ório25

Gleydson Chaves Ricarte

Existência de atrator para um sistema de equações de evolução

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro

Fortaleza
2006

Ricarte, Gleydson Chaves
R376e Existência de atrator para um sistema de equações de evolução
Gleydson Chaves Ricarte - Fortaleza: 2006.
166*f*.
Orientador: Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro.
1 - Análise CDD 515

Esta folha será substituída pela folha de aprovação.

A Shirley, minha linda e maravilhosa esposa.
A meus lindos filhos, Matheus e Gabriel.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador, Professor José Fábio Bezerra Montenegro, à Universidade Federal do Ceará e ao CNPq por terem me propiciado a oportunidade de realizar este trabalho. Agradeço também ao Professor Amauri da Silva Barros e ao Professor Cleon Barros que, junto com o meu orientador, fizeram a revisão desta dissertação e integraram a banca examinadora. As suas inúmeras sugestões moldaram este trabalho, tornando-o acessível a um leitor cujo conhecimento de análise corresponda ao que é adquirido em um curso regular de anaélise, pelo que sou muito grato.

Agradecimentos especiais são dirigidos a:

1. Meu Pai e Minha mãe, por serem bons pai, por sempre ter considerado a educação de seus filhos uma prioridade.

2. Lucas, meu irmão, por ser um bom rapaz. Quem sabe um dia, um grande programador.

3. Shirley, minha esposa, por ter sido sempre a líder da torcida. A paz que você me traz só pode ser comparada à felicidade de estarmos juntos.

4. A família da minha noiva, porque me fizeram sentir parte dela.

5. Os funcionários da secretaria da pós-graduação, especialmente Andréa Costa Dantas, por sua eficiência e prestatividade.

6. Os funcionários da biblioteca, pela sua atenção e pela convivência agradável desde o meu tempo de graduação.

7. Todos aqueles que estiveram presentes no dia da minha defesa, especialmente ao Professor José Fábio Bezerra Montenegro, coordenador da pós-graduação, pelas suas palavras de incentivo.

Finalmente, gostaria de agradecer a todos aqueles que contribuíram para a minha formação matemática: aos meus maravilhosos colegas do curso de matemática, Sibério, Carpegiane, Fabrício, Laires, Paulo César (PC), Felipe, Isaac, Jobson, Jorge Hinojosa, Jânio (Nash), Henrique fernandes, Marcelo rêgo, Marcelo Melo, Marcão, Paulo, Ivy, Darlan, Anselmo, Marcelo (carioca), Yuri e todos que não citei aqui um grande abraço; meus colegas do curso de verão Wallison, Hélio, Sofia;o professor do curso de verão Daniel filho e o Professor Silvano, por terem me incentivado a ingressar no curso de pós-graduação em matemática; todos os meus professores da graduação e do mestrado; e pela sua boa influência, especialmente fora de sala, e pela sua amizade, os professores Abdou Garba e Afonso.

"A Reputação de um matemático reside na quantidade de más demonstrações que ele tenha dado."

A.S. Besicovitch.

Resumo

Neste trabalho, estudaremos o comportamento no infinito do seguinte problema de Cauchy

$$iu_t + u_{xx} - uv + i\alpha u = f(x)\,, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{1}$$

$$v_t + \beta v + \gamma(|u|^2)_x = g(x)\,, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{2}$$

associadas às condições iniciais

$$u(x,0) = u_0(x)\,,\ v(x,0) = v_0(x)\,,\ x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

A técnica usada no trabalho consiste em três etapas:

1. Mostrar a existência, unicidade e dependência contínua dos dados iniciais e associar (4)-(6) uma família de operadores $\{S(t) : t \geq 0\}$ satisfazendo as propriedades de semigrupo da seguinte forma: Para todo $t \geq 0$
$$\begin{aligned} S(t) \quad H &\longrightarrow H \\ u_0 &\longmapsto S(t)u_0 := u(t) \in H, \end{aligned}$$
onde $\xi_0 = (u_0, v_0)$ é o dado inicial e $(u(t), v(t)) \in H$ é a solução de (4)-(6)[1]

2. Existência de um conjunto limitado absorvente em h via *estimativas a priori*, isto é, um conjunto limitado $\mathscr{B} \subset H$ que atrai as órbitas[2] numa razão exponencial.

[1] No nosso caso iremos tomar $H = H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$.

[2] Definimos a órbita ou trajetórias passando por ξ_0 como sendo $\gamma(\xi_0) = \cup_{t\geq 0} S(t)\xi_0 = \{(u(t), v(t)) : t \geq 0\}$.

3. Por fim, existência de um atrator global $\mathscr{A} \subset H$ para o sistema (4)-(6), isto é, $\mathscr{A}$ é um conjunto compacto de H, invariante por $S(t)$ (ou seja $S(t)\mathscr{A} = \mathscr{A}$, para todo $t \geq 0$) e atrai todas as órbitas do sistema quando $t \to \infty$.

   Para obtemos êxito, organizamos o trabalho como segue: No capítulo 2, obtemos estimativas a priori e conjuntos limitados absorventes. No capítulo 3, mostramos a existência, unicidade e dependência contínua dos dados iniciais. No capítulo 4, decompomos o semigrupo da solução em duas partes, uma uniformemente limitado em $H^2(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ e outra decaindo exponencialmente em $H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$. No capítulo 5, mostramos a compacidade assintotica do operador solução e finalmente no capítulo 6, provamos o resultado principal:

   Teorema 0.1 *Assuma que $f \in L^2(\mathbb{R})$, $g \in H^1(\mathbb{R})$. Então o operador solução $S(t)$ de (4)-(5) é um sistema dinâmico contínuo em $X_1 = H^1 \times L^2(\mathbb{R})$ e possui um atrator global $\mathscr{A}$ satisfazendo*

   (a) $\mathscr{A}$ é compacto em $X_1 = H^1 \times L^2(\mathbb{R})$,

   (b) $S(t)\mathscr{A} = \mathscr{A}$, $\forall\, t \geq 0$,

   (c) $\forall\, \mathscr{B} \subset X_1$ limitado,

$$\lim_{t\to\infty} dist_{X_1}(S(t)\mathscr{B}, \mathscr{A}) = 0.$$

Sumário

Notações e convenções

$W^{m,p}(\mathbb{R})$: Denotará o espaço de Sobolev usual com norma $\|.\|_{m,p}$.

$H^m(\mathbb{R})$: O espaço de Sobolev $W^{m,2}(\mathbb{R})$ com norma $\|.\|_p = \|.\|_{0,p}$.

$L^p(\mathbb{R})$: O espaço das funções mensuráveis $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $\int_{\mathbb{R}} |f|^p \, dx$ é finito.

Denotaremos por $\|.\| = \|.\|_2$ a norma do espaço $L^2(\mathbb{R})$.

Para simplificar a notação usaremos no decorrer do texto $L^r_T(L^p_x)$ para $L^r(0,T;L^p(\mathbb{R}_x))$, $L^p_x(L^r_T)$ para $L^p(\mathbb{R}_x;L^r(0,T))$, $L^p_x(L^r_t)$ para $L^p(\mathbb{R}_x;L^r(\mathbb{R}_t))$, L^p_{xT} para $L^p(\mathbb{R}_x \times (0,T))$, $X_k = H^k(\mathbb{R}) \times H^{k-1}(\mathbb{R})$ $(k = 1,2,3,\ldots)$ e C será uma constante genérica podendo mudar a cada passo.

Introdução

Neste trabalho, consideramos as seguintes equações de ressonância de ondas curtas e longas:

$$iu_t + u_{xx} - uv + i\alpha u = f(x)\,, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{4}$$

$$v_t + \beta v + \gamma(|u|^2)_x = g(x)\,, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{5}$$

associadas às condições iniciais

$$u(x,0) = u_0(x)\,,\ v(x,0) = v_0(x)\,,\ x \in \mathbb{R} \tag{6}$$

onde a função complexa desconhecida u é a onda curta e a função real v é a amplitude da onda longa. As constantes α e β são positivas e $\gamma \in \mathbb{R}^*$ é real e padrão para a interação de dispersão.

As equações de ressonância para ondas curtas e longas do tipo acima aparecem no estudo da interação de ondas de superfície com ambos os modos de gravidade e capilaridade presentes (ver [8], [9] e [28]) e também na análise de ondas internas, assim como ondas de Rossby [26]. Na física do plasma, é descrita a ressonância de oscilação do plasma de elétrons de alta freqüência e a perturbação de densidade iônica de baixa freqüência associada [10].

Devido a suas ricas propriedades matemáticas e físicas, as equações de ressonância de ondas curtas e longas têm recebido muita atenção de matemáticos e físicos. No caso Hamiltoniano e em tipos mais gerais, a existência, as ondas solitárias e suas estabilidades têm sido extensivamente estudadas. Guo [4] estudou a boa colocação das soluções em espaços de Sobolev usuais. Tsutsumi e Hatano ([22],[21]) estudaram a boa colocação de soluções em espaços de Sobolev fracionários. Estes resultados foram aperfeiçoados por Bekiranov, Ogawa e Ponce Corcho [6] e [7] que investigaram a boa colocação de soluções com baixa regularidade via o método de Bourgain. Para as ondas solitárias e sua estabilidade, nos referimos a Angulo e e Montenegro [16].

Neste trabalho, estudamos o comportamento no infinito de soluções de $(1.1) - (1.3)$. Relembramos que estas equações não tem propriedade de suavização e o mergulho usual entre espaços de Sobolev perde a compacidade devido a falta de regularidade do domínio. Para superar estas dificuldades, usamos algumas desigualdades do tipo Strichartz, a técnica de decomposição e também uma idéia de compacidade concentrada. Usamos desigualdades do tipo Strichartz e um método de conservação de energia para mostrar a existência e a continuidade de semigrupos gerados por essas equações. Obtemos o efeito de suavização assintótica decompondo o semigrupo em uma parte de decaimento e outra mais regular. Tomando os limites quando t vai para o infinito, temos que superar a não compacidade dos mergulhos de Sobolev. Nós seguimos emprestado a idéia do princípio de compacidade concentrada e usamos o "anulamento"e a "dicotomia"via uma função corte.

As desigualdades do tipo Strichartz, de estimativas de espaço-tempo, e o método de energia têm sido aplicados com sucesso no estudo do comportamento no infinito de soluções de equações diferenciais parciais dissipativas, especialmente quando os problemas perdem as propriedades de suavização e de mergulho compacto. Em casos de domínios não limitados, espaços generalizados são usados para substituir os mergulhos compactos. A técnica de decomposição tem sido também apicada em ([23], [24]), onde os semigrupos correspondentes são em partes de baixa e alta freqüência para mostrar o efeito da regularização assintótica e as desigualdades do tipo Strichartz em estimativas de espaço-tempo desempenham papéis importantes. Uma vez que a equação (1.2) não possui efeito dispersivo em v e sua regularidade não é suficiente, a técnica de decomposição em ([23], [24]) não pode ser diretamente aplicada. Em vez disso, decompomos o semigrupo de (1.1) (1.2) de maneira diferente e muito mais simples, que depende bastante da estrutura especial das equações. Uma decomposição similar pode ser vista em [3]. Entretanto, devemos lembrar que o efeito de regularização assintótica de (1.1) e (1.2) é uma conseqüência do mecanismo de estrutura especial da interação não linear entre u e v. Nosso principal resultado é:

Teorema 0.2 *Assuma que* $f \in L^2(\mathbb{R})$, $g \in H^1(\mathbb{R})$. *Então o operador solução* $S(t)$ *de (4)-(5) é um sistema dinâmico contínuo em* $X_1 = H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ *e possui um atrator global* $\mathscr{A}$ *satisfazendo*

1. $\mathscr{A}$ *é compacto em* $X_1 = H^1 \times L^2(\mathbb{R})$,

2. $S(t)\mathscr{A} = \mathscr{A}$, $\forall\, t \geq 0$,

3. $\forall\, \mathscr{B} \subset X_1$ *limitado,*

$$\lim_{t\to\infty} dist_{X_1}(S(t)\mathscr{B}, \mathscr{A}) = 0.$$

Nós organizamos este trabalho da seguinte maneira. Na seção 2, obtemos estimativas a priori e conjuntos de absorção limitados. Na seção 3, com a ajuda da desigualdades do tipo Strichartz para u, mostramos a existência de soluções e a dependência contínua dos dados iniciais. Na seção 4, decompomos o semigrupo da solução em duas partes, uma de decaimento uniforme em X_1 e outra uniformemente limitada em X_2. Na seção 5, mostramos a compacidade assintótica de soluções usando o "anulamento"e "dicotomia"das segundas partes. Finalmente, na seção 6, provamos a existência de atrator global e efeito de regularização assintótica e, assim, completamos a prova do teorema principal.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Espaços de Sobolev em $\mathbb{R}^n$

Após definirmos o espaço das distribuições temperadas, o $S'(\mathbb{R}^n)$, e a transformada de Fourier destes elementos, a qual também está em $S'(\mathbb{R}^n)$, podemos então definir os espaços de Sobolev em $\mathbb{R}^n$ de ordem $s \in \mathbb{R}$.

1.1.1 Definições e Propriedades

Começaremos definindo o espaço de Sobolev em $\mathbb{R}^n$, quando $s = k \geq 0$ é inteiro, o qual é dado como segue:

$$H^k = H^k(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n)\,;\, D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)\,,\, |\alpha| \leq k\}$$

onde $D^\alpha u$ é interpretada, *a priori*, como uma distribuição temperada ($D^\alpha u$ existe no sentido fraco). Mas existe uma caracterização equivalente de H^k em termos da transformada de Fourier, que é dado pelo seguinte teorema:

Teorema 1.1 *$u \in H^k$ se, e somente se, $(1 + |\xi|^2)^{\frac{k}{2}}\hat{u} \in L^2$. Além disso as normas,*

$$u \to \left[\sum_{|\alpha|<k} \| D^\alpha u \|_{L^2}^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad e \quad u \to \left[\int (1 + |\xi|^2)^k |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi\right]^{\frac{1}{2}}$$

são equivalentes.

Prova:
Considere $u \in L^2$, pelo teorema de Plancherel,

$$\| \hat{u} \|_{L^2} = \| u \|_{L^2}\ .$$

Pelas propriedades da transformada de Fourier, temos:

$$|(D^\alpha u)^\wedge(\xi)| = |\xi^\alpha \hat{u}(\xi)|.$$

Logo,

$$\| \xi^\alpha \hat{u} \|_{L^2} = \| (D^\alpha u)^\wedge \|_{L^2} = \| D^\alpha u \|_{L^2} .$$

Então,

$$\| D^\alpha u \|_{L^2}^2 = \| \xi^\alpha \hat{f} \|_{L^2} = \int |\xi^\alpha|^2 . |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

Como ,

$$\| u \|_k^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \| D^\alpha u \|_{L^2}^2$$

temos:

$$\begin{aligned}
\| u \|_k^2 &= \sum_{|\alpha| \leq K} \int |\xi^\alpha|^2 . |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi + \sum_{\substack{|\alpha| \leq k \\ \alpha \neq 0}} \int |\xi^\alpha|^2 . |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi + \int \sum_{\substack{|\alpha| \leq k \\ \alpha \neq 0}} |\xi^\alpha|^2 . |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi. \qquad (1.1)
\end{aligned}$$

Mas as quantidades

$$\sum_{|\alpha| \leq k} |\xi^\alpha|^2 \quad \text{e} \quad (1 + |\xi|^2)^k$$

são comparáveis, isto é, cada uma é limitada por um múltiplo constante da outra, ou seja, podemos encontrar constantes C_1 e C_2, tais que:

$$\sum_{|\alpha| \leq k} |\xi^\alpha|^2 \leq C_1 . \text{máx}\,(1, |\xi|^{2k}) \leq C_1 . (1 + |\xi|^2)^k$$

e

$$(1 + |\xi|^2)^k \leq 2^k C_2 . \sum_{|\alpha| \leq k} |\xi^\alpha|^2 .$$

Tome $C_3 = \dfrac{1}{2^k C_2}$, então a igualdade (1.1) fica:

$$C_3 . \int (1 + |\xi|^2)^k . |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq \| u \|_k^2 \leq C_1 . \int (1 + |\xi|^2)^k . |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi. \qquad (1.2)$$

Por (1.2) $u \in H^k$ se, e somente se, $(1 + |\xi|^2)^{\frac{k}{2}} \hat{u} \in L^2$ e além disso, as normas são equivalentes.

$\blacksquare$

Proposição 1.1 *$D(\mathbb{R}^n)$ é denso em $H^k(\mathbb{R}^n)$.*

A demonstração pode ser encontrada em [2].

Definamos então, os espaços de Sobolev para todo $s \in \mathbb{R}$, como segue:

$$H^s = H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in S'(\mathbb{R}^n)\,;\, (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

a norma correspondente é definida por

$$\| u \|_s^2 = \int (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

O próximo teorema caracteriza os espaços $H^s, s \in \mathbb{R}$, como espaço de Hilbert.

Teorema 1.2 *$H^s(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Hilbert quando munido com o produto interno real,*

$$(u,v)_s = \int (1+|\xi|^2)^s \hat{u}(\xi).\overline{\hat{v}(\xi)}\, d\xi. \tag{1.3}$$

Prova:

A integral em (1.3) existe, pois pela definição de H^s, $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}(\xi) \in L^2$ e como $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{v}(\xi)$ também pertence a L^2, então a integral existe, ou seja,

$$\begin{aligned}
(u,v)_s &= \int (1+|\xi|^2)^s \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}\, d\xi \\
&= \int [(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}(\xi)][(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\overline{\hat{v}(\xi)}]\, d\xi \\
&\le \left(\int (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2\, d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int (1+|\xi|^2)^s |\hat{v}(\xi)|^2\, d\xi\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.
\end{aligned}$$

Portanto

$$(\ ,\ )_s : H^s \times H^s \longrightarrow \mathbb{C}$$

está bem definido , e é ,de fato, uma forma hermitiana positiva definida, pois :

i) é positiva, defina

$$(u,u)_s = \int (1+|\xi|^2)^s.|\hat{u}(\xi)|^2 \ge 0.$$

Se tivermos $(u,u)_s = 0$, então

$$\int (1+|\xi|^2)^s.|\hat{u}(\xi)| = 0.$$

Logo, $|\hat{u}(\xi)| = 0$. Temos, então que $\hat{u} \equiv 0$. Assim, $u = 0$. Logo, $(u,u) > 0$ se $u \neq 0$.

ii) é linear pela linearidade de integral.

iii) $(v,u)_s = (\overline{u,v})_s$.
De fato,

$$\begin{aligned}
(\overline{u,v})_s &= \int \overline{(1+|\xi|^2)^s \hat{u}(\xi).\overline{\hat{v}(\xi)}\, d\xi} \\
&= \int (1+|\xi|^2)^s \overline{\hat{u}(\xi)}.\hat{v}(\xi)\, d\xi \\
&= \int (1+|\xi|^2)^s \hat{v}(\xi).\overline{\hat{u}(\xi)}\, d\xi \\
&= (v,u)_s.
\end{aligned}$$

Mostremos que H^s é completo. Para isso, considere uma sequência de Cauchy $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ em H^s, então por definição $v_j = (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}_j \in L^2$ e portanto $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em L^2,pois:

$$\begin{aligned}
\| v_j - v_k \|_{L^2} &= \left(\int (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}_j(\xi) - \hat{u}_k(\xi)|^2\, d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \| u_j - u_k \|_s < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Como L^2 é completo, existe $v \in L^2$, tal que $v_j \to v$ em L^2. Então seja, $u = ((1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}} v)^{\vee} \in H_s$. Logo:

$$\begin{aligned}
\| u_j - u \|_s &= \left[\int (1+|\xi|^2)^s.|\hat{u}_j - \hat{u}|^2\, d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\int \left(|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} (\hat{u}_j - \hat{u})|^2 \right)\, d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\int |v_j - v|^2\, dx \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \| v_j - v \|_{L^2} \to 0 \quad \text{se} \quad j \to 0.
\end{aligned}$$

Então $u_j \to u$ em H^s quando $j \to \infty$. Segue-se que H^s é completo, e portanto é um espaço de Hilbert.

$\blacksquare$

Proposição 1.2 *$s \geq s'$, então $H^s \subset H^{s'}$.*

Prova:

Dado $u \in H^s$, temos:

$$\begin{aligned}
\| u \|_{s'}^2 &= \int (1+|\xi|^2)^{s'} |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \\
&\leq \int (1+|\xi|^2)^{s} |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \\
&\leq \| u \|_s < \infty,
\end{aligned}$$

então $u \in H^{s'}$.

$\blacksquare$

Em particular, $H^s \subset H^0 = L^2$, para $s \geq 0$, e os elementos de H^s são funções.

Proposição 1.3 *Se $s > \frac{n}{2}$ e $u \in H^s$, então u é limitada e contínua. Além disso,*

$$\lim_{|x| \to \infty} |u(x)| = 0.$$

Prova:

Veja que: se $s > \frac{n}{2}$, então

$$\int |1+|\xi|^2|^{-s} d\xi \leq \int |1+|\xi|^2|^{-\frac{n}{2}} d\xi < \infty,$$

logo $(1+|\xi|^2)^{-s} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Dada $u \in H^s$ é suficiente mostrarmos que $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. De fato,

$$\int |\hat{u}(\xi)| \, d\xi = \int \left((1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} |\hat{u}(\xi)| \right) .(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}} d\xi,$$

pela desigualdade de Holder,

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\int (1+|\xi|^2)^{s} |\hat{u}(\xi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} . \underbrace{\left(\int (1+|\xi|^2)^{-s} \right)^{\frac{1}{2}}}_{C} \\
&\leq C. \| u \|_s < \infty.
\end{aligned}$$

Logo $\quad \| \hat{u} \|_{L^1} \leq C. \| u \|_s$. Então $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Assim u é a transformada de Fourier inversa de $\hat{u}$, isto é,

$$u = \mathscr{F}^{-1}(\hat{u}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{ix\xi} \hat{u}(\xi) \, d\xi.$$

Daí,

$$|u(x)| \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}}. \| \hat{u} \|_{L^1} \leq C. \| u \|_s,$$

e pelo teorema de Riemann-Lebesgue

$$\lim_{|x| \to \infty} |u(x)| = 0.$$

■

Enunciaremos a desigualdade de Young, sem demonstração, a mesma pode ser encontrada em [11].

Lema 1.1 (Desigualdade de Young) *Se* $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *e* $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *então*

$$\| f * g \|_{L^2} \leq \| g \|_{L^1} . \| f \|_{L^2} .$$

O próximo teorema garante que o produto (φu) pertence a $H^s(\mathbb{R}^n)$ para φ em $S(\mathbb{R}^n)$. Para provarmos este resultado precisaremos de algumas desigualdades.

1. $|(f * g)(x)|^2 \leq \int |g(y)| \, dy. \int |f(x-y)|^2.|g(y)| \, dy.$

2. $(1 + |\xi|^2)^s \leq 4^{|s|}.(1 + |\eta|^2)^{|s|}.(1 + |\xi - \eta|^2)^s.$

Segue-se então o teorema:

Teorema 1.3 *Se* $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ *e* $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, *então* $\varphi u \in H^s(\mathbb{R}^n)$.

Prova:

Temos que :

$$\| \varphi u \|_s = \int (1 + |\xi|^2)^s.|(u\varphi)^\wedge(\xi)|^2 d\xi.$$

Portanto, temos,

$$= \quad (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int (1 + |\xi|^2)^s.|(\hat{\varphi} * \hat{u})(\xi)|^2 d\xi.$$

Pela desigualdade (1),

$$
\begin{aligned}
&\leq \; (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int (1+|\xi|^2)^s \left[\int |\hat{\varphi}(\eta)|\, d\eta \int |\hat{u}(\xi-\eta)|^2 . |\hat{\varphi}(\eta)|\, d\eta \right] d\xi \\
&\leq \; (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int |\hat{\varphi}(\eta)|\, d\eta \left[\int \int (1+|\xi|^2)^s . |\hat{u}(\xi-\eta)|^2 . |\hat{\varphi}(\eta)|\, d\eta\, d\xi \right].
\end{aligned}
$$

Pela desigualdade (2),

$$
\begin{aligned}
&\leq \; (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int |\hat{\varphi}(\eta)|\, d\eta \left[\int \int \left(4(1+|\eta|^2)\right)^{|s|} . \left(1+|\xi-\eta|^2\right)^s . |\hat{u}(\xi-\eta)|^2 . |\hat{\varphi}(\eta)|\, d\eta\, d\xi \right] \\
&\leq \; (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int |\hat{\varphi}(\eta)|\, d\eta \left[\int \left(4(1+|\eta|^2)\right)^{|s|} . |\hat{\varphi}(\eta)|\, d\eta \right] \left[\int \left(1+|\xi-\eta|^2\right)^s . |\hat{u}(\xi-\eta)|\, d\xi \right].
\end{aligned}
$$

Então,

$$
\leq \; \| \, u \, \|_s . (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int |\hat{\varphi}(\eta)|\, d\eta \int \left(4(1+|\eta|^2)\right)^{|s|} . |\hat{\varphi}(\eta)|\, d\eta < \infty.
$$

Assim $(\varphi u) \in H^s(\mathbb{R}^n)$.

■

A próxima proposição nos garante que o dual de $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \geq 0$ é isometricamente isomorfo ao $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$

Proposição 1.4 *Seja $s \geq 0$. O dual topológico de $H^s(\mathbb{R}^n)$, isto é, a coleção de todos os funcionais lineares contínuos $u : H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$, é isometricamente isomorfo a $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.*

Prova: Considere a aplicação:

$$
\begin{aligned}
T : H^{-s}(\mathbb{R}^n) \;&\longrightarrow\; (H^s(\mathbb{R}^n))^* \\
u \;&\longmapsto\; \langle u, v \rangle
\end{aligned}
$$

onde $\langle u, v \rangle$, é definido por:

$$
\langle u, v \rangle = \int \hat{u}(\xi) . \overline{\hat{v}(\xi)}\, d\xi = \int \hat{u}(\xi)(1+|\xi|^2)^s \hat{v}(\xi)(1+|\xi|^2)^{-s}\, d\xi. \tag{1.4}
$$

Fixado $u \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$, (1.4) define um funcional linear contínuo. A linearidade segue-se facilmente. Mostremos a continuidade. Pela desigualdade de Holder, temos:

$$
\begin{aligned}
|\langle u, v \rangle| \;&\leq\; \int |\hat{u}(\xi)| . |\overline{\hat{v}(\xi)}|\, d\xi = \int \left[(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}} . |\hat{u}(\xi)| \right] \left[(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} . |\overline{\hat{v}(-\xi)}|\, d\xi \right] \\
&\leq\; \left(\int (1+|\xi|^2)^{-s} . |\hat{u}(\xi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} . \left(\int (1+|\xi|^2)^{s} . |\hat{v}(\xi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq\; \| \, u \, \|_{-s} \, . \, \| \, v \, \|_s \, .
\end{aligned}
$$

Logo, (1.4) é contínuo e satisfaz:

$$\| Tu \|_{(H^s(\mathbb{R}^n))^*} \leq \| u \|_{H^{-s}(\mathbb{R}^n)} .$$

Tomemos $v = (1 + |\xi|^2)^{-s}\hat{u})^\vee \in H^s(\mathbb{R}^n)$, já que:

$$\| v \|_s^2 = \int (1 + |\xi|^2)^s . |\hat{v}(\xi)|^2 \, d\xi = \int (1 + |\xi|^2)^{-s} . |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi < \infty.$$

Logo, $\| v \|_s = \| u \|_{-s}$. Ademais,

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \int \hat{u}(\xi).(1 + |\xi|^2)^{-s}.\overline{\hat{u}(\xi)} = \int (1 + |\xi|^2)^{-s}.|\hat{u}(\xi)|^2 \\ &= \| u \|_{-s}^2 . \end{aligned}$$

Segue-se então que

$$\| Tu \|_{(H^s(\mathbb{R}^n))^*} \geq \frac{\langle u, v \rangle}{\| v \|_s} = \frac{\| u \|_{-s}^2}{\| u \|_{-s}} = \| u \|_{-s} .$$

Portanto,

$$\| Tu \|_{(H^s(\mathbb{R}^n))^*} = \| u \|_{H^{-s}(\mathbb{R}^n)} .$$

Mostremos a sobrejetividade. Observemos que $T(H^{-s}(\mathbb{R}^n))$ é fechado. Suponha que exista $w \in (H^s(\mathbb{R}^n))^{**}$ ($= H^s(\mathbb{R}^n)$ por reflexividade) tal que $\langle u, w \rangle = 0 \quad \forall\, u \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$. Tome $u = ((1 + |\xi|^2)^s . \hat{w}(\xi))^\vee \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$, pois

$$\| u \|_{-s}^2 = \int (1 + |\xi|^2)^s . |\hat{w}(\xi)|^2 < \infty.$$

Então,

$$0 = \langle u, w \rangle = \int \hat{u}(\xi).\overline{\hat{w}(\xi)} = \int (1 + |\xi|^2)^s . |\hat{w}(\xi)|^2$$

Logo, $\| w \|_s^2 = 0$, portanto, $w \equiv 0$. Temos, então, a sobrejetividade e o teorema está provado.

■

Observação 1 *O espaço H^s é um espaço de Hilbert separável.*

Observação 2 *A inclusão $L^2 \subset H^{-1}$ é injetivo, contínua e densa.*

Definamos agora, o espaço $H^s_{loc}(\Omega)$,

$$H^s_{loc}(\Omega) := \{u \in D'(\Omega)\,;\, \varphi u \in H^s\,,\ \forall\, \varphi \in D(\Omega)\},$$

onde Ω é um aberto do $\mathbb{R}^n$. Como vimos anteriormente, o produto de uma função $\varphi \in C^\infty_C(\Omega)$ por uma distribuição é uma distribuição definida por:

$$\langle \varphi u, \psi\rangle = \langle u, \varphi\psi\rangle \quad , \quad \psi \in C^\infty_C(\Omega).$$

Seja Ω e Ω' abertos em $\mathbb{R}^n$. Considere $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$ um difeomorfismo C^∞. Então

$$\varphi \circ f \in C^\infty_c(\Omega)\,,\, \forall\, \varphi \in C^\infty_c(\Omega').$$

Podemos então definir a composição de uma distribuição $u \in D'(\Omega')$ com f, pela identidade

$$\langle u \circ f, \varphi\rangle = \langle u, |J(f)|^{-1}(\varphi \circ f^{-1}),$$

onde $J(f)$ é o determinante jacobiano de f.

A próxima proposição será enunciada sem demonstração, a mesma é encontrada em [27]. Este resultado será usado para mostrarmos algumas propriedades dos espaços de Sobolev em uma variedade M.

Proposição 1.5 *Seja K' um subconjunto compacto de Ω'.Seja $s \in \mathbb{R}$. Existe uma constante $C_s(K')$ tal que*

$$\| u \circ f \|_s \leq C_c(K').\, \| u \|_s \quad , \quad u \in H^s(K').$$

Visando tornar o presente trabalho auto-suficiente apresentaremos abaixo uma coletânea das definições e resultados que utilizaremos livremente no trabalho.

1.2 A integral de Bochner e os espaços $L^p(0,T;X)$

O objetivo desta seção é definirmos a integral de uma função vetorial, definida em um espaço de medida, tomando valores em um espaço de Banach. Durante esta seção, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ será um espaço de medida e $\mathbb{F}$ um espaço de Banach. O leitor mais interessado no assunto encontrará essa teoria em ([18]).

Definição 1 *Uma função $\psi : \Omega \longrightarrow \mathbb{F}$ será uma função escada se existirem conjuntos mensuráveis $A_1, A_2, \ldots, A_k$, $\mu(A_j) < \infty$, $j = 1, 2, \cdots, k$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ e vetores $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\} \subset \mathbb{F}$ tais que $\psi = \sum_{j=1}^{k} v_j.\chi_{A_j}$, onde χ_{A_j} é a função característica do conjunto A_j.*

Como estamos interessados em construir uma teoria de integração, se $\psi = \sum_{j=1}^{k} v_j \chi_{A_j}$ é uma função escada, devemos definir de forma natural

$$\int_\Omega \psi \, d\mu = \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j).v_j.$$

Claramente, saber integrar apenas funções escadas não nos é muito útil. Para isso devemos, como ocorre na teoria clássica e integração a Lebesgue, estender a noção integral para "funções mensuráveis". No nosso contexto somos levados a dar a seguinte definição.

Definição 2 *Uma função $\psi : \Omega \to \mathbb{F}$ é dita mensurável se existe uma sequência de funções escadas ϕ_n tal que $\psi_n \to \psi$ q.t.p.* [1]

Deveremos dizer que uma função é integrável, se a mesma pode ser *bem* aproximada por funções escadas.

Definição 3 *Dizemos que uma função $f : (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{F}$ definida em um espaço de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ tomando valores em um espaço de Banach $\mathbb{F}$ é Bochner integrável se existir, uma sequência de funções escadas $(f_n)_{n \geq 1}$ com $f_n \to f$ q.t.p. tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f(t) - f_n(t)\| d\mu = 0.$$

[1] Dizemos que v é fracamente mensurável se para todo $\lambda \in \mathbb{F}$, $\lambda \circ v : \Omega \to \mathbb{R}$ é mensurável. O Teorema de Pettis nos garante que, quando $\mathbb{F}$ é separável as duas noções são equivalentes.

Para todo $A \in \mathcal{A}$, a integral de Bochner de f em $\mathcal{A}$ é definida por:

$$\int_A f(t)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \chi_A(t) f_n(t)\, d\mu.$$

Proposição 1.6 *A integral de Bochner está bem definida, isto é, o limite independe da sequência de funções escadas que aproxima a função.*

Prova: Seja $(f_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de funções escadas que aproxima f. Logo

$$\begin{aligned}\left\|\int_A f_n\, d\mu - \int_A f_k\, d\mu\right\| &\leq \int_A \|f_n - f_k\|\, d\mu \\ &\leq \int_A \|f - f_k\|\, d\mu + \int_A \|f_n - f\|\, d\mu \leq \epsilon\end{aligned}$$

se n e k são suficientemente grandes. Isto mostra que a sequência $\left(\int_A f_n\, d\mu\right)_n$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{F}$, e portanto convergente.

Ademais se $(g_n)_{n\geq 1}$ for outra sequência de funções escadas que aproximam f, temos:

$$\left\|\int_A (g_n - f_n)\, d\mu\right\| \leq \int_A \|f - f_n\|\, d\mu + \int_A \|g_n - f\|\, d\mu \leq \epsilon$$

se n for suficientemente grande. ■ A princípio é uma tarefa não trivial julgarmos se uma determinada aplicação é ou não Bochner Integrável. Contudo o próximo teorema viabiliza a teoria:

Teorema 1.4 (S. Bochner) *Uma função mensurável $f\Omega \to \mathbb{F}$ é Bochner integrável se e somente se $\|f\| : \Omega \to \mathbb{R}$ é integrável.*

Prova: Suponha que f seja Bochner integrável. Por definição existe uma seqüencia de funções escadas f_n tais que : $f_n \to f$ q.t.p. e $\int \|f_n - f\|\, d\mu \to 0$. Logo

$$\left|\int \|f_n\|\, d\mu - \int \|f_k\|\, d\mu\right| \leq \int |\, \|f_n\| - \|f_k\|\, |\, d\mu \leq \int \|f_n - f_k\|\, d\mu.$$

Logo a seqüencia $\int \|f_n\|\, d\mu$ é de Cauchy. Assim $\|f_n\|$ converge em $L^1((\Omega, \mathcal{A}_\mu) : \mathbb{R})$. Como $\|f_n\| \to \|f\|$ q.t.p., segue-se que $\|f_n\| \to \|f\|$ em $L^1((\Omega, \mathcal{A}_\mu) : \mathbb{R})$. Donde $\|f\|$ é integrável. Suponha agora que $\|f\|$ é integrável. Seja f_n uma seqüencia de funções escadas convergindo q.t.p. para f. Defina a seguinte seqüencia de funções escadas:

$$\eta_n(t) = \begin{cases} f_n(t), & \text{se} \quad \|f_n(t)\| \leq \|f(t)\|. \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \\ 0, & \text{se} \quad \|f_n(t)\| \geq \|f(t)\| \left(1 + \dfrac{1}{n}\right). \end{cases}$$

Desta forma: $\|\eta_n(t)\| \leq \|f(t)\| \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ e $\eta_n \to f$ q.t.p. pois, fixado $t \in \Omega$, para n suficientemenmte grande, $\eta_n(t) = f_n(t)$, já que $\|f_n(t)\| \leq \|f\| \left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Ademais vale a seguinte desigualdade :

$$\|\eta_n - f\| \leq 2\|f\| \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Aplicando o *Teorema da convergência dominada de Lesbegue*, à seqüencia $\|\eta_n - f\|$ obtemos:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f - \eta_n\| \, d\mu = 0.$$

Assim, f é *Bochner Integrável*. ■

Corolário 1.1 *Vale a desigualdade:*

$$\left\| \int_A f(t) \, d\mu \right\| \leq \int_A \|f(t)\| \, d\mu$$

e assim, $\int_A f(t) \, d\mu$ *é absolutamente contínua, isto é,*

$$\lim_{\mu(A)\to 0} \int_A f(t) \, d\mu = 0.$$

Prova: Seja f_n uma seqüencia de funções escadas satisfazendo: $f_n \to f$ q.t.p. e $\int \|f_n - f\| \, d\mu \to 0$. Pela desigualdade triangular vale

$$\left\| \int_A f(t) \, d\mu \right\| \leq \int_A \|f(t)\| \, d\mu.$$

Ademais, como escólio do *Teorema de Bochner* podemos supor que

$$\int_A \|f_n\| \, d\mu \to \int_A \|f\| \, d\mu.$$

Aplicando o limite obtemos a desigualdade desejada. ■

Corolário 1.2 *A integral de Bochner é σ-aditiva, isto é:*

$$\int_{\sum_{i=1}^{\infty} A_i} f(t)\, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f(t)\, d\mu.$$

Prova: Note que $\int_{\sum_{i=1}^{\infty} A_i} f(t)\, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f(t)\, d\mu$. Seja $A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$, então:

$$\left\| \int_A f(t)\, d\mu - \int_{\sum_{i=1}^{k} A_i} f(t)\, d\mu \right\| = \left\| \int_{A - \sum_{i=1}^{k} A_i} f(t)\, d\mu \right\| \leq \epsilon$$

uma vez que $\mu\left(A - \sum_{i=1}^{k} A_i\right) \to 0$ quando $k \to \infty$. ■

Corolário 1.3 *Seja $T : \mathbb{F} \to \mathbb{E}$ uma aplicação linear limitada entre dois espaços de Banach. Se $f : \Omega \to \mathbb{F}$ é Bochner Integrável, então $T \circ f : \Omega \to \mathbb{E}$ é Bochner Integrável e vale:*

$$\int_A T(f(t))\, d\mu = T\left(\int_A f(t)\, d\mu\right).$$

Prova: A integrabilidade de $T \circ f$ é conseqüencia do fato que

$$\int_A \|T(f(t))\|\, d\mu \leq \|T\| \int_A \|f\|\, d\mu$$

adicionado ao *Teorema de Bochner*. Seja f_n uma seqüencia de funções escadas satisfazendo $f_n \to f$ e $\int_A \|f_n - f\|\, d\mu \to 0$. Logo,

$$\int_A \|T(f(t)) - T(f_n(t))\|\, d\mu \leq \|T\| \int_A \|f_n - f\|\, d\mu \to 0.$$

Logo, por definição, temos:

$$\begin{aligned} \int_A T \circ f\, d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_A T \circ f_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} T\left(\int_A f\, d\mu\right) \\ &= T\left(\lim_{n\to\infty} \int_A f_n\, d\mu\right) = T\left(\int_A f(t)\, d\mu\right). \end{aligned}$$ ■

Agora estudaremos os espaços $L^p(0, T; X)$, onde X é um espaço de Banach (nas aplicações deste trabalho X representa sempre um espaço de Hilbert) e suas propriedades. Caso o leitor queira mais informações consulte [18].

Definição 4 *Denotaremos por* $L^p(0,T;X)$ $(1 \leq p < \infty)$ *o espaços das (classes de) funções:* $f : [0,T] \to X$ *tal que* f *é mensurável e*

$$\|f\|_{L^p(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|f(s)\|_X^p \, ds \right)^{1/p} < \infty.$$

No caso $p = \infty$

$$\|f\|_{L^\infty(0,T;X)} := \inf\{r; \|f(t)\|_X \leq r, \ q.t.p\}.$$

Observação 3 *Podemos identificar* $L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}))$ *com* $L^2((0,T) \times \mathbb{R})$.

Sejam X, Y pares de espaços de Banach, vamos denotar por $\mathscr{L}(X,Y)$ o espaço das aplicações lineares contínuas de X em Y. Destacamos agora algumas propriedades desses espaços

1. Para $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(0,T;X)$ é um espaço de Banach.
2. Seja $u \in L^1(0,T;X)$ e $A \in \mathscr{L}(X,Y)$. Então $Au \in L^1(0,T;Y)$ e
$$\int_0^T Au(s) \, ds = A \left(\int_0^T u(s) \, ds \right).$$
3. Se $u \in L^1(0,T;X)$ e $f \in X^*$ temos que
$$\left\langle f, \int_0^T u(s) \, ds \right\rangle = \int_0^T \langle f, u(s) \rangle \, ds. \tag{1.5}$$

Observação 4 *Como, para* $p \geq 1$, $L^p([0,T];\mathbb{R})$ *está contido continuamente em* $L^1(0,T;\mathbb{R})$, *então (1.5) vale se* $u \in L^p(0,T;X)$.

Vamos denotar o suporte de f como sendo

$$supp(f) := \overline{\{t \in [0,T]; f(t) \neq 0\}} \ \text{ em } X.$$

Definição 5 *Denotemos por* $\mathcal{D}((0,T);X)$ *o espaço das funções de classe* C^∞ *de* $(0,T)$ *em* X *com suporte compacto em* $(0,T)$.

Observação 5 *Se* $X = \mathbb{C}$ *(ou* $\mathbb{R}$*), então* $\mathcal{D}((0,T);X) = \mathcal{D}(0,T)$.

Definição 6 *Denotemos por* $\mathcal{D}'((0,T);X)$ *o espaço das distribuições sobre* $(0,T)$ *com valores em* X *definida por*

$$\mathcal{D}((0,T);X) = \mathscr{L}(\mathcal{D}((0,T));X),$$

onde $\mathscr{L}(\mathcal{D}((0,T));X)$ *consiste de todas as aplicações lineares contínuas de* $\mathcal{D}((0,T))$ *sobre* X.

Observação 6 *Se* $X = \mathbb{C}$ *(ou* $\mathbb{R}$*), então* $\mathcal{D}'((0,T);X) = \mathcal{D}((0,T))$*. O espaço* $L^p(0,T;X)$ *é um subespaço de* $\mathcal{D}'((0,T);X)$*.*

Definição 7 (Diferenciação de distribuição) . *Para* $f \in \mathcal{D}'((0,T);X)$ *temos*

$$\frac{df}{dt}(\varphi) = -f\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)\ ,\ \ \varphi \in \mathcal{D}((0,T)). \tag{1.6}$$

Observe que a aplicação $\varphi \mapsto f(\varphi)$ é linear e contínua de $\mathcal{D}((0,T))$ em X. Logo a aplicação $\varphi \mapsto f\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)$ é então contínua de $\mathcal{D}((0,T))$ em X e portanto (1.6) faz sentido.

Se $t \mapsto f(t)$ for uma função de $C((0,T);X)$ definimos um elemento de $\mathcal{D}'((0,T);X)$ por

$$f(\phi) = \int_0^T f(s)\phi(s)\,ds\ ,\ \forall\,\phi \in \mathcal{D}((0,T)),$$

onde a integral é tomada em X.

Proposição 1.7 *Seja* $A : \mathcal{D}((0,T)) \to X$ *uma aplicação linear. As seguintes condições são equivalentes:*

1. *A é uma distribuição;*

2. *A restrição de A a cada* $\mathcal{D}_k((0,T))$ *é contínua;*

onde $\mathcal{D}_k((0,T))$ *é o espaço das funções de classe* C^∞ *com suporte contido num compacto* $K \subset (0,T)$*.*

Agora considere $L^1_{Loc}(0,T;X)$ o espaço das (classes de) funções u tal que para todo compacto $K \subset]0,T[$, $\chi_K u \in L^1(0,T;X)$, onde χ_K denota a função característica no compacto K. LOgo, Se $\phi \in \mathcal{D}((0,T))$ então para toda $u \in L^1_{loc}(0,T;X)$ temos que $\phi u \in L^1(0,T;X)$, portanto

$$\int_0^T \phi(s)u(s)\,ds$$

faz sentido. Além disso, se $\varphi \in \mathcal{D}_k((0,T))$, então

$$\left\|\int_0^T \varphi(t)u(t)\,dt\right\|_X \leq \sup_t |\varphi(t)| \left(\int_K \|u(t)\|_X\,dt\right).$$

Portanto pela *Proposição* 1.7, temos a

Proposição 1.8 *Seja $u \in L^1_{Loc}(0,T;X)$, a aplicação*

$$\varphi \mapsto \int_0^T \varphi(t)u(t)\,dt$$

é uma distribuição sobre $(0,T)$ com valores em X.

Para finalizarmos esta seção, daremos mais algumas propriedades sobre os espaços definidos anteriormente tais como *convergência fraca e $fraca^*$*.

1. Se $X = H$ for um espaço de Hilbert com produto interno $(,)_H$ então $L^2(0,T;X)$ é também um espaço de Hilbert com produto interno

$$(f,g)_{L^2(0,T;H)} := \int_0^T (f(s),g(s))_H\,ds.$$

2. Sejam X, Y espaço de Banach com $X \hookrightarrow Y$ (imersão contínua). Então

$$\mathcal{D}'((0,T);X) \hookrightarrow \mathcal{D}'((0,T);Y)$$

e

$$L^p(0,T;X) \hookrightarrow L^p(]0,T[;Y)\,,\ 1 \leq p \leq \infty.$$

3. Se $1 \leq p < \infty$, então $\mathcal{D}((0,T);X) \subset L^p(0,T;X)$ densamente.

4. Se V for um espaço de Banach separável, reflexivo com dual V^*, então se p for tal que $1 < p < \infty$, $L^p(0,T;V)$ é um espaço de Banach reflexivo com dual $L^q(0,T;V^*)$, com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

5. Se $p = 1$, então $L^1(0,T;V)$ possui $L^\infty(0,T;V^*)$ como dual mas não é reflexivo; similarmente $L^\infty(0,T;X)$ não é reflexivo.

6. Seja f_n uma seqüência em $L^p(0,T;H)$, onde H é um espaço de Hilbert, $1 \leq p < \infty$. Dizemos que $f_n \rightharpoonup f$ (converge no sentido fraco) em $L^p(0,T;H)$ se

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \langle g(s), f_n(s)\rangle\,ds = \int_0^T \langle g(s), f(s)\rangle\,ds\ ,\ \ \forall\, g \in L^q(0,T;H^*),$$

com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

7. Seja f_n uma seqüência em $L^q(0,T;H^*)$, onde H^* é o dual de H, $1 < q \leq \infty$. Dizemos que $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ (no sentido fraco estrela) em $L^q(0,T;H^*)$ se

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \langle f_n(s), g(s)\rangle\,ds = \int_0^T \langle f(s), g(s)\rangle\,ds\ ,\ \ \forall\, g \in L^p(0,T;H).$$

1.3 Teoria dos Atratores

Esta seção da mesma forma que a anterior, destina-se a tornar o trabalho relativamente auto-suficiente. Recomendamos o leitor a consultar [1] antes da leitura desta seção. No que segue-se H denota um espaço métrico completo. Suponha que o problema de valor inicial

$$\frac{du(t)}{dt} + F(u(t)) = G, \tag{1.7}$$

onde G é independente de t. Com dados iniciais

$$u(0) = u_0 \in H \tag{1.8}$$

esteja bem-posto, isto é

1. A solução de (1.7)-(1.8) existe;
2. é única;
3. o qual depende continuamente dos dados iniciais;

e estamos interessados em estudar o comportamento quando $t \to \infty$ de $u(t)$. A variável $u(t)$ pertence a H (chamado *espaço de fase*). A técnica usada no trabalho consiste wm quatro passos principais:

1. Mostrar a existência, unicidade e dependência contínua dos dados iniciais (nessa seção vamos supor esse fato verdadeiro), ou seja, que (1.7)-(1.8) está bem-posto;

2. Associar a (1.7)-(1.8) uma família de operadores $\{S(t) : t \geq 0\}$ satisfazendo as propriedades de semigrupo da seguinte maneira: Para todo $t \geq 0$

$$\begin{array}{rccl} S(t) & H & \longrightarrow & H \\ & u_0 & \longmapsto & S(t)u_0 := u(t) \in H \end{array}$$

   com $S(0)u_0 = u_0$. A evolução do sistema é descrito pela família de operadores $\{S(t) : t \geq 0\}$ e definirmos a órbita ou trajetória passando por u_0 como sendo

$$\gamma(u_0) = \bigcup_{t \geq 0} S(t)u_0 = \{u(t) : t \geq 0\}.$$

3. Existência de um conjunto absorvente em H, isto é, um conjunto limitado $\mathscr{B} \subset H$ que atrai as órbitas numa razão exponencial. A existência de um conjunto absorvente pode ser usado como definição de *sistema dissipativo*.

4. Por fim, busca de um atrator global $\mathscr{A}$, isto é, $\mathscr{A}$ é um conjunto compacto de H, invariante (isto é, $S(t)\mathscr{A} = \mathscr{A}$, $\forall\, t \geq 0$) e atrai todas as órbitas do sistema quando $t \to \infty$.

Definição 8 *A* **evolução** *do sistema é descrita pela família de operadores* $\{S(t) : t \geq 0\}$ *que satisfaz as propriedades de semigrupo, isto é,*

1. $S(t+s) = S(t)S(s)$ *para todo* $t, s \geq 0$*;*

2. $S(0) = I_H$.

De modo que se $u(s)$ representa o estado no instante s, $S(t)u(s)$ representa o estado no instante $t+s$, ou seja, $S(t)u(s) = u(t+s)$.

