



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

JOÃO PAULO DA COSTA NOGUEIRA

RUGOSIDADE EM BILHARES CLÁSSICOS

FORTALEZA

2016

JOÃO PAULO DA COSTA NOGUEIRA

RUGOSIDADE EM BILHARES CLÁSSICOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária

Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

N712r Nogueira, João Paulo da Costa.
Rugosidade em Bilhares Clássicos / João Paulo da Costa Nogueira. -- 2016.
65 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2016.

Orientação: Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho.

1. Sistemas Dinâmicos. 2. Bilhares. 3. Rugosidade. I. Título.

CDD 530

JOÃO PAULO DA COSTA NOGUEIRA

RUGOSIDADE EM BILHARES CLÁSSICOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 02 / 08 / 2016 .

BANCA EXAMINADORA

Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho (Orientador)

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dr. Ascânio Diás/Araújo

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dr.^a Dahila Fernandes Tavares

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

*Aos Meus Pais
e
familiares.*

AGRADECIMENTOS

Ao meu pai, Francisco Edgar Alexandre Nogueira, por todo o apoio durante minha vida acadêmica e por toda a liberdade confiada a mim.

À minha mãe, Maria Lúcia da Costa Nogueira que, apesar de ter morrido muito jovem, influenciou muito o meu caráter.

À minha namorada Denise Vitoriano Silva que me acompanhou por todo o mestrado.

Ao meu orientador Prof. Dr. Raimundo Nogueira da Costa Filho pela paciência, incentivo e orientação.

Aos amigos e colegas que me ajudaram com o trabalho e com discussões: Rivânia Teixeira, Lucas Miranda, Matheus Hansen, Rafael Bizão, Rilder Soares, Prof. Dr. Saulo Davi e Diego Rabelo.

Aos amigos de turma e de mestrado Gabriel Oliveira, Ícaro Rodrigues, Ravena Rodrigues, Duarte José, Luan Vieira, Fábio Oliveira, Emanuel Fonteneles, Nailson Vasconcelos, Victor Nocrato, Nayara Cipriano e Nicolas Carvalho.

Ao CNPQ pelo apoio financeiro, sem o qual esse trabalho não teria sido possível.

RESUMO

Um bilhar consiste basicamente de uma partícula confinada em uma região do espaço. Trataremos apenas de bilhares em duas dimensões na ausência de campos externos e desprezaremos qualquer tipo de forças dissipativas, de modo que as colisões da partícula com as fronteiras do bilhar são elásticas. Além disso, as fronteiras são fixas, ou seja, respeitam uma equação do tipo $R = R(r, \theta)$, onde r e θ são as coordenadas polares planas.

O bilhar é um modelo interessante por vários motivos. Primeiro, é um sistema muito simples (tem poucos graus de liberdade) e de fácil visualização. No entanto, possui uma dinâmica não-trivial com grande riqueza de comportamentos (podendo apresentar comportamento regular, caótico ou até mesmo misto, caso em que coexistem no espaço de fase de um único bilhar regiões caóticas e regulares). Segundo, o tratamento numérico desses sistemas não requer integração numérica de equações diferenciais e, portanto, não consome muito tempo de execução. Além disso, os bilhares permitem que realizemos investigações de caráter fundamental, por exemplo, podemos estudar como sistemas regulares reagem ao serem levemente perturbados. Especificamente, iremos aplicar uma rugosidade na fronteira do bilhar circular e elíptico e observar como o espaço de fase irá mudar ao sofrer tal perturbação.

Palavras-chave: Sistemas Dinâmicos Bilhares Rugosidade

ABSTRACT

In this work we are going to study a physical system known as billiard. A billiard is defined to be basically a confined particle in a closed region of the space. We are going to deal with only two-dimensional billiards in the absence of external fields and to neglect any kind of dissipative forces, in a way that the collisions of the particle with the boundary are elastic. Beyond that, the boundary is fixed, it means they respect an equation of the kind $R(r, \theta)$, where r and θ are the polar coordinates on a plane.

A billiard is a very interesting model by several reasons. First, it is a simple system (it has a few degrees of freedom) and it is of easy visualization. However, it has a non-trivial dynamics with a big richness of behaviors (from a billiard it could appear regular behavior, chaotic behavior, or even a mixed behavior, where coexist in the phase space of one billiard chaotic and regular regions). Second, the numerical approach of these systems does not require numerical integration of differential equations and, therefore, does not take too much time of execution. Furthermore, the billiards allow us to perform investigations of fundamental nature, for example, we can study how regular systems react by being slightly disturbed. Specifically, we perform a rugosity perturbation on the billiard surface and observe how the phase space is going to change.

Keywords: Dynamical Systems. Billiards. Rugosity. . .

LISTA DE FIGURAS

1	Bilhar Retangular	p. 15
2	Bilhar de Sinai	p. 16
3	Bilhar de Bunimovich	p. 16
4	Um dos modos de vibração para um tambor retangular. A figura representa o relevo da membrana do tambor fotografado em um dado instante. Observe que o padrão é completamente regular.	p. 17
5	Um dos modos de vibração para um tambor com a forma do bilhar de Bunimovich. O relevo da membrana não apresenta regularidade alguma, exceto as simetrias.	p. 17
6	Representação de um toro em duas dimensões.	p. 22
7	Ilustração de toros no espaço de fase. (a) Linhas pontilhadas são chamadas toros racionais. As linhas abertas representam curvas invariantes e as fechadas representam ilhas de estabilidade. (b) Linhas contínuas são chamadas toros irracionais. As linhas abertas representam curvas invariantes e as fechadas representam ilhas de estabilidade.	p. 23
8	Fronteira do bilhar circular.	p. 25
9	Fronteiras para um bilhar ovóide. (a) $\epsilon = 0.3$. (b) $\epsilon = 0.5$. (c) $\epsilon = 0.7$. (d) $\epsilon = 0.9$	p. 26
10	Fronteira de um bilhar elíptico para $e = 0.5$	p. 26
11	Fronteiras de um bilhar elíptico-ovóide com excentricidade $e = 0.5$. (a) $\epsilon = 0.5$. (b) $\epsilon = 1.0$. (c) $\epsilon = 1.5$. (d) $\epsilon = 2.0$	p. 27
12	Dinâmica entre duas colisões seguidas.	p. 28
13	Espaço de fase de um bilhar circular. Apresenta apenas curvas invariantes.	p. 30
14	Movimentos de rotação de uma partícula dentro de um bilhar circular.	p. 31

15	Espaço de fase de um bilhar elíptico com excentricidade $e = 0.5$	p. 31
16	Movimentos da partícula dentro do bilhar. (a) Movimento correspondente ao que no espaço de fase chamamos de rotação, representado por curvas invariantes. (b) Movimento correspondente à libração, representado pelas ilhas de estabilidade. (c) Movimento correspondente à separatriz.	p. 32
17	Espaço de fase de um bilhar ovóide com $\epsilon = 0.1$	p. 33
18	Espaço de fase de um bilhar ovóide com $\epsilon = 0.2$	p. 33
19	Espaço de fase de um bilhar ovóide com $\epsilon = 0.3$	p. 34
20	Espaço de fase de um bilhar ovóide com $\epsilon = 0.4$	p. 34
21	Espaço de fase de um bilhar ovóide com $\epsilon = 0.5$	p. 35
22	Expoente de Lyapunov para um Bilhar Ovóide com $\epsilon = 0.3$	p. 36
23	Expoente de Lyapunov para um Bilhar Ovóide com $\epsilon = 0.4$	p. 36
24	Expoente de Lyapunov para um Bilhar Ovóide com $\epsilon = 0.5$	p. 36
25	Espaço de fase para o bilhar elíptico-ovóide. (a) $e = 0.5, \epsilon = 0$. (b) $e = 0.5, \epsilon = 0.2$. (c) $e = 0.5, \epsilon = 0.6$. (d) $e = 0.5, \epsilon = 1.0$	p. 37
26	Expoente de Lyapunov para um Bilhar elíptico ovóide com $e = 0.5$ e $\epsilon = 0.2$	p. 38
27	Expoente de Lyapunov para um Bilhar elíptico ovóide com $e = 0.5$ e $\epsilon = 0.6$	p. 38
28	Expoente de Lyapunov para um Bilhar elíptico ovóide com $e = 0.5$ e $\epsilon = 1.0$	p. 38
29	(a) Fronteira de um bilhar circular com rugosidade. (b) Fronteira de um bilhar elíptico com rugosidade.	p. 40
30	Esquematização da desfocalização das trajetórias na fronteira de uma superfície rugosa.	p. 40
31	Séries de números aleatórios gerados pela expressão (4.1). À medida que aumentamos o valor de μ , as séries vão se tornando fortemente correlacionadas. (a) $\mu = 0$. (b) $\mu = 2.0$. (c) $\mu = 3.0$. (d) $\mu = 6.0$	p. 41

32	Espaços de fase para o bilhar circular rugoso para diferentes valores de γ . (a) $\gamma = 0.0001$. (b) $\gamma = 0.001$. (c) $\gamma = 0.01$. (d) $\gamma = 0.1$	p. 42
33	Espaços de fase para o bilhar circular rugoso com grau de rugosidade $\gamma = 0.0001$ e diferentes valores de μ . (a) $\mu = 0$. (b) $\mu = 2$. (c) $\mu = 3$. (d) $\mu = 6$	p. 43
34	Espaços de fase para o bilhar circular rugoso com grau de rugosidade $\gamma = 0.001$ e diferentes valores de μ . (a) $\mu = 0$. (b) $\mu = 2$. (c) $\mu = 3$. (d) $\mu = 6$	p. 43
35	Espaços de fase para o bilhar circular rugoso com grau de rugosidade $\gamma = 0.01$ e diferentes valores de μ . (a) $\mu = 0$. (b) $\mu = 2$. (c) $\mu = 3$. (d) $\mu = 6$	p. 44
36	Espaços de fase para o bilhar circular rugoso com grau de rugosidade $\gamma = 0.1$ e diferentes valores de μ . (a) $\mu = 0$. (b) $\mu = 2$. (c) $\mu = 3$. (d) $\mu = 6$	p. 44
37	Espaços de fase para o bilhar elíptico rugoso para diferentes valores de γ . (a) $\gamma = 0.0001$. (b) $\gamma = 0.001$. (c) $\gamma = 0.01$. (d) $\gamma = 0.1$	p. 45
38	Espaços de fase para o bilhar elíptico rugoso de excentricidade $e = 0.5$ e grau de rugosidade $\gamma = 0.0001$ e diferentes valores de μ . (a) $\mu = 0$. (b) $\mu = 2$. (c) $\mu = 3$. (d) $\mu = 6$	p. 46
39	Espaços de fase para o bilhar elíptico rugoso de excentricidade $e = 0.5$ e grau de rugosidade $\gamma = 0.001$ e diferentes valores de μ . (a) $\mu = 0$. (b) $\mu = 2$. (c) $\mu = 3$. (d) $\mu = 6$	p. 46
40	Espaços de fase para o bilhar elíptico rugoso de excentricidade $e = 0.5$ e grau de rugosidade $\gamma = 0.01$ e diferentes valores de μ . (a) $\mu = 0$. (b) $\mu = 2$. (c) $\mu = 3$. (d) $\mu = 6$	p. 47
41	Espaços de fase para o bilhar elíptico rugoso de excentricidade $e = 0.5$ e grau de rugosidade $\gamma = 0.1$ e diferentes valores de μ . (a) $\mu = 0$. (b) $\mu = 2$. (c) $\mu = 3$. (d) $\mu = 6$	p. 47
42	Oscilador harmônico.	p. 50
43	Libração na projeção do espaço de fase no plano (q_i, p_i)	p. 52
44	Rotação na projeção do espaço de fase no plano (q_i, p_i)	p. 52

45	Curvatura da superfície S e definição do ângulo ϕ	p. 54
46	Expoente de Lyapunov λ em função do parâmetro de controle r	p. 60

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	p. 14
1.1	Breve Revisão Histórica do Caos	p. 14
1.2	Bilhares e Caos	p. 15
2	SISTEMAS DINÂMICOS	p. 19
2.1	Dinâmica dos Sistemas Integráveis	p. 20
2.2	Dinâmica dos Sistemas Quase-Integráveis	p. 22
2.3	Sistemas Não-Integráveis	p. 23
3	BILHARES ELÍPTICO-OVÓIDES	p. 25
3.1	Mapa que descreve o movimento no bilhar elíptico-ovóide	p. 27
3.2	Bilhar Circular	p. 29
3.3	Bilhar Elíptico	p. 30
3.4	Bilhar Ovóide	p. 31
3.5	Bilhares Elíptico-Ovóides	p. 37
4	RUGOSIDADE	p. 39
4.1	Superfícies Rugosas	p. 39
4.2	Bilhares Rugosos	p. 39
4.3	Bilhar Circular Rugoso	p. 42
4.4	Bilhar Elíptico Rugoso	p. 45
5	CONCLUSÃO	p. 48

6 APÊNDICE 1	p. 49
6.1 Equações de Hamilton	p. 49
6.2 Transformações Canônicas	p. 51
6.3 Variáveis Ângulo-Ação	p. 51
7 APÊNDICE 2	p. 54
7.1 Curvatura de curvas planas	p. 54
7.2 Valor crítico ϵ_c para o bilhar ovóide	p. 57
8 APÊNDICE 3	p. 58
8.1 Expoente de Lyapunov	p. 58
8.2 Matriz Jacobiana	p. 63
REFERÊNCIAS	p. 64

1 INTRODUÇÃO

1.1 Breve Revisão Histórica do Caos

O desenvolvimento do estudo do Caos pode ser atribuído historicamente ao matemático francês Henri Poincaré, que em 1885 escreveu sobre a estabilidade do movimento dos corpos do Sistema Solar, com o objetivo de ganhar um prêmio instituído pelo Rei Oscar II da Suécia e da Noruega a quem resolvesse o problema de N corpos[1].

Apesar de Poincaré não ter resolvido o problema, no seu trabalho as principais ideias da teoria dos sistemas dinâmicos já estavam presentes, entre as quais a sensibilidade às condições iniciais. Poincaré descobriu que nem sempre era possível encontrar uma solução fechada e válida para qualquer instante de tempo, sendo assim necessário resolver numericamente as equações de movimento para tempos suficientemente longos com o objetivo de obter a dinâmica do movimento. O problema é que naquela época, sem computadores, essa tarefa era demasiadamente árdua.

No começo da década de 1960, Edward Lorenz, meteorologista norte-americano, usou um computador para resolver um sistema de 12 equações que simulavam a atmosfera. Lorenz fazia com que o computador imprimisse sequências de linhas com informações sobre a direção e intensidade dos ventos, temperatura e pressão do seu modelo da atmosfera. Certo dia em 1961, Lorenz não refez a evolução do sistema a partir da condição inicial usada no dia seguinte. Ao invés disso, quebrou a sequência de números geradas no meio e tomou os dados impressos do meio da sequência como condições iniciais para outra simulação. O que Lorenz esperava era obter a mesma sequência anterior a partir do meio, já que tinha mudado a condição inicial por outra que pertencia a sequência. O que Lorenz obteve foi algo inesperado. A nova sequência não era uma repetição exata da anterior. As duas sequências divergiam uma da outra à medida que o tempo de simulação aumentava. Lorenz percebeu que o erro estava no fato de que na memória do computador, seis casas decimais estavam armazenadas: 0.506127[2]. Na impressão dos resultados gerados pelo

computador, que foi de onde ele tirou a nova condição inicial, apenas três casas decimais apareciam: 0.506. Lorenz havia pensado que a diferença de um para mil não tinha importância na evolução dinâmica do seu sistema.

Em 1983 Lorenz publicou um artigo[3] onde mostra que pequenas modificações nas condições iniciais do sistema podem levar o mesmo a apresentar instabilidade nas suas soluções, ou seja, comportamento caótico. Em 1972 Lorenz deu uma palestra intitulada “Does the flap of a butterfly’s wings in Brazil set off a tornado in Texas?”, de onde a expressão efeito borboleta surgiu como uma alegoria do conceito de sensibilidade às condições iniciais.

1.2 Bilhares e Caos

Bilhares são regiões bidimensionais confinantes em que uma partícula de tamanho desprezível está em movimento com velocidade constante em módulo e pode eventualmente colidir com as fronteiras do sistema. Tais tipos de sistemas são usados para investigações em várias áreas de pesquisa, como caos na Mecânica Clássica[4] e na Mecânica Quântica[5, 6].

O movimento em um bilhar retangular, mostrado na Figura (1), não é caótico. Movimentos que começam com condições iniciais ligeiramente próximas continuam próximos um do outro com o passar do tempo. O movimento geral da bola terá sempre a mesma direção depois de 4 colisões com a fronteira do bilhar[5, 6].

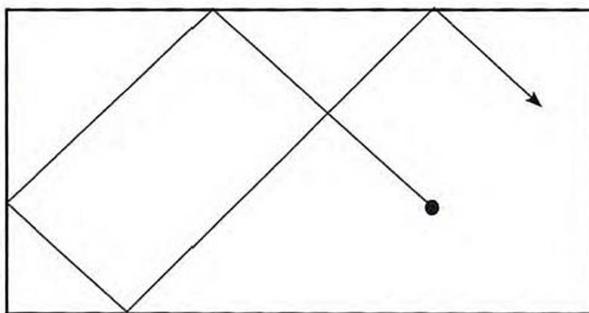


Figura 1: Bilhar Retangular

Uma pequena alteração nesse sistema, por exemplo, colocando um círculo interno fixo, como sugerido pelo matemático russo Yacob Sinai e mostrado na Figura (2), terá como efeito desfocalizar as trajetórias. Logo, movimentos com condições iniciais ligeiramente diferentes podem ter um movimento a longo prazo muito diferente do movimento nos instantes iniciais. Este tipo de bilhar exhibe comportamento caótico[6].

