



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA E MATEMÁTICA APLICADA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM E MÉTODOS
QUANTITATIVOS

YAN SARAIVA CORDEIRO

REPRESENTAÇÕES MATRICIAIS DOS CONCEITOS DE ESTABILIDADE BERGE
NO MODELO DE GRAFOS PARA RESOLUÇÃO DE CONFLITOS

FORTALEZA

2021

YAN SARAIVA CORDEIRO

REPRESENTAÇÕES MATRICIAIS DOS CONCEITOS DE ESTABILIDADE BERGE NO
MODELO DE GRAFOS PARA RESOLUÇÃO DE CONFLITOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Métodos Quantitativos da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Modelagem e Métodos Quantitativos. Área de Concentração: Modelagem e Métodos Quantitativos.

Orientador: Prof. Dr. Leandro Chaves Rêgo

FORTALEZA

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C821r Cordeiro, Yan Saraiva.

Representações matriciais dos conceitos de estabilidade Berge no modelo de grafos para resolução de conflitos / Yan Saraiva Cordeiro. – 2021.
69 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Métodos Quantitativos, Fortaleza, 2021.

Orientação: Prof. Dr. Leandro Chaves Rêgo.

1. Modelo de grafos para resolução de conflitos. 2. Equilíbrio de Berge. 3. Representação matricial. 4. Conceitos de estabilidade. 5. Resolução de conflitos. I. Título.

CDD 510

YAN SARAIVA CORDEIRO

REPRESENTAÇÕES MATRICIAIS DOS CONCEITOS DE ESTABILIDADE BERGE NO
MODELO DE GRAFOS PARA RESOLUÇÃO DE CONFLITOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem e Métodos Quantitativos da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Modelagem e Métodos Quantitativos. Área de Concentração: Modelagem e Métodos Quantitativos.

Aprovada em: 22 de Janeiro de 2021.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Leandro Chaves Rêgo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Profa. Dra. Maísa Mendonça Silva
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

Prof. Dr. Giannini Italino Alves Vieira
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Primeiramente à Deus, pois sem Ele eu não teria capacidade para desenvolver este trabalho. Aos meus pais, Auristela Saraiva e Nilson Cordeiro, ao meu orientador, Professor Leandro Chaves Rêgo, e a minha noiva, Alyne Pacífico.

AGRADECIMENTOS

Agradeço imensamente à Deus, por ter me concedido saúde, força e disposição para superar as dificuldades. Sem Ele, nada disso seria possível.

Agradeço a esta universidade, seu corpo docente, direção e administração, em especial aos professores e aos servidores do Programa de Pós Graduação em Modelagem e Métodos Quantitativos da Universidade Federal do Ceará, pelos conhecimentos repassados, pelos serviços prestados e por me proporcionar um ambiente criativo e amigável para os estudos.

Agradeço especialmente ao meu orientador, Professor Leandro Chaves Rêgo, que me deu todo o suporte com suas correções e incentivos. Agradeço por transmitir seus conhecimentos, pela paciência, por fazer da minha dissertação uma experiência positiva e por ter confiado em mim, orientando-me e dedicando parte do seu tempo. A você expresso o meu maior agradecimento.

Agradeço aos meus pais, Auristela Saraiva e Nilson Cordeiro, pelo apoio e incentivo aos estudos e por estarem sempre ao meu lado nas horas que eu mais precisava.

Agradeço grandiosamente a minha noiva, Alyne Pacífico, pelo amor, pelo incentivo, pelo apoio incondicional, por ser tão companheira e por ter sido peça fundamental para a concretização do meu trabalho.

E, por fim, agradeço a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação e foram importantes para a concretização deste sonho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

“A educação é a arma mais poderosa que você
pode usar para mudar o mundo.”

(Nelson Mandela)

RESUMO

Conflitos ocorrem praticamente em todos os setores da sociedade. Na teoria dos jogos, as resoluções potenciais para um conflito são encontradas através de análises de estabilidade, baseadas em definições de estabilidade com estruturas matemáticas precisas. O *Graph Model for Conflict Resolution* / Modelo de Grafos para Resolução de Conflitos (GMCR) fornece um meio eficiente para modelar e analisar um conflito estratégico. O GMCR consegue modelar reações e contrarreações seguindo diferentes definições de estabilidade que buscam representar o comportamento humano em situação de conflito. As estabilidades Berge, por exemplo, são úteis para a análise de interações entre *Decision Makers* / Tomadores de Decisão (DMs) com comportamentos altruístas, isto é, em situações estratégicas em que os DMs agem visando o bem-estar de outro(s) DM(s). Uma maneira eficaz e conveniente de calcular e codificar as análises de estabilidade diz respeito à utilização de sistemas matriciais para representação dos conceitos de estabilidade. Este trabalho teve como objetivo desenvolver expressões matriciais para determinar as estabilidades Berge dos estados no GMCR para conflitos bilaterais e multilaterais. Para ilustrar a aplicabilidade desta representação matricial, foram analisados dois conflitos clássicos da literatura. Para o caso bilateral, foi analisado o conflito de valores e, para o caso multilateral, foi analisado o conflito de Elmira.

Palavras-chave: Modelo de grafos para resolução de conflitos. Equilíbrio de Berge. Representação matricial. Conceitos de estabilidade. Resolução de conflitos. Altruísmo.

ABSTRACT

Conflicts occur in virtually all sectors of society. In game theory, potential resolutions to a conflict are found through stability analysis, based on stability definitions with precise mathematical structures. The Graph Model for Conflict Resolution (GMCR) provides an efficient way to model and analyze a strategic conflict. The GMCR can model reactions and counter-reactions following different stability definitions that seek to represent human behavior in conflict situations. Berge stabilities, for example, are useful for analyzing interactions between decision makers with altruistic behaviors, that is, in strategic situations where DMs act to improve the well-being of other DM(s). An effective and convenient way of calculating and coding stability analyzes is to use matrix systems to represent stability concepts. This work aimed to develop matrix expressions to determine the Berge stabilities of states in the GMCR for bilateral and multilateral conflicts. To illustrate the applicability of this matrix representation, two classic conflicts of the literature were analyzed. For the bilateral case, the conflict of values was analyzed and, for the multilateral case, the Elmira conflict was analyzed.

Keywords: Graph model for conflict resolution. Berge equilibrium. Matrix representation. Stability concepts. Conflict resolution. Altruism.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Conflito do biscoito no modelo de grafo para resolução de conflitos	22
Figura 2 – Decisores e opções no conflito de valores (comércio versus meio ambiente) .	45
Figura 3 – Estados viáveis no conflito de valores (comércio versus meio ambiente) . . .	45
Figura 4 – Classificação de preferência de estados no conflito de valores (comércio versus meio ambiente)	47
Figura 5 – Modelo de grafo para o conflito de valores (comércio versus meio ambiente)	48
Figura 6 – Opções e estados viáveis para o conflito de Elmira	56
Figura 7 – Modelo de grafo integrado para o conflito de Elmira	57

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Análise dos conceitos usuais de estabilidade aplicados ao conflito do biscoito	27
Tabela 2 – Análise dos conceitos de estabilidade Berge e suas adaptações aplicados ao conflito do biscoito.	32
Tabela 3 – Análise de equilíbrio de acordo com os conceitos usuais de estabilidade aplicados ao conflito de valores (comércio versus meio Ambiente)	46
Tabela 4 – Análise de equilíbrio de acordo com os conceitos de estabilidade Berge e suas adaptações aplicados ao conflito de valores (comércio versus meio Ambiente)	49
Tabela 5 – Análise de equilíbrio de acordo com os conceitos usuais de estabilidade aplicados ao conflito de Elmira	57
Tabela 6 – Análise de equilíbrio de acordo com os conceitos de estabilidade Berge e suas adaptações aplicados ao conflito de Elmira	58

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

Berge	Estabilidade Berge
DM	<i>Decision Maker</i> / Tomador de Decisão
DMs	<i>Decision Makers</i> / Tomadores de Decisão
GMCR	<i>Graph Model for Conflict Resolution</i> / Modelo de Grafos para Resolução de Conflitos
GMDE	<i>Global Market-Driven Economy</i> / Economia global orientada para o mercado
GMR	Estabilidade Metarracionalidade geral
LG	<i>Local Government</i> / Governo Local
MB	Estabilidade Meta-Berge
MoE	<i>Ministry of Environment</i> / Ministério do Meio Ambiente
NASH	Estabilidade de Nash
SEQ	Estabilidade sequencial
SES	<i>Sustainable Ecosystem</i> / Ecossistema sustentável
SMB	Estabilidade Berge Simétrica
SMR	Estabilidade Metarracionalidade simétrica
SSEQ	Estabilidade Sequencial Simétrica
UI	<i>Unilateral Improvement</i> / Melhoria Unilateral
UM	<i>Unilateral Movement</i> / Movimento Unilateral
UR	<i>Uniroyal Chemical Ltd.</i>
WB	Estabilidade Berge Fraca
WMB	Estabilidade Meta-Berge Fraca
WSMB	Estabilidade Berge Simétrica Fraca

LISTA DE SÍMBOLOS

G_i	Grafo direcionado para o DM i
S	Conjunto de estados
s	Estado s
A_i	Conjunto de arcos para o DM i
N	Conjunto dos DMs
H	Subconjunto dos DMs, ou seja, uma coalizão
\succ_i	Relação de preferência estrita entre estados do conflito para o DM i
\sim_i	Relação de indiferença entre estados do conflito para o DM i
\succeq_i	Relação de preferência não estrita entre estados do conflito para o DM i
J_i	Matriz de acessibilidade ao DM i a partir do estado s
R_i	Lista de acessibilidade ao DM i a partir do estado s
J_i^+	Matriz de melhorias unilaterais ao DM i a partir do estado s
R_i^+	Lista de melhorias unilaterais ao DM i a partir do estado s
J_H	Matriz de acessibilidade a coalizão H a partir do estado s
R_H	Lista de acessibilidade a coalizão H a partir do estado s
J_H^+	Matriz de melhorias unilaterais a coalizão H a partir do estado s
R_H^+	Lista de melhorias unilaterais a coalizão H a partir do estado s
P_i^+	Matriz de relação de preferência estrita do DM i
$P_i^-, =$	Matriz de relação de preferência não estrita do DM i
E	Matriz de entradas iguais a 1
e_k	Vetor com k -ésimo elemento igual a 1 e os demais elementos iguais a zero.
D	Matriz identidade

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Apresentação do problema e justificativa	13
1.2	Estado da Arte	15
1.3	Objetivo geral	16
1.4	Objetivos específicos	17
1.5	Estrutura geral do documento	17
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	18
2.1	Análise de Conflitos e Teoria dos Jogos	18
2.2	Modelo GMCR	20
2.3	Conceitos usuais de estabilidade no GMCR	24
2.3.1	<i>Conceitos usuais para dois DMs</i>	24
2.3.2	<i>Conceitos usuais para n-DMs</i>	27
2.4	Estabilidades Berge no GMCR	28
2.4.1	<i>Estabilidades Berge para dois DMs</i>	28
2.4.2	<i>Estabilidades Berge para n-DMs</i>	32
2.5	Representações matriciais dos conceitos usuais de soluções no GMCR	33
2.5.1	<i>Representações matriciais dos conceitos usuais para dois DMs</i>	33
2.5.2	<i>Representações matriciais dos conceitos usuais para n-DMs</i>	35
3	REPRESENTAÇÕES MATRICIAIS DOS CONCEITOS DE ESTABILIDADE BERGE PARA 2 DECISORES	39
3.1	Representação	39
3.2	Aplicação	43
4	REPRESENTAÇÕES MATRICIAIS DOS CONCEITOS DE ESTABILIDADE BERGE PARA n DECISORES	51
4.1	Representação	51
4.2	Aplicação	55
5	CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS	59
	REFERÊNCIAS	61
	APÊNDICES	64
	APÊNDICE A – CÓDIGOS COMPUTACIONAIS	64

1 INTRODUÇÃO

1.1 Apresentação do problema e justificativa

Conflitos, discussões e mudanças são partes naturais de nossas vidas, assim como a vida de cada agência, organização e nação. Conflitos surgem sempre que várias partes interessadas com objetivos diversos interagem umas com as outras. Existem diferentes maneiras de se chegar a uma definição de conflito. Quando se fala nisso, o que imediatamente vem à mente provavelmente seria como as diferenças e as discordâncias fazem surgir tal ocorrência. Em (ROBBINS, 1990), por exemplo, um conflito é definido como um processo iniciado quando um dos indivíduos percebe que seu adversário afetou negativamente ou afetará negativamente algo que é a preocupação ou o interesse do primeiro indivíduo.

Um conflito estratégico é um problema de decisão que pode envolver vários grupos de interesse ou decisores, cada um dos quais tem diferentes preferências em relação aos possíveis cenários ou estados que podem ocorrer durante a evolução do conflito. Os principais componentes para um modelo de conflito são os *Decision Makers*/Tomadores de Decisão (DMs), as opções ou os cursos de ação disponíveis para cada DM, os estados ou os cenários determinados pela combinação de escolhas de estratégias pelos DMs no conflito e as preferências de cada DM sobre os possíveis estados do conflito (FANG *et al.*, 1993).