Definição 9 *Dizemos que o semigrupo* $\{S(t) : t \geq 0\}$ *é contínuo quando a aplicação*

$$\begin{array}{rcccl} \Psi & : & [0,+\infty) \times H & \longrightarrow & H \\ & & (t, u_0) & \longmapsto & \Psi(t,u_0) := S(t)u_0 \end{array}$$

é contínua.

Definição 10 *Dado* $u_0 \in H$*, a órbita (positiva) ou trajetória começando em* u_0 *é dado por*

$$\gamma^+(u_0) = \bigcup_{t \geq 0} \{S(t)u_0\} = \{u(t); t \geq 0\}.$$

Quando existir, podemos definir a órbita negativa de u_0 *por*

$$\gamma^-(u_0) = \bigcup_{t \leq 0} \{S(t)u_0\} = \{u(t); t \leq 0\}.$$

A órbita completa contendo u_0 *é definida por*

$$\gamma(u_0) = \gamma^+(u_0) \cup \gamma^-(u_0) = \{u(t); t \in \mathbb{R}\}.$$

A seguir definiremos um conjunto muito importante chamado *omega limite.*

Definição 11 *Dado* $u_0 \in H$*, definimos o conjunto* ω*-limite (omega limite) de* u_0 *por*

$$\omega(u_0) := \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)u_0}. \tag{1.9}$$

Dado $\mathcal{A} \subset H$*, define-se o conjunto* ω*-limite de* $\mathcal{A}$ *como sendo*

$$\omega(\mathscr{A}) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)\mathscr{A}}. \tag{1.10}$$

Uma caracterização de extrema importância e dado pelo

Lema 1.2 *Um elemento $\phi \in \omega(\mathscr{A})$ se, e somente se, existe uma seqüência $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ e uma seqüência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$, $t_n \to \infty$, quando $n \to \infty$, tais que $S(t_n)\phi_n \to \phi$ em H quando $n \to \infty$.*

Prova: De fato,

($\Leftarrow$) Seja $\phi = \lim\limits_{n\to\infty} S(t_n)\phi_n$ com $\phi_n \in \mathscr{A}$ e $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$, com $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Assim

$$S(t_n)\phi_n \in S(t_n)\mathscr{A} \implies S(t_n)\phi_n \in \bigcup_{t\geq s} S(t)\mathscr{A}\,, \ \ \forall\, s \geq 0.$$

Como $S(t_n)\phi_n \to \phi$ quando $n \to \infty$ segue que

$$\phi \in \overline{\bigcup_{t\geq s} S(t)\mathscr{A}}\,, \ \ \forall\, s \geq 0.$$

Ou seja,

$$\phi \in \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} S(t)\mathscr{A}} = \omega(\mathscr{A}).$$

($\Rightarrow$) Seja agora $\phi \in \omega(\mathscr{A})$. Então $\phi \in \overline{\bigcup\limits_{t\geq s} S(t)\mathscr{A}}$ para todo $s \geq 0$. Logo existe uma seqüência $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\bigcup\limits_{t\geq s} S(t)\mathscr{A}$ tal que $\Psi_n \to \phi$ quando $n \to \infty$. Assim existe $\phi_n \in \mathscr{A}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e seqüência $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ com $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$ tal que $\Psi_n = S(t_n)\phi_n$ e

$$\lim_{n\to\infty} S(t_n)\phi_n = \phi \ \text{ em } \ H. \quad \blacksquare$$

Definição 12 *Seja $\mathscr{B}$ um subconjunto de H, $\mathscr{U} \subset H$ aberto tal que $\mathscr{B} \subset \mathscr{U}$. Dizemos que $\mathscr{B}$ é absorvente em $\mathscr{U}$ se $\mathscr{B}$ atrai os conjuntos limitados de $\mathscr{U}$ num tempo finito. Em outras palavras: $\mathscr{B}$ é absorvente em $\mathscr{U}$ se para todo $\mathscr{B}_0 \subset \mathscr{B}$, $\mathscr{B}_0$ limitado, existe $t_1(\mathscr{B}_0)$ tal que $S(t)\mathscr{B}_0 \subset \mathscr{B}$, para todo $t \geq t_1(\mathscr{B}_0)$.*

Observação 7 *Podemos ter $\mathscr{U} = H$.*

Definição 13 *Dado um conjunto $X \subset H$ dizemos que X é invariante para o semigrupo $\{S(t) : t \geq 0\}$ se $S(t)X = X$ para todo $t \geq 0$. Se $S(t)X \subset X$ para todo $t \geq 0$ diremos que $S(t)$ é positivamente invariante e se $S(t)X \supset X$ para todo $t \geq 0$ diremos que $S(t)$ é negativamente invariante*

Exemplo 1.1 *Uma órbita* **completa** *passando por* u_0 *é invariante.*

De fato, seja $X = \gamma(u_0) = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} S(t)u_0$.

$S(t)X \subset X$**:** Seja $v \in S(t)X$, então existe $\phi \in X$ tal que $v = S(t)\phi$. Como $\phi \in X$, existe $t_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\phi = u(t_1)$. Logo

$$v = S(t)\phi = S(t)u(t_1) = u(t + t_1) \in X.$$

$S(t)X \supset X$**:** Seja agora $v \in X$, então $v = u(t_0) = u(t + t_0 - t) = S(t)u(t_0 - t)$. Por outro lado $S(t)u(t_0 - t) \in S(t)X$. Logo $v \in S(t)X$. Portanto

$$S(t)X = X\ ,\ \forall\, t \geq 0.$$

Lema 1.3 (Gerador de conjuntos absorventes) . *Assumimos que a família de operadores* $\{S(t) : t \geq 0\}$ *é um semigrupo contínuo em* H*. Seja* $X \subset H$ *tal que,* $X \neq \varnothing$ *e que exista* $t_0 \geq 0$ *de modo que*

$$\bigcup_{t\geq t_0} S(t)X \tag{1.11}$$

seja relativamente compacto em H*. Então,* $\omega(X) \neq \varnothing$ *é compacto e invariante.*

Prova: Se $X \neq \varnothing$, então $\bigcup_{t\geq t_0} S(t)X \neq \varnothing$. Denotemos por $K_s = \overline{\bigcup_{t\geq s} S(t)X}$, $s \geq t_0$. Logo temos que K_s são compactos e formam uma família decrescente (no sentido da inclusão) e portanto

$$\varnothing \neq \bigcap_{s\geq t_0} K_s = \bigcap_{s\geq 0} K_s = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} S(t)X} = \omega(X).$$

Isto mostra que $\omega(X)$ é não vazio e compacto.

Afirmação 1.1 $S(t)\omega(X) = \omega(X)$ *para todo* $t \geq 0$.

De fato,

$\underline{S(t)\omega(X) \subset \omega(X)}$: Seja $\Psi \in S(t)\omega(X)$. Então $\Psi = S(t)\phi$ onde $\phi \in \omega(X)$. Como $\phi \in \omega(X)$ segue do *Lema* 1.2 que existem seqüências $(\phi_n)_n \subset X$, $t_n \to \infty$, quando $n \to \infty$ tal que $S(t_n)\phi_n \to \phi$ quando $n \to \infty$. Por hipótese $\{S(t) : t \geq 0\}$ é contínuo, logo

$$\lim_{n\to\infty} S(t + t_n)\phi_n = \lim_{n\to\infty} S(t)S(t_n) = S(t)\left[\lim_{n\to\infty} S(t_n)\phi_n\right]\phi_n = S(t)\phi = \Psi.$$

Usando o fato de que $(t+t_n) \subset \mathbb{R}_+$ com $t+t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$ e que $(\phi_n)_n \subset X$ temos, novamente pelo *Lema* 1.2, que $\Psi \in \omega(X)$.

$\underline{S(t)\omega(X) \supset \omega(X)}$: Seja agora $\phi \in \omega(X)$. Logo pelo *Lema* 1.2 existem seqüências $(\phi_n)_n$ em X e $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$ tal que $S(t_n) \to \phi$ quando $n \to \infty$. Como $t_n \to \infty$ então para n suficientemente grande $t_n - s \geq t_0$, onde s é arbitrário fixo e

$$S(t_n - s)\phi_n \in \overline{\bigcup_{t \geq t_0} S(t)X}.$$

Como $\overline{\bigcup_{t\geq t_0} S(t)X}$ é compacto por hipótese, temos que existe seqüência $(t_{n_i})_{n_i} \subset \mathbb{R}_+$ e $(\phi_{n_i}) \subset \bigcup_{t\geq t_0} S(t)X$ tal que $S(t_{n_i} - s)\phi_{n_i} \to \Psi$ em H quando $n_i \to \infty$. Novamente usando o *Lema* 1.2, $\Psi \in \omega(X)$. Portanto

$$\lim_{n_i \to \infty} S(t_{n_i})\phi_{n_i} = \lim_{n_i \to \infty} S(t_{n_i} + s - s)\phi_{n_i} = \lim_{n_i \to \infty} S(s)S(t_{n_i} - s) = S(s)\Psi.$$

Por outro lado, $\lim\limits_{n_i \to \infty} S(t_{n_i})\phi_{n_i} = \phi$. Logo

$$\phi = S(s)\Psi \text{ e portanto } \phi \in S(s)\omega(X). \quad \blacksquare$$

Definição 14 *Dizemos que o semigrupo $\{S(t) : t \geq 0\}$ é uniformemente compacto para t grande se para cada conjunto limitado $\mathscr{B} \subset H$, existe $t_1 = t_1(\mathscr{B})$ tal que*

$$\bigcup_{t \geq t_1} S(t)\mathscr{B} \tag{1.12}$$

é relativamente compacto em H.

Como conseqüência do *Lema* 1.3 temos o

Teorema 1.5 (Gerador de conjuntos absorventes) *Assumimos que $\{S(t) : t \geq 0\}$ seja um semigrupo contínuo e satisfazendo a hipótese (1.12), então o conjunto $\omega(\mathscr{B}) \neq \varnothing$ é compacto e invariante para todo $\mathscr{B} \subset H$ limitado.*

Definição 15 *Um conjunto $\mathscr{A} \subset H$ é um atrator se:*

1. $\mathscr{A}$ é invariante sob ação de $S(t)$, ou seja $S(t)\mathscr{A} = \mathscr{A}$ para todo $t \geq 0$;
2. Existe vizinhança $\mathscr{U}$ de $\mathscr{A}$ tal que $\lim\limits_{t\to\infty} S(t)u_0 = \mathscr{A}$ para todo $u_0 \in \mathscr{U}$, isto é,
$$\lim_{t\to\infty} dist(S(t)u_0, \mathscr{A}) = 0,$$
onde $dist(x, Y) = \inf\limits_{y \in Y} dist(x, y)$.

Definição 16 *Um conjunto $\mathscr{A} \subset H$ é chamado* **atrator global** *se satisfaz as condições:*

1. $\mathscr{A}$ é invariante;
2. $\mathscr{A}$ é compacto;
3. $\mathscr{A}$ atrai os limitados de H uniformemente, isto é, $\forall\, \mathscr{B} \subset H$, $\mathscr{B}$ limitado,

$$\lim_{t\to\infty} dist\,(S(t)\mathscr{B}, \mathscr{A}) = 0.$$

Destacaremos agora algumas propriedades do atrator global.

1. Quando existe o atrator este é único. De fato, suponha $\mathscr{A}$ e $\bar{\mathscr{A}}$ dois atratores globais. Como $\bar{\mathscr{A}}$ é compacto então $\bar{\mathscr{A}}$ é limitado. Por outro lado, $\mathscr{A}$ é atrator global e portanto atrai $\bar{\mathscr{A}}$ ou seja

$$\lim_{t\to\infty} dist\,(S(t)\bar{\mathscr{A}}, \mathscr{A}) = 0,$$

ou seja, $\lim_{t\to\infty} dist\,(\bar{\mathscr{A}}, \mathscr{A}) = 0$, isto é, $dist(\bar{\mathscr{A}}, \mathscr{A}) = 0$ o que implica que $\bar{\mathscr{A}} \subset \mathscr{A}$. Vale o mesmo raciocínio para $\mathscr{A}$ e concluímos que $\bar{\mathscr{A}} \supset \mathscr{A}$.

2. O atrator global $\mathscr{A}$ é maximal (com respeito a inclusão) entre todos os conjuntos limitados invariantes e os atratores limitados.

Teorema 1.6 (Existência do atrator global) . *Sejam H um espaço métrico completo e $\{S(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo de operadores contínuos, uniformemente compacto para t grande. Se existe um aberto $\mathscr{U} \subset H$ e um conjunto limitado $\mathscr{B} \subset H$ que é absorvente em $\mathscr{U}$ então, o conjunto ω-limite de $\mathscr{B}$ ($\mathscr{A} = \omega(\mathscr{B})$) é um atrator compacto para o semigrupo $\{S(t) : t \geq 0\}$. Além disso se $\mathscr{U} = H$, então $\mathscr{A}$ é o atrator global.*

Prova: Como $\{S(t) : t \geq 0\}$ é uniformemente compacto para t grande e $\mathscr{B}$ é limitado existe $t_0 = t_0(\mathscr{B})$ tal que

$$\bigcup_{t\geq t_0} S(s)\mathscr{B}$$

é relativamente compacto. Pelo *Lema* 1.3, $\mathscr{A} = \omega(\mathscr{B}) \neq \varnothing$, compacto e invariante. Falta-nos mostrar apenas que $\mathscr{A}$ atrai os limitados de $\mathscr{U}$, isto é, para toro $\mathscr{B}_0 \subset \mathscr{U}$ limitado

$$\lim_{t\to\infty} dist_H(S(t)\mathscr{B}_0, \mathscr{A}) = 0.$$

Suponha por absurdo que $\mathscr{A}$ não atrai limitados de $\mathscr{U}$, logo existe $\delta > 0$ e $\mathscr{B}_0 \subset \mathscr{U}$ limitado e seqüência $(x_n)_n \subset \mathscr{B}_0$ e $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$ tal que

$$dist_H(S(t_n)x_n, \mathscr{A}) \geq \frac{\delta}{2}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{1.13}$$

(Na realidade 1.13 vale para um n grande. Mas por reordenação da seqüência podemos supor para todo n). Como $\mathscr{B}$ é absorvente em $\mathscr{U}$ temos que $S(t_n)x_n \in \mathscr{B}$ para n suficientemente grande. Também $S(t)$ é uniformemente compacto para t grande, logo existe $t_1(\mathscr{B}_0)$ tal que

$$\overline{\bigcup_{t \geq t_1} S(t)\mathscr{B}_0}$$

é compacto. Para $t_n \geq t_1$,

$$S(t_n)x_n \in \overline{\bigcup_{t \geq t_1} S(t)\mathscr{B}_0}.$$

Logo $(S(t_n)x_n)_{t_n \geq t_1}$ é relativamente compacto e portanto existe subseqüência (x_{n_1}) tal que $\lim_{n_i \to \infty} S(t_{n_i})x_{n_i} = x$. Portanto

$$\lim_{n_i \to \infty} S(t_{n_i} - t_1)S(t_1)x_{n_i} = x.$$

Por outro lado $S(t_{n_i}) \in \mathscr{B}$, pois $\mathscr{B}$ é absorvente e $t_{n_i} - t_1 \to \infty$. Logo, segue do *Lema* 1.2 que $x \in \omega(\mathscr{B}) = \mathscr{A}$. Então,

$$\lim_{n_i \to \infty} S(t_{n_i})x_{n_i} = x \in \mathscr{A}$$

ou seja

$$\lim_{n_i \to \infty} dist_H(S(t_{n_i})x_{n_i}, \mathscr{A}) = 0$$

contradizendo (1.13). Portanto $\mathscr{A} = \omega(\mathscr{B})$ é atrator. ∎

Lema 1.4 *Seja E espaço de Banach (ou espaço métrico completo) e $\{S(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo de operadores contínuos de E em E que para todo $t \geq 0$ satisfaz:*

1.

$$S(t) = S_1(t) + S_2(t), \tag{1.14}$$

onde

2.

$$S_1(t) : E \to E \text{ é uniformemente compacto para } t \text{ grande} \tag{1.15}$$

3. $S_2(t) : E \to E$ *é contínua (não necessariamente linear) e para todo* $X \subset E$ *limitado*

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\phi\in X} \|S_2(t)\phi\|_E = 0. \tag{1.16}$$

Então para todo $\mathscr{B}_0 \subset E$, $\mathscr{B}_0 \neq \varnothing$ *limitado, o conjunto* $\omega(\mathscr{B}_0)$ *é não vazio, compacto e invariante.*

Observação 8 S_1 *e* S_2 *não necessariamente têm as propriedades de semigrupos, mas* S *tem por hipótese.*

Prova: Das hipóteses $(1)-(3)$ acima, se $(\phi_n)_n$ for uma seqüência limitada e (t_n) tal que $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$ vale o seguinte:

$$\lim_{n\to\infty} S_2(t_n)\phi_n = 0 \text{ e } \lim_{n\to\infty} S(t_n)\phi_n = \phi \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} S_1(t_n)\phi_n = \phi. \tag{1.17}$$

Definindo

$$\omega_1(\mathscr{B}_0) = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} S_1(t)\mathscr{B}_0}$$

afirmamos que $\omega(\mathscr{B}_0) = \omega_1(\mathscr{B}_0)$. De fato, seja $\phi \in \omega\mathscr{B}_0$ então pelo *Lema* 1.2, existe seqüência $(\phi_n)_n$ em $\mathscr{B}_0$ e $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} S(t_n)\phi_n = \phi.$$

Segue portanto de (1.17) que $\lim_{n\to\infty} S_1(t_n)\phi_n = \phi$ e novamente via *Lema* 1.2, $\phi \in \omega_1(\mathscr{B}_0)$. Logo $\omega(\mathscr{B}_0) \subset \omega_1(\mathscr{B}_0)$. Para mostrar a inclusão inversa o raciocínio é o mesmo. Portanto

$$\omega(\mathscr{B}_0) = \omega_1(\mathscr{B}_0). \tag{1.18}$$

Como $S_1(t)$ é uniformemente compacto para t grande, de maneira análoga a prova do *Lema* 1.3, $\omega_1(\mathscr{B}_0) \neq \varnothing$ é compacto, pois $\overline{\bigcup_{t\geq s} S_1(t)\mathscr{B}_0}$ são não vazios, fechados e decrescentes e por hipótese $\overline{\bigcup_{t\geq s} S_1(t)\mathscr{B}_0}$ é compacto (observe que não podemos concluir de imediato que $\omega_1(\mathscr{B}_0)$ é invariante porque $S_1(t)$ não necessariamente satisfaz as propriedades de semigrupo). Portanto segue de (1.18) que $\omega(\mathscr{B}_0) \neq \varnothing$ é compacto. Resta-nos mostrar que $\omega(\mathscr{B}_0)$ é invariante, isto é, $S(t)\omega(\mathscr{B}_0) = \omega(\mathscr{B}_0)$ para todo $t \geq 0$.

$\underline{S(t)\omega(\mathscr{B}_0) \subset \omega(\mathscr{B}_0)}$: De fato, seja $\phi \in S(t)\omega(\mathscr{B}_0)$ (t arbitrário) então existe $\Psi \in \omega(\mathscr{B}_0)$ tal que $\phi = S(t)\Psi$. Portanto existe seqüência $(\Psi_n)_n$ em $\mathscr{B}_0$ e $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} S(t_n)\Psi_n = \Psi.$$

Como $S(t)$ é semigrupo contínuo, temos que

$$\lim_{n\to\infty} S(t+t_n)\Psi_n = \lim_{n\to\infty} S(t)S(t_n)\Psi_n = S(t)\Psi = \phi.$$

Observe agora que $t_n + t \to \infty$ quando $n \to \infty$ e $\Psi_n \in \mathscr{B}_0$ logo pelo *Lema* 1.2, $\phi \in \omega(\mathscr{B}_0)$.

$\underline{S(t)\omega(\mathscr{B}_0) \supset \omega(\mathscr{B}_0)}$: De fato, seja $\phi \in \omega(\mathscr{B}_0)$, logo pelo *Lema* 1.2, existe seqüência $(\phi_n)_n$ em $\mathscr{B}_0$ e $t_n \to \infty$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} S(t_n)\phi_n = \phi. \tag{1.19}$$

Fixe $s > 0$, logo

$$\lim_{n\to\infty} S(t_n - s)\phi_n = \lim_{n\to\infty} (S_1(t_n - s)\phi_n + S_2(t_n - s)\phi_n) = \phi.$$

Tomando agora n suficientemente grande tal que $t_n - s \geq t_1(\mathscr{B}_0)$, obtemos pela hipótese (2) que

$$S_1(t_n - s)\phi_n \in \overline{\bigcup_{t\geq t_1} S_1(t)\mathscr{B}_0},$$

o qual é compacto. Portanto existe subseqüência (ϕ_{n_i}) e $t_{n_i} \to \infty$ quando $n_i \to \infty$ tal que

$$\lim_{n_i\to\infty} S_1(t_{n_i} - s)\phi_{n_i} = \Psi.$$

Por (1.17) segue que

$$\lim_{n_i\to\infty} S(t_{n_i} - s)\phi_{n_i} = \Psi \in \omega(\mathscr{B}_0).$$

Como $\{S(t) : t \geq 0\}$ é contínuo temos que

$$\lim_{n_i\to\infty} S(t_{n_i})\phi_{n_i} = S(s)\Psi. \tag{1.20}$$

Segue portanto de (1.19), (1.20) e da unicidade do limite que

$$\phi = S(s)\Psi\,, \quad \Psi \in \omega(\mathscr{B}_0).$$

Portanto $\phi \in S(s)\omega(\mathscr{B}_0)$ o que implica que $\omega(\mathscr{B}_0) \subset S(s)\omega(\mathscr{B}_0)$, $\forall\, s \geq 0$. ■

Teorema 1.7 (Existência do atrator) *Sejam E um espaço de Banach e considere $\{S(t) : t \geq 0\}$ semigrupo de operadores contínuos de E em E, satisfazendo as hipóteses $(1) - (3)$ do Lema 1.4. Tome $\mathscr{U} \subset E$ aberto e $\mathscr{B} \subset \mathscr{U}$ limitado que seja absorvente em $\mathscr{U}$. Então $\mathscr{A} = \omega(\mathscr{B})$ é um atrator compacto que atrai cada conjunto limitado de $\mathscr{U}$.*

Prova: Pelo *Lema* 1.4, como $\mathscr{B}$ é limitado, temos que $\omega(\mathscr{B}) \neq \varnothing$, compacto e invariante. Resta-nos mostrar que $\mathscr{A} = \omega(\mathscr{B})$ atrai os limitados de $\mathscr{U}$. Suponha por absurdo, isto é, que exista $\mathscr{B}_0 \subset \mathscr{U}$ limitado tal que $\mathscr{A}$ não atrai $\mathscr{B}_0$, ou seja

$$\lim_{t \to \infty} dist_E(S(t)\mathscr{B}_0, \mathscr{A}) \neq 0.$$

Então existe $\delta > 0$ tal que $dist\,(S(t)\mathscr{B}_0, \mathscr{A}) \geq \delta > 0$. Logo existem seqüências $t_n \to \infty$ e $(\phi_n) \subset \mathscr{B}_0$ tal que

$$dist_E(S(t_n)\phi_n, \mathscr{A}) \geq \frac{\delta}{2} > 0\,,\ \forall\, n \text{ suficientemente grande.} \tag{1.21}$$

Como $\mathscr{B}$ é absorvente temos que $S(t)\mathscr{B}_0 \subset \mathscr{B}$ para todo $t \geq t_0(\mathscr{B}_0)$. Logo para n suficientemente grande, $S(t_n)\phi_n \in \mathscr{B}$. Como $S_1(t)$ é uniformemente compacto para t grande, temos que

$$\overline{\bigcup_{t \geq t_1(\mathscr{B}_0)} S_1(t)\mathscr{B}_0}$$

é compacto. Tomando $t_n \geq t_1(\mathscr{B}_0)$ tem-se

$$S_1(t_n)\phi_n \in \overline{\bigcup_{t \geq t_1(\mathscr{B}_0)} S_1(t)\mathscr{B}_0}.$$

Logo existe subseqüência $S_1(t_{n_i})\phi_{n_i}$ tal que

$$\lim_{n_i \to \infty} S_1(t_{n_i})\phi_{n_i} = \phi$$

que por (1.17) temos que

$$\lim_{n_i \to \infty} S(t_{n_i})\phi_{n_i} = \phi.$$

Como $\{S(t) : t \geq 0\}$ é contínuo temos

$$\lim_{n_i \to \infty} S(t_{n_i} - t_1)S(t_1)\phi = \lim_{n_i \to \infty} S(t_{n_i})\phi_{n_i} = \phi,$$

pois $S(t_1)\phi \in \mathscr{B}$. Como $t_{n_i} - t_1 \to \infty$ e $S(t_1)\phi \in \mathscr{B}$ segue do *Lema* 1.2 que $\phi \in \omega(\mathscr{B}) = \mathscr{A}$. Portanto

$$\lim_{n_i \to \infty} dist_E(S(t_{n_i})\phi_{n_i}, \mathscr{A}) = 0$$

que contradiz (1.21). $\blacksquare$

Portanto, juntando o *Teorema* 1.5 e o *Teorema* 1.7 podemos resumir a teoria no seguinte

Teorema 1.8 (Existência do atrator) *Assumimos que H seja um espaço métrico completo e que $\{S(t) : t \geq 0\}$ seja uma família de operadores contínuos de H em H satisfazendo as propriedades de semigrupo. Suponha também que $\{S(t) : t \geq 0\}$ satisfaça a hipótese (1.12) ou (1.14)-(1.16) do Lema 1.4 e que exista um aberto $\mathscr{U} \subset H$ e um conjunto limitado $\mathscr{B} \subset \mathscr{U}$ tal que $\mathscr{B}$ seja absorvente em $\mathscr{U}$. Então $\mathscr{A} = \omega(\mathscr{B})$ é um atrator compacto não-vazio o qual atrai os conjuntos limitados de $\mathscr{U}$.*

Observação 9 (Importante) *Se trocarmos as hipóteses (1.14)-(1.16) do Lema 1.4 pela hipótese mais fraca*

$$\text{O semigrupo} \{S(t) : t \geq 0\} \text{ é assintoticamante compacto em H,} \tag{1.22}$$

isto é, para toda seqüência limitada $\{x_k\}_k$ de H e toda seqüência $t_k \to \infty$, $\{S(t_k)x_k\}_k$ é relativamente compacto em H. Observe que a a hipótese (1.12) implica na hipótese (3.103). Mas elas são na realidade equivalentes (veremos mais adiante). A prova do *Teorema* 1.8 continua válido se trocarmos a hipótese (1.12) ou (1.14)-(1.16) do *Lema* 1.4 por (3.103). A prova de que $\mathscr{A} = \omega(\mathscr{B})$ é a mesma como no caso da hipótese (1.12) (incluindo a prova do *Lema* 1.3 e *Lema* 1.6), pois todas seqüências $\{t_n\}_n$ consideradas são tais que $t_n \to \infty$. A única diferença esta em provar que $\mathscr{A} = \omega(\mathscr{B}) \neq \varnothing$, isto é verdadeiro porque $\omega(\varphi) \neq \varnothing$, $\forall\, \varphi \in \mathscr{B}$ graças a (3.103). Mostra-se similarmente que $\mathscr{A} = \omega(\mathscr{B})$ atrai todo limitado $\mathscr{B}_0 \subset H$.

Observação 10 (O.Goubet e I. Moise) *Para complementarmos a Observação 9, suponha H um espaço métrico uniformemente convexo e assumimos a existência de um conjunto limitado absorvente $\mathscr{B} \subset H$ como no Teorema 1.8, então são equivalentes:*

1. *Hipótese (1.14)-(1.16) do Lema 1.4 (decomposição $S = S_1 + S_2$);*

2. *Hipótese (3.103) (compacidade assintótica).*

Mostraremos somente que (2) $\Rightarrow$ (1): Suponha (2) verdadeiro. O Teorema 1.8 e a Observação 9 implica que $\mathscr{A} = \omega(\mathscr{B})$ é o atrator global para o semigrupo $\{S(t) : t \geq 0\}$. O fecho convexo do fechado $\mathscr{A}$ (a interseção de todos os fechados convexos que contém $\mathscr{A}$), denotado por K, é compacto. Consideremos então a projeção $\prod_K : H \to K$ de H sobre K (um conjunto fechado, convexo, não-vazio). Para toda $\varphi \in H$, temos que

$$S_1(t)\varphi = \prod_K (S(t)\varphi) \in K \text{ (compacto)}$$

$$S_2(t)\varphi = S(t)\varphi - \prod_K (S(t)\varphi).$$

Observe que as propriedades (1.14)-(1.15) são satisfeitas, mostraremos portanto (1.16), isto é, para todo $C \subset H$, $\sup\limits_{\varphi \in C} \|S_2(t)\varphi\|_H \to 0$ quando $t \to \infty$. Supoinha por absurdo que isso não ocorra, então existe seqüência limitada $\{\varphi_j\}$ de H e $t_j \to \infty$ tal que

$$\|S_2(t_j)\varphi_j\|_H \geq \delta > 0, \tag{1.23}$$

para algum $\delta > 0$. Como $\mathscr{B}$ é absorvente e usando (2) vemos que existe uma subseqüencia (o qual denotaremos por t_j) tal que $S(t_j)\varphi_j \to \varphi$ quando $j \to \infty$. Temos portanto que $\varphi \in \omega(\mathscr{B}) = \mathscr{A} \subset K$ e como $\prod_K$ é contínua segue que

$$\lim_{j \to \infty} S_1(t_j)\varphi_j = \lim_{j \to \infty} \prod_K (S(t_j)\varphi_j) = \prod_K \varphi = \varphi;$$

portanto $S_2(t_j)\varphi_j \to 0$ quando $j \to \infty$ e obtemos uma contradiçao com (1.23).

De acordo com as *Observações* 9 e 10 podemos enunciar o *Teorema* mais importante da seção que será usado no trabalho

Teorema 1.9 (Existência de atrator) *Assuma que H é um espaço métrico completo e $\{S(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo de operadores contínuos em H. Se $\{S(t) : t \geq 0\}$ possui um conjunto limitado absorvente $\mathscr{B}$ e é assintoticamente compacto, então $\{S(t) : t \geq 0\}$ possui um atrator global $\mathscr{A}$ satisfazendo:*

1. *$\mathscr{A}$ é compacto;*

2. *$\mathscr{A}$ é invariante, isto é, $S(t)\mathscr{A} = \mathscr{A}$, $\forall\, t \geq 0$;*

3. *$\forall\, \mathscr{B}_0 \subset H$*

$$\lim_{t \to \infty} dist_H(S(t)\mathscr{B}_0; \mathscr{A}) = 0.$$

Visando tornar o presente trabalho auto-suficiente apresentaremos abaixo uma coletânea das definições e resultados que utilizaremos livremente no trabalho.

Capítulo 2

Estimativas a priori

Nesta seção estabelecemos algumas estimativas à priori das soluçoes de (4)-(6). No que se segue $\|.\|$ denotará a norma do espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$.

Lema 2.1 *Seja $f \in L^2(\mathbb{R})$. Então*

$$\|u\|^2 \leq \|u_0\|^2 e^{-\alpha t} + \frac{\|f\|^2}{\alpha^2}(1 - e^{-\alpha t}),\ \forall\, t \geq 0.$$

Além disso, existem uma constantem C_1 dependendo somente de $\|f\|$ e t_0 dependendo de $\|f\|$ e R tal que toda solução de (4)-(5) satisfaz

$$\|u(t)\| \leq C_1\,,\ \ \forall\, t \geq t_0(R),$$

sempre que $\|u_0\| \leq R$.

Prova: Cosidere a equação (4) multiplicada por $2\bar{u}$, isto é,

$$2i\bar{u}u_t + 2\bar{u}u_{xx} - 2|u|^2 v + 2i\alpha|u|^2 = 2\bar{u}f.$$

Tomando a parte imaginária da identidade acima e observando que se $z \in \mathbb{C}$ temos $Im(iz) = Re(z)$, temos

$$2Re(\bar{u}u_t) + 2Im(u_{xx}\bar{u}) + 2\alpha|u|^2 = 2Im(\bar{u}f)$$

integrando a expressão acima, obtemos

$$2Re\int(\bar{u}u_t)\,dx + 2Im\int(u_{xx}\bar{u})\,dx + 2\alpha\int|u|^2\,dx = 2Im\int(\bar{u}f)\,dx.$$

Integração por partes obtemos

$$Im\int u_{xx}\bar{u}\,dx = -Im\int u_x\bar{u}_x\,dx = -Im\int|u_x|^2\,dx = 0$$

e

$$2Re\int \bar{u}u_t\,dx = \frac{d}{dt}\|u\|^2.$$

Portanto

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2 + 2\alpha\|u\|^2 = 2Im\int f\bar{u}\,dx.$$

Agora, usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\left|2Im\int f\bar{u}\,dx\right| \leq 2\int |f||u|\,dx \leq 2\|f\|\,\|u\| \leq \alpha\|u\|^2 + \frac{1}{\alpha}\|f\|^2,$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \alpha\|u\|^2 \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|^2.$$

E assim

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\alpha t}\|u\|^2\right) \leq \frac{\|f\|^2}{\alpha}e^{\alpha t}.$$

Integrando ambos os lados com respeito à t, obtemos

$$\|u\|^2 \leq \|u_0\|^2 e^{-\alpha t} + \frac{\|f\|^2}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}).$$

Para finalizar, se $\|u_0\| \leq R$, então tomando a constante $C_1 = \dfrac{2\|f\|^2}{\alpha^2}$ obtemos

$$\|u\|^2 \leq \|u_0\|^2 e^{-\alpha t} + \frac{\|f\|^2}{\alpha^2} \leq \frac{2\|f\|^2}{\alpha^2}$$

se e somente se,

$$\|u_0\|^2 e^{-\alpha t} + \frac{\|f\|^2}{\alpha^2} \leq R^2 e^{-\alpha t} + \frac{2\|f\|^2}{\alpha^2}$$

Ou seja, se e somente se

$$t \geq \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{\alpha^2 R^2}{\|f\|^2}\right) := t_0(R). \quad \blacksquare$$

O próximo *Teorema* nos ajudará em estabeler a existência de um conjunto absorvente em X_1.

Lema 2.2 *Suponha que $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, $(u_0, v_0) \in H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ e que (u, v) seja solução de (4)-(6). Então existe uma constante $C = C(\|u_0\|_{H^1}, \|f\|, \|g\|, \|v_0\|)$ tal que*

$$\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R})} + \|v\|^2 \leq C. \tag{2.1}$$

Além disso, existe uma constante positiva M que depende de $(\alpha, \beta, \gamma, \|f\|, \|g\|)$ tal que toda solução de (4)-(6) satisfaz

$$\|(u(t), v(t))\|_{H^1 \times L^2(\mathbb{R})} \leq M\,, \ \ \forall\, t \geq t_1(R), \tag{2.2}$$

onde $t_1(R)$ depende de $(\alpha, \beta, \gamma, \|f\|, \|g\|, R)$ sempre que $\|(u_0, v_0)\|_{H^1 \times L^2(\mathbb{R})} \leq R$.

Prova: Multiplicando a equação (4) por $-2(\bar{u}_t + \alpha\bar{u})$, obtemos

$$\begin{aligned} &- \ 2iu_t\bar{u}_t - 2i\alpha u_t\bar{u} - 2\bar{u}_t u_{xx} - 2\alpha\bar{u}u_{xx} + 2uv\bar{u}_t + 2\alpha|u|^2 v - 2i\alpha u\bar{u}_t \\ &- \ 2\alpha^2 i|u|^2 = -2f\bar{u}_t - 2\alpha f\bar{u}. \end{aligned}$$

Tomando a parte real e lembrando que se $z \in \mathbb{C}$ então $Re(iz) = -Im(z)$, ficamos com

$$\begin{aligned} &2Im(u_t\bar{u}_t) + 2\alpha Im(u_t\bar{u}) - 2Re(\bar{u}_t u_{xx}) - 2\alpha Re(\bar{u}u_{xx}) + 2Re(uv\bar{u}_t) + 2\alpha|u|^2 v \\ &+2\alpha Im(u\bar{u}_t) = -2Re(f\bar{u}_t) - 2\alpha Re(f\bar{u}). \end{aligned}$$

Observe que $Im(u_t\bar{u}_t) = Im(|u_t|^2) = 0$. Portanto, integrando a última expressão com respeito a x, obtemos

$$\begin{aligned} &2\alpha Im\int u_t\bar{u}\,dx - 2Re\int \bar{u}_t u_{xx}\,dx - 2\alpha Re\int \bar{u}u_{xx}\,dx + 2Re\int uv\bar{u}_t\,dx \\ + \ &2\alpha\int |u|^2 v\,dx + 2\alpha Im\int u\bar{u}_t\,dx = -2Re\int f\bar{u}_t\,dx - 2\alpha Re\int f\bar{u}dx \end{aligned} \tag{2.3}$$

Vamos analisar cada integral de (2.3).

1. Usando integração por partes, temos que

$$-2Re\int \bar{u}_t u_{xx}\,dx = 2Re\int \bar{u}_{xt}u_x\,dx = \int \frac{d}{dt}(u_x\bar{u}_x)dx = \frac{d}{dt}||u_x||^2$$

2. Como f não depende de t, temos

$$-2Re\int f\bar{u}_t\,dx = \frac{d}{dt}\left(-2Re\int f\bar{u}\,dx\right).$$

3. A soma do primeiro termo com o último termo do lado esquerdo de (2.3) se anula. De fato,

$$\begin{aligned} 2\alpha Im\int u_t\bar{u}\,dx + 2\alpha Im\int u\bar{u}_t\,dx &= 2\alpha Im\int (u_t\bar{u} + u\bar{u}_t)\,dx \\ &= 2\alpha\frac{d}{dt}\left(Im\int |u|^2\,dx\right) = 0. \end{aligned}$$

4. Integrando por partes

$$-2\alpha Re\int \bar{u}u_{xx}\,dx = 2\alpha Re\int \bar{u}_x u_x\,dx = 2\alpha Re\int |u_x|^2\,dx = 2\alpha\|u_x\|^2.$$

5. Como v é uma função de valores reais

$$2Re\int u\bar{u}_t v\,dx = \frac{d}{dt}\int (|u|^2)v\,dx - \int |u|^2 v_t\,dx.$$

Substituindo as expressões acima na equação (2.3), obtemos

$$\frac{d}{dt}\left(\|u_x\|^2 + \int |u|^2 v\,dx + 2Re\int f\bar{u}\,dx\right) + 2\alpha\|u_x\|^2 +$$

$$+2\alpha\int |u|^2 v\,dx + 2\alpha Re\int f\bar{u}\,dx - \int |u|^2 v_t\,dx = 0. \tag{2.4}$$

Agora, multiplicando (5) por $|u|^2$ e integrando com respeito a x, obtemos

$$\int |u|^2 v_t\,dx + \beta\int v|u|^2\,dx + \gamma\int (|u|^2)_x|u|^2\,dx = \int g|u|^2\,dx.$$

Por outro lado, observe que $\int (|u|^2)_x|u|^2\,dx = 0$. Logo

$$-\int |u|^2 v_t\,dx = \beta\int |u|^2 v\,dx - \int g|u|^2\,dx. \tag{2.5}$$

Multiplicando agora (5) por $2v$ e em seguida integrando com respeito a x obtemos

$$2\int vv_t\,dx + 2\beta\int v^2\,dx + 2\gamma\int v(|u|^2)_x\,dx = 2\int gv\,dx,$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}\|v\|^2 + 2\beta\|v\|^2 + 2\gamma\int (|u|^2)_x v\,dx = 2\int gv\,dx. \tag{2.6}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\int (|u|^2)_x v\,dx &= 2Re\int \bar{u}_x(uv)\,dx = 2Re\int \bar{u}_x(iu_t + u_{xx} + i\alpha u - f)\,dx\\ &= -2Im\int \bar{u}_x u_t\,dx + 2Re\int \bar{u}_x u_{xx}\,dx - 2\alpha Im\int \bar{u}_x u\,dx\\ &- 2Re\int \bar{u}_x f\,dx\\ &= -2Im\int \bar{u}_x u_t\,dx - 2\alpha Im\int \bar{u}_x u\,dx - 2Re\int \bar{u}_x f\,dx,\end{aligned} \tag{2.7}$$

onde usamos o fato que $Re \int \bar{u}_x u_{xx}\, dx = 0$. Além disso,

$$
\begin{aligned}
-2Im \int \bar{u}_x u_t\, dx &= -\left(Im \overline{\int \bar{u}_t u_x\, dx} + Im \int \bar{u}_x u_t\, dx \right) \\
&= -\left(-Im \int \bar{u}_t u_x + Im \int \bar{u}_x u_t\, dx \right) \\
&= -\left(Im \int \bar{u}_{xt} u\, dx + Im \int \bar{u}_x u_t\, dx \right) \\
&= -\left(Im \int \bar{u}_{xt} u + \bar{u}_x u_t\, dx \right) \\
&= -\left(Im \int \frac{d}{dt}(\bar{u}_x u)\, dx \right).
\end{aligned}
$$

Portanto, substituindo em (2.7), ficamos com

$$
\int (|u|^2)_x v\, dx = -\frac{d}{dt} Im \int \bar{u}_x u\, dx - 2\alpha Im \int u\bar{u}_x\, dx - 2Re \int f\bar{u}_x\, dx. \tag{2.8}
$$

Somando (2.4), (2.5), (2.6) e (2.8), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\|u_x\|^2 + \|v\|^2 + \int |u|^2 v\, dx + 2Re \int f\bar{u}\, dx - 2\gamma Im \int u\bar{u}_x\, dx \right) \\
&+2\alpha \left(\|u_x\|^2 + \|v\|^2 + \int |u|^2 v\, dx + 2Re \int f\bar{u}\, dx - 2\gamma Im \int u\bar{u}_x\, dx \right) \\
&= 2(\alpha - \beta)\|v\|^2 + 2\alpha Re \int f\bar{u}\, dx - \beta \int |u|^2 v\, dx + \int g|u|^2\, dx \\
&+4\gamma Re \int f\bar{u}_x\, dx + 2\int gv\, dx.
\end{aligned}
$$

Finalmente, denotando por $\xi(t) = (u(t), v(t))$,

$$
J(\xi(t)) = \|u_x\|^2 + ||v||^2 + \int |u|^2 v\, dx + 2Re \int f\bar{u}\, dx - 2\gamma Im \int u\bar{u}_x\, dx \tag{2.9}
$$

e

$$
\begin{aligned}
K(\xi(t)) &= 2(\alpha - \beta)\|v\|^2 + 2\alpha Re \int f\bar{u}\, dx - \beta \int |u|^2 v\, dx + \int g|u|^2\, dx \\
&+ 4\gamma Re \int f\bar{u}_x\, dx + 2\int gv\, dx,
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

teremos

$$
\frac{d}{dt} J(\xi(t)) + 2\alpha J(\xi(t)) = K(\xi(t)). \tag{2.11}
$$

Afirmação 2.1 *Existe constante* $C_1 = C_1(\gamma, \|f\|, \|u\|)$ *tal que*

$$J(\xi(t)) \geq \frac{1}{2}\left(\|u_x\|^2 + \|v\|^2\right) - C_1. \tag{2.12}$$

De fato, vamos estimar cada integral de $J(\xi(t))$. Observe que

$$\|u\|_\infty \leq \sqrt{2}\|u\|^{1/2}\|u_x\|^{1/2}.$$

Logo

1.

$$\begin{aligned}
\left|\int |u|^2 v\, dx\right| &\leq \int |u|^2|v|\, dx \leq \|u\|_\infty\|u\|\,\|v\| \leq \sqrt{2}\|u\|^{\frac{1}{2}}\,\|u_x\|^{\frac{1}{2}}\,\|u\|\,\|v\| \\
&= \sqrt{2}\|u\|^{\frac{3}{2}}\,\|v\|\,\|u_x\|^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon_2\|v\|^2 + \frac{1}{2\epsilon_2}\|u\|^3\,\|u_x\| \\
&\leq \epsilon_2\|v\|^2 + \epsilon_1\,\|u_x\|^2 + \frac{1}{4\epsilon_1}\left(\frac{\|u\|^3}{2\epsilon_2}\right)^2 \\
&\leq \epsilon_1\|u_x\|^2 + \epsilon_2\|v\|^2 + \frac{1}{16\epsilon_1\epsilon_2^2}\|u\|^6.
\end{aligned}$$

2.

$$\left|2Re\int f\bar{u}\, dx\right| \leq 2\int |f|\,|u|\, dx \leq 2\|f\|\|u\| \leq \|f\|^2 + \|u\|^2.$$

3.

$$\begin{aligned}
\left|-2\gamma Im\int u\bar{u}_x\, dx\right| &\leq 2|\gamma|\int |u|\,|u_x|\, dx \leq 2|\gamma|\|u\|\|u_x\| \\
&\leq \epsilon_1\|u_x\|^2 + \frac{1}{4\epsilon_1}4\gamma^2\|u\|^2 \\
&= \epsilon_1\|u_x\|^2 + \frac{\gamma^2}{\epsilon_1}\|u\|^2.
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos que

$$\begin{aligned}
J(\xi(t)) &\geq \|u_x\|^2 + \|v\|^2 - \epsilon_1\|u_x\|^2 - \epsilon_2\|v\|^2 - \epsilon_1\|u_x\|^2 \\
&- \left(\frac{1}{16\epsilon_1\epsilon_2^2}\|u\|^6 + \|u\|^2 + \|f\|^2 + \frac{\gamma^2}{\epsilon_1}\|u\|^2\right) \\
&= (1 - 2\epsilon_1)\|u_x\|^2 + (1 - \epsilon_2)\|v\|^2 \\
&- \left(\frac{1}{16\epsilon_1\epsilon_2^2}\|u\|^6 + \|u\|^2 + \|f\|^2 + \frac{\gamma^2}{\epsilon_1}\|u\|^2\right).
\end{aligned}$$

Tomando $\epsilon_1 = \frac{1}{4}$ e $\epsilon_2 = \frac{1}{2}$, segue-se que

$$J(\xi(t)) \geq \frac{1}{2}\left(\|u_x\|^2 + \|v\|^2\right) - C_1(\|u\|, \|f\|), \tag{2.13}$$

onde $C_1 = \|u\|^6 + (1 + 4\gamma^2)\|u\|^2 + \|f\|^2$. O que prova a afirmação.

Afirmação 2.2 *Existe uma constante* $C_2 = C_2(\alpha, \beta, \gamma, \|f\|, \|g\|, \|u\|)$ *tal que*

$$K(\xi(t)) \leq \frac{\alpha}{2}\left(\|u_x\|^2 + \|v\|^2\right) + C_2. \tag{2.14}$$

O raciocínio é o mesmo, senão vejamos

1. De maneira análoga ao *item (1)* da afirmação anterior, mostra-se que

$$\left|-\beta \int |u|^2 v\, dx\right| \quad \leq \quad \epsilon_1\|u_x\|^2 + \epsilon_2\|v\|^2 + \frac{\beta^4}{16\epsilon_1\epsilon_2^2}\|u\|^6$$

2. $$\left|2\alpha Re \int f\bar{u}\, dx\right| \leq 2\alpha \int |f||u|\, dx \leq \alpha\|f\|^2 + \alpha\|u\|^2.$$

3. $$\begin{aligned} \left|\int g|u|^2\, dx\right| &\leq \int |u|^2|g|\, dx \leq \|u\|_\infty\|u\|\|g\| \leq \sqrt{2}\|u\|^{\frac{3}{2}}\|u_x\|^{\frac{1}{2}}\|g\| \\ &\leq \epsilon_1(\|u_x\|^{1/2})^4 + C(\epsilon_1)(\sqrt{2}\|g\|\|u\|^{3/2})^{4/3} \\ &\leq \epsilon_1\|u_x\|^2 + \left(\frac{3}{4}\right)\epsilon_1^{-1/3}\|g\|^{4/3}\|u\|^2, \end{aligned}$$

   onde usamos o fato que $C(\epsilon_1) = (4\epsilon_1)^{-1/3}\left(\frac{3}{4}\right)$.