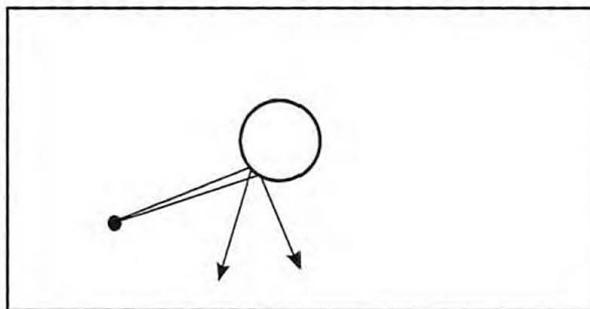


Figura 2: Bilhar de Sinai

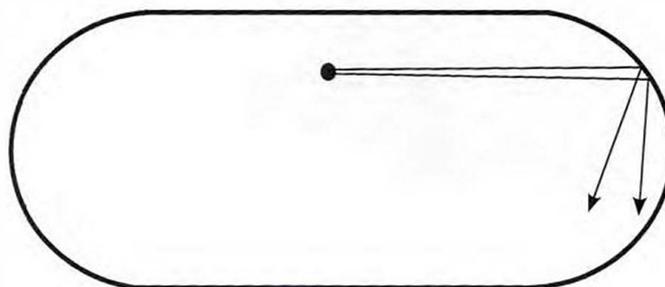


Figura 3: Bilhar de Bunimovich

Outro tipo de bilhar que exibe comportamento caótico é o bilhar de Bunimovich, devido ao matemático russo Leonid Bunimovich, Figura (3). Esse bilhar é construído adicionando duas partes semi-circulares ao bilhar retangular, que servirão como desfocalizadoras das trajetórias. Nesse sistema, também temos comportamento caótico[5, 6].

Dos exemplos acima, percebe-se que a desfocalização da trajetória tem um papel fundamental na ocorrência de caos na Mecânica Clássica[6].

Outra aplicação do uso de bilhares é no estudo do fenômeno conhecido como Aceleração de Fermi[7], que é o crescimento ilimitado da energia de uma partícula clássica que sofre colisões com uma parede que varia no tempo. Ao se usar bilhares, considera-se que as suas fronteiras variando com o tempo “breathing” e, dessa forma, a partícula pode experimentar a Aceleração de Fermi e ter crescimento ilimitado de energia.

No domínio da Mecânica Quântica, temos que as partículas evidenciam sua natureza ondular. No bilhar quântico, a cada colisão da partícula com a fronteira, teremos uma onda associada à partícula que é refletida e interfere com as reflexões da onda devido a colisões anteriores e posteriores[6]. Teremos então um padrão de interferência e um dos problemas quânticos iniciais correspondentes ao jogo do bilhar clássico é saber quais ondas

cabem nas formas das Figuras (1), (2), (3) ou de outros tipos de bilhares. Podemos pensar nesse problema como se os bilhares fossem tambores que vibram. Surge naturalmente a seguinte pergunta: podemos decompor o movimento de vibração do tambor em modos de vibração com diferentes frequências? As Figuras (4) e (5) mostram um modo de vibração de tambor com a forma de um bilhar retangular e de um bilhar de Bunimovich[6], respectivamente.

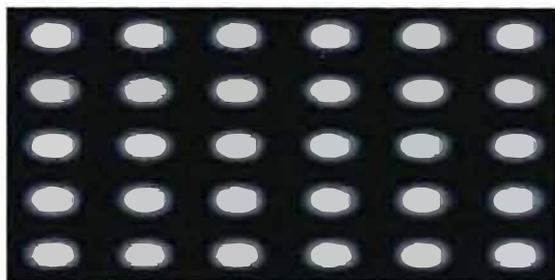


Figura 4: Um dos modos de vibração para um tambor retangular. A figura representa o relevo da membrana do tambor fotografado em um dado instante. Observe que o padrão é completamente regular.

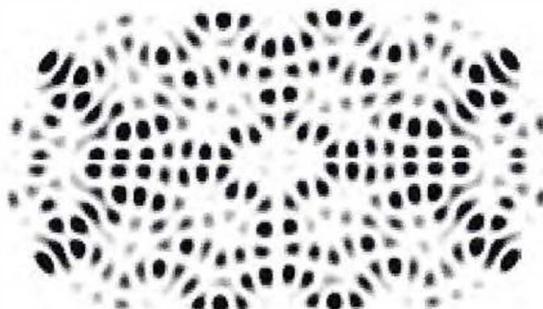


Figura 5: Um dos modos de vibração para um tambor com a forma do bilhar de Bunimovich. O relevo da membrana não apresenta regularidade alguma, exceto as simetrias.

Uma outra aplicação da Teoria de Caos Quântico é a tecnologia de nanoestruturas em semicondutores. Os bilhares podem ser usados para modelar o que chamam de pontos quânticos, que são minúsculas regiões usadas para confinar elétrons e estão previstos como o ponto de partida para futuras gerações de dispositivos eletrônicos, como os transistores.

Neste trabalho, os bilhares são usados com o objetivo de perceber como sistemas dinâmicos integráveis, que serão definidos na seção 2.1, evoluem para sistemas caóticos à medida que aplicamos uma perturbação no sistema. Nesses sistemas não há dissipação de energia e campo externo aplicado, logo, temos que a energia total do movimento e o módulo da velocidade são constantes. A análise do movimento de uma partícula confinada dentro de um bilhar será feita por meio do espaço de fase do sistema e o regime caótico será analisado utilizando o conceito de desfocalização das trajetórias e expoente

de Lyapunov. Para construirmos esses espaços de fase, veremos como tratar sistemas integráveis por meio de uma transformação canônica que, devido ao fato de que sistemas integráveis possuem um número de constantes de movimento igual ao número de graus de liberdade, nos permite reescrever a Hamiltoniana que representa o sistema em uma forma mais simples, em que as equações de Hamilton são extremamente fáceis de serem resolvidas. Feito isso, iremos aplicar uma pequena perturbação nesses sistemas e ver como evoluem à medida que o grau da perturbação aumenta. Para entendermos a evolução desses sistemas com a perturbação, iremos lançar mão do Teorema KAM[8, 9, 10] e do Teorema de Poincaré-Birkhoff[9]. O Teorema KAM nos diz o que acontece no espaço de fase quando o sistema sofre uma perturbação, mais precisamente, que certas estruturas que representam estabilidade, como toros racionais e irracionais, são destruídas à medida que fortalecemos a perturbação. Já o segundo, o Teorema de Poincaré-Birkhoff, nos diz que após a destruição dos toros, surgem aos pares pontos fixos elípticos e hiperbólicos. Os primeiros representam pontos estáveis e os segundos pontos instáveis que podem levar ao surgimento de caos no sistema.

Todo o trabalho apresentado nesta tese foi feito no sistema operacional Linux. O presente texto foi feito no editor de texto TexMaker. As simulações numéricas e scripts que viabilizaram a obtenção dos resultados foram feitas em linguagens como C, C++, Python e Shell Script. Os gráficos e figuras foram obtidos e editados com a ajuda de programas como Xmgrace, Pylab e Inkscape. A grande maioria dos resultados foram obtidos com a ajuda dos clusters computacionais do Departamento de Física. Excelentes referências de divulgação científica sobre caos são os livros[2, 11].

2 SISTEMAS DINÂMICOS

Dentro da grande classe dos sistemas dinâmicos, existe uma de grande interesse que é a classe dos sistemas dinâmicos integráveis. Por sistemas integráveis, entendemos sistemas cujas equações de movimento são resolvidas por meio de quadraturas, ou seja, por meio de integrais de funções conhecidas. Para tais sistemas, é fundamental a existência de um número de constantes de movimentos maior ou igual ao número de graus de liberdade do sistema. Antes de tratarmos um sistema integrável com N graus de liberdade, exemplificaremos essa ideia com um sistema unidimensional conservativo, ou seja, em que a energia total é constante. Exemplos de sistemas desse tipo podem ser um oscilador harmônico, um corpo em queda livre nas proximidades da superfície terrestre, entre outros. Em tais sistemas, temos que a energia total é expressa por:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x), \quad (2.1)$$

onde $V(x)$ representa, a interação entre partes do sistema (no caso do oscilador harmônico, a interação entre a partícula e a mola) ou a interação entre sistema e algum campo externo conservativo aplicado (no caso do movimento de queda livre, onde a partícula interage com o campo gravitacional).

Dessa forma, a energia total é uma constante de movimento. Por esse fato, podemos reescrever a equação (2.1) em função de \dot{x}

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}, \quad (2.2)$$

e a equação acima é facilmente resolvida para o tempo t :

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{d\zeta}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(\zeta))}}. \quad (2.3)$$

Aplicando um procedimento algébrico de inversão, pode-se escrever $x = x(t)$, ou seja,

a equação de movimento do sistema. Assim, qualquer sistema unidimensional em que a energia é constante é um sistema integrável.

Na seção seguinte, iremos desenvolver a versão dessa ideia para sistemas com N graus de liberdade. Como no exemplo acima, o número de constantes de movimento é igual ou maior que o número de graus de liberdade do sistema e desempenha um papel fundamental na caracterização dos sistemas integráveis.

2.1 Dinâmica dos Sistemas Integráveis

Um sistema com N graus de liberdade é dito integrável se possui no mínimo N constantes de movimento. Assim, tomemos um sistema S integrável com N graus de liberdade descrito pela Hamiltoniana¹:

$$H = H(q_i, p_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (2.4)$$

onde

$$f_i = f_i(q_i, p_i) = c_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (2.5)$$

são as N constantes de movimento.

Nessas variáveis as equações de movimento (equações de Hamilton) ficam:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q_i, p_i)}{\partial p_i}, \quad (2.6)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H(q_i, p_i)}{\partial q_i}, \quad (2.7)$$

sujeita aos vínculos (2.5).

Acontece que não sabemos nada se as integrais para \vec{q} e \vec{p} provenientes das equações (2.6) e (2.7) são facilmente solúveis. Dependendo do nosso sistema, elas podem ser bastante complicadas ou bastante simples. Gostaríamos de não arriscar e então é natural perguntar se existe alguma transformação canônica² T que torna a dinâmica do sistema trivial. De fato, devido as N constantes de movimento, podemos definir novas variáveis (\vec{Q}, \vec{P}) de tal forma que as novas equações de Hamilton em termos dessas variáveis sejam facilmente resolvidas. A ideia que nos leva a crer que tal transformação existe é bastante simples[9]. Iremos apresentá-la aqui em sua forma mais simples.

¹Ver Apêndice 1, seção 3.1.

²Ver Apêndice 1, seção 3.2.

Suponha que temos N constantes de movimentos dadas por (2.5). Definiremos novas variáveis (\vec{Q}, \vec{P}) de tal forma que $P_i = f_i(q_i, p_i)$, ou seja, identificaremos nossos $\vec{P}'s$ com nossas N constantes de movimento, daí a sua necessidade. Como os P_i são constantes, temos

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial h(Q_i, P_i)}{\partial Q_i} = 0, \quad (2.8)$$

logo, h (nova Hamiltoniana) não pode depender dos $\vec{Q}'s$, ou seja, $h = h(\vec{P})$. Já a outra equação:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial h(Q_i, P_i)}{\partial P_i} = \omega_i = cte. \quad (2.9)$$

Temos então dois novos conjuntos de equações nessas novas variáveis cuja integração é trivial: $P_i = P_{i0}$ e $Q_i = Q_{i0} + \omega_i t$, $i = 1, 2, \dots, N$. Fica claro então que existe uma transformação canônica que torna a dinâmica trivial.

Identificando então (\vec{Q}, \vec{P}) com as variáveis de ângulo-ação³ $(\vec{\varphi}, \vec{J})$, temos que a nova Hamiltoniana fica:

$$h = h(\vec{J}), \quad (2.10)$$

da qual derivam-se equações de movimento diretamente integráveis:

$$\dot{J}_i = -\frac{\partial h}{\partial \phi_i} = 0 \Rightarrow J_i = r_i = cte, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.11)$$

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\partial h}{\partial J_i} = \omega_i = cte \Rightarrow \varphi_i = \omega_i t + \varphi_{i0}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.12)$$

As equações (2.11) e (2.12) em duas dimensões ficam:

$$J_1 = r_1, \quad (2.13)$$

$$J_2 = r_2, \quad (2.14)$$

$$\varphi_1 = \omega_1 t + \varphi_{10}, \quad (2.15)$$

$$\varphi_2 = \omega_2 t + \varphi_{20}. \quad (2.16)$$

Essas quatro equações acima caracterizam um movimento sobre um toro Figura (6), que também é chamado de toro invariante, pois uma trajetória que inicia sobre ele jamais escapa desse toro. Pode-se dizer que temos dois movimentos circulares uniformes independentes nas coordenadas φ_1 e φ_2 com frequências ω_1 e ω_2 de rotação, respectivamente,

³Ver Apêndice 1, seção 3.3.

dadas por:

$$\omega_1 = \frac{\partial h(J_1, J_2)}{\partial J_1}, \quad (2.17)$$

$$\omega_2 = \frac{\partial h(J_1, J_2)}{\partial J_2}. \quad (2.18)$$

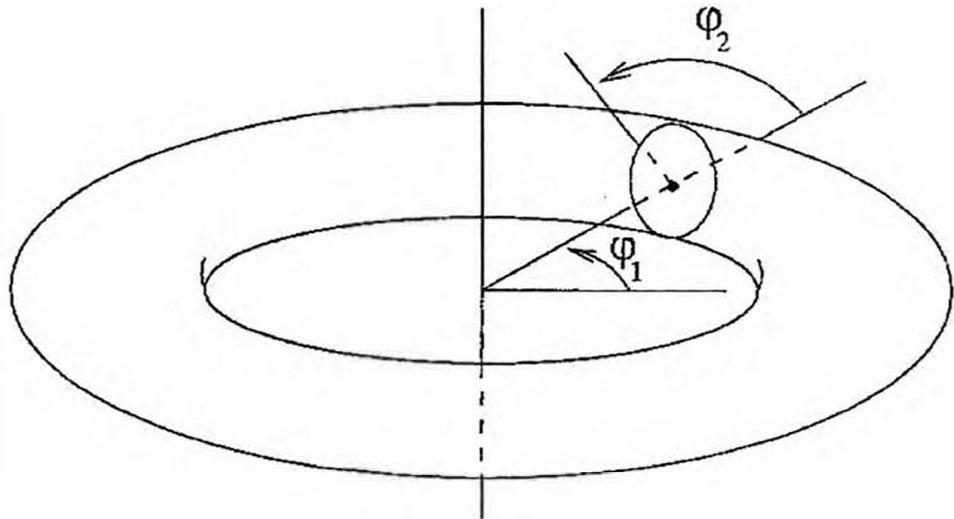


Figura 6: Representação de um toro em duas dimensões.

Os toros podem ser de dois tipos. Quando a razão entre as frequências acima é um número racional temos um toro racional e quando a razão entre as frequências é um número irracional temos um toro irracional. Se o toro é racional, a trajetória é periódica com período igual ao mínimo múltiplo comum à ω_1 e ω_2 . No espaço de fase, toros racionais são representados por linhas pontilhadas Figura (7)(a). Se o toro é irracional, a trajetória nunca se fecha e, portanto, o toro é completamente coberto após um intervalo de tempo infinito. No espaço de fase, toros irracionais são representados por linhas contínuas Figura (7)(b).

2.2 Dinâmica dos Sistemas Quase-Integráveis

Sistemas conservativos quase-integráveis são obtidos pela aplicação de uma perturbação fraca que preserva a conservação da energia de um sistema integrável. Anteriormente, estudamos o comportamento de sistemas integráveis. Agora, veremos como esses sistemas reagem ao serem levemente perturbados.

Segundo o teorema KAM[9, 10, 8], na presença de uma perturbação fraca, os toros irracionais não se quebram, mas apenas se deformam levemente, enquanto que os toros

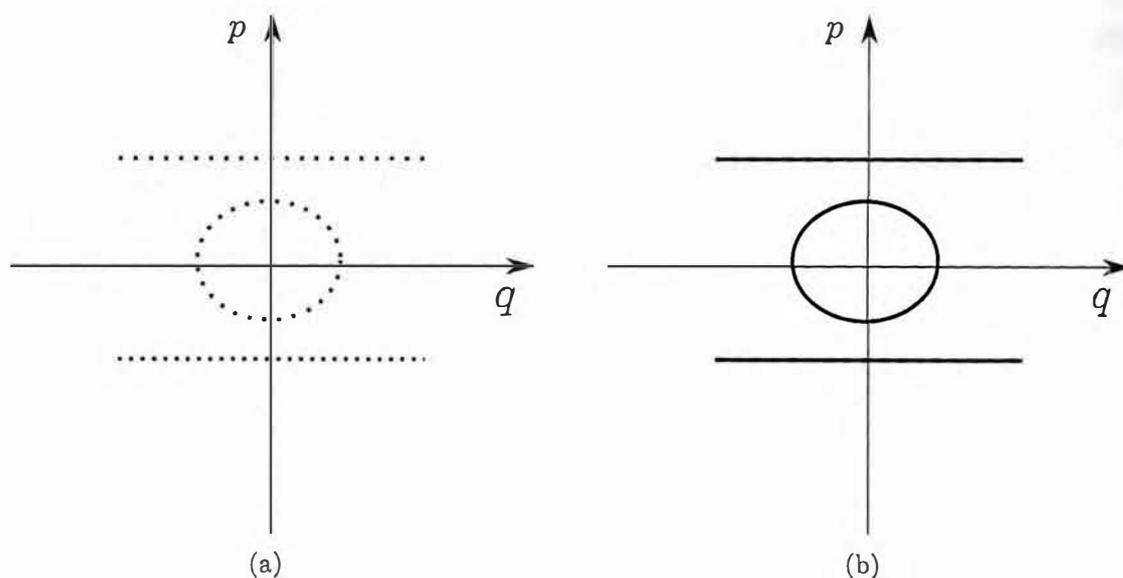


Figura 7: Ilustração de toros no espaço de fase. (a) Linhas pontilhadas são chamadas toros racionais. As linhas abertas representam curvas invariantes e as fechadas representam ilhas de estabilidade. (b) Linhas contínuas são chamadas toros irracionais. As linhas abertas representam curvas invariantes e as fechadas representam ilhas de estabilidade.

racionais são gradativamente destruídos e se espalham de uma maneira extremamente irregular entre os toros preservados de tal forma que o volume ocupado por eles tende a zero. Mas, com o aumento da intensidade da perturbação os toros irracionais também começam a ser destruídos um a um até o último.