Os propósitos fundamentais da resolução do conflito são obter uma melhor compreensão dos aspectos estratégicos da disputa e assim tomar decisões mais fundamentadas. Uma das vantagens de utilizar um método de resolução de conflitos é que os resultados de uma análise de estabilidade baseada no modelo podem fornecer previsões, soluções de compromisso e sugerir que a cooperação com os outros jogadores leve a resultados em que ambos saiam ganhando. A teoria dos jogos pode ser usada para descrever o processo de resolução de conflitos. Em (KILGOUR *et al.*, 1987), foi desenvolvido, utilizando conceitos da teoria dos jogos e de análise de conflitos, o “*Graph Model for Conflict Resolution*” (GMCR). O GMCR é um modelo aplicado em decisões interativas ou situações de conflitos, em que uma análise de estabilidade pode ser feita a fim de determinar soluções para tais situações. O GMCR avalia as melhores estratégias de resolução de conflitos, auxiliando o comportamento dos tomadores de decisão, podendo ser utilizado em negociações e mediações.

Existem algumas definições fundamentais na literatura para compreender melhor o GMCR. Por exemplo, intitula-se de *Unilateral Movement* / Movimento Unilateral (UM) quando

um DM decide mover o estado do conflito devido à mudança de seleção de sua estratégia. Se esta é feita para um estado de maior preferência, é denominado de *Unilateral Improvement / Melhoria Unilateral (UI)*. Um estado é dito estável para um decisor quando este não considera vantagem mover o conflito para outro estado a partir de um movimento unilateral de acordo com algum critério de estabilidade. É chamado de equilíbrio um estado que for estável de acordo com a mesma noção de estabilidade para todos os DMs no conflito.

Na literatura, existem diferentes conceitos para determinar se um estado é estável ou se há um equilíbrio para determinado conflito, utilizando distintos critérios de estabilidade. Alguns desses conceitos são: Estabilidade de Nash (NASH) (NASH, 1950), Estabilidade Metarracionalidade geral (GMR) (HOWARD, 1971), Estabilidade Metarracionalidade simétrica (SMR) (HOWARD, 1971), Estabilidade sequencial (SEQ) (FRASER; HIPEL, 1979) e Estabilidade Sequencial Simétrica (SSEQ) (RÊGO; VIEIRA, 2017). Os conceitos de estabilidade diferem nas suposições a respeito do comportamento dos DMs envolvidos no conflito. Por exemplo, no conceito de Estabilidade de Nash, cada DM avalia se é ou não possível levar o conflito a um cenário preferível, sem levar em conta possíveis reações dos oponentes. Nos conceitos de Metarracionalidade geral e Estabilidade sequencial, os DMs avaliam se os oponentes podem reagir levando o conflito a um estado que não seja melhor que o estado atual. A diferença entre tais conceitos se dá pelo fato de que na Estabilidade sequencial, a reação do oponente tem que ser benéfica para ele também. Nos conceitos de Metarracionalidade Simétrica e Estabilidade sequencial simétrica, além dos DMs avaliarem as possíveis reações de seus oponentes, consideram, também, as suas próprias contrarreações. A diferença entre tais conceitos se dá pelo fato de que na Estabilidade sequencial simétrica, a reação do oponente tem que ser benéfica para ele também.

Nos últimos anos, são recorrentes os avanços que trabalham com o estudo de novos conceitos de solução (por exemplo, (VIEIRA, 2017)). Alguns desses avanços estão relacionados com o conceito de Equilíbrio de Berge no GMCR (VIEIRA; RÊGO, 2018). O conceito de equilíbrio de Berge é uma noção de equilíbrio proposta na teoria dos jogos que pode ser útil para a avaliação de interações entre jogadores com comportamentos altruístas. A ideia é que, em algumas situações interativas, os jogadores se apoiam mutuamente escolhendo ações que maximizem o bem-estar dos outros. Uma implicação é que, em um equilíbrio de Berge, nenhum jogador pode melhorar o desempenho de qualquer outro jogador, alterando sua estratégia de Berge (COURTOIS *et al.*, 2015). Quando fazemos as análises de equilíbrio de Berge, não

estamos assumindo que os DMs preferem ser altruístas e sim estamos analisando o impacto que o comportamento altruísta pode trazer para a solução do conflito (ou do jogo), o que inclusive pode gerar uma solução que seja melhor em termos das preferências dos DMs do que se eles não utilizassem esse comportamento altruísta. Por exemplo, no Dilema dos Prisioneiros (MÉRÓ, 1998), com as preferências usuais dos jogadores, se eles se comportarem altruisticamente, o equilíbrio de Berge é (Cooperar,Cooperar), que é um cenário com preferência maior para os DMs do que o previsto pelo comportamento individualmente racional do equilíbrio de Nash que é (Delatar,Delatar).Este conceito é uma alternativa ao conceito de solução de Nash e existem propriedades relacionando as noções dos equilíbrios de Berge e de Nash (COLMAN *et al.*, 2011). Essa noção de equilíbrio de Berge tem recebido muita atenção em trabalhos recentes. Por exemplo, em (LARBANI; ZHUKOVSKII, 2017) é apresentada uma revisão da literatura sobre o equilíbrio de Berge em jogos na forma normal. Em (ABALO; KOSTREVA, 2004), teoremas sobre a existência de equilíbrios de Nash e Berge são introduzidos e provados. Em (LARBANI; NESSAH, 2008), é mostrado que as suposições desses teoremas não são suficientes para a existência de equilíbrio de Berge e é proposta uma nova versão desses teoremas.

A verificação manual da estabilidade dos estados, mesmo em conflitos relativamente pequenos (com poucos estados e poucos DMs), pode ser muito trabalhosa. Por isso, é importante o desenvolvimento de métodos computacionais eficientes para determinação da estabilidade dos estados. Com este intuito, alguns trabalhos têm proposto métodos matriciais para determinar a estabilidade dos estados no GMCR. Na seção a seguir, descreveremos o estado da arte no que diz respeito a utilização de representações matriciais no GMCR.

1.2 Estado da Arte

Existem vários trabalhos recentes na literatura relacionados a utilização de métodos matriciais aplicados a diversos problemas no contexto do GMCR. Por exemplo, métodos matriciais foram utilizados para: obter as estabilidades em problemas em que os DMs possuem comportamentos consensuais (concordantes) e dissensuais (divergentes) (XU *et al.*, 2019), realizar a análise pós-estabilidade ou análise de *status quo* com o intuito de confirmar que os possíveis equilíbrios, ou estados estáveis para todos os DMs, são de fato alcançáveis partir do *status quo* ou de qualquer outro estado inicial a partir do qual o conflito evolui (XU *et al.*, 2010; XU *et al.*, 2009) e realizar a análise de estabilidade dos estados para os casos de conflitos com mais de 2 DMs (XU *et al.*, 2009b). Além disso, representações matriciais também já foram

propostas para realizar a análise de estabilidade dos estados considerando diferentes estruturas de preferências, tais como: preferências probabilísticas (RÊGO; VIEIRA, 2015; RÊGO; VIEIRA, 2021), preferências com diferentes níveis de intensidade (XU *et al.*, 2009), preferências de três níveis (XU *et al.*, 2010), preferências incertas (XU *et al.*, 2011), preferências recíprocas (WU *et al.*, 2021) e preferências híbridas, que consideram tanto intensidade como incerteza (XU *et al.*, 2011).

A motivação em utilizar representações matriciais de conceitos de soluções para modelos de grafos diz respeito à questão de ser mais eficaz e conveniente, em comparação com os sistemas lógicos existentes, para calcular estabilidades e prever equilíbrios, especialmente em modelos de conflitos complexos com muitos estados viáveis ou com muitos DMs. Além disso, o método facilita o desenvolvimento de algoritmos aprimorados para avaliar as estabilidades dos estados e implementar novos conceitos de estabilidade, ou seja, a representação matricial converte efetivamente a análise de estabilidade de uma estrutura lógica para um sistema matricial. Quando os componentes do GMCR são apropriadamente codificados em matrizes, as análises de estabilidade podem ser feitas rapidamente por uma série de operações matriciais. Como essa estrutura algébrica é flexível, ela pode ser facilmente utilizada para lidar com modelos de grande escala.

Como veremos na Seção 2.5, os conceitos usuais de estabilidade possuem representações matriciais bem definidas. O objetivo da dissertação é representar os conceitos de Estabilidade Berge, propostos em (VIEIRA; RÊGO, 2020), através de sistemas matriciais. Em (VIEIRA; RÊGO, 2020), foram propostos 6 variantes de estabilidade Berge no contexto do GMCR: Estabilidade Berge (Berge), Estabilidade Berge Fraca (WB), Estabilidade Meta-Berge (MB), Estabilidade Meta-Berge Fraca (WMB), Estabilidade Berge Simétrica (SMB) e Estabilidade Berge Simétrica Fraca (WSMB). Essas noções variam com respeito ao tipo de alteração de estratégia que é considerada credível e, também, com respeito ao número de passos adiante em que conflito é analisado, considerando possíveis ações e reações dos DMs.

1.3 Objetivo geral

Este trabalho tem como objetivo desenvolver expressões matriciais para determinar as estabilidades Berge dos estados no modelo de grafos para resolução de conflitos.

1.4 Objetivos específicos

Para chegar ao objetivo geral, seguem os objetivos específicos:

- Revisar a bibliografia referente ao GMCR e à estabilidade Berge;
- Analisar as representações matriciais dos conceitos de estabilidades usuais;
- Propor e provar teoremas que demonstrem relação entre as definições lógicas das estabilidades Berge e as operações matriciais;
- Codificar os métodos matriciais para as estabilidades Berge;
- Elaborar e aplicar os métodos em algumas instâncias de conflitos;
- Analisar qualitativamente os resultados obtidos nas aplicações.

1.5 Estrutura geral do documento

A presente dissertação está dividida em 5 capítulos, sendo os demais capítulos divididos como se segue. No Capítulo 2 apresentamos a fundamentação teórica para o entendimento do que se pretende desenvolver na dissertação. Ela inclui explicações sobre teoria dos jogos, algumas definições e modelagem sobre o GMCR, aplicação ilustrativa em uma situação de conflito, definições dos conceitos de estabilidade usuais e das estabilidades Berge e formulações referentes aos métodos matriciais para representação dos conceitos usuais de estabilidade. Por uma questão didática, no Capítulo 3 são apresentadas as representações matriciais das estabilidades Berge para conflitos envolvendo dois decisores e, em seguida, no Capítulo 4 essas definições são generalizadas para conflitos envolvendo dois ou mais decisores. Ao final dos Capítulos 3 e 4 são apresentadas aplicações dos métodos propostos em cada capítulo. O Capítulo 5 apresenta as conclusões apoiadas no desenvolvimento do assunto, a recapitulação sintética dos resultados obtidos e as sugestões para pesquisas futuras.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Análise de Conflitos e Teoria dos Jogos

Devido à universalidade de situações de conflitos, abordagens para lidar com estes foram desenvolvidas em muitas disciplinas diferentes, como sociologia, engenharia de sistemas, psicologia, pesquisa operacional, direito e ciências da administração. O conjunto de ferramentas matemáticas para estudar formalmente situações de conflito enquadra-se em um campo chamado teoria dos jogos. Não surpreendentemente, uma grande variedade de métodos de teoria dos jogos foi desenvolvida para abordar uma ampla gama de problemas de conflito (MADANI; HIPEL, 2011).

A teoria dos jogos é uma teoria matemática elaborada para se detalhar contextos que podem ser analisados quando dois ou mais jogadores (tomadores de decisão) interagem entre si, ou seja, estuda circunstâncias programadas em que agentes definem condutas distintas na tentativa de melhorar seu retorno ou de melhorar o retorno para os outros jogadores (OSBORNE; RUBINSTEIN, 1994). A teoria dos jogos é essencialmente o estudo matemático da competição e cooperação. Ela ilustra como as interações estratégicas entre os jogadores resultam em consequências gerais em relação às preferências desses jogadores. Jogos são objetos matemáticos definidos, consistindo em: um conjunto de jogadores, um conjunto de estratégias (opções ou movimentos) disponíveis para eles e a especificação das preferências dos jogadores, geralmente representadas por um função utilidade, para cada combinação de tais estratégias (possíveis resultados do jogo). As utilidades dos jogadores determinam as decisões tomadas e o tipo do jogo que está sendo jogado. Se, por exemplo, em um jogo com dois jogadores, as utilidades somam zero ou uma constante, então os jogadores têm interesses opostos e estão jogando um jogo de soma zero ou um jogo de soma constante; o que quer que um jogador ganhe, o outro jogador perde. Jogos de soma diferente de zero, nos quais a soma das utilidades não é igual a zero ou uma constante, têm mais complicações e, às vezes, mais potencial para cooperação, o que em problemas de negociação são conhecidos como situações ganha-ganha.