4. $$\begin{aligned} \left|4\gamma Im \int f\bar{u}_x\, dx\right| &\leq 4|\gamma|\|f\|\|u_x\| \leq \epsilon_1\|u_x\|^2 + \frac{1}{4\epsilon_1}16\gamma^2\|f\|^2 \\ &\leq \epsilon_1\|u_x\|^2 + \frac{4\gamma^2}{\epsilon_1}\|f\|^2. \end{aligned}$$

5. Por último, temos

$$\left|2\int gv\, dx\right| \quad \leq \quad 2\|g\|\|v\| \leq \epsilon_2\|v\|^2 + \frac{1}{\epsilon_2}\|g\|^2.$$

Portanto, substituindo na expressão de $K(\xi(t))$, ficaremos com

$$\begin{aligned} K(\xi(t)) &\leq 3\epsilon_1\|u_x\|^2 + 2\epsilon_2\|v\|^2 \\ &+ \left(\frac{\beta^4}{16\epsilon_1\epsilon_2^2}\|u\|^6 + \left(\frac{3}{4}\right)\epsilon_1^{-1/3}\|g\|^{4/3}\|u\|^2 + \frac{4\gamma^2}{\epsilon_1} + \frac{\|g\|^2}{\epsilon_2}\right). \end{aligned}$$

Escolhendo $\epsilon_1 = \dfrac{\alpha}{6}$, $\epsilon_2 = \dfrac{\alpha}{4}$, teremos

$$\begin{aligned} K(\xi(t)) &\leq \frac{\alpha}{2}\left(\|u_x\|^2 + \|v\|^2\right) \\ &+ \left(\frac{6\beta^4}{\alpha^3}\|u\|^6 + \left(\frac{6}{\alpha}\right)^{1/3}\left(\frac{3}{4}\right)\|g\|^{4/3}\|u\|^2 + \frac{24\gamma^2}{\alpha}\|f\|^2 + \frac{4}{\alpha}\|g\|^2\right). \end{aligned}$$

Agora observe que

$$\left(\frac{6}{\alpha}\right)^{1/3}\left(\frac{3}{4}\right)\|g\|^{4/3}\|u\|^2 \leq \frac{\|u\|^3}{3} + \sqrt{\frac{9}{8\alpha}}\|g\|^2.$$

Portanto,

$$K(\xi(t)) \leq \frac{\alpha}{2}\left(\|u_x\|^2 + \|v\|^2\right) + C_2, \tag{2.15}$$

onde

$$C_2 := \left(\frac{6\beta^4}{\alpha^3} + \frac{1}{3}\right)\|u\|^6 + \frac{24\gamma^2}{\alpha}\|f\|^2 + \left(\frac{4}{\alpha} + \sqrt{\frac{9}{8\alpha}}\right)\|g\|^2$$

Com isso, teremos

$$K(\xi(t)) \leq \frac{\alpha}{2}(\|u_x\|^2 + \|v\|^2) + C_2 \leq \alpha J(\xi(t)) + \alpha C_1 + C_2, \tag{2.16}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}J(\xi(t)) + 2\alpha J(\xi(t)) &= K(\xi(t)) \\ &\leq \alpha J(\xi(t)) + \alpha C_1 + C_2, \end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}J(\xi(t)) + \alpha J(\xi(t)) \leq \alpha C_1 + C_2,$$

onde

$$C_1(\gamma, \|f\|, \|u\|) := \|u\|^6 + (4\gamma^2 + 1)\|u\|^2 + \|f\|^2 \tag{2.17}$$

e

$$C_2(\alpha, \beta, \gamma, \|f\|, \|g\|, \|u\|) := \left(\frac{6\beta^4}{\alpha^3} + \frac{1}{3}\right)\|u\|^6 + \frac{24\gamma^2}{\alpha}\|f\|^2 + \left(\frac{4}{\alpha} + \sqrt{\frac{9}{8\alpha}}\right)\|g\|^2. \tag{2.18}$$

Agora, pelo *Lema* 2.1, temos que

$$\begin{aligned}
\alpha C_1 &\leq \left[\left(\|u_0\|^2 e^{-\alpha t} + \frac{\|f\|^2}{\alpha^2}\right)^3 + (4\gamma^2+1)\left(\|u_0\|^2 e^{-\alpha t} + \frac{\|f\|^2}{\alpha^2}\right) + \|f\|^2\right] \\
&\leq \alpha\left[8\left(\|u_0\|^6 e^{-3\alpha t} + \frac{\|f\|^6}{\alpha^6}\right) + (4\gamma^2+1)\|u_0\|^2 e^{-\alpha t} + \left(\frac{\alpha^2+4\gamma^2+1}{\alpha^2}\right)\|f\|^2\right] \\
&\leq \left[8\alpha\|u_0\|^6 + \alpha(4\gamma^2+1)\|u_0\|^2\right] e^{-(\alpha/2)t} + \left[\frac{8\|f\|^6}{\alpha^5} + \left(\frac{\alpha^2+4\gamma^2+1}{\alpha}\right)\|f\|^2\right]
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
C_2 &\leq \left(\frac{6\beta^4}{\alpha^3} + \frac{1}{3}\right)\left(\|u_0\|^2 e^{-\alpha t} + \frac{\|f\|^2}{\alpha^2}\right)^3 + \frac{24\gamma^2}{\alpha}\|f\|^2 + \left(\frac{4}{\alpha} + \sqrt{\frac{9}{8\alpha}}\right)\|g\|^2 \\
&\leq 8\left(\frac{6\beta^4}{\alpha^3} + \frac{1}{3}\right)\left(\|u_0\|^6 e^{-3\alpha t} + \frac{\|f\|^6}{\alpha^6}\right) + \frac{24\gamma^2}{\alpha}\|f\|^2 + \left(\frac{4}{\alpha} + \sqrt{\frac{9}{8\alpha}}\right)\|g\|^2 \\
&\leq \left(\frac{144\beta^4 + 8\alpha^3}{3\alpha^3}\right)\|u_0\|^6 e^{-(\alpha/2)t} + \left(\frac{144\beta^4+8\alpha^3}{3\alpha^9}\right)\|f\|^6 + \left(\frac{\alpha^2+4\gamma^2+1}{\alpha}\right)\|f\|^2.
\end{aligned}$$

Isto mostra que

$$\begin{aligned}
\alpha C_1 + C_2 \leq &\left[\left(\frac{24\alpha^4 + 144\beta^4 + 8\alpha^3}{3\alpha^3}\right)\|u_0\|^6 + \alpha(4\gamma^2+1)\|u_0\|^2\right] e^{-(\alpha/2)t} \\
+ &\left[\left(\frac{24\alpha^4+144\beta^4+8\alpha^3}{3\alpha^9}\right)\|f\|^6 + \left(\frac{\alpha^2+28\gamma^2+1}{\alpha}\right)\|f\|^2 + \left(\frac{4}{\alpha} + \sqrt{\frac{9}{8\alpha}}\right)\|g\|^2\right].
\end{aligned}$$

Denotaremos

$$\theta_1 := \left(\frac{24\alpha^4 + 144\beta^4 + 8\alpha^3}{3\alpha^3}\right)\|u_0\|^6 + \alpha(4\gamma^2+1)\|u_0\|^2 \tag{2.19}$$

e

$$\theta_2 := \left(\frac{24\alpha^4+144\beta^4+8\alpha^3}{3\alpha^9}\right)\|f\|^6 + \left(\frac{\alpha^2+28\gamma^2+1}{\alpha}\right)\|f\|^2 + \left(\frac{4}{\alpha} + \sqrt{\frac{9}{8\alpha}}\right)\|g\|^2. \tag{2.20}$$

Assim, existem constantes θ_1 e θ_2 independentes do tempo t tal que para todo $t \geq 0$

$$\frac{d}{dt}J(\xi(t)) + \alpha J(\xi(t)) \leq \theta_1 e^{-(\alpha/2)t} + \theta_2.$$

Logo, denotando por $\xi_0 = (u_0, v_0)$, segue da *desigualdade de Gronwall* que

$$J(\xi(t)) \leq J(\xi_0)\, e^{-\alpha t} + \frac{2\theta_1}{\alpha} e^{-(\alpha/2)t} + \frac{\theta_2}{\alpha}, \ \forall\, t \geq 0.$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\|u_x\|^2+\|v\|^2 &\leq 2J(\xi(t))+2C_1 \leq J(\xi_0)\,e^{-\alpha t}+\frac{2\theta_1}{\alpha}e^{-(\alpha/2)t}+\frac{\theta_2}{\alpha}+2C_1 \\
&\leq 2J(\xi_0)\,e^{-\alpha t}+\frac{4\theta_1}{\alpha}\,e^{-(\alpha/2)t}+\frac{2\theta_2}{\alpha} \qquad (2.21)\\
&+ \left[16\|u_0\|^6+(8\gamma^2+2)\|u_0\|^2\right]e^{-(\alpha/2)t} \\
&+ \left[\frac{16\|f\|^6}{\alpha^6}+\left(\frac{2\alpha^2+8\gamma^2+2}{\alpha^2}\right)\|f\|^2\right] \\
&= \left[2J(\xi_0)+\frac{4\theta_1}{\alpha}+16\|u_0\|^6+(8\gamma^2+2)\|u_0\|^2\right]e^{-(\alpha/2)t} \\
&+ \left[\frac{2\theta_2}{\alpha}+\frac{16\|f\|^6}{\alpha^6}+\left(\frac{2\alpha^2+8\gamma^2+2}{\alpha^2}\right)\|f\|^2\right]. \qquad (2.22)
\end{aligned}
$$

Aplicando novamente o *Lema* 2.1, temos que

$$\|u\|^2 \leq \|u_0\|^2 e^{-(\alpha/2)t}+\frac{\|f\|^2}{\alpha^2}. \qquad (2.23)$$

Portanto de somando (2.22) com (2.23) temos

$$\|(u(t),v(t))\|^2_{H^1\times L^2(\mathbb{R})} \leq \chi_1 e^{-(\alpha/2)t}+\chi_2\,,\ \forall\, t\geq 0, \qquad (2.24)$$

onde

$$\chi_1 = 2J(\xi_0)+\frac{4\theta_1}{\alpha}+17\|u_0\|^6+(8\gamma^2+2)\|u_0\|^2$$

e

$$\chi_2 = \frac{2\theta_2}{\alpha}+\frac{16\|f\|^6}{\alpha^6}+\left(\frac{2\alpha^2+8\gamma^2+3}{\alpha^2}\right)\|f\|^2.$$

Agora note que

$$
\begin{aligned}
2J(\xi_0) &= 2\left(\|u_{0x}\|^2+\|v_0\|^2+\int |u_0|^2 v_0\,dx+2Re\int f\bar{u}_0\,dx-2\gamma\int u_0\bar{u}_{0x}\,dx\right) \\
&\leq 2(\|u_0\|^2{}_{H^1(\mathbb{R})}+\|v_0\|^2+\|u_{0x}\|^2+\|v_0\|^2+\frac{\|u_0\|^6}{16} \\
&+ \|u_0\|^2+\|f\|^2+\|u_{0x}\|^2+\gamma^2\|u_0\|^2) \\
&\leq (8+2\gamma^2)\|u_0\|^2{}_{H^1(\mathbb{R})}+\frac{\|u_0\|^6_{H^1(\mathbb{R})}}{8}+4\|v_0\|^2+4\|f\|^2. \qquad (2.25)
\end{aligned}
$$

Temos também que

$$\frac{4\theta_1}{\alpha} \leq \left(\frac{96\alpha^4+576\beta^4+32\alpha^3}{3\alpha^4}\right)\|u_0\|^6_{H^1(\mathbb{R})}+(16\gamma^2+4)\|u_0\|^2{}_{H^1(\mathbb{R})}. \qquad (2.26)$$

Segue portanto de (2.25) e (2.26) que

$$\chi_1 \leq \lambda_1 \|u_0\|^2_{H^1(\mathbb{R})} + \lambda_2 \|u_0\|^6_{H^1(\mathbb{R})} + 4\|v_0\|^2 + 2\|f\|^2, \tag{2.27}$$

onde

$$\lambda_1 = 14 + 24\gamma^2$$

e

$$\lambda_2 = \frac{507\alpha^4 + 576\beta^4 + 32\alpha^3}{3\alpha^4}.$$

No outro caso

$$\begin{aligned} \chi_2 &= \frac{2}{\alpha}\theta_2 + \frac{16}{\alpha^6}\|f\|^6 + \left(\frac{2\alpha^2 + 8\gamma^2 + 3}{\alpha^2}\right)\|f\|^2 \\ &= \lambda_3\|f\|^6 + \lambda_4\|f\|^2 + \lambda_5\|g\|^2, \end{aligned} \tag{2.28}$$

onde

$$\lambda_3 = \frac{96\alpha^4 + 288\beta^4 + 16\alpha^3}{3\alpha^{10}}, \ \lambda_4 = \frac{4\alpha^2 + 64\gamma^2 + 5}{\alpha^2}, \ \lambda_5 = \frac{8}{\alpha^2} + \sqrt{\frac{9}{2\alpha^3}}.$$

Substituindo portanto (2.27) e (2.28) em (2.24) concluímos que

$$\|(u(t), v(t))\|^2{}_{H^1\times L^2(\mathbb{R})} \leq \eta_1 \, e^{-(\frac{\alpha}{2})t} + \eta_2\,, \ \forall\, t \geq 0, \tag{2.29}$$

onde

$$\eta_1 = \eta_1(\alpha, \beta, \gamma, \|f\|, \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}, \|v_0\|) := \lambda_1\|u_0\|^2{}_{H^1(\mathbb{R})} + \lambda_2\|u_0\|^6_{H^1(\mathbb{R})} + 4\|v_0\|^2 + 2\|f\|^2$$

e

$$\eta_2 = \eta_2(\alpha, \beta, \gamma, \|f\|, \|g\|) := \lambda_3\|f\|^6 + \lambda_4\|f\|^2 + \lambda_5\|g\|^2.$$

Segue portanto de (2.29) que existe uma constante C que depende de $(\alpha, \beta, \gamma, \|f\|, \|g\|, \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})}, \|v_0\|)$ tal que vale (2.1). Mostraremos agora (2.2). Suponha que $\|(u_0, v_0)\|_{H^1\times L^2(\mathbb{R})} \leq R$. Então

$$\begin{aligned} \eta_1 e^{-(\frac{\alpha}{2})t} + \eta_2 &\leq (\lambda_1 R^2 + \lambda_2 R^3 + 4R^2 + 2\|f\|^2)e^{-(\frac{\alpha}{2})t} + \eta_2 \\ &= [(\lambda_1 + 4)R^2 + \lambda_2 R^3 + 2\|f\|^2]e^{-(\frac{\alpha}{2})t} + \eta_2. \end{aligned}$$

Basta tomar M que dependerá de $(\alpha, \beta, \gamma, \|f\|, \|g\|)$ de tal modo que $M^2 = 2\eta_2$ e teremos

$$\begin{aligned} & [(\lambda_1 + 4)R^2 + \lambda_2 R^3 + 2\|f\|^2]e^{-(\frac{\alpha}{2})t} + \eta_2 \leq 2\eta_2 \\ \Leftrightarrow\ & [(\lambda_1 + 4)R^2 + \lambda_2 R^3 + 2\|f\|^2]e^{-(\frac{\alpha}{2})t} \leq \eta_2 \\ \Leftrightarrow\ & -\left(\frac{\alpha}{2}\right)t \leq \ln\left(\frac{\eta_2}{(\lambda_1 + 4)R^2 + \lambda_2 R^3 + 2\|f\|^2}\right) \\ \Leftrightarrow\ & t \geq \frac{2}{\alpha}\ln\left(\frac{\eta_2}{(\lambda_1 + 4)R^2 + \lambda_2 R^3 + 2\|f\|^2}\right) := t_1(R). \end{aligned}$$

Portanto, sempre que $\|(u_0, v_0)\|_{H^1\times L^2(\mathbb{R})} \leq R$ existirá uma constante M que depende de $(\alpha, \beta, \gamma, \|f\|, \|g\|)$ de modo que vale (2.2). ■

Lema 2.3 *Suponha que $f, g \in H^1(\mathbb{R})$ e $(u_0, v_0) \in X_2 = H^2(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$. Seja $(u(t), v(t))$ uma solução de (4)-(6). Então existe uma costante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{H^2} + \|v\|_{H^1} \leq C, \tag{2.30}$$

onde $C = C(\|f\|_{H^1}, \|g\|_{H^1}, \|u_0\|_{H^2}, \|v_0\|_{H^1})$.

Prova: Multiplicando a equação (4) por $2(\bar{u}_{xxt} + \alpha\bar{u}_{xx})$, teremos

$$2iu_t(\bar{u}_{xxt} + \alpha\bar{u}_{xx}) + 2u_{xx}(\bar{u}_{xxt} + \alpha\bar{u}_{xx}) - 2uv(\bar{u}_{xxt} + \alpha\bar{u}_{xx}) + 2i\alpha u(\bar{u}_{xxt} + \alpha\bar{u}_{xx})$$
$$= 2f\bar{u}_{xxt} + 2\alpha\bar{u}_{xx}f.$$

Tomando a parte real e lembrando que $Re(iz) = -Im(z)$, obtemos

$$-2Im\{u_t(\bar{u}_{xxt} + \alpha\bar{u}_{xx})\} + 2Re\{u_{xx}(\bar{u}_{xxt} + \alpha\bar{u}_{xx})\} - 2Re\{uv(\bar{u}_{xxt} + \alpha\bar{u}_{xx})\} -$$
$$-2\alpha Im\{u(\bar{u}_{xxt} + \alpha\bar{u}_{xx})\} = 2Re\{f\bar{u}_{xxt}\} + 2\alpha Re\{\bar{u}_{xx}f\}.$$

Integrando com respeito a x sobre $\mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} & -2Im\int u_t(\bar{u}_{xxt} + \alpha\bar{u}_{xx})\,dx + 2Re\int u_{xx}(\bar{u}_{xxt} + \alpha\bar{u}_{xx})\,dx \\ - \;& 2Re\int uv(\bar{u}_{xxt} + \alpha\bar{u}_{xx})\}\,dx - 2\alpha Im\int u(\bar{u}_{xxt} + \alpha\bar{u}_{xx})\,dx \\ = \;& 2Re\int f\bar{u}_{xxt}\,dx + 2\alpha Re\int \bar{u}_{xx}f\,dx. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Note que, fazendo uma integração por partes, teremos

$$\begin{aligned} & -2Im\int u_t(\bar{u}_{xxt} + \alpha\bar{u}_{xx})\,dx - 2\alpha Im\int u(\bar{u}_{xxt} + \alpha\bar{u}_{xx})\,dx \\ & = 2Im\int u_{xt}\bar{u}_{xt}\,dx - 2\alpha Im\int u_t\bar{u}_{xx}\,dx + 2\alpha\int u_x\bar{u}_{xt}\,dx - 2\alpha^2 Im\int u_x\bar{u}_x\,dx \\ & = -2\alpha Im\int u_t\bar{u}_{xx}\,dx - 2\alpha Im\int u_{xx}\bar{u}_t\,dx \\ & = -2\alpha Im\int (u_t\bar{u}_{xx} + u_{xx}\bar{u}_t)\,dx = -2\alpha Im\int 2Re(u_t\bar{u}_{xx})\,dx = 0. \end{aligned}$$

Portanto (2.31) torna-se

$$\begin{aligned} & 2Re\int u_{xx}\bar{u}_{xxt}\,dx + 2\alpha Re\int |u_{xx}|^2\,dx - 2Re\int uv\bar{u}_{xxt}\,dx \\ & -2\alpha Re\int uv\bar{u}_{xx}\,dx = 2Re\int f\bar{u}_{xxt}\,dx + 2\alpha Re\int f\bar{u}_{xx}\,dx. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Vamos agora achar uma expressão mais compacta para (2.32).

1.
$$2Re\int u_{xx}\bar{u}_{xxt}\,dx=\int 2Re(u_{xx}\bar{u}_{xxt})\,dx=\frac{d}{dt}\|u_{xx}\|^2.$$

2. Como f não depende de t, temos
$$2Re\int f\bar{u}_{xxt}\,dx=\frac{d}{dt}\left(2Re\int f(x)\bar{u}_{xx}\,dx\right)$$

3. Por último
$$2\frac{d}{dt}\left(Re\int uv\bar{u}_{xxt}\,dx\right)=2Re\int u_tv\bar{u}_{xx}\,dx+2Re\int uv_t\bar{u}_{xx}\,dx+2Re\int uv\bar{u}_{xxt}\,dx,$$
isto é,
$$-2Re\int uv\bar{u}_{xxt}\,dx=2Re\int u_tv\bar{u}_{xx}\,dx+2Re\int uv_t\bar{u}_{xx}\,dx-2\frac{d}{dt}\left(Re\int uv\bar{u}_{xxt}\,dx\right).$$

Portanto, substituindo em (2.32), obtemos
$$\frac{d}{dt}\left(\|u_{xx}\|^2-2Re\int uv\bar{u}_{xx}\,dx-2Re\int f\bar{u}_{xx}\,dx\right)+2\alpha\|u_{xx}\|^2-2\alpha Re\int uv\bar{u}_{xx}\,dx$$
$$+2Re\int u_tv\bar{u}_{xx}\,dx+2Re\int uv_t\bar{u}_{xx}\,dx-2\alpha Re\int f\bar{u}_{xx}\,dx=0. \tag{2.33}$$

Note que (4) é equivalente à $u_t=-i(f(x)-u_{xx}+uv-i\alpha u)$. Logo,
$$Re\int u_tv\bar{u}_{xx}\,dx=Re\int(-i(f(x)-u_{xx}+uv-i\alpha u))v\bar{u}_{xx}\,dx$$
$$=Im\int fv\bar{u}_{xx}\,dx-Im\int|u_x|^2v\,dx+Im\int uv^2\bar{u}_{xx}\,dx-\alpha Re\int uv\bar{u}_{xx}\,dx$$
$$=Im\int fv\bar{u}_{xx}\,dx+Im\int uv^2\bar{u}_{xx}\,dx-\alpha Re\int u\bar{u}_{xx}v\,dx. \tag{2.34}$$

Substituindo (5), teremos
$$Re\int uv_t\bar{u}_{xx}\,dx=Re\int u(-\beta v-\gamma(|u|^2)_x+g(x))\bar{u}_{xx}\,dx$$
$$=-\beta Re\int uv\bar{u}_{xx}\,dx-\gamma Re\int u(|u|^2)_x\bar{u}_{xx}\,dx+Re\int gu\bar{u}_{xx}\,dx$$
$$=-\beta Re\int uv\bar{u}_{xx}\,dx-\gamma Re\int u(|u|^2)_x\bar{u}_{xx}\,dx+Re\int uv\bar{u}_{xx}\,dx.$$

Substituindo (2.34) e (2.35) em (2.33), obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}\left(\|u_{xx}\|^2 - 2Re\int uv\bar{u}_{xx}\,dx - 2Re\int f\bar{u}_{xx}\,dx\right) \\
+ \quad & 2\alpha\|u_{xx}\|^2 - (4\alpha+2\beta)Re\int uv\bar{u}_{xx}\,dx - 2\alpha Re\int f\bar{u}_{xx}\,dx \\
+ \quad & 2Im\int fv\bar{u}_{xx}\,dx + 2Im\int uv^2\bar{u}_{xx}\,dx \\
- \quad & 2\gamma Re\int u(|u|^2)_x\bar{u}_{xx}\,dx + 2Re\int gu\bar{u}_{xx}\,dx = 0. \qquad (2.35)
\end{aligned}$$

Derivando a equação (5) com respeito à x e em seguida multiplicando por $2v_x$, obtemos:

$$2v_xv_{xt} + 2\beta v_x^2 + 4\gamma v_x Re(u\bar{u}_{xx}) + 4\gamma|u_x|^2v_x = 2g_xv_x.$$

Integrando com respeito à x, ficamos com

$$2\int v_xv_{xt}\,dx + 2\beta\int v_x^2\,dx + 4\gamma\int v_xRe(u\bar{u}_{xx})\,dx + 4\gamma\int |u_x|^2v_x\,dx = 2\int g_xv_x\,dx,$$

isto é

$$\frac{d}{dt}\|v_x\|^2 + 2\beta\|v_x\|^2 + 4\gamma Re\int u\bar{u}_{xx}v_x\,dx + 4\gamma\int |u_x|^2v_x\,dx - 2\int g_xv_x\,dx. \qquad (2.36)$$

Note que

$$Re\int u\bar{u}_{xx}v_x\,dx = Re\int (uv)_x\bar{u}_{xx}\,dx - Re\int u_x\bar{u}_{xx}v\,dx, \qquad (2.37)$$

e por (4), $(uv)_x = iu_{xt} + u_{xxx} + i\alpha u_x - f_x$. Logo,

$$\begin{aligned}
Re\int (uv)_x\bar{u}_{xx}\,dx &= Re\int (iu_{xt} + u_{xxx} + i\alpha u_x - f_x)\bar{u}_{xx}\,dx \\
&= -Im\int u_{xt}\bar{u}_{xx}\,dx + Re\int u_{xxx}\bar{u}_{xx}\,dx - 2\alpha Im\int u_x\bar{u}_{xx}\,dx \\
&\quad -Re\int f_x\bar{u}_{xx}\,dx.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
2Re\int u_{xxx}\bar{u}_{xx}\,dx &= \int 2Re(u_{xxx}\bar{u}_{xx})\,dx \\
&= \int \frac{d}{dx}(\bar{u}_{xx}u_{xx})\,dx \\
&= \int \frac{d}{dx}|u_{xx}|^2\,dx = 0.
\end{aligned}$$

Logo, ficamos com

$$Re\int(uv)_x\bar{u}_{xx}\,dx=-Im\int u_{xt}\bar{u}_{xx}\,dx-\alpha Im\int u_x\bar{u}_{xx}\,dx-Re\int f_x\bar{u}_{xx}\,dx. \tag{2.38}$$

Observando que $Im(\bar{z})=-Im(z)$, teremos

$$\begin{aligned}
Im\int u_{xt}\bar{u}_{xx}\,dx &= \frac{d}{dt}Im\int u_x\bar{u}_{xx}\,dx-Im\int u_x\bar{u}_{xxt}\,dx\\
&= \frac{d}{dt}Im\int u_x\bar{u}_{xx}\,dx-Im\overline{\int \bar{u}_x u_{xxt}\,dx}\\
&= \frac{d}{dt}Im\int u_x\bar{u}_{xx}\,dx+Im\int \bar{u}_x u_{xxt}\,dx\\
&= \frac{d}{dt}Im\int u_x\bar{u}_{xx}\,dx-Im\int \bar{u}_{xx} u_{xt}\,dx.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$Im\int u_{xt}\bar{u}_{xx}\,dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}Im\int u_x\bar{u}_{xx}\,dx.$$

Portanto, substituindo essa última expressão em (2.38), obtemos

$$Re\int(uv)_x\bar{u}_{xx}\,dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}Im\int u_x\bar{u}_{xx}\,dx-\alpha Im\int u_x\bar{u}_{xx}\,dx-Re\int f_x\bar{u}_{xx}\,dx, \tag{2.39}$$

e substituindo (2.39) em (2.37), obtemos

$$\begin{aligned}
Re\int u\bar{u}_{xx}v_x\,dx &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}Im\int u_x\bar{u}_{xx}\,dx-\alpha Im\int u_x\bar{u}_{xx}\,dx\\
&\quad -Re\int f_x\bar{u}_{xx}\,dx-Re\int u_x\bar{u}_{xx}v\,dx.
\end{aligned}\tag{2.40}$$

Por fim, substituinto (2.40) em (2.36), ficamos com

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\|v_x\|^2-2\gamma Im\int u_x\bar{u}_{xx}\,dx\right)+2\beta\|v_x\|^2-4\alpha\gamma Im\int u_x\bar{u}_{xx}\,dx\\
&-4\gamma\int u_x v\bar{u}_{xx}\,dx-4\gamma Re\int f_x\bar{u}_{xx}\,dx+4\gamma\int |u_x|^2\,dx\\
&-2\int g_x v_x\,dx=0.
\end{aligned}\tag{2.41}$$

Portanto, somando (2.35) e (2.40), obtemos

$$\frac{d}{dt}J_1(\xi(t))+2\alpha J_1(\xi(t))=K_1(\xi(t)), \tag{2.42}$$

onde $\xi(t) = (u(t), v(t))$,

$$J_1(\xi(t)) \;=\; \|u_{xx}\|^2 + \|v_x\|^2 - 2Re\int uv\bar{u}_{xx}\,dx - 2Re\int f\bar{u}_{xx}\,dx - 2\gamma Im\int u_x\bar{u}_{xx}\,dx$$

e

$$\begin{aligned}
K_1(\xi(t)) \;=\;& 2(\alpha-\beta)\|v_x\|^2 - 2Im \in fv\bar{u}_{xx}\,dx - 2Im\int uv^2\bar{u}_{xx}\,dx \\
+\;& 2\beta Re\int uv\bar{u}_{xx}\,dx + 2\gamma Re\int u(|u|^2)_x\bar{u}_{xx}\,dx - 2Re\int gu\bar{u}_{xx}\,dx \\
-\;& 2\alpha Re\int f\bar{u}_{xx}\,dx + 4\gamma Im\int f_x\bar{u}_{xx}\,dx + 4\gamma Re\int u_x\bar{u}_{xx}v\,dx \\
-\;& 4\gamma\int |u_x|^2 v_x\,dx + 2\int g_x v_x\,dx.
\end{aligned}$$

Afirmação 2.3 *Existe uma constante* $C = C(\|u_0\|_{H^2}, \|v_0\|_{H^1}, \|f\|_{H^1}, \|g\|_{H^1})$, *tal que*

$$J_1(\xi(t)) \geq \frac{1}{2}\left(\|u_{xx}\|^2 + \|v_x\|^2\right) - C. \tag{2.43}$$

Prova: Na demonstração usaremos constantemente o *Lema* 2.2 . Portanto

1.
$$\begin{aligned}
\left|2Re\int uv\bar{u}_{xx}\,dx\right| \;\leq\;& 2\|v\|_\infty\|u\|\,\|u_{xx}\| \leq 2\sqrt{2}\|v\|^{1/2}\|v_x\|^{1/2}\|u\|\|u_{xx}\| \\
\leq\;& \epsilon_1\|u_{xx}\|^2 + C(\epsilon_1)\|v\|\|v_x\|\|u\|^2 \\
\leq\;& \epsilon_1\|u_{xx}\|^2 + \epsilon_2\|v_x\| + C(\epsilon_1,\epsilon_2)\|v\|^2\|u\|^4 \\
\leq\;& \epsilon_1\|u_{xx}\|^2 + \epsilon_2\|v_x\| + C_1(\epsilon_1,\epsilon_2),
\end{aligned}$$

   onde $C_1(\epsilon_1,\epsilon_2) = C_1(\epsilon_1,\epsilon_2,\|u_0\|_{H^2},\|v_0\|_{H^1},\|f\|_{H^1},\|g\|_{H^1})$.

2.
$$\left|2Re\int f\bar{u}_{xx}\,dx\right| \;\leq\; 2\|f\|\,\|u_{xx}\| \leq \epsilon_1\|u_{xx}\|^2 + C(\epsilon_1,\|f\|).$$

3.
$$\begin{aligned}
\left|2\gamma Im\int u_x\bar{u}_{xx}\,dx\right| \;\leq\;& 2|\gamma|\|u_x\|^2\,\|u_{xx}\|^2 \leq \epsilon_1\|u_{xx}\|^2 + C(\epsilon_1)\|u_x\|^2 \\
\leq\;& \epsilon_1\|u_{xx}\|^2 + C_3(\epsilon_1,\|u_0\|_{H^2},\|v_0\|_{H^1},\|f\|_{H^1},\|g\|_{H^1})
\end{aligned}$$

Portanto, substituindo essas desigualdades na expressão de $J_1(\xi(t))$ obtemos

$$J_1(\xi(t)) \geq (1-2\epsilon_1)\|u_{xx}\|^2 + (1-\epsilon_2)\|v_x\|^2 - C.$$

Escolhendo agora $\epsilon_1 = \dfrac{1}{4}$ e $\epsilon_2 = \dfrac{1}{2}$ ficamos com

$$J_1(\xi(t)) \geq \frac{1}{2}\left(\|u_{xx}\|^2 + \|v_x\|^2\right) - C(\|u_0\|_{H^2}, \|v_0\|_{H^1}, \|f\|_{H^1}, \|g\|_{H^1}).$$

Afirmação 2.4 *Existe uma constante* $C = C(\|u_0\|_{H^2}, \|v_0\|_{H^1}, \|f\|_{H^1}, \|g\|_{H^1})$ *tal que*

$$K_1(\xi(t)) \leq \frac{\alpha}{2}\left(\|u_{xx}\|^2 + \|v_x\|^2\right) + C. \tag{2.44}$$

Prova: Na demonstração usaremos constantemente o *Lema* 2.2

1.
$$\begin{aligned}
\left|2Im\int f v \bar{u}_{xx}\, dx\right| &\leq 2\|u\|_\infty \|f\| \|u_{xx}\| \leq \epsilon_1\|u_{xx}\|^2 + C(\epsilon_1)\|v\|_\infty \|f\|^2 \\
&\leq \epsilon_1\|u_{xx}\|^2 + C(\epsilon_1)\|v_x\|\left(\|v\|\|f\|^2\right) \\
&\leq \epsilon_1\|u_{xx}\|^2 + \epsilon_2\|v_x\|^2 + C(\epsilon_1,\epsilon_2)\|v\|^2\|f\|^4_{H^1} \\
&\leq \epsilon_1\|u_{xx}\|^2 + \epsilon_2\|v_x\|^2 + C_1(\epsilon_1,\epsilon_2),
\end{aligned}$$

onde $C_1(\epsilon_1,\epsilon_2) = C_1(\epsilon_1,\epsilon_2, \|u_0\|_{H^2}, \|v_0\|_{H^1}, \|f\|_{H^1}, \|g\|_{H^1})$.

2.
$$\left|2Im\int u v^2 \bar{u}_{xx}\, dx\right| \leq 2\|u\|_\infty \int |v|^2 |u_{xx}|\, dx \leq 2\|u\|_\infty \left(\int |v|^4\right)^{1/2} \left(\int |u_{xx}|^2\right)^{1/2}.$$

Por outro lado

$$\left(\int |v|^4\right)^{1/2} \leq (\|v\|_\infty \|v\|^2)^{1/2} \leq (2\|v\|\|v_x\|\|v\|^2)^{1/2} = \sqrt{2}\|v\|^{3/2}\|v_x\|^{1/2}.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\left|2Im\int u v^2 \bar{u}_{xx}\, dx\right| &\leq 2\sqrt{2}\|u\|_\infty \|v\|^{3/2}\|v_x\|^{1/2}\|u_{xx}\| \\
&= \|u_{xx}\|(4\|u\|^{1/2}\|u_x\|^{1/2}\|v\|^{3/2}\|v_x\|^{1/2}) \\
&\leq \epsilon_1\|u_{xx}\|^2 + C(\epsilon_1)\|v_x\|\left(\|u\|\|u_x\|\|v\|^3\right) \\
&\leq \epsilon_1\|u_{xx}\|^2 + \epsilon_2\|v_x\|^2 + C(\epsilon_1,\epsilon_2)\|v\|^6\|u\|^2\|u_x\|^2 \\
&\leq \epsilon_1\|u_{xx}\|^2 + \epsilon_2\|v_x\|^2 + C_2(\epsilon_1,\epsilon_2),
\end{aligned}$$

onde $C_2(\epsilon_1,\epsilon_2) = C_2(\epsilon_1,\epsilon_2), \|u_0\|_{H^2}, \|v_0\|_{H^1}, \|f\|_{H^1}, \|g\|_{H^1})$.

3. Note primeiro que $(|u|^2)_x = 2Re(\bar{u}u_x)$, logo

$$\begin{aligned}\left|2\gamma Re\int u(|u|^2)_x\bar{u}_{xx}\,dx\right| &\leq 2|\gamma|\int |u|(|2Re(\bar{u}u_x)|)|u_{xx}|\,dx\\ &\leq 4|\gamma|\|u\|_\infty^2\|u_x\|\|u_{xx}\| \leq 8|\gamma|\|u\|\|u_x\|^2\|u_{xx}\|\\ &\leq \epsilon_1\|u_{xx}\|^2 + C(\epsilon_1)\|u\|^2\|u_x\|^4\\ &\leq \epsilon_1\|u_{xx}\|^2 + C_3(\epsilon_1,\epsilon_2,\|u_0\|_{H^2},\|v_0\|_{H^1},\|f\|_{H^1},\|g\|_{H^1}).\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\left|2\beta Re\int uv\bar{u}_{xx}\,dx\right| &\leq 2\beta\|v\|_\infty\|u\|\|u_{xx}\| \leq \epsilon_1\|u_{xx}\|^2 + C(\epsilon_1)\|v\|_\infty\|u\|^2\\ &\leq \epsilon_1\|u_{xx}\|^2 + C(\epsilon_1)\|v\|\|v_x\|\|u\|^2\\ &\leq \epsilon_1\|u_{xx}\|^2 + \epsilon_2\|v_x\|^2 + C(\epsilon_1,\epsilon_2)\|v\|^2\|u\|^4\\ &\leq \epsilon_1\|u_{xx}\|^2 + \epsilon_2\|v_x\|^2 + C_4(\epsilon_1,\epsilon_2),\end{aligned}$$

onde $C_4(\epsilon_1,\epsilon_2) = C_4(\epsilon_1,\epsilon_2,\|u_0\|_{H^2},\|v_0\|_{H^1},\|f\|_{H^1},\|g\|_{H^1})$.

5.

$$\begin{aligned}\left|2Re\int gu\bar{u}_{xx}\,dx\right| &\leq 2\|u\|_\infty\|g\|\|u_{xx}\| \leq \epsilon_1\|u_{xx}\|^2 + C(\epsilon_1)\|u\|_\infty^2\|g\|^2\\ &\leq \epsilon_1\|u_{xx}\|^2 + C(\epsilon_1)\|u_x\|\|u\|\|g\|\\ &\leq \epsilon_1\|u_{xx}\|^2 + C_5(\epsilon_1,\|u_0\|_{H^2},\|v_0\|_{H^1},\|f\|_{H^1},\|g\|_{H^1}).\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}\left|2\alpha Re\int f\bar{u}_{xx}\,dx\right| &\leq 2\alpha\|f\|\|u_{xx}\| \leq \epsilon_1\|u_{xx}\|^2 + C(\epsilon_1)\|f\|_{H^1}^2\\ &\leq \epsilon_1\|u_{xx}\|^2 + C_6(\epsilon_1,\|f\|_{H^1}).\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}\left|4\gamma\int f_x\bar{u}_{xx}\,dx\right| &\leq 4|\gamma|\|f_x\|\|u_{xx}\| \leq \epsilon_1\|u_{xx}\|^2 + C(\epsilon_1)\|f\|_{H^1}^2\\ &\leq \epsilon_1\|u_{xx}\|^2 + C_7(\epsilon_1,\|f\|_{H^1}).\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}\left|4\gamma Re\int u_x\bar{u}_{xx}v\,dx\right| &\leq 4|\gamma|\|u_x\|_\infty\|u_{xx}\|\|v\| \leq 4|\gamma|\sqrt{2}\|u_x\|^{1/2}\|u_{xx}\|^{3/2}\|v\|\\ &= \|u_{xx}\|^{3/2}(4|\gamma|\sqrt{2}\|u_x\|^{1/2}\|v\|)\\ &\leq \epsilon_1(\|u_{xx}\|^{3/2})^{4/3} + C(\epsilon_1)(4|\gamma|\sqrt{2}\|u_x\|^{1/2}\|v\|)^4\\ &= \epsilon_1\|u_{xx}\|^2 + C(\epsilon_1)\|u_x\|^2\|v\|^4\\ &\leq \epsilon_1\|u_{xx}\|^2 + C_8(\epsilon_1,\|u_0\|_{H^2},\|v_0\|_{H^1},\|f\|_{H^1},\|g\|_{H^1}).\end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}\left|4\gamma\int |u_x|^2 v_x\,dx\right| &\leq 4|\gamma|\|u_x\|_4^2\|v_x\| \leq 4|\gamma|\|v_x\|(2\|u_x\|^3\|u_{xx}\|)^{1/2}\\ &\leq \epsilon_2\|v_x\|^2 + C(\epsilon_2)\|u_x\|^3\|u_{xx}\|\\ &\leq \epsilon_1\|u_{xx}\|^2 + \epsilon_2\|v_x\|^2 + C(\epsilon_1,\epsilon_2^2)\|u_x\|^3\\ &\leq \epsilon_1\|u_{xx}\|^2 + \epsilon_2\|v_x\|^2 + C_9(\epsilon_1,\epsilon_2),\end{aligned}$$

onde $C_9(\epsilon_1,\epsilon_2) = C_9(\epsilon_1,\epsilon_2), \|u_0\|_{H^2}, \|v_0\|_{H^1}, \|f\|_{H^1}, \|g\|_{H^1})$.

10. Por último, é fácil de ver que

$$\left|2\int g_x v_x\,dx\right| \leq \epsilon_2\|v_x\|^2 + C_{10}(\epsilon_2, \|g\|_{H^1}).$$

Portanto, substituindo essas desigualdades na expressão de $K_1(\xi(t))$, e supondo sem perda de generalidade que $\alpha \leq \beta$ obtemos

$$K_1(\xi(t)) \leq 9\epsilon_1\|u_{xx}\|^2 + 5\epsilon_2\|v_x\|^2 + C(\epsilon_1,\epsilon_2, \|u_0\|_{H^2}, \|v_0\|_{H^1}, \|f\|_{H^1}, \|g\|_{H^1}).$$

Basta agora escolher $\epsilon_1 = \frac{\alpha}{18}$ e $\epsilon_2 = \frac{\alpha}{10}$. Assim,

$$K_1(\xi(t)) \leq \frac{\alpha}{2}\left(\|u_{xx}\|^2 + \|v_x\|^2\right) + C.$$

Juntando (2.43) e (2.44), temos de maneira análoga feito em (2.16), que

$$\|u_{xx}\|^2 + \|v_x\|^2 \leq 2J_1(\xi_0)e^{-\alpha t} + C.$$

Logo

$$\|u\|_{H^2} + \|v\|_{H^1} \leq C(\|u_0\|_{H^2}, \|v_0\|_{H^1}, \|f\|_{H^1}, \|g\|_{H^1}) \quad \blacksquare$$

Para o próximo *Lema*, utilizaremos dois resultados cuja demonstração encontra-se em [5] e [22] os quais tratam das propriedades do grupo de Schrödinger gerado por $i\partial_x^2$. Antes, vamos estudar como age o seguinte operador $(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}$. Estamos interessados em resolver a seguinte equação $(\alpha - i\partial_x^2)u = f$ com $f \in L^2(\mathbb{R})$. Aplicando a transformada de Fourier, com respeito a variável x, em ambos os lados temos

$$\alpha\hat{u}(\xi) + i\xi^2\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi).$$

Portanto

$$\hat{u}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{\alpha + i\xi^2},$$

isto é,

$$u = (\hat{u}(\xi))^\vee = \left(\frac{\hat{f}(\xi)}{\alpha + i\xi^2}\right)^\vee.$$

Por outro lado, invertendo o operador, temos que $u = (\alpha - i\partial_x^2)^{-1} f$. Conclusão,

$$(\alpha - i\partial_x^2)^{-1} f = \left(\frac{\hat{f}(\xi)}{\alpha + i\xi^2}\right)^\vee, \tag{2.45}$$

ou seja,

$$(\alpha - i\partial_x^2)^{-1} f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ix\xi} \frac{\hat{f}(\xi)}{\alpha + i\xi^2}\, d\xi. \tag{2.46}$$

Lema 2.4 (veja [5])

1. Sejam $1 \le p \le 2$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então para toda $\varphi \in L^p(\mathbb{R})$

$$\|U(t)\varphi\|_q \le C|t|^{1-\frac{2}{p}} \|\varphi\|_p\,, \quad \forall t \neq 0; \tag{2.47}$$

2. **(Desigualdade Strichartz para derivada)** Denote por $D_x^\theta u = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^\theta \hat{u})$, onde $\hat{u} = \mathcal{F}u$ é a transformada de Fourier de u. Então para toda $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$

$$\|D_x^{\frac{1}{2}} U(t)\varphi\|_{L_x^\infty(L_t^2)} \le C\|\varphi\|. \tag{2.48}$$

3. **(Desigualdade Strichartz para o termo não-homogêneo)** Sejam (r_j, q_j) $(j = 1, 2)$ pares admissíveis, isto é, $\dfrac{2}{r_j} + \dfrac{1}{q_j} = \dfrac{1}{2}$. Sejam r_2', q_2' satisfazendo $\dfrac{1}{r_2} + \dfrac{1}{r_2'} = 1$, $\dfrac{1}{q_2} + \dfrac{1}{q_2'} = 1$. Então para toda $h \in L_T^{r_2'}(L_x^{q_2'})$ vale

$$\left\|\int_0^t U(t-s)h(.,s)\, ds\right\|_{L_T^{r_1}(L_x^{q_1})} \le C\|h\|_{L_T^{r_2'}(L_x^{q_2'})}. \tag{2.49}$$

4.

$$\left\|D_x^{\frac{1}{2}} \int_0^t U(t-s)h(.,s)\, ds\right\|_{L_T^\infty(L_x^2)} \le C\|h\|_{L_x^1(L_T^2)}\,, \quad \forall h \in L_x^1(L_T^2). \tag{2.50}$$

$$\left\|D_x \int_0^t U(t-s)h(.,s)\, ds\right\|_{L_x^\infty(L_T^2)} \le C\|h\|_{L_x^1(L_T^2)}\,, \quad \forall h \in L_x^1(L_T^2). \tag{2.51}$$

Um outro lema de muita utilidade será

Lema 2.5 (veja [22]) *Seja $T > 0$. Então para quaisquer h_1, h_2, h_3*

$$\left\| h_1 \int_0^t h_2(.,s) h_3(.,s)\, ds \right\|_{L_x^1(L_T^2)} \leq T \|h_1\|_{L_T^\infty(L_x^2)} \|h_2\|_{L_T^\infty(L_x^2)} \|h_3\|_{L_x^\infty(L_T^2)}, \tag{2.52}$$

$$\left\| h_1 \int_0^t h_2(.,s) h_3(.,s)\, ds \right\|_{L_{xT}^2} \leq T^{3/2} \|h_1\|_{L_T^\infty(H_x^{1/2})} \|h_2\|_{L_x^\infty(L_T^2)} \|h_3\|_{L_T^\infty(H_x^{1/2})}. \tag{2.53}$$

O próximo *Lema* está relacionado com o gerador do grupo de Schrödiger.

Proposição 2.1 *Seja $U(t)$ um grupo de operadores lineares limitados e A seu gerador infinitesimal. Se*

$$B_\lambda(t)x = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} U(s)x\, ds\ ,\ \lambda > 0,$$

então

$$(\lambda I - A) B_\lambda(t)x = e^{\lambda t}x - U(t)x\ ,\ \forall x \in X.$$

Prova: Para todo λ fixado, $B_\lambda(t)$ definido acima é um operador linear limitado e para todo $x \in X$

$$\begin{aligned}
\frac{U(h) - I}{h} B_\lambda(t) &= \frac{1}{h} \int_0^t e^{\lambda(t-s)} \left(U(h+s) - U(s) \right) x\, ds \\
&= \frac{1}{h} \int_h^{h+t} e^{\lambda(t-s+h)} U(s)x\, ds - \frac{1}{h} \int_0^t e^{\lambda(t-s)} U(s)x\, ds \\
&= \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_h^t e^{\lambda(t-s)} U(s)x\, ds + \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_t^{t+h} e^{\lambda(t-s)} U(s)x\, ds \\
&- \frac{1}{h} \int_0^t e^{\lambda(t-s)} U(s)x\, ds \\
&= \left(\frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \right) \int_h^t e^{\lambda(t-s)} U(s)x\, ds + \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_t^{t+h} e^{\lambda(t-s)} U(s)x\, ds \\
&- \frac{1}{h} \int_0^h e^{\lambda(t-s)} U(s)x\, ds.
\end{aligned}$$

Portanto, fazendo $h \to 0$, segue que

$$AB_\lambda(t)x = \lambda B_\lambda(t)x + U(t)x - e^{\lambda t}x,$$

isto é,

$$\int_0^t e^{\lambda(t-s)}U(s)x\,ds = e^{\lambda t}(\lambda I - A)^{-1}x - (\lambda I - A)^{-1}U(t)x. \quad \blacksquare$$

Lema 2.6 *Seja $D(A) = H^2(\mathbb{R})$. Para $u \in D(A)$ seja*

$$Au = i\partial_x^2.$$

Então o operador iA é auto-adjunto em $L^2(\mathbb{R})$ (veja [1]- Teorema de Stone) e portanto A é o gerador infinitesimal de um grupo de operadores unitários em $L^2(\mathbb{R})$.