A maneira como os toros são destruídos é descrita pelo teorema de Poincaré-Birkhoff [9]. Na presença de uma perturbação fraca, os toros racionais ressonam e se quebram. Em seu lugar, surgem uma sequência de pontos de equilíbrio estável (chamados de pontos elípticos) e instável (chamados de pontos hiperbólicos). Ao redor dos pontos elípticos aparecem pequenas estruturas regulares composta por toros racionais e irracionais, auto-similares ao sistema original. As órbitas próximas aos pontos hiperbólicos ficam altamente instáveis, ou caóticas, dando origem a uma sequência de pontos distribuídos de maneira aleatória no espaço de fase.

2.3 Sistemas Não-Integráveis

Quando a perturbação aplicada no sistema se torna forte o suficiente, todos os toros racionais e irracionais são quebrados e o espaço de fase é coberto por pontos distribuídos aleatoriamente e dizemos que o espaço de fase está coberto pelo mar de caos. Um sistema com tal espaço de fase é dito não-integrável ou caótico. Sistemas caóticos apresentam a

propriedade de que dados dois movimentos com condições iniciais próximas, com o passar do tempo, esses dois movimentos podem estar muito distantes um do outro.

3 BILHARES ELÍPTICO-OVÓIDES

Bilhares elíptico-ovóides são descritos pela equação

$$R(\theta, e, \epsilon) = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos(\theta)} + \epsilon \cos(\theta), \quad (3.1)$$

onde θ é o ângulo polar, $e \in [0, 1)$ é a excentricidade da parte elíptica e $\epsilon \in [0, 1]$ é o parâmetro de controle da parte ovóide. Fazendo $e = 0$ e $\epsilon = 0$ na equação (3.1), teremos o bilhar circular, cuja equação que o descreve é a seguinte:

$$R(\theta, e, \epsilon) = 1. \quad (3.2)$$

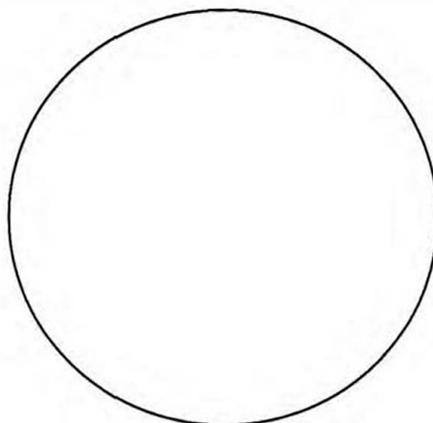


Figura 8: Fronteira do bilhar circular.

Para $e = 0$ e $\epsilon \neq 0$, temos o bilhar ovóide ou bilhar típico e a equação (3.1) fica:

$$R(\theta, e, \epsilon) = 1 + \epsilon \cos(\theta). \quad (3.3)$$

Nas Figura (9) abaixo, temos exemplos de formato para a fronteira de um bilhar ovóide:

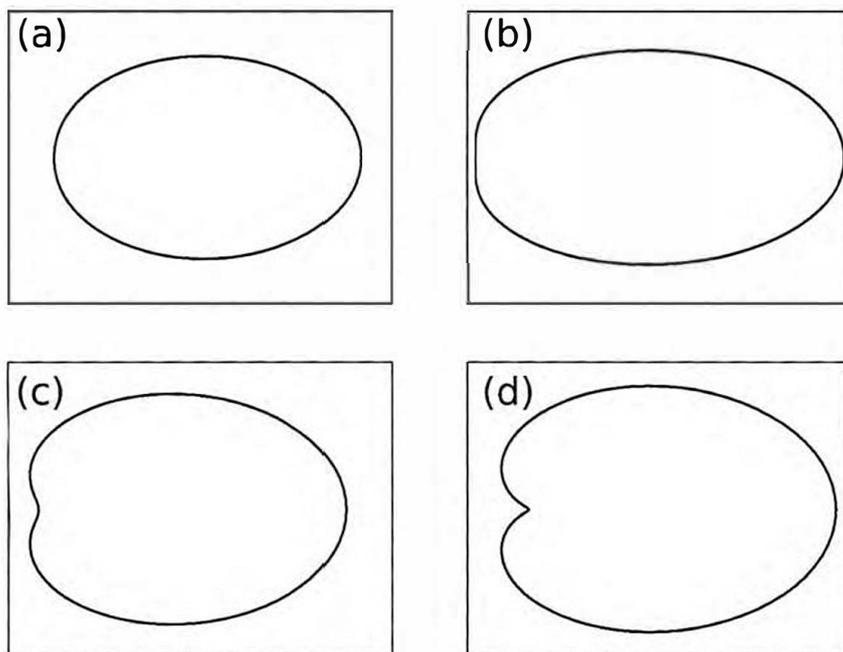


Figura 9: Fronteiras para um bilhar ovóide. (a) $\epsilon = 0.3$. (b) $\epsilon = 0.5$. (c) $\epsilon = 0.7$. (d) $\epsilon = 0.9$.

Para $e \neq 0$ e $\epsilon = 0$, temos o bilhar elíptico cuja equação é a seguinte:

$$R(\theta, e, \epsilon) = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos(\theta)}. \quad (3.4)$$

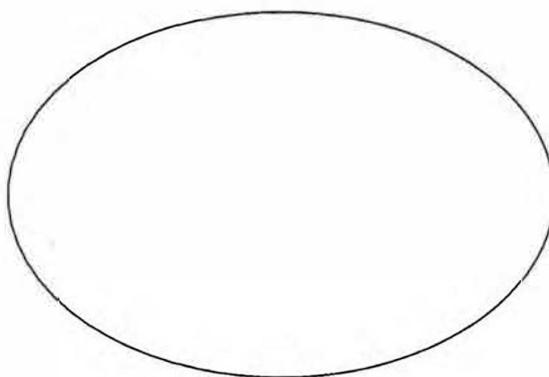


Figura 10: Fronteira de um bilhar elíptico para $e = 0.5$.

Já para $e \neq 0$ e $\epsilon \neq 0$, temos um bilhar do tipo elíptico-ovóide completo, formado pela equação (3.1). Exemplos de algumas fronteiras para esse bilhar estão na figura abaixo.

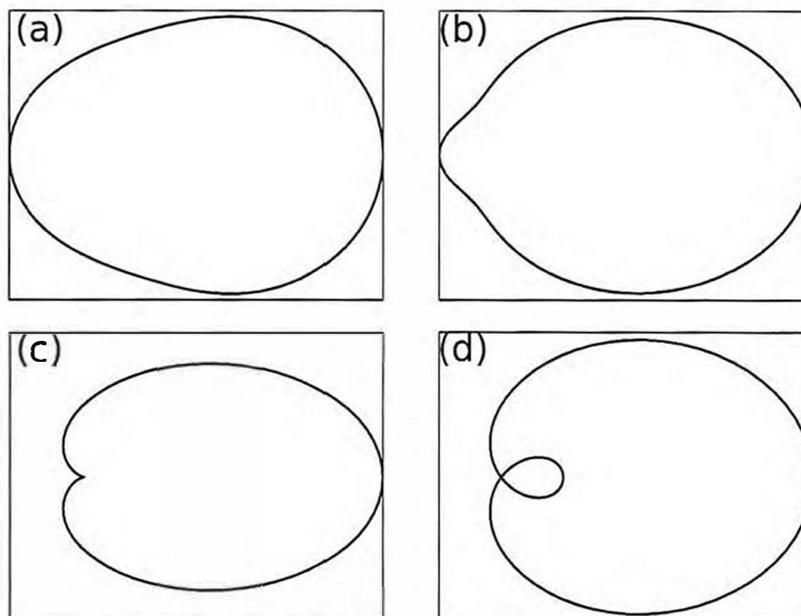


Figura 11: Fronteiras de um bilhar elíptico-ovóide com excentricidade $e = 0.5$. (a) $\epsilon = 0.5$. (b) $\epsilon = 1.0$. (c) $\epsilon = 1.5$. (d) $\epsilon = 2.0$.

Estamos interessados em estudar a dinâmica de uma partícula de massa unitária e velocidade constante confinada em fronteiras do tipo elíptico-ovóides. Durante uma colisão e outra com as paredes do bilhar, a partícula viaja em linha reta, sem influência de campos externos ou dissipativos, de forma que toda a informação sobre a dinâmica da partícula poderá ser extraída a partir das posições em que a partícula colide com a fronteira. Usaremos essa condição para deduzirmos o mapa que nos fornece a dinâmica do nosso sistema.

3.1 Mapa que descreve o movimento no bilhar elíptico-ovóide

Entre duas colisões, a partícula sofre uma reflexão regular ao colidir com as fronteiras do bilhar, ou seja, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. A figura (12) mostra a dinâmica entre duas colisões seguidas:

Da Figura (12), temos que o bilhar terá uma dinâmica descrita por um mapa não linear $T(\theta_n, \alpha_n) = (\theta_{n+1}, \alpha_{n+1})$, onde θ_n é o ângulo polar e α_n é o ângulo complementar ao ângulo de reflexão, ou seja, o ângulo que a trajetória da partícula faz com a tangente ao ponto de colisão. Definimos também o ângulo da reta tangente ao bilhar no ponto de

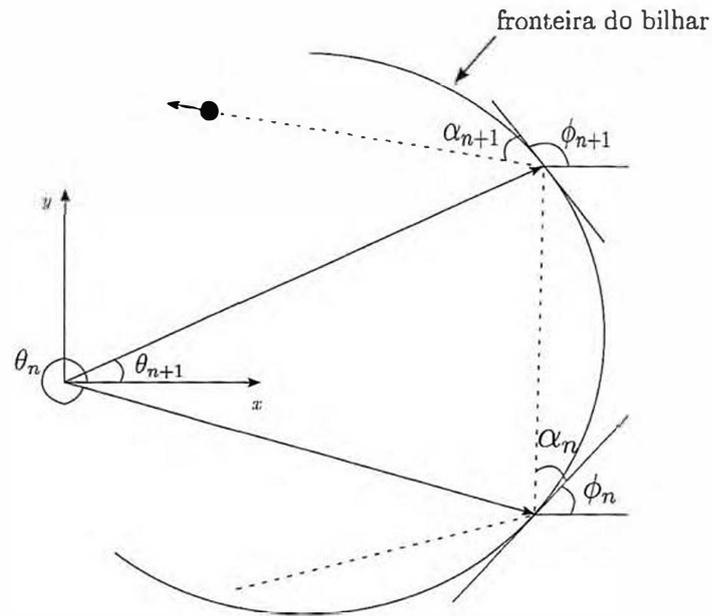


Figura 12: Dinâmica entre duas colisões seguidas.

colisão, ϕ_n .

No instante da colisão, a posição da partícula é dada por:

$$x(\theta_n) = R(\theta_n)\cos\theta_n = \left[\frac{1 - e^2}{1 + e\cos(\theta_n)} + e\cos(\theta_n) \right] \cos\theta_n, \quad (3.5)$$

$$y(\theta_n) = R(\theta_n)\sin\theta_n = \left[\frac{1 - e^2}{1 + e\cos(\theta_n)} + e\cos(\theta_n) \right] \sin\theta_n. \quad (3.6)$$

O ângulo tangente ϕ_n é obtido de

$$\text{tg}(\phi_n) = \lim_{\Delta\theta_n \rightarrow 0} \frac{[y(\theta_n + \Delta\theta_n) - y(\theta_n)] / \Delta\theta_n}{[x(\theta_n + \Delta\theta_n) - x(\theta_n)] / \Delta\theta_n}, \quad (3.7)$$

$$\text{tg}(\phi_n) = \frac{(dy/d\theta)}{(dx/d\theta)} = \frac{y'(\theta_n)}{x'(\theta_n)}, \quad (3.8)$$

$$\phi_n = \text{arctg} \left(\frac{y'(\theta_n)}{x'(\theta_n)} \right), \quad (3.9)$$

onde as derivadas das posições em relação a θ são:

$$y'(\theta_n) = \left[\frac{e(1-e^2)\text{sen}(\theta_n)}{(1+e\cos(\theta_n))^2} - \epsilon\text{sen}(\theta_n) \right] \text{sen}(\theta_n) + \left[\frac{1-e^2}{1+e\cos(\theta_n)} + \epsilon\cos(\theta_n) \right] \cos(\theta_n), \quad (3.10)$$

$$x'(\theta_n) = \left[\frac{e(1-e^2)\text{sen}(\theta_n)}{(1+e\cos(\theta_n))^2} - \epsilon\text{sen}(\theta_n) \right] \cos(\theta_n) - \left[\frac{1-e^2}{1+e\cos(\theta_n)} + \epsilon\cos(\theta_n) \right] \text{sen}(\theta_n). \quad (3.11)$$

Como a trajetória da partícula entre duas colisões é uma reta, então podemos relacionar os pontos de colisões atuais com os anteriores, ou seja:

$$y(\theta_{n+1}) - y(\theta_n) = \text{tg}(\alpha_n + \phi_n)[x(\theta_{n+1}) - x(\theta_n)], \quad (3.12)$$

de onde podemos obter numericamente θ_{n+1} . Com θ_{n+1} , obtemos ϕ_{n+1} e com ϕ_n e ϕ_{n+1} em mãos, podemos calcular α_{n+1} pois, da Figura (12), temos que:

$$\alpha_{n+1} = \phi_{n+1} - (\alpha_n + \phi_n), \quad (3.13)$$

onde $\phi_{n+1} = \arctg\left(\frac{y'(\theta_{n+1})}{x'(\theta_{n+1})}\right)$. O mapa que descreve o movimento no bilhar é dado por[12]:

$$T : \begin{cases} F(\theta_{n+1}) = R(\theta_{n+1})\text{sen}(\theta_{n+1}) - Y(\theta_n) - \text{tg}(\alpha_n + \phi_n)[R(\theta_{n+1})\cos(\theta_{n+1}) - X(\theta_n)], \\ \alpha_{n+1} = \phi_{n+1} - (\alpha_n + \phi_n) \end{cases} \quad (3.14)$$

No mapa acima, $Y(\theta_n) = R(\theta_n)\text{sen}(\theta_n)$ e $X(\theta_n) = R(\theta_n)\cos(\theta_n)$. θ_{n+1} é obtido numericamente tomando $F(\theta_{n+1}) = 0$ e, uma vez com θ_{n+1} em mãos, obtemos ϕ_{n+1} da equação (3.9). Por último, obtemos α_{n+1} da segunda equação do mapa acima. Ao continuarmos essa operação de iteração, obtemos toda a dinâmica do bilhar projetada em um espaço de fase bidimensional.

3.2 Bilhar Circular

O bilhar circular é obtido fazendo $e = 0$ e $\epsilon = 0$. O bilhar circular é integrável pois possui duas constantes de movimento (energia e momento). Sendo assim, possui apenas órbitas periódicas (toros racionais). O espaço de fase está mostrado na Figura (13).

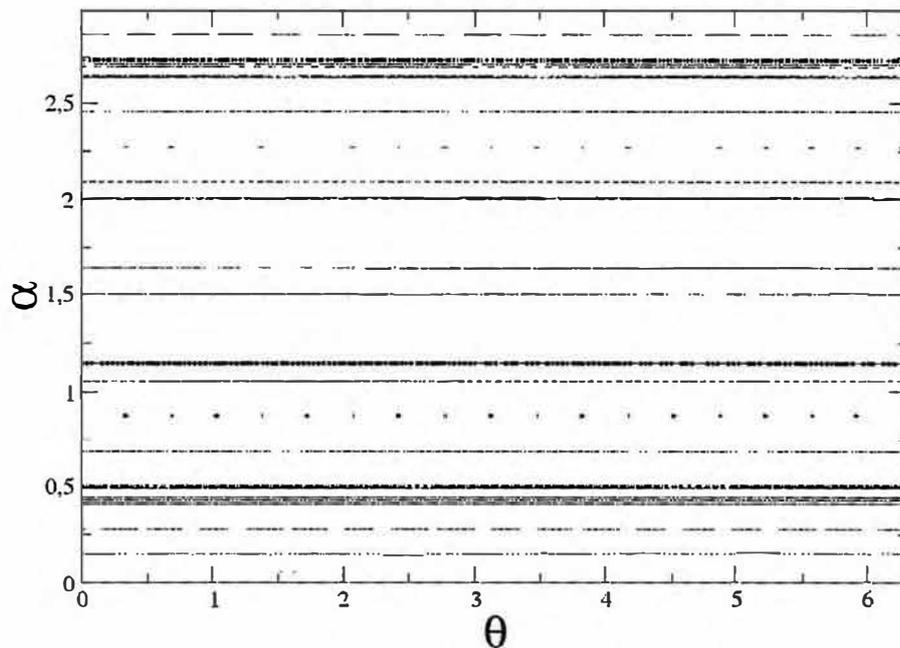
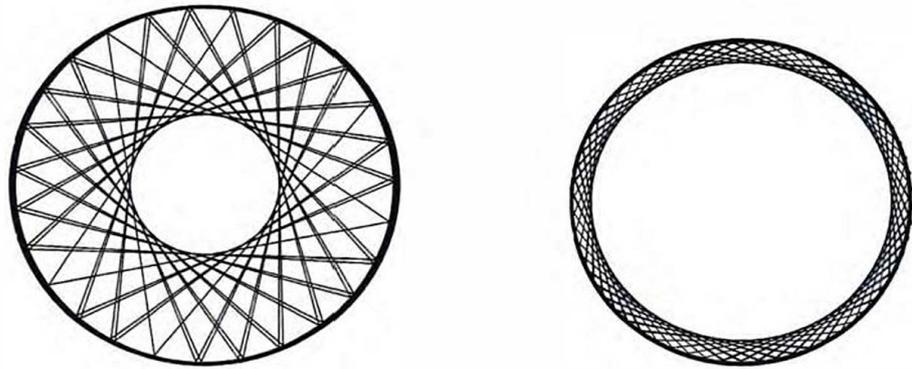


Figura 13: Espaço de fase de um bilhar circular. Apresenta apenas curvas invariantes.

