UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

RESULTADOS TIPO BERNSTEIN EM $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$

José Wilker de Lima Silva

Fortaleza, 2007

José Wilker de Lima Silva

RESULTADOS TIPO BERNSTEIN EM $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof.Dr. Antônio Gervásio Colares

Fortaleza
2007

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Resultados Tipo Bernstein em $M^2 \times R$

José Wilker de Lima Silva

*Esta Dissertação foi submetida como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, outorgado pela Universidade Federal do Ceará, e encontra-se à disposição na biblioteca da referida Universidade.*

A citação de qualquer trecho deste trabalho é permitida, desde que seja feita de conformidade com as normas da ética científica.

Dissertação aprovada em 29 de março de 2007.

Banca Examinadora

Prof. Antonio Gervasio Colares
UFC
(Orientador)

Prof. Gregório Pacelli Feitosa Bessa
UFC

Prof. Fernando Enrique Echaiz Espinoza
UFAL

Aos meus pais, ao meu irmão e à Lidianne.

AGRADECIMENTOS

À Deus, por todos os momentos.

Aos meus queridos pais, Antônio Barbosa da Silva e Raimunda de Lima Silva, e ao meu querido irmão, Wellyson de Lima Silva, pelo amor, pela educação e apoio.

À minha namorada Lidianne Leal Rocha pelo amor, carinho, compreensão, ajuda, conselhos e apoio. À sua mãe, Irinea Pereira Leal Rocha, pelo carinho e palavras de incentivo.

Aos amigos da graduação, do mestrado e do doutorado em Matemática, por todos os momentos que marcaram essa passagem. Em especial, agradeço à Valdenize, Marcelo Nogueira, Gláucio, Breno Ricardo, Marciano, Denise, Paulo, Najara, Érico, Aurélio, Luiza Helena, Alisson, Darlan, Jefferson, Chiara, Carpegiane, Michel, Joserlan, David, Jonatan, Sibério, Samuel, Fabrício, Jorge Hinojosa, Juscelino, Tony, Feliciano, Marcos e Marcelo Melo. À todos aqueles que direta, ou indiretamente, ajudaram-me a realizar esse trabalho.

Ao professor Antônio Gervásio Colares, pela perita orientação, pelas críticas construtivas e pelos ensinamentos que serão guardados por toda a minha vida. Ao professor Fernando Pimentel, pela amizade e pelos conselhos cruciais e diretos.

Aos professores Anchieta, Adelmir Jucá, Fábio Montenegro, Abdênago, Luquésio, Afonso, Othon, Jorge Herbert, Francisco Pimentel, Caminha, Pacelli e Fernando Echaiz, por minha formação.

Aos funcionários Erivan, Rocilda, Fernanda, Adriano, Catarina, Lacerda e Tavares por todo o apoio. Em especial à Andréa Costa Dantas, pela amizade, pelo caráter e competência em resolver assuntos burocráticos.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

"A grandeza não consiste em receber honras, mas em merecê-las."

Aristóteles

RESUMO

Apresentaremos uma fórmula para o Laplaciano da função $\Theta = \langle \eta, T \rangle$, onde $f : \Sigma^n \to \mathbb{M}^n \times \mathbb{R}$ é uma imersão com codimensão um, Σ^n é uma hiperfície *two-sided*, T é um campo conforme em $\mathbb{M}^n \times \mathbb{R}$ e η é um campo unitário normal a Σ^n em $\mathbb{M}^n \times \mathbb{R}$. Usaremos tal fórmula para obtermos alguns resultados tipo Bernstein em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$.

Sumário

Introdução

O clássico teorema de Bernstein afirma que os planos são as únicas superfícies mínimas no $\mathbb{R}^3$ que podem ser escritas como gráfico de uma função no $\mathbb{R}^2$. Harold Rosenberg observou em [20] que qualquer gráfico mínimo inteiro em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ sobre uma variedade Riemanniana completa $\mathbb{M}^2$ com curvatura gaussiana não-negativa é uma superfície totalmente geodésica. De acordo com seu raciocínio isto segue-se pois tal gráfico é necessariamente estável, e um famoso resultado de Schoen [24] mostra que uma superfície mínima completa estável em alguma variedade Riemanniana tridimensional com curvatura de Ricci não-negativa é totalmente geodésica. Se $\mathbb{M}^2$ é completa existe uma abundância de superfícies completas totalmente geodésicas em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$. Primeiramente, existem slices $\mathbb{M}^2 \times \{t\}$ para algum $t \in \mathbb{R}$ que é estável. Então, existem cilindros $\{\gamma\} \times \mathbb{R}$ para qualquer geodésica completa γ em $\mathbb{M}^2$ e dependendo de γ estes podem ou não ser estáveis. Os slices são gráficos sobre $\mathbb{M}^2$ e cilindros certamente não são, mas superfícies em ambas as classes compartilham da propriedade que a função ângulo entre a aplicação normal de Gauss e o campo de vetores (Killing) $T = \partial/\partial t$ não muda de sinal. Neste trabalho estendemos mais o resultado de Bernstein às superfícies mínimas completas em espaços de curvatura de Ricci não-negativa munidos de um campo de Killing. Isto é feito sob a hipótese de que o sinal da função ângulo entre a aplicação normal de Gauss globalmente definida e o campo de Killing permanece inalterado ao longo da superfície. De fato, nosso resultado principal requer somente a presença de um campo homotético.

Assim, teremos os seguintes resultados:

Proposição: Seja $\mathbb{N}^{n+1}$ uma variedade Riemanniana munida de um campo de Killing conforme T. Para uma hiperfície two-sided Σ^n em $\mathbb{N}^{n+1}$, o Laplaciano de $\Theta \in C^\infty(\Sigma)$ dada por $\Theta = \langle \eta, T\rangle$ é

$$\Delta\Theta = -n\langle \nabla H, T\rangle - (||A||^2 + Ric_{\mathbb{N}}(\eta))\Theta - n(H\phi + \partial\phi/\partial\eta)$$

onde ∇H é o gradiente da função curvatura média H com respeito ao campo normal unitário η e $||A||$ é a norma da segunda forma fundamental de Σ^n.

Definição: Seja Σ uma hiperfície de curvatura média H em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ e seja η um campo normal unitário a Σ em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$. O operador estabilidade de Σ é $L = \Delta + ||A||^2 + Ric(\eta)$, onde $Ric(\eta)$ é a curvatura de Ricci da variedade ambiente $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ na direção de η e A é a segunda forma fundamental da imersão. Dizemos que Σ é estável se

$$-\int_\Sigma uLu \geq 0,$$

para alguma função diferenciável u com suporte compacto em Σ.

Teorema: Seja Σ uma superfície mínima two-sided(ou seja, existe um campo normal unitário η globalmente definido, e, assim, a função $\Theta \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ dada por $\Theta(p) = \langle \eta(p), T(p)\rangle$, onde T é um campo homotético, é também globalmente definida) em $\mathbb{N}^3$ tal que a função Θ não muda de sinal. Então ou Σ é invariante por um subgrupo a 1-parâmetro de homotetias geradas por T ou é estável. No último caso, temos:

a) Se $Ric_{\mathbb{N}} \geq 0$, então Σ é totalmente geodésica.

b) Se $K_{\mathbb{N}} \geq 0$ então Θ é constante e $Ric_{\mathbb{N}} \equiv 0$.
Como consequência imediata do teorema 1, temos

Proposição: Seja Σ uma superfície mínima completa *two-sided* imersa em $\mathbb{M}^2 \times_\varrho \mathbb{R}$, ou seja, o produto $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ munido da métrica

$$\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{N}} = \pi_{\mathbb{M}}^*(\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{M}}) + \varrho^2\pi_{\mathbb{R}}^*(dt^2),$$

onde $\varrho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$. Se a função Θ não muda de sinal e se $K_{\mathbb{M}} \geq 0$, então Σ é totalmente geodésica.

Proposição: Seja Σ um gráfico mínimo radial completo em $\mathbb{N}^3 = \mathbb{R}_+ \times_t \mathbb{M}^2$ sobre um domínio $\Omega \subset \mathbb{M}^2$. Se $K_{\mathbb{M}} \geq 1$, então Σ é totalmente geodésica.

Definição: Um **cilindro** em $\mathbb{N}^3 = \mathbb{M}^2 \times_\varrho \mathbb{R}$ sobre uma curva de velocidade unitária $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{M}^2$ é a superfície em $\mathbb{M}^2 \times_\varrho \mathbb{R}$ obtida pela ação em γ de um subgrupo a 1-parâmetro de translações verticais. Um cilindro é **mínimo** se $k_g = \varrho\partial\varrho/\partial\nu$, onde $k_g = \langle \nabla_{\gamma'}\gamma, \nu\rangle$ é a curvatura geodésica de γ e ν é um campo normal unitário a γ em $\mathbb{M}^2$. Em particular, um cilindro é totalmente geodésico se, e somente se, γ é uma geodésica, e $\partial\varrho/\partial\nu = 0$.

Corolário: Seja Σ uma superfície mínima completa *two-sided* em $\mathbb{N}^3 = \mathbb{M}^2 \times_\varrho \mathbb{R}$, onde $\mathbb{M}^2$ não é necessariamente completa. Assuma que $K_{\mathbb{N}} \geq 0$ e que Θ não muda de sinal. Então, **ou**
$i)\Sigma$ é um cilindro mínimo, **ou**
$ii)\Sigma$ é totalmente geodésica e ϱ é constante. Além disso, se $K_{\mathbb{M}}(q) > 0$ em um ponto $q \in \pi_{\mathbb{M}}(\Sigma)$, então Σ é um slice sobre $\mathbb{M}^2$ completa.

Teorema: Seja $\mathbb{M}^2$ uma superfície completa com curvatura Gaussiana $K_{\mathbb{M}} \geq 0$.

(i) Qualquer gráfico inteiro de curvatura média constante em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ é totalmente geodésica.

(ii) Se, além disso, $K_{\mathbb{M}}(q) > 0$ em algum ponto $q \in \mathbb{M}^2$, então o gráfico é um slice.

Proposição: Seja Σ uma superfície mínima completa two-sided em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$. Suponha que Θ não muda de sinal.

(i) Se $K_{\mathbb{M}} \geq 0$ ao longo de $\pi_{\mathbb{M}}(\Sigma)$, então Σ é totalmente geodésica.

(ii) Se, além disso, $K_{\mathbb{M}}(q) > 0$ em algum ponto $q \in \pi_{\mathbb{M}}(\Sigma)$, então ou Σ é um cilindro sobre uma geodésica completa de $\mathbb{M}^2$, ou $\mathbb{M}^2$ é necessariamente completa e Σ é um slice.

Definição: Uma superfície completa $\mathbb{M}$ possui curvatura total finita se a parte negativa de sua curvatura Gaussiana é integrável. Mais precisamente, se $K_{\mathbb{M}}(q)$ denota a curvatura Gaussiana em $\mathbb{M}$ e sua parte negativa é definida por

$$K_{\mathbb{M}}^{-}(q) = \max\{-K_{\mathbb{M}}(q), 0\},$$

então $\mathbb{M}$ possui curvatura total finita se

$$\int_{\mathbb{M}} K_{\mathbb{M}}^{-} < \infty.$$

Teorema: Seja $\mathbb{M}^2$ uma superfície completa tal que

$$\int_{\mathbb{M}} K_{\mathbb{M}}^{-} dA_{\mathbb{M}} < +\infty, \qquad \textit{onde} \qquad K_{\mathbb{M}}^{-}(q) = \max\{-K_{\mathbb{M}}(q), 0\}.$$

Então qualquer gráfico mínimo em um semi-espaço $\mathbb{M}^2 \times [0, \infty)$ é um slice.

Proposição: Seja $\mathbb{M}^2$ uma superfície completa que satisfaz

$$\int_{\mathbb{M}} K_{\mathbb{M}}^{-} dA_{\mathbb{M}} < +\infty, \qquad \textit{onde} \qquad K_{\mathbb{M}}^{-}(q) = \max\{-K_{\mathbb{M}}(q), 0\}.$$

Então qualquer gráfico inteiro Γ_u contido em $\mathbb{M}^2 \times [a, b]$, $-\infty < a \leq b \leq +\infty$, com curvatura média constante e curvatura Gaussiana limitada inferiormente é um slice.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 O Gradiente de uma função

Seja M uma variedade Riemanniana n-dimensional, $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M e $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M. Para introduzirmos as definições de Gradiente, Divergente e Laplaciano, vamos trabalhar com os referenciais descritos a seguir:

i) **Ortonormal:** Sabemos que um conjunto de campos de vetores $\{e_1, \cdots, e_n\}$ é um referencial ortonormal local em M, quando em cada ponto $p \in M$, $\{e_1(p), \cdots, e_n(p)\}$ é uma base ortonormal do plano tangente T_pM.

ii) **Geodésico:** Sabemos que dado $p \in M^n$ existe uma vizinhança $U \subset M$ de p e n campos de vetores $E_1, \cdots, E_n$ em $\mathcal{X}(U)$, ortonormais em cada ponto de U, tais que em p, $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$. Uma tal família $E_1, \cdots, E_n$ de campos de vetores é chamada um **referencial** (local) **geodésico** em p.

Definição 1 *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave. O **gradiente** de f é o campo vetorial ∇f sobre M, tal que*

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f),$$

para todo campo vetorial X em M.

Proposição 1.1.1 *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave e $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança aberta $U \subset M$. Então, em U, temos*

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} e_i(f)e_i.$$

Demonstração.: Como $\nabla f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, temos que

$$e_j(f) = \langle \nabla f, e_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, e_j \rangle = \alpha_j.$$

Logo,

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} e_i(f)e_i. \tag{1.1}$$

■

A existência do gradiente de uma função suave é assegurada pela Proposição 1.1.1 acima, e é unicamente determinado por (1.1).

Proposição 1.1.2 *Se $f, g : M^n \to \mathbb{R}$ são funções suaves, então*
(a)$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$.
(b)$\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$.

1.2 A Divergência de um campo vetorial

Definição 2 *Seja X um campo vetorial em M^n. A* ***divergência*** *de X é a função suave*

$$divX : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$p \mapsto divX(p) := tr(Y \to \nabla_Y X(p)),$$

ou seja, a divergência é o traço do operador linear ($Y \to \nabla_Y X$), onde $Y \in T_pM$.

Proposição 1.2.1 *Seja X um campo suave em M^n e $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ um referencial móvel em uma vizinhança aberta $U \subset M$. Se $X = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ em U, então*

$$divX = \sum_{i=1}^{n}(e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle).$$

Em particular, se o referencial for geodésico em $p \in U$, então, em p, temos

$$divX = \sum_{i=1}^{n} e_i(a_i).$$

Demonstração.: Pela definição de divergência de um campo vetorial, temos

$$divX = \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n}\{e_i\langle X, e_i\rangle - \langle X, \nabla_{e_i} e_i\rangle\} = \sum_{i=q}^{n}\{e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X\rangle.$$

■

Proposição 1.2.2 *Se X, Y são campos vetoriais sobre M^n, e $f : M^n \to \mathbb{R}$ é uma função suave, então*

$(a) div(X + Y) = div(X) + div(Y)$.
$(b) div(fX) = f div(X) + \langle \nabla f, X\rangle$.

Lema 1.2.1 *Seja X um campo vetorial sobre $\mathbb{M}^n$, e $U \subset \mathbb{M}$ uma vizinhança coordenada, com campos coordenados $\partial_1, ..., \partial_n$. Se X for dado em U por $X = \sum_i a_i \partial_i$, então a divergência de X é dada em U por*

$$divX = \sum_i \left\{\frac{\partial a_i}{\partial x_i} + a_i \sum_j \Gamma_{ij}^j\right\}.$$

Demonstração: Note que

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_i} X &= \sum_k \nabla_{\partial_i}(a_k \partial_k) = \sum_k \left(\frac{\partial a_k}{\partial x_i}\partial_k + a_k \nabla_{\partial_i}\partial_k\right) = \\
&= \sum_k \frac{\partial a_k}{\partial x_i}\partial_k + \sum_k \sum_j a_k \Gamma_{ik}^j \partial_j = \sum_k \frac{\partial a_k}{\partial x_i}\partial_k + \sum_k \sum_j a_j \Gamma_{ij}^k \partial_k = \\
&= \sum_k \left\{\frac{\partial a_k}{\partial x_i} + \sum_j a_j \Gamma_{ij}^k\right\}\partial_k.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} divX &= \sum_i \left\{ \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \sum_j a_j \Gamma^i_{ij} \right\} = \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \sum_{ij} a_j \Gamma^i_{ij} = \\ &= \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \sum_{ij} a_i \Gamma^j_{ji} = \sum_i \left\{ \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + a_i \sum_j \Gamma^j_{ij} \right\}. \end{aligned}$$

■

Proposição 1.2.3 *Seja X um campo vetorial sobre $\mathbb{M}^n$, e $U \subset \mathbb{M}$ uma vizinhança coordenada, com campos coordenados $\partial_1, ..., \partial_n$. Se X for dado em U por $X = \sum_i a_i \partial_i$, então a divergência de X é dada em U por*

$$divX = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i \sqrt{g}).$$

Proposição 1.2.4 *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave. Dados $p \in M$ e $v \in T_pM$, seja $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ uma curva suave, tal que $c(0) = p$ e $\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0} = v$. Então*

$$\langle \nabla f, v \rangle_p = \frac{d}{dt}(f \circ c)(t)\Big|_{t=0}.$$

Em particular, se p é ponto de máximo ou mínimo local para f, então $\nabla f(p) = 0$.

Demonstração: Para a primeira parte basta observar que, sendo V uma extensão local de v,

$$\langle \nabla f, v \rangle_p = (V(f))(p) = \frac{d}{dt}(f \circ c)(t)\Big|_{t=0}.$$

Suponha agora que p é ponto de máximo local para f (o outro caso é análogo). Então existe $U \subset M$ vizinhança aberta de p, tal que $f(p) \geq f(q)$, para todo $q \in U$. Se $v \in T_pM$ e $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ é tal que $c(0) = p$ e $\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=0} = v$, então $f \circ c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ tem um máximo local em 0, donde

$$\langle \nabla f, v \rangle_p = \frac{d}{dt}(f \circ c)(t)\Big|_{t=0} = 0.$$

Como a relação acima é válida para todo $v \in T_pM$, segue-se então que $\nabla f(p) = 0$. ■

Proposição 1.2.5 *Seja M^n uma variedade Riemanniana conexa e $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave. Se $\nabla f = 0$ em M, então f é constante em M.*

Demonstração: Fixemos $p \in M$ e seja $A = \{q \in M; f(q) = f(p)\}$. A continuidade de f garante que A é fechado. Como $A \neq \emptyset$, se mostrarmos que A é aberto seguirá da conexidade de M que $A = M$ e f será constante. Seja então $q \in A$ e $U \subset M$ uma vizinhança coordenada e conexa de q. Para todo $q' \in U$, existe uma curva suave $c : [0,1] \to U$ com $c(0) = q$ e $c(1) = q'$. Agora, segue-se da proposição 1.2.4 que

$$\frac{d}{dt}(f \circ c)(t) = \langle \nabla f, \frac{dc}{dt} \rangle = 0,$$

e daí a função $t \mapsto (f \circ c)(t)$ é constante em $[0,1]$. Em particular,

$$f(p) = f(q) = (f \circ c)(0) = (f \circ c)(1) = f(q'),$$

donde $q' \in A$. Como o raciocínio é válido para todo $q' \in U$, concluímos que $U \subset A$, que é então aberto. ∎

Teorema 1 (da divergência) *Seja $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular, compacta e orientada, e seja $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$ um campo de vetores tangentes sobre Σ. Então*

$$\int_\Sigma divX(p)dp = 0,$$

onde dp denota o elemento de área da superfície Σ.
Em particular,

$$\int_\Sigma \Delta f(p)dp = 0$$

para toda função $f \in C^\infty(\Sigma)$.

