UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PÓS – GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

CARLOS AUGUSTO DAVID RIBEIRO

Teorema de Hodge e Aplicações

Fortaleza
2008

CARLOS AUGUSTO DAVID RIBEIRO

TEOREMA DE HODGE E APLICAÇÕES

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto

Fortaleza
2008

R368t	Ribeiro, Carlos Augusto David.
Código	Teorema de Hodge e Aplicações/
	Carlos Augusto David Ribeiro. Fortaleza, 2008.
	100 f.
	Orientador: Antonio Caminha Muniz Neto.
	Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Ceará,
	Departamento de Matemática, Fortaleza, 2008.
	1 - Variedades Diferenciáveis.
	2 - Formas Diferenciáveis(matemática).
	Código 516.36

Esta folha será substituida pela ata.

Dedico a Deus e à minha amada esposa.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente quero e devo agradecer ao meu Deus Jeová, pois foi Ele que, tanto de forma direta , como também indiretamente, deu-me forças para perseverar ao longo desse mestrado, chegando assim aqui, a essa dissertação e conseguindo concluí-la com sucesso. Sei que sem Ele nada do que fiz teria sido possível.

Agradeço também a meus professores, que me guiaram ao longo da minha graduação e mestrado, ensinando-me não só matemática, mas lições de vida, amizade, perseverança, entre outras. Dentre eles devo destacar: o prof. Luquésio, que me inseriu no mundo da matemática universitária, além de esclarecer as diversas dúvidas que me atinham; o prof. Alexandre, que além do conhecimento transmitido, foi amigo e companheiro de problemas nos corredores desse departamento, muitas vezes me lembrando, através de sua empolgação, como é prazeroso resolver um problema de matemática; por fim, em especial ao prof. Caminha, que já bem antes de minha graduação, guiava-me pelos meandros da matemática, passando- me conhecimento e exemplos de inteligência, humildade, bom senso, competência, organização e perseverança, além da paciência em me orientar nessa dissertação.

Este parágrafo quero dedicar a meus amigos. Sem suas palavras, conselhos e incentivos, tudo teria sido mais difícil, senão impossível. Aqui devo cometer uma injustiça, pois ao citar alguns deles, vou quase que ofender aos esquecidos, mas mesmo assim devo continuar; meus sinceros agradecimentos: ao Davi Máximo, ao Yuri Lima, ao Bruno Holanda, e em especial ao Samuel, que muitas vezes compartilhou dos desafios que foram esse um ano e meio de mestrado e suou a camisa comigo desde os exames até a composição dessa disertação.

Por fim, não posso esquecer de agradecer minha família, cujo papel fundamental de incentivadora foi, em todos seus aspectos, competentemente cumprido. Em miúdos agradeço: a meus pais, Djair e Heleneida, e minha tia, Francisca Clarisse, que desde que eu era criança, deram tudo de si, para que hoje, da melhor maneira possível, eu saiba andar com minhas próprias pernas; a meus irmãos, que fizeram de suas presenças um prazer pra mim; às minha tias Genilda e Creusa, além do meu primo Glauco, que fizeram papéis de mães e irmão, respectivamente; à minha sogra, Edilsa e os seus incentivos e finalmente, neste âmbito familiar, também incluo especialmente minha querida e amada esposa, Keivy Lany, que com seus carinhos, incentivos e palavras doces, fez da calma uma poderosa arma a me atingir, dando- me a sobriedade que muitas vezes quis fugir.

Em síntese, obrigado a todos aqueles que em minha vida contribuíram para meu crescimento, seja ele espiritual, intelectual ou emocional. Agradeço também aqueles que torceram contra (se é que houve), pois sem saber, incentivaram ainda mais minha vitória.

Também agradeço à CNPQ, pelo apoio financeiro.

'With a man there is nothing better [than] that he should eat and indeed drink and cause his soul to see good because of his hard work. This too I have seen, even I, that this is from the hand of the [true] God'.

Ecclesiastes 2:24.

RESUMO

O presente trabalho aborda um teorema clássico de decomposição do espaço das p-formas suaves sobre uma variedade Riemaniana compacta e orientada, conhecido como teorema da decomposição de Hodge, assim como suas consequências. No decorrer do mesmo, foi feita uma passagem por diversas feramentas interessantes, como espaços Sobolev (capítulo 2) e EDP elíptica(capítulo 3), assim como uma abordagem suscinta de formas diferenciáveis(capítulo 1).

ABSTRACT

This dissertation presents a classical theorem of decomposition of the space of smooths p-forms on compact oriented Riemannian manifold , known as the theorem of Hodge decomposition, and its consequences. During the same was made a passage for several interesting tools, such as Sobolev spaces (Chapter 2) and elliptical PDE (Chapter 3), as well as a succinct approach about diferenciable forms (Chapter 1).

Sumário

Introdução

A presente dissertação aborda um conhecido teorema da geometria diferencial, cujas implicações são poderosas nessa área: O Teorema da Decomposição de Hodge.

No Capítulo 1 foi abordado como tema as $p-$formas, bem como foi dada uma pincelada em Cohomologia de Dham.

No Capítulo 2 a atenção foi voltada para os espaços H_s, conhecidos como espaços de Sobolev. Comentou-se bem acerca de seus aspectos básicos.

O Capítulo 3 tratou de uma ferramenta fundamental para o resultado principal dessa dissertação, a saber, os operadores elípticos. Desde a definição até a conhecida desigualdade fundamental foram citados.

Por fim, o capítulo 4, com o resultado principal. Mas antes foi feita uma boa teoria acerca do operador estrela de Hodge.

Capítulo 1

Formas Diferenciais

1.1 A Álgebra Alternada

Em tudo o que segue, V é um espaço vetorial real e, para $p \in \mathbb{N}$, $V^p = \underbrace{V \times V \times \ldots \times V}_{p}$.

Definição 1.1. *Uma aplicação $w : V^p \to \mathbb{R}$ é p-linear se for linear em cada fator. Uma tal w é **alternada** se $w(v_1, \ldots, v_p) = 0$ sempre que $v_i = v_j$ para algum par $1 \leq i < j \leq p$. O conjunto das aplicações p-lineares alternadas $w : V^p \to \mathbb{R}$ é denotado por $\Lambda^p(V)$, e denominado o conjunto das p-formas em V.*

Veja que $\Lambda^0 = \mathbb{R}$ e claramente tem-se $\Lambda^p(V)$ um espaço vetorial real.

No que segue, denote por S_k o k-ésimo grupo alternado, i.e, o grupo das permutações σ de $\{1, 2, \ldots, k\}$. Todo σ pode ser escrito como produto de transposições, i.e, de permutações (i, j) de $\{1, \ldots, k\}$. A paridade do número de transposições só depende de σ, sendo denominado o *sinal* de σ. Em particular, $sgn(\sigma\tau) = sgn(\sigma)sgn(\tau)$, $\forall \sigma, \tau \in S_k$.

Lembre ainda que, fixado $1 \leq i \leq k$, tem-se

$$S_k =< (i, i+1), (i, i+2), (i, i+3), \ldots, (i, i-1) > .$$

Lema 1.1. *Se $w : V^p \to \mathbb{R}$ é p-linear, então w é alternada se e só se $w(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) = sgn(\sigma)w(v_1, \ldots, v_p)$, $\forall \sigma \in S_p$. Em particular, w é altarnada se e só se $w(v_1, \ldots, v_p) = 0$ sempre que dois v_i's consecutivos forem iguais.*

Prova. Suponha $w \in \Lambda^p(V)$. Como $sgn(\sigma\tau) = sgn(\sigma)sgn(\tau)$ e toda $\sigma \in S_p$ é produto de trasposições, basta verificar a fórmula para $\sigma = (i, j) \in S_p$. Para tanto, tem-se

$$0 = w(v_1, \ldots, \underbrace{v_i + v_j}_{i}, \ldots, \underbrace{v_i + v_j}_{j}, \ldots, v_p) =$$

$$= w(v_1, \ldots, \underbrace{v_i}_{i}, \ldots, \underbrace{v_j}_{j}, \ldots, v_p) + w(v_1, \ldots, \underbrace{v_j}_{i}, \ldots, \underbrace{v_i}_{j}, \ldots, v_p),$$

i.e,

$$w(v_{\sigma(1)}), \ldots, v_{\sigma(p)}) = w(v_1, \ldots, \underbrace{v_j}_{i}, \ldots, \underbrace{v_i}_{j}, \ldots, v_p) =$$

$$= -w(v_1, \ldots, \underbrace{v_i}_{i}, \ldots, \underbrace{v_j}_{j}, \ldots, v_p) = sgn(\sigma)w(v_1, \ldots, v_p).$$

Reciprocamente, satisfeita a condição do enunciado, tome $v_1, \ldots, v_p \in V$ tal que $v_i = v_j = v, i < j$. Então, com $\sigma = (i, j)$, obtem-se

$$w(v_1, \ldots, \underbrace{v_i}_{=v}, \ldots, \underbrace{v_j}_{=v}, \ldots, v_p) =$$

$$= -w(v_1, \ldots, \underbrace{v_j}_{=v}, \ldots, \underbrace{v_i}_{=v}, \ldots, v_p),$$

i.e,

$$w(v, v) = -w(v, v),$$

donde

$$w(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_p) = 0.$$

Para o que falta, basta notar que, como S_k é gerado pelas trasposições $(i, i + 1)$, se w for p-linear e tal que $w(v_1, \ldots, v_p) = 0$ sempre que $v_i = v_{i+1}$, para algum i, então $w(v_1, \ldots, v_p) = 0$ sempre que existir $i \neq j$ tal que $v_i = v_j$. $\square$

Definição 1.2. *Fixados $p, q \in \mathbb{N}$, um (p, q)-embaralhamento é uma permutação $\sigma \in S_{p+q}$ tal que $\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(p)$ e $\sigma(p + 1) < \sigma(p + 2) < \cdots < \sigma(p + q)$. Denota-se o conjunto dos (p, q)-embaralhamentos por $S_{p,q}$.*

Proposição 1.1. *Se $w_1 \in \Lambda^p(V)$ e $w_2 \in \Lambda^q(V)$, então a expressão*

$$(w_1 \wedge w_2)(v_1, \ldots, v_{p+q}) = \sum_{\sigma \in S_{p,q}} sgn(\sigma) w_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) w_2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)})$$

define um elemento $w_1 \wedge w_2$ de $\Lambda^{p+q}(V)$, denominado o ***produto exterior*** *de w_1 e w_2 (nessa ordem).*

Prova. Certamente $w_1 \wedge w_2 : v^p \to \mathbb{R}$ é $(p+q)$-linear. Para mostrar que é alternada, basta, pelo lema, provar que $(w_1 \wedge w_2)(v_1, \ldots, v_{p+q}) = 0$ se $v_i = v_{i+1}$ para algum i. Será provado para $i = 1$, o caso geral é análogo. Supondo então $v_1 = v_2$, tem-se

$$(w_1 \wedge w_2)(v_1, v_2, \ldots, v_{p+q}) = \sum_{\sigma \in S_{p,q}} sgn(\sigma) w_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) w_2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_{p,q}, \sigma(1)=1, \sigma(2)=2} sgn(\sigma) w_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) w_2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) +$$

$$+ \sum_{\sigma \in S_{p,q}, \sigma(p+1)=1, \sigma(p+2)=2} sgn(\sigma) w_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) w_2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) +$$

$$+ \sum_{\sigma \in S_{p,q}, \sigma(1)=1, \sigma(p+1)=2} sgn(\sigma) w_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) w_2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) +$$

$$+ \sum_{\sigma \in S_{p,q}, \sigma(1)=2, \sigma(p+1)=1} sgn(\sigma) w_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) w_2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}).$$

Os dois primeiros termos se anulam, pois w_1 e w_2 são alternados. Quanto aos dois últimos, se $\sigma \in S_{p,q}$ é tal que $\sigma(1) = 1$ e $\sigma(p+1) = 2$ então, sendo $\tau = (1, 2)$, tem-se

$$(\tau\sigma)(1) = \tau(1) = 2$$

e

$$(\tau\sigma)(p+1) = \tau(2) = 1.$$

Analogamente, se $\sigma(1) = 2$ e $\sigma(p+1) = 1$, então

$$(\tau\sigma)(1) = \tau(2) = 1$$

e

$$(\tau\sigma)(p+1) = \tau(1) = 2.$$

Portanto, $\sigma \mapsto \tau\sigma$ define uma bijeção entre as parcelas das últimas duas somas (é imediato que $\tau\sigma \in S_{p,q}$), de modo que

$$(w_1 \wedge w_2)(v_1, v_2, \ldots, v_{p+q}) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_{p,q}, \sigma(1)=1, \sigma(p+1)=2} sgn(\sigma) w_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) w_2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) +$$

$$+ \sum_{\sigma \in S_{p,q}, \sigma(1)=1, \sigma(p+1)=2} sgn(\sigma) w_1(v_{\tau\sigma(1)}, \ldots, v_{\tau\sigma(p)}) w_2(v_{\tau\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\tau\sigma(p+q)}) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_{p,q}, \sigma(1)=1, \sigma(p+1)=2} \{sgn(\sigma)(w_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) w_2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)})$$

$$+ sgn(\tau) w_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) w_2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}))\} = 0$$

□

Proposição 1.2. *A operação de produto exterior de formas é compatível com as operações de espaços vetoriais, é associativa e anti-comutativa. Em símbolos,*

(a) $(w_1 + w_1') \wedge w_2 = w_1 \wedge w_2 + w_1' \wedge w_2$ *e* $w_2 \wedge (w_1 + w_1') = w_2 \wedge w_1 + w_2 \wedge w_1'$*;*

(b) $w_1 \wedge (\lambda w_2) = (\lambda w_1) \wedge w_2 = \lambda(w_1 \wedge w_2)$*;*

(c) $w_1 \wedge w_2 = (-1)^{pq} w_2 \wedge w_1$*, se* $w_1 \in \Lambda^p(V)$*,* $w_2 \in \Lambda^q(V)$*;*

(d) $(w_1 \wedge w_2) \wedge w_3 = w_1 \wedge (w_2 \wedge w_3)$*.*

Prova. Para o item (a) veja que

$$[(w_1 + w_1') \wedge w_2](v_1, \ldots, v_{p+q})$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma \in S_{p,q}} sgn(\sigma)(w_1 + w_1')(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) w_2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) = \\
&= \sum_{\sigma \in S_{p,q}} sgn(\sigma)(w_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) + w_1'(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)})) w_2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) = \\
&= \sum_{\sigma \in S_{p,q}} sgn(\sigma)(w_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)})) w_2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) + \\
&\quad + \sum_{\sigma \in S_{p,q}} sgn(\sigma) w_1'(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)})) w_2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) \\
&= (w_1 \wedge w_2 + w_1' \wedge w_2)(v_1, \ldots, v_{p+q}).
\end{aligned}$$

O item (b) é imediato da definição de produto exterior.

Para o item (c) veja que

$$\begin{aligned}(w_1 \wedge w_2)(v_1, \ldots, v_{p+q}) &= \sum_{\sigma \in S_{p,q}} sgn(\sigma) w_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) w_2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_{p,q}} sgn(\sigma) w_2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}) w_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}).\end{aligned}$$

Mas, se $\tau \in S_{p+q}$ é dado por $\tau(1) = p+1, \ldots, \tau(q) = p+q$, $\tau(q+1) = 1, \ldots, \tau(q+p) = p$, então

$$\begin{aligned}(w_1 \wedge w_2)(v_1, \ldots, v_{p+q}) &= \sum_{\sigma \in S_{p,q}} sgn(\sigma) w_2(v_{\sigma\tau(1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(p)}) w_1(v_{\sigma\tau(q+1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(q+p)}) \\ &= \sum_{\sigma\tau \in S_{p,q}} sgn(\tau) sgn(\sigma\tau) w_2(v_{\sigma\tau(1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(p)}) w_1(v_{\sigma\tau(q+1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(q+p)}) \\ &= (-1)^{pq} \sum_{\eta \in S_{p,q}} sgn(\eta) w_2(v_{\eta(1)}, \ldots, v_{\eta(p)}) w_1(v_{\eta(q+1)}, \ldots, v_{\eta(q+p)}) \\ &= (-1)^{pq} (w_2 \wedge w_1)(v_1, \ldots, v_{p+q}),\end{aligned}$$

já que $sgn(\tau) = (-1)^{pq}$.

Para o item (d), se $w_1 \in \Lambda^p(V)$, $w_2 \in \Lambda^q(V)$ e $w_3 \in \Lambda^r(V)$ então

$$\begin{aligned}&[w_1 \wedge (w_2 \wedge w_3)](v_1, \ldots, v_{p+q+r}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_{p,q+r}} sgn(\sigma) w_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) (w_2 \wedge w_3)(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(q+r)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_{p,q+r}} sgn(\sigma) \sum_{\tau \in S_{\overline{p},q,r}} sgn(\tau) [w_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) \\ &\quad w_2(v_{\sigma\tau(p+1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(p+q)}) w_3(v_{\sigma\tau(p+q+1)}, \ldots, v_{\sigma\tau(p+q+r)})]\end{aligned}$$

onde $S_{\overline{p},q,r}$ é tal que $\sigma \in S_{\overline{p},q,r}$ se, e somente se, σ é a identidade sobre $\{1, \ldots, p\}$ e $\sigma \in S_{p,q,r}$. Daí,

$$= \sum_{\mu \in S_{p,q,r}} sgn(\mu) [w_1(v_{\mu(1)}, \ldots, v_{\mu(p)}) w_2(v_{\mu(p+1)}, \ldots, v_{\mu(p+q)}) w_3(v_{\mu(p+q+1)}, \ldots, v_{\mu(p+q+r)})].$$

De forma análoga, mostra-se que $[(w_1 \wedge w_2) \wedge w_3)](v_1, \ldots, v_{p+q+r})$ é igual a última expressão acima.

$\square$

Será examinado agora a dimensão de $\Lambda^p(V)$.

Lema 1.2. *Se $w_1, \ldots, w_p \in \Lambda^1(V)$ e $v_1, \ldots, v_p \in V$, então*

$$(w_1 \wedge \cdots \wedge w_p)(v_1, \ldots, v_p) = \det(w_i(v_j)).$$

Em particular, $w_1 \wedge \cdots \wedge w_p \neq 0$ se e só se $\{w_1, \ldots, w_p\}$ forem linearmente independentes. Mas particularmente ainda, $w_1 \wedge \cdots \wedge w_p = 0$ se $p > \dim V$.

Prova. Para $p = 1, 2$ é imediato. Por indução, se vale para $p = k$, então

$$\begin{aligned}
(w_1 \wedge \cdots \wedge w_{k+1})(v_1, \ldots, v_{k+1}) &= (w_1 \wedge (w_2 \wedge \cdots \wedge w_{k+1}))(v_1, \ldots, v_{k+1}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_{1,k}} (sgn\sigma) w_1(v_{\sigma(1)})(w_2 \wedge \cdots \wedge w_{k+1})(v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(k+1)}) \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} (sgn\sigma) w_1(v_j)(w_2 \wedge \cdots \wedge w_{k+1})(v_{1,\ldots}, v_{j-1}, v_{j+1,\ldots}, v_{k+1}) \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} w_1(v_j) \begin{vmatrix} w_2(v_1) & \ldots & \widehat{w_2(v_j)} & \ldots & w_2(v_{k+1}) \\ w_3(v_1) & \ldots & \widehat{w_3(v_j)} & \ldots & w_3(v_{k+1}) \\ & & \ldots & & \\ w_{k+1}(v_1) & \ldots & \widehat{w_{k+1}(v_j)} & \ldots & w_{k+1}(v_{k+1}) \end{vmatrix} \\
&= \det(w_i(v_j)),
\end{aligned}$$

onde a última igualdade segue de Laplace.

Para o que falta, se $w_p = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i w_i$, então

$$w_1 \wedge \cdots \wedge w_p = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i w_1 \wedge \cdots \wedge w_{p-1} \wedge w_i = 0,$$

uma vez que o determinante que define $(w_1 \wedge \cdots \wedge w_p)(v_1, \ldots, v_p)$ é zero, $\forall v_1, \ldots, v_p$.

Se $w_1, \ldots, w_p$ forem l.i, tome $v_1, \ldots, v_p$ tal que $w_i(v_j) = \delta_{ij}$. Então

$$(w_1 \wedge \cdots \wedge w_p)(v_1, \ldots, v_p) = \det(w_i(v_j)) = \det(\delta_{ij}) = 1,$$

donde $w_1 \wedge \cdots \wedge w_p \neq 0$.

Por fim, se $p > \dim V$, então $w_1 \wedge \cdots \wedge w_p = 0$ segue de ser $\dim \Lambda^1(V) = \dim V^* = \dim V$

□

Teorema 1.1. *Se $\{w_1, \ldots, w_n\}$ é base de $\Lambda^1(V) = V^*$, então $\beta_p = \{w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_p}; 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n\}$ é base de $\Lambda^p(V)$. Em particular, $\dim \Lambda^p(V) = \binom{n}{p}$, onde $n = \dim V$. Mais particular ainda, $\dim \Lambda^p(V) = 0$ se $p > n$.*

Prova. Seja $\{v_1, \ldots, v_n\}$ a base dual de $\{w_1, \ldots, w_n\}$. Então, para $1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n$,

$$\begin{aligned} \sum_{(i)} \lambda_{(i)} (w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_p})(v_{j_1}, \ldots, v_{j_p}) &= \sum_{(i)} \lambda_{(i)} \det\left(w_{i_k}(v_{jl})\right) \\ &= \sum_{(i)} \lambda_{(i)} \det \delta_{i_{kjl}} \\ &= \lambda_{(j)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{(i)} \lambda_{(i)} w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_p} = 0 \Rightarrow \lambda_{(i)} = 0, \forall (i),$$

i.e, β_p é l.i.

Por outro lado, dada $w \in \Lambda^p(V)$, tem-se finalmente

$$w = \sum_{(i)} w(v_{i_1}, \ldots, v_{i_p})(w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_p}),$$

donde β_p gera $\Lambda^p(V)$. O resto é imediato.

□

1.2 Cohomologia de De Rham

Em tudo o que segue, $U, U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ denotam abertos do espaço euclidiano, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$ e $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ a base dual.

Definição 1.3. *Uma $p-$forma diferencial sobre U é uma aplicação diferencial $w : U \to \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$*

OBS: Como $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ é espaço métrico de dim $< \infty$, quaisquer duas normas em $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ definem a mesma topologia; fixada uma tal norma, consideramos w diferenciável como aplicação de U em $(\Lambda^p(\mathbb{R}^n), |\ \ |)$.

Denotamos o conjunto das $p-$formas sobre U por $\Omega^p(U)$. Assim, se $w \in \Omega^p(U)$, então $w_x = w(x) \in \Lambda^p(\mathbb{R}^n), \forall x \in U$, i.e, $w(x) : (\mathbb{R}^n)^p :\to \mathbb{R}$ é uma $p-$forma no sentido anterior.

Como $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ é espaço vetorial, o mesmo ocorre com $\Omega^p(U)$. Ademais, como $\Lambda^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$, tem-se que $\Omega^0(\mathbb{R}^n) = \{w : U \to \mathbb{R} \text{ suaves}\} = C^\infty(U)$ e $\Omega^p(U) = \{0\}$ se $p > n$.

Como $\{dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}; 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n\}$ é base de $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$, segue que cada $w \in \Omega^p(U)$ define unicamente funções diferenciais $a_{(i)} : U \to \mathbb{R}$ tal que

$$w(x) = \sum_{(i)} a_{(i)} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}.$$

O produto exterior se estende prontamente (com todas as suas propriedades) aos $\Omega^p(U)$, definindo, para $w_1 \in \Omega^p(U)$ e $w_2 \in \Omega^q(U)$,

$$(w_1 \wedge w_2)(x) = w_1(x) \wedge w_2(x), \forall x \in U.$$

No que segue, introduzimos mais uma operação com $p-$formas diferenciais, a derivada exterior. Por brevidade, denote $dx_{(i)} = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$ se $(i) = (i_1, \ldots, i_p)$, com $i_1 < \cdots < i_p \leq n$.