Os tipos de movimentos possíveis para um bilhar circular são do tipo rotação, representados no espaço de fase por curvas invariantes na Figura (14).

3.3 Bilhar Elíptico

O bilhar elíptico é um bilhar integrável, pois assim como o bilhar circular, possui duas constantes de movimento (energia e o produto do momento angular calculado em relação aos dois focos[4]). O espaço de fase de um bilhar elíptico, apesar de não apresentar comportamento caótico, possui uma riqueza de comportamentos maior que a do bilhar circular. Como podemos ver na Figura (15) abaixo, temos órbitas que representam movimentos de libração e rotação, assim como uma curva separatriz entre esses dois tipos de movimento. Na Figura (16), temos os movimentos da partícula correspondente à libração, rotação e separatriz.



(a) Exemplo de movimento de rotação no bilhar circular.

(b) Exemplo de movimento de rotação no bilhar circular.

Figura 14: Movimentos de rotação de uma partícula dentro de um bilhar circular.

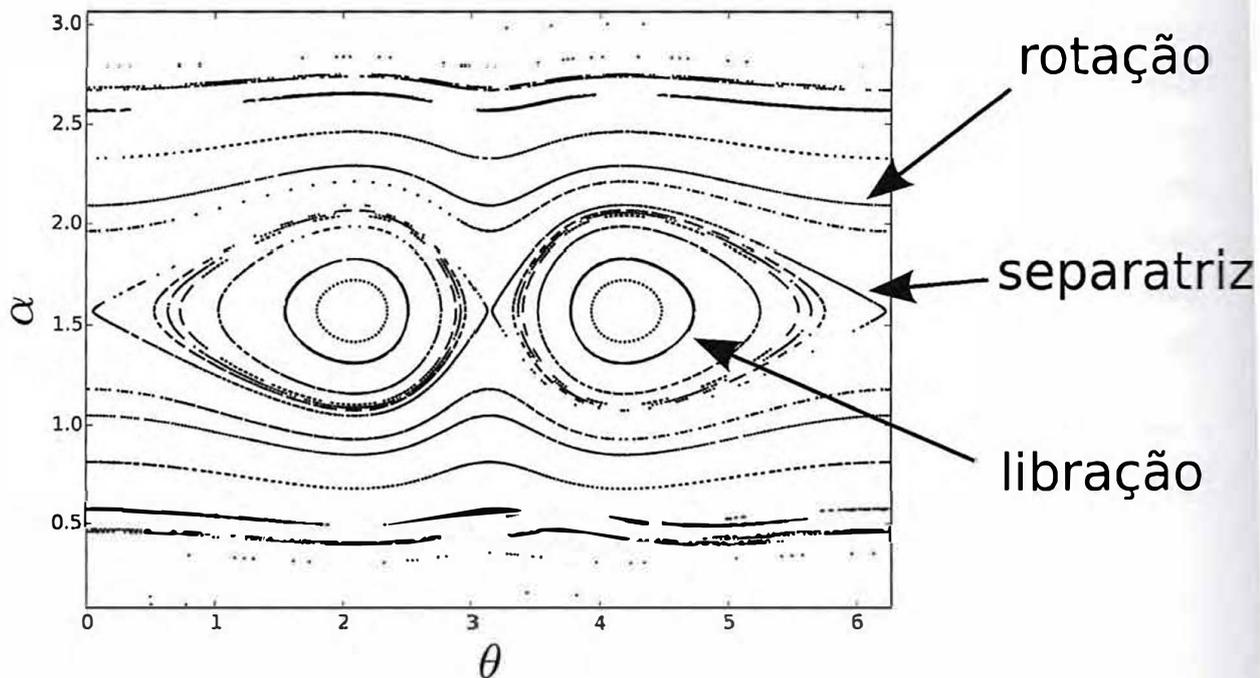


Figura 15: Espaço de fase de um bilhar elíptico com excentricidade $e = 0.5$.

3.4 Bilhar Ovóide

O bilhar ovóide é obtido fazendo $e = 0$ na equação (3.1). A equação que descreve tal fronteira é a seguinte:

$$R(\theta, e, \epsilon) = 1 + \epsilon \cos(\theta). \quad (3.15)$$

Esse tipo de bilhar pode ser visto como uma perturbação no bilhar circular, com ϵ sendo o parâmetro de controle. Ele também é interessante porque podemos ter movimen-

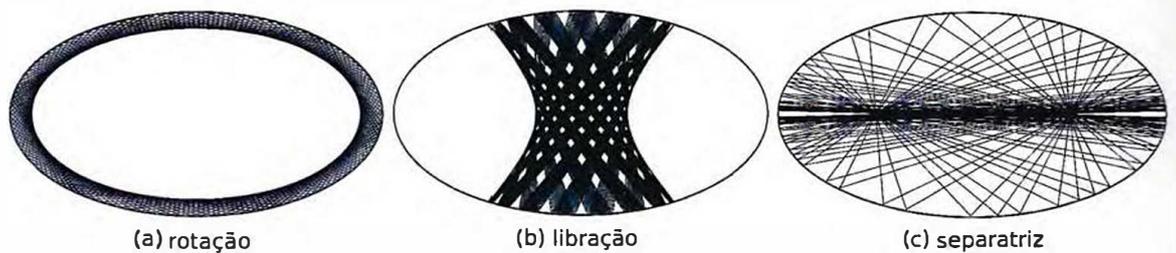


Figura 16: Movimentos da partícula dentro do bilhar. (a) Movimento correspondente ao que no espaço de fase chamamos de rotação, representado por curvas invariantes. (b) Movimento correspondente à libração, representado pelas ilhas de estabilidade. (c) Movimento correspondente à separatriz.

tos de rotação e libração no mesmo espaço de fase, assim como a existência de caos. A forma da fronteira varia de acordo com o parâmetro ϵ que está relacionado com a sua curvatura. Para alguns valores de ϵ a curvatura da fronteira é positiva, o que permite movimentos periódicos e quase-periódicos representados por toros racionais e irracionais. A medida que aumentamos o valor do parâmetro de controle, chegaremos em um valor ϵ_c crítico tal que nesse ponto ocorre uma mudança de curvatura de positiva para negativa. O primeiro efeito dessa mudança de curvatura é a destruição dos toros que representam órbitas de rotação (curvas invariantes). Para o bilhar ovóide descrito pela equação acima, o valor crítico do parâmetro de controle ϵ^1 é $\epsilon_c = 1/2$. Nas Figuras (17), (18), (19) e (20) estão alguns espaços de fase obtidos para $\epsilon = 0.1, 0.2, 0.3$ e 0.4 .

¹Ver Apêndice 2

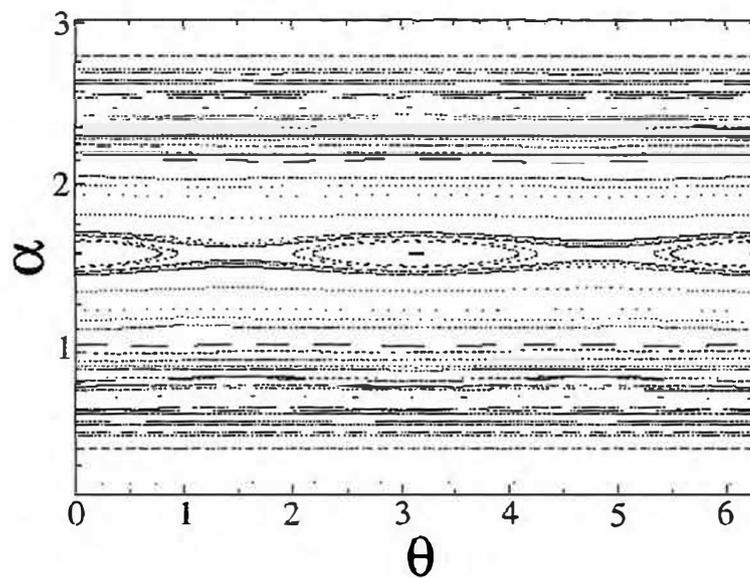


Figura 17: Espaço de fase de um bilhar ovóide com $\epsilon = 0.1$.

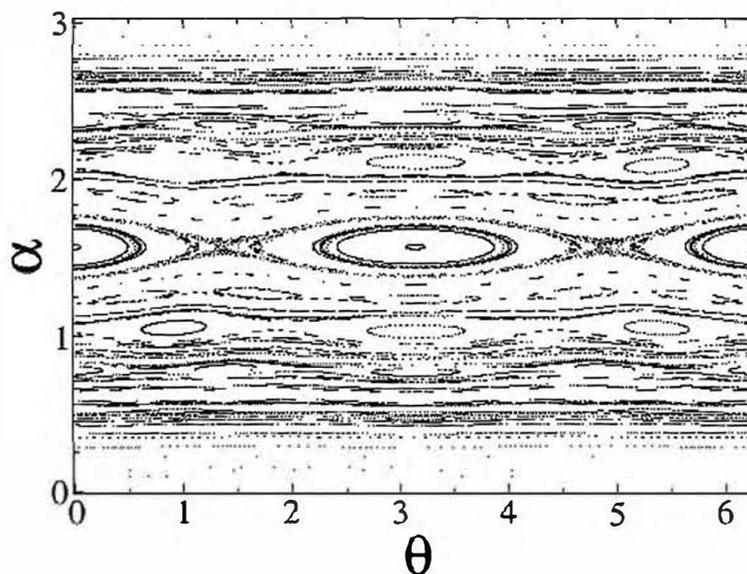


Figura 18: Espaço de fase de um bilhar ovóide com $\epsilon = 0.2$.

R-14324819

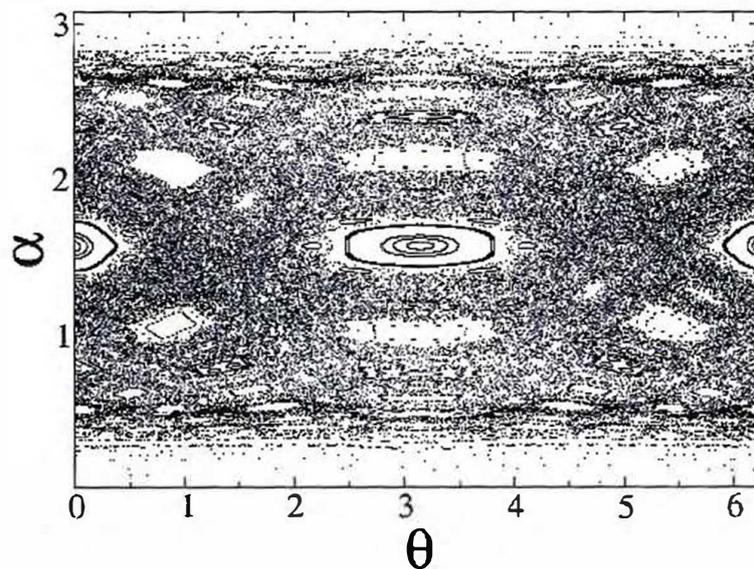


Figura 19: Espaço de fase de um bilhar ovóide com $\epsilon = 0.3$.

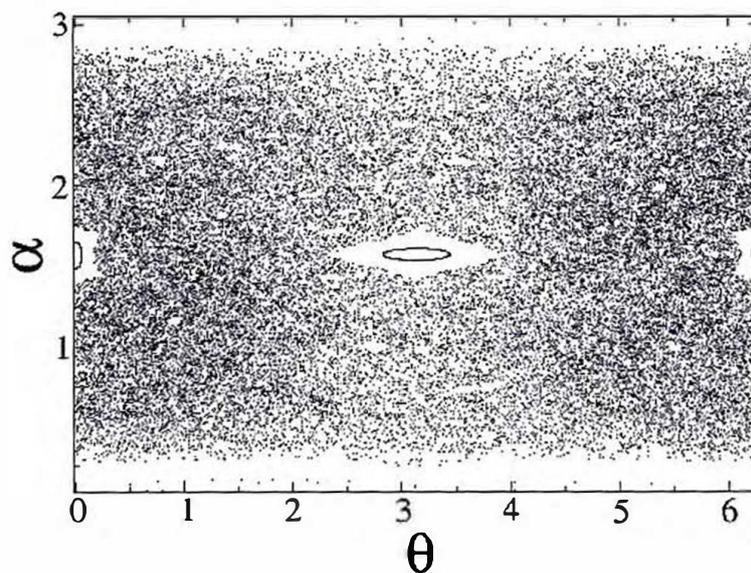


Figura 20: Espaço de fase de um bilhar ovóide com $\epsilon = 0.4$.

Para $\epsilon = \epsilon_c = 0.5$, temos que a curvatura da fronteira do bilhar muda de positiva pra negativa, o que acarreta na destruição total de curvas invariantes e ilhas de estabilidade, devido ao fato de que uma curvatura negativa desfocalizará as trajetórias, o que acaba gerando o mar de caos, como visto abaixo na Figura (21).

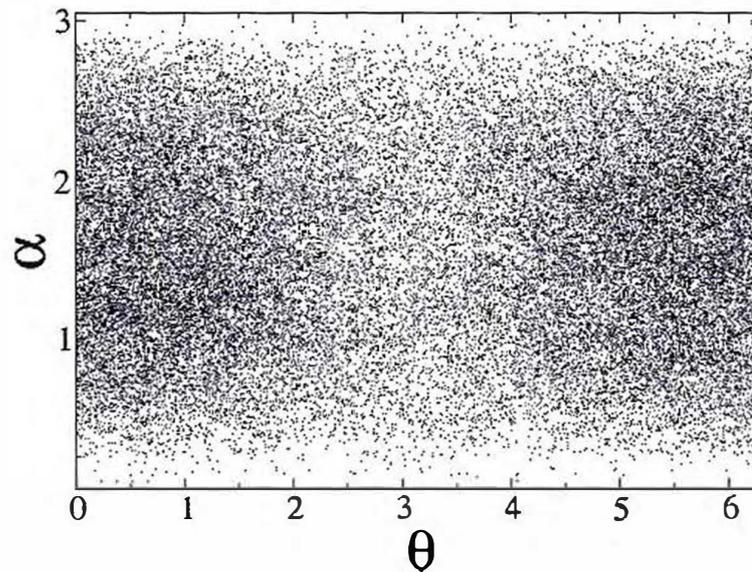


Figura 21: Espaço de fase de um bilhar ovóide com $\epsilon = 0.5$.

Um indicador de que o sistema realmente é caótico são os expoentes de Lyapunov². Para um sistema com N graus de liberdade, temos N expoentes de Lyapunov e se pelo menos um dos expoentes para o sistema em estudo for positivo em alguma região do espaço de fase, o sistema é dito caótico[13]. Para o espaço de fase da Figura (19), onde já podemos observar órbitas caóticas, temos na Figura (22) o expoente de Lyapunov contra o número de iterações para uma condição inicial que dá origem a uma órbita dentro do mar de caos. O expoente é obtido usando o algoritmo de Eckmann-Ruelle[14]. Nas Figuras (23) e (24), temos os expoentes de Lyapunov para uma condição inicial dentro do mar de caos nos espaços de fases em que $\epsilon = 0.4$, $\epsilon = 0.5$.

²Ver Apêndice 3

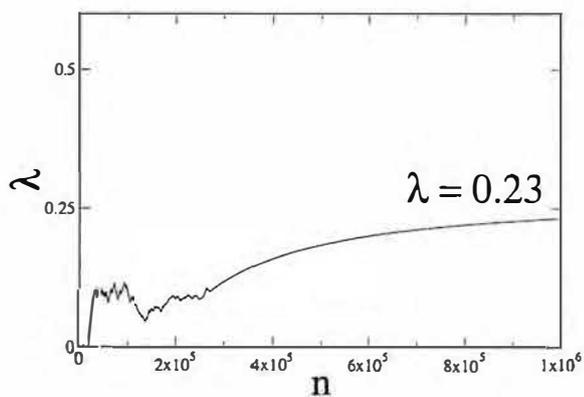


Figura 22: Expoente de Lyapunov para um Biliar Ovóide com $\epsilon = 0.3$.

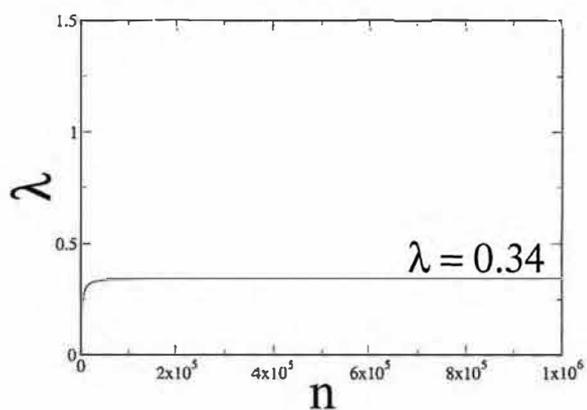


Figura 23: Expoente de Lyapunov para um Biliar Ovóide com $\epsilon = 0.4$.

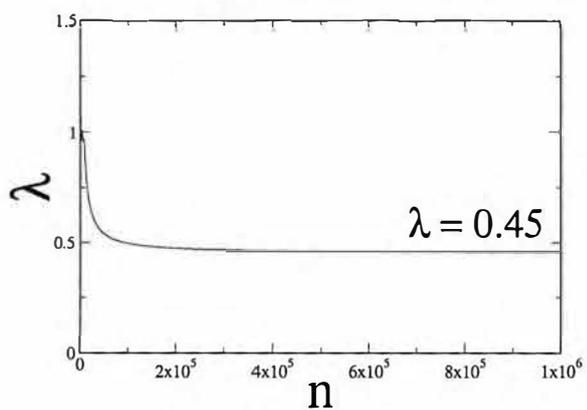


Figura 24: Expoente de Lyapunov para um Biliar Ovóide com $\epsilon = 0.5$.

3.5 Bilhares Elíptico-Ovóides

Bilhares elíptico-ovóides são obtidos fazendo $e \neq 0$ e $\epsilon \neq 0$ na equação (3.1). Aqui, fixaremos $e = 0.5$ e iremos variar o parâmetro de controle ϵ . Os espaços de fase obtidos para esses bilhares estão na Figura (25). Podemos ver claramente, dos espaços de fase que a medida que aumentamos o parâmetro de controle ϵ , os toros irracionais e racionais vão sendo destruídos até que sobra apenas o mar de caos, como previstos pelo Teorema KAM e de Poincaré-Birkhoff. Na Figuras (26), (27) e (28) estão os expoentes de Lyapunov para os casos em que aparece caos.