1.3 O Laplaciano de uma função

Definição 3 *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave. O* ***Laplaciano*** *de f é a função $\Delta f : M^n \to \mathbb{R}$, dada por*

$$\Delta f = div(\nabla f).$$

Proposição 1.3.1 *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função suave em M^n, e $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ um referencial móvel em um aberto $U \subset M$. Então*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \{e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i) f\}.$$

Em particular, se o referencial for geodésico em $p \in U$, então tem-se em p

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} e_i(e_i(f)).$$

Demonstração: Temos que $\nabla f = \sum_{i=1}^{n} e_i(f) e_i$ em U. Logo, da definição de Laplaciano e da Proposição 1.2.1 temos que

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \{e_i(e_i(f)) - \langle \nabla_{e_i} e_i, \nabla f \rangle\} = \sum_{i=1}^{n} \{e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i) f\}.$$

Proposição 1.3.2 *Dadas $f, g : M^n \to \mathbb{R}$ funções suaves, tem-se*

$$\Delta(fg) = g\Delta f + f\Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle.$$

Em particular,

$$\frac{1}{2}\Delta(f^2) = f\Delta f + ||\nabla f||^2.$$

Demonstração: Das Proposições 1.1.2 e 1.2.2, temos que

$$\Delta(fg) = div(\nabla(fg)) = div(g\nabla f + f\nabla g) = g\Delta f + f\Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle.$$

Fazendo $f = g$, teremos que

$$\Delta(f^2) = div(\nabla(f^2)) = div(f\nabla f + f\nabla f) = 2f\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla f \rangle.$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\Delta(f^2) = f\Delta f + ||\nabla f||^2.$$

■

Proposição 1.3.3 *Se $f : \mathbb{M}^n \to \mathbb{R}$ é uma função suave e $U \subset \mathbb{M}$ é uma vizinhança coordenada, com campos coordenadas $\partial_1, ..., \partial_n$, então o laplaciano de f é dado em U por*

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(g^{ij}\sqrt{g}\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big).$$

Demonstração: Seja $\nabla f = \sum_i a_i \partial_i$, onde $a_i = \sum_j g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}$. Segue-se do Lema 1.2.1 e da Proposição 1.2.3 que,

$$\begin{aligned}\Delta f &= div(\nabla f) = \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i\sqrt{g}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big\{\sum_j g^{ij}\sqrt{g}\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big\{g^{ij}\sqrt{g}\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big\}.\end{aligned}$$

■

Lema 1.3.1 *Seja $\mathbb{M}$ uma variedade Riemanniana com tensor métrico g, e $c > 0$ uma constante. Se $\widetilde{g} = cg$, e Δ e $\widetilde{\Delta}$ denotam respectivamente os laplacianos de $\mathbb{M}$ com respeito a g e $\widetilde{g}$, então*

$$\widetilde{\Delta} = \frac{1}{c}\Delta.$$

Demonstração: Como $\widetilde{g} = cg$ e $\widetilde{g}^{ij} = c^{-1}g_{ij}$, basta aplicar a proposição 1.3.3. ■

Teorema 2 (Hopf) *Seja $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular e compacta. Se uma função $f \in C^\infty(\Sigma)$ é tal que $\Delta f(p) \geq 0$ para todo ponto $p \in \Sigma$, então f é necessariamente constante (e, portanto, $\Delta f = 0$).*

Demonstração: A demonstração é uma aplicação do Teorema da Divergência em Σ. Com efeito, como $\Delta f \geq 0$ em Σ e

$$\int_\Sigma \Delta f(p)dp = 0,$$

então necessariamente $\Delta f = 0$. Como,

$$div(f\nabla f) = f\nabla f + ||\nabla f||^2 = ||\nabla f||^2,$$

e aplicando de novo o Teorema da Divergência, temos que

$$\int_\Sigma ||\nabla f(p)||^2 dp = \int_\Sigma (f\nabla f)(p)dp = 0.$$

Isto implica que $\nabla f(p) = 0$ em todo ponto p. Logo f é constante.

Observação 1 *Seja $f \in \mathcal{D}(M)$. Dizemos que f é subharmônica (resp. superharmônica) quando $\Delta f \geq 0$ (resp. $\Delta f \leq 0$). Se $M = \mathbb{C}$, temos que as únicas funções subharmônicas limitadas são as constantes.*

■

Teorema 3 (Princípio do Máximo) *Seja $u : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável com $\Delta u \geq 0$ (respectivamente $\Delta u \leq 0$) . Então u é constante em uma vizinhança de cada máximo (respectivamente mínimo) local. Em particular, u tem um máximo (respectivamente mínimo) global se e só se u é constante. Se $Lu = 0$, onde L é um operador de forma divergente, e se todos os autovalores de L forem positivos, então u é constante em uma vizinhança de cada mínimo (máximo) local.*

1.4 Imersão Isométrica e Curvatura

Para a compreensão do presente trabalho se faz necessário estudar um pouco da teoria das hipersuperfícies.

Seja $f : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão. Então, para cada $p \in M$ existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de $\overline{M}$. Isto quer dizer que existem uma vizinhança de $\overline{U} \subset \overline{M}$ de $f(p)$ e um difeomorfismo $\varphi : \overline{U} \to V \subset R^{n+1}$, tais que φ aplica $f(U) \cap \overline{U}$ em um aberto do subespaço $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Para simplificar a notação, identificaremos U com $f(U)$ e cada $v \in T_qM, q \in U$, com $df_q(v) \in T_{f(q)}\overline{M}$. Usaremos tais identificações para estender um campo local (em U) de vetores em M a um campo local (em $\overline{U}$) de vetores em $\overline{M}$. Se U é suficientemente pequeno, tal extensão sempre é possível, como se vê usando o difeomorfismo φ.

Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\overline{M}$ decompõe $T_p\overline{M}$ na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

onde $(T_pM)^{\perp}$ é o espaço complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Se $v \in T_p\overline{M}$, $p \in \overline{M}$, podemos escrever $v = v^{\top} + v^N, v^{\top} \in T_pM, v^N \in (T_pM)^{\perp}$.

Denominaremos $v^{\top}$ a componente tangencial de v e v^N a componente normal de v. Tal decomposição é diferenciável no sentido de que as aplicações de $T\overline{M}$ em $T\overline{M}$ dadas por

$$(p, v) \to (p, v^{\top}) \text{ e } (p, v) \to (p, v^N)$$

são diferenciáveis.

A conexão Riemanniana de $\overline{M}$ será indicada por $\overline{\nabla}$. Se X, Y são campos locais em M e $\overline{X}, \overline{Y}$ são extensões locais a $\overline{M}$ de X e Y, respectivamente, definimos uma conexão em M por

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y})^{\top}.$$

Utilizando as propriedades da conexão $\overline{\nabla}$ e as propriedades de decomposição em soma direta, verifica-se que ∇ assim definida é a conexão Riemanniana de M.

Proposição 1.4.1 *Se $X, Y \in \chi(U)$, a aplicação $B : \chi(U) \times \chi(U) \to \chi(U)^{\perp}$ dada por*

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

não depende das extensões de X e Y, e é bilinear simétrica.

Prova: Seja $\overline{f}$ uma extensão de f a $\overline{U}$. Dada outra extensão $\overline{X}_1$ de X, então

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \overline{\nabla}_{\overline{X}_1}\overline{Y} = \overline{\nabla}_{\overline{X}-\overline{X}_1}\overline{Y}.$$

Como $\overline{X} - \overline{X}_1 = 0$ em M, segue que $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} = \overline{\nabla}_{\overline{X}_1}\overline{Y}$ em M.
Usando o que foi provado, se $\overline{Y}_1$ é outra extensão de Y temos que

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}_1 = \overline{\nabla}_{\overline{X}}(\overline{Y} - \overline{Y}_1) = 0,$$

pois $\overline{Y} - \overline{Y}_1 = 0$ ao longo de uma trajetória de X. Logo B está bem definida.
Veja agora que,

$$\begin{aligned}
B(X_1 + X_2, Y) &= \overline{\nabla}_{\overline{X_1+X_2}}\overline{Y} - \nabla_{X_1+X_2}Y \\
&= \overline{\nabla}_{\overline{X}_1+\overline{X}_2}\overline{Y} - \nabla_{X_1+X_2}Y \\
&= \overline{\nabla}_{\overline{X}_1}\overline{Y} - \nabla_{X_1}Y + \overline{\nabla}_{\overline{X}_2}\overline{Y} - \nabla_{X_2}Y \\
&= B(X_1, Y) + B(X_2, Y); \\
B(fX, Y) &= \overline{\nabla}_{\overline{fX}}\overline{Y} - \nabla_{fX}Y \\
&= \overline{\nabla}_{\overline{fX}}\overline{Y} - \nabla_{fX}Y \\
&= \overline{f} \cdot \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - f\nabla_X Y \\
&= f(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y) \\
&= fB(X, Y); \\
B(X, fY) &= \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{f} \cdot \overline{Y} - \nabla_X fY \\
&= \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{f} \cdot \overline{Y} - \nabla_X fY \\
&= \overline{X}(\overline{f})\overline{Y} + \overline{f} \cdot \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - X(f)Y - f\nabla_X Y \\
&= f(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y) = fB(X, Y),
\end{aligned}$$

pois $\overline{X}(\overline{f}) = X(f)$ em M.

Para mostrar que B é simétrica utilizamos a simetria da conexão Riemanniana, obtendo

$$\begin{aligned}
B(X, Y) &= \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y \\
&= \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X} + [\overline{X}, \overline{Y}] - \nabla_Y X - [X, Y] \\
&= \overline{\nabla}_{\overline{Y}}\overline{X} - \nabla_Y X \\
&= B(Y, X),
\end{aligned}$$

já que $[\overline{X}, \overline{Y}] = [X, Y]$ em M. ■

Se $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$, então a aplicação $A_\eta : T_pM \to T_pM$ dada por

$$\langle A_\eta(x), y\rangle = \langle B(x,y), \eta\rangle, \forall x, y \in T_pM$$

é linear auto-adjunta.

Observação 2 *A aplicação A_η definida no corolório acima é denominada segunda forma fundamental de M na direção de η.*

A proposição seguinte nos dá a expressão da segunda forma em termos da derivada covariante.

Proposição 1.4.2 *Seja $p \in M$, $x \in T_pM$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$. Seja N uma extensão local de η normal a M. Então*

$$A_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^\top.$$

Prova: Seja $y \in T_pM$ e X, Y extensões locais de x, y, tangentes a M. Então $\langle N, Y\rangle = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \langle A_\eta(x), y\rangle &= \langle B(x,y), \eta\rangle \\ &= \langle B(X,Y), N\rangle(p) \\ &= \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y, N\rangle(p) \\ &= \langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}, N\rangle(p) \\ &= -\langle \overline{\nabla}_{\overline{X}} N, Y\rangle(p). \end{aligned}$$

Daí, $\langle A_\eta(x), y\rangle = -\langle \overline{\nabla}_x N, y\rangle, \forall y \in T_pM$. Donde $A_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^\top$.

Observação 3 *No caso de $\langle N, N\rangle = 1$, temos que $\langle \overline{\nabla}_x N, N\rangle = 0$. Donde*

$$\overline{\nabla}_x N = (\overline{\nabla}_x N)^\top \Rightarrow A_\eta(x) = -\overline{\nabla}_x N.$$

Definição 4 *Sendo η um campo de vetores normal a M^n em $\overline{M}^{n+1}$, chamamos de curvatura média de M à aplicação $H : M \to \mathbb{R}$ dada por*

$$H = \frac{1}{n} \cdot traço(A_\eta).$$

Definição 5 *A curvatura de uma variedade Riemanniana N é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \chi(N)$ a aplicação $R(X,Y) : \chi(N) \to \chi(N)$ dada por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, \forall Z \in \chi(N),$$

onde ∇ é a conexão Riemanianna de N.

A proposição abaixo, cuja demonstração pode ser encontrada na referência [4], apresenta algumas propriedades da curvatura R.

Proposição 1.4.3 *A curvatura R de uma variedade Riemanianna M goza das seguintes propriedades: i) $R(fX + gY, Z) = fR(X,Z) + gR(Y,Z)$ e*
$R(X, fY + gZ) = fR(X,Y) + gR(X,Z)$;
ii) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = -\langle R(Y,X)Z, T\rangle$;
iii) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = -\langle R(X,Y)T, Z\rangle$;
iv) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = \langle R(Z,T)X, Y\rangle$;
$\forall X, Y, Z, T \in \chi(N)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Definição 6 (Curvatura de Ricci) *Seja M uma variedade Riemanniana e $\{e_1, ..., e_n\}$ um referencial ortonormal local em M. A curvatura de Ricci segundo o campo $X \in \mathcal{X}(M)$ é definida por*

$$Ric(X) := \sum_{i=1}^{n} \langle R(e_i, X)X, e_i\rangle.$$

Observação: Em particular, a curvatura de Ricci em uma variedade produto é dada por

$$Ric_{M_1 \times M_2}(\overrightarrow{v}) = Ric_{M_1}(\pi_{M_1}(\overrightarrow{v})) + Ric_{M_2}(\pi_{M_2}(\overrightarrow{v}),$$

onde π_{M_i} é a projeção de $T(M_1 \times M_2)$ sobre TM_i, para $i = 1, 2$.

Definição 7 *Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bi-dimensional $E \subset T_pM$, seja $\{x, y\} \subset E$ uma base de E, chamamos de curvatura seccional de E em p ao número real*

$$K(x,y) = \frac{\langle R(x,y)x, y\rangle}{|x \wedge y|^2},$$

onde $|x \wedge y|^2 = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle^2$.

Seja $f : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica. Com as identificações feitas no início da secção relacionaremos as curvaturas seccionais de M com as curvaturas seccionais de $\overline{M}$. Dado $p \in M$, se $x, y \in T_pM \subset T_p\overline{M}$ são linearmente independentes, indicaremos por $K(x,y)$ e $\overline{K}(x,y)$ as curvaturas seccionais de M e $\overline{M}$, respectivamente, segundo o plano gerado por x, y.

Teorema 4 (Equação de Gauss) *Sejam $p \in M$ e x,y vetores ortonormais de T_pM. Então*

$$\overline{K}(x,y) - K(x,y) = |B(x,y)|^2 - \langle B(x,x), B(y,y)\rangle.$$

Se $\eta \in (T_pM)^{\perp}$, então $\langle A_\eta(x), y\rangle = \langle B(x,y), \eta\rangle$. Se $\{e_1, ..., e_n\}$ é uma base ortonormal que diagonaliza A_η, então

$$B(e_i, e_j) = \alpha_{ij} \cdot \eta \Rightarrow \alpha_{ij} = \langle B(e_i, e_j), \eta\rangle.$$

Assim, $\alpha_{ij} = \langle A_\eta(e_i), e_j\rangle = \langle \lambda_i e_i, e_j\rangle$. Portanto, $B(e_i, e_j) = \lambda_i \cdot \delta_{ij} \cdot \eta$.

Definição 8 *Uma imersão $f : \Sigma \to \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ é* geodésica *em $p \in \Sigma$ se para todo $\eta \in (T_p\Sigma)^{\perp}$ a segunda forma fundamental A_η é identicamente nula em p. A imersão f é dita* totalmente geodésica *se ela é geodésica para todo $p \in \Sigma$.*

Observação: Para uma subvariedade Riemanniana $M \subset \widetilde{M}$, são equivalentes:
(a) M é totalmente geodésica.
(b) Toda geodésica em M é também uma geodésica em $\widetilde{M}$.
(c) A segunda forma fundamental de M é identicamente nula.

Observação: Quando a variedade Riemanniana tiver dimensão 2, então a curvatura seccional coincide com a curvatura de Gauss da variedade.

Capítulo 2

Resultados Auxiliares

2.1 Produto Warped

Sejam $\mathcal{P}$ e $\mathcal{B}$ variedades diferenciáveis e considere a variedade produto $\mathcal{P}\times\mathcal{B}$. Utilizando o sistema de coordenadas produto, temos os seguintes resultados:

(i) As projeções

$$\pi_{\mathcal{P}} : \mathcal{P}\times\mathcal{B} \to \mathcal{P}, \qquad \pi_{\mathcal{P}}(p,q) = p,$$
$$\pi_{\mathcal{B}} : \mathcal{P}\times\mathcal{B} \to \mathcal{P}, \qquad \pi_{\mathcal{B}}(p,q) = q,$$

são aplicações C^∞.

(ii) Uma aplicação $\phi : \mathcal{N} \to \mathcal{P}\times\mathcal{B}$ é C^∞ se, e somente se, $\pi_{\mathcal{P}}\circ\phi$ e $\pi_{\mathcal{B}}\circ\phi$ são C^∞, onde $\mathcal{N}$ é uma variedade diferenciável.

(iii) Para cada $(p,q)\in\mathcal{P}\times\mathcal{B}$ os subconjuntos

$$\mathcal{P}\times q = \{(r,q)\in\mathcal{P}\times\mathcal{B}; r\in\mathcal{P}\}, p\times\mathcal{B} = \{(p,r)\in\mathcal{P}\times\mathcal{B}; r\in\mathcal{B}\}$$

são subvariedades de $\mathcal{P}\times\mathcal{B}$.

(iv) Para cada $(p,q)\in\mathcal{P}\times\mathcal{B}$,

$$\pi_{\mathcal{P}}|_{\mathcal{P}\times q}$$
$$\pi_{\mathcal{B}}|_{p\times\mathcal{B}}$$

são difeomorfismos de $\mathcal{P}\times q$ em $\mathcal{P}$ e $p\times\mathcal{B}$ em $\mathcal{B}$, respectivamente.