Definição 1.4. *Se $w = \sum_{(i)} a_{(i)} dx_{(i)}$, a **derivada exterior** de w é a $(p+1)-$forma dw, definida por*

$$dw = \sum_{(i)} da_{(i)} \wedge dx_{(i)},$$

onde, para $f \in C^\infty(U)$, define-se

$$df = \sum_{j=1}^{n} (\partial_j f) dx_j.$$

Proposição 1.3. *A derivada exterior $d : \Omega^p(X) \to \Omega^{p+1}(X)$ é um operador linear que goza das seguintes propriedades:*

(a) $d(w_1 \wedge w_2) = dw_1 \wedge w_2 + (-1)^p w_1 \wedge dw_2$, $\forall w_1 \in \Omega^p(U)$, $\forall w_2 \in \Omega^q(U)$;

(b) $d^2 = 0 : \Omega^p(U) \to \Omega^{p+2}(U)$

Prova. A linearidade é imediata a partir da definição. Portanto, basta provar (a) e (b) para formas do tipo $adx_{(i)}$:

(a) É imediato que, para $a, b : U \to \mathbb{R}$ diferenciáveis, tem-se $d(ab) = adb+bda$. Daí,

$$\begin{aligned}
d((adx_{(i)}) \wedge (bdx_{(j)})) &= d(abdx_{(i)} \wedge dx_{(j)}) = d(ab) \wedge dx_{(i)} \wedge dx_{(j)} \\
&= (adb + bda) \wedge dx_{(i)} \wedge dx_{(j)} \\
&= (da \wedge dx_{(i)}) \wedge (bdx_{(j)}) + (-1)^p (adx_{(i)}) \wedge (db \wedge dx_{(j)}) \\
&= dw_1 \wedge w_2 + (-1)^p w_1 \wedge dw_2
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
d^2(adx_{(i)}) &= d(da \wedge dx_{(i)}) = d\left(\sum_j (\partial_j a) dx_j \wedge dx_{(i)}\right) \\
&= \sum_j d(\partial_j a) \wedge dx_j \wedge dx_{(i)} = \sum_j \sum_k \partial_k(\partial_j a) dx_k \wedge dx_j \wedge dx_{(i)} \\
&= \sum_{j<k} (\partial^2_{kj} a) dx_k \wedge dx_j \wedge dx_{(i)} + \sum_{j>k} (\partial^2_{kj} a) dx_k \wedge dx_j \wedge dx_{(i)} \\
&= \sum_{j<k} (\partial^2_{kj} a) dx_k \wedge dx_j \wedge dx_{(i)} + \sum_{k>j} (\partial^2_{jk} a) dx_k \wedge dx_j \wedge dx_{(i)} \\
&= \sum_{j<k} (\partial^2_{kj} a - \partial^2_{jk} a) dx_k \wedge dx_j \wedge dx_{(i)} = 0.
\end{aligned}$$

□

Definição 1.5. *O* ***complexo de De Rham*** *de $U \in \mathbb{R}^n$ aberto é a sequência de espaços vetoriais e aplicações lineares*

$$0 \to \Omega^0(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^{n-1}(U) \xrightarrow{d} \Omega^n(U) \xrightarrow{d} 0.$$

Uma $p-$forma $w \in \Omega^p(U)$ é ***exata*** *se $w = d\eta$, para alguma $\eta \in \Omega^{p-1}(U)$;* ***fechada*** *se $dw = 0 \in \Omega^{p+1}(U)$. Como $d^2 = 0$, toda forma exata é fechada. De outro modo,*

$$Im(d : \Omega^{p-1}(U) \to \Omega^p(U)) \subseteq Ker(d : \Omega^p(U) \to \Omega^{p+1}(U)).$$

O $p-$ésimo ***grupo de cohomologia de De Rham*** *de U é o espaço vetorial quociente*

$$H^p(U) = \frac{Ker(d : \Omega^p(U) \to \Omega^{p+1}(U))}{Im(d : \Omega^{p-1}(U) \to \Omega^p(U))}.$$

A classe lateral

$$[w] = w + d(\Omega^{p-1}(U)) \in H^p(U)$$

é dita uma ***classe de cohomologia*** *de U. Note que, para $[w_1], [w_2] \in H^p(U)$, tem-se*

$$\begin{aligned} [w_1] = [w_2] \quad &\Leftrightarrow \quad w_1 - w_2 \in d(\Omega^{p-1}(U)) \\ &\Leftrightarrow \quad w_1 - w_2 \text{ é exata.} \end{aligned}$$

Exemplo 1.1. *Se $U \in \mathbb{R}^n$ é conexo, então $H^0(U) \cong \mathbb{R}$.*

Para finalizar, tem-se a definição

Definição 1.6. *Uma sequência de espaços vetoriais e mapeamentos lineares*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

é dita exata quando $Imf = Ker$.

Capítulo 2

Espaços Sobolev

Esse capítulo tratará dos Espaços Sobolev, que junto com o próximo capítulo de Operadores Elípticos, são a teoria necessária para as demostrações dos teoremas de regularidade e compacidade, requisitos fundamentais na prova do Teorema de Hodge.

Para se iniciar, será fixada notação:

2.1 Notação

Será usado neste capítulo a notação multi-index $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, onde os α_i's são inteiros. Por $|\alpha|$ se estará denotando a norma euclidiana usual

$$|\alpha| = \sqrt{{\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2 + \cdots + {\alpha_n}^2},$$

e se os α_i's são inteiros não-negativos denota-se por $[\alpha]$ a soma

$$[\alpha] = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n.$$

Se α e η são ambos n-uplas de inteiros, então

$$\eta^\alpha = \eta_1^{\alpha_1}\eta_2^{\alpha_2}\cdots\eta_n^{\alpha_n}.$$

Também será denotado por x_i a i-ésima coordenada canônica de $x \in \mathbb{R}^n$. Para cada n-upla α, definimos o α-ésimo operador derivada D^α por

$$D^\alpha u = \left(\frac{1}{i}\right)^{[\alpha]} \frac{\partial^{[\alpha]} u}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial {x_n}^{\alpha_n}},$$

onde $i = \sqrt{-1}$.
Denotar-se-á por $\wp$ o espaço vetorial complexo consistindo das funções C^∞ definidas no $\mathbb{R}^n$ e tomando valores no espaço complexo m-dimensional $\mathbb{C}^m$ e que são periódicas de período 2π em cada variável. Para $\lambda, \beta \in \mathbb{C}^m$, tomamos o produto hermitiano $\lambda \cdot \beta = \lambda_1\overline{\beta_1} + \ldots + \lambda_m\overline{\beta_m}$. De modo análogo, se $\varphi, \psi \in \wp$, então a função complexa $\varphi \cdot \psi$ é o produto hermitiano de φ e ψ, i.e,

$$\varphi \cdot \psi = \varphi_1\overline{\psi_1} + \cdots + \varphi_m\overline{\psi_m}.$$

Logo, também fica definido $|\psi| = \sqrt{\psi \cdot \psi}$. Se $\varphi \in \wp$ e f é uma função períodica (de período 2π) complexa C^∞ definida no $\mathbb{R}^n$, então fica definida $f\varphi$ como o elemento de $\wp$ cuja i-ésima componente é $\varphi_i f$. Seja $Q \in \mathbb{R}^n$ o cubo aberto

$$Q = \{p \in \mathbb{R}^n; 0 < x_i(p) < 2\pi, i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Introduzindo a norma L^2 em $\wp$ tem-se

$$||\psi|| = \frac{1}{(2\pi)^n}\left(\int_Q \psi \cdot \psi\right)^{\frac{1}{2}}.$$

A norma $||\psi||_\infty$ denotará a norma uniforme de ψ,

$$||\psi||_\infty = \sup_Q |\psi|.$$

2.2 Alguns fatos sobre séries de Fourier

Se $\varphi \in \wp$ e $\xi \in \mathbb{Z}^n$, então o ξ-ésimo coeficiente de Fourier $\varphi_\xi \in \mathbb{C}^m$ é definido por

$$\varphi_\xi = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_Q \varphi(x)e^{-ix\cdot\xi}dx.$$

A partir desta definição, mostrar-se-á que a série de Fourier $\sum_\xi \varphi_\xi e^{ix\cdot\xi}$ de φ converge unifomemente para φ. De fato, seja $k > 0$ um inteiro dado. Integrando por partes φ_ξ, tem-se

$$(2\pi)^n\varphi_\xi = \int_Q \varphi(x)e^{-ix\cdot\xi}dx = \frac{\varphi e^{-ix\cdot\xi}}{-i\xi_j}\Bigg|_{x_j=0}^{x_j=2\pi} - \int_Q \partial_j\varphi(x)\frac{e^{-ix\cdot\xi}}{-i\xi_j}dx$$

$$= \frac{1}{i\xi_j} \int_Q \partial_j \varphi(x) e^{-ix\cdot\xi} dx.$$

E aplicando sucessivamente integração por partes nas expressões obtidas, obtem-se

$$(2\pi)^n \varphi_\xi = \frac{1}{i^l \xi_{j_1} \cdots \xi_{j_l}} \int_Q (\partial_{j_1} \cdots \partial_{j_l} \varphi)(x) e^{-ix\cdot\xi} dx$$

e por conseguinte

$$(2\pi)^n \varphi_\xi = \frac{1}{(i^l \xi_{j_1} \cdots \xi_{j_l})^{2k}} \int_Q (\partial_{j_1}^{2k} \cdots \partial_{j_l}^{2k} \varphi)(x) e^{-ix\cdot\xi} dx.$$

Denotando-se por $\Pi\xi_j := \xi_{j_1} \cdots \xi_{j_l}$ o produto dos ξ_j's não nulos, tem-se

$$|\varphi_\xi| \leq \frac{1}{(2\pi)^n (\Pi\xi_j)^{2k}} (\sup_Q \partial^\alpha \varphi)|Q| = \frac{1}{(2\pi)^n (\Pi\xi_j)^{2k}} (||\partial^\alpha \varphi||_\infty)|Q|$$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^n (\Pi\xi_j)^{2k}} (\max_{[\alpha]\leq 2kn} ||\partial^\alpha \varphi||_\infty)|Q| = \frac{\max_{[\alpha]\leq 2kn} ||\partial^\alpha \varphi||_\infty}{(\Pi\xi_j)^{2k}}.$$

Sendo $c'_k = \max_{[\alpha]\leq 2kn} ||\partial^\alpha \varphi||_\infty$, tem-se

$$|\varphi_\xi| \leq \frac{c'_k}{(\Pi\xi_j)^{2k}}, \forall \xi \neq 0.$$

Como os ξ_i^2's são inteiros positivos, segue que

$$\xi_1^2(2\xi_2^2 \cdots \xi_l^2 - 1) + \xi_2^2(2\xi_1^2\xi_3^2 \cdots \xi_l^2 - 1) + \cdots + \xi_l^2(2\xi_1^2 \cdots \xi_{l-1}^2 - 1) \geq 1,$$

donde

$$(2n\xi_1^2 \cdots \xi_l^2)^k \geq (2l\xi_1^2 \cdots \xi_l^2)^k \geq (1 + \xi_1^2 + \cdots + \xi_l^2)^k$$

e portanto

$$[(\Pi\xi_j)^k]^2 \geq \frac{1}{(2n)^k}(1 + |\xi|^2)^k,$$

e daí

$$|\varphi_\xi| \leq (\max_{[\alpha]\leq 2kn} ||\partial^\alpha \varphi||_\infty) \frac{(2n)^k}{(1 + |\xi|^2)^k}.$$

Chamando $c_k = (\max_{[\alpha]\leq 2kn} ||\partial^\alpha \varphi||_\infty)(2n)^k$, chega-se que existe uma constante c_k dependendo somente de φ e de suas derivadas de ordem no máximo $2nk$ tal que

$$|\varphi_\xi| \leq \frac{c_k}{(1+|\xi|^2)^k}, \ \texttt{para todo } \xi. \tag{2.1}$$

Considere agora a questão da convergência da série $\sum_\xi (1+|\xi|^2)^{-k}$. Para isso tome o seguinte conjunto S_j, onde

$$S_j = \{\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) : \max_{1\leq i\leq n} |\xi_i| = j\}.$$

Por uma contagem simples tem-se que o número de elementos de S_j é $2^n[(j+1)^n - j^n]$, além de que para cada $\xi \in S_j$, tem-se $|\xi|^2 \geq j^2$, e então

$$s_j = \sum_{\xi\in S_j} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^k} \leq \frac{2^n[(j+1)^n - j^n]}{(1+j^2)^k} \leq \frac{2^n[\binom{n}{1}j^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n}]}{j^{2k}}$$

$$\leq \frac{2^n(\binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n})j^{n-1}}{j^{2k}} = \frac{2^n(2^n-1)}{j^{2k-n+1}}.$$

Logo tem-se que $s_j \leq cj^{n-1-2k}$, onde c é uma constante que depende só de n. Consequentemente,

$$\sum_\xi \frac{1}{(1+||\xi^2)^k} = 1 + \sum_{j\geq 1} s_j \leq 1 + c\sum_{j\geq 1} \frac{1}{j^{1+2k-n}},$$

e então a série $\sum_\xi (1+|\xi|^2)^{-k}$ converge para $1+2k-n > 1$, ou em outras palavras, para

$$k \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, \tag{2.2}$$

onde $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a x.

Assim, a série de Fourier

$$\sum_\xi \varphi_\xi e^{ix\cdot\xi}$$

converge uniformemente para uma função contínua Φ.

Afirma-se que $\Phi = \varphi$. De fato, isso decorre da completude do sistema trigonométrico e pode ser deduzido como segue do teorema de Stone-Weierstrass. Seja $\psi = \varphi - \Phi$, e seja $t \in \wp$ um polinômio trigonométrico, i.e, t é uma combinação linear finita de termos da forma $a_\xi e^{ix\cdot\xi}$ para $a_\xi \in \mathbb{C}^m$. Desde que φ e Φ tem os mesmos coeficientes de Fourier,

$$\int_Q \psi \cdot t = 0 \tag{2.3}$$

Agora, se $\epsilon > 0$ é dado, então pelo teorema de Stone-Weierstrass há um polinômio trigonométrico $t \in \wp$ tal que $\|\psi - t\|_\infty < \epsilon$. Portanto, usando (2.3), tem-se

$$\left|\int_Q \psi \cdot \psi\right| = \left|\int_Q \psi \cdot (\psi - t)\right| \leq \epsilon(2\pi)^n \|\psi\|.$$

Consequentemente

$$\|\psi\| \leq \epsilon.$$

Mas, desde que $\epsilon > 0$ é arbitrário e ψ contínuo, então $\psi = 0$. Portanto, as séries de Fourier de uma função periódica C^∞ φ converge uniformemente para φ,

$$\varphi(x) = \sum_\xi \varphi_\xi e^{ix\cdot\xi}. \tag{2.4}$$

Lembrando que $D^\alpha = \frac{1}{i^{[\alpha]}}\partial^\alpha = \frac{1}{i}\partial_j(\frac{1}{i^{[\beta]}}\partial^\beta) = D_j D^\beta$, tem-se

$$\begin{aligned}
(D^\alpha\varphi)_\xi &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_Q (D^{\alpha\varphi})(x)e^{ix\cdot\xi}dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_Q (D_j D^\beta\varphi)(x)e^{ix\cdot\xi}dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}(D^\beta\varphi)e^{ix\cdot\xi}\Big|_{x_j=0}^{x_j=2\pi} - \frac{1}{(2\pi)^n}\int_Q (D^\beta\varphi)(x)D_j e^{-ix\cdot\xi}dx \\
&= \frac{-1}{(2\pi)^n}(-\xi_j)\int_Q (D^\beta\varphi)(x)e^{-ix\cdot\xi}dx.
\end{aligned}$$

Assim, vem

$$(D^\alpha \varphi)_\xi = \xi_j (D^\beta \varphi)_\xi \tag{2.5}$$

se $D^\alpha = D_j D^\beta$.

Por indução, obtem-se

$$(D^\alpha \varphi)_\xi = \xi^\alpha \varphi_\xi.$$

Portanto, segue que

$$D^\alpha \varphi(x) = \sum_\xi \xi^\alpha \varphi_\xi e^{ix\cdot\xi} \tag{2.6}$$

De (2.4) e da ortogonalidade do sistema trigonométrico, obtem-se a identidade de Parseval:

$$\int_Q |\varphi|^2 = (2\pi)^n \sum_\xi |\varphi_\xi|^2. \tag{2.7}$$

Aplicando (2.7) a $D^\alpha \varphi$, obtem-se

$$\|D^\alpha \varphi\|^2 = \sum_\xi \xi^{2\alpha} |\varphi_\xi|^2. \tag{2.8}$$

Usando (2.8) e sendo $t \geq 0$ um inteiro dado, tem-se

$$\sum_{[\alpha]=0}^{t} \|D^\alpha \varphi\|^2 = \sum_{[\alpha]=0}^{t} \sum_\xi \xi^{2\alpha} |\varphi_\xi|^2 = \sum_\xi (\sum_{[\alpha]=0}^{t} \xi^{2\alpha}) |\varphi_\xi|^2. \tag{2.9}$$

Mas

$$\sum_{[\alpha]=0}^{t} \xi_1^{2\alpha_1} \cdots \xi_n^{2\alpha_n} \geq 1 + \sum_j \xi_j^2 + \sum_j \xi_j^4 + \cdots + \sum_j \xi_j^{2t} \tag{2.10}$$

e

$$(1+|\xi|^2)^t = 1 + \binom{t}{1}|\xi|^2 + \binom{t}{2}|\xi|^4 + \cdots + \binom{t}{t}|\xi|^{2t}. \tag{2.11}$$

Pela desigualdade entre a médias potenciais,

$$\left(\frac{\xi_1^{2k} + \cdots + \xi_n^{2k}}{n}\right)^{\frac{1}{k}} \geq \frac{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2}{n} \therefore \sum_j \xi_j^{2k} \geq \frac{|\xi|^{2k}}{n^{k-1}}$$

e (2.10) e (2.11) dá

$$\begin{aligned}
\sum_{[\alpha]=0}^{t} \xi^{2\alpha} &\geq 1 + \frac{|\xi|^2}{n^0} + \frac{|\xi|^4}{n^1} + \cdots + \frac{|\xi|^{2t}}{n^{t-1}} = 1 + \sum_{k=1}^{t} \frac{|\xi|^{2k}}{n^{k-1}} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{t} \frac{1}{\binom{t}{k} n^{k-1}} \cdot \binom{t}{k}|\xi|^{2k} \\
&\geq 1 + \frac{1}{\max_{1\leq k\leq t} \binom{t}{k} n^{k-1}} \sum_{k=1}^{t} \binom{t}{k}|\xi|^{2k} \\
&\geq \underbrace{\frac{1}{\max_{1\leq k\leq t} \binom{t}{k} n^{k-1}}}_{c(t,n)} (1 + \sum_{k=1}^{t} \binom{t}{k}|\xi|^{2k}) \\
&= c(t,n)(1+|\xi|^2)^t.
\end{aligned}$$

Logo, $c\sum \xi(1+|\xi|^2)^t|\varphi_\xi|^2 \leq \sum_{[\alpha]=0}^{t} \|D^\alpha\varphi\|^2$. Como se tem que

$$\sum_{[\alpha]=0}^{t} \xi^{2\alpha} \leq (1+|\xi|^2)^t$$

e por causa de (2.9), então se chega à

$$c\sum_{\xi} (1+|\xi|^2)^t|\varphi_\xi|^2 \leq \sum_{[\alpha]=0}^{t} \|D^\alpha\varphi\|^2 \leq \sum_{\xi} (1+|\xi|^2)^t|\varphi_\xi|^2. \tag{2.12}$$

2.3 Os espaços Sobolev H_s

Seja $\mathcal{S}$ denotando o espaço vetorial complexo consistindo de todas as sequências de vetores complexos em $\mathbb{C}^m$ indexados por n-uplas de inteiros $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Definição 2.1. *Seja $u \in \mathcal{S}$, $u = \{u_\xi\}$ onde ξ percorre todas a n-uplas de inteiros e onde $u_\xi \in \mathbb{C}^m$. Para cada inteiro s o **espaço de Sobolev** H_s é o subespaço de $\mathcal{S}$ definido por*

$$H_s = \{u \in \mathcal{S}; \sum_\xi (1 + |\xi|^2)^s |u_\xi|^2 < \infty\}.$$

A desigualdade de Cauchy-Schwarz dá que

$$\left| \sum_\xi (1 + |\xi|^2)^{\frac{s+t}{2}} u_\xi \cdot v_\xi \right|^2 \leq \left(\sum_\xi (1 + |\xi|^2)^s |u_\xi|^2 \right) \left(\sum_\xi (1 + |\xi|^2)^t |v_\xi|^2 \right)$$

e então se define um produto interno em H_s por

$$\langle u, v \rangle_s = \sum_\xi (1 + |\xi|^2)^s u_\xi \cdot v_\xi,$$

cuja norma associada é

$$\|u\|_s = \langle u, u \rangle_s^{\frac{1}{2}}.$$

Segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz que $\langle u, v \rangle_s$ existe se $u \in H_t$ e $v \in H_{t'}$, onde $\frac{t+t'}{2} = s$.

Veja que H_s trata-se de um espaço de Hilbert, pois H_s é simplesmente um espaço l^2 em que o espaço medida é o conjunto de todas as $n-$uplas de inteiros ξ, e a norma é norma do l^2 ponderada por $(1 + |\xi|^2)^s$.

Define-se uma transformação linear K^t em $\mathcal{S}$ para cada inteiro t por

$$(K^t u)_\xi = (1 + |\xi|^2)^t u_\xi.$$

Finalmente, identificamos $\wp$ como subespaço de $\mathcal{S}$ associando cada $\varphi \in \wp$ com sua sequência de Fourier $\{\varphi_\xi\}$. Devido a (2.6), podemos estender o operador D^α de $\wp$ a todo o $\mathcal{S}$ colocando

$$(D^\alpha u)_\xi = \xi^\alpha u_\xi.$$

Agora, usando (2.1), obtem-se

$$|\varphi_\xi|^2 \leq \frac{c_k^2}{(1+|\xi|^2)^{2k}}, \;\; \texttt{para todo } \xi,$$

donde

$$\sum_\xi (1+|\xi|^2)^s |\varphi_\xi|^2 \leq \sum_\xi \frac{c_k^2}{(1+|\xi|^2)^{2k-s}},$$

onde o termo do lado direito converge para

$$2k - s \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1. \tag{2.13}$$

Daí, tomando um k conveniente de forma que (2.13) seja verdade, tem-se que $\wp \subset H_s$ para cada s. Logo, faz sentido considerar os elementos de H_s como series de Fourier formais ou funções generalizadas.

Algumas propriedades dos espaços H_s são apresentadas no seguinte

Teorema 2.1.

(a) Seja s um inteiro não-negativo. Então há constantes c e c', dependendo no máximo de s e n, tal que

$$c\|\varphi\|_s \leq \sum_{[\alpha]=0}^{s} \|D^\alpha \varphi\| \leq c'\|\varphi\|_s \textit{ para todo } \varphi \in \wp. \tag{2.14}$$

Além do mais, para o caso $s = 0$, tem-se a igualdade

$$\|\varphi\| = \|\varphi\|_0 \tag{2.15}$$

(b) Se $t < s$, então $\|u\|_t \leq \|u\|_s$, então $H_s \subset H_t$. Então a união $\bigcup_{s\in\mathbb{Z}} H_s$ é um subespaço de $\mathcal{S}$, que será denotado por $H_{-\infty}$.

(c) $\wp$ é um subespaço denso de H_s para cada s.

(d) K^t *é uma isometria de* H_s *em* H_{s-2t} *com inversa* K^{-t}, *i.e,*

$$\|u\|_s = \|K^t u\|_{s-2t}; \tag{2.16}$$

e K^t *mapeia* $\wp$ *em* $\wp$. *Se* $\varphi \in \wp$ *e* $t \geq 0$, *então*

$$K^t \varphi = \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)^t \varphi. \tag{2.17}$$

Além do mais, para todo s *e* t *e todo* $u, v \in H_s$

$$\langle u, v\rangle_s = \langle u, K^t v\rangle_{s-t} = \langle K^t u, v\rangle_{s-t} \tag{2.18}$$

(e) ***(Desigualdade de Schwartz)*** *Se* $u \in H_{s+t}$ *e* $v \in H_{s-t}$, *então*

$$|\langle u, v\rangle_s| \leq \|u\|_{s+t}\|v\|_{s-t}.$$

(f) Se $u \in H_{s+t}$, *então*

$$\|u\|_{s+t} = \sup_{v \in H_{s-t}, v \neq 0} \frac{|\langle u, v\rangle_s|}{\|v\|_{s-t}}.$$

(g) ***(Desigualdade de Peter-Paul)*** *Dados inteiros* $t' < t < t''$ *e* $\epsilon > 0$, *há uma constante* $c(\epsilon) > 0$ *tal que*

$$\|u\|_t^2 \leq \epsilon\|u\|_{t''}^2 + c(\epsilon)\|u\|_{t'}^2$$

para todo $u \in H_{t''}$.

(h) D^α *é um operador limitado de* $H_{s+[\alpha]}$ *para* H_s; *de fato,*

$$\|D^\alpha u\|_s \leq \|u\|_{s+[\alpha]},$$

para todo $u \in H_{s+[\alpha]}$.

(i) Seja w uma função complexa periódica C^∞ definida sobre $\mathbb{R}^n$. Então dado um inteiro s, há inteiros positivos c e c', com c dependendo somente de s e n, e c' dependendo de s, n e de w e suas derivadas, tal que

$$\|w\varphi\|_s \leq c\|w\|_\infty \|\varphi\|_s + c'\|\varphi\|_{s-1}, \text{ para } \varphi \in \wp. \tag{2.19}$$

Em particular, há uma constante c'' dependendo de w, s e n tal que

$$\|w\varphi\|_s \leq c''\|\varphi\|_s, \tag{2.20}$$

e então a multiplicação por w estede-se por continuidade a um operador linear limitado sobre H_s.