A teoria dos jogos pode ser usada para prever como as pessoas se comportam em conflitos, seguindo seus próprios interesses ou incorporando situações em que os interesses do jogador podem ser altruístas. O resultado do jogo é consequência das decisões dos jogadores. A teoria dos jogos analisa as estratégias utilizadas pelos jogadores para obter os resultados mais preferidos dadas suas crenças sobre o comportamento dos demais jogadores. Uma solução

para um jogo prescreve uma ação para cada decisor no jogo e, conseqüentemente, descreve um possível resultado do jogo satisfazendo determinados critérios.

Uma obra seminal para o estabelecimento do campo da teoria dos jogos foi (NEUMANN; MORGENSTERN, 1944). Este livro lida principalmente com os métodos quantitativos da teoria dos jogos, que são muitas vezes referidos como técnicas de teoria dos jogos clássicos. Após o fim da Segunda Guerra Mundial, a maioria das pesquisas em teoria dos jogos concentrou-se no desenvolvimento desses métodos clássicos da teoria dos jogos, os quais continuam até os dias atuais. No entanto, em 1971, Howard iniciou uma direção radicalmente nova com a publicação de seu livro pioneiro sobre análise de Metagame (HOWARD, 1971). A análise de Metagame é, em oposição aos métodos quantitativos clássicos de teoria dos jogos, uma forma não quantitativa de análise de situações estratégicas, proposta com o intuito de ser mais prática e intuitiva. Fraser e Hipel, em (FRASER; HIPEL, 1979) e (FRASER; HIPEL, 1984) expandiram o escopo da análise de Metagame em uma abordagem chamada análise de conflitos, enquanto (KILGOUR *et al.*, 1987) e (FANG *et al.*, 1993) melhoraram significativamente e expandiram a análise de conflitos através do desenvolvimento do Modelo de Grafos para Resolução de Conflitos (GMCR).

Uma característica única dos métodos baseados no Metagame é que eles se apoiam na ideia de ação e reação entre os DMs que participam de um dado conflito a fim de determinar a estabilidade de um determinado estado. Em outras palavras, um *Decision Maker / Tomador de Decisão (DM)* participando de um conflito pensa como um jogador de xadrez que está contemplando as conseqüências de fazer uma série de movimentos possíveis. Por exemplo, de acordo com a metarracionalidade geral, se todas as melhorias unilaterais que um DM pode tomar do estado em questão podem ser de alguma forma bloqueadas por movimentos subsequentes de seus concorrentes, o estado é definido como estável. Se este estado é estável de acordo com alguma definição de estabilidade para todos os DMs, é considerado um equilíbrio ou resolução do conflito, uma vez que o conflito certamente permanecerá nesse equilíbrio se for alcançado durante a evolução do conflito a partir do *status quo* ou estado inicial. O tipo de modelo anterior para determinar a estabilidade está em contraste com o conceito pouco natural de determinar o equilíbrio maximizando a utilidade esperada, como é frequentemente feito na teoria dos jogos clássica. Esse tipo de pensamento é mais comum em economia. Dentro dos métodos da teoria dos jogos clássica, existem dois modelos principais: jogos em forma normal e jogos em forma extensa. No primeiro tipo, os DMs devem fazer suas escolhas de uma só

vez e não existe possibilidade de retaliações, pois as escolhas são feitas sem o conhecimento das escolhas feitas pelos demais. Por outro lado, no jogo em forma extensa, apesar do jogo se desenvolver dinamicamente, ele requer que a ordem em que os DMs tomam suas decisões seja previamente estabelecida, o que não é adequado para a modelagem de conflitos em que a ordem dos movimentos geralmente não é conhecida.

Um modelo de conflito é uma estrutura sistemática para encapsular as principais características de um conflito estratégico. Depois de formular o modelo, podemos empregá-lo como uma estrutura básica dentro da qual as possíveis interações estratégicas entre os DMs podem ser extensivamente analisadas a fim de verificar as possíveis soluções ou equilíbrios do conflito. A saída dessa análise de estabilidade, bem como das análises de sensibilidade relacionadas, pode ser útil para dar suporte aos DMs que podem exercer poder real em um conflito. As próximas seções descrevem algumas das principais ideias por trás da modelagem de um conflito e das análises de estabilidade.

2.2 Modelo GMCR

Nesta seção, relembremos a definição formal do GMCR de acordo com o exposto em (FANG *et al.*, 1993). O GMCR representa um conflito por um conjunto de grafos direcionados, $G_i = (S, A_i)$, $i \in N$, em que $N = \{1, 2, \dots, n\}$ é o conjunto de DMs em um conflito, A_i é o conjunto de arcos para o DM i e $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ é o conjunto de vértices comum a todos os grafos, representando os possíveis cenários ou estados em que o conflito pode se encontrar. Portanto, cada grafo representa as possibilidades de alterações no estado do conflito que um determinado DM $i \in N$ pode fazer, ou seja, se o DM i puder se mover unilateralmente (em um passo único) do estado s_1 para o estado s_2 , há um arco com orientação de s_1 para s_2 em A_i .

Deste modo, o GMCR representa as transições de estados que podem ocorrer em um conflito devido às escolhas feitas pelos DMs. Uma vantagem inerente do modelo de grafo é que ele pode incorporar movimentos irreversíveis, através dos quais um DM pode se mover unilateralmente do estado s_1 para o estado s_2 , mas não de s_2 para s_1 . Outra grande flexibilidade do modelo de grafo é sua capacidade de descrever movimentos comuns, nos quais mais de um DM podem fazer com que o conflito se mova de um estado para outro.

Além de representar as possibilidades de alterações de estado de um conflito, o GMCR também descreve as preferências de cada DM i sobre o conjunto de estados. Estas preferências são usualmente descritas por um par de relações binárias $\{\succ_i, \sim_i\}$ em S , onde

$s_1 \succ_i s_2$, para $s_1, s_2 \in S$, indica que DM i prefere estritamente s_1 a s_2 , e $s_1 \sim_i s_2$ significa que DM i é indiferente entre s_1 e s_2 . A notação $s_1 \succeq_i s_2$ é empregada para indicar que $s_1 \succ_i s_2$ ou $s_1 \sim_i s_2$. Assume-se que \succ_i é assimétrico, de modo que não é possível que simultaneamente ocorra $s_1 \succ_i s_2$ e $s_2 \succ_i s_1$. A transitividade das preferências não é assumida, de modo que os resultados são válidos para preferências intransitivas e transitivas.

Utilizaremos algumas definições matriciais para calcular as estabilidades dos estados, conforme proposto em (XU *et al.*, 2007). O grafo do DM i pode ser representado pela matriz de acessibilidade de i , J_i , que exibe as movimentações unilaterais disponíveis para DM i de cada estado. Para $i \in N$ e $s, q \in S$, J_i de dimensões $|S| \times |S|$ (em que $|S|$ denota a cardinalidade do conjunto S) é definida por:

$$J_i(s, q) = \begin{cases} 1, & \text{se DM } i \text{ puder se mover (em um passo único) do estado } s \text{ para o estado } q ; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

onde $s \neq q$, e, por convenção, $J_i(s, s) = 0$.

Uma forma alternativa de exibir as possibilidades de escolha do DM i , a partir de um estado, é por meio da sua lista de estados acessíveis a partir desse estado. Para $i \in N$, a lista de acessibilidade do DM i para o estado $s \in S$ é o conjunto $R_i(s)$ de todos os estados aos quais o DM i pode se mover (em um passo único) a partir do estado s . Assim, $R_i(s) = \{q \in S : J_i(s, q) = 1\}$.

Uma melhoria unilateral (UI), de um estado particular para um DM específico é qualquer estado preferido ao qual o DM pode se mover unilateralmente. Para representar melhorias unilaterais, a matriz de acessibilidade do DM i pode ser usada para definir a matriz de melhorias unilaterais J_i^+ , de acordo com:

$$J_i^+(s, q) = \begin{cases} 1, & \text{se } J_i(s, q) = 1 \text{ e } q \succ_i s ; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Similarmente, pode-se representar as melhorias unilaterais, a partir de um estado s , através de uma lista de melhorias unilaterais R_i^+ , definida por $R_i^+(s) = \{q \in S : J_i^+(s, q) = 1\}$. Assim, $R_i^+(s)$ é chamada de lista de melhoria unilateral de DM i do estado s .

Por fim, as matrizes de relação de preferência estrita (P_i^+) e não estrita ($P_i^{-,=}$) do DM i são, respectivamente definidas como:

$$P_i^+(s, q) = \begin{cases} 1, & \text{se } q \succ_i s, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

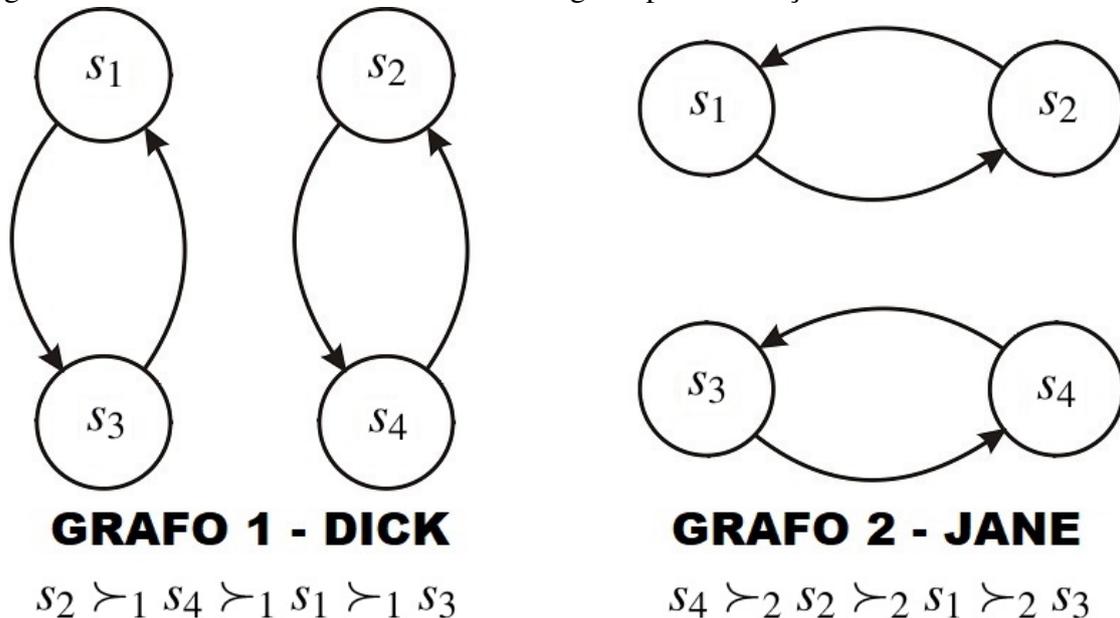
e

$$P_i^-(s, q) = 1 - P_i^+(s, q).$$

Se o estado q é estritamente preferido ao estado s para o DM i , então a entrada (s, q) da matriz P_i^+ será igual a 1. Caso contrário, será igual a 0.

Exemplo 2.2.1: A seguir ilustramos as definições anteriores, utilizando o conflito do biscoito definido por (FRASER; HIPEL, 1979). Este conflito representa uma situação envolvendo dois DMs, Dick e Jane. Segundo a descrição do conflito, Dick gostaria de pegar o biscoito de Jane, mas Jane poderia bater em Dick para tentar impedi-lo. A Figura 1 mostra a representação deste conflito utilizando o GMCR.

Figura 1 – Conflito do biscoito no modelo de grafo para resolução de conflitos



Fonte: (FRASER; HIPEL, 1979) (Adaptado)

Portanto, Dick e Jane representam os DM's 1 e 2, respectivamente. Os vértices de cada grafo representam os quatro possíveis estados de conflito. No estado s_1 , Dick tenta pegar o biscoito e Jane bate nele. No estado s_2 , Dick tenta pegar o biscoito, mas Jane não bate nele. No estado s_3 , Dick não tenta pegar o biscoito e, mesmo assim, Jane bate nele. No estado s_4 , Dick

não tenta pegar o biscoito nem Jane bate nele. A orientação de um arco no grafo de um jogador indica a direção do movimento que o jogador pode fazer. Apenas os movimentos possíveis entre os estados são marcados e, portanto, movimentos que não são viáveis estão ausentes. Por exemplo, Dick pode se mover partindo do estado s_3 apenas para o estado s_1 . Já Jane só pode se mover partindo do estado s_3 para o estado s_4 . Abaixo do grafo de cada DM, estão as suas respectivas preferências entre os estados. Por exemplo, no Grafo 1 da Figura 1, observe que o estado mais preferido para Dick é o s_2 . Da mesma forma, o estado menos preferido para ambos DMs é o s_3 . Assim, as relações de preferência de Dick são $s_2 \succ_1 s_4 \succ_1 s_1 \succ_1 s_3$ e as relações de preferência de Jane são $s_4 \succ_2 s_2 \succ_2 s_1 \succ_2 s_3$. Para este conflito, temos que as matrizes J_1 , J_1^+ , P_1^+ e $P_1^{-,=}$ para Dick são dadas por:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_1^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P_1^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} e \quad P_1^{-,=} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para Jane, neste mesmo conflito, temos que as matrizes J_2 , J_2^+ , P_2^+ e $P_2^{-,=}$ são dadas por:

$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_2^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P_2^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e \quad P_2^{-,=} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.3 Conceitos usuais de estabilidade no GMCR

A análise de estabilidade de um conflito é realizada determinando a estabilidade de cada estado para cada DM i . Um estado é estável para um DM se, e somente se, esse DM não tiver incentivo para se mover unilateralmente, sob uma definição particular de estabilidade. Os diferentes conceitos de estabilidade variam de acordo com o número de movimentos a frente que se analisa o conflito e também com as suposições a respeito dos movimentos subsequentes dos demais DMs. Um estado é equilíbrio se, e somente se, todos os jogadores no conflito o acharem estável de acordo com o mesmo conceito de estabilidade; um equilíbrio constitui uma possível solução para o conflito. Cinco dos conceitos de soluções clássicos segundo os quais um estado pode ser estável são: NASH (NASH, 1950), GMR (HOWARD, 1971), SMR (HOWARD, 1971), SEQ (FRASER; HIPEL, 1979) e SSEQ (RÊGO; VIEIRA, 2017).