(v) Os espaços tangentes

$$T_{(p,q)}(\mathcal{P}\times q) \qquad T_{(p,q)}(p\times\mathcal{B})$$

são subespaços do espaço tangente $T_{(p,q)}(\mathcal{P}\times\mathcal{B})$;
Além disso, $T_{(p,q)}(\mathcal{P}\times\mathcal{B}) = T_{(p,q)}(\mathcal{P}\times q)\oplus T_{(p,q)}(p\times\mathcal{B})$, isto é, cada $v\in T_{(p,q)}(\mathcal{P}\times\mathcal{B})$ possui uma única expressão $v=x+y$, onde $x\in T_{(p,q)}(\mathcal{P}\times q)$ e $y\in T_{(p,q)}(p\times\mathcal{B})$.
Introduziremos agora o conceito de levantamento de funções e vetores tangentes de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{B}$:

(a)Se $f\in C^\infty(\mathcal{P})$, definimos o levantamento de f para $\mathcal{P}\times\mathcal{B}$ como sendo a função $\widetilde{f}=f\circ\pi_{\mathcal{P}}\in C^\infty(\mathcal{P}\times\mathcal{B})$;

(b)Se $x\in T_p\mathcal{P}$ e $q\in\mathcal{B}$, o levantamento de x para $\mathcal{P}\times\mathcal{B}$ é o único vetor $\widetilde{x}$ em $T_{(p,q)}(\mathcal{P}\times q)$ tal que $d\pi_{\mathcal{P}}(\widetilde{x})=x$;

(c)Se $X\in\mathcal{X}(\mathcal{P})$, o levantamento de X para $\mathcal{P}\times\mathcal{B}$ é o campo de vetores $\widetilde{X}$ que em cada ponto (p,q) é o levantamento de $X(p)$ para $\mathcal{P}\times\mathcal{B}$. Equivalentemente, o levantamento $\widetilde{X}$ de X para $\mathcal{P}\times\mathcal{B}$ é o único campo $\widetilde{X}\in\mathcal{X}(\mathcal{P}\times\mathcal{B})$ tal que $d\pi_{\mathcal{P}}(\widetilde{X})=X$ e $d\pi_{\mathcal{B}}(\widetilde{X})=0$. Neste caso, $\widetilde{X}$ é chamado de um levantamento horizontal.

O conjunto dos levantamentos horizontais é denotado por $\mathcal{H}(\mathcal{P})$.

Funções, vetores tangentes e campos de vetores em $\mathcal{B}$ são levantamentos para $\mathcal{P}\times\mathcal{B}$ de maneira análoga usando a projeção $\pi_{\mathcal{B}}$. Deste modo, obtemos o conjunto $\mathcal{V}(\mathcal{B})$ dos levantamentos verticais.

Notemos que $\mathcal{H}(\mathcal{P})$ e $\mathcal{V}(\mathcal{B})$ são subespaços vetoriais de $\mathcal{X}(\mathcal{P}\times\mathcal{B})$.
Temos também os seguintes resultados:

(i)Se $\widetilde{X},\widetilde{Y}\in\mathcal{H}(\mathcal{P})$, então $[\widetilde{X},\widetilde{Y}]\in\mathcal{H}(\mathcal{P})$ (o mesmo ocorre em $\mathcal{V}(\mathcal{B})$;

(ii)Se $\widetilde{X}\in\mathcal{H}(\mathcal{P})$ e $\widetilde{\mathcal{V}}\in\mathcal{V}(\mathcal{B})$, então $[\widetilde{X},\widetilde{\mathcal{V}}]=0$.

Para provar (i) e (ii), basta observar que $d\pi_{\mathcal{P}}[\widetilde{X},\widetilde{Y}]=[d\pi_{\mathcal{P}}\widetilde{X},d\pi_{\mathcal{P}}\widetilde{Y}]$ (o mesmo ocorre com $\pi_{\mathcal{B}}$).

Definição 9 *Sejam $(\mathcal{B}, g_{\mathcal{B}})$ e $(\mathcal{F}, g_{\mathcal{F}})$ variedades riemannianas e seja $f \in C^{\infty}(\mathcal{B})$, f positiva. Chama-se **produto warped** de $\mathcal{B}$ e $\mathcal{F}$ com **função warped** f a variedade produto $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{B} \times_f \mathcal{F}$ munida da métrica*

$$g := \pi_{\mathcal{B}}^* + (f \circ \pi_{\mathcal{B}})^2 \pi_{\mathcal{F}}^*(g_{\mathcal{F}}).$$

Explicitamente, se x é tangente a $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ em (p, q), então

$$\langle x, x\rangle = \langle d\pi(x), d\pi(x)\rangle + f^2(p)(d\pi_{\mathcal{F}}(x), d\pi_{\mathcal{F}}(x))$$

Como no caso da variedade produto riemanniana, temos que as folhas $p \in \mathcal{F} = \pi_{\mathcal{B}}^{-1}(p)$ e as fibras $\mathcal{B} \times q = \pi_{\mathcal{F}}^{-1}(q)$ são subvariedades riemannianas de $\overline{\mathcal{M}}$, e a métrica **warped** é caracterizada por:

(i)Para cada $q \in \mathcal{F}$, a aplicação $\pi_{\mathcal{B}}|_{\mathcal{B}\times q}$ é uma isometria sobre $\mathcal{B}$;

(ii)Para cada $p \in \mathcal{B}$, a aplicação $\pi_{\mathcal{F}}|_{p\times\mathcal{F}}$ é uma homotetia positiva sobre $\mathcal{F}$, com fator de homotetia $\dfrac{1}{f(p)}$;

(iii)Para cada $(p, q) \in \overline{\mathcal{M}}$, a fibra $\mathcal{B} \times q$ e a folha $p \times \mathcal{F}$ são ortogonais em (p, q).

Proposição 2.1.1 *Seja o produto warped $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{B} \times_f \mathcal{F}$. Se $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathcal{H}(\mathcal{B})$ e $\widetilde{V}, \widetilde{W} \in \mathcal{V}(\mathcal{F})$, são os levantamentos de X, Y, V e W, respectivamente. Então*

(i)$\overline{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} \in \mathcal{H}(\mathcal{B})$ é o levantamento de $\nabla_X Y$ em $\mathcal{B}$;

(ii)$\overline{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{V} = \overline{\nabla}_{\widetilde{V}}\widetilde{X} = \dfrac{\widetilde{X}(f)}{f}\widetilde{V}$.

Demonstração:
(i) Como $[\widetilde{X}, \widetilde{V}] = [\widetilde{Y}, \widetilde{V}] = 0$, a fórmula de Koszul,

$$2\langle\overline{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}, \widetilde{V}\rangle = \widetilde{X}\langle\widetilde{Y}, \widetilde{V}\rangle + \widetilde{Y}\langle\widetilde{V}, \widetilde{X}\rangle - \widetilde{V}\langle\widetilde{X}, \widetilde{Y}\rangle - \langle\widetilde{X}[\widetilde{Y}, \widetilde{V}]\rangle + \langle\widetilde{Y}[\widetilde{V}, \widetilde{X}]\rangle + \langle\widetilde{V}[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]\rangle,$$

reduz-se a $2\langle\widetilde{\overline{\nabla}_{\widetilde{X}}Y, \widetilde{V}}\rangle = -\widetilde{V}\langle\widetilde{X}, \widetilde{Y}\rangle + \langle\widetilde{V}, [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]\rangle$. Sendo $\widetilde{X}$ e $\widetilde{Y}$ levantamentos de $\mathcal{B}$, tem-se que $\langle\widetilde{X}, \widetilde{Y}\rangle$ é constante nas folhas e, como $\widetilde{V}$ é vertical, obtém-se $\widetilde{V}\langle\widetilde{X}, \widetilde{Y}\rangle = 0$. Mas $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$ é tangente às fibras assim,

$\langle \widetilde{V}, [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]\rangle = 0$. Logo, $\langle \overline{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}, \widetilde{V}\rangle = 0$, para todo $\widetilde{V} \in \mathcal{V}(\mathcal{F})$, isto é, $\overline{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}$ é horizontal. Portanto, como $\pi_{\mathcal{B}}|_{\mathcal{B}\times q}$ é uma isometria sobre $\mathcal{B}$, segue-se que $\overline{\nabla}_{\widetilde{X}\widetilde{Y}} \in \mathcal{H}(\mathcal{B})$ é o levantamento de $\nabla_X Y$ em $\mathcal{B}$.

(ii)Como $[\widetilde{X}, \widetilde{V}] = 0$, temos que $\overline{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{V} = \overline{\nabla}_{\widetilde{V}}\widetilde{X}$ e estes campos de vetores são verticais, pois (por (i)) $\langle \overline{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{V}, \widetilde{Y}\rangle = -\langle \widetilde{V}, \overline{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\rangle = 0$. Assim, todos os termos na fórmula de Koszul para $2\langle \overline{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{V}, \widetilde{W}\rangle$ se anulam, exceto $\widetilde{X}\langle \widetilde{V}, \widetilde{W}\rangle$. Por outro lado, pela definição da métrica warped,

$$\langle \widetilde{V}, \widetilde{W}\rangle(p,q) = f^2(p) g_{\mathcal{F}}(V(q), W(q)),$$

onde identificamos $f := f \circ \pi_{\mathcal{B}}$. Assim, temos $\langle \widetilde{V}, \widetilde{W}\rangle = f^2(g_{\mathcal{F}}(V,W)\circ \pi_{\mathcal{F}})$, onde o termo dentro do parênteses é constante nas fibras, as quais $\widetilde{X}$ é tangente. Logo,

$$\begin{aligned} \widetilde{X}\langle \widetilde{V}, \widetilde{W}\rangle &= \widetilde{X}[f^2(g_{\mathcal{F}}(V,W)\circ \pi_{\mathcal{F}})] = \\ &= 2f\widetilde{X}(f)(g_{\mathcal{F}}(V,W)\circ \pi_{\mathcal{F}}) = \\ &= 2\frac{\widetilde{X}(f)}{f}\langle V, W\rangle. \end{aligned}$$

Portanto, segue-se que $\overline{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{V} = \dfrac{\widetilde{X}(f)}{f}V$. ∎

2.2 Problema de Dirichlet

Definição 10 *:*

(I) Seja M uma variedade Riemanniana compacta (conexa) com bordo. Um número real λ é dito um autovalor de Δ se existir uma função $f \in C^\infty(M)$ não identicamente nula e que satisfaça $\Delta f = \lambda f$. Assim, f é chamada uma autofunção de Δ correspondendo ao autovalor λ.

(II) Seja M uma variedade Riemanniana compacta (conexa) com bordo ∂M (∂M não necessariamente conexa). Denotamos por $\mathbb{M}^0$ o interior de M. Se existir uma função $f \in C^\infty(M)$, não identicamente nula, com $f|_{\partial M}) \equiv 0$ e $\Delta f = \lambda f$ em $\mathbb{M}^0$ para um número real λ, então λ (respectivamente f) é chamado um autovalor (respectivamente autofunção) de Δ com respeito ao problema de Dirichlet. Vamos considerar o problema de autovalores de Dirichlet para um domínio compacto Ω com bordo diferenciável em uma variedade Riemanniana.

$$\begin{cases} \Delta f &= \lambda f, \quad se \quad f \in M \\ f &= 0, \quad se \quad f \in \partial M \end{cases}$$

2.3 Estabilidade

Com o intuito de obter algumas aplicações importantes a partir do resultado central que nos propusemos a demonstrar, necessitamos de alguns resultados básicos sobre estabilidade de domínios. Seja $\Delta : \mathcal{D}(\mathcal{M}) \to \mathcal{D}(\mathcal{M})$ o operador Laplaciano em M, e $q \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$. Considere o operador $\Delta + q : \mathcal{D}(\mathcal{M}) \to \mathcal{D}(\mathcal{M})$, dado por $(\Delta + q)(f) = \Delta f + q \cdot f$. Diremos que $\Delta + q$ é um operador positivo se $q \geq 0$.

Seja $D \subset M$ um domínio, e $\lambda_1(D) \leq \lambda_2(D) \leq \lambda_3(D) \leq \cdots$ os autovalores do operador positivo $\Delta + q$.

Definição 11 *Se $\Delta + q$ é um operador positivo e $\lambda_1(D)$ é o primeiro autovalor de $\Delta + q$, diremos que D é estável se $\lambda_1(D) > 0$.*

Observação 4 *O valor de λ_1 é dado por*

$$\lambda_1(D) = inf\{\int_D (|\nabla h|^2 - qh^2)dv; supp\ h \subset D\ e\ \int_D h^2 dv = 1\}.$$

Teorema 5 *Seja M uma variedade e $D \subset M$ um domínio. Se existe uma função positiva g definida em D, satisfazendo $\Delta g + qg = 0(q \geq 0)$, então $\lambda_1(D) \geq 0$.*

Prova: Seja $g > 0$ em D, satisfazendo $\Delta g + qg = 0$. Defina $P : D \to \mathbb{R}$ por $P(x) = \log(g(x))$, então

$$g\nabla P = \nabla g.$$

Logo, $\langle \nabla g, \nabla P \rangle + g\Delta P = \Delta g$. Deste modo, $g||\nabla P||^2 + g\Delta P = -qg$. Daí,

$$\Delta P = -q - ||\nabla P||^2.$$

Seja h tal que *supp* $h \subset D$ e $\int_D h^2 dv = 1$, então

$$\int_D qh^2 dv + \int_D ||\nabla P||^2 h^2 dv = -\int_D h^2 \Delta P dv.$$

Integrando por partes o segundo membro e usando que *supp* $h \subset D$, obtemos

$$\int_D qh^2 + \int_D ||\nabla P||^2 h^2 dv = 2\int_D h\langle \nabla h, \nabla P\rangle dv.$$

Observe que,

$$2|h| \cdot |\langle \nabla h, \nabla P\rangle| \leq 2|h| \cdot ||\nabla h|| \cdot ||\nabla P|| \leq h^2 ||\nabla P||^2 + ||\nabla h||^2,$$

pois $(|h| \cdot ||\nabla P|| - ||\nabla h||)^2 \geq 0$. Logo,

$$0 \leq \int_D (||\nabla h||^2 - qh^2) dv \Rightarrow \lambda_1(D) \geq 0.$$

Lema 2.3.1 *Se D e D' são domínios em uma variedade M, com $D \subset D'$,então $\lambda_1(D) \geq \lambda_1(D')$. Além disso, se $D' - D \neq \emptyset$, então $\lambda_1(D) > \lambda_1(D')$.*

Teorema: As seguintes relações são equivalentes:

(a) $\lambda_1(U) \geq 0$, para todo domínio com bordo $U \subset \Sigma$.
(b) $\lambda_1(U) > 0$, para todo domínio com bordo $U \subset \Sigma$.
(c) Existe uma função $g > 0$ tal que $Jg - qg = 0$, para qualquer função $q > 0$.

Definição 12 *Seja Σ uma hiperfície com curvatura média H em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ e seja η um campo normal unitário a Σ em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$. O operador estabilidade de Σ é $L = \Delta + ||A||^2 + Ric(\eta)$, onde $Ric(\eta)$ é a curvatura de Ricci da variedade ambiente $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ na direção de η e A é a segunda forma fundamental da imersão. Dizemos que Σ é estável se*

$$-\int_\Sigma uLu \geq 0,$$

para alguma função diferenciável u com suporte compacto em Σ.

2.4 Campos Conformes

Seja $\mathbb{N}$ uma Variedade Riemanniana de dimensão $n+1$.

Definição 13 *Dizemos que um campo de vetores $T \in \mathcal{X}(\mathbb{N})$ é conforme se*

$$\mathcal{L}_T\langle , \rangle = 2\varphi\langle , \rangle,$$

para alguma função $\varphi \in C^\infty(\mathbb{N})$, onde $\mathcal{L}_T$ é a derivada de Lie com respeito a T. Se ϕ for constante, diz-se que T é um campo homotético e se $\phi \equiv 0$, diz-se que T é um campo de Killing.

Pela derivação de tensores, e sabendo que $\mathcal{L}_T(V) = [T, V]$, temos que, para todo $V, W \in \mathcal{L}_T(\mathbb{N})$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_T\langle V, W\rangle &= T\langle V, W\rangle - \langle \mathcal{L}_T(V), W\rangle - \langle V, \mathcal{L}_T(W)\rangle = \\
&= \langle \overline{\nabla}_T V, W\rangle + \langle V, \overline{\nabla}_T W\rangle - \langle \overline{\nabla}_T V - \overline{\nabla}_V T, W\rangle - \langle V, \overline{\nabla}_T W - \overline{\nabla}_W T\rangle = \\
&= \langle \overline{\nabla}_V T, W\rangle + \langle V, \overline{\nabla}_W T\rangle.
\end{aligned}$$

Assim, $T \in \mathcal{X}(\mathbb{N})$ é conforme se, e somente se,

$$\langle \overline{\nabla}_V T, W\rangle + \langle V, \overline{\nabla}_W T\rangle = 2\varphi\langle V, W\rangle, \qquad \forall V, W \in \mathcal{X}(\mathbb{N}),$$

onde $\overline{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita de $(\mathbb{N}, \langle , \rangle_{\mathbb{N}})$.

2.5 Curvas velocidade

Definição 14 *Se γ é uma curva numa variedade riemanniana, a velocidade de γ em qualquer tempo t é o comprimento do vetor velocidade de γ, ou seja, de $|\gamma'(t)|$. Dizemos que γ tem velocidade constante se $\gamma'(t)$ independe de t, e que γ tem velocidade unitária se $|\gamma'(t)| \equiv 1$.*

Lema 2.5.1 *As seguintes condições são equivalentes para uma conexão ∇ numa Variedade Riemanniana:*
$(a)\nabla$ é compatível com a métrica g.
$(b)\nabla g \equiv 0$.
(c)Se V, W são campos ao longo de qualquer curva γ,

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \langle D_t V, W\rangle + \langle V, D_t W\rangle.$$

(d)Se V, W são campos paralelos ao longo de uma curva γ, então $\langle V, W\rangle$ é constante.
(e) Translação Paralela $P_{t_0 t_1} : T_{\gamma(t_0)}M \to T_{\gamma(t_1)}M$ é uma isometria, para cada t_0, t_1.

Lema 2.5.2 *Geodésicas são curvas de velocidade constante.*

Demonstração: Seja γ uma geodésica. Como γ' é paralelo ao longo de γ, seu comprimento $|\gamma'| = \langle \gamma', \gamma'\rangle^{1/2}$ é constante, pelo Lema 2.5.1.