(j) Seja w uma função complexa periódica C^∞ definida sobre $\mathbb{R}^n$. Então dado um inteiro s, há inteiros positivos c tal que

$$|\langle wu, v\rangle_s - \langle u, \overline{w}v\rangle_s| \leq c(\|u\|_s\|v\|_{s-1} + \|u\|_{s-1}\|v\|_s) \tag{2.21}$$

para cada $u, v \in H_s$. Para o caso $s = 0$, tem-se

$$\langle wu, v\rangle_0 = \langle u, \overline{w}v\rangle_0. \tag{2.22}$$

Prova.

(a) Veja que (2.12) garante a existência de $c > 0$, dependendo de s e n, tal que

$$c\|\varphi\|_s^2 \leq \sum_{[\alpha]=0}^{s} \|D^\alpha\varphi\|^2 \leq \|\varphi\|_s^2. \tag{2.23}$$

Mas pela desigualdade entre as médias aritmética e quadrática e pela desigualdade acima, tem-se

$$\|\varphi\|_s^2 \geq \sum_{[\alpha]=0}^{s} \|D^\alpha\varphi\|^2 \geq \frac{1}{s+1}\left(\sum_{[\alpha]=0}^{s} \|D^\alpha\varphi\|\right)^2.$$

Logo,

$$\sum_{[\alpha]=0}^{s} \|D^\alpha \varphi\| \leq \underbrace{\sqrt{s+1}}_{c'} \|\varphi\|_s.$$

Para a desigualdade do outro lado, basta ver que como os termos da soma $\sum_{[\alpha]=0}^{s} \|D^\alpha \varphi\|$ são positivos, vale a desigualdade

$$\sum_{[\alpha]=0}^{s} \|D^\alpha \varphi\|^2 \leq \left(\sum_{[\alpha]=0}^{s} \|D^\alpha \varphi\| \right)^2.$$

Juntando o fato acima com a desigualdade do lado esquerdo de 2.23, chega-se à

$$\underbrace{\sqrt{c}}_{c} \|\varphi\|_s \leq \sum_{[\alpha]=0}^{s} \|D^\alpha \varphi\|.$$

Já a igualdade apresentada em (2.15) segue imediata da identidade de Parseval.

(b) Esse item segue imediatamente da definição da norma em H_s e do fato de que $(1+|\xi|^2)^t \leq (1+|\xi|^2)^s$ se $t < s$.

(c) Que $\wp$ é um subespaço de H_s para cada s já foi observado antes desse teorema. Para ver que $\wp$ é denso, basta notar que cada $u \in H_s$ tal que apenas um número finito de u_ξ são não nulos pertence a $\wp$. De fato, basta considerar a função complexa C^∞ periódica $u = \sum_\xi u_\xi e^{ix\cdot\xi}$, que está bem definida (e então pertence a $\wp$) porque existe apenas uma quantidade finita de termos nessa soma.

(d) Note que

$$
\begin{aligned}
\|u\|_s^2 &= \sum_{\xi} (1+|\xi|^2)^s |u_\xi|^2 \\
&= \sum_{\xi} (1+|\xi|^2)^{s-2t} |(1+|\xi|^2)^t u_\xi|^2 \\
&= \sum_{\xi} (1+|\xi|^2)^{s-2t} |(K^t u)_\xi|^2 \\
&= \|K^t u\|_{s-2t}^2,
\end{aligned}
$$

e segue (2.16). Como considerado anteriormente, $\langle u, v\rangle_s$ está bem definido se $u, v \in H_s$. Então

$$
\begin{aligned}
\langle u, v\rangle_s &= \sum_{\xi} (1+|\xi|^2)^s u_\xi \cdot v_\xi \\
&= \sum_{\xi} (1+|\xi|^2)^{s-t} ((1+|\xi|^2)^t u_\xi) \cdot v_\xi \\
&= \sum_{\xi} (1+|\xi|^2)^{s-t} (K^t u)_\xi \cdot v_\xi \\
&= \langle K^t u, v\rangle_s.
\end{aligned}
$$

Analogamente, $\langle u, v\rangle_s = \langle u, K^t v\rangle_s$ e segue (2.18).

Considere agora $K^t\varphi = \{(1+|\xi|^2)^t \varphi_\xi\}$. De (2.1), segue que

$$
(1+|\xi|^2)^t |\varphi_\xi| \leq \frac{c_k}{(1+|\xi|^2)^{s-t}}.
$$

Então para todo t, se s tomado convenientemente de forma que $s - t \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$, segue que a série

$$
\sum_{\xi} (1+|\xi|^2)^t \varphi_\xi e^{ix\cdot\xi}
$$

converge uniformemente. Da desigualdade

$$
\xi^\alpha \leq \xi^{2\alpha} \leq (1+|\xi|^2)^{[\alpha]}, \tag{2.24}
$$

e novamente de (2.1), segue que

$$\xi^\alpha(1+|\xi|^2)^t|\varphi_\xi| \leq \frac{c_k}{(1+|\xi|^2)^{s-[\alpha]-t}},$$

e portanto a derivada formal de $K^t\varphi$ também converge uniformemente, já que

$$\sum_\xi D^\alpha(1+|\xi|^2)^t\varphi_\xi e^{ix\cdot\xi} = \sum_\xi \xi^\alpha(1+|\xi|^2)^t\varphi_\xi e^{ix\cdot\xi}.$$

Logo, K^t mapeia $\wp$ em $\wp$.

Para provar (2.17), será calculado o $\xi-$ésimo coeficiente de Fourier da aplicação

$$\varphi \mapsto \left(1-\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)^t \varphi$$

para mostrar que o mesmo coincide com $(K^t\varphi)_\xi$. De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi)^n}\int_Q \left(1-\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)^t \varphi e^{-ix\cdot\xi}dx &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_Q \left(\sum_{[\alpha]=t}(-1)^{2([\alpha]-\alpha_1)}\frac{t!}{\alpha!}D^{2\overline{\alpha}}\right)\varphi\cdot e^{-ix\cdot\xi}dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_Q \sum_{[\alpha]=t}\frac{t!}{\alpha!}D^{2\overline{\alpha}}\varphi\cdot e^{-ix\cdot\xi}dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{[\alpha]=t}\frac{t!}{\alpha!}\int_Q D^{2\overline{\alpha}}\varphi\cdot e^{-ix\cdot\xi}dx \\
&= \sum_{[\alpha]=t}\frac{t!}{\alpha!}\xi^{2\overline{\alpha}}\varphi_\xi \\
&= \left(\sum_{[\alpha]=t}\frac{t!}{\alpha!}\xi^{2\overline{\alpha}}\right)\varphi_\xi \\
&= (1+|\xi|^2)^t\varphi_\xi,
\end{aligned}$$

onde se $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$, então $\overline{\alpha} = (\alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1})$ e $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_{n+1}!$. Além do mais, a quarta igualdade acima segue de (2.6). Logo, vale (2.17).

(e) A desigualdade de Schwartz segue imediatamente de desigualdade de Cauchy-Schwarz.

(f) Segue do item (e) que

$$\|u\|_{s+t} \geq \sup_{v \in H_{s-t}, v \neq 0} \frac{|\langle u, v\rangle_s|}{\|v\|_{s-t}}.$$

Para provar a igualdade em (f), seja $v = K^t u$. Então, pelo item (d),

$$\|u\|_{s+t} = \frac{\langle u, u\rangle_{s+t}}{\|u\|_{s+t}} = \frac{\langle u, v\rangle_s}{\|v\|_{s-t}}.$$

(g) Para provar a desigualdade de Peter-Paul, primeiro observe que para qualquer real positivo y,

$$1 \leq y^{t''-t} + \left(\frac{1}{y}\right)^{t-t'}$$

desde que y ou $\frac{1}{y}$ é maior ou iagual a 1. Colocando na desigualdade acima

$$y = \epsilon^{\frac{1}{t''-t}}(1+|\xi|^2),$$

obtem-se

$$(1+|\xi|^2)^t \leq \epsilon(1+|\xi|^2)^{t''} + \underbrace{\epsilon^{(t'-t)/(t''-t)}}_{c(\epsilon)}(1+|\xi|^2)^{t'},$$

do qual a desigualdade de Peter-Paul sai imediatamente.

(h) Da desigualdade (2.24), segue que

$$\|D^\alpha u\|_s^2 = \sum_\xi (1+|\xi|^2)^s \xi^{2\alpha} |\varphi_\xi|^2 \leq \sum_\xi (1+|\xi|^2)^{s+[\alpha]} \xi^{2\alpha} |\varphi_\xi|^2 = \|u\|_{s+[\alpha]}^2.$$

(i) Primeiro veja que, assumindo (2.19), e pelo item (b), tem-se

$$\|w\varphi\|_s \leq \underbrace{(c\|w\|_\infty + c')}_{c''}\|\varphi\|_s.$$

Para provar (2.19), primeiro será considerado o caso em que $s \geq 0$. Seja $\varphi \in \wp$. Então aplicando (2.14), obtem-se

$$\begin{aligned}
\|w\varphi\|_s &\leq (\text{const}) \sum_{[\alpha]=0}^{s} \|D^\alpha w\varphi\| \\
&\leq (\text{const}) \sum_{[\alpha]=0}^{s} \|wD^\alpha\varphi\| + (\text{const}) \sum_{[\alpha]=0}^{s} \|D^\alpha w\varphi - wD^\alpha\varphi\| \\
&\leq c\|w\|_\infty\|\varphi\|_s + (\text{const}) \sum_{[\alpha]=0}^{s-1} \|D^\alpha\varphi\| \\
&\leq c\|w\|_\infty\|\varphi\|_s + c'\|\varphi\|_{s-1},
\end{aligned}$$

onde na terceira desigualdade acima, foi usado que

$$\begin{aligned}
\|D^\alpha w\varphi - wD^\alpha\varphi\| &= \left\|\sum_{\beta\leq\alpha} \{D^{\alpha-\beta} w D^\beta\varphi\} - wD^\alpha\varphi\right\| \\
&= \left\|\sum_{\beta<\alpha} D^{\alpha-\beta} w D^\beta\varphi\right\| \\
&\leq (\text{const}) \sum_{\beta<\alpha} \|D^\beta\varphi\|, \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

onde a notação $\beta \leq \alpha$ indica que $\beta_i \leq \alpha_i, \forall i$, $\beta < \alpha$ indica que $\beta_i \leq \alpha_i \forall i$ e existe j tal que $\beta_j < \alpha_j$ e a constante no último estágio depende de w e suas derivadas. Daí,

$$\begin{aligned}
\sum_{[\alpha]=0}^{s} \|D^\alpha w\varphi - wD^\alpha\varphi\| &\leq (\text{const}) \sum_{[\alpha]=0}^{s} \sum_{\beta<\alpha} \|D^\beta\varphi\| \\
&= (\text{const}) \sum_{[\alpha]=0}^{s-1} a_\alpha \|D^\alpha\varphi\| \\
&\leq (\text{const}) \sum_{[\alpha]=0}^{s-1} \|D^\alpha\varphi\|,
\end{aligned}$$

onde os a_α's no segundo estágio acima são a quantidade de vezes que que cada D^α aparaceu na soma logo anterior. Segue portanto a desigualdade para $s \geq 0$. Para $s < 0$, primeiro calcula-se $wK^{-s} - K^{-s}w$ aplicado em um elemento ψ de $\wp$, que por (2.17) (em particular, usando a conta que foi feita para prová-lo), é

$$\begin{aligned}
(wK^{-s} - K^{-s}w)(\psi) &= \sum_{[\alpha]=-s} wb_\alpha D^{2\overline{\alpha}}\psi - \sum_{[\alpha]=-s} wb_\alpha D^{2\overline{\alpha}}(w\psi) \\
&= \sum_{[\alpha]=-s} \sum_{\beta<2\overline{\alpha}} b_\alpha D^{2\overline{\alpha}} w D^\beta\psi = \sum_{[\alpha]=0}^{-2s-1} c_\alpha D^\alpha\psi, \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

onde a notação empregada é a mesma usada na prova de (2.17), $b_\alpha = \dfrac{(-s)!}{\alpha!}$ e c_α são combinações das derivadas de w. Agora então,

$$\begin{aligned}
\|w\varphi\|_s^2 &= \langle w\varphi, w\varphi\rangle_s = \langle wK^{-s}K^s\varphi, K^s w\varphi\rangle_0 \\
&= \langle K^{-s}wK^s\varphi, K^s w\varphi\rangle_0 + \langle (wK^{-s} - K^{-s}w)K^s\varphi, K^s w\varphi\rangle_0 \\
&\leq |\langle K^{-s}wK^s\varphi, K^s w\varphi\rangle_0| + \left| \left\langle \sum_{[\alpha]=0}^{-2s-1} c_\alpha D^\alpha K^s\varphi, K^s w\varphi \right\rangle_0 \right| \qquad (2.27)
\end{aligned}$$

onde usamos (2.26) no último estágio. Mas, pelo caso $s \geq 0$, tem-se

$$\begin{aligned}
|\langle K^{-s}wK^s\varphi, K^s w\varphi\rangle_0| &= |\langle wK^s\varphi, K^s w\varphi\rangle_{-s}| \leq \|wK^s\varphi\|_{-s}\|K^s w\varphi\|_{-s} \\
&\leq (c\|w\|_\infty \|K^s\varphi\|_{-s} + k'\|K^s\varphi\|_{-s-1})\|K^s w\varphi\|_{-s} \\
&= (c\|w\|_\infty \|\varphi\|_s + k'\|\varphi\|_{s-1})\|w\varphi\|_s. \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

Para o último termo em (2.27),

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle \sum_{[\alpha]=0}^{-2s-1} c_\alpha D^\alpha K^s\varphi, K^s w\varphi \right\rangle_0\right| &\leq \text{const} \sum_{[\alpha]=0}^{-2s-1} |\langle D^\alpha K^s\varphi, K^s w\varphi\rangle_0| \\
&\leq \text{const} \sum_{[\alpha]=0}^{-2s-1} \|D^\alpha K^s\varphi\|_s \|K^s w\varphi\|_{-s} \\
&\leq \text{const} \sum_{[\alpha]=0}^{-2s-1} \|K^s\varphi\|_{s+[\alpha]} \|K^s w\varphi\|_{-s} \\
&\leq \text{const}\|K^s\varphi\|_{-s-1}\|K^s w\varphi\|_{-s} \\
&= \text{const}\|\varphi\|_{s-1}\|w\varphi\|_s. \qquad (2.29)
\end{aligned}$$

Portanto, para $s < 0$, (2.19) segue de (2.27), (2.28) e (2.29).

(j) Como $\wp$ é denso em H_s, basta provar (2.21) e (2.22) para $\varphi, \psi \in \wp$. Para (2.22), veja que

$$\langle w\psi, \varphi\rangle_0 = \sum_\xi (w\psi)\cdot\varphi = \sum_\xi \psi\cdot(\overline{w}\varphi) = \langle\psi, \overline{w}\varphi\rangle_0,$$

onde a segunda igualdade vem das propriedades do produto hermitiano. Para (2.21), considere s negativo. Usando o item (d) e a equação (2.22), obtem-se

$$\begin{aligned}
\langle w\varphi, \psi\rangle_s &= \langle wK^{-s}K^s\varphi, K^s\psi\rangle_0 \\
&= \langle K^{-s}K^s\varphi, \overline{w}K^s\psi\rangle_0 = \langle K^s\varphi, K^{-s}\overline{w}K^s\psi\rangle_0 \\
&= \langle\varphi, \overline{w}\psi\rangle_s + \langle K^s\varphi, (K^{-s}\overline{w} - \overline{w}K^{-s})K^s\psi\rangle_0.
\end{aligned}$$

Segue como em (2.29) que

$$|\langle w\varphi, \psi\rangle_s - \langle\varphi, \overline{w}\psi\rangle_s| \leq (\text{const})\|\varphi\|_s\|\psi\|_{s-1}.$$

Por simetria, tem-se também

$$|\langle w\varphi, \psi\rangle_s - \langle\varphi, \overline{w}\psi\rangle_s| \leq (\text{const})\|\psi\|_s\|\varphi\|_{s-1}.$$

Portanto, (2.21) está provado para s negativo. Para s positivo é análogo. Segue o teorema.

$\square$

Para o que segue, seja $\varphi \in \wp$ e $h \in \mathbb{R}^n$. Então, o ξ-ésimo coeficiente de Fourier da translação $\psi(x) = \varphi(x+h)$ é $e^{ih\cdot\xi}\varphi_\xi$, pois de (2.4)

$$\psi(x) = \varphi(x+h) \quad = \quad \sum_{\xi} \varphi_\xi e^{i(x+h)\cdot\xi} = \sum_{\xi} \varphi_\xi e^{ih\cdot\xi} e^{ix\cdot\xi}.$$

Isso motiva a definição de translação para $u \in \mathcal{S}$ por um $h \in \mathbb{R}^n$ como

$$T_h(u) = \{e^{ih\cdot\xi} u_\xi\}.$$

O **quociente diferença de u determinado por um h não-nulo** é o elemento

$$u^h = \frac{T_h(u) - u}{|h|} = \left\{ \left(\frac{e^{ih\cdot\xi} - 1}{|h|} \right) u \right\} \in \mathcal{S}.$$

Note que se $\varphi \in \wp$, como $T_h(\varphi)(x) = \varphi(h+x)$, então

$$\varphi^h(x) = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{|h|}.$$

Observe que também que se $u \in H_s$, então

$$\|T_h(u)\|_s = \|u\|_s,$$

então T_h é uma isometria sobre H_s. Em particular, segue que se $u \in H_s$, então $u^h \in H_s$.

Proposição 2.1. *Seja $u \in H_s$. Então $u \in H_{s+1}$ se, e somente se, os u^h são uniformemente limitados na norma s.*

Prova. De fato, segue da desigualdade

$$\begin{aligned}\left|\frac{e^{ih\cdot\xi}-1}{|h|}\right|^2 &= \left|\frac{(\cos\cdot\xi)-1}{|h|}\right|^2+\left|\frac{\sin h\cdot\xi}{|h|}\right|^2=\frac{2(1-\cos h\cdot\xi)}{|h|^2}\\ &= \frac{4\sin^2(\frac{1}{2}h\dot{\xi})}{|h|^2}\leq\frac{(h\cdot\xi)^2}{|h|^2}\leq(1+|\xi|^2)\end{aligned}$$

que $\|u^h\|_s \leq \|u\|_{s+1}$ e portanto os u^h são uniformemente limitados na norma s se $u \in H_s$.

Agora suponha que existe uma constante k tal que $\|u^h\|_s \leq k$ para todo $h \in \mathbb{R}^n$ não-nulo. Para cada inteiro positivo N, seja u_N o elemento de H_s obtido pelo truncamento de u em N, i.e

$$(u_N)_\xi = \begin{cases} u_\xi, & \texttt{se } |\xi| < N \\ 0, & \texttt{caso contrário}. \end{cases}$$

Veja que se mostrado que os $\|u_N\|_{s+1}$ são uniformemente limitados, então fazendo $N \to \infty$, obtem-se que $\|u\|_{s+1} < \infty$. Para isso, seja $(e_1, \cdots, e_n)$ a base ortonormal padrão do $\mathbb{R}^n$, e seja $h = te_i$. Então

$$\left|\frac{e^{ih\cdot\xi}-1}{|h|}\right|^2=\left|\frac{e^{it\xi_i}-1}{|h|}\right|^2\to|\xi_i|^2 \text{ quando } t\to 0. \tag{2.30}$$

Desde que só há uma quantidade finita de ξ tal que $|\xi| < N$, e desde que por hipótese

$$\sum_{|\xi|<N}(1+|\xi|^2)^s|u_\xi|^2\left|\frac{e^{ih\cdot\xi}-1}{|h|}\right|^2\leq k^2,$$

segue de (3.6) que

$$\sum_{|\xi|<N}(1+|\xi|^2)^s|u_\xi|^2|\xi_i|^2\leq k^2.$$

Daí

$$\sum_{|\xi|<N}(1+|\xi|^2)^s|u_\xi|^2|\xi|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{|\xi|<N}(1+|\xi|^2)^s|u_\xi|^2|\xi_i|^2 \leq nk^2.$$

Donde

$$\|u_N\|_{s+1} = \sum_{|\xi|<N}(1+|\xi|^2)^{s+1}|u_\xi|^2 \leq nk^2 + \|u\|_s^2,$$

e então os $\|u_n\|_{s+1}$ são uniformemente limitados, e consequentemente $u \in H_{s+1}$.

□

Lema 2.1 (Sobolev). *Se $t \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ e $u \in H_t$, então a série $\sum_\xi u_\xi e^{ix\cdot\xi}$ converge uniformemente. Portanto cada $u \in H_t$ para $t \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ correponde a uma função contínua.*

Prova. É suficiente demonstrar que a série converge absolutamente, $\sum_\xi |u_\xi| < \infty$. Agora,

$$\begin{aligned}
\sum_{|\xi|<N}|u_\xi| &= \sum_{|\xi|<N}(1+|\xi|^2)^{\frac{-t}{2}}(1+|\xi|^2)^{\frac{t}{2}}|u_\xi| \\
&\leq \left(\sum_{|\xi|<N}(1+|\xi|^2)^{-t}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{|\xi|<N}(1+|\xi|^2)^{t}|u_\xi|\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{|\xi|<N}(1+|\xi|^2)^{-t}\right)^{\frac{1}{2}}\|u\|_t.
\end{aligned}$$

Portanto o resultado segue de (2.2).

□

Corolário 2.3.1. *Se $u \in H_t$ onde $t \geq \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor + 1 + m$, então $D^\alpha u = \sum \xi^\alpha u_\xi e^{ix\cdot\xi}$ converge uniformemente para $[\alpha] \leq m$. Portanto cada $u \in H_t$ para esse intervalo de t's corresponde a uma função $\sum_\xi u_\xi e^{ix\cdot\xi}$ de classe C^m.*

Prova. Com $u \in H_t$ para $t \geq \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor + 1 + m$ e com $[\alpha] \leq m$, segue do teorema 2.1(h) que $D^\alpha u \in H_{t-[\alpha]}$, onde $t - [\alpha] \geq t - m \geq \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor + 1$. Segue portanto do lema de Sobolev que $\sum_\xi \xi^\alpha u_\xi e^{ix\cdot\xi}$ converge uniformente. Agora essa série é a α-ésima derivada formal da série $\sum_\xi u_\xi e^{ix\cdot\xi}$. Portanto $\sum_\xi u_\xi e^{ix\cdot\xi}$ é de casse C^m.

□

Corolário 2.3.2. *Da prova do lema de Sobolev segue que se $t \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, então há uma constante $c > 0$ tal que se $\varphi \in \wp$, então*

$$\|\varphi\|_\infty \leq c\|\varphi\|_t. \tag{2.31}$$

Aplicando (2.31) a $D^\alpha\varphi$ e usando o teorema 2.1(h), obtem-se

$$\|D^\alpha\varphi\|_\infty \leq c\|\varphi\|_{t+[\alpha]}. \tag{2.32}$$

Lema 2.2 (Rellich)**.** *Seja $\{u^i\}$ uma sequência de elementos de H_t com $\|u^i\|_t \leq 1$. Se $s < t$, então há uma subsequência de $\{u^i\}$ que converge em H_s.*

Prova. Por hipótese

$$\sum_{|\xi|<N} (1+|\xi|^2)^t |u^i_\xi| \leq 1. \tag{2.33}$$

Então, para cada ξ fixo, os elementos da sequência $\{|(1+|\xi|^2)^{t/2} u^i_\xi|\}$ são todos limitados por 1, então a sequência $\{(1+|\xi|^2)^{t/2} u^i_\xi\}$ tem uma subsequência convergente em $\mathbb{C}^m$. Pelo processo usual diagonal, pode-se selecionar uma subsequência $\{u^{j_i}\}$ tal que a sequência $\{(1+|\xi|^2)^{t/2} u^{j_i}_\xi\}$ converge em $\mathbb{C}^m$ para cada ξ fixo. Afirma-se que $\{u^{j_i}\}$ é de Cauchy, e então convergente, em H_s se $s < t$. De fato, seja $\epsilon > 0$ dado. Agora,

$$\begin{aligned} \|u^{j_i} - u^{j_k}\|_s^2 &= \sum_{|\xi|<N} (1+|\xi|^2)^{s-t} (1+|\xi|^2)^t |u^{j_i} - u^{j_k}|^2 \\ &\quad + \sum_{|\xi|\geq N} (1+|\xi|^2)^{s-t} (1+|\xi|^2)^t |u^{j_i} - u^{j_k}|^2. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Para a segunda soma em (2.34), tem-se que $|\xi|^2 \geq N^2$ e portanto $(1 + |\xi|^2)^{s-t} \leq (1 + N^2)^{s-t}$. Logo, a mesma é limitada por

$$(1 + N^2)^{s-t} \sum_{|\xi| \geq N} (1 + |\xi|^2)^t (|u^{j_i}|^2 + 2|u^{j_i}||u^{j_k}| + |u^{j_k}|^2),$$

que é menor ou igual a $4(1+N^2)^{s-t}$, por causa de (2.33). Desde que $s-t < 0$, podemos tomar N suficientemente grande de modo que $4(1+N^2)^{s-t}$ é menor do que $\frac{\epsilon}{2}$, digamos $N = N_0$. A primeira soma em (2.34) é então limitada por

$$\sum_{|\xi| < N_0} (1 + |\xi|^2)^t |u^{j_i} - u^{j_k}|^2, \tag{2.35}$$

e desde que há somente um número finito de termos nessa soma e desde que a sequência $\{(1+|\xi|^2)^{t/2} u_\xi^{j_i}\}$ converge para cada ξ fixo, existe uma constante $J > 0$ tal que se $j_i, j_k > J$, então (2.35) é menor que $\frac{\epsilon}{2}$. Portanto, para $j_i, j_k > J$, tem-se que $\|u^{j_i} - u^{j_k}\|_s^2 < \epsilon$ e a prova está completa.