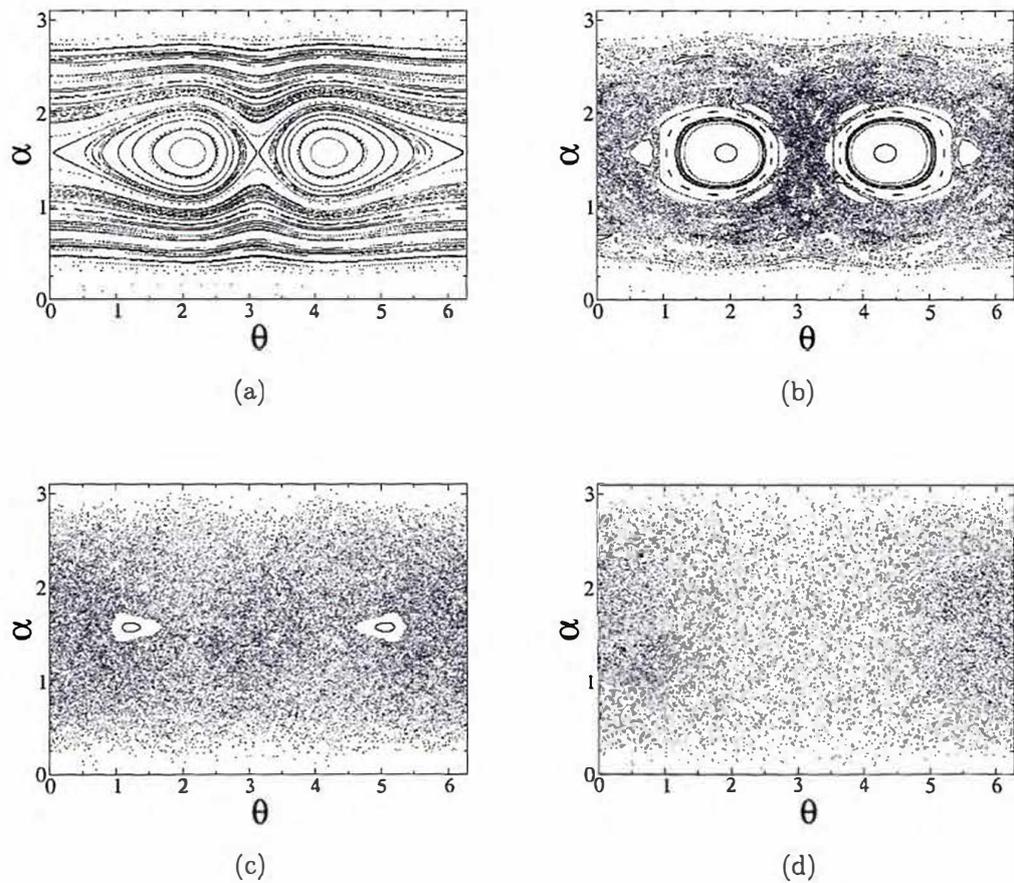


Figura 25: Espaço de fase para o bilhar elíptico-ovóide. (a) $e = 0.5$, $\epsilon = 0$. (b) $e = 0.5$, $\epsilon = 0.2$. (c) $e = 0.5$, $\epsilon = 0.6$. (d) $e = 0.5$, $\epsilon = 1.0$.

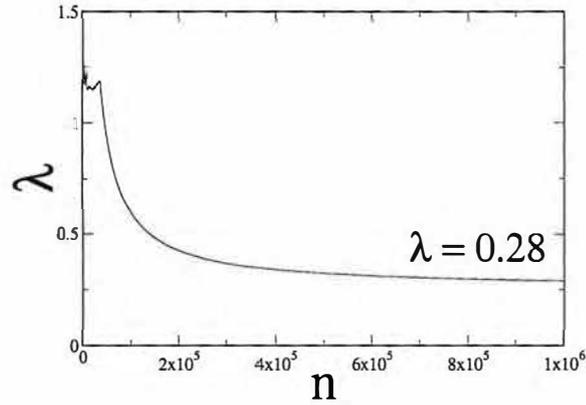


Figura 26: Expoente de Lyapunov para um Bilhar elíptico ovóide com $e = 0.5$ e $\epsilon = 0.2$.

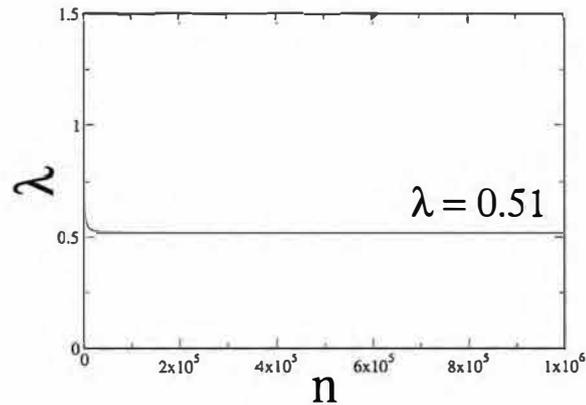


Figura 27: Expoente de Lyapunov para um Bilhar elíptico ovóide com $e = 0.5$ e $\epsilon = 0.6$.

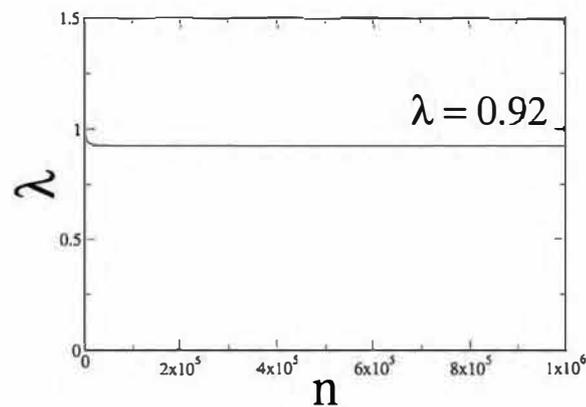


Figura 28: Expoente de Lyapunov para um Bilhar elíptico ovóide com $e = 0.5$ e $\epsilon = 1.0$.

4 RUGOSIDADE

4.1 Superfícies Rugosas

Superfícies rugosas são um assunto de extremo interesse em física e podem ser observadas nos mais variados fenômenos, tais como quando deixamos cair café em um lenço de papel e observamos a superfície formada no lenço devido ao fluxo de café no mesmo. Quando queimamos uma folha de papel em uma de suas extremidades e observamos o desenho irregular que fica no lado da superfície que ficou queimada. Na deposição de flocos de neve em um dia de inverno e no crescimento de bactérias em laboratórios.

A morfologia de uma superfície depende da escala de observação do sistema. A terra, para um astronauta, é percebida como uma esfera suave e lisa enquanto para um alpinista a superfície da mesma é bastante irregular. Mas superfícies, que podem apresentar rugosidade dependendo da escala de observação, não são os únicos objetos a apresentarem tal rugosidade. Fractais também apresentam rugosidade, sendo que esses diferenciam-se das superfícies porque permanecem os mesmos independente da escala de observação. Entre as superfícies rugosas e os fractais, temos também os objetos auto-afins. Quando realizamos uma mudança de escala igual em todas as direções, objetos auto-afins se comportam como superfícies. Quando realizamos uma mudança de escala que é diferente em cada direção, os objetos auto-afins se comportam como fractais[15].

4.2 Bilhares Rugosos

Iremos introduzir uma rugosidade na fronteira dos bilhares circulares e elípticos que será modelada adicionando ao ângulo tangente ao ponto de colisão ϕ um termo $\gamma\delta$, onde γ é o parâmetro que controla a intensidade da perturbação, ou seja, o quão rugosa é a superfície do bilhar e δ é um número aleatório gerado no momento da colisão. Bilhares com superfícies rugosas são mostrados na Figura (29).

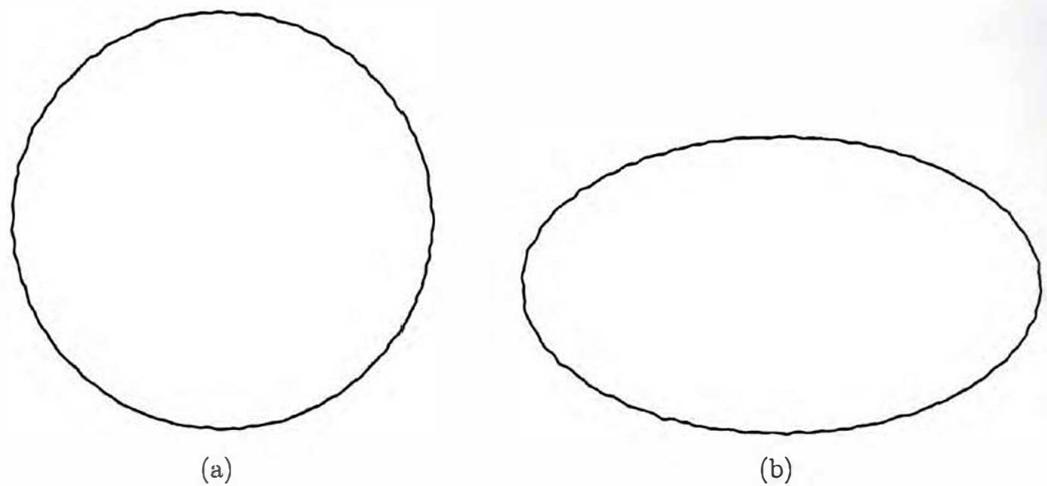


Figura 29: (a) Fronteira de um bilhar circular com rugosidade. (b) Fronteira de um bilhar elíptico com rugosidade.

A desfocalização das trajetórias é um conceito importante nos bilhares rugosos. A rugosidade implica que a tangente ao longo da fronteira não mais irá variar de forma suave, como no bilhar circular e elíptico, por exemplo. Devido a essas descontinuidades nos valores da tangente, haverá uma desfocalização das trajetórias que fará com que, dependendo do quanto a fronteira é rugosa, haja condições iniciais próximas que geram movimentos caóticos, como mostrado na Figura (30).

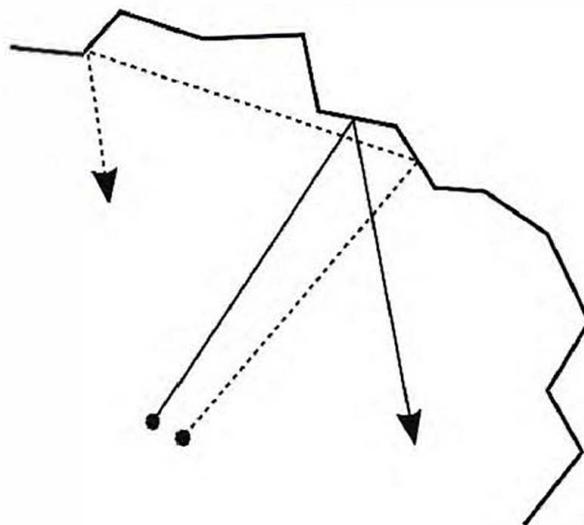


Figura 30: Esquematização da desfocalização das trajetórias na fronteira de uma superfície rugosa.

Bilhares rugosos são tratados como sistemas quase-integráveis e a medida que aumentamos os efeitos da perturbação, ou seja, o valor de γ , esperamos que, como descrito na Seção 2.2, os toros racionais e irracionais sejam destruídos dando lugar apenas ao mar de caos.

Como gerador de números aleatórios, usamos uma função descrita em [16], cuja expressão é:

$$\delta_i = \sum_{k=1}^{N/2} \left[k^{-\mu} \left(\frac{2\pi}{N} \right)^{(1-\mu)} \right]^{1/2} \cos \left(\frac{2\pi i k}{N} + \phi_k \right), \quad (4.1)$$

onde N é o dobro da quantidade de números aleatórios gerada, ϕ_k é um número aleatório gerado uniformemente distribuído entre $[0, 2\pi]$ e μ é um expoente que controla o grau de correlação dos números aleatórios gerados. Na Figura (31) estão algumas séries de números aleatórios gerados com essa função para diferentes valores de μ .

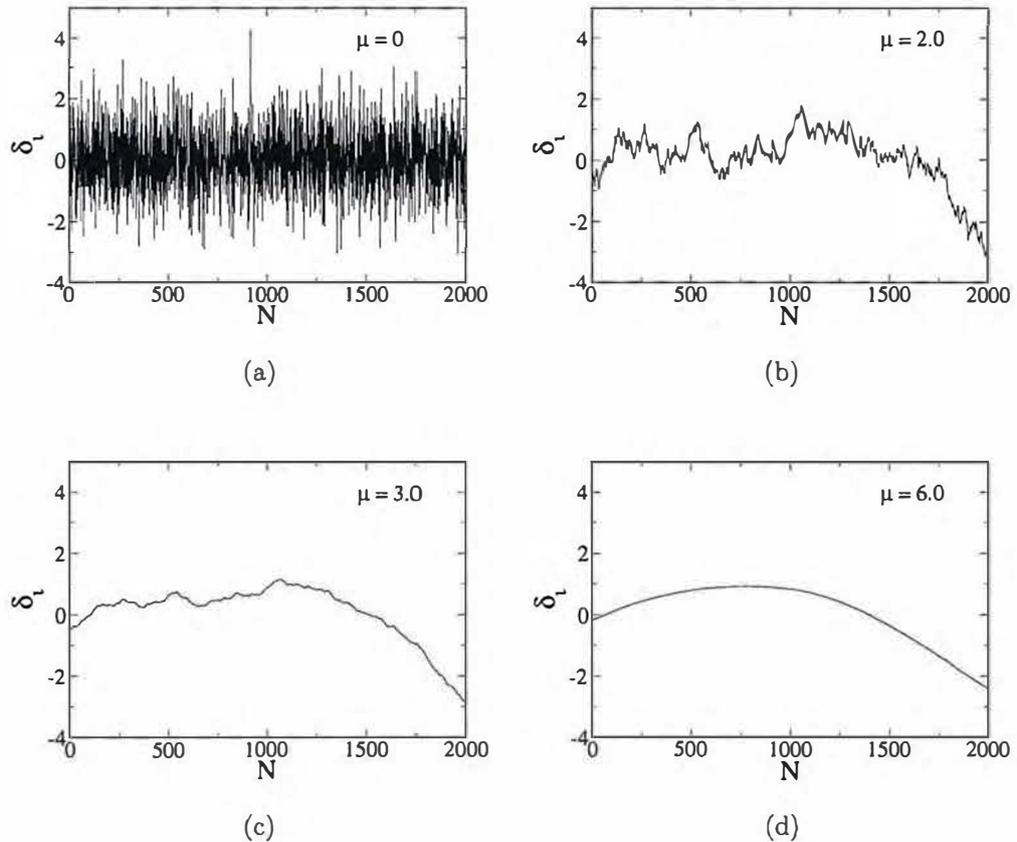


Figura 31: Séries de números aleatórios gerados pela expressão (4.1). À medida que aumentamos o valor de μ , as séries vão se tornando fortemente correlacionadas. (a) $\mu = 0$. (b) $\mu = 2.0$. (c) $\mu = 3.0$. (d) $\mu = 6.0$.

Nas próximas seções, para simularmos os bilhares circulares e elípticos com rugosidade, usaremos os números aleatórios não-correlacionados para $\mu = 0$.

4.3 Bilhar Circular Rugoso

Os espaços de fase para o bilhar circular rugoso estão ilustrados na Figura (32). Usamos números aleatórios não-correlacionados, ou seja, $\mu = 0$. Novamente observamos a destruição dos toros racionais e irracionais a medida que aumentamos o parâmetro de controle γ , ou seja, aumentamos o grau de rugosidade da fronteira.

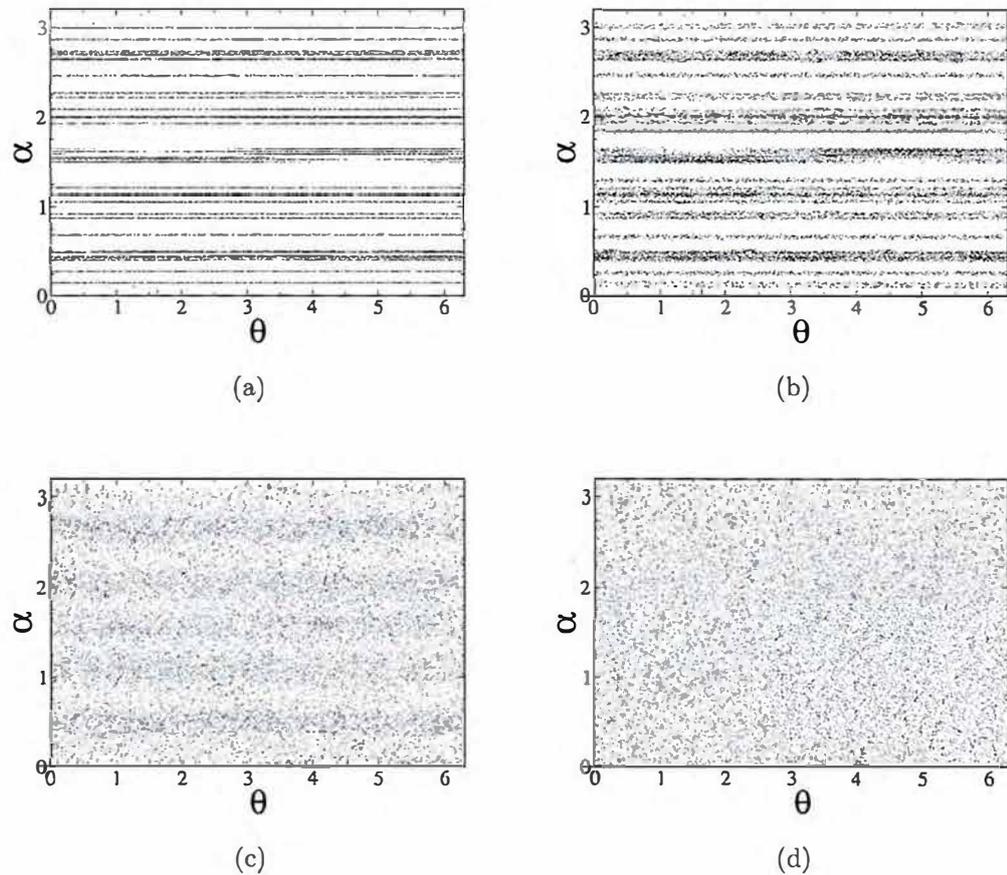


Figura 32: Espaços de fase para o bilhar circular rugoso para diferentes valores de γ . (a) $\gamma = 0.0001$. (b) $\gamma = 0.001$. (c) $\gamma = 0.01$. (d) $\gamma = 0.1$.