2.3.1 Conceitos usuais para dois DMs

Usualmente, na literatura, ao abordar conflitos com dois DMs, assume-se que $N = \{i, j\}$. Se o DM i pegar a iniciativa e passar para algum $s_1 \in R_i(s)$, então o DM j talvez possa se mover a partir de s_1 . Dependendo do que o DM i espera que o DM j faça a partir de cada $s_1 \in R_i(s)$, o DM i pode preferir ficar no estado s ; se assim for, o estado s é estável para o DM i . A seguir, descreveremos cinco conceitos de estabilidade que serão utilizados na dissertação para o caso de conflitos de dois DMs.

Definição 2.3.1: (NASH, 1950) (NASH) Seja $i \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado s é Nash estável (ou individualmente racional) (R) para o DM i se, e somente se, $R_i^+(s) = \emptyset$.

Neste conceito, o DM i não pode se mover unilateralmente para um estado mais preferido. Para melhor compreensão, vamos analisar a estabilidade Nash do estado s_4 para o DM 1 (Dick). Observe no Grafo 1 da Figura 1 que Dick tem um movimento unilateral do estado s_4 para s_2 . No entanto, na relação de preferência para o DM Dick, o estado s_2 é mais preferido com relação ao estado s_4 . Assim, o movimento do DM 1 do estado s_4 para o s_2 é uma melhoria unilateral e, portanto, o estado s_4 é Nash instável para Dick.

Definição 2.3.2: (HOWARD, 1971) (GMR) Sejam $i, j \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado s é Metarracional Geral estável (GMR) para o DM i se, e somente se, para todo $s_1 \in R_i^+(s)$, existe pelo menos um $s_2 \in R_j(s_1)$ tal que $s \succeq_i s_2$.

Neste conceito, todas as melhorias unilaterais do DM i são sancionadas por movimentos unilaterais subsequentes por parte do DM j , ou seja, o DM i analisa seus possíveis movimentos de forma conservadora, considerando todas as reações possíveis a sua jogada, ignorando suas possíveis contrarreações. Para melhor compreensão, vamos analisar a estabilidade do estado s_4 para o DM 1 (Dick). Observe no Grafo 1 da Figura 1 que Dick tem um movimento unilateral do estado s_4 para s_2 . Entretanto, no Grafo 2 da Figura 1, observe que o DM 2 (Jane) tem um movimento unilateral do estado s_2 para s_1 . Como o estado s_1 é menos preferido que o estado s_4 pelo DM 1, o estado s_4 é GMR estável para Dick. Além disso, observe que mesmo que o movimento unilateral de Jane do estado s_2 para o estado s_1 seja uma piora para ela, este fato não importa para a estabilidade GMR.

Definição 2.3.3: (HOWARD, 1971) (SMR) Sejam $i, j \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado s é *Metarracional Simétrico estável (SMR)* para o DM i se, e somente se, para todo $s_1 \in R_i^+(s)$, existe pelo menos um $s_2 \in R_j(s_1)$ tal que $s \succeq_i s_2$ e $s \succeq_i s_3$ para todo $s_3 \in R_i(s_2)$.

Neste conceito, todas as melhorias unilaterais do DM i ainda são sancionadas mesmo após uma possível resposta por este DM, ou seja, considera não só seus próprios possíveis movimentos e as reações do seu adversário para cada um desses movimentos, mas também sua própria contrarreação. Para melhor compreensão, vamos analisar a estabilidade SMR do estado s_4 para o DM 1 (Dick). Observe no Grafo 1 da Figura 1 que Dick tem um movimento unilateral do estado s_4 para s_2 . Em seguida, do estado s_2 no Grafo 2 da Figura 1, o DM 2 (Jane) tem um movimento unilateral do estado s_2 para o estado s_1 , menos preferido por Dick ao estado s_4 . Em resposta, Dick pode se mover do estado s_1 para s_3 , conforme mostra o Grafo 1 da Figura 1. Como o estado s_3 é menos preferido ao estado s_4 pelo DM 1, o estado s_4 é SMR estável para Dick.

Definição 2.3.4: (FRASER; HIPEL, 1979) (SEQ) Sejam $i, j \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado s é *sequencialmente estável (SEQ)* para o DM i se, e somente se, para todo $s_1 \in R_i^+(s)$, existe pelo menos um $s_2 \in R_j^+(s_1)$ tal que $s \succeq_i s_2$.

Neste conceito, a análise do DM i é semelhante a análise feita no GMR, porém o DM i considera somente as possíveis reações à sua jogada que serão benéficas ao oponente, desconsiderando os movimentos do adversário que gerem prejuízo a ele (mesmo que cause prejuízo ao DM i). Para melhor compreensão, vamos analisar a estabilidade do estado s_4 para o

DM 1 (Dick). Observe no Grafo 1 da Figura 1 que Dick tem um movimento unilateral do estado s_4 para s_2 . No entanto, observe no Grafo 2 da Figura 1 que o DM 2 (Jane) não tem uma melhoria unilateral do estado s_2 . Conseqüentemente, ao contrário do que ocorre no caso do GMR, o DM 2 não pode impedir o DM 1 de aproveitar a melhoria unilateral do estado s_4 para s_2 e, portanto, s_4 é SEQ instável para Dick.

Definição 2.3.5: (RÊGO; VIEIRA, 2017) (SSEQ) Sejam $i, j \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado s é Sequencial Simétrico estável (SSEQ) para o DM i se, e somente se, para todo $s_1 \in R_i^+(s)$, existe pelo menos um $s_2 \in R_j^+(s_1)$ tal que $s \succeq_i s_2$ e $s \succeq_i s_3$ para todo $s_3 \in R_i(s_2)$.

Neste conceito, a análise do DM i é semelhante a análise feita no SMR, porém o DM i considera somente as possíveis reações à sua jogada que serão benéficas ao oponente, desconsiderando os movimentos do adversário que gerem prejuízo a ele, e ainda considera a sua contrarreação, mas o estado resultante não pode ser melhor do que o estado s para cada possível contrarreação.

Para melhor compreensão, vamos analisar a estabilidade do estado s_4 para o DM 1 (Dick). Nesse caso, temos uma situação semelhante à SEQ, onde no Grafo 1 da Figura 1, Dick tem um movimento unilateral do estado s_4 para s_2 e o DM 2 (Jane) não tem uma melhoria unilateral a partir do estado s_2 , não sendo necessário analisar a contrarreação do DM 1. Portanto assim como no SEQ, o DM 2 não pode impedir o DM 1 de aproveitar a melhoria unilateral do estado s_4 para s_2 e, portanto, s_4 é SSEQ instável para Dick.

A Tabela 1 mostra as análises de estabilidade para os 5 conceitos usuais citados anteriormente utilizando o exemplo da Figura 1. Cada célula nesta tabela especifica o(s) DM(s) para o qual o estado da linha da célula é estável de acordo com o conceito de estabilidade da coluna. A letra D representa que o estado é estável para Dick (DM 1) e a letra J representa que o estado é estável para Jane (DM 2). O par D, J implica que o estado é estável para ambos, ou seja, é um equilíbrio, conforme o respectivo conceito. Se um estado não for estável para ambos os DMs, será representado por um traço. Observe que o estado s_2 é equilíbrio de acordo com todos os cinco primeiros conceitos de estabilidade, enquanto o estado s_4 é equilíbrio apenas para os conceitos GMR e SMR. Note também que o estado s_1 é estável apenas para Dick em todos os conceitos e que o estado s_3 não é estável para nenhum DM em qualquer conceito.

Tabela 1 – Análise dos conceitos usuais de estabilidade aplicados ao conflito do biscoito

Estados	Estabilidades				
	NASH	GMR	SMR	SEQ	SSEQ
s_1	D	D	D	D	D
s_2	D, J	D, J	D, J	D, J	D, J
s_3	-	-	-	-	-
s_4	J	D, J	D, J	J	J

2.3.2 Conceitos usuais para n -DMs

O conceito de Nash para conflitos com n -DMs é definido exatamente como na Definição 2.3.1. Para apresentar as definições de estabilidade GMR, SMR, SEQ e SSEQ em conflitos com múltiplos decisores, precisamos lembrar os conceitos de sequência legal de movimentos (uma vez que vários DMs podem atuar para chegar a um determinado estado de conflito) e de melhoria unilateral para um grupo de DMs $H \subseteq N$.

Seja $H \subseteq N$ um conjunto não-vazio de DMs, chamado de coalizão. Uma sequência legal de movimentos feitos por DMs em H é uma sequência onde os DMs podem se mover mais de uma vez, mas não duas vezes consecutivamente. O conjunto de estados que podem ser alcançados por qualquer sequência legal de movimentos feita pelos DMs em H é denotado por $R_H(s)$. Formalmente, $R_H(s)$ consiste em todos os estados s' de modo que exista uma sequência alternada de estados e DMs, $(s_0, i_0, s_1, i_1, \dots, s_m)$, de modo que $s_0 = s$, $s_m = s'$, $i_k \in H$, $s_{k+1} \in R_{i_k}(s_k)$ e $i_k \neq i_{k+1}$, para $0 \leq k \leq m-1$. Para manter a consistência com a suposição de que nenhum DM pode permanecer em um determinado estado, assumimos explicitamente que nenhuma coalizão pode retornar ao estado inicial, ou seja, $s \notin R_H(s)$ para todos $H \subseteq N$ e $s \in S$. O motivo pelo qual s não pode pertencer a $R_H(s)$ é que, se isso acontecer, seria equivalente a deixar o DM focal se mover duas vezes consecutivas, e isto não é usualmente permitido na literatura, pois isto equivale a assumir que a acessibilidade dos DMs seja transitiva, o que deixa o problema menos genérico. Uma sequência legal onde cada DM em H só faz movimentos de melhorias unilaterais, ou seja, $s_{k+1} \in R_{i_k}^+(s_k)$, é chamado de sequência legal de melhorias unilaterais e o conjunto de todos os estados alcançáveis por qualquer sequência legal de melhorias unilaterais feitas por DMs em H é denotado por $R_H^+(s)$. Podemos agora declarar as definições de estabilidade GMR, SMR, SEQ e SSEQ, respectivamente, como segue:

Definição 2.3.6: (HOWARD, 1971) (GMR) Seja $i \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado s é *Metarracional Geral estável (GMR)* para o DM i se, e somente se, para todo $s_1 \in R_i^+(s)$, existe

peelo menos um $s_2 \in R_{N-\{i\}}(s_1)$ tal que $s \succeq_i s_2$.

Definição 2.3.7: (HOWARD, 1971) (SMR) Seja $i \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado s é *Metarracional Simétrico estável (SMR)* para o DM i se, e somente se, para todo $s_1 \in R_i^+(s)$, existe pelo menos um $s_2 \in R_{N-\{i\}}(s_1)$ tal que $s \succeq_i s_2$ e $s \succeq_i s_3$ para todo $s_3 \in R_i(s_2)$.

Definição 2.3.8: (FRASER; HIPEL, 1979) (SEQ) Seja $i \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado s é *sequencialmente estável (SEQ)* para o DM i se, e somente se, para todo $s_1 \in R_i^+(s)$, existe pelo menos um $s_2 \in R_{N-\{i\}}^+(s_1)$ tal que $s \succeq_i s_2$.

Definição 2.3.9: (RÊGO; VIEIRA, 2017) (SSEQ) Seja $i \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado s é *Sequencial Simétrico estável (SSEQ)* para o DM i se, e somente se, para todo $s_1 \in R_i^+(s)$, existe pelo menos um $s_2 \in R_{N-\{i\}}^+(s_1)$ tal que $s \succeq_i s_2$ e $s \succeq_i s_3$ para todo $s_3 \in R_i(s_2)$.