Prova: Mostraremos que iA e simétrico e monótono maximal. Usando o produto interno de $L^2(\mathbb{R})$

$$(-\partial_x^2 u, v)_{L^2(\mathbb{R})} = -\int_{\mathbb{R}} u_{xx}\bar{v}\,dx = -\int_{\mathbb{R}} u\bar{v}_{xx}\,dx = (u, -\partial_x^2 v).$$

Isto mostra a simetria do operador iA. Mostraremos agora a monotonicidade do operador.

$$(-\partial_x^2 u, u)_{L^2(\mathbb{R})} \;\;=\;\; (-u_{xx}, u)_{L^2(\mathbb{R})} = -\int_{\mathbb{R}} u_{xx}\bar{u}\,dx = \|u_x\|^2 \geq 0.$$

Segue portanto que iA e monótono. Para concluir mostraremos que

$$R(I + iA) = L^2(\mathbb{R}),$$

isto é, iA é monótono maximal. Devemos mostrar que para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$, existe $u \in D(iA)$ tal que $u + iAu = f$, isto é,

$$u - u_{xx} = f. \tag{2.54}$$

Aplicando a transformada de Fourier em (2.54) ficamos com

$$\hat{u}(\xi) = \frac{\hat{f}}{1+\xi^2},$$

isto é

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{ix\xi}\frac{\hat{f}(\xi)}{1+\xi^2}\,d\xi.$$

Falta-nos mostrar que $u \in H^2(\mathbb{R})$. Mas

$$\|u\|_{H^2(\mathbb{R})} = \left(\int (1+\xi^2)^2|\hat{u}|^2\,d\xi\right)^{1/2} = \left(\int |\hat{f}(\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty,$$

logo $u \in H^2(\mathbb{R})$. Mostramos assim que iA é simétrico, monótono maximal. Segue daí *(veja [15])* que iA é auto-adjunto e pelo *Teorema de Stone*, $A = i\partial_x^2$ é um grupo de operadores unitários em $L^2(\mathbb{R})$ e seu grupo unitário é dado por

$$U(t) = e^{it\partial_x^2}. \quad \blacksquare$$

Lema 2.7 *Seja* $A = i\partial_x^2$ *e* $U(t) = e^{it\partial_x^2}$. *Então para todo* $\alpha > 0$

$$\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} U(t-s) f\, ds = (\alpha - i\partial_x^2)^{-1} f - (\alpha - i\partial_x^2)^{-1} U(t) f,$$

onde $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Prova: De fato, Pelo *Lema* 2.6, $A = i\partial_x^2$ é um gerador infinitesimal do grupo $U(t) = e^{it\partial_x^2}$ de operadores unitários em $L^2(\mathbb{R})$. Logo pela *Proposição* 2.1 segue que

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} U(t-s)\, f\, ds &= e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s} U(t-s)\, f\, ds = e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha(t-s)} U(s)\, f\, ds \\ &= e^{-\alpha t}\left[e^{\alpha t}(\alpha - A)^{-1} f - (\alpha - A)^{-1} U(t) f\right] \\ &= (\alpha - i\partial_x^2)^{-1} f - (\alpha - i\partial_x^2)^{-1} U(t) f. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Lema 2.8 *Seja* $(u(t), v(t))$ *uma solução do problema (4)-(6), com dados iniciais* $(u_0, v_0) \in X_1$. *Então existe* $T > 0$ *tal que*

$$\|u_x\|^2_{L_x^\infty(L_T^2)} \leq C(T). \tag{2.55}$$

Prova : Escrevendo a equação (5) na forma

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\beta t} v\right) = -\gamma e^{\beta t}(|u|^2)_x + e^{\beta t} g(x),$$

temos

$$v = v_0 e^{-\beta t} - \gamma \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)}(|u(x,\tau)|^2)_x\, d\tau + \frac{g(x)}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) \tag{2.56}$$

Multiplicando a equação (4) por $(-i)$, obtemos

$$u_t - iu_{xx} + \alpha u = -iuv - if,$$

logo,

$$\begin{aligned}&e^{-it\partial_x^2 + \alpha t}(u_t - iu_{xx} + \alpha u) = -ie^{-it\partial_x^2 + \alpha t} uv - ie^{-it\partial_x^2 + \alpha t} f \\ &e^{-it\partial_x^2 + \alpha t} u_t + e^{-it\partial_x^2 + \alpha t}(\alpha - i\partial_x^2) u = -ie^{-it\partial_x^2 + \alpha t} uv - ie^{-it\partial_x^2 + \alpha t} f \\ &\frac{d}{dt}\left(e^{-it\partial_x^2 + \alpha t} u\right) = -ie^{-it\partial_x^2 + \alpha t} uv - ie^{-it\partial_x^2 + \alpha t} f.\end{aligned}$$

Portanto,

$$u = e^{it\partial_x^2 - \alpha t} u_0 - ie^{it\partial_x^2 - \alpha t}\int_0^t e^{-i\tau\partial_x^2 + \alpha\tau} uv\, d\tau - ie^{it\partial_x^2 - \alpha t}\int_0^t e^{-i\tau\partial_x^2 + \alpha\tau} f(x)\, d\tau.$$

Usando a notação $U(t)=e^{it\partial_x^2}$, podemos escrever a expressão acima como

$$u=e^{-\alpha t}U(t)u_0-i\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}U(t-s)uv\,ds-i\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}U(t-s)f(x)\,ds.$$

Pelo *Lema* 2.7 temos

$$\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}U(t-s)f(x)\,ds=(\alpha-i\partial_x^2)^{-1}f(x)-(\alpha-i\partial_x^2)^{-1}U(t)f(x),$$

concluímos portanto que

$$\begin{aligned}
u &= e^{-\alpha t}U(t)u_0-i(\alpha-i\partial_x^2)^{-1}f+ie^{-\alpha t}(\alpha-i\partial_x^2)^{-1}U(t)f\\
&- i\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}U(t-s)(uv_0e^{-\beta s})\,ds-\frac{i}{\beta}\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}U(t-s)(ug(1-e^{-\beta s}))\,ds\\
&+ i\gamma\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}U(t-s)\left[u\int_0^s e^{-\beta(s-\tau)}(|u|^2(.,\tau))_x\,d\tau\right]ds.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
D_xu &= e^{-\alpha t}U(t)D_xu_0-iD_x(\alpha-i\partial_x^2)^{-1}f(x)+ie^{-\alpha t}D_x(\alpha-i\partial_x^2)^{-1}U(t)f(x)\\
&- iD_x\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}U(t-s)(uv_0e^{-\beta s})\,ds\\
&- \frac{i}{\beta}D_x\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}U(t-s)(ug(1-e^{-\beta s}))\,ds\\
&+ i\gamma D_x\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}U(t-s)\left[u\int_0^s e^{-\beta(s-\tau)}(|u|^2(.,\tau))_x\,d\tau\right]ds. \qquad (2.57)
\end{aligned}$$

Uma conta simples mostra que $U(t)D_xu_0=D_x^{\frac{1}{2}}U(t)D_x^{\frac{1}{2}}u_0$. Logo

$$\begin{aligned}
\|D_xu\|_{L_x^\infty(L_T^2)} &\le \|e^{-\alpha t}D_x^{\frac{1}{2}}U(t)D_x^{\frac{1}{2}}u_0\|_{L_x^\infty(L_T^2)}+\|D_x(\alpha-i\partial_x^2)^{-1}f(x)\|_{L_x^\infty(L_T^2)}\\
&+ \|e^{-\alpha t}U(t)D_x(\alpha-i\partial_x^2)^{-1}f(x)\|_{L_x^\infty(L_T^2)}\\
&+ \left\|D_x\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}U(t-s)(uv_0e^{-\beta s})\,ds\right\|_{L_x^\infty(L_T^2)}\\
&+ \frac{1}{\beta}\left\|D_x\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}U(t-s)(ug(1-e^{-\beta s}))\,ds\right\|_{L_x^\infty(L_T^2)}\\
&+ |\gamma|\left\|D_x\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}U(t-s)\left[u\int_0^s e^{-\beta(s-\tau)}(|u|^2(.,\tau))_x\,d\tau\right]ds\right\|_{L_x^\infty(L_T^2)}.
\end{aligned}$$

Usando (2.47) e (2.48), ficamos com

$$\begin{aligned}
\|D_x u\|_{L^\infty_x(L^2_T)} &\leq C\|D_x^{\frac{1}{2}} u_0\| + \|D_x(\alpha - i\partial_x^2)^{-1} f(x)\|_{L^\infty_x(L^2_T)} \\
&+ \|U(t)D_x(\alpha - i\partial_x^2)^{-1} f(x)\|_{L^\infty_x(L^2_T)} + Ce^{\alpha T}\|uv_0 e^{-\beta t}\|_{L^1_x(L^2_T)} \\
&+ \frac{Ce^{\alpha T}}{\beta}\|ug(x)(1-e^{-\beta t})\|_{L^1_x(L^2_T)} + Ce^{\alpha T}|\gamma| \left\| u\int_0^t (|u|^2)_x(.,\tau)\,d\tau \right\|_{L^1_x(L^2_T)}.
\end{aligned}$$

1. Lembrando que $D_x^\theta u_0 = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^\theta \hat{u}_0)$, onde $\hat{u}_0 = \mathcal{F}\, u_0$ é a transformada de Fourier de u_0, então teremos que $(D_x^{1/2}u_0)^\wedge(\xi) = |\xi|^{1/2}\hat{u}_0$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\|D_x^{1/2}u_0\| &= \|(D_x^{1/2}u_0)^\wedge(\xi)\| = \int |(D_x^{1/2}u_0)^\wedge(\xi)|^2 d\,\xi = \int |\xi||\hat{u}_0|^2\,d\xi \\
&\leq \int (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}|\hat{u}_0|^2\,d\xi = \|u_0\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

2. Como f não depende de t, ficamos com

$$\begin{aligned}
\|D_x(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}f\|_{L^\infty_x(L^2_T)} &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_0^T |D_x(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}f|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(|D_x(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}f|^2 \int_0^T dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= T^{1/2}\,\|D_x(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}f\|_{L^\infty_x} \\
&\leq \sqrt{2}T^{1/2}\,\|D_x(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}f(x)\|^{1/2}\,\|D_x^2(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}f\|^{1/2}.
\end{aligned}$$

Vamos agora analisar às duas normas acima separadamente.

(a)

$$\begin{aligned}
\|D_x(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}f\|^2 &= \|\left(D_x[(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}f]\right)^\wedge(\xi)\|^2 \\
&= \|\,|\xi|[(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}f]^\wedge(\xi)\|^2 = \left\| |\xi|\frac{\hat{f}(\xi)}{\alpha + i\xi^2}\right\|^2 \\
&= \int |\xi|^2 \frac{|\hat{f}(\xi)|^2}{|\alpha + i\xi^2|}\,d\xi = \int \frac{\xi^2}{\alpha^2+\xi^4}\,|\hat{f}(\xi)|^2\,d\xi \\
&\leq \sup_\xi \left\{\frac{\xi^2}{\alpha^2+\xi^4}\right\} \int |\hat{f}(\xi)|^2\,d\xi,
\end{aligned}$$

onde usamos (2.45). Agora observe que

$$(\xi^2-\alpha)^2 \geq 0 \text{ e assim } \frac{\xi^2}{\alpha^2+\xi^4} \leq \frac{1}{2\alpha}.$$

Logo

$$\sup_{\xi}\left\{\frac{\xi^2}{\alpha^2+\xi^4}\right\} \leq \frac{1}{2\alpha}.$$

Portanto

$$\|D_x(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}f(x)\| \leq \sqrt{\frac{1}{2\alpha}}\|f\|.$$

(b) Na outra norma, temos

$$\begin{aligned}
\|D_x^2(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}f(x)\|^2 &= \|\left(D_x^2[(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}f(x)]\right)^\wedge(\xi)\|^2 \\
&= \|\,|\xi|^2\,[(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}f(x)]^\wedge(\xi)\|^2 \\
&= \left\|\,|\xi|^2\,\frac{\hat{f}(\xi)}{\alpha+i\xi^2}\right\|^2 = \int \frac{\xi^4}{\alpha^2+\xi^4}\,|\hat{f}(\xi)|^2\,d\xi \\
&\leq \sup_{\xi}\left\{\frac{\xi^4}{\alpha^2+\xi^2}\right\}\int |\hat{f}(\xi)|^2\,d\xi,
\end{aligned}$$

onde usamos (2.45). Por outro lado $\dfrac{\xi^4}{\alpha^2+\xi^4} \leq 1$. Portanto

$$\|D_x^2(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}f(x)\| \leq \|f\|.$$

Substituindo na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\|D_x(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}f(x)\|_{L_x^\infty(L_T^2)} &\leq \sqrt{2}\,T^{1/2}\sqrt{\frac{1}{2\alpha}}\|f\|^{1/2}\,\|f\|^{1/2} \\
&\leq CT^{1/2}\|f\|.
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\|U(t)D_x(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}f(x)\|_{L_x^\infty(L_T^2)} &= \|D_x^{1/2}U(t)\left[D_x^{1/2}(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}f(x)\right]\|_{L_x^\infty(L_T^2)} \\
&\leq C\|D_x^{1/2}(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}f(x)\|_{L_x^2} \leq C\|f\|_{L_x^2},
\end{aligned}$$

onde usamos (2.48).

4.

$$\begin{aligned}
\|uv_0e^{-\beta t}\|_{L_x^1(L_T^2)} &= \int\left(\int_0^T |uv_0e^{-\beta t}|^2\,dt\right)^{1/2} dx \\
&\leq \int |v_0|\left(\int_0^T |u|^2\,dt\right)^{1/2} dx \\
&\leq \left(\int |v_0|^2\,dx\right)^{1/2}\left[\int\left(\int_0^T |u(x,.)|^2\,dt\right)\right]^{1/2} \\
&= \|v_0\|\,\|u\|_{L_x^2(L_T^2)}.
\end{aligned}$$

5. Como $|1-e^{-\beta t}|\leq 1$, temos

$$\begin{aligned}
\|ug(1-e^{-\beta t})\|_{L^1_x(L^2_T)} &= \int\left(\int_0^T |u(x,t)g(x)(1-e^{-\beta t})|^2\,dt\right)^{1/2} dx\\
&\leq \int\left(\int_0^T |u(x,t)|^2\,|g(x)|^2\,dt\right)^{1/2} dx\\
&= \int |g(x)|^2\left(\int_0^T |u(x,t)|^2\right)^{1/2} dx\\
&\leq \left(\int |g(x)|^2\,dx\right)^{1/2}\left[\int\left(\int_0^T |u(x,t)|^2\,dt\right) dx\right]^{1/2}\\
&= \|g\|_{L^2_x(L^2_T)}\,\|u\|_{L^2_x(L^2_T)}.
\end{aligned}$$

6. Usando (2.52) e o *Lema* 2.1 temos

$$\begin{aligned}
\left\|u\int_0^t (|u|^2)_x(.,\tau)\,d\tau\right\|_{L^1_x(L^2_T)} &= 2\left\|uRe\int_0^t u_x(.,\tau)\overline{u(.,\tau)}\,d\tau\right\|_{L^1_x(L^2_T)}\\
&\leq 2\left\|u\int_0^t u_x(.,\tau)\overline{u(.,\tau)}\,d\tau\right\|_{L^1_x(L^2_T)}\\
&\leq 2T\|u\|_{L^\infty_T(L^2_x)}\|\bar{u}\|_{L^\infty_T(L^2_x)}\|u_x\|_{L^\infty_x(L^2_T)}\\
&\leq CT\|u\|_{L^\infty_T(L^2_x)}\|u_x\|_{L^\infty_x(L^2_T)}.
\end{aligned}$$

Portanto, substituindo em (2.58), obtemos

$$\begin{aligned}
\|D_xu\|_{L^\infty_x(L^2_T)} &\leq C\|u_0\|_{H^{1/2}}+C(1+T^{1/2})\|f\|_{L^2_x}+Ce^{\alpha T}\|v_0\|\,\|u\|_{L^2_x(L^2_T)}\\
&+\frac{C}{\beta}e^{\alpha T}\|g\|_{L^2_x}\|u\|_{L^2_x(L^2_T)}+C|\gamma|e^{\alpha T}T\|u\|_{L^\infty_T(L^2_x)}\|u_x\|_{L^\infty_2(L^2_T)}.
\end{aligned}$$

Aplicando novamente o *Lema* 2.1, temos

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^\infty_T(L^2_x)} &= \sup_{[0,T]}\|u\|\leq\sup_{[0,T]}\left(\|u_0\|^2e^{-\alpha t}+\frac{\|f\|^2}{\alpha^2}(1-e^{-\alpha t})\right)^{1/2}\\
&\leq \left(\|u_0\|^2+\frac{\|f\|^2}{\alpha^2}(1-e^{-\alpha T})\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\|u\|_{L^\infty_T(L^2_x)}\leq C(\|u_0\|,\|f\|,\alpha,T).$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^2_x(L^2_T)} &= \left(\int\int_0^T |u(t,x)|^2\,dt\,dx\right)^{1/2} \leq \left(\int \sup_{[0,T]} |u(t,x)|^2 \int_0^T \,dt\,dx\right)^{1/2}\\ &= T^{1/2}\|u\|_{L^\infty_T(L^2_x)} \leq \bar{C}T^{1/2} = \bar{C}_1.\end{aligned}$$

Isto é,

$$\|u\|_{L^2_x(L^2_T)} \leq \bar{C}_1.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\|D_x u\|_{L^\infty_x(L^2_T)} &\leq C\|u_0\|_{H^{1/2}} + C(1+T^{1/2})\|f\| + Ce^{\alpha T}\bar{C}_1\|v_0\| + \frac{C}{\beta}\bar{C}_1 e^{\alpha T}\|g\|\\ &+ C|\gamma|\bar{C}e^{\alpha T}T\|D_x\|_{L^\infty_x(L^2_T)} \leq C_1 + C_2T\|D_x u\|_{L^\infty_x(L^2_T)},\end{aligned}$$

onde usamos o fato de que $\|D_x u\|_{L^\infty_x(L^2_T)} = \|u_x\|_{L^\infty_x(L^2_T)}$, o qual é fácil de ser verificado. Portanto

$$(1 - C_2T)\|D_x u\|_{L^\infty_x(L^2_T)} \leq C_1.$$

Escolhendo $T \leq 1$ de modo que $C_2T \leq \dfrac{1}{2}$, obtemos

$$\|D_x u\|_{L^\infty_x(L^2_T)} \leq C(T) \;\; \text{portanto} \;\; \|u_x\|_{L^\infty_x(L^2_T)} \leq C(T). \quad \blacksquare$$

Por indução mostra-se o

Lema 2.9 *Suponha que $f, g \in H^{k-1}(\mathbb{R})$ para $k > 2$, $(u_0, v_0) \in X_k = H^{k-1}(\mathbb{R}) \times H^k(\mathbb{R})$. Seja $(u(t), v(t))$ uma solução de (4)-(5). Então*

$$\|u\|_{H^k} + \|v\|_{H^{k-1}} \leq C_k.$$

Capítulo 3

Existência e Unicidade

Neste capítulo mostraremos a existência e unicidade de solução para o problema (4)-(5) bem como a existência de um sistema dinâmico contínuo em X_1. Para este propósito, começaremos com um *Lema* que nos ajudará adiante.

Lema 3.1 (Veja [20]) *Seja f_j, g_j sequências em $L^2(\Omega)$ tais que*

$$f_j \rightharpoonup f \text{ (fraco) em } L^2(\Omega)$$

$$g_j \to g \text{ (forte) em } L^2(\Omega).$$

Então

$$f_j g_j \to fg \text{ em } D'(\Omega),$$

onde $D'(\Omega)$ é o espaço das distribuições.

Suponha que $f, g \in H^1(\mathbb{R})$ e considere a existência de solução no espaço $X_2 = H^2(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$. Seja $(u_0, v_0) \in X_2$. Para todo $\epsilon > 0$, considere a seguinte equação

$$(1 - \epsilon\partial_x^2)\, u = f.$$

Aplicando a transformada de Fourier em ambos os lados, obtemos

$$\hat{u}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{1 + \epsilon\xi^2}. \tag{3.1}$$

Portanto,

$$u(x) = \left(\frac{\hat{f}(\xi)}{1 + \epsilon\xi^2} \right)^{\vee},$$

isto é,

$$((1-\epsilon\partial_x^2)^{-1}f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{ix\xi}\frac{\hat{f}(\xi)}{1+\epsilon\xi^2}\,d\xi.$$

Vamos Denotar por $\Lambda_\epsilon = (1-\epsilon\partial_x^2)^{-1}$ o operador que age da seguinte maneira:

$$\left(\Lambda_\epsilon f\right)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{ix\xi}\frac{\hat{f}(\xi)}{1+\epsilon\xi^2}\,d\xi. \tag{3.2}$$

Observe que

$$\|\Lambda_\epsilon\, f\| \leq \|f\|. \tag{3.3}$$

Podemos olhar $(\Lambda_\epsilon f)(x)$ de outra maneira. Note que, se $v(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2\epsilon}}\, e^{-|x|/\sqrt{\epsilon}}$, então

$$\hat{v}(\xi) = \frac{1}{1+\epsilon\xi^2}.$$

Basta mostrar que se $w(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}e^{-|x|}$, então $\hat{w}(\xi) = \dfrac{1}{1+\xi^2}$ pois pela propriedade da transformada de Fourier, temos

$$w\left[\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right]^{\wedge}(\xi) = \lambda\hat{w}(\lambda\xi).$$

Logo, tomando $\lambda = \sqrt{\epsilon}$, teremos que $w\left(\dfrac{x}{\sqrt{\epsilon}}\right)^{\wedge}(\xi) = \sqrt{\epsilon}\hat{w}(\sqrt{\epsilon}\xi)$, isto é,

$$\left[\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}w\left(\frac{x}{\sqrt{\epsilon}}\right)\right)^{\wedge}(\xi)\right] = \frac{1}{1+\epsilon\xi^2}.$$

Como $v(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon}}w\left(\dfrac{x}{\sqrt{\epsilon}}\right)$, segue-se que $\hat{v}(\xi) = \dfrac{1}{1+\epsilon\xi^2}$. Portanto vamos calcular a transformada de Fourier de $w(x)$. Como vimos

$$\hat{w}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-ix\xi}w(x)\,dx = \frac{1}{2}\int e^{-ix\xi}e^{-|x|}\,d\xi = \int_0^\infty e^{-x}\cos(x\xi)\,d\xi = \frac{1}{1+\xi^2},$$

pois $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\mathrm{sen}(x\xi)\,d\xi = 0$. Assim,

$$\hat{w}(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2} \Rightarrow \hat{v}(\xi) = \frac{1}{1+\epsilon\xi^2}.$$

Feito isso, substituindo em (3.2) obtemos

$$\begin{aligned}(\Lambda_\epsilon f)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)\hat{v}(\xi)\,d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{ix\xi}\sqrt{2\pi}(f*v)^\wedge(\xi)\,d\xi \\ &= \int e^{ix\xi}(f*v)^\wedge(\xi)\,d\xi = \sqrt{2\pi}(f*v)(-x),\end{aligned}$$

isto é,

$$\Lambda_\epsilon\, f(x) = \sqrt{2\pi}(f*v)(-x), \tag{3.4}$$

onde $v(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2\epsilon}}\, e^{-|x|/\sqrt{\epsilon}}$.

Propriedades 1

1.

$$\Lambda_\epsilon\, \bar{f} = \overline{\Lambda_\epsilon\, f} \tag{3.5}$$

De fato,

$$\begin{aligned}\Lambda_\epsilon\, \bar{f} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{ix\xi}\frac{(\bar{f})^\wedge(\xi)}{1+\epsilon\xi^2}\,d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{ix\xi}\frac{\overline{\hat{f}(-\xi)}}{1+\epsilon\xi^2}\,d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\overline{\int e^{-ix\xi}\frac{\hat{f}(-\xi)}{1+\epsilon\xi^2}\,d\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\overline{\int e^{ix\xi}\frac{\hat{f}(\xi)}{1+\epsilon\xi^2}\,d\xi} = \overline{\Lambda_\epsilon\, f}.\end{aligned}$$

2.

$$(\Lambda_\epsilon\, f)_x = \Lambda_\epsilon\, f_x. \tag{3.6}$$

De fato,

$$\begin{aligned}(\Lambda_\epsilon\, f)_x &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{ix\xi}\frac{\hat{f}(\xi)}{1+\epsilon\xi^2}\,d\xi\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \frac{d}{dx}\left(e^{ix\xi}\right)\frac{\hat{f}(\xi)}{1+\epsilon\xi^2}\,d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{ix\xi}\frac{i\xi\hat{f}(\xi)}{1+\epsilon\xi^2}\,d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{ix\xi}\frac{\left(\frac{d}{dx}f\right)^\wedge(\xi)}{1+\epsilon\xi^2}\,d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{ix\xi}\frac{\hat{f}_x(\xi)}{1+\epsilon\xi^2}\,d\xi = \Lambda_\epsilon\, f_x.\end{aligned}$$

3.

$$\int \bar{u}\Lambda_\epsilon\, v\,dx = \int v\Lambda_\epsilon\,\bar{u}\,dx. \tag{3.7}$$

De fato, por (3.4), temos que $(u*v)(-x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2\epsilon}}\displaystyle\int e^{-|x+y|/\sqrt{\epsilon}}u(y)\,dy$.
Portanto,

$$\int \bar{u}\Lambda_\epsilon\, v\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{\epsilon}}\int\int e^{\frac{-|x+y|}{\sqrt{\epsilon}}}\,\bar{u}(x)v(y)\,dy\,dx$$

e

$$\int v\Lambda_\epsilon\, \bar{u}\, dx\frac{\pi}{\sqrt{\epsilon}}\int\int e^{\frac{-|x+y|}{\sqrt{\epsilon}}}\,\bar{u}(y)v(x)\,dy\,dx.$$

Logo,

$$\int \bar{u}\Lambda_\epsilon\, v\, dx = \int v\Lambda_\epsilon\, \bar{u}\, dx.$$

Lema 3.2 *Denotando por* $f_\epsilon = (\Lambda_\epsilon f)(x)$ *temos que se* $f \in H^k(\mathbb{R})$ *então* $f_\epsilon \in H^{k+2}(\mathbb{R})$ *com*

$$\|f_\epsilon\|_{k+2} \leq \left(1+\frac{1}{\epsilon}\right)\|f\|_k$$

e

$$\|f_\epsilon\|_k \leq \|f\|_k.$$

Além disso, quando $\epsilon \to 0$, $f_\epsilon \to f$ *em* H^k.

Prova: *De fato,*

$$\begin{aligned}\|f_\epsilon\|^2_{k+2} &= \int(1+\xi^2)^{k+2}|\hat{f}_\epsilon|^2\,d\xi = \int(1+\xi^2)^k\left(\frac{1+\xi^2}{1+\epsilon\xi^2}\right)^2\\ &\leq \sup_\xi\left(\frac{1+\xi^2}{1+\epsilon\xi^2}\right)^2\|f\|_k^2 \leq \left(1+\frac{1}{\epsilon}\right)^2\|f\|_k^2\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\|f_\epsilon\|^2_k &= \int(1+\xi^2)^k|\hat{f}_\epsilon(\xi)|^2\,d\xi = \int(1+\xi^2)^k\frac{1}{(1+\epsilon\xi^2)^2}|\hat{f}_\epsilon(\xi)|^2\,d\xi\\ &\leq \sup_\xi\left(\frac{1}{1+\epsilon\xi^2}\right)^2\|f\|_k^2 = \|f\|_k^2. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Teorema 3.1 (Existência e Unicidade com dados iniciais em X_2) *Suponha que $f, g \in H^1(\mathbb{R})$. Para toda $(u_0, v_0) \in X_2$ o problema*

$$\begin{cases} iu_t & + & u_{xx} & - & uv + i\alpha u & = & f(x)\,, & x \in \mathbb{R}\,, t > 0 \\ v_t & + & \beta v & + & \gamma(|u|^2)_x & = & g(x)\,, & x \in \mathbb{R}\,, t > 0 \\ u(x,0) & = & u_0(x) \\ v(x,0) & = & v_0(x) \end{cases} \tag{3.8}$$

admite uma única solução global

$$(u,v) \in C([0,\infty); X_2) \cap C^1([0,\infty); L^2 \times H^1(\mathbb{R})). \tag{3.9}$$

Prova: Considere o seguinte problema de Cauchy regularizado

$$\begin{cases} iu_t^\epsilon & + & u_{xx}^\epsilon & - & u^\epsilon v^\epsilon + i\alpha u^\epsilon & = & f_\epsilon(x) \\ v_t^\epsilon & + & \beta v^\epsilon & + & 2\gamma Re(u^\epsilon \Lambda_\epsilon\, \bar{u}_x^\epsilon) & = & g_\epsilon(x) \\ u^\epsilon(x,0) & = & u_{0\epsilon}(x) \\ v^\epsilon(x,0) & = & v_{0\epsilon}(x) \end{cases} \tag{3.10}$$

Denotando por $Y = L^2 \times H^2(\mathbb{R})$, podemos reescrever (3.10) como o problema de Cauchy abstrato em Y:

$$\begin{cases} U_t^\epsilon & = & AU^\epsilon & + & F(U^\epsilon) \\ U^\epsilon(0) & = & U_{0\epsilon}, \end{cases} \tag{3.11}$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} i\partial_x^2 - \alpha & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix}\,,\ F(U^\epsilon) = \begin{pmatrix} -i(u^\epsilon v^\epsilon + f_\epsilon) \\ -2\gamma Re(u^\epsilon \Lambda_\epsilon\, \bar{u}_x^\epsilon) + g_\epsilon \end{pmatrix}\,,\ U^\epsilon = \begin{pmatrix} u^\epsilon \\ v^\epsilon \end{pmatrix}.$$

O domínio de definição de A é $D(A) = H^2(\mathbb{R}) \times H^2(\mathbb{R})$. No que segue-se faremos uso do seguite

Lema 3.3 *Sejam u, v, w e z funções em $H^s(\mathbb{R})$, $s > 1/2$. Para toda função $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vale*

$$\|f(u,v) - f(w,z)\|_{H^s} \leq C_s(\|u-w\|_{H^s} + \|v-z\|_{H^s}), \tag{3.12}$$

onde C_s é uma constante tal que $C_s = C(\|u\|_{H^s}, \|v\|_{H^s}, \|w\|_{H^s}, \|z\|_{H^s})$.

Prova: Veja (**??**). ■

Lema 3.4 *Para todo $U_{0\epsilon} \in D(A)$ existe uma única solução U^ϵ do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{dU^\epsilon(t)}{dt} & = & AU^\epsilon(t) & + & F(t, U^\epsilon) \\ U^\epsilon(0) & = & U_{0\epsilon}(x), \end{cases} \tag{3.13}$$

definida para $t \in [0, T_{\max})$ *tal que*

$$(u^\epsilon, v^\epsilon) \in C([0, T_{\max}); D(A)) \cap C^1([0, T_{\max}); Y),$$

com a seguinte propriedade: $T_{\max} = +\infty$ *ou se* $T_{\max} < +\infty$ *teremos que*

$$\lim_{t \to T_{\max}} \left(\|u^\epsilon\|_{H^2(\mathbb{R})} + \|v^\epsilon\|_{H^2(\mathbb{R})} \right) = +\infty.$$

Prova: De fato, para demonstrarmos esse *Lema* precisaremos das seguintes *afirmações*:

Afirmação 3.1 *A é um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contração em Y.*

De fato, a idéia da prova é aplicar o *Teorema de Lumer-Phillips* (veja [1]). Portanto dividiremos a prova em duas partes.

1. **A é dissipativo:**

   (A é dissipativo $\Leftrightarrow$ $\|(\lambda I - A)x\|_{L^2 \times H^2} \geq \lambda \|x\|_{L^2 \times H^2}$ $\forall x \in D(A)$, $\lambda > 0$) .

   É fácil ver que

$$(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} (\lambda + \alpha) - i\partial_x^2 & 0 \\ 0 & \lambda + \alpha \end{pmatrix}.$$

   Portanto, para todo $[u, v] \in D(A)$

$$(\lambda I - A)[u, v] = [(\alpha + \lambda)u - i\partial_x^2 u, (\lambda + \beta)v], \ \alpha, \beta, \gamma > 0.$$

   Portanto,

$$\|(\lambda I - A)[u, v]\|^2_{L^2 \times H^2} = \|(\lambda + \alpha)u - iu_{xx}\|^2_{L^2} + \|(\lambda + \beta)v\|^2_{H^2}. \quad (3.14)$$

   Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|(\lambda + \alpha)u - iu_{xx}\|^2_{L^2} &= \int |\left((\lambda + \alpha)u - iu_{xx}\right)^\wedge(\xi)|^2 \, d\xi \\ &= \int |(\lambda + \alpha) + i\xi^2|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \\ &= \int ((\lambda + \alpha)^2 + \xi^4) |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \\ &\geq \int \lambda^2 |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi = \lambda^2 \|u\|^2_{L^2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\|(\lambda+\beta)v\|_{H^2}^2 &= \int(1+\xi^2)^2|(\lambda+\beta)\hat{v}(\xi)|^2\,d\xi = (\lambda+\beta)^2\int(1+\xi^2)^2|\hat{v}(\xi)|^2\,d\xi \\ &\geq \lambda^2\int(1+\xi^2)^2|\hat{v}(\xi)|^2\,d\xi = \lambda^2\|v\|_{H^2}^2.\end{aligned}$$

Portanto, substituindo em (3.14) obtemos

$$\|(\lambda I - A)[u,v]\|_{L^2\times H^2} \geq \lambda\|[u,v]\|_{L^2\times H^2}\ ,\ \forall[u,v]\in D(A). \tag{3.15}$$

2. $\underline{\mathbf{R(I-A)}=\mathbf{L^2}(\mathbb{R})\times\mathbf{H^2}(\mathbb{R}):}$ De fato, devemos mostrar que dados $[f_1,f_2]\in L^2(\mathbb{R})\times H^2(\mathbb{R})$, existe $[u,v]\in H^2(\mathbb{R})\times H^2(\mathbb{R})$ tal que $(I-A)[u,v]=[f_1,f_2]$, que é equivalente a resolver o sistema

$$\begin{cases}(\alpha+1)u - iu_{xx} &= f_1\\ (\beta+1)v &= f_2\end{cases}.$$

Note que $v=\dfrac{1}{1+\beta}f_2\in H^2$, isto é, $v\in H^2$. Aplicando a transformada de Fourier na primeira expressão, obtemos

$$(\alpha+1)\hat{u}(\xi)+i\xi^2\hat{u}(\xi)=\hat{f}_1(\xi)\ \text{ portanto }\ \hat{u}(\xi)=\frac{\hat{f}_1(\xi)}{(\alpha+1)+i\xi^2},$$

isto é,

$$u(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{ix\xi}\frac{\hat{f}_1(\xi)}{(\alpha+1)+i\xi^2}\,d\xi.$$

Agora observe que $u\in H^2$, pois

$$\begin{aligned}\|u\|_{H^2}^2 &= \int(1+\xi^2)^2|\hat{u}(\xi)|^2\,d\xi = \int\frac{(1+\xi^2)^2}{(\alpha+1)^2+\xi^4}|\hat{f}_1(\xi)|^2\,d\xi \\ &\leq \sup_{\xi}\left\{\frac{(1+\xi^2)^2}{(\alpha+1)^2+\xi^4}\right\}\|f_1\|_{L^2}<\infty,\end{aligned}$$

pois $\sup_{\xi}\left\{\dfrac{(1+\xi^2)^2}{(\alpha+1)^2+\xi^4}\right\}\leq\left(1+\dfrac{1}{\alpha+1}\right)$.

Para concluir, como $\overline{D(A)}=Y$, segue-se do *Teorema de Lumer-Phillips* (veja [1]) que A é um gerador infinitesimal de um C_0- semigrupo de contração. O que prova a afirmação.

Para a próxima afirmação faremos uso do seguite

Afirmação 3.2 *A função $F : D(A) \to D(A)$ é localmente Lipschitziana.*

Prova: Devemos mostrar que dados

$$U^\epsilon = \begin{pmatrix} u^\epsilon \\ v^\epsilon \end{pmatrix} \quad , \quad V^\epsilon = \begin{pmatrix} w^\epsilon \\ z^\epsilon \end{pmatrix},$$

em $D(A)$ existe constante $C = C(\|u^\epsilon\|_{H^2}, \|v^\epsilon\|_{H^2}, \|w^\epsilon\|_{H^2}, \|z^\epsilon\|_{H^2})$ tal que

$$\|F(U^\epsilon) - F(V^\epsilon)\|_{D(A)} \leq C\|U^\epsilon - V^\epsilon\|_{D(A)}.$$

Para provar tal resultado, usaremos o *Lema* 3.3. É fácil ver que

$$F(U^\epsilon) - F(V^\epsilon) = \begin{pmatrix} -i(u^\epsilon v^\epsilon - w^\epsilon z^\epsilon) \\ -2\gamma Re(u^\epsilon \Lambda_\epsilon \, \bar{u}_x^\epsilon - w^\epsilon \Lambda_\epsilon \, \bar{w}_x^\epsilon) \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$\|F(U^\epsilon) - F(V^\epsilon)\|_{D(A)}^2 = \|[-i(u^\epsilon v^\epsilon - w^\epsilon z^\epsilon), -2\gamma Re(u^\epsilon \Lambda_\epsilon \, \bar{u}_x^\epsilon - w^\epsilon \Lambda_\epsilon \, \bar{w}_x^\epsilon)]\|_{D(A)}^2$$

$$\leq \|u^\epsilon v^\epsilon - w^\epsilon z^\epsilon\|_{H^2}^2 + 4\gamma^2\|(u^\epsilon \Lambda_\epsilon \, \bar{u}_x^\epsilon - w^\epsilon \Lambda_\epsilon \, \bar{w}_x^\epsilon)\|_{H^2}^2$$

$$\leq C(\|u^\epsilon - w^\epsilon\|_{H^2}^2 + \|v^\epsilon - z^\epsilon\|_{H^2}^2) + C(\|u^\epsilon - w^\epsilon\|_{H^2}^2 + \|(\Lambda_\epsilon \, \bar{u}^\epsilon - \Lambda^\epsilon \, \bar{w}^\epsilon)_x\|_{H^2}^2).$$

Agora observe que $\partial_x : H^s \to H^{s-1}$ com $\|u_x\|_{H^{s-1}} \leq \|u\|_{H^s}$. Com isso

$$\begin{aligned}
\|(\Lambda_\epsilon \, \bar{u}^\epsilon - \Lambda_\epsilon \, \bar{w}^\epsilon)_x\|_{H^2}^2 &\leq \|\Lambda_\epsilon(u^\epsilon - w^\epsilon)\|_{H^3}^2 \\
&= \int (1+\xi^2)^3 |(\Lambda_\epsilon \bar{u}^\epsilon - \Lambda_\epsilon \bar{w}^\epsilon) \wedge (\xi)|^2 \, d\xi \\
&\leq \sup_\xi \left\{ \frac{1+\xi^2}{(1+\epsilon\xi^2)^2} \right\} \int (1+\xi^2)^2 |(u^\epsilon - w^(\epsilon)) \wedge (\xi)|^2 \, d\xi \\
&\leq \|u^\epsilon - w^\epsilon\|_{H^2}^2.
\end{aligned}$$

Logo, substituindo na expressão acima, existe uma constante C como acima, tal que

$$\|F(U^\epsilon) - F(V^\epsilon)\|_{D(A)}^2 \leq C^2(\|u^\epsilon - w^\epsilon\|_{H^2}^2 + \|v^\epsilon - z^\epsilon\|_{H^2}^2),$$

isto é,

$$\|F(U^\epsilon) - F(V^\epsilon)\|_{D(A)} \leq C\|U^\epsilon - V^\epsilon\|_{D(A)}.$$

O que prova a afirmação (veja [1]).

Logo existe uma única solução

$$(u^\epsilon, v^\epsilon) \in C([0, T_*]; D(A)) \cap C^1([0, T_*]; Y),$$

onde $T_* = +\infty$ ou $T_* < \infty$ se $\lim_{t\to T_*}(\|u^\epsilon\|_{H^2} + \|v^\epsilon\|_{H^2}) = +\infty$. ■

A idéia agora é mostrar que $T_* = \infty$, isto é, mostrando que

$$\|u^\epsilon\|_{H^2} + \|v^\epsilon\|_{H^2} \leq C(\epsilon, \|f_\epsilon\|_{H^2}, \|g_\epsilon\|_{H^2}, \|u_{0\epsilon}\|_{H^2}, \|v_{0\epsilon}\|_{H^2})\ ,\ \ 0 \leq t \leq T,$$

que garantirá existência global de (3.10). Em seguida uma estimativa que independerá de ϵ

$$\|u^\epsilon\|_{H^2} + \|v^\epsilon\|_{H^1} \leq C(T, \|f\|_{H^1}, \|g\|_{H^1}, \|u_0\|_{H^2}, \|v_0\|_{H^1}),\ \ 0 \leq t \leq T,$$

que garantirá existência global de (3.8). Considere novamente a equação (3.10). De maneira análoga ao *Lema* 2.1, mostra-se que

$$\|u^\epsilon\|^2 \leq \|u_{0\epsilon}\|^2 e^{-\alpha t} + \frac{\|f_\epsilon\|^2}{\alpha^2}(1 - e^{-\alpha t}). \tag{3.16}$$

ou

$$\|u^\epsilon\|^2 \leq \|u_0\|^2 e^{-\alpha t} + \frac{\|f\|^2}{\alpha^2}(1 - e^{-\alpha t}) \tag{3.17}$$

Multiplicando a primeira equação de (3.10) por $-2(u_t^\epsilon + \alpha\bar{u}^\epsilon)$ obtemos, de maneira análoga a (2.3), a seguinte expressão

$$\begin{aligned} & 2\alpha Im \int u_t^\epsilon \bar{u}^\epsilon\, dx - 2Re \int \bar{u}_t^\epsilon u_{xx}^\epsilon\, dx - 2\alpha Re \int \bar{u}^\epsilon u_{xx}^\epsilon\, dx \\ + \quad & 2Re \int u^\epsilon v^\epsilon \bar{u}_t^\epsilon\, dx + +2\alpha Re \int |u^\epsilon|^2 v^\epsilon\, dx + 2\alpha Im \int u^\epsilon \bar{u}_t^\epsilon\, dx \\ = \quad & -2Re \int f_\epsilon \bar{u}_t^\epsilon\, dx - 2\alpha Re \int f_\epsilon \bar{u}^\epsilon\, dx. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Analogamente, obtemos:

1.
$$-2Re \int \bar{u}_t^\epsilon u_{xx}^\epsilon\, dx = \frac{d}{dt}\|u_x\|^2 \quad \text{e} \quad -2Re \int f_\epsilon u_t^\epsilon\, dx = \frac{d}{dt}\left(-2Re \int f_\epsilon \bar{u}^\epsilon\, dx\right).$$

2.
$$2\alpha Im \int u_t^\epsilon \bar{u}^\epsilon\, dx = 0 \quad \text{e} \quad 2\alpha Re \int \bar{u}^\epsilon u_{xx}^\epsilon\, dx = -2\alpha\|u_x^\epsilon\|^{\cdot}$$

3.
$$2Re \int u^\epsilon \bar{u}_t^\epsilon v^\epsilon\, dx = \frac{d}{dt}\int (|u^\epsilon|^2) v^\epsilon\, dx - \int |u^\epsilon|^2 v_t^\epsilon\, dx.$$

Substituindo agora *(1)-(3)* em (3.18), obtemos a seguinte expressão:

$$\frac{d}{dt}\left(\|u_x^\epsilon\|^2 + \int |u^\epsilon|^2 v^\epsilon\, dx + 2Re\int f_\epsilon \bar{u}^\epsilon\, dx\right) + 2\alpha\|u_x^\epsilon\|^2 + 2\alpha\int |u^\epsilon|^2 v^\epsilon\, dx +$$

$$+2\alpha Re\int f_\epsilon \bar{u}^\epsilon\, dx - \int |u^\epsilon|^2 v_t^\epsilon\, dx = 0. \qquad (3.19)$$

Multiplicando agora a segunda equação de (3.10) por $|u^\epsilon|^2$ e integrando com respeito a x, obtemos

$$-\int |u^\epsilon|^2 v_t^\epsilon\, dx = \beta\int |u^\epsilon|^2 v^\epsilon\, dx + 2\gamma\int |u^\epsilon|^2 Re(u^\epsilon \Lambda_\epsilon\, \bar{u}_x^\epsilon)\, dx - \int |u^\epsilon|^2 g_\epsilon\, dx. \qquad (3.20)$$

Por (3.5) e (3.6), temos

$$2Re(u^\epsilon \Lambda_\epsilon\, \bar{u}_x^\epsilon) = u^\epsilon \Lambda_\epsilon\, \bar{u}_x^\epsilon + \overline{u^\epsilon \Lambda_\epsilon\, \bar{u}_x^\epsilon} = 2Re(\bar{u}^\epsilon \Lambda_\epsilon\, u_x^\epsilon).$$

Logo, (3.20) fica

$$-\int |u^\epsilon|^2 v_t^\epsilon\, dx = \beta\int |u^\epsilon|^2 v^\epsilon\, dx + 2\gamma\int |u^\epsilon|^2 Re(\bar{u}^\epsilon \Lambda_\epsilon\, u_x^\epsilon)\, dx - \int |u^\epsilon|^2 g_\epsilon\, dx. \qquad (3.21)$$

Substituindo (3.21) em (3.19), obtemos

$$\frac{d}{dt}\left(\|u_x^\epsilon\|^2 + \int |u^\epsilon|^2 v^\epsilon\, dx + 2Re\int f_\epsilon \bar{u}^\epsilon\, dx\right) + 2\alpha\|u_x^\epsilon\|^2 + (2\alpha+\beta)\int |u^\epsilon|^2 v^\epsilon\, dx +$$

$$+2\alpha Re\int f_\epsilon \bar{u}^\epsilon\, dx - \int g_\epsilon |u^\epsilon|^2\, dx + 2\gamma Re\int |u^\epsilon|^2 \bar{u}^\epsilon \Lambda_\epsilon\, u_x^\epsilon\, dx = 0. \qquad (3.22)$$

Multiplicando a segunda equação de (3.10) por $2v^\epsilon$ e integrando obtemos

$$\frac{d}{dt}\|v^\epsilon\|^2 + 2\beta\|v^\epsilon\|^2 + 4\gamma Re\int u^\epsilon \Lambda_\epsilon\, \bar{u}_x^\epsilon v^\epsilon\, dx = 2\int g_\epsilon v^\epsilon\, dx. \qquad (3.23)$$

Por outro lado,

$$2Re\int u^\epsilon \Lambda_\epsilon\, \bar{u}_x^\epsilon v^\epsilon\, dx = 2Re\int (iu_t^\epsilon + u_{xx}^\epsilon + i\alpha u^\epsilon - f_\epsilon)\Lambda_\epsilon\, \bar{u}_x^\epsilon\, dx$$

$$= -2Im\int u_t^\epsilon \Lambda_\epsilon\, \bar{u}_x^\epsilon\, dx - 2\alpha Im\int u^\epsilon \Lambda_\epsilon\, \bar{u}_x^\epsilon\, dx$$

$$-2Re\int f_\epsilon \Lambda_\epsilon\, \bar{u}_x^\epsilon\, dx + 2Re\int u_{xx}^\epsilon \Lambda_\epsilon \bar{u}_x^\epsilon\, dx \qquad (3.24)$$

Agora note que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}Im\int u^\epsilon\Lambda_\epsilon\,\bar{u}^\epsilon_x\,dx &= Im\int(u^\epsilon_t\Lambda_\epsilon\,\bar{u}^\epsilon_x+u^\epsilon\Lambda_\epsilon\,\bar{u}^\epsilon_{xt})\,dx\\
&= Im\int u^\epsilon_t\Lambda_\epsilon\bar{u}^\epsilon_x\,dx-Im\int u^\epsilon_x\Lambda_\epsilon\bar{u}^\epsilon_t\,dx\\
&= Im\int u^\epsilon_t\Lambda_\epsilon\bar{u}^\epsilon_x\,dx+Im\int \bar{u}^\epsilon_x\Lambda_\epsilon u^\epsilon_t\,dx. \qquad (3.25)
\end{aligned}
$$

Usando (3.7) obtemos

$$
\int \bar{u}^\epsilon_x\Lambda_\epsilon\,u^\epsilon_t\,dx=\int u^\epsilon_t\Lambda_\epsilon\,\bar{u}^\epsilon_x\,dx.
$$

Portanto, substituindo esta última expressão em (3.25) temos que

$$
\frac{d}{dt}Im\int u^\epsilon\Lambda_\epsilon\bar{u}^\epsilon_x\,dx=2Im\int u^\epsilon_t\Lambda_\epsilon\,\bar{u}^\epsilon_x\,dx \qquad (3.26)
$$

que por (3.5),(3.6) e (3.7) temos

$$
\begin{aligned}
2Re\int u^\epsilon_{xx}\Lambda_\epsilon\,\bar{u}^\epsilon_x\,dx &= \int u^\epsilon_{xx}\Lambda_\epsilon\,\bar{u}^\epsilon_x\,dx+\int \bar{u}^\epsilon_{xx}\Lambda_\epsilon u^\epsilon_x\,dx\\
&= -\int u^\epsilon_x\Lambda_\epsilon\bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx+\int u^\epsilon_x\Lambda_\epsilon\bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx\\
&= -\int u^\epsilon_x\Lambda_\epsilon\bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx+\int u^\epsilon_x\Lambda_\epsilon\bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx=0. \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

Por fim, substituindo (3.26), (3.27) em (3.24) ficamos com

$$
\begin{aligned}
2Re\int u^\epsilon\Lambda_\epsilon\bar{u}^\epsilon_x v^\epsilon\,dx &= -\frac{d}{dt}Im\int u^\epsilon\Lambda_\epsilon\bar{u}^\epsilon_x\,dx\\
&\quad -2\alpha Im\int u^\epsilon\Lambda_\epsilon\bar{u}^\epsilon_x\,dx-2Re\int f_\epsilon\Lambda_\epsilon\bar{u}^\epsilon_x\,dx. \qquad (3.28)
\end{aligned}
$$

Somando agora (3.22),(3.24) e (3.28) obtemos a seguinte expressão

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\|u^\epsilon_x\|^2+\|v^\epsilon\|^2+\int|u^\epsilon|^2v^\epsilon\,dx+2Re\int f_\epsilon\bar{u}^\epsilon\,dx-2\gamma Im\int u^\epsilon\Lambda_\epsilon\,\bar{u}^\epsilon_x\,dx\right)\\
+\;&2\alpha\left(\|u^\epsilon_x\|^2+\|v^\epsilon\|^2+\int|u^\epsilon|^2v^\epsilon\,dx+2Re\int f_\epsilon\bar{u}^\epsilon\,dx-2\gamma Im\int u^\epsilon\Lambda_\epsilon\,\bar{u}^\epsilon_x\,dx\right)\\
=\;&2(\alpha-\beta)\|v^\epsilon\|^2+2\alpha Re\int f_\epsilon\bar{u}^\epsilon\,dx-\beta\int|u^\epsilon|^2v^\epsilon\,dx+\int g_\epsilon|u^\epsilon|^2\,dx\\
&+4\gamma Re\int f_\epsilon\Lambda_\epsilon\bar{u}^\epsilon_x\,dx+2Re\int g_\epsilon v^\epsilon\,dx-2\gamma Re\int|u^\epsilon|^2\bar{u}^\epsilon\Lambda_\epsilon\,u^\epsilon_x\,dx. \qquad (3.29)
\end{aligned}
$$

Contudo, denotando novamente $\xi^\epsilon(t) = (u^\epsilon, v^\epsilon)$, obtemos

$$J_\epsilon(\xi^\epsilon) = \|u_x^\epsilon\|^2 + \|v^\epsilon\|^2 + \int |u^\epsilon|^2 v^\epsilon\, dx + 2Re\int f_\epsilon \bar{u}^\epsilon\, dx - 2\gamma Im \int u^\epsilon \Lambda_\epsilon\, \bar{u}_x^\epsilon\, dx$$

e

$$\begin{aligned} K_\epsilon(\xi^\epsilon(t)) &= 2(\alpha-\beta)\|v^\epsilon\|^2 + 2\alpha Re\int f_\epsilon \bar{u}^\epsilon\, dx - \beta \int |u^\epsilon|^2 v^\epsilon\, dx + \int g_\epsilon |u^\epsilon|^2\, dx \\ &\quad + 4\gamma Re \int f_\epsilon \Lambda_\epsilon \bar{u}_x^\epsilon\, dx + 2Re\int g_\epsilon v^\epsilon\, dx - 2\gamma Re \int |u^\epsilon|^2 \bar{u}^\epsilon \Lambda_\epsilon\, u_x^\epsilon\, dx, \end{aligned}$$

isto é, (3.29) torna-se

$$\frac{d}{dt} J_\epsilon(\xi^\epsilon(t)) + 2\alpha J_\epsilon(\xi^\epsilon(t)) = K_\epsilon(\xi^\epsilon(t)). \tag{3.30}$$

Afirmação 3.3 *Existe uma constante $C = C(\|u_0\|_{H^2}, \|f\|_{H^1})$ tal que*

$$J_\epsilon(\xi^\epsilon(t)) \geq \frac{1}{2}\left(\|u_x^\epsilon\|^2 + \|v^\epsilon\|^2\right) - C. \tag{3.31}$$

Prova: De fato, no que segue-se estaremos sempre utilizando as estimativas (3.3),(3.16) e (3.17).