Também foram realizadas simulações fixando o grau de rugosidade γ e variando o expoente (μ) que controla o grau de correlação dos números aleatórios gerados pela expressão (4.1). Os resultados para valores de $\gamma = 0.0001$, 0.001 , 0.01 e 0.1 estão nas Figuras (33), (34), (35) e (36) abaixo. Observa-se que a medida que aumentamos o valor de μ , o espaço de fase evolui para um mar de caos, ou seja, ao aumentarmos o grau de correlação nos números aleatórios na expressão (4.1), aumentamos a perturbação no sistema, fazendo com que o mesmo apresente comportamento caótico.

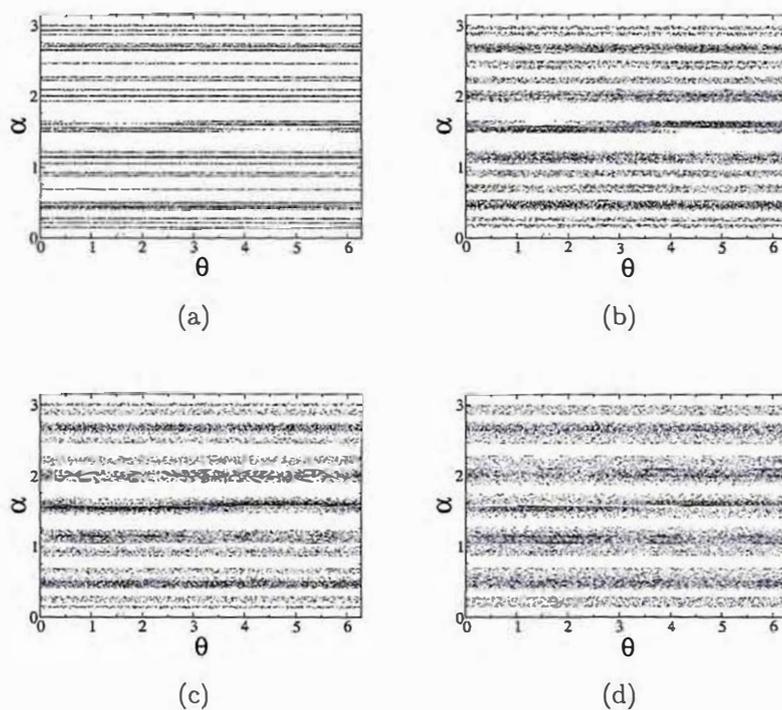


Figura 33: Espaços de fase para o bilhar circular rugoso com grau de rugosidade $\gamma = 0.0001$ e diferentes valores de μ . (a) $\mu = 0$. (b) $\mu = 2$. (c) $\mu = 3$. (d) $\mu = 6$.

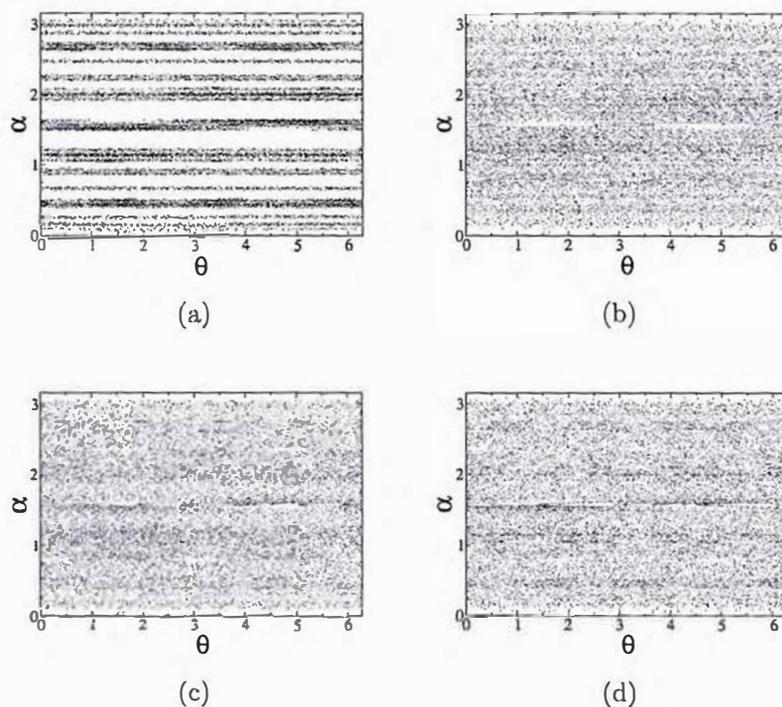


Figura 34: Espaços de fase para o bilhar circular rugoso com grau de rugosidade $\gamma = 0.001$ e diferentes valores de μ . (a) $\mu = 0$. (b) $\mu = 2$. (c) $\mu = 3$. (d) $\mu = 6$.

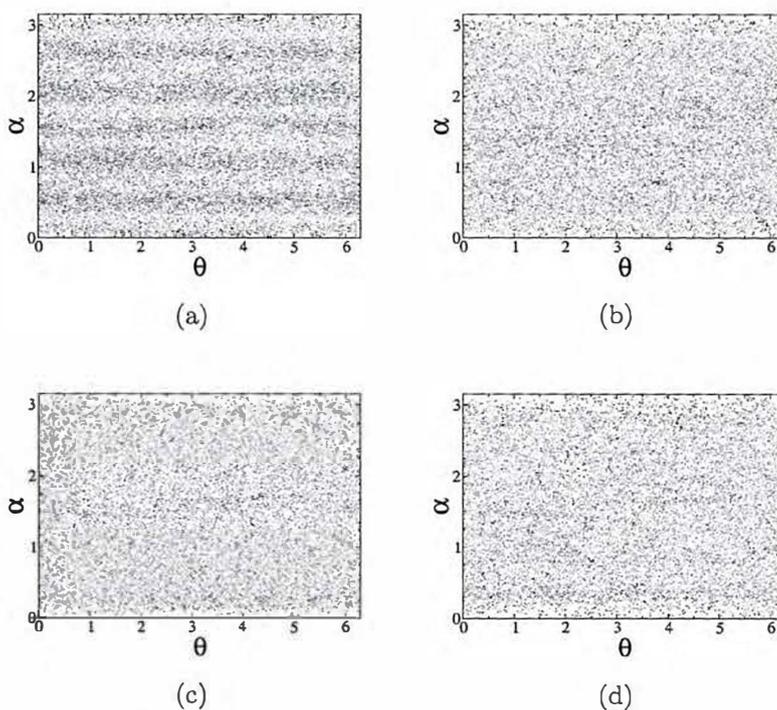


Figura 35: Espaços de fase para o bilhar circular rugoso com grau de rugosidade $\gamma = 0.01$ e diferentes valores de μ . (a) $\mu = 0$. (b) $\mu = 2$. (c) $\mu = 3$. (d) $\mu = 6$.

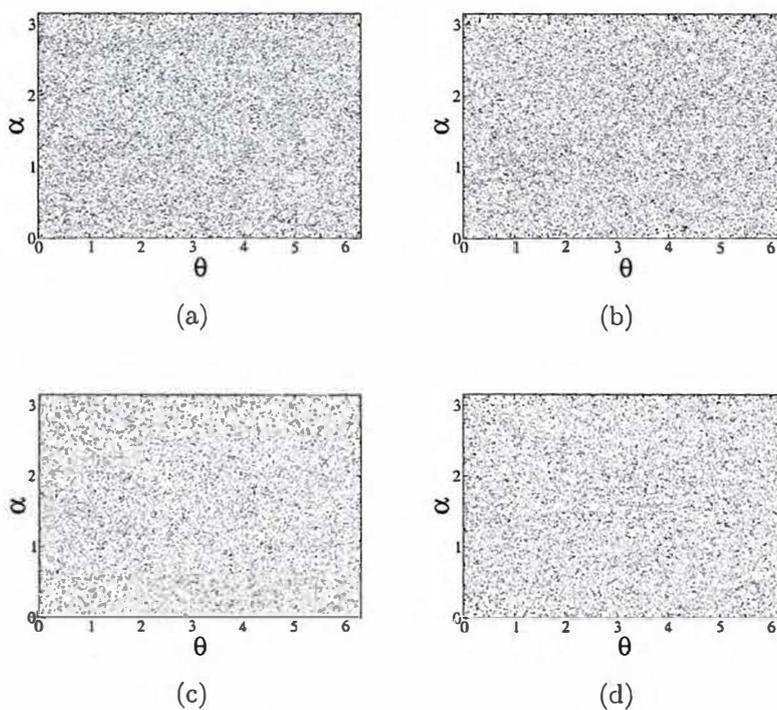


Figura 36: Espaços de fase para o bilhar circular rugoso com grau de rugosidade $\gamma = 0.1$ e diferentes valores de μ . (a) $\mu = 0$. (b) $\mu = 2$. (c) $\mu = 3$. (d) $\mu = 6$.

4.4 Bilhar Elíptico Rugoso

Os espaços de fase para o bilhar elíptico rugoso com excentricidade 0.5 estão ilustrados na Figura (37), onde usamos $\mu = 0$. Conclusões a respeito da evolução da estrutura do espaço de fase são similares a aplicadas na seção anterior para o bilhar circular rugoso.

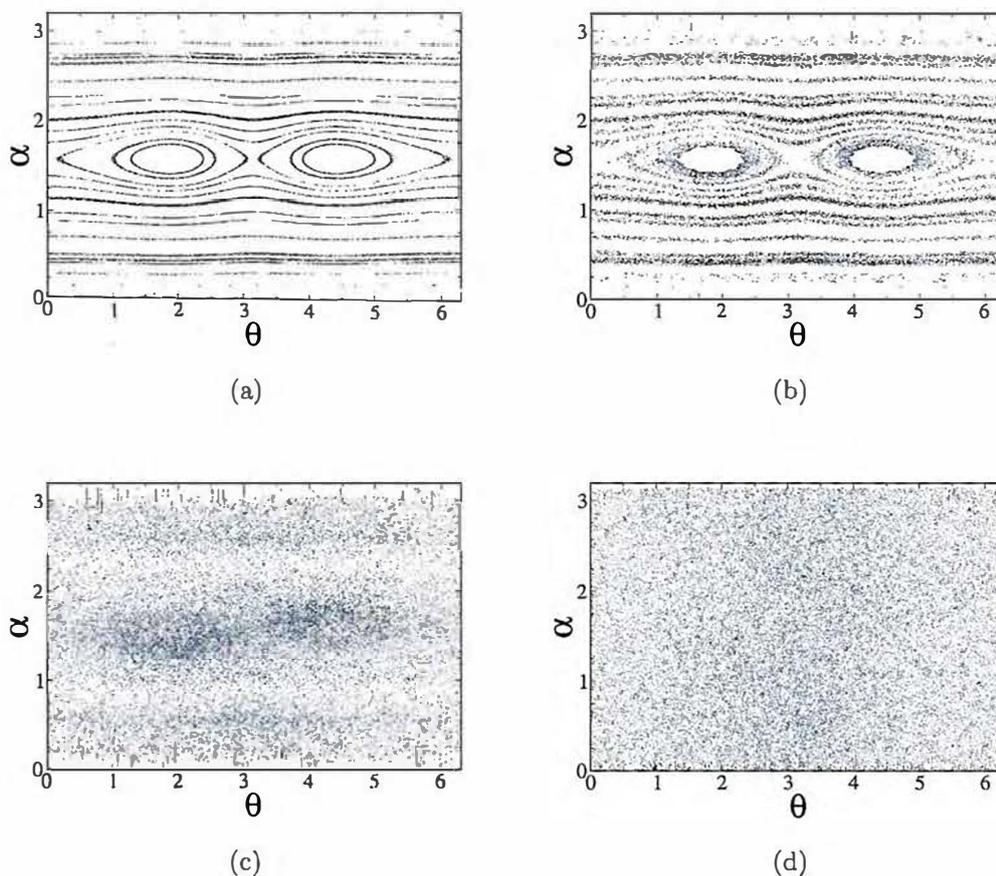


Figura 37: Espaços de fase para o bilhar elíptico rugoso para diferentes valores de γ . (a) $\gamma = 0.0001$. (b) $\gamma = 0.001$. (c) $\gamma = 0.01$. (d) $\gamma = 0.1$.

Assim como na seção anterior, também foram realizadas simulações para o bilhar elíptico rugoso fixando o grau de rugosidade γ da fronteira e variando o expoente de correlação μ . Os espaços de fase obtidos estão nas Figuras (38), (39), (40) e (41) abaixo. Observa-se, nas Figuras (38) e (39), que a estrutura do espaço de fase resiste bem a perturbação. Já nas Figuras (40) e (41), percebe-se que órbitas estáveis aparecem a medida que aumentamos a perturbação, ou seja, obtemos uma subregião de comportamento regular no espaço de fase que antes era completamente caótico.

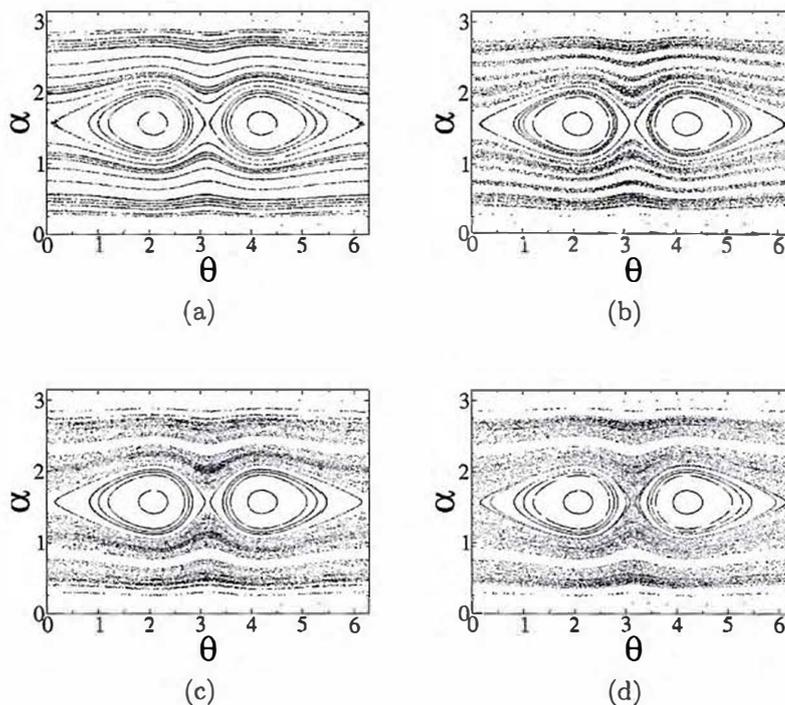


Figura 38: Espaços de fase para o bilhar elíptico rugoso de excentricidade $e = 0.5$ e grau de rugosidade $\gamma = 0.0001$ e diferentes valores de μ . (a) $\mu = 0$. (b) $\mu = 2$. (c) $\mu = 3$. (d) $\mu = 6$.

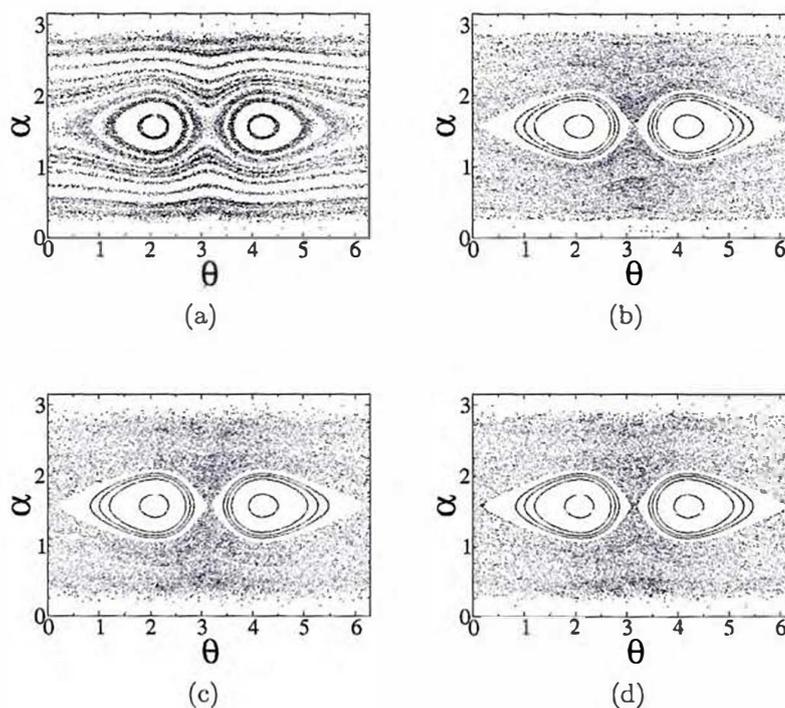


Figura 39: Espaços de fase para o bilhar elíptico rugoso de excentricidade $e = 0.5$ e grau de rugosidade $\gamma = 0.001$ e diferentes valores de μ . (a) $\mu = 0$. (b) $\mu = 2$. (c) $\mu = 3$. (d) $\mu = 6$.