2.6 Função altura

Por uma *função altura* h de uma superfície imersa Σ em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ chamamos a projeção $h : \Sigma \to \mathbb{R}$ no segundo fator, ou seja,

$$\begin{array}{rcccc} h & : & \Sigma & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \langle T, x\rangle. \end{array}$$

Assim, $h(x) = T_1x_1 + ... + T_nx_n$. Logo,

$$\nabla h = \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial h}{\partial x_n}\right) = (T_1, ..., T_n) = T.$$

Observação: Seja F uma função diferenciável definida sobre um aberto W de $\mathbb{R}^3$ e seja $\Sigma \subset W$ uma superfície regular contida em W. Denotemos por f a restrição de F a Σ. Então $f \in C^\infty(\Sigma)$ e seu gradiente é a parte tangente do gradiente de F, ou seja, para cada ponto $p \in \Sigma$, tem-se

$$\nabla f(p) = gradF(p) - \langle gradF(p), \eta(p)\rangle\eta(p),$$

onde $gradF$ denota o gradiente de F.
Desta forma, como o $gradH = T$, temos que

$$\nabla h = H - \langle gradH, \eta\rangle\eta.$$

$$\nabla h = T - \langle T, \eta\rangle\eta = T - \Theta\eta = T^\top.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
||\nabla h||^2 &= \langle \nabla h, \nabla h\rangle = \langle T - \langle T,\eta\rangle\eta, T - \langle T,\eta\rangle\eta\rangle = \\
&= \langle T, T - \langle T,\eta\rangle\eta\rangle - \langle\langle T,\eta\rangle\eta, T - \langle T,\eta\rangle\eta\rangle = \\
&= \langle T, T\rangle - \langle T, \langle T,\eta\rangle\eta\rangle - \langle\langle T,\eta\rangle\eta, T\rangle + \langle\langle T,\eta\rangle\eta, \langle T,\eta\rangle\eta\rangle = \\
&= 1 - \langle T,\eta\rangle\langle T,\eta\rangle - \langle T,\eta\rangle\langle T,\eta\rangle + \langle T,\eta\rangle\langle T,\eta\rangle\langle \eta,\eta\rangle = \\
&= 1 - \langle T,\eta\rangle^2 - \langle T,\eta\rangle^2 + \langle T,\eta\rangle^2 = 1 - \Theta^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$||\nabla h||^2 = 1 - \Theta^2. \tag{2.1}$$

A função altura $h \in C^\infty(\Sigma)$ ao longo de $f : \Sigma \to \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ é definida como

$$h = \pi_{\mathbb{R}} \circ f.$$

Como o gradiente de $\pi_{\mathbb{R}} \in C^\infty(M^2 \times \mathbb{R})$ é $\overline{\nabla}\pi_{\mathbb{R}} = T$, então o gradiente de h é

$$\nabla h = (\overline{\nabla}\pi_{\mathbb{R}})^\top = T - \langle \eta, T\rangle\eta,$$

onde $(\quad)^\top$ denota a componente tangente de um campo ao longo de f e η é um campo normal unitário. Por outro lado, como T é um campo paralelo em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, segue-se que

$$\begin{aligned}
\nabla_X \nabla h &= \nabla_X(T - \langle \eta, T\rangle\eta) = \nabla_X T - \nabla_X(\langle \eta, T\rangle\eta) = \\
&= -(\langle \eta, T\rangle\nabla_X\eta + X\langle \eta, T\rangle\eta) = \\
&= \langle \eta, T\rangle AX - \langle \nabla_X\eta, T\rangle\eta - \langle \eta, \nabla_X T\rangle\eta = \\
&= \langle \eta, T\rangle AX + \langle AX, T\rangle\eta = \\
&= \langle \eta, T\rangle AX + A\langle X, T\rangle\eta = \langle \eta, T\rangle AX = \Theta AX.
\end{aligned}$$

Definição 15 (Laplaciano de uma imersão isométrica) *O Laplaciano de φ induzido pela imersão é definido por*

$$\Delta_\Sigma X := (\Delta X)^\top = 2\overrightarrow{H},$$

onde $\overrightarrow{H}$ é o vetor curvatura média.

Lema 2.6.1 *: Se $\varphi : \Sigma \hookrightarrow \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ é uma imersão e $h : \Sigma \to \mathbb{R}$ é a restrição da projeção $t : \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ou seja, $h = \left\langle \varphi, \dfrac{\partial}{\partial t}\right\rangle$, com $\Sigma = grad(h)$, então*

$$\Delta h = 2H\Theta,$$

onde $\Theta = \langle \eta, \frac{\partial}{\partial t}\rangle$.

Demonstração: Pela Definição acima,

$$\Delta\varphi = 2\overrightarrow{H},$$

onde $\overrightarrow{H}$ é o vetor curvatura média da imersão isométrica X. Visto que

$$\overrightarrow{H} = \lambda\eta,$$

temos que $H := \langle\overrightarrow{H}, \eta\rangle = \langle\lambda\eta, \eta\rangle = \lambda\langle\eta, \eta\rangle = \lambda$. Assim,

$$\Delta\varphi = 2H\eta.$$

Daí, sendo $T = \dfrac{\partial}{\partial t}$ paralelo,

$$\begin{aligned}
\Delta h &= \sum_i e_i(e_i(h)) = \sum_i e_i(e_i\langle\varphi, \frac{\partial}{\partial t}\rangle) = \\
&= \sum_i e_i(\langle\nabla_{e_i}\varphi, \frac{\partial}{\partial t}\rangle) = \sum_i \langle\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\varphi, \frac{\partial}{\partial t}\rangle = \\
&= \langle\sum_i e_i(e_i(\varphi)), \frac{\partial}{\partial t}\rangle = \langle\Delta\varphi, \frac{\partial}{\partial t}\rangle = \\
&= \langle 2H\eta, \frac{\partial}{\partial t}\rangle = 2H\langle\eta, \frac{\partial}{\partial t}\rangle = 2H\Theta.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\Delta h = 2H\Theta. \tag{2.2}$$

■

Capítulo 3

Aplicações em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$

3.1 Laplaciano da função ângulo

A Proposição a seguir é o resultado principal em [9] de Suzana Fornari e Jaime Ripoll.

Proposição 3.1.1 *Seja N uma variedade Riemanniana (n+1)-dimensional, e V um campo de Killing em N. Seja M uma hipersuperfície de N e η um campo de vetores unitário normal a M em N. Defina a aplicação $\Theta(p) = \langle \eta(p), T(p) \rangle, p \in M$. Então*

$$\Delta\Theta = -n\langle T, \nabla H\rangle - (Ric(\eta) + ||A_\eta||^2)\Theta,$$

onde H é a curvatura média de M e ∇H seu gradiente, $||A_\eta||$ a norma da segunda forma fundamental de M e Δ o Laplaciano de M na métrica induzida por N.

A proposição a seguir é uma extensão da proposição 3.1.1.

Proposição 3.1.2 *Seja $\mathbb{N}^{n+1}$ uma variedade Riemanniana munida de um campo conforme T. Para uma hiperfície two-sided Σ^n em $\mathbb{N}^{n+1}$, o Laplaciano de $\Theta \in C^\infty(\Sigma)$ dada por $\Theta = \langle \eta, T \rangle$ é*

$$\Delta\Theta = -n\langle \nabla H, T\rangle - (||A||^2 + Ric_{\mathbb{N}}(\eta))\Theta - n(H\phi + \partial\phi/\partial\eta),$$

onde ∇H é o gradiente da função curvatura média H com respeito ao campo normal unitário η e $||A||$ é a norma da segunda forma fundamental de Σ^n.

Demonstração: Como $T = T^{\top} + \alpha(x)\eta$, então

$$\langle T, \eta\rangle = \langle T^{\top}, \eta\rangle + \langle \alpha(x)\eta, \eta\rangle = \alpha(x)\langle \eta, \eta\rangle.$$

Como $\langle T^{\top}, \eta\rangle = 0$ e $\langle \eta, \eta\rangle = 1$, então $\alpha(x) = \langle T, \eta\rangle = \Theta$. Assim,

$$T = T^{\top} + \Theta\eta,$$

onde $(\ \ )^{\top}$ é a componente tangente de um campo em $T\mathbb{N}$ ao longo de Σ^n. Como T é conforme, para algum $X \in T\Sigma$,

$$\langle \overline{\nabla}_X T, \eta\rangle + \langle \overline{\nabla}_\eta T, X\rangle = 2\phi\langle X, \eta\rangle = 0.$$

Logo,

$$\langle \overline{\nabla}_X T, \eta\rangle = -\langle \overline{\nabla}_\eta T, X\rangle.$$

Assim,

$$X\Theta = X\langle \eta, T\rangle = \langle \overline{\nabla}_X \eta, T\rangle + \langle \overline{\nabla}_X T, \eta\rangle.$$

Desta forma,

$$X\Theta = -\langle AX, T^{\top}\rangle - \langle \overline{\nabla}_\eta T, X\rangle,$$

para algum $X \in T\Sigma$. Segue-se que

$$X\Theta = \langle X, -AT^{\top}\rangle - \langle (\overline{\nabla}_\eta T)^{\top}, X\rangle - \langle (\overline{\nabla}_\eta T)^{\perp}, X\rangle.$$

Como $\langle (\overline{\nabla}_\eta T)^{\perp}, X\rangle = 0$, então

$$X\Theta = \langle -AT^{\top} - (\overline{\nabla}_\eta T)^{\top}, X\rangle.$$

Como

$$X\Theta = \langle \nabla\Theta, X\rangle,$$

então

$$\nabla\Theta = -AT^{\top} - (\overline{\nabla}_\eta T)^{\top}. \tag{3.1}$$

A equação de Codazzi para Σ^n é

$$(\nabla_X A)Y = (\nabla_Y A)X - (R_{\mathbb{N}}(X,Y)\eta)^\top, \tag{3.2}$$

onde $R_{\mathbb{N}}$ é o tensor curvatura média de $\mathbb{N}^{n+1}$. Fazendo $Y = T^\top$ em (3.2), temos

$$(\nabla_X A)T^\top = (\nabla_{T^\top} A)X - (R_{\mathbb{N}}(X,T^\top)\eta)^\top. \tag{3.3}$$

Por definição,

$$(\nabla_X A)T^\top = \nabla_X A(T^\top) - A\nabla_X T^\top. \tag{3.4}$$

$$(\nabla_{T^\top} A)X = \nabla_{T^\top} A(X) - A\nabla_{T^\top} X. \tag{3.5}$$

Assim, substituindo (3.4) e (3.5) em (3.3), temos

$$\nabla_X A(T^\top) - A\nabla_X T^\top = \nabla_{T^\top} A(X) - A\nabla_{T^\top} X - (R_{\mathbb{N}}(X,T^\top)\eta)^\top.$$

$$\nabla_X A(T^\top) = \nabla_{T^\top} A(X) + A\nabla_X T^\top - A\nabla_{T^\top} X - (R_{\mathbb{N}}(X,T^\top)\eta)^\top. \tag{3.6}$$

Tomemos um referencial móvel $\{e_1, ..., e_n\}$ em Σ^n, e chamemos $X = e_i$. Assim, em (3.6),

$$\nabla_{e_i} A(T^\top) = \nabla_{T^\top} A(e_i) + A\nabla_{e_i} T^\top - A\nabla_{T^\top} e_i - (R_{\mathbb{N}}(e_i,T^\top)\eta)^\top.$$

Logo,

$$\langle \nabla_{e_i} A(T^\top), e_i\rangle = \langle \nabla_{T^\top} A(e_i) + A\nabla_{e_i} T^\top - A\nabla_{T^\top} e_i - (R_{\mathbb{N}}(e_i,T^\top)\eta)^\top, e_i\rangle =$$

$$= \langle \nabla_{T^\top} A(e_i), e_i\rangle + \langle A\nabla_{e_i} T^\top, e_i\rangle - \langle A\nabla_{T^\top} e_i, e_i\rangle - \langle (R_{\mathbb{N}}(e_i,T^\top)\eta)^\top, e_i\rangle.$$

Tomando o somatório, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} A(T^\top), e_i\rangle &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{T^\top} A(e_i), e_i\rangle + \sum_{i=1}^n \langle A\nabla_{e_i} T^\top, e_i\rangle \\ &- \sum_{i=1}^n \langle A\nabla_{T^\top} e_i, e_i\rangle - \sum_{i=1}^n \langle (R_{\mathbb{N}}(e_i,T^\top)\eta)^\top, e_i\rangle. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Mas, por definição,

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} A(T^\top), e_i \rangle = divAT^\top. \tag{3.8}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{T^\top} A(e_i), e_i \rangle = tr(\nabla_{T^\top} A). \tag{3.9}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \langle (R_{\mathbb{N}}(e_i, T^\top)\eta)^\top, e_i \rangle = Ric_{\mathbb{N}}(T^\top, \eta). \tag{3.10}$$

Logo, substituindo (3.8), (3.9) e (3.10) em (3.7),

$$\begin{array}{rcl} divAT^\top & = & tr(\nabla_{T^\top} A) + \sum_{i=1}^{n} \langle A\nabla_{e_i} T^\top, e_i \rangle \\ & - & \sum_{i=1}^{n} \langle A\nabla_{T^\top} e_i, e_i \rangle - Ric_{\mathbb{N}}(T^\top, \eta). \end{array} \tag{3.11}$$

Como T é um campo conforme,

$$\langle \overline{\nabla}_{e_i} T, e_i \rangle + \langle \overline{\nabla}_{e_i} T, e_i \rangle = 2\phi \langle e_i, e_i \rangle.$$

Como $\{e_1, ..., e_n\}$ é um referencial móvel de Σ^n, então $\langle e_i, e_i \rangle = 1$. Logo,

$$2\langle \overline{\nabla}_{e_i} T, e_i \rangle = 2\phi \qquad \Rightarrow \qquad \phi = \langle \overline{\nabla}_{e_i} T, e_i \rangle.$$

Além disso,

$$\langle \overline{\nabla}_{e_i} T, e_j \rangle + \langle \overline{\nabla}_{e_j} T, e_i \rangle = 2\phi \langle e_i, e_j \rangle,$$

com $i \neq j$. Mas $\langle e_i, e_j \rangle = 0$. Logo,

$$\langle \overline{\nabla}_{e_i} T, e_j \rangle = -\langle \overline{\nabla}_{e_j} T, e_i \rangle.$$

Escrevendo $(\overline{\nabla}_{e_i} T)^\top = (\overline{\nabla}_{e_i} T) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} e_j$, então $c_{ij} = \langle \overline{\nabla}_{e_i} T, e_j \rangle$. Logo,

$$c_{ij} = \begin{cases} \phi, & \text{se} \quad i = j \\ -c_{ji}, & \text{se} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \langle A(\nabla_{e_i} T^{\top}), e_i \rangle &= \sum_{i=1}^{n} \langle A[(\overline{\nabla}_{e_i} T)^{\top} + \Theta A e_i], e_i \rangle = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle A(\overline{\nabla}_{e_i} T)^{\top}, e_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle A \Theta A e_i, e_i \rangle = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle A(\overline{\nabla}_{e_i} T)^{\top}, e_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle \Theta A^2 e_i, e_i \rangle = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle A(\overline{\nabla}_{e_i} T)^{\top}, e_i \rangle + \Theta ||A||^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \langle A(\nabla_{e_i} T^{\top}), e_i \rangle &= \sum_{i=1}^{n} \langle A(\overline{\nabla}_{e_i} T)^{\top}, e_i \rangle + \Theta ||A||^2 = \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} \langle A e_j, e_i \rangle = \\
&= \sum_{i=j=1}^{n} c_{ii} \langle A e_i, e_i \rangle + \sum_{i<j} c_{ij} \langle A e_j, e_i \rangle + \sum_{i>j} c_{ij} \langle A e_j, e_i \rangle = \\
&= \sum_{i=1}^{n} nH\phi + \sum_{i<j} (-c_{ji}) \langle A e_j, e_i \rangle + \sum_{i>j} (c_{ij}) \langle A e_j, e_i \rangle = \\
&= \sum_{i=1}^{n} nH\phi + \sum_{i<j} A \langle (-c_{ji})(e_j), e_i \rangle + \sum_{i>j} A \langle (c_{ij})(e_j), e_i \rangle = \\
&= nH\phi.
\end{aligned}$$

Diagonalizando, temos $Ae_i = k_i e_i$. Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \langle A \nabla_{T^{\top}} e_i, e_i \rangle &= \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{T^{\top}} e_i, A e_i \rangle = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{T^{\top}} e_i, k_i e_i \rangle = \\
&= k_i \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{T^{\top}} e_i, e_i \rangle = 0.
\end{aligned}$$

pois, como $\langle e_i, e_i \rangle = 1$, então

$$\langle \nabla_{T^\top} e_i, e_i \rangle + \langle e_i, \nabla_{T^\top} e_i \rangle = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \langle \nabla_{T^\top} e_i, e_i \rangle = 0.$$

Assim, em (3.11), temos que

$$divAT^\top = tr(\nabla_{T^\top} A) + nH\phi + \Theta ||A||^2 - Ric_{\mathbb{N}}(T^\top, \eta). \tag{3.12}$$

Como

$$\begin{aligned} tr(\nabla_{T^\top} A) &= \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{T^\top} A) e_i, e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{T^\top} A(e_i) - A\nabla_{T^\top} e_i, e_i \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{T^\top} A(e_i), e_i \rangle - \sum_{i=1}^n \langle A\nabla_{T^\top} e_i, e_i \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{T^\top} A(e_i), e_i \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{T^\top} e_i, Ae_i \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{T^\top} A(e_i), e_i \rangle, \end{aligned}$$

pois $\sum_{i=1}^n \langle \nabla_{T^\top} e_i, Ae_i \rangle = 0$, e como $H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle Ae_i, e_i \rangle$, então

$$\begin{aligned} TH &= \frac{1}{n} T\Big(\sum_{i=1}^n \langle Ae_i, e_i \rangle = \frac{1}{n} \Big(\sum_{i=1}^n T \langle Ae_i, e_i \rangle \Big) = \\ &= \frac{1}{n} \Big(\sum_{i=1}^n \langle \nabla_T A(e_i), e_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle Ae_i, \nabla_T e_i \rangle \Big). \end{aligned}$$

Logo,

$$nTH = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_T A(e_i, e_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle e_i, A\nabla_{T^\top} e_i \rangle.$$

Como $\sum_{i=1}^n \langle e_i, A\nabla_{T^\top} e_i \rangle = 0$ e $TH = \langle \nabla H, T \rangle$, então

$$n\langle \nabla H, T \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_T A(e_i), e_i \rangle =$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{T^\top} A(e_i), e_i \rangle = \\ &= tr(\nabla_{T^\top} A), \end{aligned}$$

ou seja, o traço comuta com a derivada covariante. Assim, em (3.12),

$$divAT^\top = n\langle \nabla H, T \rangle + nH\phi + \Theta||A||^2 - Ric_{\mathbb{N}}(T^\top, \eta). \tag{3.13}$$

Além disso,

$$div((\overline{\nabla}_\eta T)^\top) = div(\overline{\nabla}_\eta T) - div((\overline{\nabla}_\eta T)^\perp).$$

Como

$$div(\overline{\nabla}_\eta T) - div((\overline{\nabla}_\eta T)^\perp) = 0,$$

então

$$div((\overline{\nabla}_\eta T)^\top) = div(\overline{\nabla}_\eta T) = \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{e_i} (\overline{\nabla}_\eta T), e_i \rangle. \tag{3.14}$$

Sabendo que $\phi = \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{e_i} T, e_i \rangle$,

$$\eta(\phi) = \eta \langle \overline{\nabla}_{e_i} T, e_i \rangle = \langle \overline{\nabla}_\eta \nabla_{e_i} T, e_i \rangle + \langle \overline{\nabla}_{e_i} T, \overline{\nabla}_\eta e_i \rangle.$$

Como $\langle \overline{\nabla}_{e_i} T, \overline{\nabla}_\eta e_i \rangle = 0$, então

$$\eta(\phi) = \eta \langle \overline{\nabla}_{e_i} T, e_i \rangle = \langle \overline{\nabla}_\eta \nabla_{e_i} T, e_i \rangle.$$

ou seja,

$$n\eta(\phi) = \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_\eta \nabla_{e_i} T, e_i \rangle. \tag{3.15}$$

Desta forma, como

$$\begin{aligned} Ric_{\mathbb{N}}(T, \eta) &= \sum_{i=1}^{n} \langle R_{\mathbb{N}}(T, e_i)\eta, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle R_{\mathbb{N}}(\eta, e_i)T, e_i \rangle = \\ &= \langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_\eta T - \overline{\nabla}_\eta \overline{\nabla}_{e_i} T + \overline{\nabla}_{[\eta, e_i]} T, e_i \rangle = \\ &= \langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_\eta T - \overline{\nabla}_\eta \overline{\nabla}_{e_i} T, e_i \rangle = \\ &= \langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_\eta T, e_i \rangle - \langle \overline{\nabla}_\eta \overline{\nabla}_{e_i} T, e_i \rangle, \end{aligned}$$

pois $\langle \overline{\nabla}_{[\eta,e_i]}T, e_i\rangle = 0$, segue-se de (3.14) e (3.15) que

$$\begin{aligned} Ric_{\mathbb{N}}(T,\eta) &= \langle \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{\eta}T, e_i\rangle - \langle \overline{\nabla}_{\eta}\overline{\nabla}_{e_i}T, e_i\rangle = \\ &= div((\overline{\nabla}_{\eta}T)^{\top}) - n\eta(\phi). \end{aligned}$$

ou seja,

$$Ric_{\mathbb{N}}(T,\eta) = div((\overline{\nabla}_{\eta}T)^{\top}) - n\partial\phi/\partial\eta. \tag{3.16}$$

Assim, de (3.1), (3.12) e (3.16),

$$\begin{aligned} \Delta\Theta &= div(\nabla\Theta) = div(-AT^{\top} - (\overline{\nabla}_{\eta}T)^{\top}) = div(-AT^{\top}) - div((\overline{\nabla}_{\eta}T)^{\top}) = \\ &= -div(AT^{\top}) - div((\overline{\nabla}_{\eta}T)^{\top}) = \\ &= -n\langle \nabla H, T\rangle - nH\phi - \Theta||A||^2 + Ric_{\mathbb{N}}(T^{\top},\eta) - n\partial\phi/\partial\eta - Ric_{\mathbb{N}}(T,\eta). \end{aligned}$$

Como $T = T^{\top} + \Theta\eta$, então

$$\begin{aligned} Ric_{\mathbb{N}}(T,\eta) &= Ric_{\mathbb{N}}(T^{\top},\eta) + Ric_{\mathbb{N}}(\Theta\eta,\eta) = \\ &= Ric_{\mathbb{N}}(T^{\top},\eta) + \Theta Ric_{\mathbb{N}}(\eta,\eta) = \\ &= Ric_{\mathbb{N}}(T^{\top},\eta) + \Theta Ric_{\mathbb{N}}(\eta). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Delta\Theta &= -n\langle \nabla H, T\rangle - nH\phi - \Theta||A||^2 + Ric_{\mathbb{N}}(T^{\top},\eta) - n\partial\phi/\partial\eta \\ &- Ric_{\mathbb{N}}(T^{\top},\eta) + \Theta Ric_{\mathbb{N}}(\eta). \end{aligned}$$

Assim,

$$\Delta\Theta = -n\langle \nabla H, T\rangle - nH\phi - \Theta||A||^2 - n\partial\phi/\partial\eta - \Theta Ric_{\mathbb{N}}(\eta).$$

$$\Delta\Theta = -n\langle \nabla H, T\rangle - (||A||^2 + Ric_{\mathbb{N}}(\eta))\Theta - n(H\phi + \partial\phi/\partial\eta), \tag{3.17}$$

como queríamos demonstrar.