2.4 Estabilidades Berge no GMCR

A noção de equilíbrio de Berge é um conceito de solução da teoria dos jogos que foi originalmente proposto em (BERGE, 1957) e formalmente definido em (ZHUKOVSKII, 1985). Este equilíbrio pode ser usado, por exemplo, como uma solução alternativa quando o equilíbrio de Nash não existe em estratégias puras ou como um critério de seleção de equilíbrio, quando existem múltiplos equilíbrios de Nash. No equilíbrio de Nash, cada DM escolhe sua estratégia sem consultar os demais, a fim de alcançar o resultado mais preferível a ele (onde as preferências dos DMs podem levar em conta comportamento altruístas). No equilíbrio de Berge, os adversários de um determinado DM não conseguem agir coletivamente para alcançar um resultado mais preferível para este DM e isto é válido para todos os DMs. Conforme (COLMAN *et al.*, 2011), o equilíbrio de Berge pode ser vantajoso para modelar o comportamento de jogadores altruístas, isto é, em situações estratégicas envolvendo cooperação, no sentido de que os jogadores atuam de forma colaborativa para alcançar os resultados mais preferíveis aos seus oponentes.

2.4.1 Estabilidades Berge para dois DMs

O conceito de Equilíbrio de Berge foi adaptado para as configurações do GMCR por (VIEIRA; RÊGO, 2018), onde foram dadas novas definições baseadas na estrutura do conceito de estabilidade de Berge. Essas definições são dadas por:

Definição 2.4.1: (Berge) Sejam $i, j \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado s é Berge estável (Berge) para o DM i se, e somente se, para todo $s_1 \in R_j(s)$, $s \succeq_i s_1$.

Definição 2.4.2: (WB) Sejam $i, j \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado s é fracamente Berge estável (WB) para o DM i se, e somente se, para todo $s_1 \in R_j^+(s)$, $s \succeq_i s_1$.

Ou seja, se um DM i estiver em um estado Berge estável, então, para qualquer movimento unilateral do DM j a partir desse estado, sem levar em conta suas preferências, ele levará o DM i para uma situação não preferível. Da mesma forma, na definição de WB, a única diferença é que em um estado fracamente Berge estável para o DM i , o DM j leva em consideração suas preferências, ou seja, o movimento unilateral do DM j é sempre a um estado preferível para tal DM. Das Definições 2.4.1 e 2.4.2, podemos definir o Equilíbrio Berge e o Equilíbrio Berge Fraco no GMCR com dois DMs, como: um estado s é um equilíbrio de Berge (respectivamente, equilíbrio Berge Fraco) se for, simultaneamente, Berge estável (respectivamente, fracamente Berge estável) para ambos os DMs.

Para melhor compreensão, vamos analisar a (Berge) e a (WB) aplicadas ao conflito do biscoito, representado na Figura 1. Considere o estado s_2 para o DM 2 (Jane). Observe no Grafo 1 da Figura 1 que o DM 1 (Dick) tem um movimento unilateral do estado s_2 para s_4 . No entanto, para o DM 2 (Jane), o estado s_2 é menos preferido com relação ao estado s_4 . Assim, o movimento do DM 1 do estado s_2 para o s_4 é uma situação preferível para o DM 2 e, portanto, o estado s_2 não é Berge estável para Jane. Porém, ao analisar a Estabilidade Berge Fraca, considera-se que não é possível o movimento unilateral feito pelo DM 1 do estado s_2 para o estado s_4 , pois para o DM 1 (Dick), o estado s_2 é mais preferido com relação ao estado s_4 . Como o estado s_4 não é preferível pelo DM 1 com relação ao estado s_2 , o estado s_2 é fracamente Berge estável para Jane.

Além das estabilidades Berge e WB, (VIEIRA; RÊGO, 2018) propuseram outras estabilidades inspiradas, respectivamente, nos conceitos de estabilidade de GMR, SMR, SEQ e SSEQ na literatura do GMCR levando em conta que o adversário do DM focal possui um comportamento altruísta, que serão reportadas a seguir:

Definição 2.4.3: (MB) Sejam $i, j \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado s é Meta-Berge estável (MB) para o DM i se, e somente se, para todo $s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}$ e todo $s_2 \in R_j(s_1)$, $s \succeq_i s_2$.

Para melhor compreensão, vamos analisar a estabilidade MB aplicada ao conflito do biscoito, representado na Figura 1. Considere o estado s_2 para o DM 1 (Dick). Observe no Grafo

2 da Figura 1 que o DM 2 (Jane) não possui nenhum movimento unilateral a partir do estado s_2 que seja mais preferido para o DM 1 (Dick), já que apenas o estado s_1 é acessível para Jane a partir do estado s_2 e o estado s_2 é mais preferido com relação ao estado s_1 para Dick. Além disso, para o DM 1 (Dick), apenas o estado s_4 é acessível a partir do estado s_2 e o DM 2 (Jane) não possui nenhum movimento unilateral a partir do estado s_4 que seja mais preferido para o DM 1 (Dick), já que apenas o estado s_3 é acessível para Jane a partir do estado s_4 e o estado s_3 é menos preferido com relação ao estado s_2 para Dick. Portanto, Jane não consegue melhorar a situação para Dick por meio de um movimento unilateral nem do estado s_2 nem do estado s_4 . Logo, o estado s_2 é Meta-Berge estável para Dick.

Definição 2.4.4: (SMB) Sejam $i, j \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado s é simétrico Berge estável (SMB) para o DM i se, e somente se, para todo $s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}$ e para todo $s_2 \in R_j(s_1)$, temos que $s \succeq_i s_2$ e para todo $s_3 \in R_i(s_2)$, $s \succeq_i s_3$.

Para melhor compreensão, vamos analisar a estabilidade SMB aplicada ao conflito do biscoito, representado na Figura 1. Considere o estado s_2 para o DM 1 (Dick). Observe no Grafo 2 da Figura 1 que o DM 2 (Jane) não possui nenhum movimento unilateral a partir do estado s_2 que seja mais preferido para o DM 1 (Dick), já que apenas o estado s_1 é acessível para Jane a partir do estado s_2 e este estado é preferível ao estado s_1 para Dick. Adicionalmente, Dick não possui um movimento unilateral que seja mais preferido a partir de s_1 , já que apenas o estado s_3 é acessível para Dick a partir do estado s_1 e o estado s_2 é mais preferido com relação ao estado s_3 para Dick. Além disso, para o DM 1 (Dick), apenas o estado s_4 é acessível a partir do estado s_2 e o DM 2 (Jane) não possui nenhum movimento unilateral a partir do estado s_4 que seja mais preferido para o DM 1 (Dick), já que apenas o estado s_3 é acessível para Jane a partir do estado s_4 e o estado s_3 é menos preferido com relação ao estado s_2 para Dick. Adicionalmente, Dick não possui um movimento unilateral a partir do estado s_3 que seja mais preferido para ele, já que apenas o estado s_1 é acessível para Dick a partir do estado s_3 e o estado s_2 é mais preferido com relação ao estado s_1 para Dick. Portanto, Jane não consegue melhorar a situação para Dick por meio de um movimento unilateral nem do estado s_2 nem do estado s_4 , nem mesmo considerando um movimento adicional de Dick após o movimento de Jane. Logo, o estado s_2 é simétrico Berge estável para Dick.

Definição 2.4.5: (WMB) Sejam $i, j \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado s é fracamente Meta-Berge estável (WMB) para o DM i se, e somente se, para todo $s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}$ e todo $s_2 \in R_j^+(s_1)$,

$s \succeq_i s_2$.

Novamente, para ilustrar o conceito de estabilidade WMB, vamos retornar ao jogo da Figura 1. Considere o estado s_2 para o DM 2 (Jane). Observe no Grafo 1 da Figura 1 que o DM 1 (Dick) não possui nenhum movimento de melhoria unilateral nem a partir do estado s_2 , nem a partir do estado s_1 . Portanto, Dick não consegue melhorar a situação para Jane por meio de movimentos de melhoria unilateral nem inicialmente no estado s_2 , nem considerando um movimento inicial de Jane do estado s_2 para o estado s_1 . Logo, o estado s_2 é fracamente Meta-Berge estável para Jane. Pelo mesmo argumento, temos que o estado s_1 também é WMB estável para Jane.

Definição 2.4.6: (WSMB) *Sejam $i, j \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado s é fracamente simétrico Berge estável (WSMB) para o DM i se, e somente se, para todo $s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}$ e para todo $s_2 \in R_j^+(s_1)$, temos que $s \succeq_i s_2$ e para todo $s_3 \in R_i(s_2)$, $s \succeq_i s_3$.*

A análise da estabilidade WSMB aplicada ao conflito do biscoito, representado na Figura 1, é semelhante à análise feita para a estabilidade WMB. Considere o estado s_2 para o DM 2 (Jane). Observe no Grafo 1 da Figura 1 que o DM 1 (Dick) não possui nenhum movimento de melhoria unilateral nem a partir do estado s_2 , nem a partir do estado s_1 . Portanto, Dick não consegue melhorar a situação para Jane por meio de movimentos de melhoria unilateral nem inicialmente no estado s_2 , nem considerando um movimento inicial de Jane do estado s_2 para o estado s_1 . Logo, o estado s_2 é fracamente simétrico Berge estável para Jane. Pelo mesmo argumento, temos que o estado s_1 também é fracamente simétrico Berge estável para Jane.

A Tabela 2 mostra as análises de estabilidade para os conceitos Berge e suas adaptações citadas anteriormente utilizando o exemplo da Figura 1. Cada célula nesta tabela especifica o(s) DM(s) para o qual o estado da linha da célula é estável de acordo com o conceito de estabilidade da coluna. A letra D representa que o estado é estável para Dick (DM 1) e a letra J representa que o estado é estável para Jane (DM 2). O par D, J implica que o estado é estável para ambos, ou seja, é um equilíbrio. Se um estado não for estável para ambos os DMs, será representado por um traço. Observe que o estado s_4 é equilíbrio de acordo com todos os conceitos de estabilidade Berge, enquanto o estado s_2 é equilíbrio apenas para os conceitos WB, SMB e WSMB. Note também que o estado s_3 não é estável para nenhum DM em qualquer conceito.

Tabela 2 – Análise dos conceitos de estabilidade Berge e suas adaptações aplicados ao conflito do biscoito.

Estados	Estabilidades Berge					
	Berge	WB	MB	WMB	SMB	WSMB
s_1	J	J	-	-	J	J
s_2	D	D, J	D	D	D, J	D, J
s_3	-	-	-	-	-	-
s_4	D, J	D, J	D, J	D, J	D, J	D, J

2.4.2 Estabilidades Berge para n -DMs

As estabilidades Berge para conflitos multilaterais são definidas de modo análogo, sendo que são considerados uma sequência legal de movimentos unilaterais dos oponentes do DM focal ou uma sequência legal de melhorias unilaterais destes, dependendo se estamos considerando uma versão fraca ou não de estabilidade. A seguir, apresentaremos as definições de estabilidade do Berge para conflitos com múltiplos DMs, estabelecidas em (VIEIRA; RÊGO, 2020).

Definição 2.4.7: (Berge) Seja $i \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado s é Berge estável (Berge) para o DM i se, e somente se, para todo $s_1 \in R_{N-\{i\}}(s)$, $s \succeq_i s_1$.

Definição 2.4.8: (WB) Seja $i \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado s é fracamente Berge estável (WB) para o DM i se, e somente se, para todo $s_1 \in R_{N-\{i\}}^+(s)$, $s \succeq_i s_1$.

Definição 2.4.9: (MB) Seja $i \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado s é Meta-Berge estável (MB) para o DM i se, e somente se, para todo $s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}$ e todo $s_2 \in R_{N-\{i\}}(s_1)$, $s \succeq_i s_2$.

Definição 2.4.10: (SMB) Seja $i \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado s é simétrico Berge Metarracional estável (SMB) para o DM i se, e somente se, para todo $s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}$ e para todo $s_2 \in R_{N-\{i\}}(s_1)$, temos que $s \succeq_i s_2$ e para todo $s_3 \in R_i(s_2)$, $s \succeq_i s_3$.

Definição 2.4.11: (WMB) Seja $i \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado s é fracamente Meta-Berge estável (WMB) para o DM i se, e somente se, para todo $s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}$ e todo $s_2 \in R_{N-\{i\}}^+(s_1)$, $s \succeq_i s_2$.

Definição 2.4.12: (WSMB) Seja $i \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado s é fracamente simétrico Berge estável (WSMB) para o DM i se, e somente se, para todo $s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}$ e para todo $s_2 \in R_{N-\{i\}}^+(s_1)$, temos que $s \succeq_i s_2$ e para todo $s_3 \in R_i(s_2)$, $s \succeq_i s_3$.

2.5 Representações matriciais dos conceitos usuais de soluções no GMCR

A verificação de quais noções de estabilidade são satisfeitas por um dado estado para um determinado DM pode ser muito trabalhosa, especialmente se o número de estados ou de DMs for grande em um conflito. Nesta seção, o intuito é mostrar como calcular as estabilidades dos estados de acordo com os conceitos usuais usando equações matriciais, conforme proposto em (XU *et al.*, 2007). Para isso, utilizaremos as definições apresentadas na Seção 2.2 com relação às matrizes $J_i(s, q)$, $J_i^+(s, q)$, $P_i^+(s, q)$ e $P_i^{\bar{=}}(s, q)$. Mostraremos como usar operações entre essas matrizes em vez de operações lógicas dentro do GMCR para determinar as estabilidades dos estados. A ideia é obter um método computacionalmente mais eficiente para determinar as estabilidades dos estados.