$\square$

Capítulo 3

Operadores Elípticos

O ingrediente fundamental para a prova do teorema de regularidade e de compacidade é aplicação da teoria de regularidade elíptica ao operador de Laplace-Beltrami, o qual é elíptico, como será descrito adiante.

3.1 Operadores diferenciais periódicos

Definição 3.1. *Um **operador diferecial linear** L de ordem l em $C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)$ consiste de uma matriz (L_{ij}) $m \times m$ em que*

$$L_{ij} = \sum_{[\alpha]=0}^{l} a_{ij}^{\alpha} D^{\alpha},$$

*e os a_{ij}^{α} são funções em $C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$, com no mínimo um a_{ij}^{α} não identicamente nulo para algum i, j e para algum α para o qual $[\alpha] = l$. Um operador diferencial linear L é um **operador diferencial periódico**, ou um **operador sobre** $\wp$, se os a_{ij}^{α} são funções periódicas.*

Seja L um operador diferencial periódico, e seja $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in \wp$. Então

$$L\varphi = \left(\sum_j L_{1j}\varphi_j, \ldots, \sum_j L_{mj}\varphi_j \right), \tag{3.1}$$

que também é periódico de período igual ao de φ. Define-se o operador L^* sobre $\wp$ por

$$L_{ij} = \sum_{[\alpha]=0}^{l} D^{\alpha}\overline{a_{ji}^{\alpha}}, \tag{3.2}$$

tal que $i-$ésima componente de $L^*\varphi$ é dado por

$$(L^*\varphi)_i = \sum_{j=0}^{m} \sum_{[\alpha]=0}^{l} D^{\alpha}(\overline{a_{ji}^{\alpha}\varphi_j}) \tag{3.3}$$

Proposição 3.1. *Seja L um operador diferencial periódico. Então, no produto interno L^2, tem-se*

$$\langle L\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, L^*\psi\rangle$$

para todo $\varphi, \psi \in \wp$.

Prova. Veja que

$$\begin{aligned}
\langle L\varphi, \psi\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_Q L\varphi\cdot\psi dx = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_Q \sum_{i=1}^{m}(L\varphi)_i\overline{\psi_i}dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{i=1}^{m}\int_Q \sum_{j=1}^{m} L_{ij}(\varphi_j)\overline{\psi_i}dx \\
&= \sum_{i,j=1}^{m}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_Q \sum_{[\alpha]=0}^{l} a_{ij}^{\alpha}(D^{\alpha}\varphi_j)\overline{\psi_i}dx \\
&= \sum_{i,j=1}^{m}\sum_{[\alpha]=0}^{l}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_Q (D^{\alpha}\varphi_j)a_{ij}^{\alpha}\overline{\psi_i}dx.
\end{aligned}$$

Agora, lembrando que $D^{\alpha} = \left(\frac{1}{i}\right)^{[\alpha]}\partial^{\alpha}$, tem-se $\overline{D^{\alpha}f} = \overline{\left(\frac{1}{i}\right)^{[\alpha]}\partial^{\alpha}f} = (-1)^{[\alpha]}\left(\frac{1}{i}\right)^{[\alpha]}\partial^{\alpha}\overline{f} = (-1)^{[\alpha]}D^{\alpha}\overline{f}$. Se a, b são funções complexas periódicas (de período 2π) definidas no $\mathbb{R}^n$, então pela fórmula da integração por partes e pela periodicidade das funções

$$\int_Q \partial_i(a)b = ab\Big|_{x_i=0}^{x_i=2\pi} - \int_Q a\partial_i(b) = -\int_Q a\partial_i(b).$$

Então, indutivamente

$$\int_Q \partial^\alpha(a)b = (-1)^{[\alpha]}\int_Q a\partial^\alpha(b).$$

Logo,

$$\int_Q D^\alpha(a)b = (-1)^{[\alpha]}\int_Q aD^\alpha(b). \tag{3.4}$$

Daí, usando (3.4) e a periodicidade das funções envolvidas,

$$\begin{aligned}
\int_Q (D^\alpha\varphi_j)a_{ij}^\alpha\overline{\psi_i}dx &= \int_Q (D^\alpha\varphi_j)\overline{\overline{a_{ij}^\alpha}\psi_i}dx \\
&= \int_Q \varphi_j(-1)^{[\alpha]}D^\alpha(\overline{\overline{a_{ij}^\alpha}\psi_i})dx \\
&= \int_Q \varphi_j\overline{D^\alpha(\overline{a_{ij}^\alpha}\psi_i)}dx.
\end{aligned}$$

Segue que

$$
\begin{aligned}
\langle L\varphi, \psi\rangle &= \sum_{i,j=1}^{m} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_Q \varphi_j \sum_{[\alpha]=0}^{l} \overline{D^\alpha(\overline{a_{ij}^\alpha}\psi_i)}dx \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_Q \varphi_j \overline{L_{ji}^*\psi_i}dx \\
&= \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_Q \varphi_j \overline{\sum_{i=1}^{m} L_{ji}^*\psi_i}dx \\
&= \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_Q \varphi_j \overline{(L^*\psi)_j}dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_Q \varphi \cdot L^*\psi dx = \langle \varphi, L^*\psi\rangle.
\end{aligned}
$$

□

O operador L^* é chamado o **adjunto formal** de L. A palavra "formal" é usada aqui para enfatizar que L^* não é o ajunto de L num espaço Hilbert. É simplesmente o adjunto relativo ao produto interno L^2 sobre $\wp$.

Proposição 3.2. *Seja L um operador diferencial parcial sobre $\wp$ de ordem l, e seja s um inteiro. Então existem constantes positivas $c, k,$ e c', onde c depende somente de $n, m, l,$ e s, onde k é uma constante que limita os valores absolutos dos coeficientes dos termos de maior ordem em L, e onde c' depende de n, m, l, s e de todos os coeficientes de L e suas derivadas de ordem l, tal que*

$$\|L\varphi\|_s \leq ck\|\varphi\|_{s+l} + c'\|\varphi\|_{s+l-1} \tag{3.5}$$

para todo $\varphi \in \wp$. Em particular, há uma constante c'' tal que

$$\|L\varphi\|_s \leq c''\|\varphi\|_{s+l} \tag{3.6}$$

para todo $\varphi \in \wp$,e então L estende-se por continuidade a um operador limitado de H_{s+l} à H_s para cada s.

Prova. A desigualdade (3.6) é imediata de (3.5) e do teorema 2.1(b). Para provar (3.5) primeiro vamos provar o caso $m = 1$, i.e, os elementos de $\wp$ são funções complexas e L é um operador diferencial parcial $\sum_{[\alpha]=0}^{l} a^\alpha D^\alpha$ ao invés de uma matriz. Daí,

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{[\alpha]=0}^{l} a^\alpha D^\alpha \varphi\right\|_s &\leq \sum_{[\alpha]=0}^{l} \|a^\alpha D^\alpha \varphi\|_s \\
&\overset{\text{devido a (2.19)}}{\leq} \sum_{[\alpha]=0}^{l} \{c^\alpha \|a^\alpha\|_\infty \|D^\alpha \varphi\|_s + c'^\alpha \|D^\alpha \varphi\|_{s-1}\} \\
&\overset{\text{devido ao thm 2.1(h)}}{\leq} \sum_{[\alpha]=0}^{l} \left\{c^\alpha \|a^\alpha\|_\infty \|\varphi\|_{s+[\alpha]} + c'^\alpha \|\varphi\|_{s+[\alpha]-1}\right\} \\
&\overset{\text{devido ao thm 2.1(b)}}{\leq} ck\|\varphi\|_{s+l} + c'\|\varphi\|_{s+l-1}.
\end{aligned}$$

Para provar o caso m geral, primeiro note pela desigualdade triangular se tem que

$$\|L\varphi\|_s \leq \sum_{i,j} \|L_{i,j}\varphi_j\|_s.$$

Aplicando então o caso $m = 1$ a desigualdade acima e ajustando as constantes tem-se

$$\|L\varphi\|_s \leq ck \sum_j \|\varphi_j\|_{s+l} + c' \sum_j \|\varphi_j\|_{s+l-1}.$$

Como $\|\varphi\|_s^2 = \|\varphi_1\|_s^2 + \cdots + \|\varphi_m\|_s^2$, então $\|\varphi\|_s \geq \|\varphi_i\|_s$ para $i \in \{1, \ldots, m\}$. Aplicando na desigualdade acima chega-se finalmente a (3.5).

□

Corolário 3.1.1. *Se L é um operador sobre $\wp$ de ordem l, e se $w \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, então o operador $M = wL - Lw$, onde $M\varphi = w(L\varphi) - L(w\varphi)$, é de ordem no máximo $l - 1$. Consequentemente, dado s, há uma constante positiva tal que*

$$\|M\varphi\|_s \leq (const)\|\varphi\|_{s+l-1} \tag{3.7}$$

para todo $\varphi \in \wp$.

Prova. Que a ordem de M é no máximo $l-1$ é imediato da conta (2.25) feita na prova do teorema 2.1(i) e da expansão de $M\varphi$ usando que $L_{ij} = \sum_{[\alpha]=0}^{l} a_{ij}^{\alpha} D^{\alpha}$. Já (3.7) vem de (3.6) e do fato da ordem de M ser no máximo $l-1$.

□

Lema 3.1. *Se $w \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ é periódica,e L é um operador diferencial de ordem l sobre $\wp$, então existe uma constante positiva tal que*

$$|\langle L(w^2 u), L(u)\rangle_s - \|L(wu)\|_s^2| \leq const(\|u\|_{s+l}\|u\|_{s+l-1}) \tag{3.8}$$

para todo $u \in H_{s+l}$.

Prova. Veja que

$$\begin{aligned}
|\langle L(w^2u), Lu\rangle_s - \langle L(wu), L(wu)\rangle_s| \leq\ & |\langle L(w^2u) - wL(wu), Lu\rangle_s| \\
& + |\langle wL(wu), Lu\rangle_s - \langle L(wu), wL(u)\rangle_s| \\
& + |\langle L(wu), wLu - L(wu)\rangle_s| \\
=\ & |\langle (Lw - wL)(wu), Lu\rangle_s| \\
& + |\langle wL(wu), Lu\rangle_s - \langle L(wu), wL(u)\rangle_s| \\
& + |\langle L(wu), (wL - Lw)(u)\rangle_s|.
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
|\langle (Lw - wL)(wu), Lu\rangle_s| & \overset{porCauchy-Schwarz}{\leq} \|(Lw - wL)(wu)\|_s \|Lu\|_s \\
& \overset{por(3.7)e(3.6)}{\leq} c\|wu\|_{s+l-1}\|u\|_{s+l} \\
& \overset{por(2.20)}{\leq} c\|u\|_{s+l-1}\|u\|_{s+l}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
|\langle wL(wu), Lu\rangle_s - \langle L(wu), wL(u)\rangle_s| & \overset{por(2.21)}{\leq} c(\|L(wu)\|_s\|Lu\|_{s-1} + \|L(wu)\|_{s-1}\|Lu\|_s) \\
& \overset{por(3.6)}{\leq} c(\|wu\|_{s+l}\|u\|_{s+l-1} + \|wu\|_{s+l-1}\|u\|_{s+l}) \\
& \overset{por(2.20)}{\leq} c(\|u\|_{s+l}\|u\|_{s+l-1} + \|u\|_{s+l-1}\|u\|_{s+l}) \\
& = c\|u\|_{s+l}\|u\|_{s+l-1}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$
\begin{aligned}
|\langle L(wu),(wL-Lw)(u)\rangle_s| &\overset{porCauchy-Schwarz}{\leq} \|L(wu)\|_s\|(Lw-wL)(u)\|_s \\
&\overset{por(3.7)e(3.6)}{\leq} c\|wu\|_{s+l}\|u\|_{s+l-1} \\
&\overset{por(2.20)}{\leq} c\|u\|_{s+l}\|u\|_{s+l-1}. \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

Segue de (3.9), (3.10) e (3.11) o lema.

□

3.2 Operadores elípticos

Definição 3.2. *Um operador diferecial parcial linear L em $C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ é uma expressão*

$$L = P_l(D) + \cdots + P_0(D), \qquad (3.12)$$

onde $P_j(D)$ é uma matriz $m \times m$ tal que cada entrada é um operador diferencial da forma

$$\sum_{|\alpha|=j} a_\alpha(x)D^\alpha,$$

com $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$. O operador tem ordem l se $P_l(\partial) \neq 0$.

Definição 3.3. *Para $\xi \in \mathbb{R}^n$, denote por $P_j(\xi)$ a matriz real obtida substituindo-se D^α por ξ^α nos operadores de cada entrada de $P_j(\partial)$. Um operador L como em (3.12), de ordem l,* ***é elíptico*** *em $x \in \mathbb{R}^n$ se $P_l(\xi)$ for não singular em $x, \forall \xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. L é elíptico se o for em cada $x \in \mathbb{R}^n$.*

Lema 3.2. *L é elíptico em $x \in \mathbb{R}^n$ se e só se $L(\varphi^l u)(x) \neq 0 \forall u \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tal que $u(x) \neq 0, \forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tal que $\varphi(x) = 0$ e $d\varphi(x) \neq 0$.*

Prova. Para tais φ e u, segue de $\varphi(x) = 0$ que

$$L(\varphi^l u)(x) = \sum_{j=o}^{l} P_j(\partial)(\varphi^l u)(x) = P_l(\partial)(\varphi^l u)(x).$$

Mas para $|\alpha| = l$, segue novamente de $\varphi(x) = 0$ que

$$\partial^\alpha(\varphi^l u)(x) = \partial^\alpha(\varphi^l)(x)u(x) = l!(d\varphi)^\alpha(x)u(x),$$

onde $(d\varphi_x)^\alpha = (\partial_1\varphi)^{\alpha_1}(x) - (\partial_n\varphi)^{\alpha_n}(x)$. Portanto,

$$L(\varphi^l u)(x) = l!P_l(d\varphi(x)) \cdot u(x).$$

Assim, $P_l(\xi)$ não singular implica $P_l(d\varphi(x))$ não singular, uma vez que $d\varphi(x) \neq 0$, e daí $u(x) \neq 0$ dá $L(\varphi^l u)(x) \neq 0$. Reciprocamente, se $L(\varphi^l u)(x) \neq 0$ para todas tais φ e u, então $P_l(d\varphi(x)) \cdot u(x) \neq 0, \forall u$ tal que $u(x) \neq 0$, donde $P_l(d\varphi(x))$ é não singular. Mas como $d\varphi(x)$ pode ser identificado a priori com qualquer $\xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, segue que $P_l(\xi)$ é não singular, $\forall \xi \neq 0$.

□

Definição 3.4. *Seja X uma n-variedade e $\pi : E \to X$ um fibrado vetorial de posto m sobre x. Um operador diferencial linear L sobre E é uma aplicação linear $L : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ satisfazendo a seguinte condição: se $U \subset X$ aberto é tal que $\pi^{-1}(U)$ é domínio de uma carta do fibrado*

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \pi^{-1}(U) & \to & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ (x, v) & \mapsto & (\varphi(x), A(x)(v)), \end{array}$$

então o operador linear $L_\Phi : C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, dado para $\sigma \in \Gamma(E)$ por

$$L_\Phi((A \cdot \sigma_{|U}) \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) = A(x) \cdot L(\sigma_{|U})(x)$$

seja diferencial no sentido anterior. A ***ordem*** *de L é a ordem de L_Φ e L é* ***elíptico em*** *$x \in X$ (respectivamente* ***em*** *X) se L_Φ o for em $\varphi(x \in \mathbb{R}^n)$ (respectivamente em $\mathbb{R}^n$).*

Para ver que as noções de ordem e elipticidade são bem definidas, note que se

$$\begin{array}{rcl} \Psi : \pi^{-1}(U) & \to & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ (x, v) & \mapsto & (\psi(x), B(x)(v)), \end{array}$$

for outra carta do fibrado, então

$$
\begin{aligned}
L_{\Psi}((B \cdot \sigma_{|U}) \circ \psi^{-1})(\psi(x)) &= B(x) \cdot L(\sigma_{|U})(x) \\
&= B(x)A(x)^{-1}A(x) \cdot L(\sigma_{|U})(x) \\
&= B(x)A(x)^{-1}L_{\Phi}((A \cdot \sigma_{|U}) \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))
\end{aligned}
$$

e $B(x)A(x)^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo.

Proposição 3.3. *Um operador diferencial linear de ordem l $L : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ é elíptico em $x \in X$ se e só se*

$$L(\eta^l \sigma)(x) \neq 0,$$

$\forall \eta \in C^{\infty}(X; \mathbb{R})$ *tal que* $d\eta(x) \neq 0$*,* $\forall \sigma \in \Gamma(E)$ *tal que* $\sigma(x) \neq 0$.

Prova. Nas notações acima, $L(\eta^l\sigma)(x) \neq 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot L(\eta^l\sigma)(x) \neq 0 \Leftrightarrow L_{\Phi}((A \cdot \eta^l \sigma_{|U}) \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \neq 0 \Leftrightarrow L_{\Phi}((\eta \circ \varphi^{-1})^l (A \cdot \sigma_{|U}) \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \neq 0$.

Agora,

$$(\eta \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) = 0, \qquad d(\eta \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) d\eta(x) d\varphi^{-1}(\varphi(x)) \neq 0,$$

$A(x) \cdot (\sigma_{|U} \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) = A(x)\sigma(x) \neq 0$ (pois A(x) é isomorfismo), e basta usar a proposição anterior.

□

3.3 Desigualdade Fundamental

Uma propriedade analítica básica dos operadores elípticos é a seguinte

Proposição 3.4. *Seja L um operador elíptico sobre $\wp$de ordem l, e seja s um inteiro. Então existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$\|u\|_{s+l} \leq c(\|Lu\|_s + \|u\|_s) \tag{3.13}$$

para todo $u \in H_{s+l}$

Prova. Pela densidade de $\wp$ em H_s é suficiente provar (3.13) para todo $\varphi \in \wp$. Para começar, considere o caso de um operador elíptico L_0 sobre $\wp$ com coeficientes constantes, que consiste somente do termo líder $P_l(D)$. Se

$u \in \mathbb{R}^n$ com $u \neq 0$, e se $\xi \neq 0$, então desde que $P_l(\xi)$ é não-singular, tem-se que $|P_l(\xi)u|^2 > 0$. Segue da compacidade da esfera unitária no $\mathbb{R}^n$ que existe uma constante $c > 0$ tal que

$$|P_l(\xi)u|^2 \geq c$$

para todo u e ξ tal que $|u| = |\xi| = 1$. Disso, segue que

$$|P_l(\xi)u|^2 \geq c|\xi|^{2l}|u|^2 \tag{3.14}$$

para todo u e ξ no $\mathbb{R}^n$. Agora, note que $(L_0\varphi)_\xi = P_l(\xi)\varphi_\xi$. De fato, por causa de (3.1), basta calcular $(L_{ij}\varphi_j)_\xi$:

$$\begin{aligned}
(L_{ij}\varphi_j)_\xi &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_Q L_{ij}\varphi_j(x)e^{-ix\cdot\xi}dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_Q \sum_{[\alpha]=l} a_{ij}^\alpha D^\alpha\varphi_j(x)e^{-ix\cdot\xi}dx \\
&= \sum_{[\alpha]=l} a_{ij}^\alpha \frac{1}{(2\pi)^n}\int_Q D^\alpha\varphi_j(x)e^{-ix\cdot\xi}dx \\
&= \sum_{[\alpha]=l} a_{ij}^\alpha (D^\alpha\varphi_j)_\xi \\
&= \sum_{[\alpha]=l} a_{ij}^\alpha \xi^\alpha (\varphi_j)_\xi \\
&= L_{ij}(\xi)(\varphi_j)_\xi,
\end{aligned}$$

onde na terceira igualdade foi usado que os coeficientes de L_0 são constantes. Segue então que $(L_0\varphi)_\xi = P_l(\xi)\varphi_\xi$.

Portanto, para $\varphi \in \wp$, segue da desigualdade (3.14) e do fato de L_0 ter coeficientes constantes que

$$\begin{aligned}
\|L_0\varphi\|_s^2 &= \sum_\xi |P_l(\xi)\varphi_\xi|^2(1+|\xi|^2)^s \\
&\geq (\text{const})\sum_\xi |\xi|^{2l}|\varphi_\xi|^2(1+|\xi|^2)^s.
\end{aligned}$$

Então

$$
\begin{aligned}
(\|L_0\varphi\|_s + \|\varphi\|_s)^2 &\geq \|L_0\varphi\|_s^2 + \|\varphi\|_s^2 \\
&\geq \sum_\xi |\varphi_\xi|^2(1+|\xi|^2)^s(1+(\text{const})|\xi|^{2l}) \\
&\geq (\text{const})\sum_\xi |\varphi_\xi|^2(1+|\xi|^2)^{s+l} \\
&= (\text{const})\|\varphi\|_{s+l}^2, \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

onde a terceira desigualdade acima vem do seguinte: se a é um inteiro positivo e $c > 0$, então existe uma constante positiva C tal que $1 + ca^l \geq C(1+a)^l$. De fato, se $c \geq 1$, de

$$(1+a)^l = 1 + a^l + \sum_{k=2}^{l-1} \binom{l}{k} a^k$$

e

$$a^k \leq a^l + 1 \leq ca^l + 1,$$

tem-se que

$$(1+a)^l \leq \left(1 + \sum_{k=2}^{l-1} \binom{l}{k} a^k\right)(1+ca^l).$$

Se $c < 1$, basta repetir o argumento anterior para $\dfrac{1}{c} + a^l \geq 1 + a^l$ e depois multiplicar por c.

Agora, considere um operador elíptico geral L de ordem l, e seja $p \in \mathbb{R}^n$. Será mostrado que existe uma vizinhança U de p tal que (3.13) vale para toda $\varphi \in \wp$ com suporte em U. Seja L_0 denotando o operador elíptico com coeficientes constantes, homogêneo de ordem l, obtido pelo termo de maior ordem de L no ponto p. Então segue de (3.15) que para cada $\varphi \in \wp$

$$
\begin{aligned}
\|\varphi\|_{s+l} &\leq (\text{const})(\|L_0\varphi\|_s + \|\varphi\|_s) \\
&\leq (\text{const})(\|L\varphi\|_s + \|(L_0 - L)\varphi\|_s + \|\varphi\|_s). \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

Seja k denotando a constante em (3.16). Então escolha um ϵ positivo menor que $\dfrac{1}{2ck}$, onde c denota a constante c de (3.5). Em uma vizinhança suficientemente pequena de p, os coeficientes da parte de maior ordem de $L_0 - L$ são menores que ϵ em valor absoluto. Seja $\tilde{L}$ um operador periódico coincidindo com $L_0 - L$ sobre uma vizinhança pequena U de p e com os coeficientes da parte de maior ordem menores que ϵ em todo lugar. Então, segue de (3.16), (3.5), e da escolha de ϵ, que para um elemento $\varphi \in \wp$ cujo suporte está em U,

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{s+l} \leq & \leq k(\|L\varphi\|_s + \|\tilde{L}\varphi\|_s + \|\varphi\|_s) \\ & \leq k\|L\varphi\|_s + ck\epsilon\|\varphi\|_{s+l} + kc'\|\varphi\|_{s+l-1} + k\|\varphi\|_s \\ & \leq k\|L\varphi\|_s + \frac{1}{2}\|\varphi\|_{s+l} + kc'\|\varphi\|_{s+l-1} + k\|\varphi\|_s. \end{aligned}$$

Como pela desigualdade de Peter-Paul,

$$\|\varphi\|_{s+l-1} \leq \sqrt{\epsilon'\|\varphi\|^2_{s+l} + c(\epsilon')\|\varphi\|^2_s} \leq \sqrt{\epsilon'}\|\varphi\|_{s+l} + \sqrt{c(\epsilon')}\|\varphi\|_s,$$

onde ϵ' é tal que $kc\sqrt{\epsilon'} < \frac{1}{4}$ (note que ϵ' e ϵ são independentes), segue que

$$\|\varphi\|_{s+l} \leq (\text{const})\|L\varphi\|_s + \frac{3}{4}\|\varphi\|_{s+l} + (\text{const})\|\varphi\|_s,$$

o que prova (3.13) para esses φ.