3.2 Resultados tipo Bernstein

Seja $\mathbb{N}^3$ uma Variedade Riemanniana (talvez não completa) munida de um campo homotético T. Então $\Sigma = \Sigma^2$ é escolhido como sendo uma superfície mínima *two-sided* em $\mathbb{N}^3$, ou seja, existe um campo normal unitário η definido globalmente e, assim, a função $\Theta \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ dada por

$$\Theta(p) = \langle \eta(p), T(p) \rangle$$

é também definida globalmente. Assim Σ é orientável.
O seguinte Teorema é o resultado principal do nosso trabalho.

Teorema 6 *Seja Σ uma superfície mínima completa* two-sided *em $\mathbb{N}^3$ tal que a função Θ não muda de sinal, onde T é um campo conforme. Então* ***ou*** *Σ é invariante por um subgrupo a 1-parâmetro de homotetias geradas por T* ***ou*** *Σ é estável. No caso de Σ ser estável, temos:*
a)Se $Ric_{\mathbb{N}} \geq 0$, então Σ é totalmente geodésica.
b)Se $K_{\mathbb{N}} \geq 0$, então Θ é constante e $Ric_{\mathbb{N}}(\eta) = 0$ em todo ponto.

Demonstração: Como Θ não muda de sinal, então mudemos a orientação de η de tal forma que $\Theta \geq 0$. Temos que Θ é um campo de Jacobi, pois o operador de Jacobi (operador estabilidade) $J = \Delta + ||A||^2 + Ric_{\mathbb{N}}$ satisfaz

$$J\Theta = \Delta\Theta + (||A||^2 + Ric_{\mathbb{N}}(\eta))\Theta = 0$$

pela Proposição (3.1.2), pois, como Σ é mínima, então $H \equiv 0$, e como T é um campo conforme, então $\partial\phi/\partial\eta = 0$. Suponhamos que $\Theta(p_0) = 0$, para algum $p_0 \in \Sigma$. Como uma vizinhança suficientemente pequena U de p_0 pode ser vista como um gráfico, e como todo gráfico é estável, então o primeiro autovalor para o problema de Dirichlet de J satisfaz $\lambda_1(J, \overline{U}) > 0$. Pelo teorema provado por Fischer-Colbrie-Schoen em [8], existe uma solução positiva g de $Jg = 0$ em U. Como $\Theta \geq 0$ e $g > 0$, então se definirmos $\dfrac{\Theta}{g} = \alpha$, então $\alpha \geq 0$. Além disso, temos que

$$\begin{aligned} div(g^2\nabla\alpha) &= g^2\Delta\alpha + \langle \nabla g^2, \nabla\alpha \rangle = \\ &= g^2\Delta\alpha + \langle 2g\nabla g, \nabla\alpha \rangle = \\ &= g(g\Delta\alpha + 2\langle \nabla g, \nabla\alpha \rangle). \end{aligned}$$

Como $Jg = 0$ e $J\Theta = 0$, ou seja $J(\alpha g) = 0$, então

$$\begin{aligned} 0 = J(\alpha g) &= \Delta(\alpha g) + (||A||^2 + Ric_{\mathbb{N}}(\eta))(\alpha g) = 0 \\ &= \alpha\Delta g + g\Delta\alpha + 2\langle\nabla\alpha, \nabla g\rangle + (||A||^2 + Ric_{\mathbb{N}}(\eta))(\alpha g) = \\ &= \alpha(\Delta g + (||A||^2 + Ric_{\mathbb{N}}(\eta))g) + g\Delta\alpha + 2\langle\nabla\alpha, \nabla g\rangle = \\ &= g\Delta\alpha + 2\langle\nabla\alpha, \nabla g\rangle. \end{aligned}$$

Logo, $div(g^2\nabla\alpha) = 0$. Assim, como essa equação é de forma divergente, e como todos os autovalores são iguais a $g^2 > 0$, aplicando o princípio do máximo para operadores em forma divergente [Proposição 4.2.2, Apêndice, seção 4.2], temos que α é constante em uma vizinhança de cada mínimo local. Sendo $\alpha \geq 0$ em Σ, então α possui mínimo local que U, que é $\alpha = 0$, já que estamos supondo que $\Theta(p_0) = 0$, ou seja, $\alpha g = 0$. Como $g > 0$, então $\alpha(p_0) = 0$. Pelo Princípio do Máximo, α é constante em U, ou seja, $\alpha = 0$ em U. Conseqüentemente, como $\Theta = \alpha g$, então $\Theta = 0$ em U. Por outro lado, se $\alpha > 0$ em p_0, então, pelo Princípio do Máximo, $\alpha > 0$(constante) em U. Conseqüentemente, como $\Theta = \alpha g$, então $\Theta > 0$ em U. Como $p_0 \in \Sigma$ é arbitrário, então $\Theta = 0$ ou $\Theta > 0$ em Σ.

Se $\Theta = 0$ em Σ, ou seja, $\langle\eta, T\rangle = 0$, então T é tangente à Σ. Como T é um campo homotético, então Σ é invariante por um subgrupo a 1-parâmetro de homotetias geradas por T.

Se $\Theta > 0$ em Σ, então, pelo Teorema 5, Σ é estável. Uma função arbitrária ψ com suporte compacto em Σ pode ser escrita como $\psi = \phi\Theta$, onde ϕ possui suporte compacto. Como $J\Theta = 0$, então

$$\begin{aligned} J\psi = J(\phi\Theta) &= \Delta(\phi\Theta) + (||A||^2 + Ric_{\mathbb{N}}(\eta))(\phi\Theta) = \\ &= \phi\Delta\Theta + \Theta\Delta\phi + 2\langle\nabla\phi, \nabla\Theta\rangle + (||A||^2 + Ric_{\mathbb{N}}(\eta))(\phi\Theta) = \\ &= \phi(\Delta\Theta + (||A||^2 + Ric_{\mathbb{N}}(\eta))) + \Theta\Delta\phi + 2\langle\nabla\phi, \nabla\Theta\rangle = \\ &= \Theta\Delta\phi + 2\langle\nabla\phi, \nabla\Theta\rangle. \end{aligned}$$

Assim, teremos que

$$\begin{aligned} \psi J\psi &= \psi\Theta\Delta\phi + 2\psi\langle\nabla\phi, \nabla\Theta\rangle = \\ &= \phi\Theta^2\Delta\phi + 2\phi\Theta\langle\nabla\phi, \nabla\Theta\rangle = \\ &= \Theta^2\phi\Delta\phi + \Theta\langle 2\phi\nabla\phi, \nabla\Theta\rangle = \\ &= \Theta^2\phi\Delta\phi + \langle 2\phi\nabla\phi, \Theta\nabla\Theta\rangle = \\ &= \Theta^2\phi\Delta\phi + \frac{1}{2}\langle 2\phi\nabla\phi, 2\Theta\nabla\Theta\rangle = \end{aligned}$$

$$= \Theta^2\phi\Delta\phi + \frac{1}{2}\langle\nabla\phi^2, \nabla\Theta^2\rangle.$$

Como

$$\begin{aligned} div(\Theta^2\phi\nabla\phi) &= \Theta^2\phi\nabla\phi + \langle\nabla(\Theta^2\phi), \nabla\phi\rangle = \\ &= \Theta^2\phi\Delta\phi + \langle\Theta^2\nabla\phi, \nabla\phi\rangle + \langle\phi\Theta^2, \nabla\phi\rangle = \\ &= \Theta^2\phi\Delta\phi + \langle\nabla\Theta^2, \phi\nabla\phi\rangle, \end{aligned}$$

então $\psi J\psi = div(\Theta^2\phi\nabla\phi) - \Theta^2||\nabla\phi||^2$. Assim,

$$-\int_\Sigma \psi J\psi dA_\Sigma = \int_\Sigma \Theta^2||\nabla\phi||^2 dA_\Sigma - \int_\Sigma div(\Theta^2\phi\nabla\phi).$$

Mas pelo teorema da divergência, $\int_\Sigma div(\Theta^2\phi\nabla\phi) = 0$. Logo,

$$-\int_\Sigma \psi J\psi dA_\Sigma = \int_\Sigma \Theta^2||\nabla\phi||^2 dA_\Sigma \geq 0,$$

e assim, pela definição 11, Σ é estável.
Se a superfície é estável e se $Ric_{\mathbb{N}} \geq 0$, então, por [24], Σ é totalmente geodésica. Além disso, se $K_{\mathbb{N}} \geq 0$, então Σ é totalmente geodésica e, pela equação de Gauss, temos que

$$K_{\mathbb{N}} = K_\Sigma + \det A,$$

e como A é identicamente nula, então Σ possui curvatura Gaussiana não-negativa. Em [11], Huber mostrou que uma superfície completa de curvatura Gaussiana não-negativa é parabólica, ou seja, qualquer função superharmônica não-negativa em Σ é constante. Assim, como $\Theta \geq 0$, $||A||^2 + Ric_{\mathbb{N}}(\eta) \geq 0$ e $\Delta\Theta = -(||A||^2 + Ric_{\mathbb{N}}(\eta))\Theta$, então $\Delta\Theta \leq 0$, ou seja, Θ é uma função não-negativa e superharmônica em Σ, logo Θ é constante. Assim, temos que $\Delta\Theta = 0$. Além disso, como Σ é totalmente geodésica, então $||A||^2 \equiv 0$. Logo, de

$$J\Theta = \Delta\Theta + (||A||^2 + Ric_{\mathbb{N}})\Theta = 0,$$

então $Ric_{\mathbb{N}}(\eta)\Theta = 0$. Como $\Theta > 0$, então $Ric_{\mathbb{N}}(\eta) \equiv 0$, como queríamos demonstrar.

Proposição 3.2.1 *Seja Σ uma superfície mínima completa* two-sided *imersa em $\mathbb{M}^2 \times_\varrho \mathbb{R}$, ou seja, o produto $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ munido da métrica*

$$\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{N}} = \pi_{\mathbb{M}}^*(\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{M}}) + \varrho^2 \pi_{\mathbb{R}}^*(dt^2),$$

onde $\varrho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$. Se a função Θ não muda de sinal e se $K_{\mathbb{M}} \geq 0$, então Σ é totalmente geodésica.

Demonstração: Com efeito, como $T = \dfrac{\partial}{\partial t}$ é um campo de Killing em $\mathbb{N}^3$, e como

$$K_{\mathbb{M}}(p_0)(1 - \Theta^2) = Ric_{\mathbb{N}}(\eta(p_0)),$$

onde $\Theta \in [0, 1]$, então, como $K_{\mathbb{M}} \geq 0$, logo $Ric_{\mathbb{N}}(\eta(p_0)) \geq 0$. Logo, pelo teorema 6, temos que Σ é totalmente geodésica.

Observação 5 *Qualquer função positiva $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ definida em um domínio $\Omega \in \mathbb{M}^2$ determina um gráfico radial $G(u)$ sobre Ω em $\mathbb{R}_+ \times_t \mathbb{M}^2$ dado por $p \in \Omega \mapsto (u(p), p)$. A variedade produto warped $\mathbb{N}^3 = \mathbb{I} \times_t \mathbb{M}^2$, onde $\mathbb{I}$ é um intervalo aberto em $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ é munida da métrica riemanniana*

$$\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{N}} = \pi_{\mathbb{I}}^*(dt^2) + t^2 \pi_{\mathbb{M}}^*(\langle\ \ \rangle_{\mathbb{M}}),$$

onde $\pi_{\mathbb{I}}$ e $\pi_{\mathbb{M}}$ denotam a projeção no primeiro e no segundo fator, respectivamente. Sendo assim, $T = f\dfrac{\partial}{\partial t}$ é um campo conforme de $\mathbb{N}$. Com efeito, denotando $\partial_t = \partial/\partial_t$. Como $\langle \partial_t, \partial_t \rangle = 1$, então $0 = \partial_t \langle \partial_t, \partial_t \rangle = 2\langle \overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_t, \partial_t \rangle$. Assim, pela proposição 2.1.1 (i), temos que $\nabla_{\partial_t} \partial_t = 0$. Logo, para todo $V \in T(\mathbb{N})$, temos que $V = v_0 \partial_t + V_F$, onde $v_0 \in C^\infty(M)$ e $V_{\mathbb{M}} \in \mathcal{V}(\mathbb{M})$, e usando a proposição 2.1.1 (ii),

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_V T &= \overline{\nabla}_{v_0 \partial_t + V_F}(f\frac{\partial}{\partial t}) = \\ &= v_0 f \overline{\nabla}_{\partial_t} \partial_t + v_0 \partial_t(f) \partial_t + \frac{f \partial_t(f)}{f} V_F = \\ &= f'(v_0 \partial_t + V_F) = f'V. \end{aligned}$$

Portanto, para quaisquer $V, W \in T(\mathbb{N})$,

$$\langle \overline{\nabla}_V T, W \rangle + \langle V, \overline{\nabla}_V T \rangle = \langle f'V, W \rangle + \langle V, f'W \rangle = 2f' \langle V, W \rangle.$$

Assim, em particular, se $f(t) = t$, então $t\dfrac{\partial}{\partial t}$ é um campo homotético, e se $f \equiv 1$, então $\dfrac{\partial}{\partial t}$ é um campo de killing.

Proposição 3.2.2 *Seja* Σ *um gráfico mínimo radial completo em* $\mathbb{N}^3 = \mathbb{R}_+ \times_t \mathbb{M}^2$ *sobre um domínio* $\Omega \subset \mathbb{M}^2$*. Se* $K_{\mathbb{M}} \geq 1$*, então* Σ *é totalmente geodésica.*

Demonstração: Como $T = t\dfrac{\partial}{\partial t}$ é um campo homotético em $\mathbb{N}^3$, e como

$$K_{\mathbb{M}}(p_0)(1 - \Theta^2) = Ric_{\mathbb{N}}(\eta(p_0)),$$

onde $\Theta \in [0, 1]$, então, como $K_{\mathbb{M}} \geq 1$, logo

$$Ric_{\mathbb{N}}(\eta(p_0)) = (1 - \Theta^2)K_{\mathbb{M}} \geq (1 - \Theta^2) \geq 0.$$

Logo, pelo teorema 6, Σ é totalmente geodésica.