1.

$$\begin{aligned} \left| 2\gamma Im \int u^\epsilon \Lambda_\epsilon\, \bar{u}_x^\epsilon\, dx \right| &\leq 2|\gamma|\|u^\epsilon\|\|\Lambda_\epsilon\, \bar{u}_x^\epsilon\| \leq 2|\gamma|\|u^\epsilon\|\|u_x^\epsilon\| \leq \epsilon_1 \|u_x^\epsilon\|^2 + C(\epsilon_1)\|u^\epsilon\|^2 \\ &\leq \epsilon_1\|u_x^\epsilon\|^2 + C_1(\epsilon_1, \|f\|_{H^1}, \|u_0\|_{H^2}). \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \left| \int |u^\epsilon|^2 v^\epsilon\, dx \right| &\leq \|u^\epsilon\|_\infty \|u^\epsilon\|\|v^\epsilon\| \leq \epsilon_2\|v^\epsilon\|^2 + C(\epsilon_2)\|u^\epsilon\|_\infty^2 \|u^\epsilon\|^2 \\ &\leq \epsilon_2 \|v^\epsilon\|^2 + C(\epsilon_2)\|u^\epsilon\|^3 \|u_x^\epsilon\| \\ &\leq \epsilon_1 \|u_x^\epsilon\|^2 + \epsilon_2\|v^\epsilon\|^2 + C(\epsilon_1, \epsilon_2)\|u^\epsilon\|^6 \\ &\leq \epsilon_1 \|u_x^\epsilon\|^2 + \epsilon_2\|v^\epsilon\|^2 + C_2(\epsilon_1, \epsilon_2, \|f\|_{H^1}, \|u_0\|_{H^2}). \end{aligned}$$

3.

$$\left| 2Re \int f_\epsilon \bar{u}^\epsilon\, dx \right| \leq 2\|f_\epsilon\|_{H^2}\|u^\epsilon\| \leq C_3(\|f\|_{H^1}, \|u_0\|_{H^2}).$$

Assim, escolhendo ϵ_1, ϵ_2 adequados obtemos

$$J_\epsilon(\xi^\epsilon(t)) \geq \frac{1}{2}\left(\|u_x^\epsilon\|^2 + \|v^\epsilon\|^2\right) - C(\|f\|_{H^1}, \|u_0\|_{H^2}),$$

o que prova a afirmação.

Afirmação 3.4 *Existe uma constante* $C = C(\|u_0\|_{H^2}, \|f\|_{H^1}, \|g\|_{H^1})$ *tal que*

$$K_\epsilon(\xi^\epsilon(t)) \leq \frac{\alpha}{2}\left(\|u_x^\epsilon\|^2 + \|v^\epsilon\|^2\right) + C \tag{3.32}$$

Prova: De fato,

1.

$$\left|2\alpha Re \int f_\epsilon \bar{u}^\epsilon\, dx\right| \leq 2\alpha\|u^\epsilon\|\,\|f_\epsilon\| \leq C_1(\|u_0\|_{H^2}, \|f\|_{H^1}).$$

2.

$$\begin{aligned}\left|2\int g_\epsilon v^\epsilon\, dx\right| &\leq 2 \quad \|u^\epsilon\|\|g_\epsilon\| \leq \epsilon_2\|v^\epsilon\|^2 + C(\epsilon_2)\|g_\epsilon\|^2 \\ &\leq \quad \epsilon_2\|v^\epsilon\|^2 + C_2(\epsilon_2, \|g\|_{H^1}).\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\left|4\gamma Re \int f_\epsilon \Lambda_\epsilon\, \bar{u}_x^\epsilon\, dx\right| &\leq 4|\gamma|\|f_\epsilon\|\|\Lambda_\epsilon\, \bar{u}_x^\epsilon \leq \|4|\gamma|\|f_\epsilon\|\,\|u_x^\epsilon\| \\ &\leq \epsilon_1\|u_x^\epsilon\|^2 + C(\epsilon_1)\|f\|_{H^1}^2 \leq \epsilon_1\|u_x^\epsilon\|^2 + C_3(\epsilon_1, \|f\|_{H^1}).\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\left|\beta\int |u^\epsilon|^2 v^\epsilon\, dx\right| &\leq \beta\|u^\epsilon\|_\infty\,\|u^\epsilon\|\,\|v^\epsilon\| \leq \beta\sqrt{2}\|u^\epsilon\|^{3/2}\|u_x^\epsilon\|^{1/2}\|v^\epsilon\| \\ &\leq \epsilon_2\|v^\epsilon\|^2 + C(\epsilon_2)\|u_x^\epsilon\|\,\|u^\epsilon\|^3 \\ &\leq \epsilon_1\|u_x^\epsilon\|^2 + \epsilon_2\|v^\epsilon\|^2 + C(\epsilon_1, \epsilon_2, \|u^\epsilon\|) \\ &\leq \epsilon_1\|u_x^\epsilon\|^2 + \epsilon_2\|v^\epsilon\|^2 + C_4(\epsilon_1, \epsilon_2, \|u_0\|_{H^2}, \|f\|_{H^1}).\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}\left|\int g_\epsilon|u^\epsilon|^2\, dx\right| &\leq \|u^\epsilon\|_\infty\,\|u^\epsilon\|\,\|g^\epsilon\| \leq \sqrt{2}\|u^\epsilon\|^{3/2}\|u_x^\epsilon\|^{1/2}\|g^\epsilon\| \\ &\leq \frac{(\sqrt{2}\|u^\epsilon\|^{3/2})^2}{2} + \frac{(\|u_x^\epsilon\|^{1/2}\|g_\epsilon\|)^2}{2} = \|u_x^\epsilon\|\frac{\|g_\epsilon\|^2}{2} + \|u^\epsilon\|^3 \\ &\leq \epsilon_1\|u_x^\epsilon\|^2 + C_5(\epsilon_1, \|g\|_{H^1}, \|f\|_{H^1}, \|u_0\|_{H^2}).\end{aligned}$$

6. Por último,

$$\begin{aligned}\left|2\gamma Re\int |u^\epsilon|^2\bar{u}^\epsilon\Lambda_\epsilon\, u_x^\epsilon\, dx\right| &\leq 2|\gamma|\int |u^\epsilon|^3|\Lambda_\epsilon\, \bar{u}_x^\epsilon|dx \\ &\leq \epsilon_1\|u_x^\epsilon\|^2 + C_6(\epsilon_1, \|u_0\|_{H^2}, \|f\|_{H^1}).\end{aligned}$$

Portanto, segue-se de *(1)-(6)* e da escolha de ϵ_1 e ϵ_2 que

$$K_\epsilon(\xi^\epsilon(t)) \leq \frac{\alpha}{2}\left(\|u_x^\epsilon\|^2 + \|v^\epsilon\|^2\right) + C(\|u_0\|_{H^2}, \|f\|_{H^1}, \|g\|_{H^1}).$$

Portanto, para todo $0 \leq t \leq T$, existe constante $C = C(T, \|u_0\|_{H^2}, \|v_0\|_{H^1}, \|f\|_{H^1}, \|g\|_{H^1})$ tal que

$$\|u_x^\epsilon\|^2 + \|v^\epsilon\|^2 \leq C \quad \forall\ 0 \leq t \leq T. \tag{3.33}$$

Agora vamos estimar a norma em $D(A) = H^2(\mathbb{R}) \times H^2(\mathbb{R})$. Seguindo a mesma linha de raciocínio chegaremos a uma expressão equivalente à (2.32), isto é,

$$\begin{aligned}&2Re\int u_{xx}^\epsilon\bar{u}_{xxt}^\epsilon\, dx + 2\alpha Re\int |u_{xx}^\epsilon|^2\, dx - 2Re\int u^\epsilon v^\epsilon\bar{u}_{xxt}^\epsilon\, dx - 2\alpha Re\int u^\epsilon v^\epsilon\bar{u}_{xx}^\epsilon\, dx \\ &= 2Re\int f\bar{u}_{xxt}^\epsilon\, dx + 2\alpha Re\int f_\epsilon\bar{u}_{xx}^\epsilon\, dx.\end{aligned} \tag{3.34}$$

Vamos agora às simplificações:

1.

$$2Re\int u_{xx}^\epsilon\bar{u}_{xxt}^\epsilon\, dx = \frac{d}{dt}\int u_{xx}^\epsilon\bar{u}_{xx}^\epsilon\, dx = \frac{d}{dt}\|u_{xx}^\epsilon\|^2.$$

2. É claro que

$$2\alpha Re\int |u_{xx}^\epsilon|^2\, dx = 2\alpha\|u_{xx}^\epsilon\|^2$$

3. Como f_ϵ não depende de t

$$2Re\int f_\epsilon\bar{u}_{xxt}^\epsilon\, dx = \frac{d}{dt}\left(2Re\int f_\epsilon\bar{u}_{xx}^\epsilon\, dx\right).$$

4. Por último,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(2Re\int u^\epsilon v^\epsilon\bar{u}_{xx}^\epsilon\, dx\right) &= 2Re\int u_t^\epsilon v^\epsilon\bar{u}_{xx}^\epsilon\, dx + 2Re\int u^\epsilon v_t^\epsilon\bar{u}_{xx}^\epsilon\, dx \\ &\quad +2Re\int u^\epsilon v^\epsilon\bar{u}_{xxt}^\epsilon\, dx,\end{aligned}$$

isto é

$$
\begin{aligned}
2Re\int u^\epsilon v^\epsilon \bar{u}^\epsilon_{xxt}\,dx &= 2Re\int u^\epsilon_t v^\epsilon \bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx + 2Re\int u^\epsilon v^\epsilon_t \bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx\\
&\quad -\frac{d}{dt}\left(2Re\int u^\epsilon v^\epsilon \bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx\right).
\end{aligned}
$$

Substituindo $(1)-(4)$ em (3.34) obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\|u^\epsilon_{xx}\|^2 - 2Re\int u^\epsilon v^\epsilon \bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx - 2Re\int f_\epsilon \bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx\right)\\
&+2\alpha\|u^\epsilon_{xx}\|^2 - 2\alpha Re\int u^\epsilon v^\epsilon \bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx + 2Re\int u^\epsilon_t v^\epsilon \bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx\\
&+2Re\int u^\epsilon v^\epsilon_t \bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx - 2\alpha Re\int f_\epsilon \bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx = 0. \qquad (3.35)
\end{aligned}
$$

Da primeira equação de (3.10) temos

$$
\begin{aligned}
Re\int u^\epsilon_t v^\epsilon \bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx &= Re\int (-if_\epsilon + iu^\epsilon_{xx} - iu^\epsilon v^\epsilon - \alpha u^\epsilon) v^\epsilon \bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx\\
&= Im\int f_\epsilon v^\epsilon \bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx + Im\int u^\epsilon (v^\epsilon)^2 \bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx\\
&- \alpha Re\int u^\epsilon v^\epsilon \bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx, \qquad (3.36)
\end{aligned}
$$

onde usamos o fato que $Im\int u^\epsilon_{xx}\bar{u}^\epsilon_{xx} v^\epsilon\,dx = 0$. Da segunda equação de (3.10) temos

$$
\begin{aligned}
Re\int u^\epsilon v^\epsilon_t \bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx &= Re\int u^\epsilon(-\beta v^\epsilon - 2\gamma Re(u^\epsilon \Lambda_\epsilon\, \bar{u}^\epsilon) + g_\epsilon)\bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx\\
&= -\beta Re\int u^\epsilon v^\epsilon \bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx - 2\gamma Re\int Re(u^\epsilon \Lambda_\epsilon\, \bar{u}^\epsilon_x)\, u^\epsilon \bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx\\
&+ Re\int u^\epsilon g_\epsilon \bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx\\
&= -\beta Re\int u^\epsilon v^\epsilon \bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx - 2\gamma\int Re(u^\epsilon \Lambda_\epsilon\, \bar{u}^\epsilon_x)\, Re(u^\epsilon \bar{u}^\epsilon_{xx})\,dx\\
&+ Re\int u^\epsilon g_\epsilon \bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx. \qquad (3.37)
\end{aligned}
$$

Substituindo agora (3.36), (3.37) em (3.35) obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\|u^\epsilon_{xx}\|^2 - 2Re\int u^\epsilon v^\epsilon \bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx - 2Re\int f_\epsilon \bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx\right) + 2\alpha\|u^\epsilon_{xx}\|^2\\
&-2\alpha Re\int u^\epsilon v^\epsilon \bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx + 2Im\int f_\epsilon v^\epsilon \bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx + 2Im\int u^\epsilon (v^\epsilon)^2 \bar{u} u^\epsilon_{xx}\,dx\\
&-2\alpha Re\int u^\epsilon \bar{u}^\epsilon_{xx} v^\epsilon\,dx - 2\beta Re\int u^\epsilon v^\epsilon \bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx - 4\gamma\int Re(u^\epsilon \Lambda_\epsilon\,\bar{u}^\epsilon_x)\,Re(u^\epsilon \bar{u}^\epsilon_{xx})\,dx\\
&+2Re\int g_\epsilon u^\epsilon \bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx - 2\alpha Re\int f_\epsilon \bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx = 0. \qquad (3.38)
\end{aligned}
$$

Derivando a segunda equação de (3.10) com respeito a x e em seguida multiplicando por $2v^\epsilon_x$ obtemos

$$2v^\epsilon_x v^\epsilon_{xt} + 2\beta(v^\epsilon_x)^2 + 4\gamma Re(u^\epsilon \Lambda_\epsilon\,\bar{u}^\epsilon_{xx}) + 4\gamma Re(u^\epsilon_x \Lambda_\epsilon\,\bar{u}^\epsilon_x) = 2v^\epsilon_x g_{\epsilon x}.$$

Portanto, integrando em x, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|v^\epsilon_x\|^2 + 2\beta\|v^\epsilon_x\|^2 + 4\gamma Re\int u^\epsilon \Lambda_\epsilon\,\bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx + 4\gamma Re u^\epsilon_x \Lambda_\epsilon\,\bar{u}^\epsilon_x\,dx\\
&-2\int v^\epsilon_x g_{\epsilon x}\,dx = 0. \qquad (3.39)
\end{aligned}
$$

É claro que

$$Re\int u^\epsilon \Lambda_\epsilon\,\bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx = Re\int (u^\epsilon v^\epsilon)_x \Lambda_\epsilon\,\bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx - Re\int u^\epsilon_x \Lambda_\epsilon\,\bar{u}^\epsilon_{xx} v^\epsilon\,dx \qquad (3.40)$$

Por outro lado $(u^\epsilon v^\epsilon)_x = iu^\epsilon_{xt} + u^\epsilon_{xxx} + i\alpha u^\epsilon_x - f_{\epsilon x}$. Logo,

$$
\begin{aligned}
Re\int (u^\epsilon v^\epsilon)_x \Lambda_\epsilon\,\bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx &= Re\int (iu^\epsilon_{xt} + u^\epsilon_{xxx} + i\alpha u^\epsilon_x - f_{\epsilon x})\Lambda_\epsilon\,\bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx\\
&= -Im\int u^\epsilon_{xt}\Lambda_\epsilon\,\bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx - \alpha Im\int u^\epsilon_x \Lambda_\epsilon\,\bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx\\
&- Re\int f_{\epsilon x}\Lambda_\epsilon\,\bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx, \qquad (3.41)
\end{aligned}
$$

onde usamos o fato que $Re\int u^\epsilon_{xxx}\Lambda_\epsilon\,\bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx = 0$. Usando agora integração por partes, obtemos,

$$
\begin{aligned}
Im\int u^\epsilon_{xt}\Lambda_\epsilon \bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx &= \frac{d}{dt}Im\int u^\epsilon_x \Lambda_\epsilon \bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx - Im\int u^\epsilon_x \Lambda_\epsilon \bar{u}^\epsilon_{xxt}\,dx\\
&= \frac{d}{dt}Im\int u^\epsilon_x \Lambda_\epsilon \bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx + Im\int \bar{u}^\epsilon_x \Lambda_\epsilon u^\epsilon_{xxt}\,dx\\
&= \frac{d}{dt}Im\int u^\epsilon_x \Lambda_\epsilon \bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx - Im\int \bar{u}^\epsilon_{xx}\Lambda_\epsilon u^\epsilon_{xt}\,dx,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} Im \int u_x^\epsilon \Lambda_\epsilon \bar{u}_{xx}^\epsilon \, dx &= Im \int \bar{u}_{xx}^\epsilon \Lambda_\epsilon u_{xx}^\epsilon \, dx + Im \int \bar{u}_x^\epsilon \Lambda_\epsilon u_{xxt}^\epsilon \, dx \\ &= 2Im \int u_{xt}^\epsilon \Lambda_\epsilon \bar{u}_{xx}^\epsilon \, dx,\end{aligned}$$

onde usamos (3.7). Portanto,

$$Im \int u_{xt}^\epsilon \Lambda_\epsilon \bar{u}_{xx}^\epsilon \, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} Im \int u_x^\epsilon \Lambda_\epsilon \bar{u}_{xx}^\epsilon \, dx. \tag{3.42}$$

Substituindo agora (3.42) em (3.41) ficamos com

$$\begin{aligned}Re \int (u^\epsilon v^\epsilon)_x \Lambda_\epsilon \, \bar{u}_{xx}^\epsilon \, dx &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} Im \int u_x^\epsilon \Lambda_\epsilon \bar{u}_{xx}^\epsilon \, dx - \alpha Im \int u_x^\epsilon \Lambda_\epsilon \, \bar{u}_{xx}^\epsilon \, dx \\ &- Re \int f_{\epsilon x} \Lambda_\epsilon \, \bar{u}_{xx}^\epsilon \, dx. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Portanto, ao substituir (3.43) em (3.40) temos

$$\begin{aligned}Re \int u^\epsilon \Lambda_\epsilon \bar{u}_{xx}^\epsilon v^\epsilon \, dx &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} Im \int u_x^\epsilon \Lambda_\epsilon \bar{u}_{xx}^\epsilon \, dx - \alpha Im \int u_x^\epsilon \Lambda_\epsilon \, \bar{u}_{xx}^\epsilon \, dx \\ &- Re \int f_{\epsilon x} \Lambda_\epsilon \, \bar{u}_{xx}^\epsilon \, dx - Re \int u_x^\epsilon \Lambda_\epsilon \bar{u}_{xx}^\epsilon v^\epsilon \, dx. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Finalmente, substituindo (3.44) em (3.39) ficamos com

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\|v_x^\epsilon\|^2 - 2\gamma Im \int u_x^\epsilon \Lambda_\epsilon \bar{u}_{xx}^\epsilon \, dx \right) + 2\beta \|v_x^\epsilon\|^2 - 4\alpha\gamma Im \int u_x^\epsilon \Lambda_\epsilon \bar{u}_{xx}^\epsilon \, dx \\ &-4\gamma Re \int f_{\epsilon x} \Lambda_\epsilon \bar{u}_{xx}^\epsilon \, dx - 4\gamma Re \int u_x^\epsilon \Lambda_\epsilon \bar{u}_{xx}^\epsilon v^\epsilon \, dx + 4\gamma Re \int u_x^\epsilon \Lambda_\epsilon \bar{u}_x^\epsilon v^\epsilon \, dx \\ &-2 \int v_x^\epsilon g_{\epsilon x} \, dx = 0. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Somando agora (3.38) com (3.45) e denotando por $\xi^\epsilon(t) = (u^\epsilon, v^\epsilon)$ obtemos,

$$\begin{aligned}J_1(\xi^\epsilon(t)) &= \|u_{xx}^\epsilon\|^2 + \|v_x^\epsilon\|^2 - 2Re \int u^\epsilon v^\epsilon \bar{u}_{xx}^\epsilon \, dx - 2Re \int f_\epsilon \bar{u}_{xx}^\epsilon \, dx \\ &- 2\gamma Im \int u_x^\epsilon \Lambda_\epsilon \bar{u}_{xx}^\epsilon \, dx\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
K_1(\xi^\epsilon(t)) &= 2(\alpha-\beta)\|v_x^\epsilon\|^2 - 2Im\int f_\epsilon v^\epsilon \bar{u}_{xx}^\epsilon\,dx - 2Im\int u^\epsilon (v^\epsilon)^2 \bar{u}_{xx}^\epsilon\,dx\\
&+ 2\beta Re\int u^\epsilon v^\epsilon \bar{u}_{xx}^\epsilon\,dx + 4\gamma\int Re(u^\epsilon \Lambda_\epsilon \bar{u}_x^\epsilon) Re(u^\epsilon \bar{u}_{xx}^\epsilon)\,dx\\
&- 2Re\int g_\epsilon u^\epsilon \bar{u}_{xx}^\epsilon\,dx - 2\alpha Re\int f_\epsilon \bar{u}_{xx}^\epsilon\,dx + 4\gamma Re\int f_{\epsilon x}\Lambda_\epsilon \bar{u}_{xx}^\epsilon\,dx\\
&+ 2\int v_x^\epsilon g_{\epsilon x}\,dx - 4\gamma Re\int u_x^\epsilon \Lambda_\epsilon \bar{u}_x^\epsilon\, v_x^\epsilon\,dx + 4\gamma Re\int u_x^\epsilon \Lambda_\epsilon \bar{u}_{xx}^\epsilon v^\epsilon\,dx.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}J_1(\xi^\epsilon(t)) + 2\alpha J_1(\xi^\epsilon(t)) = K_1(\xi^\epsilon(t)). \tag{3.46}$$

Afirmação 3.5 *Existe uma constante* $C = C(\|f\|_{H^1}, \|g\|_{H^1}, \|u_0\|_{H^2}, \|v_0\|_{H^1})$ *tal que*

$$J_1(\xi^\epsilon(t)) \geq \frac{1}{2}\left(\|u_{xx}^\epsilon\|^2 + \|v_x^\epsilon\|^2\right) - C. \tag{3.47}$$

Prova: De fato, primeiro observe que de (3.17) e (3.33) segue a seguinte estimativa: $\|u^\epsilon\|^2_{H^1(\mathbb{R})} + \|v^\epsilon\| \leq C$. Logo,

1.
$$\begin{aligned}
\left|2Re\int u^\epsilon v^\epsilon \bar{u}_{xx}^\epsilon\,dx\right| &\leq 2\|v^\epsilon\|_\infty \|u^\epsilon\|\|u_{xx}^\epsilon\| \leq \epsilon_1\|u_{xx}^\epsilon\|^2 + C(\epsilon_1)\|v^\epsilon\|_\infty^2\|u^\epsilon\|^2\\
&\leq \epsilon_1\|u_{xx}^\epsilon\|^2 + C(\epsilon_1)\|v^\epsilon\|\|v_x^\epsilon\|\|u^\epsilon\|\\
&\leq \epsilon_1\|u_{xx}^\epsilon\|^2 + \epsilon_2\|v_x^\epsilon\|^2 + C(\epsilon_1,\epsilon_2)\|v^\epsilon\|^2\|u^\epsilon\|^2\\
&\leq \epsilon_1\|u_{xx}^\epsilon\|^2 + \epsilon_2\|v_x^\epsilon\|^2 + C(\epsilon_1,\epsilon_2)\|u^\epsilon\|^2_{H^1(\mathbb{R})}\|v^\epsilon\|^2\\
&\leq \epsilon_1\|u_{xx}^\epsilon\|^2 + \epsilon_2\|v_x^\epsilon\|^2 + C_1(\epsilon_1,\epsilon_2),
\end{aligned}$$

   onde $C_1(\epsilon_1,\epsilon_2) = C_1(\epsilon_1,\epsilon_2,\|f\|_{H^1},\|g\|_{H^1},\|u_0\|_{H^2},\|v_0\|_{H^1})$.

2.
$$\left|2Re\int f_\epsilon \bar{u}_{xx}^\epsilon\,dx\right| \leq 2\|f_\epsilon\|\|u_{xx}^\epsilon\| \leq \epsilon_1\|u_{xx}^\epsilon\|^2 + C_2(\epsilon_1,\|f\|_{H^1}).$$

3.
$$\begin{aligned}
\left|2\gamma Im\int u_x^\epsilon \Lambda_\epsilon \bar{u}_{xx}^\epsilon\,dx\right| &\leq 2|\gamma|\|u_x^\epsilon\|\|u_{xx}^\epsilon\| \leq \epsilon_1\|u_{xx}^\epsilon\|^2 + C(\epsilon_1)\|u_x^\epsilon\|^2\\
&\leq \epsilon_1\|u_{xx}^\epsilon\|^2 + C_3(\epsilon_1,\|f\|_{H^1},\|g\|_{H^1},\|u_0\|_{H^2},\|v_0\|_{H^1}).
\end{aligned}$$

Portanto substituindo $(1)-(3)$ na expressão de $J_1(\xi^\epsilon(t))$ e escolhendo ϵ_1, ϵ_2 adequados obtemos

$$J_1(\xi^\epsilon(t)) \geq \frac{1}{2}\left(\|u^\epsilon_{xx}\|^2 + \|v^\epsilon_x\|^2\right) - C(\|f\|_{H^1}, \|g\|_{H^1}, \|u_0\|_{H^2}, \|v_0\|_{H^1}).$$

Afirmação 3.6 *Existe uma constante* $C = C(\|f\|_{H^1}, \|g\|_{H^1}, \|u_0\|_{H^2}, \|v_0\|_{H^1})$ *tal que*

$$K_1(\xi^\epsilon(t)) \leq \frac{\alpha}{2}\left(\|u^\epsilon\|^2 + \|v^\epsilon_x\|^2\right) + C. \tag{3.48}$$

Prova: De fato, usaremos constantemente (3.17) e (3.33).

1.
$$\begin{aligned}
\left|2Im\int f_\epsilon v^\epsilon \bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx\right| &\leq 2\|v^\epsilon\|_\infty\|f_\epsilon\|\|u^\epsilon_{xx}\| \leq \epsilon_1\|u^\epsilon_{xx}\|^2 + C(\epsilon_1)\|v^\epsilon\|^2_\infty\|f_\epsilon\|^2 \\
&\leq \epsilon_1\|u^\epsilon_{xx}\|^2 + C(\epsilon_1)\|v^\epsilon\|\|^\epsilon_x\|\|f_\epsilon\|^2 \\
&\leq \epsilon_1\|u^\epsilon_{xx}\|^2 + \epsilon_2\|v^\epsilon_x\|^2 + C(\epsilon_1,\epsilon_2)\|v^\epsilon\|^2\|f_\epsilon\|^4 \\
&\leq \epsilon_1\|u^\epsilon_{xx}\|^2 + \epsilon_2\|v^\epsilon_x\|^2 + C_1(\epsilon_1,\epsilon_2),
\end{aligned}$$

onde $C_1(\epsilon_1,\epsilon_2) = C_1(\epsilon_1,\epsilon_2,\|f\|_{H^1}, \|g\|_{H^1}, \|u_0\|_{H^2}, \|v_0\|_{H^1})$.

2. É fácil ver que

$$\left|2\alpha Re\int f_\epsilon \bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx\right| \leq \epsilon_1\|u^\epsilon_{xx}\|^2 + C_2(\epsilon_1, \|f\|_{H^1}).$$

3.
$$\begin{aligned}
\left|2\beta Re\int u^\epsilon v^\epsilon \bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx\right| &\leq 2\beta\|v^\epsilon\|_\infty\|u^\epsilon\|\|u^\epsilon_{xx}\| \leq \epsilon_1\|u^\epsilon_{xx}\|^2 + C(\epsilon_1)\|v^\epsilon\|^2_\infty\|u^\epsilon\|^2 \\
&\leq \epsilon_1\|u^\epsilon_{xx}\|^2 + C(\epsilon_1)\|v^\epsilon\|\|v^\epsilon_x\|\|u^\epsilon\|^2 \\
&\leq \epsilon_1\|u^\epsilon_{xx}\|^2 + \epsilon_2\|v^\epsilon_x\|^2 + C(\epsilon_1,\epsilon_2)\|v^\epsilon\|^2\|u^\epsilon\|^4 \\
&\leq \epsilon_1\|u^\epsilon_{xx}\|^2 + \epsilon_2\|v^\epsilon_x\|^2 \\
&+ C_3(\epsilon_1,\epsilon_2,\|f\|_{H^1}, \|g\|_{H^1}, \|u_0\|_{H^2}, \|v_0\|_{H^1}).
\end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned}
\left|2Re\int g_\epsilon u^\epsilon \bar{u}^\epsilon_{xx}\,dx\right| &\leq 2\|u^\epsilon\|\|g_\epsilon\|\|u^\epsilon_{xx}\| \leq \epsilon_1\|u^\epsilon_{xx}\|^2 + C(\epsilon_1)\|u^\epsilon\|\|u^\epsilon_x\|\|g_\epsilon\|^2 \\
&\leq \epsilon_1\|u^\epsilon_{xx}\|^2 + C(\epsilon_1)\left(\|u^\epsilon_x\|^2 + \|u^\epsilon\|^2\|g_\epsilon\|^4\right) \\
&\leq \epsilon_1\|u^\epsilon_{xx}\|^2 + C(\epsilon_1)\left(\|u^\epsilon_x\|^2 + \|v^\epsilon\|^2 + \|u^\epsilon\|^2\|g_\epsilon\|^4\right) \\
&\leq \epsilon_1\|u^\epsilon_{xx}\|^2 + C_4(\epsilon_1,\|f\|_{H^1}, \|g\|_{H^1}, \|u_0\|_{H^2}, \|v_0\|_{H^1}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|2\int v_x^\epsilon g_{\epsilon x}\,dx\right| &\leq 2\|v_x^\epsilon\|\|g_{\epsilon x}\| \leq \epsilon_2\|v_x^\epsilon\|^2 + C(\epsilon_2)\|g_{\epsilon x}\|^2 \\ &\leq \epsilon_2\|v_x^\epsilon\|^2 + C_4(\epsilon_2, \|g\|_{H^1}).\end{aligned}$$

5.

$$\left|2\int v_x^\epsilon g_{\epsilon x}\,dx\right| \leq 2\|v_x^\epsilon\|\|g_{\epsilon x}\| \leq \epsilon_2\|v_x^\epsilon\|^2 + C_5(\epsilon_2, \|g\|_{H^1}).$$

6. Usando o fato que $\|\Lambda_\epsilon \bar{u}_{xx}^\epsilon\| \leq \|u_{xx}^\epsilon\|$ temos

$$\begin{aligned}\left|4\gamma Re\int f_{\epsilon x}\Lambda_\epsilon \bar{u}_{xx}^\epsilon\,dx\right| &\leq 4|\gamma|\|f_{\epsilon x}\|\|\Lambda_\epsilon \bar{u}_{xx}^\epsilon\| \leq 4|\gamma|\|f_\epsilon\|_{H^1}\|u_{xx}^\epsilon\| \\ &\leq \epsilon_1\|u_{xx}^\epsilon\|^2 + C_6(\epsilon_1, \|f\|_{H^1}).\end{aligned}$$

7.

$$\left|2Im\int u^\epsilon(v^\epsilon)^2\bar{u}_{xx}^\epsilon\,dx\right| \leq 2\|u^\epsilon\|_\infty\|v^\epsilon\|_4^2\|u_{xx}^\epsilon\|.$$

Por outro lado,

$$\|v^\epsilon\|_4^2 = \left(\int |v^\epsilon|^4\right)^{1/2} \leq \left(\|v^\epsilon\|_\infty^2\|v^\epsilon\|^2\right)^{1/2} \leq \sqrt{2}\|v^\epsilon\|^{3/2}\|v_x^\epsilon\|^{1/2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\left|2Im\int u^\epsilon(v^\epsilon)^2\bar{u}_{xx}^\epsilon\,dx\right| &\leq 2\sqrt{2}\|u^\epsilon\|_\infty\|v^\epsilon\|^{3/2}\|v_x^\epsilon\|^{1/2}\|u_{xx}^\epsilon\| \\ &\leq \epsilon_1\|u_{xx}^\epsilon\|^2 + \|v_x^\epsilon\|\left(C(\epsilon_1)\|u^\epsilon\|\|u_x^\epsilon\|\|v^\epsilon\|^3\right) \\ &\leq \epsilon_1\|u_{xx}^\epsilon\|^2 + \epsilon_2\|v_x^\epsilon\|^2 + C(\epsilon_1,\epsilon_2)\|u^\epsilon\|^2\|v^\epsilon\|^6\|u_x^\epsilon\|^2 \\ &\leq \epsilon_1\|u_{xx}^\epsilon\|^2 \\ &+ \epsilon_2\|v_x^\epsilon\|^2 + C_7(\epsilon_1,\epsilon_2,\|f\|_{H^1},\|g\|_{H^1},\|u_0\|_{H^2},\|v_0\|_{H^1}).\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}\left|4\gamma Re\int u_x^\epsilon\Lambda_\epsilon \bar{u}_x^\epsilon v_x^\epsilon\,dx\right| &\leq 4|\gamma|\|u_x^\epsilon\|_\infty\|\Lambda_\epsilon \bar{u}_x^\epsilon\|\|v_x^\epsilon\| \\ &\leq \epsilon_2\|v_x^\epsilon\|^2 + C(\epsilon_2)\|u_x^\epsilon\|\|u_{xx}^\epsilon\|\|u_x^\epsilon\|^2 \\ &\leq \epsilon_1\|u_{xx}^\epsilon\|^2 + \epsilon_2\|v_x^\epsilon\|^2 + C(\epsilon_1,\epsilon_2)\|u_x^\epsilon\|^6 \\ &\leq \epsilon_1\|u_{xx}^\epsilon\|^2 + \epsilon_2\|v_x^\epsilon\|^2 \\ &+ C_8(\epsilon_1,\epsilon_2,\|f\|_{H^1},\|g\|_{H^1},\|u_0\|_{H^2},\|v_0\|_{H^1}).\end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}
\left|4\gamma Re\int u_x^\epsilon \Lambda_\epsilon \bar{u}_{xx}^\epsilon v^\epsilon\,dx\right| &\leq 4|\gamma|\|v^\epsilon\|_\infty \|u_x^\epsilon\|\|\Lambda_\epsilon \bar{u}_{xx}^\epsilon\| \leq 4|\gamma|\|v^\epsilon\|_\infty \|u_x^\epsilon\|\|u_{xx}^\epsilon\| \\
&\leq \epsilon_1\|u_{xx}^\epsilon\|^2 + C(\epsilon_2)\|v^\epsilon\|_\infty^2\|u_x^\epsilon\|^2 \\
&\leq \epsilon_1\|u_{xx}^\epsilon\|^2 + C(\epsilon_1)\|v^\epsilon\|\|v_x^\epsilon\|\|u_x^\epsilon\| \\
&\leq \epsilon_1\|u_{xx}^\epsilon\|^2 + \epsilon_2\|v_x^\epsilon\|^2 + C(\epsilon_1,\epsilon_2)\|v^\epsilon\|^2\|u_x^\epsilon\|^4 \\
&\leq \epsilon_1\|u_{xx}^\epsilon\|^2 + \epsilon_2\|v_x^\epsilon\|^2 \\
&+ C_9(\epsilon_1,\epsilon_2,\|f\|_{H^1},\|g\|_{H^1},\|u_0\|_{H^2},\|v_0\|_{H^1}).
\end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned}
\left|4\gamma\int Re(u^\epsilon \Lambda_\epsilon \bar{u}_x^\epsilon)Re(u^\epsilon \bar{u}_{xx}^\epsilon)\,dx\right| &\leq 4|\gamma|\|u^\epsilon\|_\infty^2\|u_{xx}^\epsilon\|\|\Lambda_\epsilon \bar{u}_{xx}^\epsilon\| \\
&\leq 8|\gamma|\|u^\epsilon\|\|u_x^\epsilon\|^2\|u_{xx}^\epsilon\| \leq 8|\gamma|\|u^\epsilon\|\|u_x^\epsilon\|\|u_{xx}^\epsilon\| \\
&+ 8|\gamma|\|u^\epsilon\|\|v^\epsilon\|^2\|u_{xx}^\epsilon\| \\
&\leq 8|\gamma|\|u^\epsilon\|\|u_{xx}^\epsilon\|(\|u_x^\epsilon\|^2+\|v^\epsilon\|^2) \\
&\leq \epsilon_1\|u_{xx}^\epsilon\|^2 + C(\epsilon_1)\|u^\epsilon\|^2(\|u_x^\epsilon\|^2+\|v^\epsilon\|^2)^2 \\
&\leq \epsilon_1\|u_{xx}^\epsilon\|^2 + C_{10}(\epsilon_1),
\end{aligned}$$

onde $C_{10}(\epsilon_1) = C_{10}(\epsilon_1,\|f\|_{H^1},\|g\|_{H^1},\|u_0\|_{H^2},\|v_0\|_{H^1})$.

Segue-se portanto, de $(1)-(10)$ e da escolha adequada para ϵ_1 e ϵ_2, que

$$K_1(\xi^\epsilon(t)) \leq \frac{\alpha}{2}\left(\|u^\epsilon\|^2+\|v_x^\epsilon\|^2\right) + C(\|f\|_{H^1},\|g\|_{H^1},\|u_0\|_{H^2},\|v_0\|_{H^1}).$$

Portanto de (3.47) e (3.48) existe uma constante $C = C(T,\|f\|_{H^1},\|g\|_{H^1},\|u_0\|_{H^2},\|v_0\|_{H^1})$ tal que

$$\|u_{xx}^\epsilon\|^2+\|v_x^\epsilon\|^2 \leq C \quad \forall\ 0\leq t\leq T. \tag{3.49}$$

Além disso, de (3.33) e (3.49) segue-se que para todo $0\leq t\leq T$

$$\|u^\epsilon\|_{H^2}^2 \leq C(T,\|f\|_{H^1},\|g\|_{H^1},\|u_0\|_{H^2},\|v_0\|_{H^1}). \tag{3.50}$$

Multiplicando a segunda equação de (3.10) por $2v^\epsilon$ obtemos

$$2v_t^\epsilon v^\epsilon + 2\beta(v^\epsilon)^2 = 2v^\epsilon(g_\epsilon - 2\gamma Re(u^\epsilon \Lambda_\epsilon \bar{u}_x^\epsilon)).$$

Integrando esta a última expressão com respeito a x obtemos,

$$\frac{d}{dt}\|v^\epsilon\|^2 + 2\beta\|v^\epsilon\| = 2\int v^\epsilon(g_\epsilon - Re(u^\epsilon \Lambda_\epsilon \bar{u}_x^\epsilon))\,dx.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\left|2\int v^\epsilon(g_\epsilon - Re(u^\epsilon\Lambda_\epsilon\bar{u}_x^\epsilon))\,dx\right| &\leq 2\int |v^\epsilon|(|g_\epsilon| + 2|\gamma|\,|(u^\epsilon\Lambda_\epsilon\bar{u}_x^\epsilon)|)\,dx \\
&\leq 2\|v^\epsilon\|\|g_\epsilon\| + 4|\gamma|\|v^\epsilon\|\|u^\epsilon\Lambda_\epsilon\bar{u}_x^\epsilon\| \\
&\leq 2\epsilon_1\|v^\epsilon\|^2 + C_1(\epsilon_1)\|g_\epsilon\|^2 + C_2(\epsilon_1)\|u^\epsilon\Lambda_\epsilon\bar{u}_x^\epsilon\|^2.
\end{aligned}$$

Escolhendo $\epsilon = \beta/2$ segue-se que

$$\frac{d}{dt}\|v^\epsilon\|^2 + 2\beta\|v^\epsilon\| \leq \beta\|v^\epsilon\|^2 + C\left(\|g_\epsilon\|^2 + \|u^\epsilon\Lambda_\epsilon\bar{u}_x^\epsilon\|^2\right),$$

isto é,

$$\|v^\epsilon\|^2 \leq \|v_{0\epsilon}\|^2 e^{-\beta t} + C\int_0^t e^{-\beta(t-s)}\left(\|g_\epsilon\|^2 + \|u^\epsilon\Lambda_\epsilon\bar{u}_x^\epsilon\|^2\right)\,ds. \tag{3.51}$$

Analogamente, derivando a segunda equação de (3.10) com respeito a x e depois multiplicando por $2v_x^\epsilon$ obtemos

$$\|v_x^\epsilon\|^2 \leq \|v_{0\epsilon x}\|^2 e^{-\beta t} + C\int_0^t e^{-\beta(t-s)}\left(\|g_{\epsilon x}\|^2 + \|(u^\epsilon\Lambda_\epsilon\bar{u}_x^\epsilon)_x\|^2\right)\,ds. \tag{3.52}$$

Pelo mesmo processo

$$\|v_{xx}^\epsilon\|^2 \leq \|v_{0\epsilon xx}\|^2 e^{-\beta t} + C\int_0^t e^{-\beta(t-s)}\left(\|g_{\epsilon xx}\|^2 + \|(u^\epsilon\Lambda_\epsilon\bar{u}_x^\epsilon)_{xx}\|^2\right)\,ds. \tag{3.53}$$

Somando (3.51),(3.52) e (3.53) obtemos:

$$\|v^\epsilon\|_{H^2}^2 \leq \|v_{0\epsilon}\|_{H^2}^2 e^{-\beta t} + C\int_0^t e^{-\beta(t-s)}\left(\|g_\epsilon\|_{H^2}^2 + \|u^\epsilon\Lambda_\epsilon\bar{u}_x^\epsilon\|_{H^2}^2\right)\,ds. \tag{3.54}$$

Note que

1. $$\begin{aligned}
\|g_\epsilon\|_{H^2}^2 &= \int (1+\xi^2)^2|\hat{g}_\epsilon(\xi)|^2\,d\xi = \int\left(\frac{1+\xi^2}{1+\epsilon\xi^2}\right)^2|\hat{g}(\xi)|^2\,d\xi \\
&\leq \sup_\xi\left\{\left(\frac{1+\xi^2}{1+\epsilon\xi^2}\right)^2\right\}\|g\|^2 \leq \sup_\xi\left\{\left(\frac{1+\xi^2}{1+\epsilon\xi^2}\right)^2\right\}\|g\|_{H^1}^2.
\end{aligned}$$

   Por outro lado, vimos que

$$\sup_\xi\left\{\left(\frac{1+\xi^2}{1+\epsilon\xi^2}\right)^2\right\} \leq \left(1+\frac{1}{\epsilon}\right)^2.$$

Portanto,

$$\|g_\epsilon\|_{H^2}^2 \leq \left(1+\frac{1}{\epsilon}\right)^2 \|g\|_{H^1}.$$

2.

$$\begin{aligned}
\|u^\epsilon \Lambda_\epsilon \bar{u}_x^\epsilon\|_{H^2}^2 &\leq \|u^\epsilon\|_{H^2}^2 \|\Lambda_\epsilon \bar{u}_x^\epsilon\|_{H^2}^2 = \|u^\epsilon\|_{H^2}^2 \int (1+\xi^2)^2 |(\Lambda_\epsilon \bar{u}_x^\epsilon)\hat{}(\xi)|^2 \, d\xi \\
&= \|u^\epsilon\|_{H^2}^2 \int (1+\xi^2)^2 \frac{|(\bar{u}_x^\epsilon)\hat{}(\xi)|^2}{(1+\epsilon\xi^2)^2} \, d\xi \\
&= \|u^\epsilon\|_{H^2}^2 \int (1+\xi^2)^2 \frac{\overline{|(u_x^\epsilon)\hat{}(-\xi)|}^2}{(1+\epsilon\xi^2)^2} \, d\xi \\
&= \|u^\epsilon\|_{H^2}^2 \int (1+\xi^2)^2 \frac{|(u_x^\epsilon)\hat{}(\xi)|^2}{(1+\epsilon\xi^2)^2} \, d\xi \\
&= \|u^\epsilon\|_{H^2}^2 \int (1+\xi^2)^2 \frac{|i\xi \hat{u}^\epsilon(\xi)|^2}{(1+\epsilon\xi^2)} \, d\xi \\
&= \|u^\epsilon\|_{H^2}^2 \int \frac{(1+\xi^2)^2\xi^2}{(1+\epsilon\xi^2)} |\hat{u}^\epsilon(\xi)|^2 \, d\xi \\
&\leq \|u^\epsilon\|_{H^2}^2 \int \left(\frac{1+\xi^2}{1+\epsilon\xi}\right)^2 (1+\xi^2) |\hat{u}^\epsilon(\xi)|^2 \, d\xi \\
&\leq \sup_\xi \left\{ \left(\frac{1+\xi^2}{1+\epsilon\xi^2}\right)^2 \right\} \|u^\epsilon\|_{H^2}^4 \leq \|u^\epsilon\|_{H^2}^4 \left(1+\frac{1}{\epsilon}\right)^2.
\end{aligned}$$

Segue-se daí que

$$\|g_\epsilon\|_{H^2}^2 + \|u^\epsilon \Lambda_\epsilon \bar{u}_x^\epsilon\|_{H^2}^2 \leq \left(1+\frac{1}{\epsilon}\right)^2 (\|g\|_{H^1} + \|u^\epsilon\|_{H^2}^4).$$

Substituindo esta última expressão em (3.54) e usando (3.50) concluímos que existe constante $C(\epsilon, T) = C(T, \epsilon, \|f\|_{H^1}, \|g\|_{H^1}, \|u_0\|_{H^2}, \|v_0\|_{H^1})$ tal que

$$\|v^\epsilon\|_{H^2}^2 \leq C(\epsilon, T). \tag{3.55}$$

Para finalizar, combinando a **existência local** e as estimativas (3.50) e (3.55) obtemos a existência global de (3.10), isto é,

$$(u^\epsilon, v^\epsilon) \in C([0,\infty); H^2 \times H^2(\mathbb{R})),$$

para todo $\epsilon > 0$ fixado. Das estimativas independentes de ϵ (3.17),(3.34) e (3.49) temos que

$$\begin{aligned}
\|(u^\epsilon, v^\epsilon)\|_{X_2}^2 &= \|(u^\epsilon, v^\epsilon)\|_{H^2\times H^1}^2 = \|u^\epsilon\|_{H^2}^2 + \|v^\epsilon\|_{H^1}^2 \\
&= \|u^\epsilon\|^2 + \|u_x^\epsilon\|^2 + \|u_{xx}^\epsilon\|^2 + \|v^\epsilon\|^2 + \|v_x^\epsilon\|^2 \\
&= \|u^\epsilon\|^2 + (\|u_x^\epsilon\|^2 + \|v^\epsilon\|^2) + (\|u_{xx}^\epsilon\|^2 + \|v_x^\epsilon\|^2) \\
&\leq C(T, \|f\|_{H^1}, \|g\|_{H^1}, \|u_0\|_{H^2}, \|v_0\|_{H^1}). \qquad (3.56)
\end{aligned}$$

Para concluir as estimativas, mostraremos que para todo $t \in [0, T]$

$$\|(u_t^\epsilon, v_t^\epsilon)\|_{L^2(\mathbb{R})\times H^1(\mathbb{R})}^2 \leq C(T, \|f\|_{H^1}, \|g\|_{H^1}, \|u_0\|_{H^2}, \|v_0\|_{H^1}).$$

De fato, observe que

$$\begin{aligned}
\|v_t^\epsilon\| &= \|g_\epsilon - \beta v^\epsilon - 2\gamma Re(u^\epsilon \Lambda_\epsilon \bar{u}_x^\epsilon)\| \leq \|g_\epsilon\| + \beta\|\Lambda_\epsilon \bar{u}_x^\epsilon)\| \\
&\leq \|g_\epsilon\|_{H^1} + \beta\|v^\epsilon\|_{H^1} + 2|\gamma|\|u^\epsilon\|_\infty \|\Lambda_\epsilon \bar{u}_x^\epsilon\| \\
&\leq \|g_\epsilon\|_{H^1} + \beta\|v^\epsilon\|_{H^1} + 2|\gamma|\|u^\epsilon\|_{H^2}^2 \leq C,
\end{aligned}$$

onde $C = C(T, \|f\|_{H^1}, \|g\|_{H^1}, \|u_0\|_{H^2}, \|v_0\|_{H^1})$ para todo $t \in [0, T]$.

Por outro lado, derivando a primeira equação de (3.10) com respeito a t, multiplicando o resultado por $2\bar{u}_t^\epsilon$, tomando a parte imaginária e integrando sobre $\mathbb{R}$, obtemos

$$\frac{d}{dt}\|u_t^\epsilon\|^2 + 2\alpha\|u_t^\epsilon\|^2 = 2Im \int u^\epsilon \bar{u}_t^\epsilon v_t^\epsilon \, dx.$$

Também é fácil ver que

$$\left| 2Im \int u^\epsilon \bar{u}_t^\epsilon v_t^\epsilon \, dx \right| \leq \alpha\|u_t^\epsilon\|^2 + C(T, \|f\|_{H^1}, \|g\|_{H^1}, \|u_0\|_{H^2}, \|v_0\|_{H^1}).$$

Substituindo esta última expressão na anterior e usando a *desigualdade de Gronwall* nos dá

$$\|u_t^\epsilon\|^2 \leq C(T, \|f\|_{H^1}, \|g\|_{H^1}, \|u_0\|_{H^2}, \|v_0\|_{H^1})$$

Para finalizar, falta-nos estimar $\|v_{tx}^\epsilon\|$. Derivando a segunda equação de (3.10) com respeito a x e tomando a norma acima, temos

$$\begin{aligned}
\|v_{tx}^\epsilon\| &\leq \|g_{\epsilon x}\| + \beta\|v_x^\epsilon\| + 2|\gamma|\|u_x^\epsilon \Lambda_\epsilon \bar{u}_x^\epsilon + u^\epsilon \Lambda_\epsilon \bar{u}_{xx}^\epsilon\| \\
&\leq \|g\|_{H^1} + \beta\|v_x^\epsilon\| + C\|u^\epsilon\|_{H^2}^2 \\
&\leq \|g_{\epsilon x}\|_{H^1} + \beta\|v^\epsilon\|_{H^1} + C\|u^\epsilon\|_{H^2}^2 \\
&\leq C(T, \|f\|_{H^1}, \|g\|_{H^1}, \|u_0\|_{H^2}, \|v_0\|_{H^1}).
\end{aligned}$$

Portanto existe uma constante $C = C(T, \|f\|_{H^1}, \|g\|_{H^1}, \|u_0\|_{H^2}, \|v_0\|_{H^1})$ tal que

$$\|u_t^\epsilon\|^2 + \|v_t^\epsilon\|_{H^1}^2 \leq C. \tag{3.57}$$

Logo, juntando (3.56) e (3.57) obtemos constantes independentes de ϵ tal que

$$\|(u^\epsilon, v^\epsilon)\|_{H^2\times H^1(\mathbb{R})}^2 \leq C \ \ , \ \ \|u_t^\epsilon\|^2 + \|v_t^\epsilon\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 \leq C.$$

Portanto, para todo $T > 0$ fixado, de (3.56), segue que como (u^ϵ, v^ϵ) é uma sequência limitada e a bola ser compacta na topologia fraca estrela, temos que quando $\epsilon \to 0$, $(u^\epsilon, v^\epsilon) \overset{*}{\rightharpoonup} (u, v)$, para alguma (u, v) em $L^\infty(0, T; X_2)$. Também segue de (3.57) que $(u_t^\epsilon, v_t^\epsilon) \overset{*}{\rightharpoonup} (w, z)$ em $L^\infty(0, T; L^2 \times H^1(\mathbb{R}))$.