Seja T^n o toro obtido como o quociente do $\mathbb{R}^n$ pelo quadriculado consistindo de todos os pontos $2\pi\xi$, onde ξ é uma n-upla de inteiros. Os abertos U obtidos acima para cada $p \in \mathbb{R}^n$ projetam uma cobertura aberta de T^n. Seja $U_1, \ldots, U_k$ uma subcobertura finita, e seja $w_1, \ldots, w_k$ uma partição da unidade montada nessa cobertura, da forma especial

$$\sum_{i=1}^{k} w_i^2 = 1. \tag{3.17}$$

Agora considere as w_i's funções periódicas C^∞ (de valor real) definidas sobre o $\mathbb{R}^n$. Seja $\varphi \in \wp$. Então, por (3.17), e pelo teorema (2.1)(i) e (j),

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{s+l}^2 &= \langle\varphi,\varphi\rangle_{s+l} = \left\langle \sum_i w_i^2\varphi,\varphi\right\rangle_{s+l} \\
&\leq \sum_i \langle w_i\varphi, w_i\varphi\rangle_{s+l} + (\text{const})\|\varphi\|_{s+l}\|\varphi\|_{s+l-1}
\end{aligned}$$

Desde que $w_i\varphi$ tem suporte em um dos U obtidos acima, e desde que há somente uma quantidade finita de w_i, existem constantes tal que a segunda linha acima é

$$\begin{aligned}
&\leq (\text{const})\sum_i \|Lw_i\varphi\|_s^2 + (\text{const})\|\varphi\|_s^2 + (\text{const})\|\varphi\|_{s+l}\|\varphi\|_{s+l-1} \\
&\overset{por(3.8)}{\leq} (\text{const})\sum_i \langle L(w_i^2\varphi), L\varphi\rangle_s + (\text{const})\|\varphi\|_s^2 + (\text{const})\|\varphi\|_{s+l}\|\varphi\|_{s+l-1} \\
&= (\text{const})\|L\varphi\|_s^2 + (\text{const})\|\varphi\|_s^2 + (\text{const})\|\varphi\|_{s+l}\|\varphi\|_{s+l-1} \\
&\leq (\text{const})\|L\varphi\|_s^2 + (\text{const})\|\varphi\|_s^2 + \frac{1}{2}\|\varphi\|_{s+l}^2 + (\text{const})\|\varphi\|_{s+l-1}^2 \\
&\leq (\text{const})\|L\varphi\|_s^2 + (\text{const})\|\varphi\|_s^2 + \frac{3}{4}\|\varphi\|_{s+l}^2 + (\text{const})\|\varphi\|_s^2,
\end{aligned}$$

onde no quarto estágio foi usada a desigualdade de Peter-Paul para $\|\varphi\|_{s+l-1}^2$. Segue que (3.13) vale para toda $\varphi \in \wp$ e portanto para todo $u \in H_{s+l}$.

$\square$

Teorema 3.1 (Regularidade para Operadores Elípticos Períodicos)**.** *Seja L um operador elíptico periodíco de ordem l. Assuma que $u \in H_\infty$, $v \in H_t$, e*

$$Lu = v.$$

Então $u \in H_{t+l}$.

Prova. Primeiro será mostrado que é suficiente provar que se $u \in H_s$ e $v = Lu \in H_{s-l+1}$, então $u \in H_{s+1}$. Primeiro lembre que se $s_1 < s_2$, então $H_{s_2} \subset H_{s_1}$, e que se $u \in H_\infty$, então existe s tal que $u \in H_s$. Suponha então provado que se $u \in H_k, Lu = v \in H_{k-l+1}$, então $u \in H_{k+1}$. Se $s \geq t + l$, nada há a fazer. Caso contrário $s \leq t + l - 1$. Como $v \in H_t$ e $s - l + 1 \leq t$, então

$v \in H_{s-l+1}$. Logo, de $u \in H_s$ e $v \in H_{s-l+1}$, segue que $u \in H_{s+1}$. Agora, se $s+1 = t+l$ o problema está feito, caso contrário, $s+1 \leq t+l-1$ e daí $s+1-l+1 \leq t$, o que dá que $v \in H_{s+1-t+1}$. Procedendo analogamente ao que foi feito anteriormente, $u \in H_{s+2}$. Caso $s+2 = l+t$, não se tem mais nada há fazer, caso contrário poderá incrementar o índice do espaço ao qual u pertence até que se chegue finalmente que $u \in H_{t+l}$, para isso bastando repetir o argumento anterior.

De agora em diante será provado que se $u \in H_s$ e $v = Lu \in H_{s-l+1}$, então $u \in H_{s+1}$. Seja $h \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, e seja L^h o operador obtido de L pela troca de cada coeficiente α por seu quociente diferença.

Afirmação 3.1. *Para $\varphi \in \wp$, e então por continuidade para $u \in H_{-\infty}$,*

$$L(u^h) = (Lu)^h - L^h(T_h u)$$

De fato, se $L = (L_{ij})$, então

$$L(u^h) = (Lu)^h - L^h(T_h u)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_j (L_{1j}\varphi_j^h)(x), \dots, \sum_j (L_{mj}\varphi_j^h)(x) \right) = \left(\sum_j (L_{1j}\varphi_j)^h(x), \dots, \sum_j (L_{mj}\varphi_j)^h(x) \right) - \\ - \left(\sum_j (L_{1j}^h T_h \varphi_j)(x), \dots, \sum_j (L_{mj}^h T_h \varphi_j)(x) \right).$$

Portanto, basta provar que

$$(L_{ij}\varphi_j^h)(x) = (L_{ij}\varphi_j)^h(x) - (L_{ij}^h T_h \varphi_j)(x), \forall i, j.$$

Sendo $L_{ij} = \sum_{[\alpha]=0}^{l} a_{ij}^{\alpha} D^{\alpha}$, basta provar que

$$a_{ij}^{\alpha}(x)(D^{\alpha}\varphi_i^h)(x) = (a_{ij}^{\alpha} D^{\alpha}\varphi_i)^h(x) - (a_{ij}^{\alpha})^h(x) D^{\alpha}(T_h\varphi_i)(x).$$

Basta então, por indução, mostrar que

$$a(x)(\partial_j \varphi^h)(x) = (a\partial_j\varphi)^h(x) - a^h(x)\partial_j(T_h\varphi)(x),$$

$\forall a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ funções C^∞.

Mas,

$$\begin{aligned}
(a\partial_j\varphi)^h(x) - a^h(x)\partial_j(T_h\varphi)(x) &= \frac{a(x+h)(\partial_j\varphi)(x+h) - a(x)(\partial_j\varphi)(x)}{|h|} - \\
&\quad - \left(\frac{a(x+h)-a(x)}{|h|}\right)\lim_{t\to 0}\frac{(T_h\varphi)(x+te_j)-(T_h\varphi)(x)}{t} \\
&= \frac{a(x+h)}{|h|}\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(x+h+te_j)-\varphi(x+h)}{t} - \\
&\quad - \frac{a(x)}{|h|}\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(x+te_j)-\varphi(x)}{t} - \\
&\quad - \left(\frac{a(x+h)-a(x)}{|h|}\right)\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(x+te_j+h)-\varphi(x+h)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} a(x)\left(\frac{\varphi(x+h+te_j)-\varphi(x+te_j)-\varphi(x+h)+\varphi(x)}{t|h|}\right) \\
&= a(x)\lim_{t\to 0}\left(\frac{\varphi^h(x+te_j)-\varphi^h(x)}{t}\right) = a(x)(\partial_j\varphi^h)(x).
\end{aligned}$$

Para completar a afirmação, seja $u \in H_s$ e $(\varphi_k)_{k\geq 1}$ uma sequência em $\wp$ convergindo para u em H_s. Então, $\varphi_k^h \xrightarrow{k} u^h$ em H_s para todo $h \neq 0$. Como $T_h : H_s \to H_s$ é isometria, então $T_h\varphi_k \xrightarrow{k} T_h u$ em H_s. Como L é contínuo, tem-se também $L(\varphi_k^h) \xrightarrow{k} L(u^h)$ em H_{s-l}. Analogamente, $L^h(T_h\varphi_k) \xrightarrow{k} L^h(T_h u)$. Como $L(\varphi_k^h) = (\varphi_k)^h - L^h(T_h\varphi_k)$, fazendo $k \to \infty$, obtem-se a afirmação.

Aplicando então a desigualdade fundamental à afirmação, tem-se que

$$\begin{aligned}
\|u^h\|_s &\leq (\text{const})\|L(u^h)\|_{s-l} + (\text{const})\|u^h\|_{s-l} \\
&\leq (\text{const})\|(Lu)^h\|_{s-l} + (\text{const})\|L^h(T_h u)\|_{s-l} + (\text{const})\|u^h\|_{s-l}
\end{aligned}$$

Agora, lembrando que $\|L^h(T_h u)\|_{s-l} \leq (\text{const})\|T_h(u)\|_s = (\text{const})\|u\|_s$, por causa de (3.6), e onde a constante não depende de h, e que $\|(Lu)^h\|_{s-l} \leq \|Lu\|_{s-l+1}$ (vide desigualdade obtida na prova da proposição 2.1), tem-se

$$\|u^h\|_s \leq (\text{const})\|Lu\|_{s-l+1} + (\text{const})\|u\|_s,$$

onde o lado direito independe de h. Pela proposição 2.1, segue que $u \in H_{s+1}$, e o teroema está provado.

$\square$

Capítulo 4

Teorema de Hodge e Aplicações

O propósito do presente capítulo é provar o Teorema de Decomposição de Hodge, onde para o alcance deste objetivo serão desenvolvidas diversas ferramentas de uso bastante interessantes em si.

Para começar, a primeira ferramenta a ser desenvolvida é

4.1 O operador $*$ de Hodge

Seja V um espaço n-dimensional com produto interno $\langle , \rangle$. O teorema da representação de Riesz garante que $\langle , \rangle$ induz um isomorfismo canônico entre $V^* = \Lambda^1(V)$ e V, definido por

$$v \in V \mapsto \langle \cdot, v \rangle \in V^*.$$

Para $w \in \Lambda^1(V)$, denote por w^* o vetor de V correspondente a w via tal isomorfismo; reciprocamente, para $v \in V$, seja $v^* \in \Lambda^1(V)$ a 1-forma correpondente a v.

Fixada uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V, sabemos que $\{e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*; 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n\}$ é base de $\Lambda^p(V)$. Defini-se a forma bilinear $\langle , \rangle$ sobre $\Lambda^p(V)$ pondo, para $1 < i_1 < \dots < i_p < n$, $1 < j_1 < \dots < j_p < n$,

$$\langle e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*, e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_p}^* \rangle = \begin{cases} 1, & \text{se } i_k = j_k, \forall 1 \leq k \leq p \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e estendendo $\langle , \rangle$ por linearidade a todo o $\Lambda^p(V)$. Que $\langle , \rangle$ é produto interno é imediato. Ademais, $\{e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*; 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n\}$ vira uma base ortonormal para $\Lambda^p(V)$.

Lema 4.1. *Para* $w_1 \wedge \ldots \wedge w_p, t_1 \wedge \ldots \wedge t_p \in \Lambda^p(V)$, *tem-se*

$$\langle w_1 \wedge \ldots \wedge w_p, t_1 \wedge \ldots \wedge t_p \rangle = \det \langle w_i, v_j \rangle = \det \langle w_i^*, v_j^* \rangle.$$

Prova. A segunda igualdade é imediata. Quanto à primeira, ambos os membros são lineares com respeito a cada w_i e cada t_j. Portanto, fixados $w_2, \ldots, w_n, t_1, \ldots, t_n$, basta mostrá-la para $w_1 = e_{i_1}^*$. Raciocinando analogamente mais $2p - 1$ vezes, concluímos que é suficiente provar que

$$\langle e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_p}^*, e_{j_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{j_p}^* \rangle = \det (\langle e_{i_k}^*, e_{i_l}^* \rangle)_{kl},$$

o que é imediato.

$\square$

Seja V um espaço vetorial com produto interno. Munindo $\Lambda^n(V)$ com o produto interno acima, um elemento de volume para V é uma $n-$forma $\alpha \in \Lambda^n(V)$, unitária com respeito à $\langle , \rangle$. Dizemos que V é orientado por α. Uma base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V é positiva se $\alpha(e_1, \ldots, e_n) = 1$, i.e, se $\alpha = e_1^* \wedge \ldots \wedge e_n^*$. Fixado $w \in \Lambda^p(V)$, seja $\Phi : \Lambda^{n-p}(V) \mapsto \mathbb{R}$ o funcional linear tal que

$$\Phi(t) = \langle w \wedge t, \alpha \rangle.$$

Aplicando novamente o teorema da representação de Riesz, garantimos a existência de um único elemento de $\Lambda^{n-p}(V)$, denotado por $*w$, tal que

$$\Phi(t) = \langle t, *w \rangle, \forall t \in \Lambda^{n-p}(V),$$

i.e, tal que

$$\langle w \wedge t, \alpha \rangle = \langle t, *w \rangle, \forall t \in \Lambda^{n-p}(V).$$

Em particular, desde que $\dim(\Lambda^n(V)) = 1$ e $w \wedge t \in \Lambda^n(V)$, tem-se

$$w \wedge t = \langle w \wedge t, \alpha \rangle \alpha = \langle *w, t \rangle \alpha, \forall t \in \Lambda^{n-p}(V).$$

Fica então bem definido um operador $* : \Lambda^p(V) \mapsto \Lambda^{n-p}(V)$, denominado o **operador** $*$ **de Hodge**, obviamente linear.

Lema 4.2. *Seja* V *um espaço vetorial orientado com produto interno,* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *uma base ortonormal positiva e* $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ *a base dual. Para* $\sigma \in S_{p,n-p}$, *tem-se*

$$*(e^*_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge e^*_{\sigma(p)}) = sgn(\sigma) e^*_{\sigma(p+1)} \wedge \ldots \wedge e^*_{\sigma(n)}$$

Prova. Seja $\sigma(1) = i_1, \ldots, \sigma(p) = i_p, \sigma(p+1) = j_1, \ldots, \sigma(n) = j_{n-p}$. Pela fórmula de expansão ortonormal, tem-se

$$\begin{aligned}
&*(e^*_{i_1} \wedge \ldots \wedge e^*_{i_p}) \\
&= \sum_{k_1 < \cdots < k_{n-p}} \langle *(e^*_{i_1} \wedge \ldots \wedge e^*_{i_p}), e^*_{k_1} \wedge \ldots \wedge e^*_{k_{n-p}} \rangle (e^*_{k_1} \wedge \ldots \wedge e^*_{k_{n-p}}) \\
&= \sum_{k_1 < \cdots < k_{n-p}} \langle e^*_{i_1} \wedge \ldots \wedge e^*_{i_p} \wedge e^*_{k_1} \wedge \ldots \wedge e^*_{k_{n-p}}, \alpha \rangle (e^*_{k_1} \wedge \ldots \wedge e^*_{k_{n-p}}) \\
&= \langle e^*_{i_1} \wedge \ldots \wedge e^*_{i_p} \wedge e^*_{j_1} \wedge \ldots \wedge e^*_{j_{n-p}}, \alpha \rangle (e^*_{j_1} \wedge \ldots \wedge e^*_{j_{n-p}}) \\
&= sgn(\sigma) \langle \underbrace{e^*_1 \wedge \ldots \wedge e^*_n}_{\alpha}, \alpha \rangle (e^*_{j_1} \wedge \ldots \wedge e^*_{j_{n-p}}) \\
&= sgn(\sigma)(e^*_{j_1} \wedge \ldots \wedge e^*_{j_{n-p}}).
\end{aligned}$$

□

Para o que segue, se α é forma de volume para V e $w \in \Lambda^n(V)$, tem-se $*w = \langle w, \alpha \rangle$. De fato, $*w = \langle *w, 1 \rangle = \langle w \wedge 1, \alpha \rangle = \langle w, \alpha \rangle$.

Proposição 4.1. *Seja V um espaço vetorial orientado com produto interno. Se $* : \Lambda^p(V) \to \Lambda^{n-p}(V)$ denota o operador de Hodge, então:*

(a) $** = (-1)^{p(n-p)} : \Lambda^p(V) \to \Lambda^p(V)$;

(b) Para $w, t \in \Lambda^p(V)$, tem-se $\langle w, t \rangle = *(w \wedge *t) = *(t \wedge *w)$.

Prova. (a) Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é base ortonormal positiva e $\sigma \in S_{p,n-p}$, tem-se

$$*(e^*_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge e^*_{\sigma(p)}) = (sgn\sigma)(e^*_{\sigma(p+1)} \wedge \ldots \wedge e^*_{\sigma(n)}).$$

Seja $\rho \in S_{p,n-p}$ tal que $\rho(1) = \sigma(p+1), \ldots, \rho(n-p) = \sigma(n)$. Então $\rho(n-p+1) = \sigma(1), \ldots, \rho(n) = \sigma(p)$ e

$$\begin{aligned}
** (e^*_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge e^*_{\sigma(p)}) &= (sgn\sigma) * (e^*_{\rho(1)} \wedge \ldots e^*_{\sigma(p)}) \\
&= (sgn\sigma)(sgn\rho)(e^*_{\rho(n-p+1)} \wedge \ldots e^*_{\rho(n)}) \\
&= sgn(\sigma\rho)(e^*_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge e^*_{\sigma(p)})
\end{aligned}$$

Note agora que $\rho = \sigma\eta$, onde

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-p & n-p+1 & \dots & n \\ p+1 & p+2 & & n & 1 & & p \end{pmatrix},$$

de modo que

$$sgn(\sigma\rho) = sgn(\sigma^2\eta) = sgn(\sigma)^2(sgn\eta) = (-1)^{p(n-p)}.$$

Portanto,

$$**(e^*_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge e^*_{\sigma(p)}) = (-1)^{p(n-p)} e^*_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge e^*_{\sigma(p)},$$

e o caso geral sai por linearidade.

(b) Segue de (a) que

$$\begin{aligned} \langle w, t\rangle &= (-1)^{p(n-p)}\langle **w, t\rangle = (-1)^{p(n-p)}\langle (*w)\wedge t, \alpha\rangle \\ &= \langle t \wedge (*w), \alpha\rangle = *(t\wedge(*w)). \end{aligned}$$

A outra igualdade é análoga.

□

Proposição 4.2. *Seja V um espaço vetorial real com produto interno, orientado. Fixado $\eta \in \Lambda^1(V)$, se $L_\eta : \Lambda^{p+1}(V) \mapsto \Lambda^p(V)$ é o operador adjunto de $\eta\wedge : \Lambda^p(V) \mapsto \Lambda^{p+1}(V)$, então:*

(a) $L_\eta(w) = (-1)^{np} * (\eta \wedge (*w)), \forall w \in \Lambda^{p+1}(V)$.

(b) Para $\sigma \in S_{p,n-p}$,

$$L_\eta(e^*_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\sigma(p+1)}) = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1}\langle v, e^*_{\sigma(i)}\rangle e^*_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \widehat{e^*_{\sigma(i)}} \wedge \cdots \wedge e^*_{\sigma(p+1)}$$

(c) Para $w \in \Lambda^p(V)$, *tem-se* $L_\eta(\eta\wedge w) + \eta \wedge L_\eta(w) = |\eta|^2 w$.

Prova.

(a) Tem-se $\langle L_\eta(w), t\rangle = \langle w, \eta \wedge t\rangle, \forall w \in \Lambda^{p+1}(V), t \in \Lambda^p(V)$. Como $\langle u, v\rangle = *(v \wedge *u)$ pela proposição anterior, tem-se

$$\begin{aligned}
\langle L_\eta(w), t\rangle &= \langle w, \eta \wedge t\rangle = *((\eta \wedge t) \wedge *w) \\
&= (-1)^p * ((t \wedge \underbrace{\eta) \wedge *w}_{\in \Lambda^{n-p}(V)}) \\
&= (-1)^p * \{t \wedge [(-1)^{p(n-p)} * *(\eta \wedge (*w))]\} \\
&= (-1)^{np} * \{t \wedge [* * (\eta \wedge (*w))]\} \\
&= (-1)^{np} \langle *(\eta \wedge (*w)), t\rangle.
\end{aligned}$$

Como a igualdade vale para todo $t \in \Lambda^p(V)$, segue que $L_\eta(w) = (-1)^{np} * (\eta \wedge (*w))$.

(b) Desde que ambos os membros são lineares em η, basta considerar o caso $\eta = e^*_{\sigma(j)}$. Há dois casos:

(1) $\eta_{\sigma(j)}$; $j > p+1$: é imediato que o segundo membro da igualdade a ser provada é igual a zero. Quanto ao primeiro,

$$\begin{aligned}
L_\eta(e^*_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\sigma(p+1)}) &= (-1)^{np} * (\eta \wedge) * (e^*_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\sigma(p+1)}) \\
&= (-1)^{np} sgn(\sigma) * (\eta \wedge)(e^*_{\sigma(p+2)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\sigma(n)}) \\
&= (-1)^{np} sgn(\sigma) * (e^*_{\sigma(j)} \wedge e^*_{\sigma(p+2)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\sigma(n)}) \\
&= 0 \text{ se } j > p+1.
\end{aligned}$$

(2) $\eta_{\sigma(j)}$; $j \leq p+1$: o segundo membro da igualdade a ser provada é igual a $(-1)^{j+1}\langle v, e^*_{\sigma(j)}\rangle e^*_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \widehat{e^*_{\sigma(j)}} \wedge \cdots \wedge e^*_{\sigma(p+1)}$. Quanto ao primeiro membro, tem-se da terceira igualdade acima, que

$$L_\eta(e^*_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\sigma(p+1)}) = (-1)^{np} sgn(\sigma) * (e^*_{\sigma(j)} \wedge e^*_{\sigma(p+2)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\sigma(n)})$$

Se k é tal que $\sigma(p+2) < \cdots < \sigma(k) < \sigma(j) < \sigma(k+1) < \cdots \sigma(n)$, então

$$L_\eta(e^*_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\sigma(p+1)}) = (-1)^{np+k-p-1} sgn(\sigma) * (e^*_{\sigma(p+2)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\sigma(k)} \wedge e^*_{\sigma(j)} \wedge e^*_{\sigma(k+1)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\sigma(n)}).$$

Sendo

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & & k-p-1 & k-p & k-p+1 & & n-p & n-p+1 & & n-p+j-1 & n-p+j & & n \\ \sigma(p+2) & \cdots & \sigma(k) & \sigma(j) & \sigma(k+1) & \cdots & \sigma(n) & \sigma(1) & \cdots & \sigma(j-1) & \sigma(j+1) & \cdots & \sigma(p+1) \end{pmatrix},$$

então $sgn(\tau) = (-1)^{n-k+j-1}(-1)^{(p+1)(n-p-1)}sgn(\sigma)$, donde

$$\begin{aligned} L_\eta(e^*_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\sigma(p+1)}) &= (-1)^{np+k-p-1}sgn(\sigma) * (e^*_{\tau(1)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\tau(n-p)}) \\ &= (-1)^{np+k-p-1}sgn(\sigma)sgn(\tau)(e^*_{\tau(n-p+1)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\tau(n)}) \\ &= (-1)^{j+1}e^*_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \widehat{e^*_{\sigma(j)}} \wedge \cdots \wedge e^*_{\sigma(p+1)}. \end{aligned}$$

(c) Se mostrarmos que a afirmação é válida para $\eta = e^*_{\sigma(j)}$ e que $e^*_{\sigma(i)} \wedge L_{e^*_{\sigma(j)}} = L_{e^*_{\sigma(j)}}(e^*_{\sigma(i)} \wedge) = 0$ para $i \neq j$, seguirá de serem ambos os membros da igualdade na afirmação do item (c) formas quadráticas em η que o item (c) é válido em geral.

Fixe $w = e^*_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\sigma(p)} \in \Lambda^p(V)$ e $\eta = e^*_{\sigma(j)}$.

Se $j \leq p$, então $\eta \wedge w = 0$ e daí $L_\eta(\eta \wedge w) = 0$. Por outro lado, segue de (b) que

$$\begin{aligned} \eta \wedge L_\eta(w) &= e^*_{\sigma(j)} \wedge (-1)^{j+1}e^*_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \widehat{e^*_{\sigma(j)}} \wedge \cdots \wedge e^*_{\sigma(p)} \\ &= e^*_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\sigma(p)} = w. \end{aligned}$$

Se $j > p$, segue de (b) que $L_\eta(w) = 0$, e daí $\eta \wedge L_\eta(w) = 0$. Por outro lado,

$$L_\eta(\eta \wedge w) = L_\eta(e^*_{\sigma(j)} \wedge e^*_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\sigma(p)}).$$

Se $\sigma(1) < \cdots < \sigma(k) < \sigma(j) < \sigma(k+1) < \cdots \sigma(p)$, e

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & & k & k+1 & k+2 & & p+1 & p+2 & & j & j+1 & & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(k) & \sigma(j) & \sigma(k+1) & \cdots & \sigma(p) & \sigma(p+1) & \cdots & \sigma(j-1) & \sigma(j+1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix},$$

então

$$\begin{aligned} L_\eta(\eta \wedge w) &= (-1)^k L_\eta(e^*_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\sigma(k)} \wedge e^*_{\sigma(j)} \wedge e^*_{\sigma(k+1)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\sigma(p)}) \\ &= (-1)^k L_\eta(e^*_{\tau(1)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\tau(p+1)}) \\ &= (-1)^k(-1)^{(k+1)+1}e^*_{\tau(1)} \wedge \cdots \wedge \widehat{e^*_{\tau(k+1)}} \wedge \cdots \wedge e^*_{\tau(p+1)} \\ &= e^*_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge e^*_{\sigma(p)} = w. \end{aligned}$$

A prova de $e^*_{\sigma(i)} \wedge L_{e^*_{\sigma(j)}} = L_{e^*_{\sigma(j)}}(e^*_{\sigma(i)} \wedge) = 0$ para $i \neq j$ é análoga.