Definição 16 *Um cilindro em* $\mathbb{N}^3 = \mathbb{M}^2 \times_\varrho \mathbb{R}$ *sobre uma curva de velocidade unitária* $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{M}^2$ *é a superfície em* $\mathbb{M}^2 \times_\varrho \mathbb{R}$ *obtida pela ação em* γ *de um subgrupo a 1-parâmetro de translações verticais. Um cilindro é mínimo se* $k_g = \varrho\partial\varrho/\partial\nu$*, onde* $k_g = \langle \nabla_{\gamma'}\gamma, \nu\rangle$ *é a curvatura geodésica de* γ *e* ν *é campo normal unitário a* γ *em* $\mathbb{M}^2$*. Em particular, um cilindro é totalmente geodésico se, e somente se,* γ *é uma geodésica, e* $\partial\varrho/\partial\nu = 0$*.*

Corolário 3.2.1 *Seja* Σ *uma superfície mínima completa* two-sided *em* $\mathbb{N}^3 = \mathbb{M}^2 \times_\varrho \mathbb{R}$*, onde* $\mathbb{M}^2$ *não é necessariamente completa. Assuma que* $K_{\mathbb{N}} \geq 0$ *e que* Θ *não muda de sinal. Então, ou*
i)Σ *é um cilindro mínimo, ou*
ii)Σ *é totalmente geodésica e* ϱ *é constante. Além disso, se* $K_{\mathbb{M}}(q) > 0$ *em um ponto* $q \in \pi_{\mathbb{M}}(\Sigma)$*, então* Σ *é um slice sobre* $\mathbb{M}^2$ *completa.*

Demonstração: Pela proposição 2.1.1, sabemos que a derivada covariante em $\mathbb{N}^3$ satisfaz

$$\overline{\nabla}_Z T = \varrho^{-1}\langle \nabla\varrho, Z\rangle T \qquad \overline{\nabla}_T T = -\varrho\overline{\nabla}\varrho, \tag{3.18}$$

onde $Z \in T\mathbb{M}$ e $\overline{\nabla}\varrho$ denota o gradiente de ϱ como uma função em $\mathbb{N}^3$. Desta forma, $\overline{\nabla}\varrho$ é o levantamento do gradiente de ϱ em $\mathbb{M}^2$.
$T = \dfrac{\partial}{\partial t}$ é um campo de Killing em $\mathbb{N}$, ou seja, um campo homotético T, com $\phi \equiv 0$. Além disso, temos $\Sigma \subset \mathbb{N}^3$ e Θ não muda de sinal. Logo estamos nas hipóteses do Teorema 6. Assim, aplicando o Teorema 6, ou Σ é invariante por um subgrupo a 1-parâmetro de translações verticais ou Σ é estável, ou

seja, ou Σ é um cilindro mínimo (pois Σ é mínima, por hipótese) ou Σ é estável. No último caso,
(i) Se $Ric_{\mathbb{N}} \geq 0, \Sigma$ é totalmente geodésica.
(ii)Se $K_{\mathbb{N}} \geq 0, \Theta$ é constante e $Ric_{\mathbb{N}}(\eta) = 0$ em todo ponto.
Como, por hipótese, $K_{\mathbb{N}} \geq 0$, então Θ é constante (não nula), e $Ric_{\mathbb{N}}(\eta) = 0$ em todo ponto. Logo, pelo Teorema 6, como $Ric_{\mathbb{N}} \equiv 0$, então Σ é totalmente geodésica.
Vamos mostrar que ϱ é constante. Dado qualquer $Y \in T\Sigma$, sabemos que

$$Y = Z + \alpha T,$$

onde $Z \in T\mathbb{M}$, ou seja,

$$\langle Y, T\rangle = \langle Z, T\rangle + \alpha\langle T, T\rangle.$$

Como $\langle Z, T\rangle = 0$ e $\langle T, T\rangle = \varrho^2(T, T)$, então

$$\alpha\varrho^2(T, T) = \langle Y, T\rangle.$$

Como $(T, T) = 1$, então

$$\alpha = \varrho^{-2}\langle Y, T\rangle.$$

Logo,

$$Y = Z + \varrho^{-2}\langle Y, T\rangle T. \tag{3.19}$$

Desta forma, como $\Theta = \langle \eta, T\rangle$,

$$Y(\Theta) = \langle \overline{\nabla}_Y \eta, T\rangle + \langle \eta, \overline{\nabla}_Y T\rangle.$$

Como η é normal a Σ e Y é tangente a Σ, então $\langle \overline{\nabla}_Y \eta, T\rangle = 0$. Logo,

$$Y(\Theta) = \langle \eta, \overline{\nabla}_Y T\rangle.$$

Por (3.18) e (3.19), temos

$$\begin{aligned} Y(\Theta) &= \langle \eta, \overline{\nabla}_{Z+\varrho^{-2}\langle Y,T\rangle T} T\rangle = \\ &= \langle \eta, \overline{\nabla}_Z T\rangle + \langle \eta, \overline{\nabla}_{\varrho^{-2}\langle Y,T\rangle T} T\rangle, \end{aligned}$$

e como $\langle \eta, \overline{\nabla}_{\varrho^{-2}\langle Y,T\rangle T} T\rangle = \varrho^{-2}\langle Y, T\rangle\langle \eta, \overline{\nabla}_T T\rangle$, então

$$Y(\Theta) = \langle \eta, \overline{\nabla}_Z T\rangle + \varrho^{-2}\langle Y, T\rangle\langle \eta, \overline{\nabla}_T T\rangle.$$

Já que $\overline{\nabla}_Z T = \varrho^{-1}\langle \nabla\varrho, Z\rangle T$ e $\overline{\nabla}_T T = -\varrho\overline{\nabla}\varrho$, então

$$Y(\Theta) = \langle \eta, \varrho^{-1}\langle \nabla\varrho, Z\rangle T\rangle + \varrho^{-2}\langle Y, T\rangle\langle \eta, -\varrho\overline{\nabla}\varrho\rangle.$$

Assim,

$$\begin{aligned} Y(\Theta) &= \varrho^{-1}\langle \nabla\varrho, Z\rangle\langle \eta, T\rangle - \varrho^{-1}\langle Y, T\rangle\langle \eta, \overline{\nabla}\varrho\rangle = \\ &= \varrho^{-1}(\Theta\langle \nabla\varrho, Z\rangle - \langle Y, T\rangle\langle \eta, \overline{\nabla}\varrho\rangle). \end{aligned}$$

Como $\pi_{\mathbb{M}}$ é uma isometria, $\langle \nabla\varrho, Z\rangle = \langle \overline{\nabla}\varrho, Y\rangle$. Assim,

$$\begin{aligned} Y(\Theta) &= \varrho^{-1}(\Theta\langle \overline{\nabla}\varrho, Y\rangle - \langle Y, T\rangle\langle \eta, \overline{\nabla}\varrho\rangle) = \\ &= \langle \varrho^{-1}(\Theta\overline{\nabla}\varrho - \langle \overline{\nabla}\varrho, \eta\rangle T), Y\rangle. \end{aligned}$$

Assim,

$$\nabla\Theta = \varrho^{-1}(\Theta\overline{\nabla}\varrho - \langle \overline{\nabla}\varrho, \eta\rangle T).$$

Logo,

$$\begin{aligned} ||\nabla\Theta||^2 &= \langle \nabla\Theta, \nabla\Theta\rangle = \langle \varrho^{-1}(\Theta\overline{\nabla}\varrho - \langle \overline{\nabla}\varrho, \eta\rangle T), \varrho^{-1}(\Theta\overline{\nabla}\varrho - \langle \overline{\nabla}\varrho, \eta\rangle T)\rangle = \\ &= \langle \varrho^{-1}\Theta\overline{\nabla}\varrho, \varrho^{-1}\Theta\overline{\nabla}\varrho - \varrho^{-1}\langle \overline{\nabla}\varrho, \eta\rangle T\rangle - \\ &- \langle \varrho^{-1}\langle \overline{\nabla}\varrho, \eta\rangle T, \varrho^{-1}\Theta\overline{\nabla}\varrho - \varrho^{-1}\langle \overline{\nabla}\varrho, \eta\rangle T\rangle = \\ &= \langle \varrho^{-1}\Theta\overline{\nabla}\varrho, \varrho^{-1}\Theta\overline{\nabla}\varrho\rangle - \langle \varrho^{-1}\Theta\overline{\nabla}\varrho, \varrho^{-1}\langle \overline{\nabla}\varrho, \eta\rangle T\rangle - \\ &- \langle \varrho^{-1}\langle \overline{\nabla}\varrho, \eta\rangle T, \varrho^{-1}\Theta\overline{\nabla}\varrho\rangle + \langle \varrho^{-1}\langle \overline{\nabla}\varrho, \eta\rangle T, \varrho^{-1}\langle \overline{\nabla}\varrho, \eta\rangle T\rangle = \\ &= \varrho^{-2}\Theta^2||\overline{\nabla}\varrho||^2 - \varrho^{-2}\Theta\langle \overline{\nabla}\varrho, \eta\rangle\langle \overline{\nabla}\varrho, T\rangle - \\ &- \varrho^{-2}\Theta\langle \overline{\nabla}\varrho, \eta\rangle\langle T, \overline{\nabla}\varrho\rangle + \varrho^{-2}\langle \overline{\nabla}\varrho, \eta\rangle^2\varrho^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} ||\nabla\Theta||^2 &= \varrho^{-2}(\Theta^2||\overline{\nabla}\varrho||^2 - \Theta\langle \overline{\nabla}\varrho, \eta\rangle\langle \overline{\nabla}\varrho, T\rangle - \\ &- \Theta\langle \overline{\nabla}\varrho, \eta\rangle\langle T, \overline{\nabla}\varrho\rangle + \langle \overline{\nabla}\varrho, \eta\rangle^2\varrho^2). \end{aligned}$$

Como $\langle \overline{\nabla}\varrho, T\rangle = 0$, então

$$||\nabla\Theta||^2 = \varrho^{-2}(\Theta^2||\overline{\nabla}\varrho||^2 + \varrho^2\langle \overline{\nabla}\varrho, \eta\rangle^2).$$

Como Θ é uma constante não nula, então $\nabla\Theta = 0$. Logo $||\nabla\Theta||^2 = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= \varrho^{-2}(\Theta^2||\overline{\nabla}\varrho||^2 + \varrho^2\langle \overline{\nabla}\varrho, \eta\rangle^2) = \\ &= \varrho^{-2}\Theta^2||\overline{\nabla}\varrho||^2 + \langle \overline{\nabla}\varrho, \eta\rangle^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\varrho^{-2}\Theta^2||\overline{\nabla}\varrho||^2 = 0 \qquad\qquad \langle\overline{\nabla}\varrho, \eta\rangle^2 = 0.$$

Já que $\varrho \neq 0$ e $\Theta^2 \neq 0$, então $||\overline{\nabla}\varrho||^2 = 0$, ou seja, $\overline{\nabla}\varrho = 0$, que implica que ϱ é constante, não nulo. Assim, se em algum ponto tivermos $K_{\mathbb{M}}(p_0) > 0$, então $Ric_{\mathbb{N}}(\eta(p_0)) = 0$ é possível somente se $\Theta = 1$, pois

$$K_{\mathbb{M}}(p_0) = \frac{\langle R(\eta, e_i)\eta, e_i\rangle}{\langle e_i, e_i\rangle\langle\eta,\eta\rangle - \langle\eta, e_i\rangle^2},$$

ou seja,

$$K_{\mathbb{M}}(p_0) = \frac{Ric_{\mathbb{N}}(\eta(p_0))}{1-\Theta^2}.$$

$$K_{\mathbb{M}}(p_0)(1-\Theta^2) = Ric_{\mathbb{N}}(\eta(p_0)).$$

Assim, como $Ric_{\mathbb{N}}(\eta) = 0$ e $K_{\mathbb{M}}(p_0) > 0$, então $\Theta = 1$ (pois $\Theta \in [0, 1]$), e como $||\nabla h||^2 = 1 - \Theta^2$, então $\nabla h = 0$. Logo h é constante. Assim, Σ é um slice, como queríamos demonstrar.

Teorema 7 *Seja $\mathbb{M}^2$ uma superfície completa com curvatura Gaussiana $K_{\mathbb{M}} \geq 0$.*

(i) Qualquer gráfico inteiro de curvatura média constante em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ é totalmente geodésica.

(ii) Se, além disso, $K_{\mathbb{M}}(q) > 0$ em algum ponto $q \in \mathbb{M}^2$, então o gráfico é um slice.

Demonstração:

Afirmação: $div_M\left(\dfrac{Du}{\sqrt{1+||Du||^2}}\right) = 2H$, onde Du denota o gradiente de $u \in C^\infty(M)$ e div_M o divergente em M^2.
Com efeito,

$$Du = (u_t, u_s) \Rightarrow ||Du||^2 = u_t^2 + u_s^2,$$

onde u_t, u_s são campos coordenados. Então, chamando $Y(s,t) = \dfrac{Du}{\sqrt{1+||Du||^2}}$, então $Y(s,t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+u_t^2+u_s^2}}(u_t, u_s)$.

Uma parametrização de M^2 é $X(t,s) = (t, s, u(s,t))$. Logo,

$$X_t = (1, 0, u_t) \qquad X_s = (0, 1, u_s).$$

$$X_{tt} = (0, 0, u_{tt}) \quad X_{ss} = (0, 0, u_{ss}) \quad X_{ts} = (0, 0, u_{ts}).$$

Assim,

$$X_t \wedge X_s = (-u_t, -u_s, 1) \Rightarrow N = \frac{1}{\sqrt{1 + u_t^2 + u_s^2}}(-u_t, -u_s, 1).$$

Desta forma,

$$E = 1 + u_t^2 \qquad F = u_t u_s \qquad G = 1 + u_s^2.$$

$$e = \frac{u_{tt}}{\sqrt{1 + u_t^2 + u_s^2}} \qquad g = \frac{u_{ss}}{\sqrt{1 + u_t^2 + u_s^2}} \qquad f = \frac{u_{ts}}{\sqrt{1 + u_t^2 + u_s^2}}.$$

Como $H = \dfrac{1}{2}\dfrac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$, então

$$H = \frac{1}{2}\frac{\dfrac{u_{tt}(1 + u_s^2) - 2u_{ts}u_t u_s + u_{ss}(1 + u_t^2)}{\sqrt{1 + u_t^2 + u_s^2}}}{(1 + u_t^2 + u_s^2)},$$

ou seja,

$$H = \frac{u_{tt}(1 + u_s^2) - 2u_{ts}u_t u_s + u_{ss}(1 + u_t^2)}{2(1 + u_t^2 + u_s^2)^{3/2}}. \tag{3.20}$$

Por outro lado,

$$div(Y) = \left(\frac{u_t}{\sqrt{1 + u_t^2 + u_t^2}}\right)_t + \left(\frac{u_s}{\sqrt{1 + u_t^2 + u_t^2}}\right)_s.$$

$$div(Y) = \frac{u_{tt} + u_{tt}us^2 - u_t u_s u_{ts}}{(1 + u_t^2 + u_s^2)^{3/2}} + \frac{u_{ss} + u_{tt}ut^2 - u_t u_s u_{ts}}{(1 + u_t^2 + u_s^2)^{3/2}}.$$

$$div(Y) = \frac{u_{tt}(1 + u_s^2) - 2u_{ts}u_t u_s + u_{ss}(1 + u_t^2)}{(1 + u_t^2 + u_s^2)^{3/2}}. \tag{3.21}$$

Logo, de (3.20) e (3.21), temos que $H = \frac{1}{2} div(Y)$, ou seja

$$div_M\Big(\frac{Du}{\sqrt{1+||Du||^2}}\Big) = 2H.$$

Basta mostrarmos que $H = 0$, e usarmos o Corolário 3.
(a) Suponhamos que $\mathbb{M}^2$ seja compacta. Como $Du \in T\mathbb{M}$, logo, pelo teorema da divergência,

$$\int_{\mathbb{M}} 2H dA_{\mathbb{M}} = \int_{\mathbb{M}} div_M\Big(\frac{Du}{\sqrt{1+||Du||^2}}\Big) = 0.$$

Logo, $H = 0$, pois H é constante.
(b) Suponhamos que $\mathbb{M}^2$ não seja compacta. Por definição,

$$h(\mathbb{M}) = \inf_D \frac{comprimento(\partial D)}{área(D)}$$

é chamada constante de Cheeger, onde $D \subset \mathbb{M}^2$ é qualquer domínio compacto com bordo suave. Seja $B_p(r) \subset \mathbb{M}^2$ o disco geodésico de centro p e raio r. Como $K_{\mathbb{M}} \geq 0$, temos, por um resultado de S.Y.Cheng em [6], que o primeiro autovalor do problema de Dirichlet em $B_p(r)$ satisfaz

$$\lambda_1(B_p(r)) \leq \frac{c}{r^2}, \quad 0 < r < +\infty,$$

para uma constante positiva c. Por outro lado, pelo Teorema 11 de Cheeger [ver apêndice], temos que $\lambda_1(B_p(r)) \geq h^2(B_p(r))/4$. Obtemos que

$$h^2(\mathbb{M}) \leq h^2(B_p(r)) \leq 4\lambda(B_p(r)) \leq \frac{4c}{r^2},$$

para qualquer $0 \leq r < +\infty$, e assim $h(\mathbb{M}) = 0$.
Pelo Teorema 1 em [22] temos que, se $\mathbb{M}^2$ satisfizer que $h(\mathbb{M}) = 0$, então qualquer gráfico inteiro em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ com curvatura média constante H é necessariamente mínima. Se $u \in C^\infty(\mathbb{M})$ determina um gráfico inteiro qualquer em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, temos que

$$\langle Du, \nu\rangle \leq |\langle Du, \nu\rangle| \leq ||Du||||\nu|| = \sqrt{||Du||^2} \leq \sqrt{1+||Du||^2}.$$

Integrando

$$div_M\Big(\frac{Du}{\sqrt{1+||Du||^2}}\Big) = 2H,$$

sobre um domínio $D \subset \mathbb{M}^2$, e usando o teorema da divergência, temos que

$$\int_D divX dV = \int_{\partial D} \frac{\langle Du, \nu\rangle}{\sqrt{1+||Du||^2}} ds \leq \int_{\partial D} \frac{\sqrt{1+||Du||^2}}{\sqrt{1+||Du||^2}} ds = \int_{\partial D} ds = comp(\partial D),$$

onde $X = \dfrac{Du}{\sqrt{1+||Du||^2}}$.

$$2\int_D H dA_{\mathbb{M}} = 2\min_D H área(D).$$

Logo,

$$2\min_D H \cdot área(D) \leq comp(\partial D).$$

Analogamente,

$$2\max_D H \cdot área(D) \geq -comp(\partial D).$$

Assim,

$$\inf_{\mathbb{M}} H \leq \frac{1}{2}h(\mathbb{M}) \qquad \sup_{\mathbb{M}} H \geq -\frac{1}{2}h(\mathbb{M}).$$

Mas como $h(\mathbb{M}) = 0$, então

$$\inf_{\mathbb{M}} H \leq 0 \leq \sup_{\mathbb{M}} H,$$

e como H é constante, então

$$H \leq 0 \leq H.$$

Logo H=0. O resultado segue-se do Corolário 3.2.1.

Proposição 3.2.3 *Seja Σ uma superfície mínima completa two-sided em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$. Suponha que Θ não muda de sinal.*

(i) Se $K_{\mathbb{M}} \geq 0$ ao longo de $\pi_{\mathbb{M}}(\Sigma)$, então Σ é totalmente geodésica.

(ii) Se, além disso, $K_{\mathbb{M}}(q) > 0$ em algum ponto $q \in \pi_{\mathbb{M}}(\Sigma)$, então ou Σ é um cilindro sobre uma geodésica completa de $\mathbb{M}^2$, ou $\mathbb{M}^2$ é necessariamente completa e Σ é um slice.