Afirmação 3.7 *Nas condições acima* $(w, z) = (u_t, v_t)$.

De fato, como $v^\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} v$ em $L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}))$ quando $\epsilon \to 0$, temos

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^T \langle \varphi(t), v^\epsilon(t)\rangle\,dt = \int_0^T \langle \varphi(t), v(t)\rangle\,dt\,,\ \forall\,\varphi \in L^1(0,T;H^{-1}(\mathbb{R})). \quad (3.58)$$

Além disso como $v_t^\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} z$ em $L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}))$ segue que para a mesma φ de (3.58) que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^T \langle \varphi(t), v_t^\epsilon(t)\rangle\,dt = \int_0^T \langle \varphi(t), z(t)\rangle\,dt. \quad (3.59)$$

Tome agora $\eta \in H^{-1}(\mathbb{R})$ qualquer. Portanto, $\eta\phi(t) \in L^1(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}))$ para toda função escalar $\phi \in \mathcal{D}(]0,T[)$ e além disso

$$\int_0^T \langle \eta\phi(t), v_t^\epsilon(t)\rangle\,dt = -\int_0^T \langle \eta\varphi(t), v^\epsilon(t)\rangle\,dt. \quad (3.60)$$

Por outro lado, como $\eta\phi \in L^1(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}))$ segue de (3.58) e (3.59) que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^T \langle \eta\phi(t), v_t^\epsilon(t)\rangle\,dt = \int_0^T \langle \eta\phi(t), z(t)\rangle\,dt$$

e

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^T \langle \eta\phi_t(t), v^\epsilon(t)\rangle\,dt = \int_0^T \langle \eta\phi_t(t), v(t)\rangle\,dt.$$

Segue portanto de (3.60) que

$$\int_0^T \langle \phi(t)\eta, z(t)\rangle\,dt = -\int_0^T \langle \phi_t(t)\eta, v\rangle\,dt. \quad (3.61)$$

Como $\phi(t), \phi_t(t)$ são funções escalares, temos que (3.61) é equivalente a

$$\int_0^T \langle \eta, \phi(t)z(t)\rangle\,dt = -\int_0^T \langle \eta, \phi_t(t)v\rangle\,dt,$$

isto é,

$$\left\langle \eta, \int_0^T z(t)\phi(t)\,dt \right\rangle = \left\langle \eta, -\int_0^T v(t)\phi_t(t)\,dt \right\rangle\ ,\ \ \forall\,\eta \in H^{-1}(\mathbb{R}).$$

Assim

$$\int_0^T z(t)\phi(t)\,dt = -\int_0^T \phi_t(t)v(t)\,dt\,,\ \forall\,\phi \in \mathcal{D}(]0,T[).$$

Logo $z = v_t$ no sentido fraco.

No outro caso, como $u^\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $L^\infty(0,T;H^2(\mathbb{R}))$ então $u^\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $L^\infty(0,T;L^2\mathbb{R})$. De fato, se $u^\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $L^\infty(0,T;H^2(\mathbb{R}))$ segue que $u^\epsilon(t) \overset{*}{\rightharpoonup} u(t)$ em $H^2(\mathbb{R})$ para cada $t \in [0,T]$, ou seja se $\varphi \in L^1(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}))$ for qualquer temos que $\varphi(t) \in H^{-2}(\mathbb{R})$ e

$$\lim_{\epsilon\to 0}\langle\varphi(t), u^\epsilon(t)\rangle = \langle\varphi(t), u(t)\rangle\,, \ \ \forall\,\varphi(t) \in H^{-2}(\mathbb{R}) = (H^2(\mathbb{R}))^*. \tag{3.62}$$

Tome agora $\phi \in L^1(0,T;L^2(\mathbb{R}))$ qualquer. Logo $\phi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ para todo $t \in [0,T]$. Agora defina

$$\begin{array}{rccc} T_{\phi(t)} \ : & H^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u(t) & \longmapsto & (\phi(t), u(t))_{L^2(\mathbb{R})}. \end{array}$$

Claramente $T_{\phi(t)}$ é linear com $|T_{\phi(t)}u(t)| \leq \|\phi(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}\|u(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} < \infty$. Ou seja, $T_{\phi(t)} \in (H^2(\mathbb{R}))^*$. Logo (3.62) vale, em particular, para $T_{\phi(t)}$. Ou seja,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\langle T_{\phi(t)}, u^\epsilon(t)\rangle = \langle T_{\phi(t)}, u(t)\rangle$$

isto é,

$$\lim_{\epsilon\to 0}(\phi(t), u^\epsilon(t))_{L^2(\mathbb{R})} = (\phi(t), u(t))_{L^2(\mathbb{R})}\,, \ \forall\,\phi(t) \in L^2(\mathbb{R}).$$

Portanto,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^T (\phi(t), u^\epsilon(t))_{L^2(\mathbb{R})}\,dt = \int_0^T (\phi(t), u(t))_{L^2(\mathbb{R})}\,dt\,, \ \forall\,\phi \in L^1(0,T;L^2(\mathbb{R})).$$

Isto mostra que $u^\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}))$. Agora como $u^\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}))$ e $u_t^\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} w$ em $L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}))$ de maneira inteiramente análoga ao caso anterior, mostra-se que $w = u_t$ no sentido fraco.

Afirmação 3.8 *Nas condições acima* $u_{xx}^\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u_{xx}$ *em* $L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}))$.

De fato, como $u^\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $L^\infty(0,T;H^2(\mathbb{R}))$ temos que para todo $t \in [0,T]$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\langle\varphi(t), u^\epsilon(t)\rangle = \langle\varphi(t), u(t)\rangle\,, \ \ \forall\,\varphi \in L^1(0,T;H^{-2}(\mathbb{R})). \tag{3.63}$$

Tome agora $\phi \in L^1(0,T;L^2(\mathbb{R}))$ qualquer, isto é, $\phi(t) \in L^2(\mathbb{R})$. Defina também

$$\begin{array}{rccc} T_{\phi(t)} & H^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u(t) & \longmapsto & (\phi(t), \partial_x^2 u(t))_{L^2(\mathbb{R})}. \end{array}$$

Claramente $T_{\phi(t)} \in (H^2(\mathbb{R}))^*$ para todo $t \in [0,T]$ fixado. Logo (3.63) vale, em particular, para $T_{\phi(t)}$, isto é,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\langle T_{\phi(t)}, u^\epsilon(t)\rangle = \langle T_{\phi(t)}, u(t)\rangle.$$

Ou melhor, $\lim_{\epsilon\to 0}(\phi(t), u^\epsilon_{xx}(t))_{L^2(\mathbb{R})} = (\phi(t), u_{xx}(t))_{L^2(\mathbb{R})}$, $\forall\, \phi(t) \in L^2(\mathbb{R})$. Portanto,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^T (\phi(t), u^\epsilon_{xx}(t))_{L^2(\mathbb{R})}\, dt = \int_0^T (\phi(t), u_{xx}(t))_{L^2(\mathbb{R})}\, dt\,,\ \forall\, \phi \in L^1(0,T;L^2(\mathbb{R})).$$

Isto mostra que $u^\epsilon_{xx} \overset{*}{\rightharpoonup} u_{xx}$ em $L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}))$. Agora observe que para todo $r > 0$,

$$\|u^\epsilon\|^2_{H^2(-r,r)} + \|v^\epsilon\|^2_{H^1(-r,r)} \le C.$$

Pela imersão compacta $H^2(-r,r)\times H^1(-r,r) \hookrightarrow H^1(-r,r)\times L^2(-r,r)$ temos que (u^ϵ, v^ϵ) converge fortemente para (u,v) em $L^\infty(0,T;H^1\times L^2(-r,r))$.

Afirmação 3.9 *Nas condições acima,* $u^\epsilon v^\epsilon \rightharpoonup uv$ *e* $2Re(u^\epsilon \Lambda_\epsilon \bar{u}^\epsilon_x) \rightharpoonup (|u|^2)_x$ *no sentido das distribuições.*

Colecionando os resultados estabelecidos, obtemos as seguintes convergências:

$$\begin{aligned}
(u^\epsilon, v^\epsilon) &\overset{*}{\rightharpoonup} (u,v) \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R})\times H^1(\mathbb{R}))\\
(u^\epsilon_t, v^\epsilon_t) &\overset{*}{\rightharpoonup} (u_t,v_t) \ em\ L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R})\times H^1(\mathbb{R}))\\
u^\epsilon_{xx} &\overset{*}{\rightharpoonup} u_{xx} \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}))\\
u^\epsilon v^\epsilon &\overset{*}{\rightharpoonup} uv \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}))\\
2Re(u^\epsilon \Lambda_\epsilon \bar{u}^\epsilon_x) &\overset{*}{\rightharpoonup} (|u|^2)_x \text{ em } L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R})).
\end{aligned}$$

Portanto, passando o limite no sistema (3.10) concluímos que (u,v) é solução do sistema (3.8). A primeira equação de (3.8) no sentido de $L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}))$ e a segunda equação no sentido de $L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}))$. Portanto (u,v) e solução (local) de (3.10) e pelo *Lema* 2.2, (u,v) é solução global. Donde concluímos a existência.

Unicidade, continuidade e dependência contínua com relação aos dados iniciais: Sejam (u_1,v_1), (u_2,v_2) duas soluções do problema (3.8) com dados iniciais

$$(u_1(x,0), v_1(x,0)) = (u_{10}, v_{10}) \quad \text{e} \quad (u_{21}(x,0), v_{21}(x,0)) = (u_{20}, v_{20}),$$

respectivamente. Pelo *Lema* (2.2), como $f, g \in H^1(\mathbb{R})$ e $(u_{j0}, v_{j0}) \in X_2$, para $j = 1,2$, temos que

$$\|u_j\|_{H^2(\mathbb{R})} + \|v_j\|_{H^1(\mathbb{R})} \le C.$$

Defina

$$\begin{aligned}
(u,v) &= (u_1,v_1) - (u_2,v_2)\\
(u_0,v_0) &= (u_{10}-u_{20}, v_{10}-v_{20}).
\end{aligned}$$

É fácil mostrar que (u, v) satisfaz a seguinte equação

$$\begin{cases} iu_t & + \quad u_{xx} + i\alpha u \quad = \quad u_1 v + u v_2, \\ v_t & + \quad \beta v \qquad\qquad = \quad -2\gamma Re(u_1 \bar{u}_x + u \bar{u}_{2x}), \\ (u(0,x), v(0,x)) & = \quad (u_0, v_0). \end{cases} \tag{3.64}$$

Mostraremos agora que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{H^2} + \|u_t\| \leq C(\|u_0\|_{H^2} + \|v_0\|_{H^1}) + C\int_0^t (\|u\|_{H^2(\mathbb{R})} + \|u_t\| + \|v\|_{H^1(\mathbb{R})} + \|v_t\|_{H^1(\mathbb{R})})\, ds.$$

De fato, multiplicando a primeira equação de (3.64) por $2\bar{u}$, tomando a parte imaginária do resultado obtido e depois integrando sobre $\mathbb{R}$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|u\|^2 + 2\alpha\|u\|^2 &= 2Im\int \bar{u}(u_1 v + u v_2)\, dx \\ &\leq 2\|u\|\, \|u_1 v + u v_2\|, \end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}\|u\| + 2\alpha\|u\| \leq \|u_1 v + u v_2\|.$$

Agora note que

$$\begin{aligned} \|u_1 v + u v_2\| &\leq \|u_1 v\| + \|u v_2\| \\ &\leq \|u_1\|_\infty \|v\| + \|v_2\|_\infty \|u\| \\ &\leq C(\|u\|_{H^2(\mathbb{R})} + \|v\|_{H^1(\mathbb{R})}). \end{aligned}$$

Conclusão

$$\|u\| \leq C\|u_0\|_{H^2(\mathbb{R})} + C\int_0^t (\|u\|_{H^2(\mathbb{R})} + \|v\|_{H^1(\mathbb{R})})\, ds. \tag{3.65}$$

Analogamente, derivando a primeira equação de (3.64) com respeito a t, multiplicando por $2\bar{u}_t$ e depois integrando sobre $\mathbb{R}$, obtemos

$$\frac{d}{dt}\|u_t\|^2 + 2\alpha\|u_t\|^2 = 2Im\int \bar{u}_t (u_1 v + u v_2)_t\, dx \leq 2\|u_t\|\, \|(u_1 v + u v_2)_t\|,$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}\|u_t\| + 2\alpha\|u_t\| \leq 2\|(u_1 v + u v_2)_t\|.$$

Logo,

$$\|u_t\| \leq C\|u_t(x,0)\| + C\int_0^t \|(u_1 v + u v_2)_t\|\, ds. \tag{3.66}$$

Agora note que

$$
\begin{aligned}
\|u_t(x,0)\| &= \|iu_{0xx} - \alpha u_0 - i(u_{01}v_0 + u_0 v_{20})\| \\
&\leq \|u_0\| + \alpha\|u_0\| + C\|u_{01}\|_{H^1}\|v_0\| + C\|v_{20}\|_{H^1}\|u_0\| \\
&\leq C(\|u_0\|_{H^2} + \|v_0\|_{H^1}).
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\|(u_1v + uv_2)_t\| &= \|u_{1t}v + u_1v_t + u_tv_2 + uv_{2t}\| \\
&\leq \|v\|_\infty\|u_{1t}\| + \|u_1\|_\infty\|v_t\| + \|v_2\|_\infty\|u_t\| + \|u\|_\infty\|v_{2t}\| \\
&\leq C(\|v\|_{H^1(\mathbb{R})} + \|v_t\|_{H^1(\mathbb{R})} + \|u_t\| + \|u\|_{H^2(\mathbb{R})}) \\
&\leq C(\|u\|_{H^2(\mathbb{R})} + \|u_t\| + \|v\|_{H^1(\mathbb{R})} + \|v_t\|_{H^1(\mathbb{R})}).
\end{aligned}
$$

Conclusão,

$$
\begin{aligned}
\|u_t\| &\leq C(\|u_0\|_{H^2(\mathbb{R})} + \|v_0\|_{H^1(\mathbb{R})}) \\
&+ C\int_0^t (\|u\|_{H^2(\mathbb{R})} + \|u_t\| + \|v\|_{H^1(\mathbb{R})} + \|v_t\|_{H^1(\mathbb{R})})\, ds \qquad (3.67)
\end{aligned}
$$

Novamente, da primeira equação de (3.64), temos

$$
\begin{aligned}
u_{xx} &= -iu_t - i\alpha u + (u_1v + uv_2) \\
&= -iu_t - i\alpha u + (u_{10}v_0 + u_0v_{20}) + \int_0^t (u_1v + uv_2)_t\, ds.
\end{aligned}
$$

Daí, usando (3.65) e (3.66) temos

$$
\begin{aligned}
\|u_{xx}\| &\leq \|u_t\| + \alpha\|u\| + \|u_{10}v_0 + u_0v_{20}\| + \int_0^t \|(u_1v + uv_2)_t\|\, ds \\
&\leq C(\|u_0\|_{H^2(\mathbb{R})} + \|v_0\|_{H^1(\mathbb{R})}) \\
&+ C\int_0^t (\|u\|_{H^2(\mathbb{R})} + \|u_t\| + \|v\|_{H^1(\mathbb{R})} + \|v_t\|_{H^1(\mathbb{R})})\, ds. \qquad (3.68)
\end{aligned}
$$

Derivando com respeito a x, multiplicando por $2\bar{u}_x$, tomando a parte imaginária e integrando obtemos

$$
\frac{d}{dt}\|u_x\|^2 + 2\alpha\|u_x\|^2 = 2Im\int \bar{u}_x(u_1v + uv_2)_x\, dx,
$$

onde usamos o fato que $2Im\int \bar{u}_x u_{xxx}\, dx = 0$. Logo,

$$
\frac{d}{dt}\|u_x\|^2 + 2\alpha\|u_x\|^2 \leq 2\|u_x\|\|(u_1v + uv_2)_x\|,
$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}\|u_x\| + \alpha\|u_x\| \leq \|(u_1 v + u v_2)_x\|.$$

Por outro lado, mostra-se que

$$\|(u_1 v + u v_2)_x\| \leq C(\|u\|_{H^2(\mathbb{R})} + \|v\|_{H^1(\mathbb{R})}).$$

Conclusão,

$$\|u_x\| \leq C(\|u_0\|_{H^2(\mathbb{R})} + \|v_0\|_{H^1(\mathbb{R})}) + C\int_0^t (\|u\|_{H^2(\mathbb{R})} + \|v\|_{H^1(\mathbb{R})})\, ds. \quad (3.69)$$

Juntando portanto (3.65),(3.66),(3.68) e (3.69) segue-se o resultado.

Da segunda equação de (3.64) temos que

$$v = v_0 e^{-\beta t} - 2\gamma \int_0^t e^{-\beta(t-s)} Re(u_1 \bar{u}_x + u\bar{u}_{2x})\, ds.$$

Aplicando novamente (3.12) temos

$$\begin{aligned}
\|v\|_{H^1} &\leq \|v_0\|_{H^1} e^{-\beta t} + 2|\gamma| \int_0^t e^{-\beta(t-s)} \|u_1\bar{u}_x + u\bar{u}_{2x}\|_{H^1}\, ds \\
&\leq \|v_0\|_{H^1} + 2|\gamma| \int_0^t \|u_1\bar{u}_x + u\bar{u}_{2x}\|_{H^1}\, ds \\
&\leq C\|v_0\|_{H^1} + C\int_0^t (\|u_1 - u_2\|_{H^1} + \|u_{1x} - u_{2x}\|_{H^1}) \\
&= C\|v_0\|_{H^1} + C\int_0^t (\|u\|_{H^1} + \|u_x\|_{H^1})\, ds \\
&\leq C\|v_0\|_{H^1} + C\int_0^t \|u\|_{H^2}\, ds \\
&\leq C(\|u_0\|_{H^2} + \|v_0\|_{H^1}) + C\int_0^t (\|u\|_{H^2} + \|u_t\| + \|v\| + \|v_t\|)\, ds \\
&\leq C(\|u_0\|_{H^2} + \|v_0\|_{H^1}) \\
&+ C\int_0^t (\|u\|_{H^2} + \|u_t\| + \|v\|_{H^1} + \|v_t\|_{H^1})\, ds. \qquad (3.70)
\end{aligned}$$

Novamente da segunda equação de (3.64) e de (3.12) com $f(x,y) = xy$ temos que

$$\begin{aligned}
\|v_t\|_{H^1} &\leq \beta\|v\|_{H^1} + 2|\gamma|\|u_1\bar{u}_x + u\bar{u}_{2x}\|_{H^1} \\
&= \beta\|v\|_{H^1} + 2|\gamma|\|u_1\bar{u}_{1x} - u_2\bar{u}_{2x}\|_{H^1} \\
&\leq \beta\|v\|_{H^1} + C(\|u\|_{H^1} + \|u_x\|_{H^1}) \\
&\leq \beta\|v\|_{H^1} + C\|u\|_{H^2}.
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{H^2} &\leq \|u\|_{H^2} + \|u_t\| \\
&\leq C(\|u_0\|_{H^2} + \|v_0\|_{H^1}) \\
&+ C\int_0^t (\|u\|_{H^2} + \|u_t\| + \|v\| + \|v_t\|)\, ds
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\|v_t\|_{H^1} &\leq C(\|u_0\|_{H^2} + \|v_0\|_{H^1}) \\
&+ C\int_0^t (\|u\|_{H^2} + \|u_t\| + \|v\|_{H^1} + \|v_t\|_{H^1})\, ds. \qquad (3.71)
\end{aligned}
$$

Denotando por $h(s) = \|u\|_{H^2} + \|u_t\| + \|v\|_{H^1} + \|v_t\|_{H^1}$ e somando (**??**),(3.70) e (3.71) obtemos

$$
h(t) \leq C(\|u_0\|_{H^2} + \|v_0\|_{H^1}) + C\int_0^t h(s)\, ds,
$$

que pela *desigualdade de Gronwall* produz

$$
h(t) \leq C(T)(\|u_0\|_{H^2} + \|v_0\|_{H^1}), \quad \forall 0 \leq t \leq T. \qquad (3.72)
$$

Portanto, de (3.72) segue a unicidade. Pois se (u_j, v_j) $(j = 1, 2)$ satisfaz (3.10) com os mesmos dados iniciais, então o lado direito de (3.72) será igual à zero e portanto $h(t) = 0$. Daí $(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$ em $H^2 \times H^1$. A dependência contínua dos dados iniciais decorre também diretamente de (3.72) bem como a continuidade. Logo $(u, v) \in C([0, \infty); X_2) \cap C^1([0, \infty); L^2 \times H^1(\mathbb{R}))$. ■

Agora mostraremos a existência de solução com regularidade mais baixa. Mais precisamente mostraremos existência e unicidade de soluçãoes com dados iniciais em X_1. Antes precisaremos do seguinte

Teorema 3.2 *Suponha que a solução de (4)-(6) exista para $(u_0, v_0) \in X_1$ e $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Seja*

$X_T^1 = \{\varphi | \varphi \in C([0, T]; H^{1/2}(\mathbb{R})), \varphi_x \in L^\infty(\mathbb{R}; L^2(0, T))\}$, $X_T^2 = L^2(\mathbb{R} \times (0, T))$

e M a aplicação que leva (u_0, v_0, f, g) na solução (u, v). Então existe $T > 0$ tal que $M : X_1 \times L^2 \times L^2 \to X_T^1 \times X_T^2$ é contínua.

Prova: Suponha que $(u_{0j}, v_{0j}, f_j, g_j) \in X_1 \times L^2 \times L^2(\mathbb{R})$ $(j = 1, 2)$, com (u_j, v_j) solução dos seguintes problemas:

$$
\begin{cases}
iu_{1t} + u_{1xx} - u_1 v_1 + i\alpha u_1 = f_1(x), \\
v_{1t} + \beta v_1 + \gamma(|u_1|^2)_x = g_1(x), \\
u_1(x, 0) = u_{01} \\
v_1(x, 0) = v_{01}
\end{cases}
$$

e

$$\begin{cases} iu_{2t} & + \; u_{2xx} - u_2v_2 \; + \; i\alpha u_2 \; = \; f_2(x), \\ v_{2t} & + \; \beta v_2 \; + \; \gamma(|u_2|^2)_x \; = \; g_2(x), \\ u_2(x,0) & = \; u_{02} \\ v_2(x,0) & = \; v_{02}, \end{cases}$$

que existe pelo *Teorema* anterior pois $(u_{0j}, v_{0j}) \in X_2$ e $f_j, g_j \in L^2 \times L^2$. Pelo *Lema 2.1* e (2.55) existe um $T > 0$ adequado tal que

$$\|u_j\|_{H^1} + \|v_j\| \leq C \;\text{ e }\; \|D_x u_j\|_{L^\infty_x(L^2_T)} \leq C \;,\; \forall j = 1, 2. \tag{3.73}$$

Sejam $u = u_1 - u_2$, $v = v_1 - v_2$, $u_0 = u_{01} - u_{02}$, $v_0 = v_{01} - v_{02}$, $f = f_1 - f_2$ e $g = g_1 - g_2$. É fácil mostrar que (u, v) é solução de

$$\begin{cases} iu_t & + \; u_{xx} + i\alpha u \; = \; u_1 v + u v_2 + f, \\ v_t & + \; \beta v \; = \; -2\gamma Re(u\bar{u}_{1x} + u_2\bar{u}_x) + g, \\ u(x,0) & = \; u_0(x) \\ v(x,0) & = \; v_0(x) \end{cases} \tag{3.74}$$

A idéia é mostrar que existe um $T > 0$ tal que

$$\|u\|_{X^1_T} + \|v\|_{L^2_{xT}} \leq C(\|u_0\|_{H^{1/2}} + \|v_0\| + \|f\| + \|g\|). \tag{3.75}$$

De maneira análoga a (2.56) e (2.57) obtemos

$$v = v_0 e^{-\beta t} - 2\gamma \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} Re(u\bar{u}_{1x} + u_2\bar{u}_x)\, d\tau + \frac{1}{\beta} g(x)(1 - e^{-\beta t}) \tag{3.76}$$

e

$$\begin{aligned} u \;=\; & e^{-\alpha t}U(t)u_0 - i(\alpha - i\partial_x^2)^{-1} f(x) + ie^{-\alpha t}(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}U(t)f(x) \\ - \; & i\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}U(t-s)(uv_2)\, ds - i\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}U(t-s)(uv_0e^{-\beta s})\, ds \\ - \; & \frac{i}{\beta}\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}U(t-s)(ug(1-e^{-\beta s}))\, ds \\ + \; & 2\gamma\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}U(t-s)\left[u\int_0^s e^{-\beta(s-\tau)}Re(u\bar{u}_{1x} + u_2\bar{u}_x)\, d\tau\right] ds \end{aligned} \tag{3.77}$$

Usando agora (2.47)-(2.51) e (2.53) obtemos

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^\infty_T(L^2_x)} &\leq \|e^{-\alpha t}U(t)u_0\|_{L^\infty_T(L^2_x)} + \|(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}U(t)f(x)\|_{L^\infty_T(L^2_x)} \qquad (3.78)\\
&+ \left\|\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}U(t-s)(uv_2)\,ds\right\|_{L^\infty_T(L^2_x)}\\
&+ \left\|\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}U(t-s)(uv_0e^{-\beta s})\,ds\right\|_{L^\infty_T(L^2_x)}\\
&+ \frac{1}{\beta}\left\|\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}U(t-s)(ug(1-e^{-\beta s})\,ds\right\|_{L^\infty_T(L^2_x)}\\
&+ 2|\gamma|\left\|Re\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}U(t-s)\left[u_1\int_0^s e^{-\beta(s-\tau)}Re(u\bar{u}_{1x}+u_2\bar{u}_x)\,d\tau\right]ds\right\|_{L^\infty_T(L^2_x)} \qquad (3.79)
\end{aligned}$$

Vamos agora as simplificações

1. Usando (2.47) temos

$$\begin{aligned}
\|e^{-\alpha t}U(t)u_0\|_{L^\infty_T(L^2_x)} &= \sup_{[0,T]}\left(\int e^{-2\alpha t}(U(t)u_0)^2\,dx\right)^{1/2}\\
&\leq \sup_{[0,T]}\|U(t)u_0\|_{L^2_x}\\
&\leq \sup_{[0,T]} C|t|^{1-2/2}\|u_0\|_{L^2_x} = \|u_0\|_{L^2_x}.
\end{aligned}$$

2. Usando (2.47) temos

$$\begin{aligned}
\|e^{-\alpha t}(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}U(t)f\|_{L^\infty_T(L^2_x)} &\leq \sup_{[0,T]}\|(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}U(t)f\|_{L^2_x}\\
&= \sup_{[0,T]}\|U(t)(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}f\|_{L^2_x}\\
&\leq \sup_{[0,T]} C\|(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}f\|_{L^2_x} \leq C\|f\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

3. Usaremos agora (2.49) com $(r_1, q_1) = (\infty, 2), (r_2, q_2) = (6, 6)$, $r_2^{'} = 6/5$ e $q_2^{'} = 6/5$ que verificam às hipóteses do mesmo. Logo,

$$\begin{aligned}
\left\|\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}U(t-s)(uv_2)\,ds\right\|_{L^\infty_T(L^2_x)} &\leq \left\|\int_0^t U(t-s)(uv_2)\,ds\right\|_{L^\infty_T(L^2_x)}\\
&\leq C\|uv_2\|_{L^{6/5}_T(L^{6/5}_x)}.
\end{aligned}$$

4. Usando novamente (2.49) com os mesmos valores obtemos

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}U(t-s)(uv_0e^{-\beta s})\,ds\right\|_{L_T^\infty(L_x^2)} &\leq \left\|\int_0^t U(t-s)(uv_0e^{-\beta t})\,ds\right\|_{L_T^\infty(L_x^2)}\\ &\leq C\|e^{-\beta t}uv_0\|_{L_T^{6/5}(L_x^{6/5})}.\end{aligned}$$

5. Pelo mesmo motivo, temos

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}U(t-s)(ug(1-e^{-\beta s})\,ds\right\|_{L_T^\infty(L_x^2)} &\leq \left\|\int_0^t U(t-s)ug\,ds\right\|_{L_T^\infty(L_x^2)}\\ &\leq C\|ug\|_{L_T^{6/5}(L_x^{6/5})}.\end{aligned}$$

6. Por último, aplicamos novamente (2.49) com $(r_1,q_1)=(\infty,2),(r_2,q_2)=(1,2)$, $r_2^{'}=\infty$ e $q_2^{'}=2$ que verificam às hipóteses do mesmo. Logo

$$\begin{aligned}&\left\|Re\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}U(t-s)\left[u\int_0^s e^{-\beta(s-\tau)}Re(u\bar{u}_{1x}+u_2\bar{u}_x)\,d\tau\right]\,ds\right\|_{L_T^\infty(L_x^2)}\\ \leq\ & C\left\|Re\,u_1\int_0^s e^{-\beta(s-\tau)}Re(u\bar{u}_{1x}+u_2\bar{u}_x)\,d\tau\right\|_{L_T^\infty(L_x^2)}.\end{aligned}$$

Substituindo portanto $(1)-(6)$ em (3.79) ficamos com

$$\begin{aligned}\|u\|_{L_T^\infty(L_x^2)} &\leq C\|u_0\|+C\|f\|+C\|uv_2\|_{L_T^{6/5}(L_x^{6/5})}\\ &+ C\|e^{-\beta t}uv_0\|_{L_T^{6/5}(L_x^{6/5})}+\frac{C}{\beta}\|ug\|_{L_T^{6/5}(L_x^{6/5})}\\ &+ C\left\|u_1\int_0^s e^{-\beta(s-\tau)}Re(u\bar{u}_{1x}+u_2\bar{u}_x)\,d\tau\right\|_{L_T^\infty(L_x^2)}. \qquad (3.80)\end{aligned}$$

Por outro lado, aplicando a *desigualdade de Hölder* temos

$$\begin{aligned}
\|uv_2\|^{6/5}_{L^{6/5}_T(L^{6/5}_x)} &= \int_0^T \left(\int |u|^{6/5}|v_2|^{6/5}\,dx\right)dt \\
&\le \int_0^T \left[\left(\int |u|^{6p/5}\,dx\right)^{1/p}\left(\int |v_2|^{6q/5}\,dx\right)^{1/q}\right]dt \\
&\le \left[\int_0^T \left(\int |u|^{6p/5}\,dx\right)^{r/p} dt\right]^{1/r}\left[\int_0^T \left(\int |v_2|^{6q/5}\,dx\right)^{s/q} dt\right]^{1/s} \\
&\le \left[\sup_{[0,T]}\left(\int |u|^{6p/5}\,dx\right)^{r/p}\int_0^T dt\right]^{1/r}\left[\sup_{[0,T]}\left(\int |v_2|^{6q/5}\,dx\right)^{s/q}\int_0^T dt\right]^{1/s} \\
&= T^{1/r+1/s}\left[\sup_{[0,T]}\left(\int |u|^{6p/5}\,dx\right)^{1/p}\right]\left[\sup_{[0,T]}\left(\int |v_2|^{6q/5}\,dx\right)^{1/q}\right], \qquad (3.81)
\end{aligned}$$

onde $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$. Escolhendo portanto $p=5/2$ e $q=5/3$ temos

$$\|uv_2\|_{L^{6/5}_T(L^{6/5}_x)} \le T^{5/6}\|u\|_{L^\infty_T(L^2_x)}\|v_2\|_{L^\infty_T(L^3_x)}. \qquad (3.82)$$

Pelo que vimos em (3.81), tomando agora $p=5/2$ e $q=5/3$, temos

$$\|uv_0\|^{6/5}_{L^{6/5}_T(L^{6/5}_x)} \le T^{1/r}\sup_{[0,T]}\left(\int |u|^3\,dx\right)^{1/3}\left[\int_0^T\left(\int |v_0|^2\,dx\right)^{3s/5}dt\right]^{1/s},$$

isto é,

$$\|uv_0\|_{L^{6/5}_T(L^{6/5}_x)} \le T^{5/6r}\|u\|_{L^\infty_T(L^3_x)}\left[\int_0^T\left(\int |v_0|^2\,dx\right)^{3s/5}dt\right]^{5/6s}.$$

Tomando agora $s=5/3$ e $r=5/2$, ficamos com

$$\|uv_0\|_{L^{6/5}_T(L^{6/5}_x)} \le T^{1/3}\|u\|_{L^\infty_T(L^3_x)}\left[\int_0^T\left(\int |v_0|^2\,dx\right)dt\right]^{1/2}.$$

Por outro lado

$$\left[\int_0^T\left(\int |v_0|^2\,dx\right)dt\right]^{1/2} \le \left[\sup_{[0,T]}\left(\int |v_0|^2\,dx\right)\int_0^T dt\right]^{1/2} = T^{1/2}\|v_0\|,$$

pois v_0 não depende de t. Conclusão,

$$\|uv_0\|_{L^{6/5}_T(L^{6/5}_x)} \le T^{5/6}\|u\|_{L^\infty_T(L^3_x)}\|v_0\|. \qquad (3.83)$$

Analogamente, como g não depende de t, então

$$\|ug_0\|_{L_T^{6/5}(L_x^{6/5})} \leq T^{5/6}\|u\|_{L_T^\infty(L_x^3)}\|g\|. \tag{3.84}$$

Por último, aplicando (2.53) temos

$$\begin{aligned}
\left\| u_1 \int_0^s e^{-\beta(s-\tau)} Re(u\bar{u}_{1x} + u_2\bar{u}_x)\, d\tau \right\|_{L_T^\infty(L_x^2)} &\leq \left\| u_1 \int_0^t Re(u\bar{u}_{1x})\, d\tau \right\|_{L_T^\infty(L_x^2)} \\
&+ \left\| u_1 \int_0^t Re(u_2\bar{u}_x)\, d\tau \right\|_{L_T^\infty(L_x^2)} \\
&\leq T^{3/2}\|u_1\|_{L_T^\infty(H_x^{1/2})}\|u\|_{L_T^\infty(H_x^{1/2})}\|\partial_x u_1\|_{L_x^\infty(L_T^2)} \\
&+ T^{3/2}\|u_1\|_{L_T^\infty(H_x^{1/2})}\|u_2\|_{L_T^\infty(H_x^{1/2})}\|\partial_x u\|_{L_x^\infty(L_T^2)} \\
&= T^{3/2}\|u_1\|_{L_T^\infty(H_x^{1/2})}(\|u\|_{L_T^\infty(H_x^{1/2})}\|\partial_x u_1\|_{L_x^\infty(L_T^2)} \\
&+ \|u_2\|_{L_T^\infty(H_x^{1/2})}\|\partial_x u\|_{L_x^\infty(L_T^2)}). \qquad (3.85)
\end{aligned}$$

Substituindo portanto (3.82)-(3.85) em (3.80) ficamos com

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L_T^\infty(L_x^2)} &\leq C\|u_0\| + C\|f\| + CT^{5/6}\|u\|_{L_T^\infty(L_x^3)}\|v_2\|_{L_T^\infty(L_x^2)} + CT^{5/6}\|u\|_{L_T^\infty(L_x^3)}\|v_0\| \\
&+ CT^{5/6}\|u\|_{L_T^\infty(L_x^3)}\|g\| + T^{3/2}\|u_1\|_{L_T^\infty(H_x^{1/2})}(\|u\|_{L_T^\infty(H_x^{1/2})}\|\partial_x u_1\|_{L_x^\infty(L_T^2)} \\
&+ \|u_2\|_{L_T^\infty(H_x^{1/2})}\|\partial_x u\|_{L_x^\infty(L_T^2)}) \qquad (3.86)
\end{aligned}$$

Da expressão de u, temos

$$\begin{aligned}
D_x u &= e^{-\alpha t}U(t)D_x u_0 - iD_x(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}f(x) + ie^{-\alpha t}D_x(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}U(t)f(x) \\
&- iD_x\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}U(t-s)(uv_2)\, ds - iD_x\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}U(t-s)(uv_0e^{-\beta s})\, ds \\
&- \frac{i}{\beta}D_x\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}U(t-s)(ug(1-e^{-\beta s}))\, ds \\
&+ 2D_x\gamma\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}U(t-s)\left[u\int_0^s e^{-\beta(s-\tau)}Re(u\bar{u}_{1x} + u_2\bar{u}_x)\, d\tau\right] ds,
\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
\|D_x u\|_{L^\infty_x(L^2_T)} &\leq \|e^{-\alpha t} D_x^{1/2} U(t) D_x^{1/2} u_0\|_{L^\infty_x(L^2_T)} + \|D_x(\alpha - i\partial_x^2)^{-1} f(x)\|_{L^\infty_x(L^2_T)} \\
&+ \|e^{-\alpha t} U(t) D_x(\alpha - i\partial_x^2)^{-1} f(x)\|_{L^\infty_x(L^2_T)} \\
&+ \left\| D_x \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} U(t-s)(uv_2)\, ds \right\|_{L^\infty_x(L^2_T)} \\
&+ \left\| D_x \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} U(t-s)(uv_0 e^{-\beta s})\, ds \right\|_{L^\infty_x(L^2_T)} \\
&+ \frac{1}{\beta} \left\| D_x \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} U(t-s)(ug(1-e^{-\beta s}))\, ds \right\|_{L^\infty_x(L^2_T)} \\
&+ 2|\gamma| \left\| D_x \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} U(t-s) \left[u \int_0^s e^{-\beta(s-\tau)} Re(u\bar{u}_{1x} + u_2 \bar{u}_x)\, d\tau \right] ds \right\|_{L^\infty_x(L^2_T)}.
\end{aligned}$$

Agora vamos às simplificações.

1. Por (2.48) temos

$$\|e^{-\alpha t} D_x^{1/2} U(t) D_x^{1/2} u_0\|_{L^\infty_x(L^2_T)} \leq e^{\alpha T} C \|D_x^{1/2} u_0\|_{L^2_x} \leq C e^{\alpha T} \|u_0\|_{H^{1/2}}.$$

2. Por (2.51) temos

$$\left\| D_x \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} U(t-s)(uv_2)\, ds \right\|_{L^\infty_x(L^2_T)} \leq e^{\alpha T} C \|uv_2\|_{L^1_x(L^2_T)}.$$

3. Novamente por (2.51)

$$\left\| D_x \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} U(t-s)(uv_0 e^{-\beta s})\, ds \right\|_{L^\infty_x(L^2_T)} \leq e^{\alpha T} C \|uv_0 e^{-\beta t}\|_{L^1_x(L^2_T)}.$$

4. Por (2.51)

$$\left\| D_x \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} U(t-s)(ug(1-e^{-\beta s}))\, ds \right\|_{L^\infty_x(L^2_T)} \leq C e^{\alpha T} \|ug(1-e^{-\beta t})\|_{L^1_x(L^2_T)}.$$

5. Por último, novamente por (2.51)

$$\left\| D_x \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} U(t-s) \left[u \int_0^s e^{-\beta(s-\tau)} Re(u\bar{u}_{1x} + u_2 \bar{u}_x)\, d\tau \right] ds \right\|_{L^\infty_x(L^2_T)}$$

$$\leq e^{\alpha T} C \left\| u_1 \int_0^t e^{-\beta(s-\tau)} Re(u\bar{u}_{1x} + u_2 \bar{u}_x)\, d\tau \right\|_{L^1_x(L^2_T)}.$$

Portanto ficamos com

$$\begin{aligned}\|D_x u\|_{L^\infty_x(L^2_T)} &\leq C\|u_0\|_{H^{1/2}} + \|D_x(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}f(x)\|_{L^\infty_x(L^2_T)}\\ &+ \|e^{-\alpha t}U(t)D_x(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}f(x)\|_{L^\infty_x(L^2_T)} + e^{\alpha T}C\|uv_2\|_{L^1_x(L^2_T)}\\ &+ e^{\alpha T}C\|uv_0e^{-\beta t}\|_{L^1_x(L^2_T)} + Ce^{\alpha T}\|ug(1-e^{-\beta t})\|_{L^1_x(L^2_T)}\\ &+ e^{\alpha T}C\left\|u_1\int_0^t e^{-\beta(s-\tau)}Re(u\bar{u}_{1x} + u_2\bar{u}_x)\,d\tau\right\|_{L^1_x(L^2_T)}. \qquad (3.87)\end{aligned}$$

Continuando com as simplificações, temos:

1.

$$\begin{aligned}\|D_x(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}f(x)\|_{L^\infty_x(L^2_T)} &= \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\int_0^T |D_x(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}f|^2\,dt\right)^{1/2}\\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(|D_x(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}f|^2 T\right)^{1/2}\\ &= T^{1/2}\|D_x(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}f\|_{L^\infty_x}\\ &\leq \sqrt{2}T^{1/2}\|D_x(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}f\|^{1/2}\|D_x^2(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}f\|^{1/2}\\ &\leq CT^{1/2}\|f\|_{L^2_x}.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\|e^{-\alpha t}U(t)D_x(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}f\|_{L^\infty_x(L^2_T)} &\leq \|D_x^{1/2}U(t)\left[D_x^{1/2}(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}f\right]\|_{L^\infty_x(L^2_T)}\\ &\leq C\|D_x^{1/2}(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}f\|_{L^2_x} \leq C\|f\|_{L^2_x}.\end{aligned}$$

3. Usando o fato que v_0 não depende de t e usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}\|uv_0e^{-\beta t}\|_{L^1_x(L^2_T)} &\leq \int\left(\int_0^T |u(x,t)|^2|v_0(x)|^2\,dt\right)^{1/2}dx\\ &= \int |v_0|\left(\int_0^T |u|^2\,dx\right)^{1/2}dx\\ &\leq \left(\int |v_0|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int\int_0^T |u|^2\,dx\right)^{1/2} = \|v_0\|\,\|u\|_{L^2_x(L^2_T)}.\end{aligned}$$

4. Usando o mesmo argumento do item anterior, obtemos

$$\|ug(1-e^{-\beta t})\|_{L^1_x(L^2_T)} \leq \|g\|\,\|u\|_{L^2_x(L^2_T)}.$$

5. Por último, usando (2.52),

$$
\begin{aligned}
&\left\| u_1 \int_0^t e^{-\beta(s-\tau)} Re(u\bar{u}_{1x} + u_2\bar{u}_x)\, d\tau \right\|_{L^1_x(L^2_T)} \leq \left\| u_1 \int_0^t u\bar{u}_{1x}\, d\tau \right\|_{L^1_x(L^2_T)} \\
+ &\left\| u_1 \int_0^t \bar{u}u_{1x}\, d\tau \right\|_{L^1_x(L^2_T)} \\
\leq &\ T\|u_1\|_{L^\infty_T(L^2_x)} \Big(\|u\|_{L^\infty_T(L^2_x)} \|u_{1x}\|_{L^\infty_x(L^2_T)} + \|u_2\|_{L^\infty_T(L^2_x)} \|u_x\|_{L^\infty_x(L^2_T)} \Big).
\end{aligned}
$$

Daí, existe uma constante C tal que

$$
\begin{aligned}
\|D_x u\|_{L^\infty_x(L^2_T)} &\leq C\|u_0\|_{H^{1/2}} + CT^{1/2}\|f\| + C\|uv_2\|_{L^1_x(L^2_T)} + C\|v_0\|\|u\|_{L^2_x(L^2_T)} \\
&+ C\|g\|\|u\|_{L^2_x(L^2_T)} + CT\|u_1\|_{L^\infty_T(L^2_x)}(\|u\|_{L^\infty_T(L^2_x)}\|u_{1x}\|_{L^\infty_x(L^2_T)} \\
&+ \|u_2\|_{L^\infty_T(L^2_x)}\|u_x\|_{L^\infty_x(L^2_T)}). \qquad (3.88)
\end{aligned}
$$

Note que de maneira análoga a (2.56) temos

$$
v_2 = v_{20}e^{-\beta t} - \gamma \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)}(|u_2(x,\tau)|^2)_x\, d\tau + \frac{g(x)}{\beta}(1-e^{-\beta t}). \qquad (3.89)
$$

Portanto

$$
uv_2 = uv_{20}e^{-\beta t} - \gamma u \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)}(|u_2(x,\tau)|^2)_x\, d\tau + u\frac{g(x)}{\beta}(1-e^{-\beta t}).
$$

Então,

$$
\|uv_2\|_{L^1_x(L^2_T)} \leq \|uv_{20}\|_{L^1_x(L^2_T)} + \frac{1}{\beta}\|ug\|_{L^1_x(L^2_T)} + |\gamma| \left\| u \int_0^t (|u_2(x,\tau)|^2)_x\, d\tau \right\|_{L^1_x(L^2_T)}.
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\left\| u \int_0^t (|u_2(x,\tau)|^2)_x\, d\tau \right\|_{L^1_x(L^2_T)} &\leq \left\| u \int_0^t u_{2x}\bar{u}_2\, d\tau \right\|_{L^1_x(L^2_T)} + \left\| u \int_0^t \bar{u}_{2x}u_2\, d\tau \right\|_{L^1_x(L^2_T)} \\
&\leq 2T\|u\|_{L^\infty(L^2_x)}\|u_2\|_{L^\infty_x(L^2_T)}\|u_{2x}\|_{L^\infty_x(L^2_T)},
\end{aligned}
$$

onde usamos (2.52). Logo

$$
\begin{aligned}
\|uv_2\|_{L^1_x(L^2_T)} &\leq \|v_{20}\|_{L^2_x(L^2_T)} + C\|g\|\|u\|_{L^2_x(L^2_T)} \\
&+ CT\|u\|_{L^\infty_T(L^2_x)}\|u_2\|_{L^\infty_x(L^2_T)}\|u_{2x}\|_{L^\infty_x(L^2_T)}. \qquad (3.90)
\end{aligned}
$$

Observe também que

$$
\begin{aligned}
\|u\|^2_{L^2_x(L^2_T)} &= \int \left(\int_0^T |u(x,t)|^2\, dt \right) dx \\
&\leq \int \left(\int_0^T \sup_{[0,T]} |u(x,t)|^2\, dt \right) dx \\
&\leq \int \sup_{[0,T]} |u(x,t)|^2\, dx \int_0^T dt = T\|u\|^2_{L^\infty_T(L^2_x)}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\|u\|^2_{L^2_x(L^2_T)} \leq T^{1/2}\|u\|^2_{L^\infty_T(L^2_x)}.$$

Substituindo agora (3.90) em (3.88) obtemos

$$
\begin{aligned}
\|D_x u\|_{L^\infty_x(L^2_T)} &\leq C\|u_0\|_{H^{1/2}} + CT^{1/2}\|f\| + CT^{1/2}\|u\|_{L^\infty_T(L^2_x)}(\|g\| + \|v_{20}\| \\
&+ \|v_0\| + T^{1/2}\|u_1\|_{L^\infty_T(L^2_x)}\|u_{1x}\|_{L^\infty_x(L^2_T)} + T^{1/2}\|u_2\|_{L^\infty_T(L^2_x)}\|u_{2x}\|_{L^\infty_x(L^2_T)}) \\
&+ CT\|u_x\|_{L^\infty_x(L^2_T)}\|u_1\|_{L^\infty_T(L^2_x)}\|u_2\|_{L^\infty_T(L^2_x)}. \qquad (3.91)
\end{aligned}
$$

Da expressão (3.77) temos

$$
\begin{aligned}
D_x^{1/2}u &= e^{-\alpha t}U(t)D_x^{1/2}u_0 - iD_x^{1/2}u_0(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}f(x) + ie^{-\alpha t}D_x^{1/2}u_0(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}U(t)f(x) \\
&- iD_x^{1/2}u_0\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}U(t-s)(uv_2)\, ds - iD_x^{1/2}u_0\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}U(t-s)(uv_0e^{-\beta s})\, ds \\
&- \frac{i}{\beta}D_x^{1/2}u_0\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}U(t-s)(ug(1-e^{-\beta s}))\, ds \\
&+ 2\gamma D_x^{1/2}u_0\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}U(t-s)\left[u\int_0^s e^{-\beta(s-\tau)}Re(u\bar{u}_{1x} + u_2\bar{u}_x)\, d\tau\right] ds.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
&\|D_x^{1/2}u\|_{L^\infty_T(L^2_x)} \leq \|e^{-\alpha t}U(t)D_x^{1/2}u_0\|_{L^\infty_T(L^2_x)} + \|D_x^{1/2}(\alpha - i\partial_x^2)^{-1}U(t)f(x)\|_{L^\infty_T(L^2_x)} \\
&+ \left\|D_x^{1/2}\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}U(t-s)(uv_2)\, ds\right\|_{L^\infty_T(L^2_x)} \\
&+ \left\|D_x^{1/2}\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}U(t-s)(uv_0e^{-\beta s})\, ds\right\|_{L^\infty_T(L^2_x)} \\
&+ \frac{1}{\beta}\left\|D_x^{1/2}\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}U(t-s)(ug(1-e^{-\beta s})\, ds\right\|_{L^\infty_T(L^2_x)} \\
&+ 2|\gamma|\left\|D_x^{1/2}\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}U(t-s)\left[u_1\int_0^s e^{-\beta(s-\tau)}Re(u\bar{u}_{1x} + u_2\bar{u}_x)\, d\tau\right] ds\right\|_{L^\infty_T(L^2_x)} \qquad (3.92)
\end{aligned}
$$