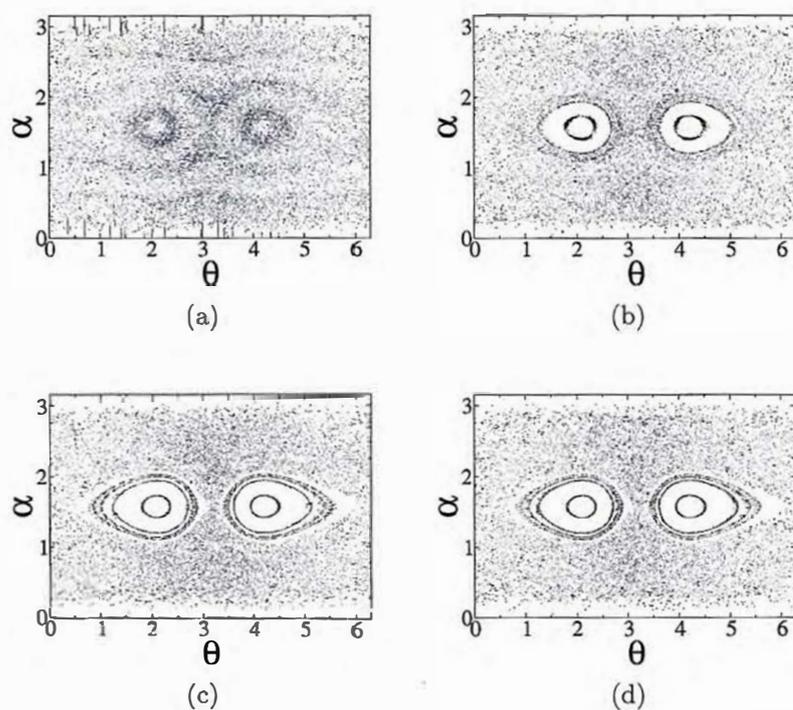


Figura 40: Espaços de fase para o bilhar elíptico rugoso de excentricidade $e = 0.5$ e grau de rugosidade $\gamma = 0.01$ e diferentes valores de μ . (a) $\mu = 0$. (b) $\mu = 2$. (c) $\mu = 3$. (d) $\mu = 6$.

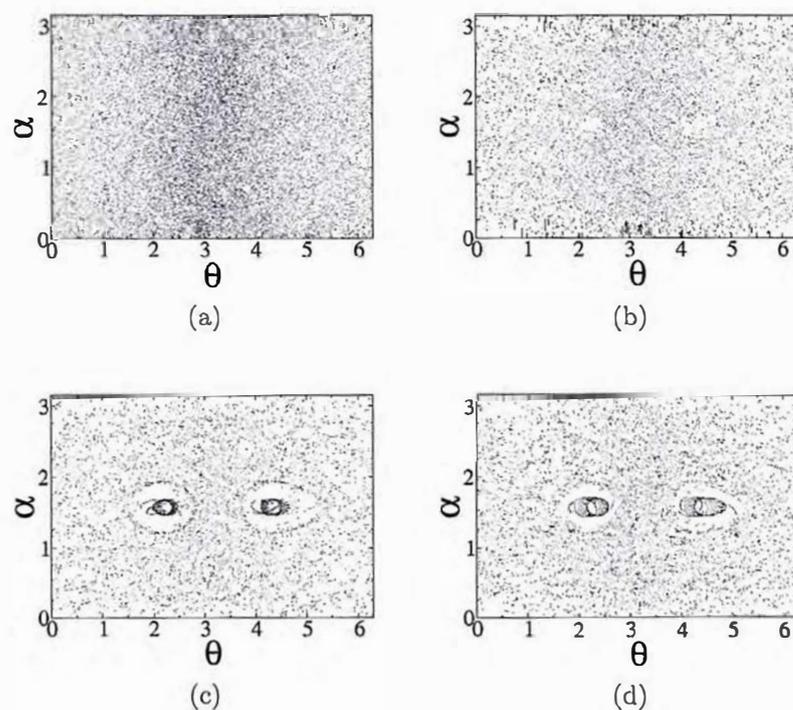


Figura 41: Espaços de fase para o bilhar elíptico rugoso de excentricidade $e = 0.5$ e grau de rugosidade $\gamma = 0.1$ e diferentes valores de μ . (a) $\mu = 0$. (b) $\mu = 2$. (c) $\mu = 3$. (d) $\mu = 6$.

5 CONCLUSÃO

Como vistos nas seções acima, bilhares podem apresentar uma riqueza imensa de comportamentos regulares, caóticos e mistos. Ao introduzirmos uma perturbação e variarmos a intensidade da mesma, como feito nos bilhares ovóide, circular rugoso e elíptico rugoso, podemos ter uma mudança estrutural no espaço de fase. Tal mudança pode ser no sentido de aparecimento do mar de caos (caracterizado pela perda de previsibilidade de condições iniciais vizinhas ou muito próximas) ou no aparecimento de regiões no espaço de fase que representam movimentos regulares a partir do caos. Como perspectiva, fica-se a oportunidade de caracterizar a transição no espaço de fase de uma estrutura regular para uma caótica (ou vice-versa) nos bilhares rugosos via expoente de Lyapunov.

6 APÊNDICE 1

6.1 Equações de Hamilton

Qualquer sistema n-dimensional pode ser descrito por uma função denominada Função Hamiltoniana

$$H = H(\vec{q}, \vec{p}) \quad (6.1)$$

onde $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ e $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ são, respectivamente, as n coordenadas e os n momentos que descrevem o sistema em cada instante de tempo.

As equações de movimento são obtidas da Hamiltoniana por meio das relações:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.2)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.3)$$

As equações (6.2) e (6.3) são ditas as equações de Hamilton para o sistema descrito pela Hamiltoniana (6.1).

Para a grande maioria dos sistemas físicos, a energia cinética é uma função que depende somente do quadrado da velocidade e a energia potencial independe da velocidade. Nesse caso, a Hamiltoniana pode ser expressa como a soma da energia cinética com a energia potencial, ou seja,

$$H(\vec{q}, \vec{p}) = T + V \quad (6.4)$$

onde T é a energia cinética e V é a energia potencial. Para exemplificarmos o que foi dito acima, iremos escrever a Hamiltoniana para um sistema simples, o oscilador harmônico. Tal sistema, mostrado na Figura (42), possui uma energia cinética dada por

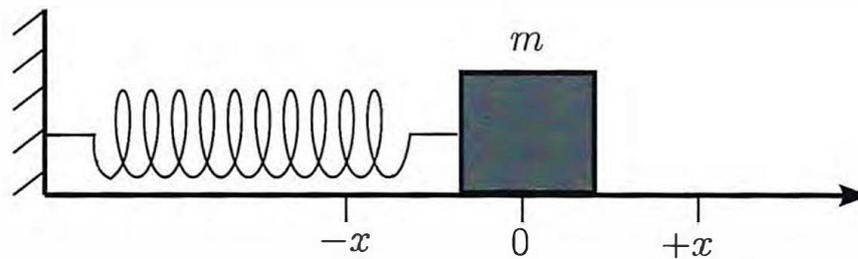


Figura 42: Oscilador harmônico.

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2m}p^2 \quad (6.5)$$

e uma energia potencial devido a sua interação com a mola dada por:

$$V = \frac{1}{2}kx^2 \quad (6.6)$$

onde p é o momento linear da partícula e k é a constante de mola. Aqui, como o sistema é unidimensional, \vec{q} e \vec{p} ambos possuem apenas uma componente que serão identificadas, respectivamente, com x (posição da partícula) e com $p = mv$ (momento linear da partícula). Podemos ver em (6.5) que a energia cinética é função somente do quadrado das velocidades e em (6.6) que a energia potencial independe da velocidade, podemos assim facilmente montar a Hamiltoniana, que é:

$$H(q, p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kq^2 \quad (6.7)$$

e as equações de Hamilton são:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad (6.8)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq \quad (6.9)$$

As equações (6.8) e (6.9) acima formam um sistema de equações que pode ser facilmente resolvido. Primeiro, derivemos em relação ao tempo a equação (6.8), assim

$$\ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m} \quad (6.10)$$

agora, substituindo \dot{p} em (6.10) por (6.9), temos

$$\ddot{q} + \frac{k}{m}q = 0 \quad (6.11)$$

que é a equação de movimento do oscilador harmônico, cuja solução geral é a seguinte:

$$q(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \quad (6.12)$$

onde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ é a frequência de oscilação do sistema.

6.2 Transformações Canônicas

Muitas vezes, ao resolvermos nossos problemas, desejamos realizar uma transformação no sistema em estudo para buscar algum tipo de informação que pensamos se tornará mais evidente depois que o sistema for transformado. No espaço de fase uma transformação de variáveis interessante são as que preservam a forma das equações de Hamilton. Precisamente, dadas as variáveis canônicas (\vec{q}, \vec{p}) , a Hamiltoniana $H(\vec{q}, \vec{p})$ e as equações de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.13)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.14)$$

Uma transformação

$$Q_i = Q_i(\vec{q}, \vec{p}), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.15)$$

$$P_i = P_i(\vec{q}, \vec{p}), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.16)$$

é canônica quando se pode construir uma nova Hamiltoniana $h = h(\vec{Q}, \vec{P})$ tal que as equações de movimento para as novas variáveis tenham a forma Hamiltoniana:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial h}{\partial P_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.17)$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial h}{\partial Q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.18)$$

6.3 Variáveis Ângulo-Ação

As variáveis de ângulo-ação são obtidas através de uma transformação canônica das variáveis canônicas de Hamilton, (\vec{q}, \vec{p}) . Elas são usadas para facilitar o cálculo de frequências associadas ao movimento de vários sistemas. Sistemas para o qual usamos a técnica das variáveis de ângulo-ação são conhecidos por sistemas multiperíódicos. Estes, são sistemas em que a projeção do movimento sobre cada plano do espaço de fase é caracterizado por uma libração, em que as variáveis (q_i, p_i) oscilam entre dois limites definidos.

caracterizando uma curva fechada na projeção do espaço de fase. Ou uma rotação, em que p_i é uma função periódica de q_i , embora q_i não seja função periódica do tempo. A libração e a rotação estão ilustradas, respectivamente, nas Figuras (43) e (44).

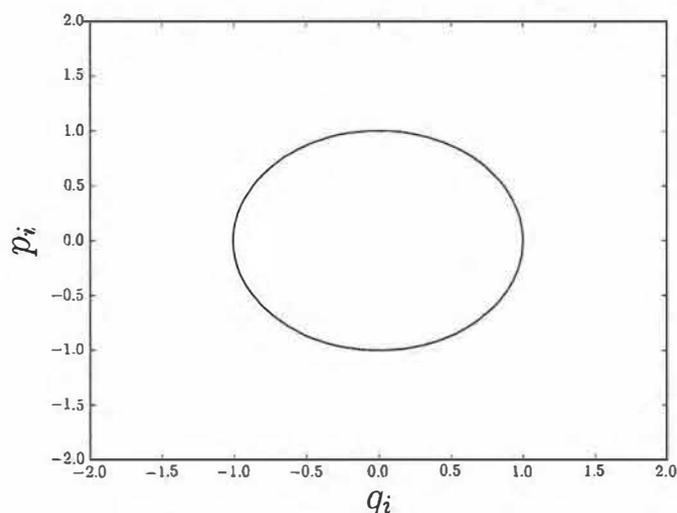


Figura 43: Libração na projeção do espaço de fase no plano (q_i, p_i)

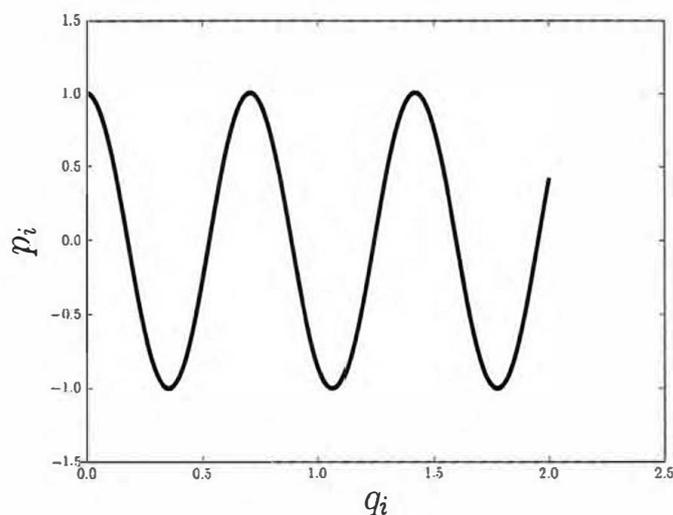


Figura 44: Rotação na projeção do espaço de fase no plano (q_i, p_i)

As variáveis de ação para um sistema multiperíodico com n graus de liberdade são definidas por

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i \quad (6.19)$$

onde as integrais estendem-se por um período de libração ou de rotação, conforme o caso. A equação (6.19) multiplicada por 2π nada mais é do que a área sob a curva no espaço

de fase, ou seja, J_i é uma constante. Por esse fato, podemos identificar os J_i 's com os P_i 's. Logo, como $\dot{J}_i = -\frac{\partial h}{\partial Q_i} = 0$, temos que a nova hamiltoniana h depende apenas das variáveis de ângulo-ação. A segunda equação de Hamilton define a derivada em relação ao tempo da variável ângulo:

$$\dot{\phi} = \frac{\partial h}{\partial J_i} = \omega_i \quad (6.20)$$

onde os ω_i são constantes, pois só dependem das constantes J_i . Por isso, podemos encontrar a solução para a equação (6.20) acima, que é:

$$\phi_i(t) = \omega_i t + \phi_i^0 \quad (6.21)$$

As equação (6.19) e (6.20) definem, respectivamente, as variáveis ação e ângulo para um sistema multiperíodico.

Para mais detalhes sobre o conteúdo do apêndice, indico as referências [8] [9] [10].

7 APÊNDICE 2

7.1 Curvatura de curvas planas

Desenvolveremos aqui o cálculo para obter a expressão da curvatura de uma curva no plano descrita por uma equação do tipo $y = f(x)$. Obtida essa expressão, aplicaremos no bilhar ovóide $R(\theta) = 1 + \epsilon \cos(\theta)$ para obtermos o valor crítico ϵ_c para o qual a curvatura muda de positiva para negativa.

A curvatura k de uma fronteira é definida como

$$k = \frac{d\phi}{dS}, \quad (7.1)$$

onde ϕ é o ângulo medido no sentido anti-horário entre a reta tangente à superfície S e o eixo x positivo (Figura(45)).

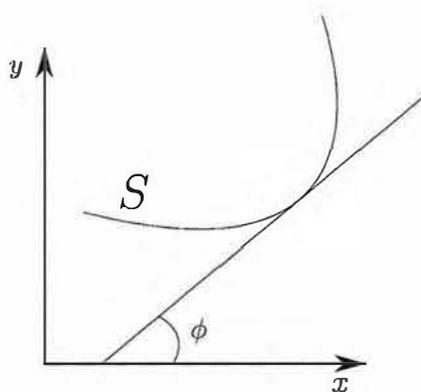


Figura 45: Curvatura da superfície S e definição do ângulo ϕ .

Primeiramente, escreveremos k como uma função de (x, y) . Assim:

$$k = \frac{d\phi}{dS} = \frac{d\phi}{dx} \frac{dx}{dS}. \quad (7.2)$$

Pegando $\Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ e dividindo por Δx , temos:

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{\frac{\Delta x^2}{\Delta x^2} + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}} = \sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}. \quad (7.3)$$

Agora aplicando o limite quando $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{dS}{dx} \quad (7.4)$$

e invertendo, encontramos o segundo fator na equação (7.2):

$$\frac{dx}{dS} = \frac{1}{\frac{dS}{dx}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}. \quad (7.5)$$

Para encontrarmos o primeiro fator na equação (7.2), primeiro derivamos implicitamente a relação $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\phi)$, que nos dá o coeficiente angular da reta tangente a superfície S, como mostrado na Figura (45).

$$\sec^2 \phi \frac{d\phi}{dx} = \frac{d^2 y}{d^2 x} \rightarrow \frac{d\phi}{dx} = \frac{\frac{d^2 y}{d^2 x}}{1 + \operatorname{tg}^2 \phi},$$

logo

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\frac{d^2 y}{d^2 x}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \quad (7.6)$$

Colocando as equações (7.6) e (7.5) na equação (7.2), encontramos a fórmula para que nos dá a curvatura para uma superfície descrita pela equação $y = f(x)$:

$$k = \frac{d\phi}{dS} = \frac{\frac{d^2 y}{d^2 x}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}. \quad (7.7)$$

Não podemos aplicar a relação acima diretamente na nossa fronteira, pois ela está escrita em coordenadas polares. Admitindo que $y = y(\theta)$ e $x = x(\theta)$, temos que, pela regra da cadeia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}; \quad (7.8)$$

assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right), \\
&= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} \right), \\
&= \frac{dy}{d\theta} \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{d\theta}{dx} \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{d\theta} \right), \\
&= \frac{dy}{d\theta} \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{d\theta}{dx} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{dy}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{dx}, \\
&= \frac{dy}{d\theta} \frac{d^2\theta}{dx^2} + \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 \frac{d^2y}{d\theta^2}.
\end{aligned} \tag{7.9}$$

Calculemos agora o termo $\frac{d^2\theta}{dx^2}$ sabendo que $\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{d\theta}}$:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\theta}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d\theta}{dx} \right), \\
&= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\frac{dx}{d\theta}} \right), \\
&= -\frac{\frac{d}{dx} \left(\frac{dx}{d\theta} \right)}{\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2}, \\
&= -\frac{\frac{d}{d\theta} \left(\frac{dx}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{dx}}{\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2}, \\
&= -\frac{\frac{d^2x}{d\theta^2} \frac{d\theta}{dx}}{\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2}.
\end{aligned} \tag{7.10}$$

A partir de agora, para facilitar a visualização e manuseio das equações, usaremos $y' = \frac{dy}{d\theta}$ e $x' = \frac{dx}{d\theta}$. Colocando a equação (7.10) na equação (8.32), temos:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{y'x''}{x'^3} + \frac{y''}{x'^2}, \\
&= \frac{-y'x'' + y''x'}{x'^3}.
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Agora pondo a equação acima juntamente com $\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}$ na equação (7.7):

$$\begin{aligned}
k &= \frac{\frac{-y'x'' + y''x'}{x'^3}}{\left[1 + \left(\frac{y'}{x'} \right)^2 \right]^{3/2}}, \\
&= \frac{\frac{-y'x'' + y''x'}{x'^3}}{\frac{[x'^2 + y'^2]^{3/2}}{x'^3}},
\end{aligned} \tag{7.12}$$

$$k = \frac{-y'x'' + y''x'}{[x'^2 + y'^2]^{3/2}}. \quad (7.13)$$

A equação (7.13) é a que calcula a curvatura para uma fronteira descrita em coordenadas polares.