Seja E uma matriz $|S| \times |S|$ com cada entrada igual a 1, D uma matriz identidade de dimensão $|S| \times |S|$, ou seja, matriz que apresenta em sua diagonal principal todos os elementos iguais a 1 e o restante dos elementos iguais a zeros e e_k um vetor coluna $|S|$ -dimensional com o k -ésimo elemento igual a 1 e todos os outros elementos iguais a zero. Para duas matrizes M e N , de dimensões $|S| \times |S|$, $W = M \circ N$ é definida como uma matriz $|S| \times |S|$ na qual cada entrada (s, q) é dada por $w(s, q) = m(s, q) \cdot n(s, q)$, sendo “ \circ ” o produto de Hadamard de duas matrizes. Se M é uma matriz $|S| \times |S|$, então a matriz $sinal(M)$, de dimensão $|S| \times |S|$, tem suas entradas (s, q) definidas por:

$$sinal[m(s, q)] = \begin{cases} 1, & \text{se } m(s, q) > 0, \\ 0, & \text{se } m(s, q) = 0, \\ -1, & \text{se } m(s, q) < 0. \end{cases}$$

2.5.1 Representações matriciais dos conceitos usuais para dois DMs

Os primeiros quatro teoremas a seguir, apresentados em (XU *et al.*, 2007), fornecem métodos matriciais para determinar as estabilidades Nash, GMR, SMR e SEQ dos estados de um conflito com dois DMs. O último teorema que trata da estabilidade SSEQ, apesar de nunca ter sido apresentado para o conceito usual de preferências, já foi proposto no contexto de preferências probabilísticas em (VIEIRA, 2017) e, mais recentemente, adaptado para os conceitos de estabilidades dissensual e consensual em (XU *et al.*, 2019). As provas dos mesmos

podem ser consultadas nas referências indicadas.

Teorema 2.5.1: *Seja $i \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado s é Nash estável (ou individualmente racional) (R) para o DM i se, e somente se, $e_s^T \cdot J_i^+ = \vec{0}^T$, em que T denota a matriz transposta.*

Teorema 2.5.2: *Defina a matriz M_i^{GMR} de dimensão $|S| \times |S|$ como $M_i^{GMR} = J_i^+ \cdot [E - \text{sinal}(J_j \cdot (P_i^-, =)^T)]$. Seja $i \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado s é Metarracional Geral estável (GMR) para o DM i se, e somente se, $M_i^{GMR}(s, s) = 0$.*

Teorema 2.5.3: *Defina a matriz M_i^{SMR} de dimensão $|S| \times |S|$ como $M_i^{SMR} = J_i^+ \cdot [E - \text{sinal}(Q)]$, em que $Q = J_j \cdot [(P_i^-, =)^T \circ (E - \text{sinal}(J_i \cdot (P_i^+)^T))]$. Seja $i \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado s é Metarracional Simétrico estável (SMR) para o DM i se, e somente se, $M_i^{SMR}(s, s) = 0$.*

Teorema 2.5.4: *Defina a matriz M_i^{SEQ} de dimensão $|S| \times |S|$ como $M_i^{SEQ} = J_i^+ \cdot [E - \text{sinal}(J_j^+ \cdot (P_i^-, =)^T)]$. Seja $i \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado s é Sequencialmente estável (SEQ) para o DM i se, e somente se, $M_i^{SEQ}(s, s) = 0$.*

Teorema 2.5.5: *Defina a matriz M_i^{SSEQ} de dimensão $|S| \times |S|$ como $M_i^{SSEQ} = J_i^+ \cdot [E - \text{sinal}(Q)]$, em que $Q = J_j^+ \cdot [(P_i^-, =)^T \circ (E - \text{sinal}(J_i \cdot (P_i^+)^T))]$. Seja $i \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado s é Sequencialmente Simétrico estável (SSEQ) para o DM i se, e somente se, $M_i^{SSEQ}(s, s) = 0$.*

Logo, podemos calcular as estabilidades de NASH, GMR, SMR, SEQ e SSEQ usando os teoremas 2.5.1 - 2.5.5. Para melhor compreensão, vamos analisar os conceitos de estabilidades usuais aplicados ao conflito do biscoito, representado na Figura 1. Temos que:

$$e_1^T \cdot J_1^+ = \vec{0}^T, \quad e_1^T \cdot J_2^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$e_2^T \cdot J_1^+ = \vec{0}^T, \quad e_2^T \cdot J_2^+ = \vec{0}^T$$

$$e_3^T \cdot J_1^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_3^T \cdot J_2^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e_4^T \cdot J_1^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_4^T \cdot J_2^+ = \vec{0}^T$$

$$M_1^{GMR} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2^{GMR} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
M_1^{SMR} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & M_2^{SMR} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
M_1^{SEQ} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, & M_2^{SEQ} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
M_1^{SSEQ} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, & M_2^{SSEQ} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Utilizando os Teoremas 2.5.1 - 2.5.5 e analisando os vetores resultantes para o cálculo da estabilidade Nash e as diagonais principais das matrizes M_i^{GMR} , M_i^{SMR} , M_i^{SEQ} e M_i^{SSEQ} para $i \in \{1, 2\}$, temos que as análises de estabilidade pelo método matricial para os conceitos usuais coincidem com os resultados das análises mostrados na Tabela 1.

2.5.2 Representações matriciais dos conceitos usuais para n -DMs

Em um modelo com n -DMs, os oponentes de um DM constituem um grupo de dois ou mais DMs. Para calcular a estabilidade de um estado para um dado DM $i \in N$, é necessário examinar as respostas possíveis de todos os outros DMs $j \in N - \{i\}$. Para estender as definições de estabilidade dos modelos 2-DMs para modelos n -DMs, iremos utilizar os conceitos de sequência legal de movimentos e de melhoria unilateral para um grupo de DMs $H \subseteq N$ descritos na Subseção 2.3.2 e defini-los de forma matricial. Para duas matrizes binárias M e N , de dimensões $|S| \times |S|$, $W = M \vee N$ representa a disjunção lógica para M e N , ou seja, é definida como uma matriz $|S| \times |S|$ na qual cada entrada (s, q) é dada por $w(s, q) = \text{sinal}(m(s, q) + n(s, q))$.

Primeiro, defina duas matrizes $J_i^{(t)}$ e $J_i^{(t,+)}$ de dimensões $|S| \times |S|$ com suas entradas (s, q) como segue:

$$J_i^{(t)}(s, q) = \begin{cases} 1, & \text{se } q \in S \text{ é alcançável de } s \in S \text{ em exatamente } t \text{ movimentos unilaterais legais,} \\ & \text{sendo DM } i \text{ o primeiro DM a se mover;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$J_i^{(t,+)}(s,q) = \begin{cases} 1, & \text{se } q \in S \text{ é alcançável de } s \in S \text{ em exatamente } t \text{ melhorias unilaterais legais,} \\ & \text{sendo DM } i \text{ o primeiro DM a se mover;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Com base nesta definição, (XU *et al.*, 2009a) provaram o seguinte lemma:

Lema 2.5.6: *As duas matrizes $J_i^{(t)}$ e $J_i^{(t,+)}$ de dimensões $|S| \times |S|$ podem ser expressas indutivamente por*

$$J_i^{(t)} = \text{sinal}(J_i \cdot (\bigvee_{j \in H - \{i\}} J_j^{(t-1)})) \quad (2.1)$$

com $J_i^{(1)} = J_i$, e

$$J_i^{(t,+)} = \text{sinal}(J_i^+ \cdot (\bigvee_{j \in H - \{i\}} J_j^{(t-1,+)})) \quad (2.2)$$

com $J_i^{(1,+)} = J_i^+$.

A fim de representar possíveis movimentos no modelo de grafo com n DMs usando a representação matricial, considere duas matrizes J_H e J_H^+ de dimensões $|S| \times |S|$ correspondentes aos conjuntos R_H e R_H^+ , respectivamente, como segue:

$$J_H(s,q) = \begin{cases} 1, & q \in R_H(s); \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$J_H^+(s,q) = \begin{cases} 1, & q \in R_H^+(s); \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Consequentemente, as matrizes J_H e J_H^+ são chamadas de matrizes de movimento conjunto e de melhoria conjunta, respectivamente.

Sejam δ e δ_1 os números de iterações necessárias para encontrar $R_H(s)$ e $R_H^+(s)$, respectivamente, $\forall s \in S$. $L = |\bigcup_{i \in N} A_i|$ e $L_1 = |\bigcup_{i \in N} A_i^+|$ denotam os números de arcos UM e UI em todos os grafos dos DMs, respectivamente, uma vez que, se não houver um novo arco

apropriado produzido, os movimentos articulares correspondentes irão parar. Portanto, tem-se que $\delta \leq L$ e $\delta_1 \leq L_1$. Então, o seguinte teorema pode ser derivado usando o Lema 2.5.6. Esse teorema é uma adaptação do que foi apresentado em (XU *et al.*, 2009a), porém a prova é análoga e, portanto, será omitida. A adaptação foi feita para garantir que nenhuma coalizão possa retornar ao estado inicial nas análises das estabilidades Berge, o que não se faz necessário nas análises das estabilidades usuais, dado que não é possível sancionar o oponente permanecendo no mesmo estado.

Teorema 2.5.7: *Seja $H \subseteq N$ e $H \neq \emptyset$. Então, as matrizes J_H e J_H^+ podem ser expressas como*

$$J_H = (E - D) \circ \left(\bigvee_{t=1}^{\delta} \bigvee_{i \in H} J_i^{(t)} \right) \quad (2.3)$$

$$J_H^+ = (E - D) \circ \left(\bigvee_{t=1}^{\delta_1} \bigvee_{i \in H} J_i^{(t,+)} \right) \quad (2.4)$$

Os primeiros quatro teoremas a seguir, apresentados em (XU *et al.*, 2009a), fornecem métodos matriciais para determinar as estabilidades Nash, GMR, SMR e SEQ dos estados de um conflito com múltiplos DMs. O último teorema que trata da estabilidade SSEQ para conflitos multilaterais, apesar de nunca ter sido apresentado para o conceito usual de preferências, já foi proposto no contexto de preferências probabilísticas em (VIEIRA, 2017) e, mais recentemente, adaptado para os conceitos de estabilidades dissensual e consensual em (XU *et al.*, 2019).

Teorema 2.5.8: *Seja $i \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado s é Nash estável (ou individualmente racional) (R) para o DM i se, e somente se, $e_s^T \cdot J_i^+ = \vec{0}^T$. (T denota a matriz transposta.)*

Teorema 2.5.9: *Defina a matriz M_i^{GMRn} de dimensão $|S| \times |S|$ como $M_i^{GMRn} = J_i^+ \cdot [E - \text{sin}(\mathcal{J}_{N-\{i\}} \cdot (P_i^-, =)^T)]$. Seja $i \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado s é Metarracional Geral estável (GMR) para o DM i se, e somente se, $M_i^{GMRn}(s, s) = 0$.*

Teorema 2.5.10: *Defina a matriz M_i^{SMRn} de dimensão $|S| \times |S|$ como $M_i^{SMRn} = J_i^+ \cdot [E - \text{sin}(\mathcal{Q})]$, em que $\mathcal{Q} = \mathcal{J}_{N-\{i\}} \cdot [(P_i^-, =)^T \circ (E - \text{sin}(\mathcal{J}_i \cdot (P_i^+)^T))]$. Seja $i \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado s é Metarracional Simétrico estável (SMR) para o DM i se, e somente se, $M_i^{SMRn}(s, s) = 0$.*

Teorema 2.5.11 : Defina a matriz M_i^{SEQn} de dimensão $|S| \times |S|$ como $M_i^{SEQn} = J_i^+ \cdot [E - \text{sinal}(J_{N-\{i\}}^+ \cdot (P_i^{-,=})^T)]$. Seja $i \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado s é Sequencialmente estável (SEQ) para o DM i se, e somente se, $M_i^{SEQn}(s, s) = 0$.

Teorema 2.5.12 : Defina a matriz M_i^{SSEQn} de dimensão $|S| \times |S|$ como $M_i^{SSEQn} = J_i^+ \cdot [E - \text{sinal}(Q)]$, em que $Q = J_{N-\{i\}}^+ \cdot [(P_i^{-,=})^T \circ (E - \text{sinal}(J_i \cdot (P_i^+)^T))]$. Seja $i \in N$ e $s \in S$, dizemos que o estado s é Sequencialmente Simétrico estável (SSEQ) para o DM i se, e somente se, $M_i^{SSEQn}(s, s) = 0$.

3 REPRESENTAÇÕES MATRICIAIS DOS CONCEITOS DE ESTABILIDADE BERGE PARA 2 DECISORES

Neste capítulo, apresentamos as representações matriciais das estabilidades Berge para conflitos bilaterias, bem como uma aplicação em um conflito real descrito na literatura.