Aplicando (2.47)-(2.51) ficamos com

1.
$$\left\| D_x^{1/2} \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} U(t-s)(uv_2)\, ds \right\|_{L_T^\infty(L_x^2)} \leq C \|uv_2\|_{L_x^1(L_T^2)}.$$

2.
$$\left\| D_x^{1/2} \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} U(t-s)(uv_0 e^{-\beta s})\, ds \right\|_{L_T^\infty(L_x^2)} \leq C \|uv_0 e^{-\beta t}\|_{L_x^1(L_T^2)}.$$

3.
$$\frac{1}{\beta} \left\| D_x^{1/2} \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} U(t-s)(ug(1-e^{-\beta s})\, ds \right\|_{L_T^\infty(L_x^2)} \leq C \|ug(1-e^{-\beta t})\|_{L_x^1(L_T^2)}.$$

4.
$$\begin{aligned} & \left\| D_x^{1/2} \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} U(t-s) \left[u_1 \int_0^s e^{-\beta(s-\tau)} Re(u\bar{u}_{1x} + u_2 \bar{u}_x)\, d\tau \right] ds \right\|_{L_T^\infty(L_x^2)} \\ \leq & \left\| u_1 \int_0^t e^{-\beta(s-\tau)} (u\bar{u}_{1x} + u_2 \bar{u}_x)\, d\tau \right\|_{L_x^1(L_T^2)}. \end{aligned}$$

5.
$$\|U(t) D_x^{1/2} u_0\|_{L_T^\infty(L_x^2)} = \sup_{[0,T]} \|U(t) D_x^{1/2} u_0\|_{L_x^2} \leq C \sup_{[0,T]} \|D_x^{1/2} u_0\|_{L_x^2} = C \|D_x^{1/2} u_0\|_{L_x^2}.$$

6. Analogamente
$$\|D_x^{1/2} (\alpha - i\partial_x^2)^{-1} U(t) f(x)\|_{L_T^\infty(L_x^2)} \leq C \|D_x^{1/2} (\alpha - i\partial_x^2)^{-1} U(t) f(x)\|_{L_x^2}.$$

7.
$$\|D_x^{1/2} (\alpha - i\partial_x^2)^{-1} f(x)\|_{L_T^\infty(L_x^2)} = \sup_{[0,T]} \|D_x^{1/2} (\alpha - i\partial_x^2)^{-1} f(x)\|_{L_x^2} \leq C \|f\|.$$

Concluímos assim que $\|D_x^{1/2}\|_{L_T^\infty(L_x^2)}$ limita $\|D_x u\|_{L_x^\infty(L_T^2)}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \|D_x^{1/2} u\|_{L_T^\infty(L_x^2)} \leq\ & C\|u_0\|_{H^{1/2}} + CT^{1/2}\|f\| + CT^{1/2}\|u\|_{L_T^\infty(L_x^2)}(\|g\| + \|v_{20}\| \\ +\ & \|v_0\| + T^{1/2}\|u_1\|_{L_T^\infty(L_x^2)}\|u_{1x}\|_{L_x^\infty(L_T^2)} + T^{1/2}\|u_2\|_{L_T^\infty(L_x^2)}\|u_{2x}\|_{L_x^\infty(L_T^2)}) \\ +\ & CT\|u_x\|_{L_x^\infty(L_T^2)}\|u_1\|_{L_T^\infty(L_x^2)}\|u_2\|_{L_T^\infty(L_x^2)}. \end{aligned} \tag{3.93}$$

Usando agora o fato que $\|u\|_{X^1_T} = \|u\|_{L^\infty_T(H^{1/2}_x)} + \|u_x\|_{L^\infty_x(L^2_T)}$ e mais

$$\frac{1}{2}\left(\|u\|^2_{L^2_x} + \|D^{1/2}_x u\|^2_{L^2_x}\right) \leq \|u\|^2_{H^{1/2}_x} \leq \left(\|u\|^2_{L^2_x} + \|D^{1/2}_x u\|^2_{L^2_x}\right),$$

segue-se que as normas

$$\|u\|_{X^1_T} = \|u\|_{L^\infty_T(H^{1/2}_x)} + \|u_x\|_{L^\infty_x(L^2_T)}$$

e

$$|\|u\||_{X^1_T} = \|u\|_{L^\infty_T(L^2_x)} + \|D^{1/2}_x u\|_{L^\infty_T(L^2_x)} + \|D_x u\|_{L^\infty_x(L^2_T)}$$

são equivalentes. Somando portanto (3.86), (3.91),(3.93) e usando (3.73) concluímos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{X^1_T} \leq C\|u_0\|_{H^{1/2}} + C\|f\| + C(T^{3/2} + T^{1/2})\|u\|_{X^1_T}.$$

Escolhendo $T > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$\|u\|_{X^1_T} \leq C\|u_0\|_{H^{1/2}} + C\|f\|. \tag{3.94}$$

De (3.76) temos

$$\|v\|_{L^2_{xT}} \leq \|v_0\|_{L^2_{xT}} + 2|\gamma| \left\| \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} Re(u\bar{u}_{1x} + u_2\bar{u}_x)\, d\tau \right\|_{L^2_{xT}} + \frac{1}{\beta}\|g(1-e^{-\beta t})\|_{L^2_{xT}}.$$

Por outro lado,

1. Como v_0 não depende de t

$$\|v_0\|_{L^2_{xT}} = \left(\int\int_0^T |v_0|^2\, dt\, dx\right)^{1/2} = \left(\int |v_0|^2\, dx \int_0^T dt\right)^{1/2} = T^{1/2}\|v_0\|.$$

2. Como a g não depende de t e observando que $1 - e^{-\beta t} \leq \beta t$, para todo $t \geq 0$, segue que

$$\begin{aligned} \|g(1-e^{-\beta t})\|_{L^2_{xT}} &= \|g\| \left(\int_0^T (1-e^{-\beta t})^2\, dt\right)^{1/2} \\ &\leq \|g\| \left(\int_0^T \beta^2 t^2\, dt\right)^{1/2} = CT^{3/2}\|g\|. \end{aligned}$$

3. Por último

$$\left\| \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} Re(u\bar{u}_{1x} + u_2\bar{u}_x)\, d\tau \right\|_{L^2_{xT}} \leq \left\| \int_0^t u\bar{u}_{1x}\, ds \right\|_{L^2_{xT}} + \left\| \int_0^t u_2\bar{u}_x\, ds \right\|_{L^2_{xT}}.$$

Agora note que aplicando a desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^t u\bar{u}_{1x}\, ds \right\|_{L^2_{xT}} &= \left(\int \int_0^T \left| \int_0^t u\bar{u}_{1x}\, ds \right| dt\, dx \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int \int_0^T \left[\int_0^t |u|^2\, ds \right] \left[\int_0^t |u_{1x}|^2\, ds \right] dt\, dx \right)^{1/2} \\
&\leq \left\{ \int \left[\int_0^T \left(\int_0^t |u|^2\, ds \right)^2 dt \right]^{1/2} \left[\int_0^T \left(\int_0^t |u|^2\, ds \right)^2 dt \right]^{1/2} dx \right\}^{1/2}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, pelo *Teorema do Valor Médio*, existem $0 \leq \bar{t} \leq T$ e $0 \leq t' \leq T$ tais que

$$\int_0^T \left(\int_0^t |u|^2\, ds \right)^2 dt = T \left(\int_0^{\bar{t}} |u|^2\, ds \right)^2$$

e

$$\int_0^T \left(\int_0^t |u_{1x}|^2\, ds \right)^2 dt = T \left(\int_0^{\bar{t}'} |u_{1x}|^2\, ds \right)^2.$$

Mas $|u|^2 \geq 0$ e $|u_{1x}|^2 \geq 0$ e portanto.

$$\int_0^{\bar{t}} |u|^2\, ds \leq \int_0^T |u|^2\, ds \quad \text{e} \quad \int_0^{t'} |u_{1x}|^2\, ds \leq \int_0^T |u_{1x}|^2\, ds.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^t u\bar{u}_{1x}\, ds \right\|_{L^2_{xT}} &\leq \left\{ \int \left[T \int_0^T |u|^2\, ds \right] \left[T \int_0^T |u_{1x}|^2\, ds \right] dx \right\}^{1/2} \\
&= T \left\{ \int \left(\int_0^T |u|^2\, dt \right) \left(\int_0^T |u_{1x}|^2\, dt \right) dx \right\}^{1/2} \\
&\leq T \left\{ \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_0^T |u_{1x}|^2\, dt \right) \left[\int \left(\int_0^T |u|^2\, dt \right) dx \right] \right\}^{1/2} \\
&= C \|u_{1x}\|_{L^\infty_x(L^2_T)} \|u\|_{L^2_{xT}}.
\end{aligned}$$

Analogamente

$$\left\| \int_0^t u_2 \bar{u}_x \, ds \right\|_{L^2_{xT}} \leq C \|u_x\|_{L^\infty_x(L^2_T)} \|u_2\|_{L^2_{xT}}.$$

Portanto

$$\left\| \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} Re(u \bar{u}_{1x} + u_2 \bar{u}_x) \, d\tau \right\|_{L^2_{xT}} \leq C \|u_{1x}\|_{L^\infty_x(L^2_T)} \|u\|_{L^2_{xT}} + C \|u_x\|_{L^\infty_x(L^2_T)} \|u_2\|_{L^2_{xT}}.$$

Segue daí que

$$\|v\|_{L^2_{xT}} \leq T^{1/2} \|v_0\| + C T^{3/2} \|g\| + C \|u_{1x}\|_{L^\infty_x(L^2_T)} \|u\|_{L^2_{xT}} + C \|u_x\|_{L^\infty_x(L^2_T)} \|u_2\|_{L^2_{xT}}.$$

Também é fácil ver que

$$\|u\|_{L^2_{xT}} \leq T^{1/2} \|u\|_{L^\infty_T(L^2_x)}.$$

Usando agora (3.94) concluimos que

$$\|v\|_{L^2_{xT}} \leq T^{1/2} \|v_0\| + C T^{3/2} \|g\| + C T^{1/2} \|u_0\|_{H^{1/2}}.$$

Portanto, segue daí que

$$\|u\|_{X^1_T} + \|v\|_{L^2_{xT}} \leq C \left(\|u_0\|_{H^{1/2}} + \|v_0\| + \|f\| + \|g\| \right) \quad \blacksquare$$

O próximo *Teorema* é de extrema importância para mostrarmos a existência de atrator global em X_1.

Teorema 3.3 (Existência e unicidade com dados iniciais em X_1) *Suponha $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Para todo $(u_0, v_0) \in X_1$, (4)-(6) possui uma única solução global*

$$(u, v) \in C([0, \infty); X_1) \cap C^1([0, \infty); H^{-1} \times L^2(\mathbb{R})). \tag{3.95}$$

Além disso, (4)-(5) define um sistema dinâmico contínuo $S(t)$ em X_1.

Prova: Seja $(u_{0j}, v_{0j}, f_j, g_j) \in X_2 \times H^1 \times H^1(\mathbb{R})$ convergindo para (u_0, v_0, f, g) na topologia de $X_1 \times L^2 \times L^2(\mathbb{R})$, isto é,

$$\lim_{j \to \infty} \left(\|u_{0j} - u_0\|_{H^1} + \|v_{oj} - v_0\| + \|f_j - f\| + \|g_j - g\| \right) = 0. \tag{3.96}$$

Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} iu_{jt} & + & u_{jxx} & - & u_j v_j + i\alpha u_j & = & f_j(x)\,, & x \in \mathbb{R}\,, t > 0 \\ v_{jt} & + & \beta v_j & + & \gamma(|u_j|^2)_x & = & g_j(x)\,, & x \in \mathbb{R}\,, t > 0 \\ u_j(x,0) & = & u_{0j}(x) & & & & & \\ v_j(x,0) & = & v_{0j}(x). & & & & & \end{cases} \tag{3.97}$$

De (3.9) temos que (3.97) possui uma única solução

$$(u_j, v_j) \in C([0, \infty); X_2) \cap C^1([0, \infty); L^2 \times H^1(\mathbb{R})).$$

Do Teorema anterior, existe $T > 0$ tal que

$$\|u_j - u\|_{X_T^1} + \|v_j - v\|_{L^2_{xT}} \leq C\left(\|u_{oj} - u_0\|_{H^1} + \|v_{0j} - v_0\| + \|f_j - f\| + \|g_j - g\|\right),$$

mais precisamente, existe $T > 0$ tal que $(u_j, v_j) \to (u, v)$ em $X_T^1 \times X_T^2$ para algum (u, v). A idéia agora é mostrar que (u, v) é solução do problema (4)-(6). Da convergência anterior temos que

$$u_j \to u \text{ em } L_T^\infty(L_x^2(\mathbb{R})) = L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R})) \ , \ \text{ quando } j \to \infty. \tag{3.98}$$

Portanto, como $L^2(\mathbb{R}) \subset H^{-1}(\mathbb{R})$ segue-se que

$$u_j \to u \text{ em } L_T^\infty(H_x^{-1}(\mathbb{R})) = L^\infty(0, T; H^{-1}(\mathbb{R})) \ , \ \text{ quando } j \to \infty. \tag{3.99}$$

Pelo *Lema* 2.2 temos que (u_j, v_j) são limitadas em X_1. Portanto $(u_j, v_j) \overset{*}{\rightharpoonup} (w, z)$ em $L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}))$.

Afirmação 3.10 *Nas condições acima* $(w, z) = (u, v)$.

Prova: De fato, como $u_j \overset{*}{\rightharpoonup} w(t)$ em $L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{R}))$ então

$$\int_0^T \langle \phi(t), u_j(t) \rangle \, dt \to \int_0^T \langle \phi(t), w(t) \rangle \, dt \ , \ \ \forall \, \phi \in L^1(0, T; H^{-1}(\mathbb{R})). \tag{3.100}$$

Agora seja $\varphi \in L^1(0, T; L^2(\mathbb{R}))$ e defina

$$\begin{array}{cccc} T_{\phi(t)} & H^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u(t) & \longmapsto & (\phi(t), u(t))_{L^2(\mathbb{R})}. \end{array}$$

Note que $T_{\varphi(t)} \in (H^1(\mathbb{R}))^*$ e portanto, em particular, (3.100) vale para T_φ, ou seja,

$$\int_0^T \langle T_{\varphi(t)}, u_j(t) \rangle \, dt \to \int_0^T \langle T_{\varphi(t)}, w(t) \rangle \, dt,$$

isto é,

$$\int_0^T \langle \varphi(t), u_j(t) \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \, dt \to \int_0^T \langle \varphi(t), w(t) \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \, dt \quad \forall \, \varphi \in L^1(0, T; L^2(\mathbb{R}))$$

e isto é a definição de $u_j \overset{*}{\rightharpoonup} w(t)$ em $L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}))$. Assim obtemos que

$$u_j \to u \ \text{ em } \ L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}))$$

e

$$u_j \overset{*}{\rightharpoonup} w(t) \ \text{ em } \ L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R})).$$

Segue portanto, da unicidade do limite fraco-*, que $w = u$. No outro caso, $v_j \to v$ em $X_T^2 = L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}))$ e $v_j \overset{*}{\rightharpoonup} z$ em $L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}))$. Como $v_j \overset{*}{\rightharpoonup} z$ em $L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}))$, temos

$$\int_0^T \langle v_j, \varphi(t)\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\, dt \to \int_0^T \langle z(t), \varphi(t)\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\, dt \ , \ \forall\, \varphi \in L^1(0,T;L^2(\mathbb{R})) \supset L^2(0,T;L^2(\mathbb{R})).$$

Ou seja, vale em particular para toda $\varphi \in L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}))$, isto é $v_j \rightharpoonup z$ em $L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}))$. Portanto, segue novamente da unicidade do limite fraco que $z = v$. Concluímos assim que

$$(u_j, v_j) \overset{*}{\rightharpoonup} (u,v) \ \text{ em } \ L^\infty(0,T;X_1).$$

Observe agora que a sequência (u_{jt}, v_{jt}) é limitada em $H^{-1} \times L^2(\mathbb{R})$ e portanto $(u_{jt}, v_{jt}) \overset{*}{\rightharpoonup} (w,z)$ em $L^\infty(0,T;H^{-1} \times L^2(\mathbb{R}))$.

Afirmação 3.11 *Nas condições acima $(w,z) = (u_t, v_t)$ no sentido fraco.*

De fato, como foi visto no início que $u_j \to u$ em $L^\infty(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}))$ temos que

$$u_j \overset{*}{\rightharpoonup} u \ \text{ em } \ L^\infty(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}))$$
$$u_{jt} \overset{*}{\rightharpoonup} w \ \text{ em } \ L^\infty(0,T;H^{-1}(\mathbb{R})).$$

Considere agora $\eta \in H^{-1}(\mathbb{R})$ qualquer e $\phi \in C_c^\infty(0,T)$ uma função escalar. Portanto verifica-se que $\eta\phi \in L^1(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}))$ e com isso,

$$\int_0^T \langle \eta\phi(t), u_{jt}(t)\rangle\, dt \to \int_0^T \langle \eta\phi(t), w\rangle\, dt. \tag{3.101}$$

Por outro lado,

$$\int_0^T \langle \eta\phi, u_{jt}\rangle\, dt = -\int_0^T \langle \eta\phi_t, u_j\rangle\, dt.$$

Usando (3.101) e o fato que $u_j \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $L^\infty(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}))$ segue que

$$\int_0^T \langle \eta\phi(t), w(t)\rangle\, dt = -\int_0^T \langle \eta\phi_t, u\rangle\, dt,$$

isto é,

$$\left\langle \eta, \int_0^T \phi(t) w(t)\, dt \right\rangle = \left\langle \eta, -\int_0^T \phi_t(t) u(t), \ dt \right\rangle \ , \forall\, \eta \in H^{-1}(\mathbb{R}).$$

Portanto, a única possibilidade é que

$$\int_0^T w(t)\phi(t)\,dt = -\int_0^T u(t)\phi_t(t)\,dt\,, \ \ \forall\,\phi \in C_c^\infty(0,T),$$

ou seja, $w = u_t$ no sentido fraco.

No outro caso, $v_j \overset{*}{\rightharpoonup} v$ em $L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}))$ e $v_{jt} \overset{*}{\rightharpoonup} z$ em $L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}))$, isto é, para toda $\varphi \in L^1(0,T;L^2(\mathbb{R}))$

$$\int_0^T \langle v_j, \varphi\rangle\,dt \to \int_0^T \langle v, \varphi\rangle\,dt$$

$$\int_0^T \langle v_{jt}, \varphi\rangle\,dt \to \int_0^T \langle z, \varphi\rangle\,dt.$$

Seja $\eta \in L^2(\mathbb{R})$ qualquer e $\phi \in C_c^\infty(0,T)$ uma função escalar qualquer, temos que $\eta\phi \in L^1(0,T;L^2(\mathbb{R}))$ e

$$\int_0^T \langle v_{jt}, \phi(t)\eta\rangle\,dt = -\int_0^T \langle v_j, \phi_t(t)\eta\rangle\,dt.$$

Por um lado

$$\int_0^T \langle v_{jt}, \phi(t)\eta\rangle\,dt \to \int_0^T \langle z(t), \phi(t)\eta\rangle\,dt$$

e por outro

$$\int_0^T \langle v_j, \phi_t(t)\eta\rangle\,dt \to \int_0^T \langle v, \phi_t(t)\eta\rangle\,dt.$$

Concluímos daí que

$$\int_0^T \langle z(t), \phi(t)\eta\rangle\,dt = -\int_0^T \langle v, \phi_t(t)\eta\rangle\,dt.$$

Ou seja, para toda $\eta \in L^2(\mathbb{R})$ vale

$$\left\langle \int_0^T z(t)\phi(t)\,dt, \eta \right\rangle = \left\langle -\int_0^T v(t)\phi_t(t)\,dt, \eta \right\rangle$$

e portanto

$$\int_0^T z(t)\phi(t)\,dt = -\int_0^T v(t)\phi_t(t)\,dt\,, \ \ \forall\phi \in C_c^\infty(0,T).$$

Conclusão

$$(u_{jt}, v_{jt}) \overset{*}{\rightharpoonup} (u_t, v_t) \ \text{ em } \ L^\infty(0,T;H^{-1} \times L^2(\mathbb{R})).$$

Antes de demonstrarmos a próxima afirmaçao usaremos a seguite

Afirmação 3.12 *Nas condições acima,* $u_j v_j, (|u_j|^2)_x$ *converge fracamente para* uv *e* $(|u|^2)_x$ *em* $L^2((0,T)\times\mathbb{R})$ *respectivamente.*

Observação: No decorrer da prova usaremos a notação $\Omega = (0,T)\times\mathbb{R}$.

De fato, $u_j \to u$ em $L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}))$. Assim, como $L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R})) \subset L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}))$, segue que $u_j \to u$ em $L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}))$, ou seja, $u_j \to u$ em $L^2(\Omega)$. Por outro lado, temos que $v_j \overset{*}{\rightharpoonup} v$ em $L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}))$ e assim $v_j \rightharpoonup v$ em $L^2(0,T;L^(\mathbb{R}))$. Portanto temos que

$$u_j \to u \text{ em } L^2(\Omega).$$

$$v_j \rightharpoonup v \text{ em } L^2(\Omega)$$

e pelo *Lema* 3.1 segue-se que

$$u_j v_j \to uv \text{ em } D'(\Omega).$$

Agora, temos que $(u_j(t), v_j(t)) \in H^2 \times H^1(\mathbb{R})$. Logo $u_j v_j$ é limitada em $L^2(\mathbb{R})$ e portanto $u_j v_j \overset{*}{\rightharpoonup} w$ em $L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}))$, ou seja, $u_j v_j \rightharpoonup w$ em $L^2(0,T;L^2(\mathbb{R})) = L^2(\Omega)$. Temos assim que

$$u_j v_j \to uv \text{ em } D'(\Omega)$$

$$u_j v_j \rightharpoonup w \text{ em } L^2(\Omega)$$

segue das inclusões $D(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset D'(\Omega)$ e da unicidade do limite que $w = uv$. Concluímos assim que $u_j v_j \rightharpoonup uv$ em $L^2(\Omega)$.

No outro caso, queremos mostrar que $(|u_j|^2)_x \rightharpoonup (|u|^2)_x$ em $L^2(\Omega)$. Temos que $u_j \to u$ em $L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}))$ e portanto $u_j \to u$ em $L^2(0,T;L^2(\mathbb{R})) = L^2(\Omega)$. Por outro lado $u_j \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}))$, então

$$\int_0^T \langle \phi, u_j\rangle \, dt \to \int_0^T \langle \phi, u\rangle \ \forall\, \phi \in L^1(0,T;H^{-1}(\mathbb{R})). \tag{3.102}$$

Considere agora $\varphi \in L^1(0,T;L^2(\mathbb{R}))$ e defina a aplicação $T_\varphi : H^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ por $u \mapsto \langle u_x(t), \varphi(t)\rangle_{L^2(\mathbb{R})}$. Assim $T_\varphi \in (H^1(\mathbb{R}))^* = H^{-1}(\mathbb{R})$ e (3.102) vale, em particular para T_φ, isto é,

$$\int_0^T \langle T_\varphi, u_j\rangle \, dt \to \int_0^T \langle T_\varphi, u\rangle \, dt,$$

ou seja,

$$\int_0^T \langle u_{jx}, \varphi\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \, dt \to \int_0^T \langle u_x, \varphi\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \ \forall\, \varphi \in L^1(0,T;L^2(\mathbb{R})),$$

isto é, $u_{jx} \overset{*}{\rightharpoonup} u_x$ em $L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}))$ e portanto $u_{jx} \to u_x$ em $L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}))$. Portanto ficamos com
$$u_j \to u \text{ em } L^2(\Omega)$$
e
$$\bar{u}_{jx} \rightharpoonup \bar{u}_x \text{ em } L^2(\Omega).$$
Então pelo *Lema* 3.1,
$$u_j\bar{u}_{jx} \to u\bar{u}_x \text{ em } D'(\Omega).$$
Usando o mesmo raciocínio do caso anterior e observando que $u_j\bar{u}_{jx}$ é limitada em $L^2(\mathbb{R})$ obtemos
$$u_j\bar{u}_{jx} \to u\bar{u}_x \text{ em } D'(\Omega)$$
$$u_j\bar{u}_{jx} \rightharpoonup w \text{ em } L^2(\Omega).$$
Concluímos daí que $w = u\bar{u}_x$. Agora observe que como $(|u_j|^2)_x = 2Re(u_j\bar{u}_{jx})$ segue que $(|u_j|^2)_x \rightharpoonup (|u|^2)_x$ em $L^2(\Omega)$.

Afirmação 3.13 *Temos que* $u_jv_j \overset{*}{\rightharpoonup} uv$ *em* $L^\infty(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}))$ *e* $(|u_j|^2)_x \overset{*}{\rightharpoonup} (|u|^2)_x$ *em* $L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}))$.

De fato, pela afirmação anterior, foi visto que $(|u_j|^2)_x \rightharpoonup (|u|^2)_x$ em $L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}))$ e que $(|u|^2)_x$ é limitada em $L^2(\mathbb{R})$ e portanto $(|u_j|^2)_x \overset{*}{\rightharpoonup} w$ em $L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}))$. Assim obtemos que $(|u_j|^2)_x \rightharpoonup w$ em $L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}))$ e segue da unicidade do limite fraco que $w = (|u|^2)_x$, isto é, $(|u_j|^2)_x \overset{*}{\rightharpoonup} (|u|^2)_x$ em $L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{R}))$.

No outro caso, $u_jv_j \rightharpoonup uv$ em $L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}))$ e a sequência u_jv_j é limitada em $H^{-1}(\mathbb{R})$ e portanto $u_jv_j \overset{*}{\rightharpoonup} z$ em $L^\infty(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}))$, ou seja, $u_jv_j \rightharpoonup z$ em $L^2(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}))$. Por outro lado, como $u_jv_j \rightharpoonup uv$ em $L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}))$ temos que para toda $\varphi \in L^1(0,T;H^1(\mathbb{R}))$
$$\int_0^T \langle \varphi, u_j(t)v_j(t)\rangle\, dt \to \int_0^T \langle \varphi, u(t)v(t)\rangle\, dt\,, \text{ quando } j \to \infty. \tag{3.103}$$
De maneira análoga como foi feito nas afirmações anteriores, tomando $\phi \in L^1(0,T;H^1(\mathbb{R}))$ podemos construir um funcional linear limitado
$$\begin{array}{cccc} T_{\phi(t)} & L^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u(t) & \longmapsto & (\phi(t),u(t))_{H^{-1}(\mathbb{R})}. \end{array}$$
Isto é,
$$\int_0^T \langle T_\phi, u_jv_j\rangle\, dt \to \int_0^T \langle T_\phi, uv\rangle\, dt$$

ou seja,

$$\int_0^T (\phi(t), u_j(t)v_j(t))_{H^{-1}}\, dt \to \int_0^T (\phi, uv)_{H^{-1}}\,, \ \ \forall\, \phi \in L^1(0,T;H^1(\mathbb{R})).$$

Isto nos diz portanto que $u_jv_j \rightharpoonup uv$ em $L^2(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}))$. Concluímos assim que

$$\begin{aligned} u_jv_j &\rightharpoonup uv\,, \ \text{ em } L^\infty(0,T;H^{-1}(\mathbb{R})) \\ u_jv_j &\rightharpoonup z\,,\,, \ \text{ em } L^\infty(0,T;H^{-1}(\mathbb{R})). \end{aligned}$$

Segue daí que $z = uv$. Para encerrar, como $u_j \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $L^\infty(0,T;H^1(\mathbb{R}))$ concluímos que $u_{jx} \overset{*}{\rightharpoonup} u_x$ em $L^\infty(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}))$. Passando o limite em (3.97) concluímos que (u,v) é uma solução (local) de (4)-(6) com dados iniciais (u_0,v_0). Pelo *Teorema anterior* a solução é única. Pelo *Lema* 2.2 a solução é globalmente definida no tempo.

Para provar a continuidade do sistema dinâmico, seja $t \geq 0$ e considere

$$\begin{array}{rccc} S(t)\ : & X_1 & \longrightarrow & X_1 \\ & (u_0,v_0) & \longmapsto & (u(t),v(t)) \end{array}$$

o sistema dinâmico definido por (4)-(6). Para mostrar a continuidade de $S(t)$ considere uma sequência $(u_{0j},v_{0j}) \in X_1$ com $u_{0j} \to u_0$ em $H^1(\mathbb{R})$ e $v_{0j} \to v_0$ em $L^2(\mathbb{R})$ quando $j \to \infty$, e mostraremos que $S(t)(u_{0j},v_{0j}) \to S(t)(u_0,v_0)$ em $H^1 \times L^2(\mathbb{R})$. Tome portanto a sequência $(u_{0j},v_{0j}) \in X_1$ tal que

$$\lim_{j\to\infty} (\|u_{0j} - u_0\|_{H^1} + \|v_{0j} - v_0\|) = 0.$$

Do *Teorema anterior*, existe $T > 0$ tal que

$$\|u_j - u\|_{X_T^1} + \|v_j - v\|_{L^2_{xT}} \leq C\,(\|u_{0j} - u_0\|_{H^1} + \|v_{0j} - v_0\|)\,.$$

Portanto, temos

$$\lim_{j\to\infty}\left(\|u_j - u\|_{X_T^1} + \|v_j - v_0\|_{L^2_{xT}}\right) = 0,$$

isto é, quando $j \to \infty$, $\|u_j - u\|_{L_T^\infty(L_x^2)} \to 0$, $\|u_{jx} - u_x\|_{L_x^\infty(L_T^2)} \to 0$ e $\|v_j - v\|_{L^2_{xT}} \to 0$. Além disso (2.9),(2.10) e (2.11) continuam válidos para $\xi(t) = (u(t),v(t))$ e $\xi_j(t) = (u_j(t),v_j(t))$. Isto é,

$$J(\xi(t)) = J(\xi(0))e^{-2\alpha t} + \int_0^t e^{-2\alpha(t-s)}K(\xi(s))\,ds$$

e

$$J(\xi_j(t)) = J_j(\xi(0))e^{-2\alpha t} + \int_0^t e^{-2\alpha(t-s)}K_j(\xi(s))\,ds.$$

Afirmação 3.14

$$\lim_{j\to\infty} J(\xi_j(0)) = J(\xi(0)) \quad , \quad \lim_{j\to\infty} K(\xi_j(s)) = K(\xi(s)) \quad em \quad L^2(0,T).$$

De fato, observando que (u_j, v_j), (u_{0j}, v_{0j}) são limitadas em $H^1 \times L^2(\mathbb{R})$ e usando a notação $\xi_j(0) = (u_{0j}, v_{0j})$ teremos

1. $u_{0j} \to u_0$ quando $t \to \infty$ em $L^2(\mathbb{R})$, logo
$$\lim_{j\to\infty} \|u_{0j}\|^2 = \|u_{0x}\|^2.$$
Analogamente, como $v_{0j} \to v_0$ em $L^2(\mathbb{R})$ segue que
$$\lim_{j\to\infty} \|v_{0j}\|^2 = \|v_0\|.$$
Com isso,
$$\lim_{j\to\infty} \left(\|u_{0j}\|^2 + \|v_{0j}\|^2\right) = \|u_{0x}\|^2 + \|v_0\|^2.$$

2.
$$\begin{aligned}
\left|\int |u_{0j}|^2 v_{0j}\,dx - \int |u_0|^2 v_0\,dx\right| &\leq \left|\int (v_{0j} - v_0)|u_{0j}|^2\,dx\right| \\
&+ \left|\int v_0(|u_{0j}|^2 - |u_0|^2)\,dx\right| \\
&\leq \|v_{0j} - v_0\|\|u_{0j}\|_4^2 \\
&+ \|v_0\|\,\|u_{0j} - u_0\|_3(\|u_{0j}\|_6 + \|u_0\|_6) \\
&\leq \|v_{0j} - v_0\|\,\|u_{0j}\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 \\
&+ \|v_0\|\|u_{0j} - u_0\|_3(\|u_{0j}\|_{H^1} + \|u_0\|_{H^1}) \\
&\leq C\|v_{0j} - v_0\| + C\|u_{0j} - u_0\|_3 \\
&\leq C\|v_{0j} - v_0\| + C\|u_{0j} - u_0\|^{1/2}\|u_{0j} - u_0\|_{H^1}^{1/2} \\
&\leq C\left(\|v_{0j} - v_0\| + \|u_{0j} - u_0\|_{H^1}\right) \to 0, (3.104)
\end{aligned}$$
quando $j \to \infty$. Portanto
$$\lim_{j\to\infty} \int |u_{0j}|^2 v_{0j}\,dx = \int |u_0|^2 v_0\,dx.$$

3. É fácil ver que
$$\left|Re\int f\bar{u}_{0j}\,dx - Re\int f\bar{u}_0\,dx\right| \leq \|f\|\|u_{0j} - u_0\|_{H^1} \to 0.$$
Logo
$$\lim_{j\to\infty}\left(2Re\int f\bar{u}_{0j}\,dx\right) = 2Re\int f\bar{u}_0\,dx.$$

4.

$$\left|Im\int u_{0j}\bar{u}_{0jx}\,dx - Im\int u_0\bar{u}_{0x}\,dx\right| \leq \|u_{0jx}\|_{H^1}\|u_{0j}-u_0\|_{H^1} + \|u_0\|_{H^1}\|u_{0j}-u_0\|_{H^1} \to 0.$$

Isto é

$$\lim_{j\to\infty} 2\gamma Im\int u_{0j}\bar{u}_{0jx}\,dx = 2\gamma Im\int u_0\bar{u}_{0x}\,dx.$$

Juntando *(1)-(4)* obtemos

$$\lim_{j\to\infty} J(\xi_j(0)) = J(\xi(0)).$$

Para a outra afirmação observe que $\|(u_j(t),v_j(t))\|_{X_1} \leq C$ e $\|(u(t),v(t))\|_{X_1} \leq C$. Logo,

1.

$$\begin{aligned}\left\|\int g(v_j-v)\,dx\right\|_{L^2(0,T)} &= \left(\int_0^T\left|\int g(v_j-v)\,dx\right|^2 ds\right)\\ &\leq \left(\int_0^T \|g\|^2\|v_j-v\|^2\,ds\right)\\ &\leq \|g\|\left(\int\int_0^T\|v_j-v\|^2\,ds\,dx\right)\\ &= \|g\|\,\|v_j-v\|_{L^2_{xT}} \to 0 \text{ , quando } j\to\infty\end{aligned}$$

2. De modo análogo ao item anterior, mostra-se que

$$\left\|\int f(\bar{u}_{jx}-\bar{u}_x)\,dx\right\|_{L^2(0,T)} \leq \|f\|\left(\int\|u_{jx}-u_x\|^2_{L^2(0,T)}\,dx\right)^{1/2} \to 0,$$

quando $j\to\infty$.

3. Também de maneira análoga ao item anterior, temos

$$\begin{aligned}\left\|\int f(\bar{u}_j-\bar{u})\,dx\right\|_{L^2(0,T)} &\leq \|f\|\left(\int_0^T\|u_j-u\|^2\,ds\right)^{1/2}\\ &\leq T^{1/2}\|f\|\,\|u_j-u\|_{L^\infty_T(L^2_x)} \to 0,\end{aligned}$$

quando $j\to\infty$.

4. Observe que

$$\begin{aligned}
\left|\int g(|u_j|^2 - |u|^2)\, dx\right| &\leq \|g\| \|u_j - u\|_3(\|u_j\|_6 + \|u\|_6) \\
&\leq \|g\|\, \|u_j - u\|_3(\|u_j\|_{H^1} + \|u\|_{H^1}) \\
&\leq C\|u_j - u\|_3 \leq C\|u_j - u\|^{1/2}\|u_j - u\|_{H^1}^{1/2} \\
&\leq C\|u_j - u\|^{1/2}.
\end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned}
\left\|\int g|u_j|^2\, dx - \int g|u|^2\, dx\right\|_{L^2(0,T)} &\leq \left(\int_0^T C\|u_j - u\|\, dt\right)^{1/2} \\
&\leq CT^{1/2}\|u_j - u\|_{L^\infty_T(L^2_x)} \to 0
\end{aligned}$$

quando $j \to \infty$.

5. De modo inteiramente análogo a (3.104) temos que

$$\left|\int |u_j|^2 v_j\, dx - \int |u|^2 v\, dx\right|^2 \leq C(\|u_j - u\|^{1/2} + \|v_j - v\|)^2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\left\|\int |u_j|^2 v_j\, dx - \int |u|^2 v\, dx\right\|_{L^2(0,T)} &\leq \left(\int_0^T C(\|u_j - u\| + \|v_j - v\|^2)\, dt\right)^{1/2} \\
\leq\ & C\left[\left(\int_0^T \|u_j - u\|\, dt\right)^{1/2} + \left(\int_0^T \|v_j - v\|^2\, dt\right)^{1/2}\right] \\
\leq\ & CT^{1/2}\|u_j - u\|_{L^\infty_T(L^2_x)} + C\|v_j - v\|_{L^2_{xT}} \to 0,
\end{aligned}$$

quando $j \to \infty$.

6. Por último, como $v_j \to v$ em $L^2_{xT} = L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}))$ temosvque

$$\lim_{j\to\infty} \|v_j\|_{L^2_{xT}} = \|v\|_{L^2_{xT}}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty} \|\, \|v_j\|\, \|_{L^2(0,T)} &= \lim_{j\to\infty} \left(\int_0^T \|v_j\|^2\, dt\right)^{1/2} \\
&= \lim_{j\to\infty} \|v_j\|_{L^2_{xT}} = \|v\|_{L^2_{xT}} = \|\, \|v\|\, \|_{L^2(0,T)}.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\lim_{j\to\infty} \|v_j\|^2 = \|v\| \text{ em } L^2(0,T).$$

Com isso, pelo *Teorema da Convergência Dominada*

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty} \inf\, J(\xi_j(t)) &= \lim_{j\to\infty} \sup\, J(\xi_j(t)) = J(\xi(0))e^{-2\alpha t} + \int_0^t e^{-2\alpha(t-s)} K(\xi(s))\, ds \\
&= J(\xi(t)).
\end{aligned}$$

Note que por (2.10)

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty} \sup J(\xi_j(t)) &= \lim_{j\to\infty} \sup\,(\|u_{jx}\|^2 + \|v_j\|^2) \\
&+ \left(\int |u|^2 v\, dx + 2Re \int f\bar{u}\, dx - 2\gamma Im \int u\bar{u}_x\, dx \right)
\end{aligned}$$

isto é,

$$\lim_{j\to\infty} \sup(\|u_{jx}\|^2 + \|v_j\|^2) = \|u_x\|^2 + \|v\|^2.$$

Segue daí que $u_{jx} \to u_x$ e $v_j \to v$ em $L^2(\mathbb{R})$. Com esse resultado e o fato que $u_j \to u$ em L^2 concluímos que

$$(u_j, v_j) \to (u, v) \quad \text{em} \quad X_1 \qquad \blacksquare$$

Capítulo 4

Decomposição de semigrupo

Neste capítulo vamos decompor $S(t)$ em duas partes, uma delas com decaimento exponencial. Seja $(u_0, v_0) \in B$, $B \subset X_1$ limitado, $(u(t), v(t)) = S(t)(u_0, v_0)$. Note que $(u(t), v(t))$ é uniformemente limitado em X_1 com respeito a t e $(u_0, v_0) \in B$. Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} iu_{1t} + u_{1xx} - u_1 v + i\alpha u_1 = 0 & , \quad x \in \mathbb{R}\ , t > 0 \\ v_{1t} + \beta v_1 + 2\gamma Re(\bar{u} u_{1x}) = 0 & , \quad x \in \mathbb{R}\ , t > 0 \\ u_1(x, 0) = u_0(x) & , \quad x \in \mathbb{R} \\ v_1(x, 0) = v_0(x) & , \quad x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{4.1}$$

Para demonstrarmos a próxima afirmação faremos uso do seguinte

Lema 4.1 *Suponha que $v \in L^p(\mathbb{R})$ e seja $X = L^2(\mathbb{R})$. Se $p \geq 2$, então para todo $\epsilon > 0$, existe uma constante $C(\epsilon)$ tal que*

$$\|vw\|_X \leq \epsilon \|u_{xx}\|_X + C(\epsilon) \|w\|_X, \tag{4.2}$$

para todo $w \in H^2(\mathbb{R})$.

Prova: Veja demonstraçao em [1]. ■

Podemos agora enunciar a

Afirmação 4.1 *O problema (4.1) admite solução única para dados iniciais em B.*

De fato, da segunda equação de (4.1) temos que

$$v_1 = v_0 e^{-\beta t} - 2\gamma \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} Re(\bar{u} u_{1x})\, d\tau.$$

Portanto, basta mostrar que o problema

$$iu_{1t} + u_{1xx} - u_1 v + i\alpha u_1 = 0\ ,\ x \in \mathbb{R}, t > 0 \tag{4.3}$$

com dado inicial $u_1(x,0) = u_0(x)$ admite solução única. Note que (4.3) pode ser reescrito na forma

$$\frac{d}{dt}u_1 = (A+B)u_1$$

com $u_1(x,0) = u_0(x)$, onde

$$A := i\partial^2{}_x : H^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$$

e

$$B := M_{-iv} : D(B) \to L^2(\mathbb{R})$$

definida por $M_{-iv}u_1 = -iu_1 v$ e com domínio

$$D(B) := \{w \in L^2(\mathbb{R}) : vw \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

Note primeiro que $D(B) \supset D(A) = H^2(\mathbb{R})$. Afirmo que B é dissipativo. De fato,

$$Re(-ivu,u)_{L^2(\mathbb{R})} \;=\; Rei\int vu\bar{u}\,dx = Rei\int v|u|^2\,dx = 0,$$

para toda $u \in D(B)$. Portanto B é dissipativo. Para encerrar, mostraremos agora que existem constantes $0 \le \gamma < 1$ e $\eta \ge 0$ tal que

$$\|Bw\| \le \gamma\|Aw\| + \eta\|w\|\,,\ \forall\, w \in D(A).$$

De fato,

$$\|Aw\| = \|iw_{xx} - \alpha w\| \ge \|w_{xx}\| - \alpha\|w\|.$$

Aplicando agora (4.2) temos que

$$\|Aw\| + \alpha\|w\| \ge \|w_{xx}\| \ge \frac{1}{\epsilon}\|vw\| - C(\epsilon)\|w\| = \frac{1}{\epsilon}\|Bw\| - C(\epsilon)\|w\|,$$

isto é,

$$\|Bw\| \le \epsilon\|Aw\| + \epsilon(\alpha + C(\epsilon))\|w\|.$$

Basta tomarmos agora $0 < \epsilon < 1$ e o resultado segue. Com isso em mãos, temos que $A+B$ é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contração e portanto o problema (4.3) admite uma solução única e conseqüentemente o problema (4.1).

Considere agora (u_1, v_1) solução de (4.1) e tome

$$(u_2, v_2) = S_2(t)(u_0, v_0) = S(t)(u_0, v_0) - S_1(u_0, v_0).$$

É fácil mostrar que $(u_2(t), v_2(t))$ é solução de

$$\begin{cases} iu_{2t} + u_{2xx} - u_2 v + i\alpha u_2 = f(x) & , \quad x \in \mathbb{R}\ , t > 0 \\ v_{2t} + \beta v_2 + 2\gamma Re(\bar{u} u_{2x}) = g(x) & , \quad x \in \mathbb{R}\ , t > 0 \\ u_1(x,0) = 0 & , \quad x \in \mathbb{R} \\ v_1(x,0) = 0 & , \quad x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad . \tag{4.4}$$

Lema 4.2 *Seja* $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ *e* $(u_0, v_0) \in B$. *Então*

1. $\|u_1(t)\|^2 \leq \|u_0\|^2 e^{-2\alpha t}$;

2. $\|u_{1x}(t)\|^2 \leq Ce^{-\alpha t}$;

3. $\|v_1\|^2 \leq (\|v_0\|^2 + C)e^{-\alpha t}$.

Isto é, $S_1(t)$ *decai exponencialmente e uniformemente em conjuntos limitados de* X_1.

Prova:

1. Multiplicando a primeira equação de (4.1) por $2\bar{u}_1$ tomando a parte imaginária e integrando sobre $\mathbb{R}$ obtemos

$$2Re \int \bar{u}_1 u_{1t}\, dx + 2Im \int \bar{u}_1 u_{xx}\, dx + 2\alpha \int |u_1|^2\, dx = 0,$$

   isto é,

$$\frac{d}{dt}\|u_1\|^2 + 2\alpha\|u_1\|^2 = 0,$$

   onde usamos o fato que $Im \int \bar{u}_1 u_{xx}\, dx = 0$. Portanto segue-se daí que

$$\|u_1\|^2 = \|u_0\|^2 e^{-\alpha t}. \tag{4.5}$$

2. Multiplicando a primeira equação de (4.1) por $-2(\bar{u}_{1t} + \alpha\bar{u}_1)$ tomando a parte real do resultado e integrando sobre $\mathbb{R}$ obtemos

$$\begin{aligned} & 2\alpha Im \int u_{1t}\bar{u}_1\, dx - 2Re \int \bar{u}_{1t} u_{1xx}\, dx - 2\alpha Re \int \bar{u}_1 u_{1xx}\, dx \\ + \quad & 2Re \int u_1 v \bar{u}_{1t} + 2\alpha \int |u_1|^2 v\, dx + 2\alpha Im \int u_1 \bar{u}_{1t}\, dx = 0. \end{aligned} \tag{4.6}$$

   Observe que

(a) Usando integração por partes, temos

$$-2Re\int \bar{u}_{1t}u_{xx}\,dx = 2Re\int \bar{u}_{1xt}u_{1x}\,dx = \frac{d}{dt}\|u_{1x}\|^2.$$

(b)

$$2\alpha Im\int u_{1t}\bar{u}_1\,dx + 2\alpha Im\int u_1\bar{u}_{1x}\,dx = 0.$$

(c) Usando novamente integração por partes

$$-2\alpha Re\int \bar{u}_1 u_{1xx}\,dx = 2\alpha\|u_{1x}\|^2.$$

(d) Como v é uma função de valores reais, temos

$$2Re\int u_1\bar{u}_{1t}v\,dx = \frac{d}{dt}\int(|u_1|^2)v\,dx - \int |u_1|^2 v_t\,dx.$$

Substituindo portanto $(a)-(d)$ em (4.6) segue-se que

$$\frac{d}{dt}\left(\|u_{1x}\|^2 + \int |u_1|^2 v\,dx\right) + 2\alpha\|u_{1x}\|^2 + 2\alpha\int |u_1|^2 v\,dx = \int |u_1|^2 v_t\,dx.$$

Isto é,

$$\frac{d}{dt}\left(\|u_{1x}\|^2 + \int |u_1|^2 v\,dx\right) + \alpha\left(\|u_{1x}\|^2 + \int |u_1|^2 v\,dx\right) + \alpha\|u_{1x}\|^2$$
$$= \int |u_1|^2 v_t\,dx - \alpha\int |u_1|^2 v\,dx.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\left|\int |u_1|^2 v_t\,dx\right| &\le \|v_t\|\left(\int |u_1|^4\,dx\right)^{1/2}\\ &\le C\|v_t\|\|u_1\|^{3/2}\|u_{1x}\|^{1/2}\\ &\le \epsilon(\|u_{1x}\|^{1/2})^4 + C(\epsilon)\|v_t\|^{4/3}\|u_1\|^2\\ &= \epsilon\|u_{1x}\|^2 + C(\epsilon)\|v_t\|^{4/3}\|u_1\|^2.\end{aligned}$$

Como $(u(t),v(t))$ é solução de (4)-(6) com $(u_0,v_0)\in X_1$, portanto temos que $(u(t),v(t))\in H^1(\mathbb{R})\times L^2(\mathbb{R})$. Assim

$$\|v_t\| \le \|g\| + \beta\|v\| + 2|\gamma|\|u_x\|\|u\| \le C.$$

Disso e usando (4.5) temos

$$\left|\int |u_1|^2 v_t\, dx\right| \leq \epsilon \|u_{1x}\|^2 + C(\epsilon) e^{-2\alpha t}.$$

Analogamente,

$$\left|\alpha \int |u_1|^2 v\, dx\right| \leq \epsilon \|u_{1x}\|^2 + C(\epsilon) e^{-2\alpha t}.$$

Substituindo em (4.7) ficamos com

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\|u_{1x}\|^2 + \int |u_1|^2 v\, dx\right) + \alpha\left(\|u_{1x}\|^2 + \int |u_1|^2 v\, dx\right)\\ &+(\alpha - 2\epsilon)\|u_{1x}\|^2 \leq C(\epsilon) e^{-2\alpha t}.\end{aligned}$$

Escolhendo, $\epsilon = \alpha/2$, segue-se que

$$\frac{d}{dt}\left(\|u_{1x}\|^2 + \int |u_1|^2 v\, dx\right) + \alpha\left(\|u_{1x}\|^2 + \int |u_1|^2 v\, dx\right) \leq C e^{-2\alpha t},$$

que pela desigualdade de *Gronwall* produz

$$\|u_{1x}\|^2 + \int |u_1|^2 v\, dx \leq \left(\|u_{0x}\|^2 + \int |u_0|^2 v_0\, dx\right) e^{-\alpha t} + C e^{-\alpha t}.$$

Por outro lado, vimos que

$$\|u_{1x}\|^2 + \int |u_1|^2 v\, dx \geq \|u_{1x}\|^2 - \frac{1}{2}\|u_{1x}\|^2 - C e^{-2\alpha t}.$$

Logo

$$\|u_{1x}\|^2 \leq \left(\|u_{0x}\|^2 + \int |u_0|^2 v_0\, dx + C\right) e^{-\alpha t},$$

isto é,

$$\|u_{1x}\|^2 \leq C e^{-\alpha t}. \tag{4.7}$$

3. Multiplicando agora a segunda equação de (4.1) por $-2v_1$ e integrando sobre $\mathbb{R}$ obtemos

$$\frac{d}{dt}\|v_1\|^2 + 2\beta\|v_1\|^2 = -4\gamma Re \int \bar{u} u_{1x} v_1\, dx.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\left|-4\gamma Re\int \bar{u}u_{1x}v_1\,dx\right| &\le 4|\gamma|\|u\|_\infty\|u_{1x}\|\|v_1\| \\ &\le \beta\|v_1\|^2 + C\|u\|_\infty^2\|u_{1x}\|^2 \\ &\le \beta\|v_1\|^2 + Ce^{-\alpha t},\end{aligned}$$

onde usamos (4.7). Portanto pela desigualdade de *Gronwall* obtemos

$$\|v_1\|^2 \le \|v_0\|^2e^{-\beta t} + Ce^{-\alpha t} \le (\|v_0\| + C)e^{-\alpha t}. \quad \blacksquare$$

Como (u,v) e (u_1,v_1) são uniformemente limitados em X_1 com respeito a $t>0$ e $(u_0,v_0)\in B$, então $(u_2,v_2)=(u,v)-(u_1,v_1)$ também será. Agora mostraremos que (u_2,v_2) é uniformemente limitado em X_2, e que esse é o conteúdo do seguinte

Lema 4.3 *Seja $f\in L^2(\mathbb{R})$, $g\in H^1(\mathbb{R})$. Então existe constante C tal que*

$$\|u_{2xx}\| + \|v_{2x}\| \le C\ ,\ \ \forall\ (u_0,v_0)\in B\,,\ t>0. \tag{4.8}$$

Prova: Derivando a primeira equação de (4.1) com respeito a t e multiplicando o resultado por $2\bar{u}_{2t}$ temos

$$2iu_{2tt}\bar{u}_{2t} + 2\bar{u}_{2t}u_{2xxt} - 2|u_{2t}|^2v - 2u_2\bar{u}_{2t}v_t + 2i\alpha|u_{2t}|^2 = 0.$$

Tomando a parte imaginária e integrando sobre $\mathbb{R}$ obtemos

$$\frac{d}{dt}\|u_{2t}\|^2 + 2\alpha\|u_{2t}\|^2 = 2Im\int u_2\bar{u}_{2t}v_t\,dx,$$

onde usamos o fato que $Im\displaystyle\int \bar{u}_{2t}u_{2xxt}\,dx = 0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}\left|2Im\int u_2\bar{u}_{2t}v_t\,dx\right| &\le 2\|u_2\|_\infty\|u_{2t}\|\|v_t\| \\ &\le \epsilon\|u_{2t}\|^2 + C(\epsilon)\|u_2\|\|u_{2x}\|\|v_t\|^2 \\ &\le \epsilon\|u_{2t}\|^2 + C(\epsilon),\end{aligned}$$

pois (u_2,v_2) é uniformemente limitada em X_1. Escolhendo portanto $\epsilon=\alpha$, temos

$$\frac{d}{dt}\|u_2\|^2 + 2\alpha\|u_{2t}\|^2 \le \alpha\|u_{2t}\|^2 + C.$$

Pela desigualdade de *Gronwall* e observando que $u_{2t}(x,0) = -if(x)$ segue-se que

$$\|u_{2t}\|^2 \leq C. \tag{4.9}$$

Agora, da primeira equação de (4.1), temos

$$\|u_{2xx}\| \leq \|f\| + \|u_{2t}\| + \|u_2\|\|v\| + |\alpha|\|u_2\|.$$

Isto é,

$$\|u_{2xx}\| \leq C. \tag{4.10}$$

Assim,

$$\|u_2\|_{H^2(\mathbb{R})} \leq C. \tag{4.11}$$

Agora, derivando com respeito a x a segunda equação de (4.1), multiplicando o resultado por $2v_{2x}$ e integrando o resultado final, obtemos

$$\frac{d}{dt}\|v_{2x}\|^2 + 2\beta\|v_{2x}\|^2 = -4\gamma Re\int(\bar{u}u_{2x})_x v_{2x}\,dx + 2\int g_x v_{2x}\,dx. \tag{4.12}$$

Por outro lado,

1. $$\begin{aligned} \left|-4\gamma Re\int(\bar{u}u_{2x})_x v_{2x}\,dx\right| &\leq 4|\gamma|\|(\bar{u}u_{2x})_x\|\|v_{2x}\| \\ &\leq 4|\gamma|\|\bar{u}u_{2x}\|_{H^1}\|v_{2x}\| \\ &\leq 4|\gamma|\|u\|_{H^1}\|u_{2x}\|_{H^1}\|v_{2x}\| \\ &\leq 4|\gamma|\|u\|_{H^1}\|u_2\|_{H^2}\|v_{2x}\| \\ &\leq \epsilon\|v_{2x}\|^2 + C(\epsilon)\|u\|_{H^1}^2\|u_2\|_{H^2}^2 \\ &\leq \epsilon\|v_{2x}\|^2 + C(\epsilon), \end{aligned}$$

   onde usamos (4.11).