7.2 Valor crítico ϵ_c para o bilhar ovóide

A fronteira do bilhar ovóide é dada por $x(\theta) = R(\theta)\cos(\theta)$ e $y(\theta) = R(\theta)\sin(\theta)$, onde $R(\theta) = 1 + \epsilon\cos\theta$. Definindo $R' = \frac{dR(\theta)}{d\theta}$, temos que as derivadas de x e y em relação a θ necessárias para se calcular a curvatura da fronteira são:

$$\begin{aligned} x'(\theta) &= R'(\theta)\cos\theta - R(\theta)\sin(\theta), \\ x''(\theta) &= R''(\theta)\cos\theta - 2R'(\theta)\sin\theta - R(\theta)\cos\theta, \\ y'(\theta) &= R'(\theta)\sin\theta + R(\theta)\cos\theta, \\ y''(\theta) &= R''(\theta)\sin\theta + 2R'(\theta)\cos\theta - R(\theta)\sin\theta, \end{aligned} \quad (7.14)$$

onde $R'(\theta) = -\epsilon\sin\theta$ e $R''(\theta) = -\epsilon\cos\theta$.

Substituindo as derivadas acima na equação (7.13) e fazendo $k(\theta) = 0$ quando $\theta = \pi$ (o ponto onde a fronteira muda de curvatura corresponde a $\theta = \pi$, como se pode ver na Figura (??)(c):

$$k(\pi) = \frac{-y'(\pi)x''(\pi) + y''(\pi)x'(\pi)}{[x'^2(\pi) + y'^2(\pi)]^{3/2}} = 0. \quad (7.15)$$

Como $R(\pi) = 1 - \epsilon_c$, $R'(\pi) = 0$ e $R''(\pi) = \epsilon_c$, temos que $x'(\pi) = 0$ e $y''(\pi) = 0$, logo a equação acima fica:

$$-x''(\pi) = 0. \quad (7.16)$$

Substituindo $x''(\pi) = -\epsilon_c + 1 - \epsilon_c$ na equação acima, obtemos o valor crítico ϵ_c do parâmetro ϵ para o qual a curvatura muda de sinal:

$$\epsilon_c = \frac{1}{2}. \quad (7.17)$$

8 APÊNDICE 3

8.1 Expoente de Lyapunov

O expoente de Lyapunov é usado para caracterizar se um dado sistema é sensível a condições iniciais, ou seja, se é caótico[17]. A ideia principal é tomar duas evoluções dinâmicas geradas por diferentes condições iniciais suficientemente próximas e monitorar a distância entre essas soluções. Para efeito didáticos, começaremos com a definição de expoente de Lyapunov para sistemas unidimensionais.

Consideremos um mapa unidimensional dado por $x_{n+1} = f(x_n)$. Começamos com uma condição inicial x_0 e obtemos a dinâmica iterando várias vezes o mapa: $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1) = f^2(x_0)$, $x_3 = f(x_2) = f^3(x_0)$, ..., $f(x_n) = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$. Consideremos uma outra condição inicial próxima a anterior, dada por $x_0 + \delta_0$, onde a distância δ_0 é muito pequena. A distância entre as duas órbitas geradas pelas condições iniciais x_0 e $x_0 + \delta_0$ depois de n iterações é dada por

$$\delta_n = f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0). \quad (8.1)$$

O expoente de Lyapunov é obtido se podemos escrever $|\delta_n| \approx |\delta_0|e^{n\lambda}$, onde λ é o expoente de Lyapunov. Se λ for positivo, então a separação entre as duas órbitas diverge exponencialmente e o sistema é dito ser caótico.

Podemos isolar λ para obtermos uma expressão que nos ajude a calcular o expoente de Lyapunov. Aplicando o logaritmos na expressão $|\delta_n| \approx |\delta_0|e^{n\lambda}$, obtemos

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\delta_n}{\delta_0} \right| \quad (8.2)$$

Usando a equação (8.1), a equação acima fica

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0)}{\delta_0} \right|. \quad (8.3)$$

Como separação inicial entre as órbitas δ_0 é muito pequena e lembrando da definição de derivada unidimensional

$$f'(x) = \lim_{\Delta x} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad (8.4)$$

temos que

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{dx_0} \right|. \quad (8.5)$$

Usando a regra da cadeia, temos que

$$\frac{df^2(x_0)}{dx_0} = \frac{df(f(x_0))}{dx_0} = \frac{df(x_1) df(x_0)}{dx_0 dx_0} = \prod_{i=0}^1 \frac{df(x_i)}{dx_0}, \quad (8.6)$$

$$\frac{df^3(x_0)}{dx_0} = \frac{df(f(f(x_0)))}{dx_0} = \frac{df(x_2) df(x_1) df(x_0)}{dx_0 dx_0 dx_0} = \prod_{i=0}^2 \frac{df(x_i)}{dx_0}, \quad (8.7)$$

para n iterações,

$$\frac{df^n(x_0)}{dx_0} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{df(x_i)}{dx_0}, \quad (8.8)$$

Pondo o resultado acima na equação (8.5) e usando a propriedade dos logaritmos $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$:

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{i=0}^{n-1} \frac{df(x_i)}{dx_0} \right| = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df(x_i)}{dx_0} \right| \quad (8.9)$$

Definimos então o expoente de Lyapunov como sendo o limite da expressão acima quando $n \rightarrow \infty$, ou seja

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df(x_i)}{dx_0} \right|. \quad (8.10)$$

Um exemplo de aplicação direta da fórmula acima é o cálculo do expoente de Lyapunov λ para o mapa logístico $f(x) = rx(1-x)$ [17]. O gráfico para o expoente de Lyapunov obtido contra o parâmetro de controle r está mostrado na Figura (46).

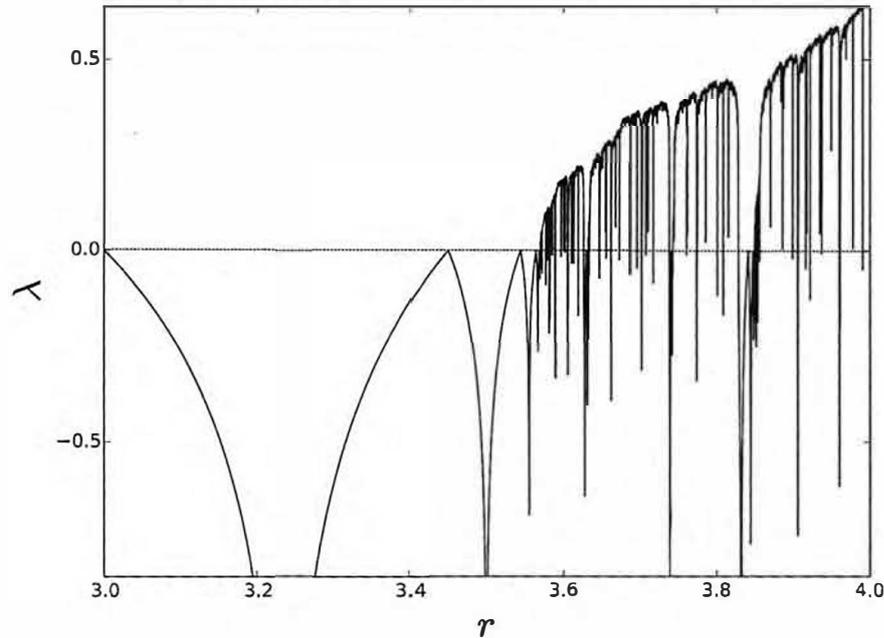


Figura 46: Expoente de Lyapunov λ em função do parâmetro de controle r .

Da Figura (46), podemos ver que, a medida que aumentamos o valor de r , o expoente de Lyapunov varia. Enquanto $r < 3.57$ [17], $\lambda < 0$ e não há caos no sistema. Para valor acima de $r = 3.57$, $\lambda > 0$ e há ocorrência de caos no sistema.

Para mapas bidimensionais, a equação (8.10) pode ser generalizada:

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\Lambda_j|, \quad (8.11)$$

onde $j = 1, 2$ e Λ_j são os autovalores da matriz

$$M = \prod_{i=1}^{n-1} J_i(x_i) \quad (8.12)$$

e J_i é a matriz Jacobiana obtida a partir do mapa do sistema, calculada sobre a órbita no espaço de fase.

Calcular a matriz Jacobiana e realizar o produtório acima para a obtenção dos autovalores da matriz M , com objetivo de encontrar o expoente de Lyapunov, é um procedimento muito trabalhoso. Para tal objetivo, utilizaremos o algoritmo de Eckmann-Ruelle[14].

onde começamos escrevendo a matriz Jacobiana como um produto entre uma matriz triangular superior T e uma ortogonal Θ , $J = \Theta T$.

Como matriz ortogonal bidimensional, iremos pegar a matriz de rotação bidimensional

$$\Theta = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\text{sen}\beta \\ \text{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

onde, devido ao fato de ser ortogonal, sua inversa é igual a sua transposta

$$\Theta^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\beta & \text{sen}\beta \\ -\text{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

Assim, podemos introduzir $\Theta_0\Theta_0^{-1} = 1$ em $M = J_{n-1}J_{n-2}\dots J_3J_2J_1$ entre J_2 e J_1 . Logo, temos:

$$M = J_{n-1}J_{n-2}\dots J_3J_2J_1\Theta_0\Theta_0^{-1}J_0. \quad (8.13)$$

De $J = \Theta T$, obtemos $T = \Theta^{-1}J$, de onde podemos tirar a seguinte relação:

$$T_0 = \Theta_0^{-1}J_0, \quad (8.14)$$

o que em termos de matrizes fica:

$$\begin{pmatrix} T_{11}^0 & T_{12}^0 \\ 0 & T_{22}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta_0 & \text{sen}\beta_0 \\ -\text{sen}\beta_0 & \cos\beta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{11}^0 & J_{12}^0 \\ J_{21}^0 & J_{22}^0 \end{pmatrix}$$

de onde tiramos as seguintes equações

$$T_{11}^0 = J_{11}^0\cos\beta_0 + J_{21}^0\text{sen}\beta_0, \quad (8.15)$$

$$T_{12}^0 = J_{12}^0\cos\beta_0 + J_{22}^0\text{sen}\beta_0, \quad (8.16)$$

$$0 = -J_{11}^0\text{sen}\beta_0 + J_{21}^0\cos\beta_0, \quad (8.17)$$

$$T_{22}^0 = -J_{12}^0\text{sen}\beta_0 + J_{22}^0\cos\beta_0. \quad (8.18)$$

Da equação (8.17), encontramos as seguintes relações:

$$\frac{\sin\beta_0}{\cos\beta_0} = \frac{J_{21}^0}{J_{22}^0}, \quad (8.19)$$

$$\sin\beta_0 = \frac{J_{21}^0}{\sqrt{J_{11}^2 + J_{21}^2}}, \quad (8.20)$$

$$\cos\beta_0 = \frac{J_{11}^0}{\sqrt{J_{11}^2 + J_{21}^2}}. \quad (8.21)$$

Substituindo as relações encontrada acima para $\sin\beta_0$ e $\cos\beta_0$ nas equações (8.15) e (8.18)

$$T_{11}^0 = \frac{J_{11}^2 + J_{21}^2}{\sqrt{J_{11}^2 + J_{21}^2}}, \quad (8.22)$$

$$T_{22}^0 = \frac{J_{11}^0 J_{22}^0}{\sqrt{J_{11}^2 + J_{21}^2}} - \frac{J_{12}^0 J_{21}^0}{\sqrt{J_{11}^2 + J_{21}^2}}. \quad (8.23)$$

Dessa forma, nossa matriz M fica

$$M = J_{n-1} J_{n-2} \dots J_3 J_2 J_1 \Theta_0 T_0. \quad (8.24)$$

Podemos definir também $j_1 = J_1 \Theta_0$, que nós dá as seguintes equações:

$$j_{11}^1 = J_{11}^1 \cos\beta_0 + J_{12}^1 \sin\beta_0, \quad (8.25)$$

$$j_{12}^1 = J_{12}^1 \cos\beta_0 - J_{11}^1 \sin\beta_0, \quad (8.26)$$

$$j_{21}^1 = J_{22}^1 \sin\beta_0 + J_{21}^1 \cos\beta_0, \quad (8.27)$$

$$j_{22}^1 = -J_{21}^1 \sin\beta_0 + J_{22}^1 \cos\beta_0, \quad (8.28)$$

e temos que

$$M = J_{n-1} J_{n-2} \dots J_3 J_2 \Theta_1 \Theta_1^{-1} j_1 T_0. \quad (8.29)$$

Agora, substituindo $T_1 = \Theta_1^{-1} j_1$, obtemos $M = J_{n-1} J_{n-2} \dots J_3 J_2 \Theta_1 T_1 T_0$. Fazendo sucessivamente a mesma operação acima, podemos reescrever completamente a matriz M como:

$$M = \Theta_{n-1}T_{n-1}T_{n-2}\dots T_2T_1T_0. \quad (8.30)$$

Dessa forma, o algoritmo para o cálculo do expoente de lyapunov se reduz a encontrar os elementos da diagonal principal T_{11}^i e T_{22}^i das matrizes T_i . Assim, o expoente de lyapunov pode ser calculado da seguinte forma:

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |T_{jj}^i| \right). \quad (8.31)$$

8.2 Matriz Jacobiana

A matriz jacobiana J usada na seção anterior na implementação do algoritmo para calcular o expoente de Lyapunov é obtida a partir do mapa (3.14), deduzido na seção (3.1). Usando a definição da matriz jacobiana aplicada ao mapa, temos:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \alpha_n} \\ \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \alpha_n} \end{pmatrix}.$$

Os coeficientes da matriz são obtidos diretamente usando o mapa (3.14),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} &= \frac{[1 + tg^2(\alpha_n + \phi_n) \frac{\partial \phi_n}{\partial \theta_n}] \Delta X + y'(\theta_n) - tg(\alpha_n + \phi_n) x'(\theta_n)}{\Upsilon}, \\ \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \alpha_n} &= - \frac{[1 + tg^2(\alpha_n + \phi_n)] \Delta X}{\Upsilon}, \\ \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \theta_n} &= \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \theta_{n+1}} \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} - \frac{\partial \phi_n}{\partial \theta_n}, \\ \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \alpha_n} &= \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \theta_{n+1}} \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \alpha_n} - 1, \end{aligned} \quad (8.32)$$

onde definimos as seguintes quantidades auxiliares:

$$\begin{aligned} \Delta X &= R(\theta_{n+1}) \cos(\theta_{n+1}) - R(\theta_n) \cos(\theta_n), \\ \Upsilon &= R(\theta_{n+1}) [\cos(\theta_{n+1}) + \sin(\theta_{n+1}) tg(\alpha_n + \phi_n)] \\ &\quad + \frac{\partial R(\theta_{n+1})}{\partial \theta_{n+1}} [\sin(\theta_{n+1}) - \cos(\theta_{n+1}) tg(\alpha_n + \phi_n)], \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial \theta_n} &= \frac{\partial}{\partial \theta_n} \arctg \left(\frac{y'(\theta_n)}{x'(\theta_n)} \right) = \frac{y''(\theta_n) x'(\theta_n) - x''(\theta_n) y'(\theta_n)}{x'^2(\theta_n) + y'^2(\theta_n)}. \end{aligned} \quad (8.33)$$

REFERÊNCIAS

- [1] VIANA, R. L. *Introdução à Dinâmica Não-Linear e Caos*. 2011.
- [2] GLEICK, J. *Caos a criação de uma nova ciência*. Campus Rio de Janeiro, 1990.
- [3] LORENZ, E. N. *Deterministic Nonperiodic Flow*, 1963.
- [4] BERRY, M. V. Regularity and chaos in classical mechanics, illustrated by three deformations of a circular 'billiard'. *European Journal of Physics*, Bristol, v. 2, n. 2, p. 91, 1981.
- [5] BERRY, M. Quantum physics on the edge of chaos. *New Scientist (London)*, v. 116, n. 1587, p. 44–47, 1987.
- [6] ALFREDO MIGUEL OZORIO DE ALMEIDA, R. O. V. *Caos e mecânica quântica. Revista do CBPF*.
- [7] LEONEL, E. D.; OLIVEIRA, D. F.; LOSKUTOV, A. Fermi acceleration and scaling properties of a time dependent oval billiard. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, v. 19, n. 3, p. 033142, 2009.
- [8] LEMOS, N. *Mecânica analítica*. Editora Livraria da Física, 2007.
- [9] DE AGUIAR, M. A. *Tópicos de mecânica clássica*. 2011.
- [10] GOLDSTEIN, H. *Classical mechanics*. Pearson Education India, 1965.
- [11] STEWART, I. *Será que deus joga dados?: a nova matemática do caos*. Zahar, 1991.
- [12] OLIVEIRA, D. F.; LEONEL, E. D. On the dynamical properties of an elliptical–oval billiard with static boundary. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, v. 15, n. 4, p. 1092–1102, 2010.
- [13] LIVORATI, A. L. P. *Influência do fenômeno de stickness em alguns sistemas dinâmicos clássicos*. 2014.
- [14] ECKMANN, J.-P.; KAMPHORST, S. O.; RUELLE, D.; CILIBERTO, S. Liapunov exponents from time series. *Physical Review A*, Woodbury, v. 34, n. 6, p. 4971, 1986.
- [15] BARABÁSI, A.; STANLEY, H. *Fractal concepts in surface growth*. 1995.
- [16] DE MOURA, F. A.; LYRA, M. L. Delocalization in the 1d anderson model with long-range correlated disorder. *Physical Review Letters*, Woodbury, v. 81, n. 17, p. 3735, 1998.
- [17] STROGATZ, S. H. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Westview press, 2014.