$\square$

Proposição 4.3. *Seja V um espaço vetorial real com produto interno, orientado. Se $\eta \in V - \{0\}$, então a sequência abaixo é exata:*

$$\Lambda^p(V) \xrightarrow{\eta\wedge} \Lambda^{p+1}(V) \xrightarrow{\eta\wedge} \Lambda^{p+2}(V).$$

Prova. Certamente que, para $w \in \Lambda^p(V)$,

$$\eta \wedge (\eta \wedge w) = (\eta \wedge \eta) \wedge w = 0$$

Para a recíproca, se $\eta \wedge w = 0$, $w \in \Lambda^{p+1}(V)$, então a segunda parte da proposição anterior proporciona que

$$L_\eta(\eta \wedge w) + \eta \wedge L_\eta(w) = |\eta|^2 w,$$

i.e,

$$w = \eta \wedge (\frac{1}{|\eta|^2} L_\eta(w)) \in Im(\eta\wedge).$$

$\square$

Se X é uma n-variedade Riemanniana compacta, conexa e orientada, cada T_xX é um espaço vetorial $n-$dimensional com produto interno, orientado por dX, onde $dX \in \Omega^n(X)$ é o elemento de volume de X. Portanto, todas as construções acima podem ser feitas em T_xX. Em particular, dado $\alpha \in \Omega^p(X)$, define-se $*\alpha$ por

$$(*\alpha)_x = *\alpha_x \in \Lambda^{n-p}(V),$$

e é imediato que $*\alpha \in \Omega^{n-p}(X)$.

Proposição 4.4. *Se X é uma n-variedade compacta e $(,)$ é a forma bilinear em $\Omega^p(X)$ dada por*

$$(\alpha, \beta) = \int_X \alpha \wedge (*\beta),$$

então $(,)$ é um produto interno.

Prova. Basta ver que

$$\begin{aligned}(\beta,\alpha) &= \int_X \overbrace{\beta\wedge(*\alpha)}^{\in\Omega^n(X)} = (-1)^{n(n-n)}\int_X **(\beta\wedge *\alpha)\\ &= \int_X *\langle\beta,\alpha\rangle.\end{aligned}$$

Analogamente, chega-se que $(\alpha,\beta)=\int_X *\langle\alpha,\beta\rangle$, o que implica que $(\beta,\alpha)=(\alpha,\beta)$. Em particular,

$$(\alpha,\alpha)=\int_X *\langle\alpha,\alpha\rangle\geq 0,$$

com igualdade se, e somente se, $*\langle\alpha,\alpha\rangle=0\Leftrightarrow\langle\alpha,\alpha\rangle=0\Leftrightarrow\alpha=0$.

$\square$

No que segue, denota-se a norma proveniente de $(,)$ por $|\ \ |_2$.

Proposição 4.5. *Se* $\delta:\Omega^p(X)\mapsto\Omega^{p-1}(X)$ *é o adjunto de* $d:\Omega^{p-1}(X)\to\Omega^p(X)$*, então*

$$\delta=(-1)^{n(p+1)+1}*d*.$$

Prova. Tem-se de verificar se $(d\alpha,\beta)=(\alpha,\delta\beta)$, $\forall\alpha\in\Omega^{p-1}(X),\beta\in\Omega^p(X)$, i.e

$$\int_X (d\alpha)\wedge(*\beta)=\int_X(\alpha)\wedge(*\delta\beta).$$

Mas como $*\delta\beta=(-1)^{n(p+1)+1}**d*\beta=(-1)^{n(p+1)+1}(-1)^{(n-p+1)(p-1)}d*\beta=(-1)^p d*\beta$, tem-se

$$\begin{aligned}d(\alpha\wedge(*\beta)) &= d\alpha\wedge(*\beta)+(-1)^{p-1}\alpha\wedge(d*\beta)\\ &= d\alpha\wedge(*\beta)-\alpha\wedge(*\delta\beta),\end{aligned}$$

e o teorema de Stockes dá

$$0=\int_X d(\alpha\wedge(*\beta))=\int_X d\alpha\wedge(*\beta)-\int_X\alpha\wedge(*\delta\beta),$$

como desejado.

$\square$

4.2 O operador de Laplace-Beltrami

Se $f \in \Omega^0(X) = C^\infty(X, \mathbb{R})$, então $\delta f = 0$, donde

$$(\delta d + d\delta)(f) = \delta df = - * d * df.$$

Mas se $p \in X$ e $\{e_i\}$ é um referencial positivo numa vizinhança de p, geodésico em p, com coeficientes $\{w_i\}$ e formas de conexão w_{ij}, então $w_{ij}(p) = 0$ e

$$\begin{aligned} *d * df &= *d * (\sum_i e_i(f) w_i) = *d(\sum_i e_i(f)(*w_i)) \\ &= * \sum_i \{d(e_i(f)) \wedge (*w_i) + e_i(f) d(*w_i)\}. \end{aligned}$$

Mas, em p,

$$d(*w_i) = d(w_1 \wedge \cdots \widehat{w}_i \wedge \cdots w_n) = dw_i \wedge \cdots \wedge \widehat{w}_i \wedge \cdots w_n + \cdots + w_i \wedge \cdots \wedge \widehat{w}_i \wedge \cdots dw_n,$$

com

$$dw_j = \sum_k w_{jk} \wedge w_k = 0 \qquad \text{em} \qquad p.$$

Portanto, tem-se em p que

$$\begin{aligned} *d * df &= \sum_i *\{d(e_i(f)) \wedge (*w_i)\} \\ &= \sum_{i,j} *\{e_j(e_i(f)) w_j \wedge (*w_i)\} \\ &= \sum_i *\{e_i(e_i(f)) w_i \wedge (*w_i)\} \\ &= \sum_i e_i(e_i(f)) * (w_i \wedge (*w_i)) \\ &= \sum_i e_i(e_i(f)) = -\Delta f(p). \end{aligned}$$

Assim, neste caso tem-se $\delta d + d\delta = \Delta : C^\infty \mapsto C^\infty$, o que motiva a seguinte

Definição 4.1. *O* ***operador de Laplace-Beltrami*** *em* $\Omega^p(X)$ *é o operador linear* $\Delta : \Omega^p(X) \mapsto \Omega^p(X)$ *tal que* $\Delta = \delta d + d\delta$. *Uma* $p-$*forma* α *é* ***harmônica*** *se* $\Delta\alpha = 0$.

Lema 4.3.

(a) $*\Delta = \Delta *$

(b) Δ *é auto-adjunto com respeito a* $(,)$

(c) α *é harmônica se, e somente se,* $d\alpha = 0, \delta\alpha = 0$.

Prova.

(a) Basta ver que, para $u \in \Omega^p(X)$,

$$\begin{aligned}
*\Delta u &= *d\delta u + *\delta du \\
&= (-1)^{n(p+1)+1} **d*u + (-1)^{n(p+2)+1} **d*du \\
&= \delta d*u + (-1)^{1-p^2} d*du \\
&= \delta d*u + (-1)^{pn+1} d*d**u \\
&= \delta d*u + d\delta*u = \Delta*u.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
(\Delta\alpha, \beta) &= ((\delta d + d\delta)\alpha, \beta) = (\delta d\alpha, \beta) + (d\delta\alpha, \beta) \\
&= (d\alpha, d\beta) + (\delta\alpha, \delta\beta) \\
&= (\alpha, \Delta\beta).
\end{aligned}$$

(c) Veja que $\Delta\alpha = 0 \Rightarrow (d\alpha, d\alpha) + (\delta\alpha, \delta\alpha) = 0 \Rightarrow d\alpha, \delta\alpha = 0$. A recíproca é análoga.

□

A motivação para estudar formas harmônicas provem do seguinte problema variacional: fixada uma classe de cohomologia de p-formas em X, suponha que existe uma representação w de tal classe que minimiza a norma $|\ |_2$ no espaço afim $w+d\Omega^{p-1}(X)$. Então $|w+td\tau|_2^2 \geq |w|_2^2, \forall t \in \mathbb{R}, \forall \tau \in \Omega^{p-1}(X)$, donde

$$\frac{d}{dt}|w + td\tau|_2^2 \bigg|_{t=0} = 0, \forall \tau \in \Omega^{p-1}(X).$$

Mas isso é mesmo que $(w, d\tau) = 0, \forall \tau \in \Omega^{p-1}(X)$, ou ainda

$$(\delta w, \tau) = 0, \forall \tau \in \Omega^{p-1}(X).$$

Portanto, $\delta w = 0$; como $dw = 0$ (uma vez que w representa uma classe de cohomologia), segue do lema anterior que w é harmônica

Corolário 4.2.1. *(Hopf) Se $f : X \to \mathbb{R}$ é hamônica, então f é constante.*

Prova. Pelo lema, se f é harmônica, então $df = 0$. Logo f é constante.

□

No que segue, denotamos por $Har^p(X)$ o espaço vetorial das $p-$formas harmônicas em X. Observe que se $\alpha \in \Omega^p(X)$ é tal que $\Delta w = \alpha$ para algum $w \in \Omega^p(X)$, então, para todo $\beta \in Har^p(X)$, tem-se

$$(\alpha, \beta) = (\Delta w, \beta) = (w, \Delta\beta) = 0,$$

i.e, $\alpha \perp Har^p(X)$. Gostaría-se de provar que esta condição é também suficiente para a existência de $w \in \Omega^p(X)$ tal que $\Delta w = \alpha$. Para tanto, começa-se generalizando o conceito de solução de $\Delta w = \alpha$, motivados pelo seguinte argumento: se $\Delta w = \alpha$, então $(\Delta w, \tau) = (\alpha, \tau), \forall \tau \in \Omega^p(X)$, e daí

$$(w, \Delta\tau) = (\alpha, \tau), \forall \tau \in \Omega^p(X).$$

Portanto, o funcional linear limitado $\varphi : \Omega^p(X) \to \mathbb{R}$, dado por $\varphi(\beta) = (w, \beta)$ é tal que $\varphi(\Delta\tau) = (\alpha, \tau), \forall \tau \in \Omega^p(X)$. Tem-se então a seguinte

Definição 4.2. *Para $\alpha \in \Omega^p(X)$, uma **solução forte** de $\Delta w = \alpha$ é uma $w_0 \in \Omega^p(X)$ tal que $\Delta w_0 = \alpha$ no sentido usual; uma **soluçao fraca** de $\Delta w = \alpha$ é um funcional linear limitado $\varphi : \Omega^p(X) \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\varphi(\Delta\tau) = (\alpha, \tau), \forall \tau \in \Omega^p(X).$$

Se $\Omega^p(X)$ fosse um espaço Hilbert com $(,)$, fixada uma solução fraca φ de $\Delta w = \alpha$, o teorema da representação de Riesz garantiria a existência de $w_0 \in \Omega^p(X)$ tal que

$$\varphi(\beta) = (w_0, \beta), \forall \beta \in \Omega^p(X).$$

Infelizmente, $\Omega^p(X)$ não é um espaço Hilbert com $(,)$, de modo que a implicação (existência de solução fraca⇒existência de solução forte) não segue do teorema de representação. No entanto, será provado e existência de solução fraca de $\Delta w = \alpha$, bem como que a regularidade de solução fraca implica existência de solução forte, com base no seguinte teorema a ser provado:

Teorema 4.1. *(de regularidade) Se $\alpha \in \Omega^p(X)$ e $\varphi : \Omega^p(X) \to \mathbb{R}$ é solução fraca de $\Delta w = \alpha$, então existe $w_0 \in \Omega^p(X)$ tal que $\varphi(\beta) = (w_0, \beta), \forall \beta \in \Omega^p(X)$. Em particular, w_0 é solução forte de $\Delta w = \alpha$.*

Será necessário também o seguinte teorema de compacidade, também a ser provado.

Teorema 4.2. *(de compacidade) Se $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência em $\Omega^p(X)$ tal que $|\alpha_n|_2 \leq c$ e $|\Delta\alpha_n|_2 \leq c$ para algum $c > 0$ e todo $n \geq 1$, então existe uma subsequência de $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ de Cauchy em $\Omega^p(X)$.*

4.3 Teorema da Decomposição de Hodge

Tem-se agora as condições necessárias para se provar o resultado principal deste trabalho.

Teorema 4.3. *(de decomposição de Hodge) Para $0 \leq p \leq n$, tem-se:*

(a) $\dim Har^p(X) < \infty$;

(b) $\Omega^p(X) = \Delta(\Omega^p(X)) \oplus Har^p(X)$

(c) $\Delta w = \alpha$ *tem solução se, e somente se,* $\alpha \perp Har^p(X)$.

Prova.

(a) Se $\dim Har^p(X) = +\infty$, por Gramm-Schmidt $Har^p(X)$ conteria uma sequência ortonormal $(\alpha_n)_{n\geq 1}$. Daí, $|\alpha_n|_2 = 1$ e $|\Delta\alpha_n|_2 = 0, \forall n \geq 1$, e o teorema da compacidade garantiria a existência de uma subsequência $(\alpha_{n_k})_{k\geq 1}$ de Cauchy. No entanto, $|\alpha_{n_k} - \alpha_{n_l}|_2 = \sqrt{2}$, uma contradição.

(c) Assumindo (b): Como já visto, basta mostrar que $\alpha \perp Har^p(X) \Rightarrow \exists w \in \Omega^p(X)$ tal que $\Delta w = \alpha$. Mas, por (b), $\alpha \perp Har^p(X) \Rightarrow \alpha \in \Delta(\Omega^p(X))$.

(b) Como $Har^p(X)$ tem dim $< +\infty$, fica bem definido o operador linear projeção ortogonal:

$$\pi_{Har} : \Omega^p(X) \to Har^p(X).$$

Como $Har^p(X) \cap Har^p(X)^\perp = \{0\}$, tem-se a decomposição ortogonal

$$\begin{array}{rcl} \Omega^p(X) & = & Har^p(X) \oplus Har^p(X)^\perp \\ \alpha & \mapsto & \pi_{Har}(\alpha) + (\alpha - \pi_{Har}(\alpha)) \end{array}$$

e basta mostrar que $Har^p(X)^\perp = \Delta(\Omega^p(X))$.

Já se sabe, de um cálculo anterior, que $\Delta(\Omega^p(X)) \subset Har^p(X)^\perp$. Resta então mostrar a inclusão contrária, para o quê será preciso a seguinte

Afirmação 4.1. *Existe c positivo tal que* $|\alpha|_2 \leq c|\Delta\alpha|_2, \forall\alpha \in Har^p(X)^\perp$. *De outro modo, o inverso à esquerda de* $\Delta_{|Har^p(X)^\perp} : Har^p(X)^\perp \to Har^p(X)^\perp$ *é um operador pré-compacto.*

Suponha o contrário. Então existe uma sequência $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ em $Har^p(X)^\perp$, tal que $|\alpha_n|_2 = 1$ e $|\Delta\alpha_n|_2 \to 0$. Pelo teorema de compacidade, passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ é de Cauchy com respeito à $|\ \ |_2$. Daí, para $\beta \in \Omega^p(X)$, a desigualdade de Cauchy dá que

$$|(\alpha_n, \beta) - (\alpha_m, \beta)| = |(\alpha_n - \alpha_m, \beta)| \leq |\alpha_n - \alpha_m|_2 |\beta|_2 \overset{n,m}{\to} 0,$$

donde a completude de $\mathbb{R}$ garante a existência de

$$\varphi(\beta) := \lim_n (\alpha_n, \beta), \beta \in \Omega^p(X),$$

A linearidade de $(,)$ garante imediatamente que $\varphi : \Omega^p(X) \to \mathbb{R}$ é um funcional linear. Veja que φ é limitado, uma vez que

$$|\varphi(\beta)| = |\lim_n (\alpha_n, \beta)| = \lim_n |(\alpha_n, \beta)| \leq \lim_n |\alpha_n|_2 |\beta|_2 = |\beta|_2.$$

Ademais, como $\Delta\alpha_n \overset{n}{\to} 0$ e convergência forte implica convergência fraca em espaços vetoriais normados, tem-se para $\tau \in \Omega^p(X)$ que

$$\varphi(\Delta\tau) = \lim_n (\alpha_n, \Delta\tau) = \lim_n (\Delta\alpha_n, \tau) = 0,$$

i.e, $\varphi : \Omega^p(X) \to \mathbb{R}$ é solução fraca de $\Delta w = 0$. Daí, o teorema de regularidade garante a existência de $\alpha \in \Omega^p(X)$ tal que $\varphi(\beta) = (\alpha, \beta), \forall\beta \in \Omega^p(X)$. Portanto, $\Delta\alpha = 0$ e $(\alpha_n, \beta) \overset{n}{\to} (\alpha, \beta), \forall\beta \in \Omega^p(X)$, i.e, $\alpha_n \rightharpoonup \alpha$ em $\Omega^p(X)$, e daí em $\overline{\Omega^p(X)}$, o completamento de $\Omega^p(X)$ com respeito à $|\ \ |_2$. Mas como $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ é de Cauchy em $\Omega^p(X)$, converge em $\overline{\Omega^p(X)}$ com respeito à $|\ \ |_2$; como convergência forte implica convergência fraca, segue que tal limite forte é α, i.e, $\alpha_n \overset{n}{\to} \alpha$ em $\overline{\Omega^p(X)}$, e daí em $\Omega^p(X)$. Segue finalmente que, por um lado

$$\left.\begin{array}{ccc} \alpha_n \in Har^p(X)^\perp & \Rightarrow & \alpha \in Har^p(X)^\perp \\ \Delta\alpha = 0 & \Rightarrow & \alpha \in Har^p(X) \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = 0,$$

ao passo que, por outro lado,

$$|\alpha_n|_2 = 1 \Rightarrow |\alpha|_2 = 1.$$

Chega-se então a uma contradição, o que estabelece a afirmação.

Mostrar-se-á finalmente que $Har^p(X)^\perp \subset \Delta(\Omega^p(X))$: se $\alpha \in Har^p(X)^\perp$, seja $\varphi : \Delta(\Omega^p(X)) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\varphi(\Delta\beta) = (\alpha, \beta), \forall \beta \in \Omega^p(X).$$

Se $\Delta\beta_1 = \Delta\beta_2$, então $(\alpha, \beta_1 - \beta_2) = 0$, uma vez que $\alpha \in Har^p(X)^\perp$ e $\beta = \beta_1 - \beta_2 \in Har^p(X)$. Portanto, φ está bem definida e é obviamente linear. Afirma-se que φ é limitado em $\Delta(\Omega^p(X))$. De fato, se $\beta \in \Omega^p(X)$ e $\tau = \beta - \pi_{Har}(\beta)$, então $\Delta(\tau) = \Delta(\beta)$ e $\tau \in Har^p(X)^\perp$. Assim, a afirmação principal dá que

$$|\varphi(\Delta\beta)| = |\varphi(\Delta\tau)| = |(\alpha, \tau)| \leq |\alpha|_2 |\tau|_2 \leq c|\alpha|_2 |\Delta\tau|_2 = c|\alpha|_2 |\Delta\beta|_2.$$

Sendo um funcional linear limitado em $\Delta(\Omega^p(X))$, φ admite, pelo teorema de Hahn-Banach, uma extensão limitada a $\Omega^p(X)$, o qual é então uma solução fraca de $\Delta w = \alpha$. Pelo teorema de regularidade, existe $w \in \Omega^p(X)$ tal que $\Delta w = \alpha$, i.e, $\alpha \in \Delta(\Omega^p(X))$.

□

Corolário 4.3.1.

$$\begin{aligned} \Omega^p(X) &= \Delta(\Omega^p(X)) \oplus Har^p(X) \\ &= d\delta(\Omega^p(X)) \oplus \delta d(\Omega^p(X)) \oplus Har^p(X) \\ &= d(\Omega^{p-1}(X)) \oplus \delta(\Omega^{p+1}(X)) \oplus Har^p(X) \end{aligned}$$

Prova. Veja que para $w, \eta \in \Omega^p(X)$ se tem que

$$(d\delta w, \delta d\eta) = (dd\delta w, d\eta) = 0.$$

Logo,

$$d\delta(\Omega^p(X))\perp\delta d(\Omega^p(X)).$$

Analogamente, chega-se que

$$d(\Omega^{p-1}(X))\perp\delta(\Omega^{p+1}(X)).$$

Como

$$\Delta(\Omega^p(X))\perp Har^p(X)$$

e

$$\Delta(\Omega^p(X)) = (d\delta+\delta d)(\Omega^p(X)) \subset d(\Omega^{p-1}(X)) \oplus \delta(\Omega^{p+1}(X)),$$

basta mostrar que

$$d(\Omega^{p-1}(X)), \delta(\Omega^{p+1}(X))\perp Har^p(X).$$

Mas, se $w \in \Omega^{p-1}(X)$ e $\eta \in Har^p(X)$, então

$$(dw,\eta) = (w, d\eta) = 0,$$

uma vez que $\Delta\eta = 0 \Rightarrow d\eta = 0, \delta\eta = 0$.

Portanto,

$$\Omega^p(X) = d\delta(\Omega^p(X)) \oplus \delta d(\Omega^p(X)) \oplus Har^p(X)$$

$$\subset d(\Omega^{p-1}(X)) \oplus \delta(\Omega^{p+1}(X)) \oplus Har^p(X) \subset \Omega^p(X).$$

□

4.4 Prova dos Teoremas de Regularidade e Compacidade

4.4.1 Redução ao caso periódico

Antes de começar a prova do teorema de regularidade, é necessário estabelecer uma notação conveniente e fazer algumas observações.

Daqui por diante, C^∞ denotará o espaço $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$, C_0^∞ as funções de C^∞ com suporte compacto e $C_0^\infty(V)$ aquelas cujo suporte compacto está em V. O produto interno L^2 em C_0^∞ será indicado por

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} u\cdot v,$$

onde, como antes, $u\cdot v$ denota o produto hermitiano.

Seja $V \subset \mathbb{R}^n$ um aberto com $\overline{V}$ contido em algum cubo 2π. Então, pela extensão periódica, identificamos $C_0^\infty(V)$ como um subsepaço de $\wp$. Obeserve que o produto interno L^2 sobre $C_0^\infty(V)$ coincide com o produto interno L^2 cobre $C_0^\infty(V)$ considerado como subconjunto de $\wp$, que também coincide com o produto interno de Sobolev $\|\ \|_0$.

Sendo L uma operador diferencial parcial elíptico de ordem l atuando sobre C^∞, já foi mostrado que L possui um adjunto formal L^* sobre C_0^∞, com respeito ao produto interno sobre C_0^∞. Então se tem a seguinte

Proposição 4.6. *Seja L uma operador diferencial parcial elíptico de ordem l atuando sobre C^∞ (sem a condição de coeficientes periódicos). Seja também $p \in \mathbb{R}^n$. Então existe uma vizinhança suficientemente pequena V de p e um operador elíptico periódico $\tilde{L}$ tal que $\tilde{L}$ coincide com L sobre V.*

Prova. Seja L_0 denotando o operador com coeficientes constantes determinado por L em p. Então, desde que L é elíptico em p, existe algum ϵ positivo tal que qualquer operador cujos coeficientes diferem, em valor absoluto, de no máximo ϵ do correspondente em L_0, é elíptico. Seja U uma vizinhança de p, pequena o suficiente para estar contida em algum 2π cubo Q, no qual os coeficientes de L diferem de no máximo ϵ dos coeficientes correspondentes em L_0. Seja $V \subset \overline{V} \subset U$. Escolha, então, uma função C^∞ φ com $0 \le \varphi \le 1$ tal que φ é 1 sobre V e tem suporte em U. Então o operador

$$\varphi\cdot L + (1-\varphi)L_0$$

é elíptico sobre o $\mathbb{R}^n$ e claramente pode ser estendido de Q a um operador elíptico periódico $\tilde{L}$ que coincide com L em V.

□

A proposição que segue dá uma ligeira extensão da propriedade que caracteriza L^*.