3.1 Representação

As 6 variantes propostas de estabilidade Berge no contexto do GMCR (Berge, Berge Fraca, Meta-Berge, Berge Simétrica, Meta-Berge Fraca e Berge Simétrica Fraca) podem ser determinadas diretamente usando o relacionamento que foi estabelecido entre os elementos matriciais e o conjunto de estados de um modelo de grafos, usando as preferências dos DMs sobre os estados. Para um modelo com dois decisores, as representações das estabilidades Berge são apresentadas nos seguintes teoremas.

Sejam 2 DMs representados por $N = \{i, j\}$. Um estado $s \in S$ é classificado como Berge estável para o DM i se, e somente se, para todo $s_1 \in R_j(s)$, $s \succeq_i s_1$. O Teorema 3.1.1 estabelece a representação matricial para determinar se um estado é Berge estável para 2 decisores.

Teorema 3.1.1: *Sejam $i, j \in N$. Defina a matriz M_i^{Berge} de dimensão $|S| \times |S|$ como $M_i^{Berge} = J_j \cdot (P_i^+)^T$. Considere $s \in S$, dizemos que o estado s é Berge estável (Berge) para o DM i se, e somente se,*

$$M_i^{Berge}(s, s) = 0. \tag{3.1}$$

Prova: Por definição de produto de matrizes, temos

$$\begin{aligned} M_i^{Berge}(s, s) &= \sum_{s_1 \in S} J_j(s, s_1) \cdot (P_i^+)^T(s_1, s) \\ &= \sum_{s_1 \in S} J_j(s, s_1) \cdot P_i^+(s, s_1). \end{aligned}$$

Então, como cada termo do somatório é não negativo, temos que (3.1) é válida se, e somente se,

$$J_j(s, s_1) \cdot P_i^+(s, s_1) = 0, \forall s_1 \in S. \tag{3.2}$$

Isso é equivalente a que para todo estado $s_1 \in R_j(s)$, devemos ter $s \succeq_i s_1$, que é a definição de Estabilidade Berge. \square

Um estado $s \in S$ é classificado como fracamente Berge estável para o DM i se, e somente se, para todo $s_1 \in R_j^+(s)$, $s \succeq_i s_1$. O Teorema 3.1.2 estabelece a representação matricial para determinar se um estado é fracamente Berge estável para 2 decisores.

Teorema 3.1.2: *Sejam $i, j \in N$. Defina a matriz M_i^{WB} de dimensão $|S| \times |S|$ como $M_i^{WB} = J_j^+ \cdot (P_i^+)^T$. Considere $s \in S$, dizemos que o estado s é fracamente Berge estável (WB) para o DM i se, e somente se,*

$$M_i^{WB}(s, s) = 0. \quad (3.3)$$

Prova: $M_i^{WB}(s, s)$ é equivalente a

$$\begin{aligned} & \sum_{s_1 \in S} J_j^+(s, s_1) \cdot (P_i^+)^T(s_1, s) \\ &= \sum_{s_1 \in S} J_j^+(s, s_1) \cdot P_i^+(s, s_1). \end{aligned}$$

Então (3.3) é válida se, e somente se,

$$J_j^+(s, s_1) \cdot P_i^+(s, s_1) = 0, \forall s_1 \in S. \quad (3.4)$$

Isso implica que, para cada estado $s_1 \in R_j^+(s)$, $s \succeq_i s_1$. \square

Nas representações matriciais a seguir faremos uso da matriz identidade D de dimensão $|S| \times |S|$, ou seja, matriz que apresenta em sua diagonal principal todos os elementos iguais a 1 e o restante dos elementos são formados por zeros.

Dizemos que um estado $s \in S$ é Meta-Berge estável (MB) para o DM $i \in N$ se, e somente se, para todo $s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}$ e todo $s_2 \in R_j(s_1)$, $s \succeq_i s_2$. O Teorema 3.1.3 estabelece a representação matricial para determinar se um estado é Meta-Berge estável para 2 decisores.

Teorema 3.1.3: *Sejam $i, j \in N$. Defina a matriz M_i^{MB} de dimensão $|S| \times |S|$ como $M_i^{MB} = (J_i + D) \cdot (J_j \cdot (P_i^+)^T)$. Considere $s \in S$, dizemos que o estado s é Meta-Berge estável (MB) para o DM i se, e somente se,*

$$M_i^{MB}(s, s) = 0. \quad (3.5)$$

Prova: $M_i^{MB}(s, s)$ é equivalente a

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{s_1 \in S} (J_i + D)(s, s_1) \cdot (J_j \cdot (P_i^+)^T)(s_1, s) \right) \\ &= \left(\sum_{s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}} \left(\sum_{s_2 \in S} J_j(s_1, s_2) \cdot P_i^+(s, s_2) \right) \right) \\ &= \left(\sum_{s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}} \left(\sum_{s_2 \in R_j(s_1)} P_i^+(s, s_2) \right) \right). \end{aligned}$$

Então (3.5) é válida se, e somente se,

$$P_i^+(s, s_2) = 0, \forall s_2 \in R_j(s_1) \text{ e } s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}.$$

(3.6)

Isso é equivalente a que para todo $s_2 \in R_j(s_1)$ tal que $s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}$, temos que $s \succeq_i s_2$. \square

Dizemos que um estado $s \in S$ é simétrico Berge estável (SMB) para o DM $i \in N$ se, e somente se, para todo para todo $s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}$ e para todo $s_2 \in R_j(s_1)$, temos que $s \succeq_i s_2$ e para todo $s_3 \in R_i(s_2)$, temos que $s \succeq_i s_3$. O Teorema 3.1.4 estabelece a representação matricial para determinar se um estado é simétrico Berge estável para 2 decisores.

Teorema 3.1.4: *Sejam $i, j \in N$. Defina a matriz M_i^{SMB} de dimensão $|S| \times |S|$ como*

$$M_i^{SMB} = (J_i + D) \cdot (J_j \cdot [(P_i^+)^T + (J_i \cdot (P_i^+)^T)]),$$

Considere $s \in S$, dizemos que o estado s é simétrico Berge estável (SMB) para o DM i se, e somente se,

$$M_i^{SMB}(s, s) = 0.$$

(3.7)

Prova: $M_i^{SMB}(s, s)$ é equivalente a

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{s_1 \in S} (J_i + D)(s, s_1) \cdot (J_j \cdot [(P_i^+)^T + (J_i \cdot (P_i^+)^T)])(s_1, s) \right) \\ &= \left(\sum_{s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}} \left(\sum_{s_2 \in S} J_j(s_1, s_2) \cdot [(P_i^+)^T + (J_i \cdot (P_i^+)^T)](s_2, s) \right) \right) \\ &= \left(\sum_{s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}} \left(\sum_{s_2 \in R_j(s_1)} P_i^+(s, s_2) + (J_i \cdot (P_i^+)^T)(s_2, s) \right) \right) \\ &= \left(\sum_{s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}} \left(\sum_{s_2 \in R_j(s_1)} P_i^+(s, s_2) + \left(\sum_{s_3 \in S} J_i(s_2, s_3) \cdot P_i^+(s, s_3) \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Então (3.7) é válida se, e somente se,

$$P_i^+(s, s_2) = 0 \text{ e } P_i^+(s, s_3) = 0, \forall s_3 \in R_i(s_2), \forall s_2 \in R_j(s_1) \text{ e } \forall s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}. \quad (3.8)$$

Isso implica que, para cada estado $s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}$ e para cada estado $s_2 \in R_j(s_1)$, $s \succeq_i s_2$ e, para cada estado $s_3 \in R_i(s_2)$, $s \succeq_i s_3$. \square

Dizemos que um estado $s \in S$ é fracamente Meta-Berge estável (WMB) para o DM $i \in N$ se, e somente se, para todo $s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}$ e todo $s_2 \in R_j^+(s_1)$, $s \succeq_i s_2$. O Teorema 3.1.5 estabelece a representação matricial para determinar se um estado é fracamente Meta-Berge estável para 2 decisores.

Teorema 3.1.5: *Sejam $i, j \in N$. Defina a matriz M_i^{WMB} de dimensão $|S| \times |S|$ como $M_i^{WMB} = (J_i + D) \cdot (J_j^+ \cdot (P_i^+)^T)$. Considere $s \in S$, dizemos que o estado s é fracamente Meta-Berge estável (WMB) para o DM i se, e somente se,*

$$M_i^{WMB}(s, s) = 0. \quad (3.9)$$

Prova: $M_i^{WMB}(s, s)$ é equivalente a

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{s_1 \in S} (J_i + D)(s, s_1) \cdot (J_j^+ \cdot (P_i^+)^T)(s_1, s) \right) \\ &= \left(\sum_{s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}} \left(\sum_{s_2 \in S} J_j^+(s_1, s_2) \cdot P_i^+(s, s_2) \right) \right) \\ &= \left(\sum_{s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}} \left(\sum_{s_2 \in R_j^+(s_1)} P_i^+(s, s_2) \right) \right). \end{aligned}$$

Então (3.9) é válida se, e somente se,

$$P_i^+(s, s_2) = 0, \forall s_2 \in R_j^+(s_1) \text{ e } s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}. \quad (3.10)$$

Isso implica que, para cada estado $s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}$ e para cada estado $s_2 \in R_j^+(s_1)$, $s \succeq_i s_2$. \square

Dizemos que um estado $s \in S$ é fracamente simétrico Berge estável (WSMB) para o DM $i \in N$ se, e somente se, para todo para todo $s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}$ e para todo $s_2 \in R_j^+(s_1)$, temos que $s \succeq_i s_2$ e para todo $s_3 \in R_i(s_2)$, temos que $s \succeq_i s_3$. O Teorema 3.1.6 estabelece a

representação matricial para determinar se um estado é fracamente simétrico Berge estável para 2 decisores.

Teorema 3.1.6: *Sejam $i, j \in N$. Defina a matriz M_i^{WSMB} de dimensão $|S| \times |S|$ como $M_i^{WSMB} = (J_i + D) \cdot (J_j^+ \cdot [(P_i^+)^T + (J_i \cdot (P_i^+)^T)])$. Considere $s \in S$, dizemos que o estado s é fracamente simétrico Berge estável (WSMB) para o DM i se, e somente se,*

$$M_i^{WSMB}(s, s) = 0. \quad (3.11)$$

Prova: $M_i^{WSMB}(s, s)$ é equivalente a

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{s_1 \in S} (J_i + D)(s, s_1) \cdot (J_j^+ \cdot [(P_i^+)^T + (J_i \cdot (P_i^+)^T)])(s_1, s) \right) \\ &= \left(\sum_{s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}} \left(\sum_{s_2 \in S} J_j^+(s_1, s_2) \cdot [(P_i^+)^T + (J_i \cdot (P_i^+)^T)](s_2, s) \right) \right) \\ &= \left(\sum_{s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}} \left(\sum_{s_2 \in R_j^+(s_1)} P_i^+(s, s_2) + (J_i \cdot (P_i^+)^T)(s_2, s) \right) \right) \\ &= \left(\sum_{s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}} \left(\sum_{s_2 \in R_j^+(s_1)} P_i^+(s, s_2) + \left(\sum_{s_3 \in S} J_i(s_2, s_3) \cdot P_i^+(s, s_3) \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Então (3.11) é válida se, e somente se,

$$P_i^+(s, s_2) = 0 \text{ e } P_i^+(s, s_3) = 0, \forall s_3 \in R_i(s_2), \forall s_2 \in R_j^+(s_1) \text{ e } \forall s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}. \quad (3.12)$$

Isso implica que, para cada estado $s_1 \in R_i(s) \cup s$ e para cada estado $s_2 \in R_j^+(s_1)$, $s \succeq_i s_2$ e, para cada estado $s_3 \in R_i(s_2)$, $s \succeq_i s_3$. \square

3.2 Aplicação

Um dos principais desafios deste século tem sido a conciliação do crescimento econômico com a preservação ambiental. Por conta disso, a solução para essa problemática tem sido objeto de estudo de vários pesquisadores ao redor do mundo. Por exemplo, em (HIPEL; OBEIDI, 2005), o GMCR foi utilizado para identificar o conflito entre os valores básicos subjacentes aos acordos comerciais e os princípios que fornecem as bases para a gestão ambiental, e sugerir soluções de como a mais básica das disputas pode ser resolvida com

responsabilidade. A seguir, detalhamos este conflito seguindo a descrição de (HIPEL; OBEIDI, 2005).

Existe uma disputa crescente entre aqueles que apoiam o livre comércio de bens e serviços entre as nações e aqueles que não o fazem. O primeiro grupo é formado por apoiadores da globalização econômica por meio de acordos internacionais de livre comércio e que defendem os princípios da *Global Market-Driven Economy* / Economia global orientada para o mercado (GMDE). A segunda categoria representa ambientalistas e defensores do bem-estar social e, portanto, reflete os valores de uma abordagem de *Sustainable Ecosystem* / Ecossistema sustentável (SES) para a governança. (HIPEL; OBEIDI, 2005) explicam as posições e sistemas de valores desses dois grupos principais e desenvolvem um estudo formal de conflito dessa disputa utilizando o GMCR a fim de obter soluções estratégicas sobre como esse conflito complexo pode ser resolvido de forma equitativa, pelo menos a longo prazo.

