de existência e unicidade de imersões, 11
  - Blanc-Fiala-Huber, 10
  - Hopf, 10