Proposição 4.7. *Seja $u \in H_s$ e seja $\varphi \in C_0^\infty(V)$. Então*

$$\langle \tilde{L}u, \varphi\rangle_0 = \langle u, L^*\varphi\rangle_0.$$

Prova. Seja $\psi_j \to u$ em H_s, com $\psi_j \in \wp$. Então

$$\begin{aligned} \langle \tilde{L}\psi_j, \varphi\rangle_0 &= \langle \tilde{L}\psi_j, \varphi\rangle = \langle L\psi_j, \varphi\rangle \\ &= \langle \psi_j, L^*\varphi\rangle = \langle \psi_j, L^*\varphi\rangle_0, \end{aligned}$$

e daí,

$$\begin{aligned} |\langle \tilde{L}u, \varphi\rangle_0 - \langle u, L^*\varphi\rangle_0| &= |\langle \tilde{L}(u-\psi_j), \varphi\rangle_0 - \langle u-\psi_j, L^*\varphi\rangle_0| \\ &\leq \|\tilde{L}(u-\psi_j)\|_{s-l}\|\varphi\|_{-s+l} + \|u-\psi_j\|_s\|L^*\varphi\|_{-s} \\ &\overset{\text{por } 3.6}{\leq} (\text{const})\|u-\psi_j\|_s\|\varphi\|_{-s+l} + \|u-\psi_j\|_s\|L^*\varphi\|_{-s}, \end{aligned}$$

que converge para zero quando $j \to \infty$. □

Seja V, como acima, um aberto cujo fecho está em algum 2π cubo. Sejam u e v elementos de H_s. Então diz-se que u e v são **iguais em** V se

$$\langle u - v, \varphi\rangle_0 = 0$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(V)$. Será dito que um **operador periódico** L **tem suporte em** V se seus coeficientes pertencem a $C_0^\infty(V) \subset \wp$.

Proposição 4.8. *Se L tem suporte em V, e se os elementos u e v de H_s são iguais em V, então*

$$Lu = Lv.$$

Prova. Pelo teorema 2.1(f), se tem que

$$\|L(u-v)\|_{s-l} = \sup_{\substack{\varphi\in H_{l-s} \\ \varphi\neq 0}} \frac{|\langle L(u-v), \varphi\rangle_0|}{\|\varphi\|_{l-s}}.$$

Então basta mostrar que $\langle L(u-v), \varphi\rangle_0 = 0$ para toda $\varphi \in \wp$. Mas, pela proposição anterior (com $\tilde{L} = L$)

$$\langle L(u-v), \varphi\rangle_0 = \langle u - v, L^*\varphi\rangle_0,$$

que é zero, pois u e v são iguais em V, desde que $L^*\varphi \in C_0^\infty(V) \subset \wp$.

□

4.4.2 Definição do operador L associado ao operador de Laplace-Beltrami

Pode-se definir L informalmente do seguinte modo: se $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m = \binom{n}{p}$, é dada em coordenadas por $\varphi = (\varphi_{(i)})_{(i)}$, $(i) = (i_1, \ldots, i_p)$, e

$$\Delta\left(\sum_{(i)} (\varphi_{(i)} \circ \gamma) dx_{(i)}\right) = \sum_{(i)} \psi_{(i)} dx_{(i)},$$

então

$$L(\varphi) = \psi \circ \gamma^{-1},$$

onde $\psi \circ \gamma^{-1} = (\psi_{(i)} \circ \gamma^{-1}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Mais rigorosamente, se

$$\begin{aligned} \Phi \quad : \quad & \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^m \\ & (p, v) \mapsto (p, \tau(p, v)) \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, shift left, "\pi"] & U \times \mathbb{R}^m \arrow[r, "\gamma \times Id"] & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ U \arrow[u, shift left, "w"] \arrow[urr] & & \end{tikzcd}$$

é uma carta do fibrado $\pi : \Omega^p(X) \to X$ sobre U então

$$L(\tau(\gamma^{-1}, w \circ \gamma^{-1})) = \Delta w \circ \gamma^{-1},$$

para toda seção w em U.

De fato, para $q \in \mathbb{R}^n$, com $q = \gamma(p), p \in U$, tem-se que

$$\tau(\gamma^{-1}, w \circ \gamma^{-1})(q) = \tau(\gamma^{-1}(q), w(\gamma^{-1}(q))) = \tau(p, w(p))$$

dá precisamente os coeficientes de w com respeito a base $\{dx_(i)\}$.

Que L é linear é claro. Para ver que se trata de um operador diferencial de segunda ordem, note primeiro que, como $\Delta = d\delta + \delta d$ e $\delta = (-1)^{n(p+1)+1} * d *$, e d e δ têm ordem 1, em coordenadas tem-se

$$\Delta\left(\sum_{(i)}(\varphi_{(i)}\circ\gamma)dx_{(i)}\right)=\sum_{(i)}(L_{(i)}\psi_{(i)}\circ\gamma)dx_{(i)},$$

onde cada $L_{(i)}$ é operador diferencial de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$, de ordem ≤ 2.

Mas como $\Delta(\varphi^2\alpha)(m)\neq 0, \forall m\in X, \forall\alpha\in\Omega^p(X)$ tal que $\alpha(m)\neq 0$ e $\forall\varphi : X\to\mathbb{R}$, com $\varphi(m)=0, d\varphi(m)\neq 0$, é imediato que L deve ter ordem 2 (vide próxima seção). De fato, essa condição garante que, sendo $\alpha=\sum_{(i)}\alpha_{(i)}dx_{(i)}$, tem-se

$$L((\varphi\circ\gamma^{-1})^2\alpha_{(i)})(\gamma(m))\neq 0,$$

e daí é claro que ao menos um dos coeficientes da parte principal de L não se anula em m.

4.4.3 Elipticidade do operador de Laplace-Beltrami

Teorema 4.4. *Se X é uma variedade Riemanniana, orientada, então o operador de Laplace-Beltrami $\Delta : \Omega^p(X)\to\Omega^p(X)$ é elíptico de segunda ordem.*

Prova. Como

$$\Delta=\delta d+d\delta=(-1)^{n(p+1)+1}d*d*+(-1)^{np+1}*d*d$$

e $*$ é algébrica, ao passo que cada ocorrência de d acarreta uma derivação parcial, segue imediatamente que Δ é um operador linear de ordem menor ou igual a 2. Para concluir que Δ é elíptico de segunda ordem, fixe $x\in X$ e tome $\eta : X\to\mathbb{R}$ suave, tal que $\eta(x)=0, d\eta(x)\neq 0$, $\alpha\in\Omega^p(X)$ tal que $\alpha(x)\neq 0$. Pela proposição anterior, basta provar que

$$\Delta(\eta^2\alpha)\neq 0.$$

Mas como $\eta(x)=0$, se $d\eta(x)=\xi\in\Lambda^1(T_xX)$, então

$$\begin{aligned}(d*d*(\eta^2\alpha))(x) &= d*d(\eta^2(*\alpha))(x)=d*(2\eta d\eta\wedge(*\alpha)+\eta^2 d(*\alpha))(x)\\ &= d*(2\eta*(d\eta\wedge(*\alpha)))(x)+d(\eta^2*d(*\alpha))(x)\\ &= 2d\eta(x)\wedge*(d\eta(x)\wedge(*\alpha)(x))\\ &= 2\xi\wedge*(\eta\wedge*\alpha(x))\end{aligned}$$

e analogamente,

$$(*d*d)(\eta^2\alpha)(x) = 2*(\xi \wedge *(\xi \wedge \alpha(x))).$$

Portanto, lembrando que $L_\eta(\eta) = (-1)^{np} * (\xi \wedge *\tau)$ para $\tau \in \Lambda^{p+1}(T_xX)$ e pondo $\alpha(x) = \beta$, segue que

$$\begin{aligned}
\Delta(\eta^2\alpha)(x) &= 2\{(-1)^{n(p+1)+1}\xi \wedge *(\xi \wedge *\beta) + (-1)^{np+1} * (\xi \wedge *(\xi \wedge \beta))\} \\
&= (-2)\{\xi \wedge [(-1)^{np+1} * (\xi \wedge *\beta)] + (-1)^{np} * (\xi \wedge *(\xi \wedge \beta))\} \\
&= (-2)\{\xi \wedge L_\xi(\beta) + L_\xi(\xi \wedge \beta)\} \\
&= (-2)|\xi|^2\beta \\
&= (-2)|d\eta(x)|^2\alpha(x) \neq 0, \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

onde a quarta igualdade é devido a proposição (4.2) na página 64.

$\square$

Prova do teorema de regularidade. Primeiro será feito uma redução para o problema local no $\mathbb{R}^n$. Será provado que

Teorema 4.5. *Dada uma $p-$forma C^∞ f sobre X e um funcional linear limitado $l' : \Omega^p(X) \to \mathbb{R}$ tal que $l'(\Delta\varphi) = (f, \varphi)$ para todo $\varphi \in \Omega^p(X)$, então existe uma $p-$forma C^∞ u sobre X tal que $l'(t) = (u, t)$ para todo $t \in \Omega^p(X)$.*

Note que a última afirmação do teorema de regularidade, que diz que $\Delta u = f$, é uma consequência imediata do teorema 4.5, já que $(\Delta u, \varphi) = (u, \Delta\varphi) = l'(\Delta\varphi) = (f, \varphi)$ para toda $\varphi \in \Omega^p(X)$.

Seja (U, γ) um sistema de coordenadas sobre X. Via esse sistema de coordenadas, as p-formas tornam-se funções vetoriais do $\mathbb{R}^n$ no $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{C}^m$, onde $m = \binom{n}{p}$. A notação a seguir é a mesma da seção 4.4.1. Via o sistema de coordenadas (U, γ), as $p-$formas sobre X tornam-se elementos de C^∞. Na direção oposta, cada elemento de C_0^∞ estende-se a uma $p-$forma complexa sobre todo o X. Seja L o operador diferencial parcial elíptico induzido por Δ e L^* seu adjunto formal com respeito ao produto interno L^2 sobre C_0^∞.

A extensão do produto interno $(,)$ para as $p-$formas complexas vem de maneira imediata ao se fazer:

$$(u_1 + iu_2, v_1 + iv_2) = (u_1, v_1) + (u_2, v_2) + i((u_2, v_1) - (u_1, v_2)),$$

onde u_1, u_2, v_1, v_2 são $p-$formas reais. Então, no espaço Euclidiano, obtem-se outro produto interno $(,)$ sobre C_0^∞ do produto interno sobre $p-$formas complexas sobre X.

Afirmação 4.2. *Existe uma matriz A de funções suaves sobre $\mathbb{R}^n$, hermitiana e positiva definida em cada ponto, tal que*

$$(\varphi, \psi) = \langle \varphi, A\psi \rangle$$

para toda $\varphi, \psi \in C_0^\infty$.

De fato, seja $(\varphi, \psi)_p = (\varphi(p), \psi(p))_p \sqrt{\det g}(p)$, onde $(v, w)_p = *(v \wedge (*w))$ e $\langle \varphi, \psi \rangle_p = \langle \varphi(p), \psi(p) \rangle = \varphi(p)\overline{\psi(p)}$.

Como $(,)_p$ e $\langle , \rangle_p$ são produtos internos em $\mathbb{C}^m$, existe $A(p) : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ matriz tal que

$$(\varphi(p), \psi(p))_p \sqrt{\det g}(p) = \langle \varphi(p), A(p)\psi(p) \rangle_p. \tag{4.2}$$

Tomando $\varphi = e_{(i)}$, $\psi = e_{(j)}$ numa vizinhança de p, é imediato que $A(p) = (a_{ij}(p))$, onde $a_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^n$ é $C^\infty, \forall i, j = 1, \ldots, m$. Logo,

$$\begin{aligned} \langle \varphi, A\psi \rangle = \int \langle \varphi(p), A(p)\psi(p) \rangle_p dx &= \int (\varphi(p), \psi(p))_p \sqrt{\det g}(p) dx \\ &= \int *(v \wedge (*w)) dX \\ &= \int \varphi \wedge *\psi = (\varphi, \psi). \end{aligned}$$

Para o que falta, note que

$$(\varphi, \psi) = \langle \varphi, A\psi \rangle \Rightarrow \langle \varphi, A\varphi \rangle = (\varphi, \varphi) \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$\langle \varphi, A\varphi \rangle = \overline{\langle A\varphi, \varphi \rangle} = \langle A\varphi, \varphi \rangle = \langle \varphi, A^*\varphi \rangle.$$

Daí, pela identidade de polarização,

$$\begin{aligned} 4\langle\varphi, A\psi\rangle &= \sum_{|\lambda|=1} \lambda\langle\varphi+\lambda\psi, A(\varphi+\lambda\psi)\rangle \\ &= \sum_{|\lambda|=1} \lambda\langle\varphi+\lambda\psi, A^*(\varphi+\lambda\psi)\rangle \\ &= 4\langle\varphi, A^*\psi\rangle, \end{aligned}$$

donde A^* é hermitiana. Por fim, (4.2) garante que A é positiva definida em cada ponto. Segue a afirmação.

Agora, veja que o adjunto de L com respeito a $(,)$ é simplesmente Δ^* restrito à C_0^∞. Para $\varphi \in C_0^\infty$, vale

$$L^*\varphi = A\Delta^* A^{-1}\varphi. \tag{4.3}$$

De fato, para $\psi \in C_0^\infty$ arbitrário,

$$\begin{aligned} \langle L^*\varphi, \psi\rangle &= \langle\varphi, L\psi\rangle = (A^{-1}\varphi, L\psi) \\ &= (\Delta^* A^{-1}\varphi, \psi) = \langle A\Delta^* A^{-1}\varphi, \psi\rangle. \end{aligned}$$

Agora se estende o funcional linear $l' : \Omega^p(X) \to \mathbb{R}$ para as formas diferenciáveis complexas, e define-se o funcional linear complexo l sobre C_0^∞ por

$$l(\varphi) = l'(A^{-1}\varphi). \tag{4.4}$$

Um fato interessante sobre l é que o mesmo é localmente representado por uma função C^∞. Precisamente, será mostrado que

Lema 4.4. *Se $p \in \mathbb{R}^n$, então existe uma vizinhança W_p de p e um elemento $u_p \in \wp$ tal que $l(t) = \langle u_p, t\rangle$ para todo $t \in C_0^\infty(W_p)$.*

Antes de provar o lema, será mostrado que o mesmo implica o teorema 4.5. Segue do lema 4.4 que para cada $p, q \in \mathbb{R}^n$, $u_p|W_p \cap W_q = u_q|W_p \cap W_q$, desde que ambos tem o mesmo produto interno L^2 com todos os elementos de $C_0^\infty(W_p \cap W_q)$. Portanto as u_p's juntas dão uma $u \in C^\infty$ tal que $u|W_p = u_p|W_p$ para cada $p \in \mathbb{R}^n$. Agora seja $\{\varphi_i\}$ uma partição da unidade sobre $\mathbb{R}^n$ subordinada à $\{W_p\}$. Então, se $t \in C_0^\infty$,

$$l(t) = \sum_i l(\varphi_i t) = \sum_i \langle u, \varphi_i t\rangle = \langle u, t\rangle.$$

Agora se φ é $p-$forma suave sobre X com suporte em U, então

$$l'(\varphi) = l(A\varphi) = \langle u, A\varphi\rangle = (u, \varphi).$$

Pelo mesmo argumento acima, as u's para os vários sistemas de coordenadas sobre X dão juntas uma $p-$forma $u \in C^\infty$ (necessariamente real) sobre X tal que

$$l'(\varphi) = (u, \varphi)$$

para toda $\varphi \in \Omega^p(X)$. Portanto, provar o teorema 4.5 foi reduzido a provar o lema 4.4, o qual segue.

Seja $p \in \mathbb{R}^n$ fixo, e seja Q' algum 2π cubo aberto contendo p. Escolha um aberto V tal que $p \in V \subset \overline{V} \subset Q'$, e seja

$$\tilde{l} = l|C_0^\infty(V). \tag{4.5}$$

Primeiro de tudo, observe que $\tilde{l}$ é um funcional linear sobre $C_0^\infty(V)$. De fato, desde que $\overline{V}$ é compacto, a norma matricial $\|A_x^{-1}\|$ tem um máximo quando x percorre $\overline{V}$, e portanto, usando o fato que l' é limitado, segue que

$$\begin{aligned} |\tilde{l}(\varphi)| &= |l(\varphi)| = |l'(A^{-1}\varphi)| \leq (\text{const})\|A^{-1}\varphi\|' \\ &= (\text{const})((A^{-1}\varphi, A^{-1}\varphi))^{\frac{1}{2}} = (\text{const})\langle\varphi, A^{-1}\varphi\rangle^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (\text{const})(\|\varphi\|\|A^{-1}\varphi\|)^{\frac{1}{2}} \leq (\text{const})\|\varphi\| \end{aligned}$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(V)$, e onde $\| \quad \|'$ denota a norma vinda de $(,)$. Segundo, observe que segue de (4.5), (4.4), (4.3), (4.2), e das hipóteses no teorema 4.5 que

$$\tilde{l}(L^*\varphi) = l'(A^{-1}L^*\varphi) = l'(\Delta^* A^{-1}\varphi) = (f, A^{-1}\varphi) = \langle f, \varphi\rangle \tag{4.6}$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(V)$. Daí, $\tilde{l}$ é uma solução fraca de $Lu = f$.

Desde que $\tilde{l}$ é limitado, $\tilde{l}$ estende-se a um funcional linear limitado sobre H_0. Segue que existe um elemento $\tilde{u} \in H_0$ tal que

$$\tilde{l}(t) = \langle \tilde{u}, t \rangle_0 \tag{4.7}$$

para todo $t \in H_0$.

Basta então mostrar que numa vizinhança suficientemente pequena de p, o elemento $\tilde{u}$ coincide com um elemento de $\wp$.

Escolha uma vizinhança O_0 de p, com $\overline{O_0}$ suficientemente pequeno, de forma que existe um operador periódico elíptico $\tilde{L}$ que coincide com L sobre O_0 (como feito na subseção 4.4.1). Escolha uma vizinhaça O de p tal que $\overline{O} \subset O_0$, e então escolha uma sequência de vizinhanças O_n de p tal que $\overline{O} \subset O_n$ e $\overline{O_n} \subset O_{n-1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para cada natural $n \geq 1$, escolha uma função $w_n \in C^\infty$ que é identicamente igual a 1 em O_n, tem seus valores entre 0 e 1, e tem suporte em O_{n-1}. Seja

$$v_1 = w_1 \tilde{u} \in H_0.$$

Então

$$\tilde{L} v_1 = \tilde{L} w_i \tilde{u} = w_1 \tilde{L} \tilde{u} + M_1 \tilde{u}. \tag{4.8}$$

onde

$$M_1 = \tilde{L} w_1 - w_1 \tilde{L}. \tag{4.9}$$

Agora, com o objetivo de se aplicar o teorema 3.1, deve-se determinar a qual espaço de Sobolev o lado direito de (4.8) pertence.

Primeiro veja

$$w_1 \tilde{L} \tilde{u} = w_1 f,$$

do qual segue que $w_1 \tilde{L} \tilde{u} \in C_0^\infty(O_0)$ e portanto pertence à H_s para cada s. Segue do teorema 2.1(f), que para mostrar o (4.9), basta provar que

$$\langle w_1 \tilde{L} \tilde{u} - w_1 f, \varphi \rangle_0 = 0$$

para toda $\varphi \in \wp$.

Mas, de fato, usando (4.6), (4.7), (2.22) e a proposição 4.7

$$\begin{aligned}\langle w_1\tilde{L}\tilde{u} - w_1 f, \varphi\rangle_0 &= \langle w_1\tilde{L}\tilde{u}, \varphi\rangle_0 - \langle w_1 f, \varphi\rangle_0 \\ &= \langle \tilde{L}\tilde{u}, w_1\varphi\rangle_0 - \langle f, w_1\varphi\rangle_0 \\ &= \langle \tilde{u}, L^* w_1\varphi\rangle_0 - \tilde{l}(L^* w_1\varphi) \\ &= \tilde{l}(L^* w_1\varphi) - \tilde{l}(L^* w_1\varphi) = 0.\end{aligned}$$

Agora, desde que L (e então $\tilde{L}$) é um operador de ordem 2, então M_1 tem ordem 1 (vide 3.1.1); então $M_1\tilde{u} \in H_{-1}$. Portanto o lado direito de (4.8) pertence à H_{-1}. Segue do teorema 3.1 que $v_1 \in H_1$. Agora seja

$$v_2 = w_2\tilde{u}.$$

Então

$$\tilde{L}v_2 = w_2\tilde{L}\tilde{u} + M_2\tilde{u} = w_2\tilde{L}\tilde{u} + M_2 v_1,$$

onde a última igualdade segue da proposição 4.8 desde que $M_2 = \tilde{L}w_2 - w_2\tilde{L}$ tem suporte em O_1 e $\tilde{u} = v_1$ sobre O_1. Agora, procedendo como antes, vê-se que o lado direito da última igualdade acima está em H_0. Portanto, novamente pelo teorema 3.1, $v_2 \in H_2$. Continuando da mesma maneira, obtem-se

$$v_n = w_n\tilde{u} \tag{4.10}$$

com $v_n \in H_n$.

Finalmente seja W_p uma vizinhança aberta de p com $\overline{W_p} \subset O$, e seja w identicamente 1 sobre W_p, com valores entre 0 e 1, e com suporte em O. Então $w\tilde{u} = ww_n\tilde{u}$ para cada n; e então, por (4.10), $w\tilde{u} \in H_n$ para todo n. Pelo corolário de lema de Sobolev, $w\tilde{u}$ representa uma função C^∞ $u \in \wp$. Agora, se $t \in C_0^\infty(W_p)$, então

$$\begin{aligned} l(t) &= \tilde{l}(t) = \langle \tilde{u}, t\rangle_0 = \langle \tilde{u}, wt\rangle_0 \\ &= \langle w\tilde{u}, t\rangle_0 = \langle u, t\rangle,\end{aligned}$$

e o lema 4.4 está provado, completando a prova do teorema de regularidade. $\square$

Prova do teorema de compacidade. É suficiente mostrar que se $m \in X$, então existe alguma vizinhança de m tal que se φ é qualquer função C^∞ sobre X com suporte nessa vizinhança, então $(\varphi\alpha_n)_{n\geq 1}$ tem uma subsequência de Cauchy. Então simplesmente cobre-se X com um número finito de tais vizinhanças e toma-se uma partição da unidade $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ subordinada a essa cobertura. Pode-se selecionar uma subsequência α_{n_k} tal que $\varphi_j\alpha_{n_k}$ seja de Cauchy para cada j. Então $(\alpha_{n_k})_{k\geq 1}$ é de Cauchy pois

$$\|\alpha_{n_k} - \alpha_{n_l}\| = \left\|\sum_{j=1}^{N} \varphi_j(\alpha_{n_k} - \alpha_{n_l})\right\| \leq \sum_{j=1}^{N} \|\varphi_j(\alpha_{n_k} - \alpha_{n_l})\|.$$

Reduz-se o problema ao espaço Euclidiano escolhendo-se uma vizinhaça coordenada de m, com m indo para $p \in \mathbb{R}^n$. Continuando com as notações anteriores (onde $\| \ \|'$ denota a norma sobre X e a norma correspondente induzida em C_0^∞), seja φ uma função C^∞ real e com suporte em O_0. É suficiente mostrar que a sequência $(\varphi\alpha_n)_{n\geq 1}$ de elementos de $\wp$ tem uma subsequência de Cauchy $(\varphi\alpha_k)_{k\geq 1}$ na norma 0, desde que a norma 0 e a norma L^2 coincidem sobre $C_0^\infty(O_0)$. Mas, de acordo com o lema de Rellich, basta mostrar que a sequência é limitada em H_1. Ora, segue da desigualdade fundamental que

$$\begin{aligned} \|\varphi\alpha_n\|_1 &\leq (\text{const})(\|\tilde{L}\varphi\alpha_n\|_{-1} + \|\varphi\alpha_n\|_{-1}) \\ &= (\text{const})(\|L\varphi\alpha_n\|_{-1} + \|\varphi\alpha_n\|_{-1}) \\ &\leq (\text{const})\|\varphi L\alpha_n\|_{-1} + (\text{const})\|(L\varphi - \varphi L)\alpha_n\|_{-1} + \\ &\quad + (\text{const})\|\varphi\alpha_n\|_{-1}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Agora,

$$\begin{aligned} \|\varphi L\alpha_n\|_{-1} &\leq \|\varphi L\alpha_n\|_0 = \|\varphi L\alpha_n\| \\ &\leq (\text{const})\|\varphi L\alpha_n\|' \leq (\text{const})\|L\alpha_n\|' \\ &\leq (\text{const})\|\Delta\alpha_n\|'. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Seja τ uma função C^∞ com valores entre 0 e 1, que é igual a 1 sobre O_0 e tem suporte em V. Então

$$(L\varphi - \varphi L)\alpha_n = (L\varphi - \varphi L)(\tau\alpha_n),$$

e então

$$\begin{aligned}\|(L\varphi-\varphi L)\alpha_n\|_{-1} &= \|(L\varphi-\varphi L)(\tau\alpha_n)\|_{-1}\\ &\le (\text{const})\|\tau\alpha_n\|_0=(\text{const})\|\tau\alpha_n\|\\ &\le (\text{const})\|\tau\alpha_n\|'\le(\text{const})\|\alpha_n\|'. \qquad (4.13)\end{aligned}$$

Finalmente

$$\|\varphi\alpha_n\|_{-1}\le\|\varphi\alpha_n\|_0=\|\varphi\alpha_n\|\le(\text{const})\|\varphi\alpha_n\|'\le(\text{const})\|\alpha_n\|'. \qquad (4.14)$$

Juntanto (4.11), (4.12), (4.13) e (4.14), segue que

$$\|\varphi\alpha_n\|_1\le(\text{const})(\|\Delta\alpha_n\|'+\|\alpha_n\|').$$

Mas, por hipótese, $\|\Delta\alpha_n\|'$ e $\|\alpha_n\|'$ são limitados. Então, a sequência $(\varphi\alpha_n)_{n\ge1}$ é limitada em H_1, e segue o teorema de compacidade.