Demonstração: Mudemos a orientação de η de tal forma que $\Theta \geq 0$. Assim, como a norma do traço nos dá que

$$\langle A, A^* \rangle = \langle A, A^\top \rangle = trA^\top A^\top = trAA = trA^2,$$

então

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = A^\top.$$

Assim, $\langle A, A^\top \rangle = \langle A, A \rangle = ||A||^2$. Logo,

$$||A||^2 = trA^2 = -2\lambda_1\lambda_2.$$

Mas como Σ é uma superfície mínima, então

$$0 = H = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \Rightarrow \lambda_1 = -\lambda_2$$

Assim,

$$||A||^2 = trA^2 = -2\lambda_1\lambda_2 = 2{\lambda_1}^2.$$

Desta forma,

$$\frac{1}{2}||A||^2 I = {\lambda_1}^2 I = {\lambda_1}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {\lambda_1}^2 & 0 \\ 0 & {\lambda_1}^2 \end{pmatrix} = A^2,$$

onde I é a aplicação identidade em $T\Sigma$. Assim,

$$A^2 = \frac{1}{2}||A||^2 I.$$

Usando que $\nabla\Theta = -AT^\top - (\overline{\nabla}_\eta T)^\top$, temos que

$$\begin{aligned}
||\nabla\Theta||^2 &= \langle \nabla\Theta, \nabla\Theta \rangle = \langle -AT^\top - (\overline{\nabla}_\eta T)^\top, -AT^\top - (\overline{\nabla}_\eta T)^\top \rangle = \\
&= \langle -AT^\top, -AT^\top - (\overline{\nabla}_\eta T)^\top \rangle - \langle (\overline{\nabla}_\eta T)^\top, -AT^\top - (\overline{\nabla}_\eta T)^\top \rangle = \\
&= \langle -AT^\top, -AT^\top \rangle + \langle -AT^\top, -(\overline{\nabla}_\eta T)^\top \rangle - \langle (\overline{\nabla}_\eta T)^\top, -AT^\top \rangle + \\
&+ \langle (\overline{\nabla}_\eta T)^\top, (\overline{\nabla}_\eta T)^\top \rangle = \\
&= A^2 \langle T^\top, T^\top \rangle + 2\langle AT^\top, (\overline{\nabla}_\eta T)^\top \rangle + ||(\overline{\nabla}_\eta T)^\top||^2 = \\
&= A^2 ||T^\top||^2 + 2\langle A\nabla h, (\overline{\nabla}_\eta T)^\top \rangle + ||(\overline{\nabla}_\eta T)^\top||^2 = \\
&= A^2 ||\nabla h||^2 = \frac{1}{2}||A||^2 (1 - \Theta^2),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$||\nabla\Theta||^2 = A^2||\nabla h||^2 = \frac{1}{2}||A||^2(1-\Theta^2). \tag{3.22}$$

pois $\langle A\nabla h, (\overline{\nabla}_\eta T)^\top\rangle = 0$ e $||(\overline{\nabla}_\eta T)^\top||^2 = 0$, já que T é paralelo a $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$. Assim, como

$$X\log(1+\Theta) = \frac{X\Theta}{1+\Theta} = \frac{\langle\nabla\Theta, X\rangle}{1+\Theta} = \Big\langle \frac{\nabla\Theta}{1+\Theta}, X\Big\rangle,$$

então

$$\nabla\log(1+\Theta) = \frac{\nabla\Theta}{1+\Theta}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\Delta\log(1+\Theta) &= div(\nabla(\log(1+\Theta))) = div\Big(\frac{\nabla\Theta}{1+\Theta}\Big) = div\Big(\frac{1}{1+\Theta}\cdot\nabla\Theta\Big) = \\
&= \frac{1}{1+\Theta}div(\nabla\Theta) + \langle\nabla\Big(\frac{1}{1+\Theta}\Big), \nabla\Theta\rangle = \\
&= \frac{\Delta\Theta}{1+\Theta} + \Big\langle -\frac{\nabla\Theta}{(1+\Theta)^2}, \nabla\Theta\Big\rangle = \frac{\Delta\Theta}{1+\Theta} - \frac{1}{(1+\Theta)^2}||\nabla\Theta||^2
\end{aligned}$$

Desta forma,

$$\Delta\log(1+\Theta) = \frac{\Delta\Theta}{1+\Theta} - \frac{1}{(1+\Theta)^2}||\nabla\Theta||^2 \tag{3.23}$$

Como Σ é mínima, $H = 0$. Logo $\nabla H = 0$. Além disso, $T = \partial/\partial t$ é campo de Killing. Assim, de (3.17),

$$\Delta\Theta = -n\langle\nabla H, T\rangle - (||A||^2 + Ric_{\mathbb{N}}(\eta))\Theta - n(H\phi + \partial\phi/\partial\eta),$$

e como $\phi \equiv 0$,

$$\Delta\Theta = -(||A||^2 + Ric_{\mathbb{N}}(\eta))\Theta \tag{3.24}$$

Assim, usando (3.22) e (3.24) em (3.23), temos

$$\Delta\log(1+\Theta) \;\; = \;\; \frac{-(||A||^2 + Ric_{\mathbb{N}}(\eta))\Theta}{1+\Theta} - \frac{1}{2}||A||^2\frac{(1-\Theta)(1+\Theta)}{(1+\Theta)(1+\Theta)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-(||A||^2 + Ric_{\mathbb{N}}(\eta))\Theta}{1+\Theta} - \frac{1}{2}||A||^2\frac{(1-\Theta)}{(1+\Theta)} = \\
&= \frac{1}{1+\Theta}\Big(- ||A||^2\Theta - Ric_{\mathbb{N}}(\eta)\Theta - \frac{1}{2}||A||^2 + \frac{1}{2}||A||^2\Theta\Big) = \\
&= \frac{1}{1+\Theta}\Big(- \frac{1}{2}||A||^2 - Ric_{\mathbb{N}}(\eta)\Theta - \frac{1}{2}||A||^2\Theta\Big) = \\
&= \frac{1}{1+\Theta}\Big((1+\Theta)\Big[-\frac{1}{2}||A||^2\Big] - Ric_{\mathbb{N}}(\eta)\Theta\Big)
\end{aligned}$$

Como, por definição,

$$K(\eta, e_i) = \frac{(\eta, e_i, \eta, e_i)}{\langle \eta, \eta\rangle\langle e_i, e_i\rangle - \langle \eta, e_i\rangle^2},$$

e como $K(\eta, e_i) = K_{\mathbb{M}}(\pi)$, então

$$K_{\mathbb{M}}(\pi) = \frac{(\eta, e_i, \eta, e_i)}{1 - \langle \eta, e_i\rangle^2} = \frac{(\eta, e_i, \eta, e_i)}{1-\Theta^2} = \frac{Ric_{\mathbb{N}}(\eta)}{1-\Theta^2}.$$

$$Ric_{\mathbb{N}}(\eta) = (1-\Theta^2)K_{\mathbb{M}}(\pi).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\Delta \log(1+\Theta) &= \frac{1}{1+\Theta}\Big((1+\Theta)\Big[-\frac{1}{2}||A||^2\Big] - (1-\Theta^2)K_{\mathbb{M}}(\pi)\Theta\Big) = \\
&= \frac{1}{1+\Theta}\Big((1+\Theta)\Big[-\frac{1}{2}||A||^2\Big] - (1-\Theta)(1+\Theta)K_{\mathbb{M}}(\pi)\Theta\Big) = \\
&= -\frac{1}{2}||A||^2 - \Theta(1-\Theta)K_{\mathbb{M}}(\pi).
\end{aligned}$$

Como Σ é uma hiperfície, dado $p \in \Sigma$ e $\eta \in (T_p\Sigma)^{\perp}$, podemos tomar uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $T_p\Sigma$ tal que $A_\eta = A$ é diagonal, isto é, $A(e_i) = \lambda_i e_i, \;\; i = 1, 2$, onde λ_1, λ_2 são os valores próprios de A. Sendo $\langle A_\eta(x), y\rangle = H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta\rangle$, então, $H_\eta(e_1, e_1) = \lambda_1$ e $H_\eta(e_1, e_2) = 0$. Logo

$$B(e_i, e_j) = \alpha_{ij} \cdot \eta \Rightarrow \alpha_{ij} = \langle B(e_i, e_j), \eta\rangle.$$

Assim, $\alpha_{ij} = \langle A_\eta(e_i), e_j\rangle = \langle \lambda_i e_i, e_j\rangle$. Portanto, $B(e_i, e_j) = \lambda_i \cdot \delta_{ij} \cdot \eta$.

$$\begin{aligned} K_\Sigma(e_1,e_2) - \overline{K}_\Sigma(e_1,e_2) &= \langle B(e_1,e_1), B(e_2,e_2)\rangle - ||B(e_1,e_2)||^2 = \\ &= \langle \lambda_1\eta, \lambda_2\eta\rangle = \\ &= \lambda_1\lambda_2. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$K_\Sigma = \overline{K}_\Sigma + \lambda_1\lambda_2.$$

$$K_\Sigma = \overline{K}_\Sigma + \det A.$$

onde K_Σ é a curvatura Gaussiana de (Σ, ds^2) e $\overline{K}_\Sigma$ é a curvatura seccional do plano tangente à Σ em $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$.
Definamos dois campos ortonormais $X, Y \in \mathbb{M}$, com T, um campo de Killing, normal a X e Y. Assim, X e Y são ortonormais em $T\Sigma$, pois são levados por uma isometria. Ainda em $T\Sigma$, definamos o campo W, ortonormal ao campo X, onde $W = aY + bT$. Logo,

$$\begin{aligned} 1 = \langle W, W\rangle &= \langle aY + bT, aY + bT\rangle = \langle aY, aY + bT\rangle + \langle bT, aY + bT\rangle = \\ &= a^2\langle Y, Y\rangle + 2ab\langle Y, T\rangle + b^2\langle T, T\rangle = \\ &= a^2 + b^2. \end{aligned}$$

Como X é perpendicular à T, então W tem componente na direção de T, isto é, W e T são linearmente dependentes. A projeção de T em Σ, ou seja, $T^\top$, é dada por $T^\top = uX + vW$. Logo,

$$0 = \langle T^\top, X\rangle = u\langle X, X\rangle + v\langle W, X\rangle = u.$$

$$\langle T^\top, W\rangle = \langle T, W\rangle = u\langle X, W\rangle + v\langle W, W\rangle = v.$$

Mas como $W = aY + bT$, então $\langle W, T\rangle = a\langle Y, T\rangle + b\langle T, T\rangle = b$. Como $\langle W, T\rangle = \langle W, T^\top\rangle = v$, então $v = b$.
Assim, como $u = 0$, então $T^\top = vW$. Assim, $||T^\top||^2 = \langle T^\top, T^\top\rangle = v\langle W, T^\top\rangle = v\langle W, T\rangle = v^2 = b^2$. Assim,

$$a^2 = 1 - b^2 = 1 - ||T^\top||^2.$$

Assim, teremos que

$$K(X,W) = \frac{(X, aY + bT, X, aY + bT)}{||X \wedge (aY + bT)||^2}.$$

Como $||X \wedge (aY+bT)||^2 = ||X||^2 \cdot ||(aY+bT)||^2 - \langle X, (aY+bT)\rangle^2 = a^2+b^2 = 1$, então

$$\begin{array}{rcl} K(X,W) & = & (X, aY + bT, X, aY + bT) = \\ & = & (X, aY, X, aY + bT) + (X, bT, X, aY + bT) = \\ & = & (X, aY, X, aY) + (X, aY, X, bT) + \\ & + & (X, bT, X, aY) + (X, bT, X, bT) = \\ & = & (X, aY, X, aY) + (X, aY, X, bT) + \\ & + & (X, aY, X, bT) + (X, bT, X, bT) = \\ & = & (X, aY, X, aY) + 2(X, aY, X, bT) + (X, bT, X, bT) = \\ & = & a^2(X, Y, X, Y) + 2ab(X, Y, X, T) + b^2(X, T, X, T). \end{array}$$

Como $(X, Y, X, T) = 0$ e $(X, T, X, T) = 0$, então

$$K(X,W) = a^2(X, Y, X, Y) = (1 - ||T^\top||^2)(X, Y, X, Y) = (1 - ||T^\top||^2)K_\Sigma(\pi)$$

ou seja,

$$\overline{K}_\Sigma = (1 - ||T^\top||^2)K_\Sigma(\pi).$$

E como $||T^\top||^2 = ||\nabla h||^2 = 1 - \Theta^2$, então

$$\overline{K}_\Sigma = (1 - ||T^\top||^2)K_\Sigma(\pi) = \Theta^2 K_\Sigma(\pi). \tag{3.25}$$

Por outro lado, como $||A||^2 = \langle A, A\rangle = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 2\lambda_1\lambda_2$. Como Σ é mínima, então $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Assim,

$$||A||^2 = -2\lambda_1\lambda_2.$$

$$\lambda_1\lambda_2 = -\frac{1}{2}||A||^2.$$

$$\det A = -\frac{1}{2}||A||^2.$$

Desta forma,

$$K_\Sigma = \Theta^2 K_{\mathbb{M}}(\pi) - \frac{1}{2}||A||^2,$$

e assim teremos que

$$\begin{aligned}\Delta \log(1+\Theta) &= -\frac{1}{2}||A||^2 - \Theta(1-\Theta)K_{\mathbb{M}}(\pi) = \\ &= -\frac{1}{2}||A||^2 - \Theta K_{\mathbb{M}}(\pi) + \Theta^2 K_{\mathbb{M}}(\pi) = \\ &= K_\Sigma - \Theta K_{\mathbb{M}}(\pi).\end{aligned}$$

Agora, em Σ, iremos introduzir a métrica completa $d\widetilde{s}^2 = (1+\Theta)^2 ds^2$. Pela equação (4.1) [Ver Apêndice, seção 4.1], fazendo $u = \log(1+\Theta)$, temos que

$$(1+\Theta)^2 \widetilde{K} = K_\Sigma - \Delta \log(1+\Theta),$$

onde $\widetilde{K}$ é a curvatura Gaussiana de $(\Sigma, d\widetilde{s}^2)$. Assim, temos que

$$\begin{aligned}(1+\Theta)^2 \widetilde{K} &= K_\Sigma - K_\Sigma + \Theta K_{\mathbb{M}}(\pi) = \\ &= \Theta K_{\mathbb{M}}(\pi).\end{aligned}$$

Logo,

$$\widetilde{K} = \frac{\Theta}{(1+\Theta)^2} K_{\mathbb{M}}(\pi). \tag{3.26}$$

Em particular, se $K_{\mathbb{M}} \geq 0$ em $\pi(\Sigma)$, então $\widetilde{K} \geq 0$ em Σ. Entretanto, um resultado clássico devido a Huber em [11] assegura que superfícies completas de curvatura Gaussiana não-negativa têm que ser parabólicas. Como a superharmonicidade é preservada sobre uma mudança de métrica conforme, então $(\Sigma, d\widetilde{s}^2)$ e (Σ, ds^2) são ambas parabólicas.

Como $\Theta \in [0,1]$, pois estamos mudando a orientação de η de tal forma que $\Theta \geq 0$, então $\log(1+\Theta) \geq 0$. Além disso,

$$\Delta \log(1+\Theta) = -\frac{1}{2}||A||^2 - \Theta(1-\Theta)K_{\mathbb{M}}(\pi) \leq 0.$$

Com efeito, como $K_{\mathbb{M}}(\pi) > 0$, se $\Theta = 0$, então

$$\Delta \log 1 = -\frac{1}{2}||A||^2 \leq 0.$$

Se $0 < \Theta < 1$, então $(1 - \Theta) > 0$. Assim,

$$\Delta \log(1 + \Theta) = -\frac{1}{2}||A||^2 - \Theta(1 - \Theta)K_{\mathbb{M}}(\pi) \leq 0,$$

e se $\Theta = 1$, então

$$\Delta \log(1 + \Theta) = -\frac{1}{2}||A||^2 \leq 0.$$

Logo, para $\Theta \in [0, 1]$,

$$\Delta \log(1 + \Theta) = -\frac{1}{2}||A||^2 - \Theta(1 - \Theta)K_{\mathbb{M}}(\pi) \leq 0,$$

ou seja, $\log(1 + \Theta)$ é uma função não-negativa tal que $\Delta \log(1 + \Theta) \leq 0$, ou seja, $\log(1 + \Theta)$ é uma função superharmônica não-negativa. Assim, usando o resultado clássico de Huber em [11], temos que $\log(1+\Theta)$ é constante, logo $\Theta = \Theta_0$ é constante. Assim, $\Delta \log(1 + \Theta_0) = 0$, ou seja

$$0 = \Delta \log(1 + \Theta) = -\frac{1}{2}||A||^2 - \Theta_0(1 - \Theta_0)K_{\mathbb{M}}(\pi).$$

Mas sabemos que

$$0 \geq -\frac{1}{2}||A||^2 = \Theta_0(1 - \Theta_0)K_{\mathbb{M}}(\pi) \geq 0,$$

ou seja,

$$||A|| = 0 \qquad e \qquad \Theta_0(1 - \Theta_0)K_{\mathbb{M}}(\pi) = 0.$$

Sendo $||A|| = 0$, então, por definição, Σ é totalmente geodésica. Além disso, como $\Theta_0(1-\Theta_0)K_{\mathbb{M}}(\pi) = 0$, e como $K_{\mathbb{M}}(\pi) > 0$, então ou $\Theta_0 = 0$ ou $\Theta_0 = 1$. Se $\Theta_0 = 0$, ou seja, se $\langle \eta, T \rangle = 0$, então $T = \partial/\partial t$, que é campo de Killing, é tangente à Σ. Logo Σ é invariante por um subgrupo a 1-parâmetro de translações verticais, ou seja, Σ é um cilindro sobre uma geodésica completa de $\mathbb{M}^2$.
Se $\Theta_0 = 1$, como, por (2.1), $||\nabla h||^2 = 1 - \Theta_0^2$, então teremos que $||\nabla h|| = 0$, ou seja, $\nabla h = 0$. Logo h é constante, ou seja, Σ é um slice sobre $\mathbb{M}^2$ completa, como queríamos demonstrar.

Definição 17 *Uma superfície completa* $\mathbb{M}$ *possui curvatura total finita se a parte negativa de sua curvatura Gaussiana é integrável. Mais precisamente, se* $K_{\mathbb{M}}(q)$ *denota a curvatura Gaussiana em* $\mathbb{M}$ *e sua parte negativa é definida por*

$$K_{\mathbb{M}}^{-}(q) = \max\{-K_{\mathbb{M}}(q), 0\},$$

então $\mathbb{M}$ *possui curvatura total finita se*

$$\int_{\mathbb{M}} K_{\mathbb{M}}^{-} < \infty.$$

Teorema 8 *Seja* $\mathbb{M}^2$ *uma superfície completa tal que*

$$\int_{\mathbb{M}} K_{\mathbb{M}}^{-} dA_{\mathbb{M}} < +\infty, \qquad \textit{onde} \qquad K_{\mathbb{M}}^{-}(q) = \max\{-K_{\mathbb{M}}(q), 0\}.$$

Então qualquer gráfico mínimo em um semi-espaço $\mathbb{M}^2 \times [0, \infty)$ *é um slice.*

Demonstração: Como antes, vamos orientar o gráfico Γ_u de u tal que $\Theta > 0$. Se ds^2 denota a métrica completa em $\mathbb{M}^2$ induzida por Γ_u, então, por (3.26), temos

$$\widetilde{K} = \frac{\Theta}{(1+\Theta)^2} K_{\mathbb{M}},$$

onde $\widetilde{K}$ é a curvatura Gaussiana da métrica conforme completa $d\widetilde{s}^2 = (1+\Theta)^2 ds^2$. Observe que os elementos de área de ds^2 e $d\widetilde{s}^2$ são relacionados por $d\widetilde{A} = (1+\Theta)^2 dA$. Com efeito, como a dimensão de $\mathbb{M}$ é 2, e como $\widetilde{g}_{ij} = (1+\Theta)^2 g_{ij}$, então

$$dA = \sqrt{\det \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}},$$

Assim,

$$dA = \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2},$$

pois $g_{12} = g_{21}$. Desta forma, temos que

$$\begin{aligned} d\widetilde{A} &= \sqrt{\widetilde{g}_{11}\widetilde{g}_{22} - \widetilde{g}_{12}^2} = \sqrt{(1+\Theta)^4 (g_{11} g_{22} - g_{12}^2)} \\ &= (1+\Theta)^2 \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} = (1+\Theta)^2 dA. \end{aligned}$$

Como $\Theta > 0$, temos

$$\widetilde{K}^{-} d\widetilde{A} = \Theta K_{\mathbb{M}}^{-} dA. \tag{3.27}$$

Por outro lado, sendo $grad$ o gradiente em $\mathbb{M}^2 \times [0, \infty)$ e D o gradiente em $\mathbb{M}^2$ e como u é função altura, então $grad \;\; u = T$ e Du é a componente de $gradu$ tangente a $\mathbb{M}^2$, ou seja, $(grad \;\; u)^{\top} = Du$. Assim $T - Du = grad \;\; u - Du$ é normal a $\mathbb{M}^2$, já que retiramos de $gradu$ a componente tangente a $\mathbb{M}^2$. Normalizando, temos que

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{1 + ||Du||^2}}(T - Du),$$

obtemos que

$$\langle \eta, T\rangle = \langle \frac{1}{\sqrt{1 + ||Du||^2}} T, T\rangle - \langle \frac{1}{\sqrt{1 + ||Du||^2}} Du, T\rangle,$$

e como $\langle Du, T\rangle = 0$, temos que

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{1 + ||Du||^2}}.$$

Como $dA = \sqrt{1 + ||Du||^2} dA_{\mathbb{M}}$, então, por (3.27), temos que $\widetilde{K}^{-} d\widetilde{A} = K_{\mathbb{M}}^{-} dA_{\mathbb{M}}$. Conseqüentemente,

$$\int_{\mathbb{M}} \widetilde{K}^{-} d\widetilde{A} < +\infty,$$

ou seja, $\mathbb{M}$ admite uma métrica conforme completa $d\widetilde{s}^2 = (1 + \Theta^2) ds^2$, e $\mathbb{M}$ possui curvatura total finita com a métrica conforme. Logo, pelo teorema 15 em [11], $(\mathbb{M}, d\widetilde{s}^2)$ é parabólica. Conseqüentemente $(\mathbb{M}, ds^2)$ também é parabólica. Por (2.2), temos que

$$\Delta u = 2H\Theta,$$

e como, por hipótese, o gráfico é mínimo, então $H \equiv 0$. Logo $\Delta u = 0$, ou seja, u é harmônica em $(\mathbb{M}, ds^2)$. Assim u é constante, e conseqüentemente Γ_u é um slice.