2. É imediato que

   $$\left|2\int g_x v_{2x}\,dx\right| \leq \epsilon\|v_{2x}\|^2 + C(\epsilon).$$

Portanto, substituindo em (4.12) temos

$$\frac{d}{dt}\|v_{2x}\|^2 + 2(\beta-\epsilon)\|v_{2x}\|^2 \leq C(\epsilon).$$

Escolhendo $\epsilon = \beta/2$ ficamos com

$$\frac{d}{dt}\|v_{2x}\|^2 + \beta\|v_{2x}\|^2 \leq C,$$

e pela desigualdade de *Gronwall* obtemos

$$\|v_{2x}\| \leq C. \tag{4.13}$$

Segue portanto de (4.10) e de (4.13) que

$$\|u_{2xx}\| + \|v_{2x}\| \leq C \ , \ \ \forall\ (u_0, v_0) \in B\ , \ t > 0. \quad \blacksquare$$

Capítulo 5

Existência de Atrator Global

Nesta seção estabeleceremos a existência do atrator global para o sistema dinâmico $S(t)$ no espaço $H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$. Para tanto será necessário estabelecer a compacidade assintótica e aplicar o *Lema* 2.2 para a existência de um conjunto limitado absorvente para o semigrupo contínuo $S(t)$ e depois aplicar a seguinte

Proposição 5.1 *Assuma que X é um espaço métrico e $\{S(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo de operadores contínuos em X. Se $\{S(t) : t \geq 0\}$ possui um conjunto limitado absorvente $\mathscr{B}$ e é assintóticamente compacto, então $\{S(t) : t \geq 0\}$ possui um atrator global $\mathscr{A} = \omega(\mathscr{B})$ o qual é compacto, invariante e atrai cada conjunto limitado em X.*

Vimos que se B for um conjunto limitado em X_1, então $\{\xi(t) = S(t)\xi_0\,,\ \xi_0 \in B\}$ é uniformemente limitado em X_1 e $\{\xi_2(t) = S_2(t)\xi_0\,,\ \xi_0 \in B\}$ é uniformemente limitado em X_2.

Considere agora uma função $\chi(.) \in C^\infty(\mathbb{R})$ com $0 \leq \chi(x) \leq 1$, $\chi(x) = 0$ se $|x| \leq 1$ e $\chi(x) = 1$ para $|x| \geq 2$. Denote por $\chi_r = \chi\left(\dfrac{x}{r}\right)$, com $r \geq 1$ grande. Portanto

$$\|\partial_x^k \chi_r\|_{L^\infty} \leq C_k r^{-k}. \tag{5.1}$$

O próximo *Lema* estabelece que para r suficientemente grande as normas de u_2 em $H^1(\mathbb{R})$ e v_2 em $L^2(\mathbb{R})$ são pequenas fora da bola de raio r uniformemente no tempo.

Observação 11 *No Lema a seguir usaremos o fato que se uma função $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, então para r suficientemente grande $\|\phi\|_{L^2(|x|>r)} \leq \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$.*

De fato, se $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ então

$$\lim_{r\to\infty} \int_{|x|\leq r} |\phi|^2\, dx \to \int_{\mathbb{R}} |\phi|^2\, dx,$$

isto é, $\forall\, \epsilon > 0$ *existe* $r_0 > 0$ *tal que* $\forall\, r \geq r_0$ *tem-se*

$$\left| \int_{\mathbb{R}} |\phi|^2\, dx - \int_{|x|\leq r} |\phi|^2\, dx \right| \leq \epsilon,$$

em outras palavras,

$$\left| \int_{|x|>r} |\phi|^2\, dx \right| \leq \epsilon,$$

ou seja

$$\|\phi\|_{L^2(|x|>r)} \leq \epsilon \;\; \forall \epsilon > 0.$$

Para estabelecer a existência de um atrator global, a chave é estabelecer a compacidade assintotica de $S(t)$. Para domínios ilimitados, existe uma dificuldade em estabelecer tal resultado pois em domínios ilimitados não há imersões compactas entre espaços de Sobolev. É baseado neste fato que surge a idéia do

Lema 5.1 *Seja* $f \in L^2(\mathbb{R})$*,* $g \in H^1(\mathbb{R})$*,* $\xi_2(t) = S_2(t)\xi_0$ *solução de (4.4), então*

$$\|\chi_r u_2\|^2_{H^1(\mathbb{R})} + \|\chi_r v_2\|^2 \leq C(\|\chi_r f\|^2 + \|\chi_r g\|^2 + r^{-1}). \tag{5.2}$$

Prova: Multiplicando a primeira equação de (4.4) por $-2\chi_r^2 \bar{u}_2$ e tomando a parte real, ficamos com

$$2Re(\chi_r^2 \bar{u}_2 u_{2t}) + 2\alpha|\chi_r u_2|^2 = 2Im(\chi_r^2 \bar{u}_2 f),$$

onde usamos o fato que $Im(2\chi_r^2 |u_2|^2 v) = 0$. Integrando sobre $\mathbb{R}$ temos

$$\frac{d}{dt}\|\chi_r u_2\|^2 + 2\alpha\|\chi_r u_2\|^2 = 2Im \int \chi_r^2 \bar{u}_2 f\, dx.$$

Por outro lado, é fácil ver que

$$\left| 2Im \int \chi_r^2 \bar{u}_2 f\, dx \right| \leq \alpha\|\chi_r u_2\|^2 + C\|\chi_r f\|^2.$$

Logo

$$\frac{d}{dt}\|\chi_r u_2\|^2 + \alpha\|\chi_r u_2\|^2 \leq C\|\chi_r f\|^2$$

que pela *Desigualdade de Gronwall* e o fato que $u_2(x, 0) = 0$, produz

$$\|\chi_r u_2\|^2 \leq C\|\chi_r f\|^2. \tag{5.3}$$

Multiplicando agora a primeira equação de (4.4) por $-2\chi_r^2(\bar{u}_{2t}+\alpha\bar{u}_2)$ e tomando a parte real, ficamos com

$$\begin{aligned}&-2Re(\chi_r^2 u_{2xx}\bar{u}_{2t}) - 2\alpha Re(\chi_r^2 u_{2xx}\bar{u}_2) + 2Re(\chi_r^2 u_2\bar{u}_{2t}v)\\&+2\alpha\chi_r^2|u_2|^2 v = -2Re(\chi_r^2\bar{u}_{2t}f) - 2\alpha Re(\chi_r^2\bar{u}_2 f),\end{aligned}$$

onde usamos o fato que

$$2\alpha Im(\chi_r^2 u_{2t}\bar{u}_2) + 2\alpha Im(\chi_r^2 u_2\bar{u}_{2t}) = 0.$$

Logo, integrando sobre $\mathbb{R}$ obtemos:

$$\begin{aligned}&-2Re\int\chi_r^2 u_{2xx}\bar{u}_{2t}\,dx - 2\alpha Re\int\chi_r^2 u_{2xx}\bar{u}_2\,dx + 2Re\int\chi_r^2 u_2\bar{u}_{2t}v\,dx\\&+2\alpha\int\chi_r^2|u_2|^2 v = -2Re\int\chi_r^2\bar{u}_{2t}f\,dx - 2\alpha Re\int\chi_r^2\bar{u}_2 f\,dx. \qquad (5.4)\end{aligned}$$

1.

$$\begin{aligned}-2Re\int\chi_r^2 u_{2xx}\bar{u}_{2t}\,dx &= 2Re\int u_{2x}(\chi_r^2\bar{u}_{2t})_x\,dx\\&= 4Re\int\chi_r\chi_r^{'} u_{2x}\bar{u}_{2t}\,dx + 2Re\int\chi_r^2 u_{2x}\bar{u}_{2xt}\,dx\\&= \frac{d}{dt}\|\chi_r^2 u_{2x}\|^2 + 4Re\int\chi_r^2\chi_r^{'} u_{2x}\bar{u}_{2t}\,dx.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}-2\alpha Re\int\chi_r^2\bar{u}_2 u_{2xx}\,dx &= 2\alpha Re\int(\chi_r^2\bar{u}_2)_x u_{2x}\,dx\\&= 4\alpha Re\int\chi_r\chi_r^{'}\bar{u}_2 u_{2x}\,dx + 2\alpha Re\int\chi_r^2|u_{2x}|^2\,dx\\&= 2\alpha\|\chi_r u_{2x}\|^2 + 4\alpha Re\int\chi_r\chi_r^{'}\bar{u}_2 u_{2x}\,dx.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int|\chi_r u_2|^2 v\,dx &= \int\chi_r^2((u_2\bar{u}_2)_t v + |u_2|^2 v_t)\,dx\\&= \int\chi_r^2(u_{2t}\bar{u}_2 v + u_2\bar{u}_{2t}v + |u_2|^2 v_t)\,dx\\&= 2Re\int\chi_r^2 u_2\bar{u}_{2t}v\,dx + \int|\chi_r^2 u_2|^2 v_t\,dx,\end{aligned}$$

isto é,

$$2Re\int\chi_r^2 u_2\bar{u}_{2t}v\,dx = \frac{d}{dt}\int|\chi_r^2 u_2|^2 v\,dx - \int|\chi_r^2 u_2|^2 v_t\,dx.$$

4. Por último

$$-2Re\int \chi_r^2 f\bar{u}_{2t}\,dx = \frac{d}{dt}\left(-2Re\int \chi_r^2 f\bar{u}_2\,dx\right).$$

Substituindo $(1)-(4)$ em (5.4) ficamos com

$$\frac{d}{dt}\left(\|\chi_r^2 u_{2x}\|^2 + \int |\chi_r^2 u_2|^2 v\,dx + 2Re\int \chi_r^2 f\bar{u}_2\,dx\right)$$
$$+2\alpha\left(\|\chi_r^2 u_{2x}\|^2 + \int |\chi_r^2 u_2|^2 v\,dx + 2Re\int \chi_r^2 f\bar{u}_2\,dx\right) = 2\alpha Re\int \chi_r^2\bar{u}_2 f\,dx$$
$$+\int |\chi_r^2 u_2|^2 v_t\,dx - 4Re\int \chi_r\chi_r^{'} u_{2x}\bar{u}_{2t}\,dx - 4\alpha Re\int \chi_r\chi_r^{'}\bar{u}_2 u_{2x}\,dx.$$

Denotando por

$$E(t) = \|\chi_r^2 u_{2x}\|^2 + \int |\chi_r^2 u_2|^2 v\,dx + 2Re\int \chi_r^2 f\bar{u}_2\,dx,$$

temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(t) \;&+\; 2\alpha E(t) = 2\alpha Re\int \chi_r^2\bar{u}_2 f\,dx + \int |\chi_r^2 u_2|^2 v_t\,dx\\ &-\; 4Re\int \chi_r\chi_r^{'} u_{2x}\bar{u}_{2t}\,dx - 4\alpha Re\int \chi_r\chi_r^{'}\bar{u}_2 u_{2x}\,dx. \qquad (5.5)\end{aligned}$$

Por outro lado

1.

$$\begin{aligned}\left|4Re\int \chi_r\chi_r'\bar{u}_{2t}u_{2x}\,dx\right| &\leq 4\|\chi_r\chi_r'\|_\infty\|u_{2t}\|\|u_{2x}\|\\ &\leq 4\|\chi_r\|_\infty\|\chi_r'\|_\infty\|u_{2t}\|\|u_{2x}\| \leq Cr^{-1}\end{aligned}$$

2. Analogamente,

$$\left|4\alpha Re\int \chi_r\chi_r'\bar{u}_2 u_{2x}\,dx\right| \leq Cr^{-1}.$$

3.

$$\begin{aligned}
\left|\int |\chi_r u_2|^2 v_t\,dx\right| &\leq \|v_t\|\|\chi_r u_2\|_4^2\\
&\leq \|v_t\|\|\chi_r u_2\|_\infty\|\chi_r u_2\|\\
&\leq \sqrt{2}\|v_t\|\|\chi_r u_2\|^{3/2}\|(\chi_r u_2)_x\|^{1/2}\\
&\leq C\|\chi_r u_2\|^{3/2}\left(\|\chi_r' u_2\| + \|\chi_r u_{2x}\|\right)^{1/2}\\
&\leq C\|\chi_r u_2\|^{3/2}\left(r^{-1} + \|\chi_r u_{2x}\|\right)^{1/2}\\
&\leq C\|\chi_r u_2\|^{3/2}\left(r^{-1/2} + \|\chi_r u_{2x}\|^{1/2}\right)\\
&= C\|\chi_r u_2\|^{3/2} r^{-1/2} + C\|\chi_r u_2\|^{3/2}\|\chi_r u_{2x}\|^{1/2}\\
&\leq \frac{(Cr^{-1/2})^4}{4} + \frac{(\|\chi_r u_2\|^{3/2})^{4/3}}{3}\\
&+ \epsilon_1(\|\chi_r u_{2x}\|^{1/2})^4 + C(\epsilon_1)(\|\chi_r u_2\|^{3/2})^{4/3}\\
&= \epsilon_1\|\chi_r u_{2x}\|^2 + Cr^{-1} + C(\epsilon_1)\|\chi_r u_2\|^2,
\end{aligned}$$

onde usamos o fato que $r^{-2} \leq r^{-1}$ para $r \geq 1$.

4. Analogamente,

$$\left|\alpha\int |\chi_r u_2|^2 v_t\,dx\right| \leq \epsilon_1\|\chi_r u_{2x}\|^2 + Cr^{-1} + C(\epsilon_1)\|\chi_r u_2\|^2. \tag{5.6}$$

5. Por último

$$\left|2Re\int \chi_r^2 f\bar{u}_2\,dx\right| \leq 2\|\chi_r f\|\,\|\chi_r u_2\| \leq C\|\chi_r f\|^2.$$

Substituindo estas desigualdade em (5.5) e escolhendo a priori $\epsilon_1 = \alpha$ segue-se que

$$\frac{d}{dt}E(t) + \alpha E(t) \leq C\|\chi_r f\|^2 + Cr^{-1}.$$

Pela *Desigualdade de Gronwall* e usando o fato que $E(0) = 0$ temos

$$E(t) \leq C\|\chi_r f\|^2 + Cr^{-1}. \tag{5.7}$$

Agora, decorre de (5.6) e de

$$\left|2Re\int \chi_r^2 f\bar{u}_2\,dx\right| \leq C\|\chi_r f\|^2$$

que

$$E(t) \geq (1-\epsilon_1)\|\chi_r u_{2x}\|^2 - Cr^{-1} - C(\epsilon_1)\|\chi_r f\|^2.$$

Escolhendo então $\epsilon_1 = 1/2$ que temos

$$E(t) \geq \frac{\|\chi_r u_{2x}\|^2}{2} - Cr^{-1} - C\|\chi_r f\|^2.$$

Substituindo esta última expressão em (5.7) obtemos

$$\|\chi_r u_{2x}\|^2 \leq C(r^{-1} + \|\chi_r f\|^2). \tag{5.8}$$

Multiplicando agora a segunda equação de (4.4) por $2\chi_r^2 v_2$ e integrando o resultado sobre $\mathbb{R}$ ficamos com

$$\frac{d}{dt}\|\chi_r v_2\|^2 + 2\beta\|\chi_r v_2\|^2 = 2\int \chi_r^2 v_2 g\,dx - 4\gamma Re\int \chi_r^2 v_2(\bar{u}u_{2x})\,dx. \tag{5.9}$$

Por outro lado, é fácil ver que

1.
$$\left|2\int \chi_r^2 v_2 g\,dx\right| \leq \epsilon_1\|\chi_r v_2\|^2 + C(\epsilon_1)\|\chi_r g\|,$$

2.
$$\left|4\gamma Re\int \chi_r^2 v_2(\bar{u}u_{2x})\,dx\right| \leq \epsilon_1\|\chi_r v_2\|^2 + C(\epsilon_1)\|u\|_\infty^2\|\chi_r u_{2x}\|^2.$$

Escolhendo $\epsilon_1 = \dfrac{\beta}{2}$ e substituindo em (5.9) temos

$$\frac{d}{dt}\|\chi_r v_2\|^2 + \beta\|\chi_r v_2\|^2 \leq C\|\chi_r f\|^2 + C\|\chi_r g\|^2 + Cr^{-1}$$

e pela *Desigualdade de Gronwall*

$$\|\chi_r v_2\|^2 \leq C\|\chi_r u_{2x}\|^2 + C\|\chi_r g\|^2 \leq C(\|\chi_r f\|^2 + \|\chi_r g\|^2 + r^{-1}),$$

isto é,

$$\|\chi_r v_2\|^2 \leq C(\|\chi_r f\|^2 + \|\chi_r g\|^2 + r^{-1}). \tag{5.10}$$

Colecionando agora (5.3),(5.8) e (5.10) temos o resultado. ■

Teorema 5.1 *Suponha que $f \in L^2(\mathbb{R}), g \in H^1(\mathbb{R})$. Então $S(t)$ é assintóticamente compacto em X_1. Isto é, se $\xi_{0j} = (u_{0j}, v_{0j})$ for uma seqüência limitada em X_1 com $t_j \to \infty$, então $\{S(t_j)\xi_{0j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ é relativamente compacta em X_1.*

Prova: Seja $\xi_{0j} = (u_{0j}, v_{0j}) \in X_1$ limitada e $t_j \to \infty$ quando $j \to \infty$. Podemos supor sem perda de generalidade que ξ_{0j} converge fraco para alguma ξ_0 em X_1. É suficiente mostrar que existe $\xi \in X_1$ tal que

$$S(t_j)\xi_{0j} \to \xi \text{ forte em } X_1.$$

(Extraindo uma subseqüência se necessário).

Pelo *Lema 4.2*, temos que

$$\begin{aligned}
\|S_1(t_j)\|_{H^1\times L^2(\mathbb{R})} &= \|u_{1j}(t_j)\|_{H^1(\mathbb{R})} + \|v_{1j}(t_j)\|_{L^2(\mathbb{R})}\\
&= \left(\|u_{1j}(t_j)\|^2 + \|u_{1jx}(t_j)\|^2\right)^{1/2} + \|v_{1j}(t_j)\|_{L^2(\mathbb{R})}\\
&= \left(\|u_{0j}\|^2 e^{-2\alpha t_j} + Ce^{-\alpha t_j}\right)^{1/2} + (\|u_{0j}\| + C)e^{-\frac{\alpha}{2}t_j}\\
&\le \|u_{0j}\|e^{-\alpha t_j} + Ce^{-\frac{\alpha}{2}t_j} + (\|u_{0j}\| + C)e^{-\frac{\alpha}{2}t_j}\\
&\le \|u_{0j}\|e^{-\alpha t_j} + (C + \|u_{0j}\|)e^{-\frac{\alpha}{2}t_j} \to 0,
\end{aligned}$$

quando $j \to \infty$. Logo, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $J_1 > 0$ tal que

$$\|S_1(t_j)\xi_{0j}\|_{H^1\times L^2(\mathbb{R})} < \frac{\epsilon}{4}\ , \forall j \ge J_1. \tag{5.11}$$

Segue também do *Lema* 5.1 (e da *Observação* 11) que existe $r_0 > 0$ tal que

$$\|S_2(t_j)\xi_{0j}\|_{H^1(|x|>r)\times L^2(|x|>r)} \le \frac{\epsilon}{4}, \quad \forall r \ge r_0 \text{ e } j \ge 1. \tag{5.12}$$

Pelo *Lema* 4.3, temos que $S_2(t_j)\xi_{0j}$ é limitada em $H^2 \times H^1(\mathbb{R})$ e portanto existe subseqüência (o qual denotaremos por $S_2(t_j)\xi_{0j}$) e $\xi \in H^2 \times H^1(\mathbb{R})$ tal que

$$S_2(t_j)\xi_{0j} \rightharpoonup \xi \text{ em } H^2 \times H^1(\mathbb{R}). \tag{5.13}$$

Usando novamente o *Lema* 4.3, $S_2(t_j)\xi_{0j}$ é limitada também em $H^1 \times L^2(\mathbb{R})$, logo existe subseqüência (o qual denotaremos também por $S_2(t_j)\xi_{0j}$) tal que

$$S_2(t_j)\xi_{0j} \rightharpoonup \theta \text{ em } H^1 \times L^2(\mathbb{R}). \tag{5.14}$$

Afirmação 5.1 *Nas condições acima $\theta = \xi$.*

De fato, para facilitar a notação denotemos por $S_2(t_j)\xi_{0j} = (u_{2j}, v_{2j})$ e $\xi = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)})$. Por (5.13) temos que

$$u_{2j} \rightharpoonup \xi^{(1)} \text{ em } H^2(\mathbb{R}) \tag{5.15}$$

$$v_{2j} \rightharpoonup \xi^{(2)} \text{ em } H^1(\mathbb{R}) \tag{5.16}$$

Segue portanto de (5.16) que

$$\lim_{j\to\infty}\langle \varphi, v_{2j}\rangle = \langle \varphi, \xi^{(2)}\rangle\,,\ \forall\, \varphi \in (H^1(\mathbb{R}))^*. \tag{5.17}$$

Seja $\eta \in L^2(\mathbb{R})$ qualquer e defina

$$\begin{array}{rcccc} T_\eta & : & H^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & u & \longmapsto & (u,\eta)_{L^2(\mathbb{R})} = \int \hat{u}(\xi)\bar{\hat{\eta}}(\xi)\,d\xi. \end{array}$$

Note que T_η é linear e

$$\begin{aligned} |T_\eta u| &= \left|\int \hat{u}(\xi)\bar{\hat{\eta}}(\xi)\,d\xi\right| \\ &= \left|(1+\xi^2)^{1/2}\hat{u}(\xi)(1+\xi^2)^{-1/2}\bar{\hat{\eta}}(\xi)\,d\xi\right| \\ &\leq \|u\|_{H^1(\mathbb{R})}\left(\int (1+\xi^2)^{-1}|\hat{u}|^2\,d\xi\right) \\ &\leq \sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left(\frac{1}{1+\xi^2}\right)\|u\|_{H^1(\mathbb{R})}\|\eta\| \\ &\leq \|\eta\|\,\|u\|_{H^1(\mathbb{R})} < \infty. \end{aligned}$$

Ou seja, $T_\eta \in (H^1(\mathbb{R}))^*$ e portanto (5.17) vale. Em particular, para T_η, isto é,

$$\lim_{j\to\infty}\langle T_\eta, v_{2j}\rangle = \langle T_\eta, \xi^{(2)}\rangle$$

ou melhor

$$\lim_{j\to\infty}(v_{2j},\eta)_{L^2(\mathbb{R})} = (\xi^{(2)},\eta)_{L^2(\mathbb{R})}\,,\ \forall\, \eta \in L^2(\mathbb{R}).$$

Portanto $v_{2j} \rightharpoonup \xi^{(2)}$ em $L^2(\mathbb{R})$. No outro caso, por (**??**) temos que

$$\lim_{j\to\infty}\langle \varphi, u_{2j}\rangle = \langle \varphi, \xi^{(1)}\rangle\,,\ \forall\, \varphi \in (H^2(\mathbb{R}))^*. \tag{5.18}$$

Seja $\eta \in H^1(\mathbb{R})$ qualquer e defina

$$\begin{array}{rcccc} T_\eta & : & H^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & u & \longmapsto & (u,\eta)_{H^1(\mathbb{R})} = \int (1+\xi^2)\hat{u}(\xi)\bar{\hat{\eta}}(\xi)\,d\xi. \end{array}$$

Note que T_η é linear e

$$\begin{aligned} |T_\eta u| &= \left|\int (1+\xi^2)\hat{u}(\xi)\bar{\hat{\eta}}(\xi)\,d\xi\right| \\ &= \left|(1+\xi^2)\hat{u}(\xi)(1+xi^2)^{-1/2}(1+\xi^2)^{1/2}\bar{\hat{\eta}}(\xi)\,d\xi\right| \\ &\leq \sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}\right)\|u\|_{H^1(\mathbb{R})}\|\eta\|_{H^1(\mathbb{R})} \\ &\leq \|\eta\|_{H^1(\mathbb{R})}\|u\|_{H^2(\mathbb{R})} < \infty. \end{aligned}$$

Ou seja, $T_\eta \in (H^2(\mathbb{R}))^*$ e portanto (5.18) vale. Em particular, para T_η, isto é,

$$\lim_{j\to\infty} \langle T_\eta, u_{2j}\rangle = \langle T_\eta, \xi^{(1)}\rangle.$$

Ou ainda, $\lim_{j\to\infty}(v_{2j},\eta)_{H^1(\mathbb{R})} = (\xi^{(2)},\eta)_{H^1(\mathbb{R})}\,,\ \forall\, \eta \in H^1(\mathbb{R})$.

Portanto $u_{2j} \rightharpoonup \xi^{(1)}$ em $H^1(\mathbb{R})$. Concluímos assim que

$$S_2(t_j)\xi_{0j} \rightharpoonup \xi \text{ em } H^1 \times L^2(\mathbb{R}). \tag{5.19}$$

Daí segue-se de (5.14), (5.19) e da unicidade do limite fraco que $\theta = \xi$.

Afirmação 5.2 *Nas condições acima $S_2(t_j)\xi_{0j} \to \xi$ (forte) em $H^1\times L^2(|x| \le r)$.*

De fato, pelo *Lema 4.3*, como $f \in L^2(\mathbb{R}), g \in H^1(\mathbb{R})$ temos que $S_2(t_j)\xi_{0j}$ é limitado em $H^2(|x| \le r) \times H^1(|x| \le r)$ e como $H^2(|x| \le r) \times H^1(|x| \le r) \hookrightarrow H^1(|x| \le r) \times L^2(|x| \le r)$ (imersão compacta) segue-se que $S_2(t_j)\xi_{0j}$ é compacta em $H^1(|x| \le r) \times L^2(|x| \le r)$. Logo existe subseqüencia (o qual denotemos também por $S_2(t_j)\xi_{0j}$) e $\Psi \in H^1(|x| \le r) \times L^2(|x| \le r)$ tal que

$$S_2(t_j)\xi_{0j} \to \Psi \text{ em } H^1(|x| \le r) \times L^2(|x| \le r). \tag{5.20}$$

Usaremos a mesma notação da afirmação anterior. Decorre de (5.19) que

$$u_{2j} \rightharpoonup \xi^{(1)} \text{ em } H^1(\mathbb{R}) \tag{5.21}$$

e

$$v_{2j} \rightharpoonup \xi^{(2)} \text{ em } L^2(\mathbb{R}). \tag{5.22}$$

De (5.22) temos que

$$\lim_{j\to\infty} \langle \varphi, v_{2j}\rangle = \langle \varphi, \xi^{(2)}\rangle\,,\ \forall\, \varphi \in (L^2(\mathbb{R}))^*. \tag{5.23}$$

Seja $\eta \in L^2(|x| \le r)$ qualquer e defina

$$\begin{array}{rcccc} T_\eta & : & L^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & u & \longmapsto & \langle T_\eta, u\rangle = \int_{|x|\le r} u\bar{\eta}\, dx. \end{array}$$

Note que T_η é linear e

$$\begin{aligned} |T_\eta u| &= \left| \int_{|x|\le r} u\bar{\eta}\, dx \right| \\ &\le \|\eta\|_{L^2(|x|\le r)} \|u\|_{L^2(|x|\le r)} \\ &\le \|\eta\|_{L^2(|x|\le r)} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty. \end{aligned}$$

Ou seja, $T_\eta \in (L^2(\mathbb{R}))^*$ e portanto (5.23) vale, em particular, para T_η, isto é,

$$\lim_{j\to\infty} \langle T_\eta, v_{2j}\rangle = \langle T_\eta, \xi^{(2)}\rangle.$$

Ou ainda

$$\lim_{j\to\infty} (v_{2j}, \eta)_{L^2(|x|\le r)} = (\xi^{(2)}, \eta)_{L^2(|x|\le r)}\,,\ \ \forall\, \eta \in L^2(|x| \le r).$$

Portanto $v_{2j} \rightharpoonup \xi^{(2)}$ em $L^2(|x| \le r)$. No outro caso, temos por (5.21) que

$$\lim_{j\to\infty} \langle \varphi, u_{2j}\rangle = \langle \varphi, \xi^{(1)}\rangle\,,\ \forall\, \varphi \in (H^1(\mathbb{R}))^*. \tag{5.24}$$

Seja $\eta \in H^1(|x| \le r)$ qualquer e defina

$$\begin{array}{rcccl} T_\eta & : & H^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & u & \longmapsto & \langle T_\eta, u\rangle = (\eta, u)_{H^1(|x|\le r)}. \end{array}$$

Note que T_η é linear e

$$\begin{array}{rcl} |T_\eta u| & = & |(\eta, u)_{H^1(|x|\le r)}| \\ & \le & |(\eta, u)_{L^2(|x|\le r)}| + |(\eta_x, u_x)_{L^2(|x|\le r)}| \\ & \le & 2\|\eta\|_{H^1(|x|\le r)}\|u\|_{H^1(|x|\le r)} \\ & \le & 2\|\eta\|_{H^1(|x|\le r)}\|u\|_{H^1(\mathbb{R})}. \end{array}$$

Ou seja $T_\eta \in (H^1(\mathbb{R}))^*$ e portanto (5.24) vale, em particular, para T_η, isto é

$$\lim_{j\to\infty} \langle T_\eta, u_{2j}\rangle = \langle T_\eta, \xi^{(1)}\rangle$$

ou seja

$$\lim_{j\to\infty} (u_{2j}, \eta)_{H^1(|x|\le r)} = (\xi^{(1)}, \eta)_{H^1(|x|\le r)}\,,\ \ \forall\, \eta \in H^1(|x| \le r).$$

Portanto $u_{2j} \rightharpoonup \xi^{(1)}$ em $H^1(|x| \le r)$. Portanto temos que

$$S_2(t_j)\xi_{0j} \rightharpoonup \xi \text{ em } H^1 \times L^2(|x| \le r). \tag{5.25}$$

Logo segue-se de (5.20), (5.25) e da unicidade do limite que $S_2(t_j)\xi_{0j} \to \xi$ (forte) em $H^1 \times L^2(|x| \le r)$. Concluímos assim que existe $J_2 > 0$ tal que

$$\|S_2(t_j)\xi_{0j} - \xi\|_{H^1(|x|\le r)\times L^2(|x|\le r)} < \frac{\epsilon}{4}\,,\ \ \forall\, j \ge J_2. \tag{5.26}$$

Para finalizar, devemos mostrar a seguinte

Afirmação 5.3 *Para todo $\epsilon > 0$*

$$\|\xi\|_{H^1(|x|\geq r)\times L^2(|x|\geq r)} \leq \frac{\epsilon}{4}$$

De fato, observe que se mostrarmos que $S_2(t_j)\xi_{0j} \rightharpoonup \xi$ em $H^1 \times L^2(|x| > r)$ então seguirá de (5.12) que

$$\|\xi\|_{H^1\times L^2(|x|>r)} \leq \lim_{j\to\infty} \inf \|S_2(t_j)\xi_{0j}\|_{H^1\times L^2(|x|>r)} \leq \frac{\epsilon}{4}. \tag{5.27}$$

O raciocínio é o mesmo. Senão vejamos (usaremos a mesma notação da afirmação anterior). De (5.22) temos que

$$\lim_{j\to\infty} \langle \varphi, v_{2j}\rangle = \langle \varphi, \xi^{(2)}\rangle\,, \;\forall\, \varphi \in (L^2(\mathbb{R}))^*. \tag{5.28}$$

Seja $\eta \in L^2(|x| > r)$ qualquer e defina

$$\begin{array}{rcccc} T_\eta & : & L^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & u & \longmapsto & \langle T_\eta, u\rangle = \int_{|x|>r} u\bar{\eta}\, dx. \end{array}$$

Note que T_η é linear e

$$\begin{aligned} |T_\eta u| &= \left| \int_{|x|>r} u\bar{\eta}\, dx \right| \\ &\leq \|\eta\|_{L^2(|x|>r)}\|u\|_{L^2(|x|>r)} \\ &\leq \|\eta\|_{L^2(|x|>r)}\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty. \end{aligned}$$

Ou seja, $T_\eta \in (L^2(\mathbb{R}))^*$ e portanto (5.28) vale. Em particular, para T_η, isto é,

$$\lim_{j\to\infty} \langle T_\eta, v_{2j}\rangle = \langle T_\eta, \xi^{(2)}\rangle$$

e assim

$$\lim_{j\to\infty} (v_{2j}, \eta)_{L^2(|x|>r)} = (\xi^{(2)}, \eta)_{L^2(|x|>r)}\,,\;\; \forall\, \eta \in L^2(|x| \leq r).$$

Portanto $v_{2j} \rightharpoonup \xi^{(2)}$ em $L^2(|x| > r)$. No outro caso, temos por (5.21) que

$$\lim_{j\to\infty} \langle \varphi, u_{2j}\rangle = \langle \varphi, \xi^{(1)}\rangle\,, \;\forall\, \varphi \in (H^1(\mathbb{R}))^*. \tag{5.29}$$

Seja $\eta \in H^1(|x| > r)$ qualquer e defina

$$\begin{array}{rcccc} T_\eta & : & H^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & u & \longmapsto & \langle T_\eta, u\rangle = (\eta, u)_{H^1(|x|>r)}. \end{array}$$

Note que T_η é linear e

$$\begin{aligned}
|T_\eta u| &= |(\eta, u)_{H^1(|x|>r)}| \\
&\leq |(\eta, u)_{L^2(|x|>r)}| + |(\eta_x, u_x)_{L^2(|x|>r)}| \\
&\leq 2\|\eta\|_{H^1(|x|>r)}\|u\|_{H^1(|x|>r)} \\
&\leq 2\|\eta\|_{H^1(|x|>r)}\|u\|_{H^1(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Ou seja, $T_\eta \in (H^1(\mathbb{R}))^*$ e portanto (5.29) vale. Em particular, para T_η, isto é,

$$\lim_{j\to\infty} \langle T_\eta, u_{2j}\rangle = \langle T_\eta, \xi^{(1)}\rangle$$

e assim

$$\lim_{j\to\infty} (u_{2j}, \eta)_{H^1(|x|>r)} = (\xi^{(1)}, \eta)_{H^1(|x|>r)}\,,\ \forall\, \eta \in H^1(|x| > r).$$

Portanto $u_{2j} \rightharpoonup \xi^{(1)}$ em $H^1(|x| > r)$ e com isso,

$$S_2(t_j)\xi_{0j} \rightharpoonup \xi \text{ em } H^1 \times L^2(|x| > r). \tag{5.30}$$

Tomando agora $J = \max\{J_1, J_2\}$, então para todo $j \geq J$ segue-se de (5.11),(5.12), (5.26) e (5.27) que

$$\begin{aligned}
\|S(t_j)\xi_{0j} - \xi\|_{H^1\times L^2(\mathbb{R})} &= \|S_1(t_j)\xi_{0j} + S_2(t_j)\xi_{0j} - \xi\|_{H^1\times L^2(\mathbb{R})} \\
&\leq \|S_1(t_j)\xi_{0j}\|_{H^1\times L^2(\mathbb{R})} + \|S_2(t_j)\xi_{0j} - \xi\|_{H^1(|x|\leq r)\times L^2(|x|\geq r)} \\
&+ \|S_2(t_j)\xi_{0j} - \xi\|_{H^1(|x|>r)\times L^2(|x|>r)} \\
&\leq \|S_1(t_j)\xi_{0j}\|_{H^1\times L^2(\mathbb{R})} + \|S_2(t_j)\xi_{0j} - \xi\|_{H^1(|x|\leq r)\times L^2(|x|\geq r)} \\
&+ \|S_2(t_j)\xi_{0j}\|_{H^1(|x|\geq r)\times L^2(|x|\geq r)} + \|\xi\|_{H^1(|x|\geq r)\times L^2(|x|\geq r)} \\
&< \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon\ \forall j \geq J,
\end{aligned}$$

mostrando que $S(t_j)\xi_{0j} \to \xi$, quando $j \to \infty$ em X_1. ■

Conjuntos limitado absorventes em X_1

Para estabelecer a existência de um atrator global em X_1, demonstraremos a seguir um resultado muito útil que é a existência de um conjunto limitado absorvente para o sistema dinâmico associado ao problema (4)-(6). Este é o conteúdo da

Proposição 5.2 *O sistema dinâmico associado ao problema (4)-(6) possui um conjunto limitado absorvente em* X_1.

Prova: De fato, mostraremos essa proposição de duas maneiras:

1. Seja $\mathscr{B}_0 \subset X_1$ um conjunto limitado qualquer e $\xi_0 = (u_0, v_0) \in \mathscr{B}_0$ qualquer. Assim existe um $R > 0$ tal que $\|\xi_0\|_{X_1} \leq R$. Considere a seguite bola em X_1

   $$\mathscr{B} = \{(u,v) \in H^1 \times L^2(\mathbb{R}) : \|u(t)\|_{H^1(\mathbb{R})} + \|v(t)\| \leq M\},$$

   onde M é a constante do *Lema* 2.2. Novamente pelo *Lema* 2.2 existe $t_1(R)$ tal que $S(t)\xi_0 \in \mathscr{B}$ para todo $t \geq t_1(R)$ e todo $\xi_0 \in \mathscr{B}_0$. Isto mostra que

   $$S(t)\mathscr{B}_0 \subset \mathscr{B}\,,\ \forall\, t \geq t_1(\mathscr{B}_0).$$

   Logo, $\mathscr{B}$ é um conjunto absorvente em X_1.

2. Vimos no *Lema* 2.2 (mais precisamente em (2.29)) que existem constantes η_1, η_2 tais que

   $$\|(u(t), v(t))\|^2{}_{X_1} \leq \eta_1 e^{-(\frac{\alpha}{2})t} + \eta_2\,,\ \forall\, t \geq 0.$$

   Portanto

   $$\lim_{t\to\infty} \sup \|(u(t), v(t))\|^2{}_{X_1} \leq \eta_2.$$

   Afirmo que toda bola em X_1 com centro na origem e raio ρ com $\rho > \rho_0$, onde $\rho_0^2 = \eta_2$ é um conjunto absorvente do semigrupo $\{S(t) : t \geq 0\}$ em X_1. De fato, pelo *Teorema* 3.3, dado $\xi_0 = (u_0, v_0) \in X_1$ o sistema dinâmico

   $$\begin{array}{rcccl} S(t) & : & X_1 & \longrightarrow & X_1 \\ & & \xi_0 & \longmapsto & S(t)\xi_0 = (u(t), v(t)) \end{array}$$

   é contínuo. Seja $\mathscr{B}_0 \subset X_1$ um conjunto limitado qualquer. Assim existe $R > 0$ tal que para todo $\xi_0 \in \mathscr{B}_0$, $\|\xi_0\|_{X_1} \leq R$. Portanto segue de (2.29) que

   $$\|S(t)\xi_0\|^2{}_{X_1} \leq [(\lambda_1 + 4)R^2 + \lambda_2 R^3 + 2\|f\|^2]e^{-(\frac{\alpha}{2})t} + \rho_0^2.$$

Logo

$$
\begin{aligned}
& [(\lambda_1+4)R^2+\lambda_2 R^3+2\|f\|^2]e^{-(\frac{\alpha}{2})t}+\rho_0^2 \leq \rho^2 \\
\Leftrightarrow \quad & e^{-(\frac{\alpha}{2})t} \leq \frac{\rho^2-\rho_0^2}{(\lambda_1+4)R^2+\lambda_2 R^3+2\|f\|^2} \\
\Leftrightarrow \quad & t \geq \frac{2}{\alpha}\ln\left(\frac{\rho^2-\rho_0^2}{(\lambda_1+4)R^2+\lambda_2 R^3+2\|f\|^2}\right) := t_1(R).
\end{aligned}
$$

Denotando por $\mathscr{B}$ a bola de centro na origem e raio ρ em X_1 mostramos portanto que para todo $\xi_0 \in \mathscr{B}_0$ temos que $S(t)\xi_0 \in \mathscr{B}$, para todo $t \geq t_1(R)$. Logo

$$S(t)\mathscr{B}_0 \subset \mathscr{B}\,,\ \forall\, t \geq t_1(\mathscr{B}_0).$$

Isto mostra que $\mathscr{B}$ é um conjunto limitado absorvente. ■

Para finalizar, mostraremos o resultado principal que é o

Teorema 5.2 (Resultado Principal) *Assuma que $f \in L^2(\mathbb{R})$, $g \in H^1(\mathbb{R})$. Então o operador solução $\{S(t) : t \geq 0\}$ de (4)-(6) é um sistema dinâmico contínuo em $X_1 = H^1 \times L^2(\mathbb{R})$ e possui um atrator global $\mathscr{A}$ satisfazendo*

1. $\mathscr{A}$ é compacto em X_1;
2. $S(t)\mathscr{A} = \mathscr{A}$, para todo $t \geq 0$;
3. $\forall\, \mathscr{B}_0 \subset X_1$ limitado

$$\lim_{t\to\infty} dist_{X_1}(S(t)\mathscr{B}_0, \mathscr{A}) = 0.$$

Prova: O trabalho está essencialmente feito. Resta apenas juntar as peças. Pelo *Teorema* 3.3 o sistema dinâmico $S(t) : X_1 \to X_1$ é contínuo. Pela *Proposição* 5.2, $\{S(t) : t \geq 0\}$ possui um conjunto limitado absorvente em X_1 e pelo *Teorema* 5.1 tal conjunto é assintóticamente compacto em X_1. Portanto, segue-se da *Proposição* 5.1 que $\{S(t) : t \geq 0\}$ possui um atrator global satisfazendo $(1)-(3)$ acima. ■

Referências Bibliográficas

[1] A. Pazy, Semigroups of linear Operators amd Applications to Partial Differential Equation, Springer, Berlin, 1983.

[2] Aubin, T.: Some nonlinear problems in riemannian geometry-Springer (Monographs in mathematics), 1998.

[3] B.-L. Guo, Y.-S. Li, Attractor for dissipative Klein-Gordon-Schrödinger equations in $\mathbb{R}^3$, J. Differential Equations 136 (1997) 356-377.

[4] B.L. Guo, The Global Solution for One class of the system of LS non-linear wave interaction, J. Math. Res. Exposition 1 (1987) 69-76.

[5] C.E. Kenig, G.Ponce, L. Vega, Oscillatory integrals ans regularity of dispersive equations, Indiana Univ. Math. J.40 (1991) 33-69

[6] D. Bekiranov, T. Ogawa, G. Ponce, On the well-posedness of Benney´s interation equation of short and long waves, Adv. Differential Equations 1 (1996) 919-937.

[7] D. Bekiranov, T. Ogawa, G. Ponce, Interaction equations for short and long dispersive waves J. Funct. Anal. 158 (1998) 357-388.

[8] D. J. Benney, Significant interactions between small and large scale surface waves, Stud. Appl. Math. 55 (1976) 93-106.

[9] D. J. Benney, A general theory for interactions between short and long waves, Stud. Appl. Math. 56 (1977) 81-94.

[10] D.R. Nicholson, M. V. Goldman, Damped nonlinear Schrödinger equation, Phys. Fluid 19 (1976) 1621-1625.

[11] Friedlander G. Joshi M.: Introduction to the Theory of Distributions. - Cambridge University Press, 1998

[12] G.B Folland - Introdution to Partial Differential Equations. Princeton, New Jersey (1976).

[13] G.Folland, Real Analysis: Modern techniques and their applications, Wiley-interscience, 1984

[14] H, Brézis - G. Tronel, Analyse Fonctionalle, Recueli de Problèmes et Exercises Masson.

[15] H, Brézis, Análisis funcional teoría y aplicaciones, Alianza Editorial.

[16] J. Angulo, J.F.B. Montenegro, Existence and evenness os solitary-wave solutions for an equation of short and long dispersive waves, Nonlinearity 13 (2000) 1595-1611.

[17] J.F.B. Montenegro, Sistemas de equações de evoluçlão não-lineares. Estudo local, global e estabilidade de ondas solitárias., Informa de Matemática- Tese de Doutorado (1995).

[18] J.L. Lions, Mathematical analysis and numerical methods for science and technology, Springer.

[19] Lawrence C. Evans, Partial Differential Equations. , Graduate Studies in Mathematics - Volume 19 - American Mathematical Society.

[20] Michael, R. , Robert, C.R., An introduction to partial differential equation, Springer, 1992

[21] M. Tsutsumi, S. Hatano, Well-posedness of the Cauchy problem for Benney´s first equations of long-wave shor-twave interactions, Funkcialaj Ekvacioj 37 (1994) 289-316.

[22] M. Tsutsumi, S. Hatano, Well posedness of the Cauchy problem for the long wave-short-wave resonance equations, Nonlinear Anal. 22 (1994) 155-171

[23] O. Goubet, Regularity of the attractor for a weakly damped nonlinear Schrödinger equation in $\mathbb{R}^2$, Adv. Differential Equations, 3 (1998) 337-360.

[24] O. Goubet, R.M.S. Rosa, Asymptotic smoothing and the global attractor of aweakly damped KdV equation on the real lina, J. Differential Equations 185 (2002) 25-53.

[25] R. J. Iório Jr., W.V. Nunes - Introdução às equações de Evolução não linear. Col. Br. Matemática, IMPA, (1991)

[26] R.H.J. Grimshaw, The modulation of an internal gravity-wave packet and resonance with the mean motion, Stud. Appl. Math. 56 (1977) 241-266.

[27] Treves, F.: Basic Linear Partial Differential Equations. Academic Press, 1975.

[28] V.D. Djordjevic, L. G. Redekopp, On two-dimensional packets of capillary-gravity waves, J. Fluid Mech. 79 (1977) 703-714.