□

4.5 Aplicações

4.5.1 Operador de Green

Definição 4.3. *O operador de Green associado ao operador de Laplace-Beltrami Δ é a composição*

$$\begin{aligned} G:\Omega^p(X) &\to Har^p(X)^\perp \overset{(\Delta_{|Har^p(X)^\perp})^{-1}}{\to} Har^p(X)^\perp\\ \alpha &\mapsto \Delta^{-1}(\alpha-\pi_{Har}(\alpha))\end{aligned}$$

Lema 4.5. *G é um operador linear pré-compacto e auto-adjunto.*

Prova. Que G é pré-compacto segue do fato de ser o mesmo a composição do operador linear limitado $Id-\pi_{Har}=\pi_{Har^\perp}$ com o operador pré-compacto $(\Delta_{|Har^p(X)^\perp})^{-1}: Har^p(X)^\perp\to Har^p(X)^\perp$(vide afirmação 4.1). Quanto à auto-adjunção, basta ver que se $G(\alpha)=w, G(\beta)=\eta$, com $w,\eta\in Har^p(X)^\perp$, então

$$\begin{aligned}(G(\alpha),\beta)=(\alpha,G(\beta)) &\Leftrightarrow (w,\beta)=(\alpha,\eta)\\ &\Leftrightarrow (w,\Delta\eta+\pi_{Har}(\beta))=(\Delta w+\pi_{Har}(\alpha),\eta)\\ &\Leftrightarrow (w,\Delta\eta)+(w,\pi_{Har}(\beta))=(\Delta w,\eta)+(\pi_{Har}(\alpha),\eta)\\ &\Leftrightarrow (w,\Delta\eta)=(\Delta w,\eta),\end{aligned}$$

o que é verdade.

□

Proposição 4.9. *O operador de Green $G:\Omega^p(X)\to Har^p(X)^\perp\subset\Omega^p(X)$ comuta com d,δ e Δ.*

Prova. Como d e δ comutam com Δ, basta mostrar que se $T:\Omega^p(X)\to\Omega^p(X)$ é linear, então $T\Delta=\Delta T$, o que implica $TG=GT$. Para tanto, é suficiente provar que $T\circ\pi_{Har^\perp}=\pi_{Har^\perp}\circ T$ em $\Omega^p(X)$ e $T\circ(\Delta_{|Har^p(X)^\perp})^{-1}=(\Delta_{|Har^p(X)^\perp})^{-1}\circ T$ em $Har^p(X)^\perp$.

$$\begin{aligned}T\Delta=\Delta T &\Rightarrow \Delta T(Har^p(X))=T\Delta(Har^p(X))=T(0)=0\\ &\Rightarrow T(Har^p(X))\subset T(Har^p(X))\end{aligned}\tag{4.15}$$

Como $Har^p(X)^\perp=\Delta(\Omega^p(X))$, tem-se também

$$\begin{aligned}T(Har^p(X)^\perp) &= T\Delta(\Omega^p(X))\\ &= \Delta T(\Omega^p(X))\subset\Delta(\Omega^p(X))=Har^p(X)^\perp\end{aligned}\tag{4.16}$$

$T(Har^p(X))\subset T(Har^p(X))$ e $\Delta_{|Har^p(X)^\perp}:Har^p(X)^\perp\to Har^p(X)^\perp$, juntamente com $T\Delta=\Delta T$, implicam em $T\circ\Delta_{|Har^p(X)^\perp}=\Delta_{|Har^p(X)^\perp}\circ T$, e daí

$$T\circ(\Delta_{|Har^p(X)^\perp})^{-1}=(\Delta_{|Har^p(X)^\perp})^{-1}\circ T \qquad \text{em} \qquad Har^p(X)^\perp$$

Para ver que $T\circ\pi_{Har^\perp}=\pi_{Har^\perp}\circ T$ em $\Omega^p(X)$, note que se $\alpha-\pi_{Har}(\alpha)=\Delta w$, então

$$(T\circ\pi_{Har^\perp})(\alpha)=(T\circ\pi_{Har^\perp})(\Delta w+\pi_{Har^\perp}(\alpha))=(T\circ\pi_{Har^\perp})(\Delta w)=T(\Delta w)$$

e

$$(\pi_{Har^\perp} \circ T)(\alpha) = \pi_{Har^\perp}(\underbrace{T\Delta w}_{\in Har^p(X)^\perp} + \underbrace{T\pi_{Har^\perp}(\alpha)}_{\in Har^p(X)}) = \pi_{Har^\perp}(T\Delta w) = T\Delta w,$$

por (4.15), (4.16) e por $\Delta(\Omega^p(X)) = Har^p(X)^\perp$.

□

4.5.2 Teorema da dualidade de Poincaré

O teorema a ser provado aqui é

Teorema 4.6. *(Dualidade de Poincaré) Seja X uma variedade compacta e orientada de dimensão n. Então existe um isomorfismo natural entre H^{n-p} e o espaço dual de H^p. Em particular, tem-se* $\dim H^{n-p} = \dim H^p$.

Para começar as ferramentas são:

Teorema 4.7. *Toda classe de cohomologia de De Rham de uma variedade Riemanniana compacta, conexa e orientada contém um único representante harmônico.*

Prova. Se $\alpha \in \Omega^p(X)$ é fechada, então segue do teorema de Hodge, da definição do operador de Green e da proposição anterior que

$$\begin{aligned} \alpha &= \Delta(G(\alpha)) + \pi_{Har}(\alpha) \\ &= (\delta d + d\delta)(G(\alpha)) + \pi_{Har}(\alpha) \\ &= \delta d G(\alpha) + d\delta G(\alpha) + \pi_{Har}(\alpha) \\ &= \pi_{Har}(\alpha) + d\delta G(\alpha). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Mas como $\pi_{Har}(\alpha)$ é harmônica, tem-se $d\pi_{Har}(\alpha) = 0$, e (4.17) garante que

$$[\alpha] = [\pi_{Har}(\alpha)].$$

Para a unicidade, se $\alpha_1, \alpha_2 \in Har^p(X)$ são tais que $\alpha_1 - \alpha_2 = d\beta, \beta \in \Omega^{p-1}(X)$, então

$$|\alpha_1 - \alpha_2|_2^2 = (\alpha_1 - \alpha_2, d\beta) = (\delta(\alpha_1 - \alpha_2), \beta) = 0,$$

donde $\alpha_1 = \alpha_2$

$\square$

Corolário 4.5.1. *Os grupos de cohomologia de De Rham de uma variedade diferenciável compacta, conexa e orientada X têm dimensão finita.*

Prova. Muna X de uma métrica Riemanniana. Pelo Teorema anterior, $H^p(X)$ é gerado pelas classes $[\alpha]$, onde $\alpha \in \Omega^p(X)$ é harmônica. Mas $Har^p(X)$ tem dimensão finita.

$\square$

Para o que segue, será preciso do seguinte

Lema 4.6. *Se V e W são espaços vetoriais de dimensão finita com produto interno, e $B : V \times W \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear não-degenerada, i.e, tal que $B(v, w) = 0, \forall w \in W \Rightarrow v = 0$ e $B(v, w) = 0, \forall v \in V \Rightarrow w = 0$. Então a aplicação $\phi : V \to W^*$ dada por*

$$\phi(v)(w) = B(v, w)$$

é um isomorfismo.

Prova. A não-degeneração de B garante a injetividade de ϕ. Analogamente, $\psi : W \to V^*$ dada por $\psi(w)(v) = B(v, w)$ é injetiva, e daí

$$\dim V \leq \dim W^* = \dim W \leq \dim V^* = \dim V.$$

Portanto, $\dim V = \dim(W^*)$ e ϕ é sobrejetiva.

$\square$

Por fim, o

Teorema 4.8. *(dualidade de Poincaré) Se X é variedade diferenciável compacta, conexa e orientada então $H^{n-p}(X) \cong H^p(X)^*$ via o isomorfismo induzido pela forma bilinear*

$$\begin{aligned} B : H^p(X) \times H^{n-p}(X) &\to \mathbb{R} \\ ([\alpha], [\beta]) &\mapsto \int_X \alpha \wedge \beta. \end{aligned}$$

Prova. Para ver que B está bem definida basta notar que se $\alpha_1 - \alpha_2 = d\tau$, então $(\alpha_1 - \alpha_2) \wedge \beta = d\tau \wedge \beta = d(\tau \wedge \beta) + (-1)^{p-1}\tau d\beta = d(\tau \wedge \beta)$, e o teorema de Stockes dá

$$\int_X \alpha_1 \wedge \beta - \int_X \alpha_2 \wedge \beta = \int_X (\alpha_1 - \alpha_2) \wedge \beta = \int_X d(\tau \wedge \beta) = 0.$$

Analogamente, $\beta_1 - \beta_2 = d\tau \Rightarrow \int_X \alpha \wedge \beta_1 = \int_X \alpha \wedge \beta_2$.

Uma vez bem definida, a linearidade de B é imediata. Daí, pelo lema anterior, basta mostrar que B é não-degenerada. Para tanto, muna X de uma métrica Riemanniana e tome $[\alpha] \in H^p(X) - \{0\}$. Pelo teorema anterior, pode-se supor que α é harmônica. Daí, $*\alpha \in \Omega^{n-p}(X)$ e

$$\Delta * \alpha = *\Delta\alpha = *0 = 0,$$

i.e, $*\alpha$ também é harmônica. Em particular, $d(*\alpha) = 0$, donde $*\alpha$ representa uma classe de cohomologia em $H^{n-p}(X)$, tal que

$$([\alpha], [*\alpha]) = \int_X \alpha \wedge *\alpha = |\alpha|_2^2 > 0.$$

Analogamente, dada $[\beta] \in H^{n-p}(X) - \{0\}$, tem-se $*\beta \in \Omega^p(X)$ fechada e

$$\begin{aligned} ([*\beta], [\beta]) &= \int_X *\beta \wedge \beta = (-1)^{p(n-p)} \int_X *\beta \wedge *(*\beta) \\ &= (-1)^{p(n-p)} | *\beta|_2^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Segue que B é não-degenerada.

□

Corolário 4.5.2. *Se X^n é compacta, conexa e orientada, então $H^n(X) \approx \mathbb{R}$.*

Prova. Pela dualidade de Poincaré, $H^n(X) \approx H^0(X)^* \approx \mathbb{R}^* = \mathbb{R}$.

□

4.5.3 Os Autovalores do Laplaciano

Considere o operador de Laplace-Beltrami Δ atuando sobre $p-$formas de $\Omega^p(X)$ para algum p fixo.

Definição 4.4. *Um número real λ ao qual corresponde uma p-forma não identicamente nula u tal que $\Delta u = \lambda u$ é chamado de **autovalor** de Δ. Se λ é um autovalor, então qualquer p-forma u tal que $\Delta u = \lambda u$ é chamada uma **autofunção** de Δ correpondente a λ. As autofunções correspondentes a um λ fixo formam um subespaço de $\Omega^p(X)$ chamado o **autoespaço** do autovalor λ.*

Se λ é um autovalor e u uma autofunção correspondente, então

$$\begin{aligned}
\lambda|u|_2^2 &= \lambda(u,u) = (\lambda u, u) \\
&= (\Delta u, u) = ((d\delta + \delta d)u, u) \\
&= (d\delta u, u) + (\delta d u, u) \\
&= (\delta u, \delta u) + (du, du) = |\delta u|_2^2 + |du|_2^2,
\end{aligned}$$

e portanto $\lambda \geq 0$, i.e, todos os autovalores de Δ são não-negativos.

Além do mais, os autoespaços de Δ possuem dimensão finita. De fato, se $\dim V_\lambda = \infty$, onde V_λ é o autoespaço correspondente a λ, então, por Gramm-Schmidt, V_λ conteria uma sequência ortonormal $(\alpha_k)_{k\geq 1}$. Mas, como $|\alpha_k|_2 = 1$ e $|\Delta \alpha_k|_2 = \lambda$, então pelo teorema de compacidade, $(\alpha_k)_{k\geq 1}$ teria uma subsequência convergente. Mas isso é uma contradição, uma vez que $|\alpha_{n_k} - \alpha_{n_l}|_2 = \sqrt{2}$.

Se λ e η são dois autovalores distintos e u, v autofunções correspondentes, segue que

$$\begin{aligned}
\lambda(u,v) &= (\lambda u, v) = (\Delta u, v) \\
&= (u, \Delta v) = (u, \eta v) = \eta(u,v),
\end{aligned}$$

donde $(u,v) = 0$, uma vez que $\lambda \neq \eta$. Disso segue que autofunções correspondentes à autovalores distintos são ortogonais. Com isso, se $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ fosse uma sequência convergente de autovalores distintos (e portanto limitada) e $(u_n)_{n\geq}$ a sequência das autofunções correspondentes, podería-se ortonormalizar $(u_n)_{n\geq}$ e assim obter uma sequência ortonormal de autofunções tal que $|\Delta u_n|_2 = \lambda_n$ é limitado e $|u_n|_2 = 1$, podendo assim, novamente pelo teorema de compacidade, achar uma subsequência de Cauchy. Daí, chega-se a uma contradição. Logo, os autovalores de Δ não possuem ponto de acumulação.

Proposição 4.10. *Se Δ é o operador de Laplace-Beltrami, então Δ possui uma sequência de autovalores positivos que diverge para $+\infty$.*

Prova. Primeiro será mostrado que Δ possui um autovalor positivo. De fato, considere Δ restrito a $Har^p(X)^\perp$. Então tem-se $\Delta : Har^p(X)^\perp \to Har^p(X)^\perp$ e também o operador de Green $G : Har^p(X)^\perp \to Har^p(X)^\perp$, e $\Delta G\alpha = G\Delta\alpha = \alpha$ para todo $\alpha \in Har^p(X)^\perp$. Obeserve que os autovalores de $G|_{Har^p(X)^\perp}$ são os recíprocos dos autovalores de $\Delta|_{Har^p(X)^\perp}$. Seja

$$\eta = \sup_{\substack{|\varphi|_2=1 \\ \varphi\in Har^p(X)^\perp}} |G\varphi|_2.$$

Note que $\eta < \infty$. De fato, se $\eta = \infty$, então existiria uma sequência $c_n = |G\varphi_n|_2 \geq n$. Mas, como G é pré-compacto, $(G\varphi_n)_{n\geq 1}$ possui uma subsequência de Cauchy. Disso e da desigualdade $||G\varphi_n|_2 - |G\varphi_n|_2| \leq |G\varphi_n - G\varphi_n|_2$, chega-se que $(c_n)_{n\geq 1}$ possui também uma subsequência de Cauchy, portanto convergente. Uma contradição, uma vez que $(c_n)_{n\geq 1}$ diverge. Tem-se também que $\eta > 0$, já que se $|G\varphi|_2 = 0$, então $G\varphi = 0$ e daí $\varphi = \Delta G\varphi = 0$, uma vez que $\varphi \in Har^p(X)^\perp$. Novamente uma contradição, pois $|\varphi|_2 = 1$. Com isso, η está bem definida e $|G\varphi|_2 \leq \eta|\varphi|_2$ para todo $\varphi \in Har^p(X)^\perp$.

Afirmação 4.3. *$\frac{1}{\eta}$ é um autovalor de Δ.*

Seja $(\varphi_j)_{j\geq 1} \in Har^p(X)^\perp$ uma sequência maximizante para η, i.e, $|\varphi|_2 = 1$ e $|G\varphi|_2 \to \eta$. Primeiro, veja que $|G^2\varphi_j - \eta^2\varphi_j|_2 \to 0$, pois

$$\begin{aligned}
|G^2\varphi_j - \eta^2\varphi_j|_2^2 &= |G^2\varphi_j|_2^2 - 2\eta^2(G^2\varphi_j, \varphi_j) + \eta^4 \\
&\leq \eta^2|G\varphi_j|_2^2 - 2\eta^2|G\varphi_j|_2^2 + \eta^4 \to 0.
\end{aligned}$$

Segundo, $|G\varphi_j - \eta\varphi_j|_2 \to 0$. De fato, se $\psi_j = G\varphi_j - \eta\varphi_j$, então

$$\begin{aligned}
0 \leftarrow (\psi_j, G^2\varphi_j - \eta^2\varphi_j)& \\
&= (\psi_j, G\psi_j + \eta\psi_j) \\
&= (\psi_j, G\psi_j) + \eta|\psi_j|_2 \geq \eta|\psi_j|_2^2,
\end{aligned}$$

uma vez que $(\psi_j, G\psi_j) = (G\psi_j, \Delta G\psi_j) = (dG\psi_j, dG\psi_j) + (\delta G\psi_j, \delta G\psi_j) \geq 0$. Agora, novamente usando o fato de G ser pré-compacto, existe uma subsequência de φ_j(que por abuso de notação será denotada da mesma forma), tal que $(G\varphi_j)_{j\geq 1}$ é de Cauchy. Defina então o funcional linear l sobre $\Omega^p(X)$ por

$$l(\beta) = \lim_{j\to\infty} \eta(G\varphi_j, \beta)$$

para $\beta \in \Omega^p(X)$. Como $(G\varphi_j)_{j\geq 1}$ é de Cauchy (portanto $|G\varphi_j|_2$ é limitado) e

$$|l(\beta)| = |\lim_{j\to\infty} \eta(G\varphi_j, \beta)| \leq \eta \lim_{j\to\infty} |G\varphi_j|_2|\beta|_2,$$

então l é um operador linear limitado. Veja também que l é uma solução fraca de

$$\left(\Delta - \left(\frac{1}{\eta}\right)\right) u = 0,$$

já que

$$\begin{aligned}
l\left(\left(\Delta - \left(\frac{1}{\eta}\right)\right) u\right) &= \lim_{j\to\infty} \eta(G\varphi_j, \left(\Delta - \left(\frac{1}{\eta}\right)\right) u) \\
&= \lim_{j\to\infty} [\eta(G\varphi_j, \Delta u) - (G\varphi_j, u)] \\
&= \lim_{j\to\infty} [(\eta\varphi_j, u) - (G\varphi_j, u)] \\
&= \lim_{j\to\infty} [(\eta\varphi_j - G\varphi_j, u)] \to 0.
\end{aligned}$$

Agora, se fixado $x \in X$ e tomando $\psi : X \to \mathbb{R}$ suave, tal que $\psi(x) = 0, d\psi(x) \neq 0$, $\alpha \in \Omega^p(X)$ tal que $\alpha(x) \neq 0$, pela proposição 3.3 e pela conta em (4.1),

$$\left(\Delta - \left(\frac{1}{\eta}\right)\right) (\psi^2\alpha)(x) \neq 0,$$

e daí $\Delta - \left(\frac{1}{\eta}\right)$ é elíptico. Pelo teorema de regularidade e pelo fato de l ser limitado (logo pode ser estendido), existe $w \in \Omega^p(X)$ tal que $l(\beta) = (w, \beta)$. Consequentemente,

$$\left(\Delta - \left(\frac{1}{\eta}\right)\right) w = 0,$$

ou

$$\Delta w = \left(\frac{1}{\eta}\right) w.$$

Agora, sejam $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ autovalores de Δ e $u_1, \ldots, u_n$ as autofunções correspondentes (já ortonormalizadas). Seja R_n o subespaço de $Har^p(X)^\perp$ gerado por $\{u_1, \ldots, u_n\}$. Veja que se $u \in (Har^p(X)^\oplus R_n)^\perp$ e $w = h + \sum_{i=1}^n (w, u_i)u_i$, onde h é uma p-forma harmônica, então

$$(\Delta u, w) = (u, \Delta w) = \left(u, \Delta\left(\sum_{i=1}^n (w, u_i)u_i\right)\right) = \sum_{i=1}^n (\Delta w, u_i)(u_i, u) = 0$$

e

$$(Gu, w) = (u, Gw) = \left(u, Gh + G\left(\sum_{i=1}^n (w, u_i)u_i\right)\right) = \sum_{i=1}^n (Gw, u_i)(u_i, u) = 0.$$

Então, G e Δ mapeiam $(Har^p(X)^\oplus R_n)^\perp$ nele mesmo. Daí, definindo

$$\eta_{n+1} = \sup_{\substack{|\varphi|_2=1 \\ \varphi \in (Har^p(X) \oplus R_n)^\perp}} |G\varphi|_2$$

e procedendo de forma análoga à prova da afirmação, chega-se que $\lambda_{n+1} = \frac{1}{\eta_{n+1}}$ é autovalor de Δ. Como

$$(Har^p(X) \oplus R_{n+1})^\perp \subset (Har^p(X) \oplus R_n)^\perp,$$

então

$$\lambda_{n+1} \geq \lambda_n.$$

Segue o resultado. $\square$

Mais um resultado interessante acerca dos autovalores de Δ é a

Proposição 4.11. *Sejam $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \cdots$ os autovalores de Δ, onde cada autovalor é contado segundo a multiplicidade da dimensão de seu autoespaço, com uma sequência já ortonormalizada de autofunções $(u_i)_{i\geq 1}$. Seja $\alpha \in \Omega^p(X)$. Então*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\alpha - \sum_{i=1}^n (\alpha, u_i)u_i\right|_2 = 0.$$

Prova. Para a prova, seja k a dimensão de $Har^p(X)$. Logo, tomando $\beta = \Delta\alpha$, segue que

$$G(\beta) = \alpha - \pi_{Har^p}(\alpha) = \alpha - \sum_{i=1}^{k} (\alpha, u_i)u_i.$$

Segue então que

$$\begin{aligned}
\left|\alpha - \sum_{i=1}^{n} (\alpha, u_i)u_i\right|_2 &= \left|G\beta - \sum_{i=k+1}^{n} (\alpha, u_i)u_i\right|_2 = \left|G\beta - \sum_{i=k+1}^{n} (\alpha, \lambda_i u_i)\frac{1}{\lambda_i}u_i\right|_2 \\
&= \left|G\beta - \sum_{i=k+1}^{n} (\alpha, \Delta u_i)Gu_i\right|_2 = \left|G\beta - \sum_{i=k+1}^{n} (\Delta\alpha, u_i)Gu_i\right|_2 \\
&= \left|G\beta - \sum_{i=k+1}^{n} (\beta, u_i)Gu_i\right|_2 = \left|G\left(\beta - \sum_{i=k+1}^{n} (\beta, u_i)u_i\right)\right|_2
\end{aligned}$$

para $n > k$. Mas, por definição de λ_{n+1},

$$\begin{aligned}
\left|G\left(\beta - \sum_{i=k+1}^{n} (\beta, u_i)u_i\right)\right|_2 &\leq \frac{1}{\lambda_{n+1}}\left|\beta - \sum_{i=k+1}^{n} (\beta, u_i)u_i\right|_2 \\
&\leq \frac{1}{\lambda_{n+1}}|\beta|_2 \to 0 \text{ quando } n \to \infty,
\end{aligned}$$

onde na segunda desigualdade foi usado que

$$\left|\beta - \sum_{i=k+1}^{n} (\beta, u_i)u_i\right|_2 = \sqrt{|\beta|_2^2 - \sum_{i=k+1}^{n} (\beta, u_i)^2} \leq |\beta|_2.$$

Segue a proposição.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] Warner, Frank W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983.

[2] do Carmo, Manfredo P., *Differential forms and aplications*, Universitext,Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[3] do Carmo, Manfredo P., *Geometria Riemanniana*,Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[4] Guillemin, V.; Pollack, A., *Diffrential Topology*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J, 1974.

[5] Madsen, Ib; Tornehave, Jorgen. *From calculus to cohomology: de Rham cohomology and characteristic classes.* Cambridge, UK: Cambridge University, 1997.

[6] Lima, Elon Lages. *Introdução à topologia diferencial.* 2 ed./ ed. rev. Rio de Janeiro: IMPA, 1961.

[7] Lima, Elon Lages. *Introdução às variedades diferenciais.* Porto Alegre: Emma, 1960.

[8] Lima, E. L., *Curso de Análise*, Volume 2, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro 1989.

[9] Spivak, Michael. *Calculus on manifolds: of advanced calculus.* Menlo Park, Calif.: W. A. Benjamin, c1965.

[10] Mercuri, F.; *Hodge Theory*, Notas de Aula, 1988.

[11] Sotomayor, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[12] Lee, John M.. *Introduction to topological manifolds*. New York: Springer-Verlag, c2000.

[13] Folland, Gerald B. *Real analysis: modern techniques and their applications*. 2nd.ed. New York: John Wiley, c1999.

[14] Bott, R.; Tu, L. W., *Diferential Forms in Algebraic Topology*, Graduate Texts in Mathematics, Springer- Verlag, New York-Berlin, 1982.