Proposição 3.2.4 *Seja $\mathbb{M}^2$ uma superfície completa que satisfaz*

$$\int_{\mathbb{M}} K_{\mathbb{M}}^{-} dA_{\mathbb{M}} < +\infty, \qquad \textit{onde} \qquad K_{\mathbb{M}}^{-}(q) = \max\{-K_{\mathbb{M}}(q), 0\}.$$

Então qualquer gráfico inteiro Γ_u contido em $\mathbb{M}^2 \times [a,b], -\infty < a \leq b \leq +\infty$, com curvatura média constante e curvatura Gaussiana limitada inferiormente é um slice.

Demonstração: Façamos com que $\Theta > 0$. No que segue vemos u como uma função ao longo de Γ_u. Como u e a curvatura Gaussiana de Γ_u são ambas limitadas inferiormente, pelo Lema 4.5.1 (Princípio do Máximo de Omori-Yau), existe uma seqüência de pontos $\{q_j\} \in \Gamma_u$ tal que

$$\lim_{j\to\infty} u(q_j) = \inf_{\Gamma} u, \qquad ||\nabla_u(q_j)|| < \frac{1}{j} \qquad \text{e} \qquad \Delta u(q_j) > -\frac{1}{j}.$$

Por (2.1) temos

$$||\nabla u(q_j)||^2 = 1 - \Theta^2(q_j) < \frac{1}{j^2}$$

Como $\Theta \in [0,1]$, então temos que $\lim\limits_{j\to+\infty} \Theta(q_j) = 1$, e por (2.2), temos que

$$\Delta u(q_j) = 2H(q_j)\Theta(q_j) > -\frac{1}{j}.$$

Logo $\lim\limits_{j\to+\infty} H(q_j) \geq 0$. Similarmente, como u também é limitada inferiormente, existe um seqüência de pontos tal que $\lim\limits_{j\to+\infty} H(p_j) \leq 0$. Assim,

$$\inf_{\Gamma} H \leq \lim_{j\to+\infty} H(p_j) \leq 0 \leq \lim_{j\to+\infty} H(q_j) \leq \sup_{\Gamma} H.$$

Em particular, se H for constante, temos que

$$H \leq 0 \leq H,$$

ou seja, $H \equiv 0$. Logo Γ_u é mínima. Assim, pelo Teorema 9 acima, temos que Γ_u é um slice.

Capítulo 4

Apêndice

4.1 Métricas Conformes

Definição 18 *Seja* $(\mathbb{M}^n, g)$*, com* $n \geq 2$*, uma variedade Riemanniana. Se* $\widetilde{g}$ *é uma outra métrica Riemanniana em* M*, dizemos que* $\widetilde{g}$ *é conforme a* g *se existir uma função positiva* $u \in C^\infty(\mathbb{M})$ *tal que* $\widetilde{g} = ug$*.*

Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana bidimensional, $K \in C^\infty(M)$ a curvatura Gaussiana associada à métrica g e $\widetilde{K} \in C^\infty(M)$ uma função dada. É possível encontrar uma nova métrica $\widetilde{g}$ em M, conforme à g (ou seja, $\widetilde{g} = e^{2u}g$, para alguma função $u \in C^\infty(M)$), tal que $\widetilde{K}$ seja a curvatura Gaussiana de M, associada à esta métrica?
A fim de encontrar a equação diferencial que determina u em termos dos dados $K, \widetilde{K}$ e g, usaremos as coordenadas isotérmicas (v, w) em M. Então a equação de Gauss se reduz a

$$K = -\frac{1}{2\sigma}\{(\log\sigma)_{vv} + (\log\sigma)_{ww}\}$$

e, pelo Lema 1.3.1, o Laplaciano da função ϕ torna-se

$$\Delta\phi \equiv \Delta_g\phi = \frac{1}{\sigma}\Big(\frac{\partial^2\phi}{\partial v^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial w^2}\Big).$$

Por outro lado, podemos escrever os elementos de comprimento de arco, relativos as duas métricas, por

$$ds^2 = \sigma(dv^2 + dw^2) \qquad d\widetilde{s}^2 = \widetilde{\sigma}(dv^2 + dw^2).$$

Como as métricas são conformes, obtemos $\widetilde{\sigma} = \sigma e^{2u}$. Reescrevendo a equação de Gauss para $\widetilde{g}$ e usando a igualdade acima, então

$$e^{2u}\widetilde{K} = -\frac{1}{\sigma}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial w^2}\Big) + K$$

Logo,

$$e^{2u}\widetilde{K} = K - \Delta_g u \tag{4.1}$$

4.2 Operadores Elípticos de Segunda Ordem

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, um operador (diferenciável linear) de segunda ordem L em Ω é um operador do tipo

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c,$$

onde $a_{ij}, b_j, c : \Omega \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, com $a_{ij} = a_{ji}$, para todos $1 \leq i, j \leq n$. Para $f \in C^2(\Omega)$, definimos

$$Lf = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + cf.$$

Um operador L como acima é elíptico em $x \in \Omega$ se a matriz $(a_{ij}(x))$ for positiva definida. L é elíptico em Ω se o for em todo $x \in \Omega$. Segue do teorema espectral para operadores lineares auto-adjuntos que L é elíptico em $x \in \Omega$ se, e somente se, os autovalores da matriz (a_{ij}) forem todos positivos.

Proposição 4.2.1 *Se $\mathbb{M}^n$ é uma variedade Riemanniana e Φ é um campo auto-adjunto de operadores sobre $\mathbb{M}$, então o operador $L : C^\infty(\mathbb{M}) \to C^\infty(\mathbb{M})$, dado por*

$$Lf = div(\Phi \nabla f)$$

é um operador diferencial linear de segunda ordem em $\mathbb{M}^n$. Além disso, L é elíptico em $p \in \mathbb{M}$ se, e somente se, $\Phi_p : T_p\mathbb{M} \to T_p(\mathbb{M})$ for positivo definido.

Proposição 4.2.2 *Seja $\mathbb{M}^n$ uma variedade riemanniana conexa, Φ um campo auto-adjunto e positivo definido de operadores lineares em $\mathbb{M}$, e $Lf = div(\Phi \nabla f)$. Se $f \in C^2(\mathbb{M})$ assume um mínimo local em $\mathbb{M}^n$ e é tal que $Lf \leq 0$, então f é constante em uma vizinhança de cada mínimo local.*

ou melhor,

Teorema 9 (Princípio do Máximo) *Seja u uma função real duas vezes diferenciável satisfazendo a inequação diferencial*

$$L[u] = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + hu \leq 0$$

em um domínio $D \subset \mathbb{R}^n$, onde L é elíptico, os coeficientes a_{ij}, b_i, h são uniformemente limitados e $h \leq 0$. Se u atinge um mínimo não negativo c em um ponto interior de D, então $u = c$.

Demonstração: A prova pode ser encontrada em [10].

4.3 A fórmula da co-área

Algumas desigualdades isoperimétricas podem ser provadas lançando-se mão da fórmula da co-área, a exemplo das desigualdades de Faber-Krahn e de Cheeger. O que apresentamos aqui fixa notação para a demonstração do teorema de Cheeger que aparece no capítulo 3.

Passamos então a dar um esboço da demonstração.

Dada uma variedade M^n, seja Ω domínio de fecho compacto em M e seja $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ em Ω e contínua em $\overline{\Omega}$, a anular-se na fronteira de Ω, $\partial\Omega$. A medida em $f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$ do conjunto $\mathbb{R} \backslash R_f$ dos valores críticos de $f|_\Omega$ é nula. Demais, R_f, obviamente a classe dos valores regulares de $f|_\Omega$, forma um subconjunto aberto da reta. Tome, pois, $(a, b) \subseteq R_f$ e $c \in (a, b)$. Considere a aplicação

$$\psi : f^{-1}(c) \times (a, b) \longrightarrow f^{-1}((a, b))$$

tal que

$$(*) \qquad f(\psi(p, t)) = t,$$

sempre que $(q, t) \in f^{-1}(c) \times (a, b)$. De fato, restrinja a $f^{-1}((a, b))$ o campo $\dfrac{df}{\| df \|^2}$ e escreva Φ para o fluxo proveniente dele, com

$$\psi(p, t) = \Phi_{t-\tau}(p).$$

Prova-se que ψ assim definida obedece a $(*)$ e também a

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right| = \frac{1}{\| df \|}.$$

E mais, $\dfrac{\partial\psi}{\partial t}$ é em todo ponto ortogonal à "superfície de nível" $f^{-1}(t)$, $\forall\, t \in (a,b)$. Agora, o elemento de volume dV em Ω escreve-se, sobre $f^{-1}((a,b))$,

$$dV = \frac{1}{\| df \|} dA_{f^{-1}(t)} dt;$$

como de costume, $dA_{f^{-1}(t)}$ é a medida de área, neste caso, em $f^{-1}(t)$. Defina abaixo as funções:

$$\begin{aligned} \Omega(t) &:= \{p \in M : |f(p)| > t\} \\ V(t) &:= Vol\,(\Omega(t)) \\ \Gamma(t) &:= \{p \in M : |f(p)| = t\}. \end{aligned}$$

Bem, para $t \in R_{|f|}$, dA_t representará a $(n-1)$- densidade sobre $\Gamma(t)$ e pomos

$$A(t) := A(\Gamma(t)).$$

Finalmente:

Teorema 10 (Fórmula da co-área) *A função $V = V(t) \in C^\infty(R_{|f|})$ e sua derivada é*

$$V'(t) = -\int_{\Gamma(t)} \frac{dA_t}{\| df \|}.$$

Para todos os $g \in L^1(\Omega)$, vale que

$$\int_\Omega g \| df \| \; dV = \int_0^\infty dt \int_{\Gamma(t)} g dA_t.$$

Em particular, portanto,

$$\int_\Omega \| df \| \; dV = \int_0^\infty A(t) dt.$$

Nota: Observamos que a função Ω é não crescente no seguinte sentido:

$$t' \leq t \;\Rightarrow\; \Omega(t) \leq \Omega(t'),$$

sendo que a segunda relação de ordem é dada pela inclusão no conjunto $\{\Omega(t) : t \in \mathbb{R}\}$. E, evidentemente, também será $V(t)$ não crescente.

4.4 Um teorema de Cheeger

Seja M uma variedade riemanniana não compacta, de dimensão $n = 2$, com fronteira possivelmente não vazia e de fecho possivelmente compacto.

Define-se a constante de Cheeger de M por

$$h(M) = \inf_{\Omega} \frac{comprimento(\partial\Omega)}{área(\Omega)},$$

em que Ω percorre o conjunto das subvariedades abertas, com fronteira suave e de fecho compacto em M.

Teorema 11 (Cheeger) *Para qualquer domínio normal Ω em M, temos*

$$\lambda(\Omega) \geq \frac{h^2(\Omega)}{4}.$$

Prova: Seja u autofunção de $\lambda(\Omega)$, isto é, suponha que

$$\Delta u = \lambda(\Omega)u \quad , \quad u|_{\partial\Omega} \equiv 0.$$

Então,

$$grad\, u^2 = 2u.grad\, u \quad \Rightarrow \lambda(\Omega) = \frac{\parallel grad\, u \parallel^2}{\parallel u \parallel^2} \geq \frac{1}{4}\left\{\frac{\int_\Omega |grad\, u^2| dV}{\int_\Omega u^2 dV}\right\}^2,$$

pela desigualdade de Cauchy-Schwarz.

A fim de estimar o quociente obtido na expressão acima, vamos empregar a fórmula da co-área aplicada a u^2. (Para a fórmula da co-á rea, seção 4.1)

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |grad\, u^2| dV &= \int_0^\infty A(t)dt \geq h(M)\int_0^\infty V(t)dt = \\ &= \left\{tV(t)|_0^\infty - \int_0^\infty tV'(t)dt\right\} h(M).\end{aligned}$$

Porque $\overline{\Omega}$ é compacto em M e $u^2 : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R} \in C^0(\overline{\Omega})$, u^2 atinge um máximo; desse modo, $\exists\, t_0 > 0$ tal que

$$\Omega(t) = \emptyset \quad \forall\, t > t_0.$$

Ora, neste caso,

$$\lim_{t\to\infty} tV(t) = \lim_{t>t_0} tV(t) = \lim_{t>t_0} 0.t = 0.$$

Por outro lado, $V(0) < \infty$. Pela fórmula da co-área, V é contínua em R_{u^2}. Logo, $\lim\limits_{t\to 0} tV(t) = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |grad\, u^2| dV &\geq -h(M)\int_0^\infty tV'(t)dt = \\
&= -h(M)\int_0^\infty t\left[-\int_{\Gamma(t)} |grad\, u^2|^{-1} dA_t\right] dt = \\
&= h(M)\int_0^\infty \left(\int_{\Gamma(t)} t|grad\, u^2| dA_t\right) dt = \\
&= h(M)\int_0^\infty \int_{\Gamma(t)} \underbrace{t}_{=u^2} \underbrace{|grad\, u^2| dA_t\, dt}_{dV} = \int_\Omega u^2 dV,
\end{aligned}$$

por definição de $\Gamma(t)$. Feito isso, chegamos a que

$$\frac{\int_\Omega |grad\, u^2| dV}{\int_\Omega u^2 dV} \geq h(M).$$

Temos o teorema.

4.5 Princípio do Máximo de Omori-Yau

Lema 4.5.1 (Princípio do Máximo de Omori-Yau) *Seja $\mathbb{M}$ uma variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci limitada inferiormente. Se $u \in C^\infty(\mathbb{M})$ é limitada inferiormente, então existe uma seqüência de pontos $\{p_j\} \in \mathbb{M}$ tal que*

$$\lim_{j\to\infty} u(p_j) = \inf_{\mathbb{M}} u, \quad ||\nabla u(p_j)|| < \frac{1}{j} \quad e \quad \Delta u(p_j) > -\frac{1}{j}.$$

Prova: Veja [17].

Referências Bibliográficas

[1] ALÍAS, L.J.; DAJCZER, M.; Ripoll, J. **A Bernstein-type theorem for riemannian manifolds with a Killing field**. preprint.

[2] ALÍAS, L.J; DAJCZER, M. Constant mean curvature hypersurfaces in warped product spaces. To appear in **Proc. Edinb. Math. Soc**.

[3] BLANC-FIALA. Le type d'une surface et sa courbune totale. **Comment. Math. Helv.**, V. 14, p. 230 - 233, 1941.

[4] DO CARMO, M. P. **Geometria Riemanniana**. IMPA, Rio de Janeiro, 299 p., 1988.

[5] CHEEGER, J. A lower bound for the smaller eigenvalue of the Laplacian. **Problems in Analysis**, Princeton Univ. Press, p. 195-199, Princeton. New Jersey, 1970.

[6] CHENG, S.Y. Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications. **Math. Z.**, V. 143, p. 289-297, 1975.

[7] CHERN, S.S. Simple proofs of two theorems in minimal surfaces. **Enseign. Math. II. Sr.**, V. 15, p. 53-61, 1969.

[8] FISCHER-COLBRIE, D.; SCHOEN, R. The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature. **Comm. Pure Appl. Math.**, V. 33, p. 199-211, 1980.

[9] FORNARI, S.; RIPOLL, J. Killing fields, mean curvature, translations maps. **Illinois J. of Math.**, V. 48, p. 1385-1403, 2004 .

[10] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. **Elliptic partial differential equations of second order**. Springer, 517 p., 1998.

[11] HUBER, A. On subharmonic functions and differential geometry in the large. **Comment. Math. Helv.**, V. 32, p. 13-72, 1957.

[12] LEE, J. M.. **Riemannian manifolds: an introduction to curvature**. New York: Springer-Verlag, 224 p., 1997.

[13] LI, P. Curvature and function theory on Riemannian manifolds. **Surveys in differential geometry**, p. 375-432, Surv. Differ. Geom., VII, Int. Press, Somerville, MA, 2000.

[14] MONTIEL, S. Unicity of constant mean curvature hypersurfaces in Riemannian manifolds. **Indiana Univ. Math. J.**, V. 48, p. 711-748, 1999.

[15] NELLI, B.; Rosenberg, H. Minimal surfaces in $\mathbb{H}^2 \times R$. **Bull. Braz. Math. Soc.**, V. 33, p. 263-292, 2002.

[16] NETO, A. C. M. **Tópicos de Análise em Variedades**. UFC, 45 p., 2006.

[17] OMORI, H. Isometric imersions of Riemannian Manifolds. **Comm. Pure and Appl. Math.**, V. 28, p. 201-228, 1975.

[18] O'NEILL, Barrett. **Semi-Riemannian geometry: with applications to relativity**. Orlando: Academic Press, 468 p., 1983.

[19] ROSENBERG, H. Hypersurfaces of constant curvature in space forms. **Bull. Sci. Math.**. V. 117, p. 211-239, 1993.

[20] ROSENBERG, H. Minimal surfaces in $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$. **Illinois J. Math.**. V. 46, p. 1177-1195, 2002.

[21] ROSENBERG, H.; MEEKS, W. Stable minimal surfaces in $\mathbb{M} \times \mathbb{R}$. **J. Differential Geom.**, V. 68,p. 515-534, 2004.

[22] SALAVESSA, I.M.C. Graphs with parallel mean curvature. **Proc. Am. Math. Soc.**, V. 107, p. 449-458, 1989.

[23] SARAIVA, L. E. A. V. **Estimativas inferiores dos auto-valores do laplaciano**. Dissertação de Mestrado em Matemática, UFC, 2003.

[24] SCHOEN, R. Estimates for stable minimal surfaces in three dimensional manifolds. **Annals Math. Studies**, Princeton Univ. Press. Princeton, V. 103, 1983.