Considere um tipo geral de conflito que está ocorrendo agora em todo o mundo nos níveis local, nacional e global entre os valores básicos do GMDE e os da SES. O GMDE tem três opções: influenciar (influenciar os estados a adotarem políticas econômicas voltadas para o mercado), promover (promover os ideais de globalização e internacionalização por meio da mídia que enfatiza a eficiência e a prosperidade das sociedades que se integram aos acordos globais de livre comércio) e reformar (reformar a Organização Mundial do Comércio para que o meio ambiente seja tratado como um patrimônio público em vez de uma mercadoria). A SES tem três opções: educar (fomentar uma educação pública que promova a integridade ambiental e a responsabilidade social, bem como alerta para os perigos de sucumbir aos valores do GMDE), pressionar governo (pressionar os governos a incorporarem questões ambientais e ecossistêmicas aos acordos de livre comércio) e pressionar negociadores (pressionar os negociadores comerciais a considerarem mais questões sociais em suas agendas).

O lado esquerdo da Figura 2 lista cada um dos dois DMs no modelo do conflito seguido pelas opções sob seu controle. Um DM pode fazer uma escolha a partir das opções que ele controla, chamado de estratégia, e uma coleção de todas as estratégias dos DMs formam um estado ou cenário. Na Figura 2, o número “1” ao lado de uma opção indica que a opção é selecionada pelo DM que a controla, enquanto o número “0” implica que a opção não é escolhida. O *Status quo* na tabela da Figura 2 representa o estado atual do conflito no momento da realização da análise. Neste estado, o GMDE está influenciando governos e promovendo os ideais de acordos de livre comércio, mas não considerando reformas. A SES está fazendo tudo

o que pode: educar o público, fazer pressão junto aos governos e pressionar os negociadores, demonstrando sempre que eles conduzem uma reunião.

Figura 2 – Decisores e opções no conflito de valores (comércio versus meio ambiente)

DECISORES	OPÇÕES	STATUS QUO	
GMDE	1. INFLUENCIAR	1	⇒ ESTRATÉGIA GMDE
	2. PROMOVER	1	
	3. REFORMAR	0	
SES	4. EDUCAR	1	⇒ ESTRATÉGIA SES
	5. PRESSIONAR GOVERNO	1	
	6. PRESSIONAR NEGOCIADORES	1	

Fonte: (HIPEL; OBEIDI, 2005) (Adaptado)

Uma vez que uma opção pode ser feita ou não por cada DM, matematicamente existem 64 (2⁶) estados possíveis no modelo de Conflito de Valores mostrado na Figura 2. Na parte da etapa de modelagem é feita a remoção daqueles estados que na realidade não podem acontecer para obter a lista de estados viáveis. No modelo de Conflito de Valores, existem duas razões principais para a inviabilidade. Primeiro, algumas opções são mutuamente exclusivas e não podem ser selecionadas ao mesmo tempo. Consequentemente, o GMDE não selecionará simultaneamente as opções reformar e influenciar, nem escolherá reformar e promover juntos. Além disso, existem estados inviáveis sempre que as três opções (influenciar, promover e reformar) ocorrem juntas. Em segundo lugar, se o GMDE decidir reformar, a SES não pressionará os negociadores comerciais. A Figura 3 ilustra os 36 estados possíveis restantes no conflito, onde o estado 36 corresponde ao estado de *status quo*.

Figura 3 – Estados viáveis no conflito de valores (comércio versus meio ambiente)

DECISORES	OPÇÕES	ESTADOS																	
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
GMDE	1. INFLUENCIAR	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0
	2. PROMOVER	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
	3. REFORMAR	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
SES	4. EDUCAR	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
	5. PRESSIONAR GOVERNO	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	6. PRESSIONAR NEGOCIADORES	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

DECISORES	OPÇÕES	ESTADOS																	
		19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
GMDE	1. INFLUENCIAR	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
	2. PROMOVER	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
	3. REFORMAR	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
SES	4. EDUCAR	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1
	5. PRESSIONAR GOVERNO	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	6. PRESSIONAR NEGOCIADORES	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Fonte: (HIPEL; OBEIDI, 2005) (Adaptado)

As classificações ordinais dos estados para GMDE e SES, do mais preferido ao

menos preferido, são mostradas na Figura 4 usando os números dos estados definidos na Figura 3. Os estados entre parênteses são igualmente preferidos para um DM e os estados dados mais altos em uma coluna são mais preferidos do que os mais baixos. Por exemplo, o GMDE prefere igualmente os estados do primeiro conjunto: (3,4), mas este conjunto é mais preferido aos estados do segundo conjunto: (13,14), que é mais preferido aos estados do terceiro conjunto : (8,9) e assim por diante.

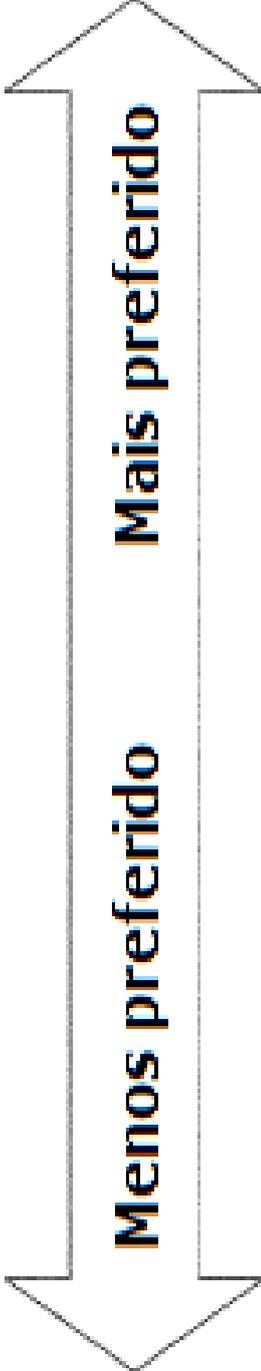
A partir disso, podemos utilizar as definições dadas no Capítulo 2 com relação às matrizes J_i , J_i^+ , P_i^+ e $P_i^{-,=}$, construir o grafo referente a esse conflito (representado na Figura 5) e determinar as estabilidades usuais e Berge dos estados através de operações entre essas matrizes dentro do GMCR. Devido ao grande número de estados, fizemos a utilização de ferramenta computacional para analisar todos os estados de acordo com cada um dos os conceitos usuais e de estabilidade Berge. Para análise do conflito, utilizamos um algoritmo, que se encontra no Apêndice A, implementado no software R i386 3.6.0 e executado sobre a versão Rx64 3.6.0 em um hardware Intel(R) Core(TM) i3-6100U (2.30 GHz) - 4GB de RAM. Os resultados foram obtidos quase que instantaneamente e os equilíbrios resultantes estão listados nas Tabelas 3 e 4.

Tabela 3 – Análise de equilíbrio de acordo com os conceitos usuais de estabilidade aplicados ao conflito de valores (comércio versus meio Ambiente)

Estados	Estabilidades Usuais - Equilíbrio				
	NASH	GMR	SMR	SEQ	SSEQ
1		✓	✓	✓	✓
3		✓	✓		
6		✓	✓	✓	✓
8		✓	✓		
11		✓	✓	✓	✓
13		✓	✓		
16		✓	✓		
17		✓	✓		
18	✓	✓	✓	✓	✓
19	✓	✓	✓	✓	✓
23		✓	✓		
27		✓	✓		
31		✓	✓		
35		✓	✓		
36	✓	✓	✓	✓	✓

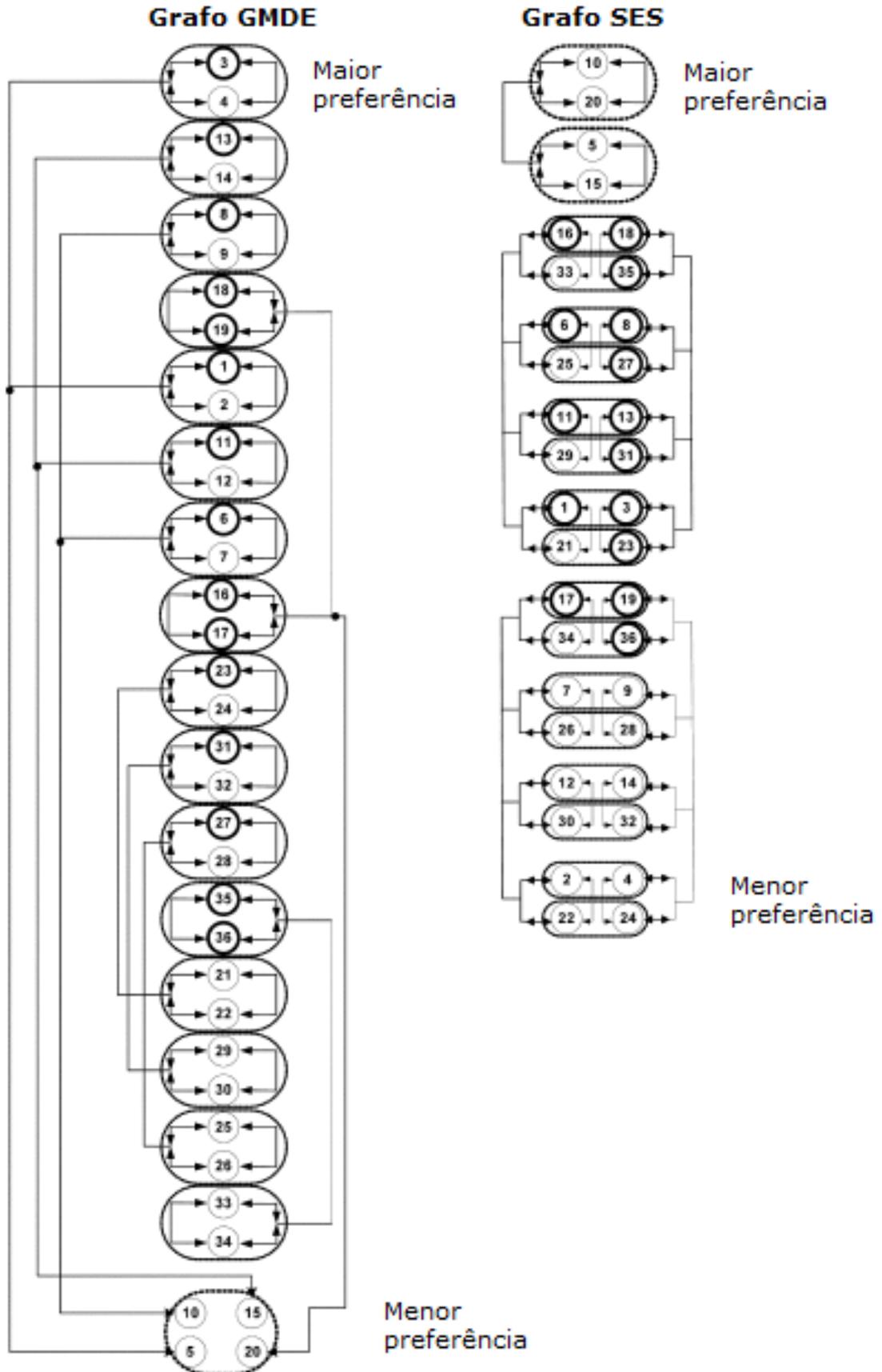
Para a análise das estabilidades usuais, observe que os estados 18, 19 e 36 são os únicos estados que são equilíbrios de acordo com todos os 5 conceitos de estabilidade. Um

Figura 4 – Classificação de preferência de estados no conflito de valores (comércio versus meio ambiente)

GMDE		SES
(3,4)	 <p>Mais preferido</p> <p>Menos preferido</p>	(10,20)
(13,14)		(5,15)
(8,9)		(16,18)
(18,19)		(33,35)
(1,2)		(6,8)
(11,12)		(25,27)
(6,7)		(11,13)
(16,17)		(29,31)
(23,24)		(1,3)
(31,32)		(21,23)
(27,28)		(17,19,34,36)
(35,36)		(7,9,26,28)
(21,22)		(12,14,30,32)
(29,30)		(2,4,22,24)
(25,26)		
(33,34)		
(5,10,15,20)		

Fonte: (HIPEL; OBEIDI, 2005) (Adaptado)

Figura 5 – Modelo de grafo para o conflito de valores (comércio versus meio ambiente)



Fonte: (HIPEL; OBEIDI, 2005) (Adaptado)

Tabela 4 – Análise de equilíbrio de acordo com os conceitos de estabilidade Berge e suas adaptações aplicados ao conflito de valores (comércio versus meio Ambiente)

Estados	Estabilidades Berge - Equilíbrio					
	Berge	WB	MB	WMB	SMB	WSMB
1		✓				
3		✓		✓		✓
4		✓		✓		✓
5	✓	✓				
6		✓				
8		✓		✓		✓
9		✓		✓		✓
10	✓	✓				
11		✓				
13		✓		✓		✓
14		✓		✓		✓
15	✓	✓				
16		✓		✓		✓
18		✓		✓		✓
19		✓		✓		✓
20	✓	✓		✓		✓
36		✓				

detalhe importante é que o estado 35 (em que o DM GMDE opta por promover os ideais de globalização e internacionalização e o DM SES opta por fomentar uma educação pública, por pressionar os governos a incorporarem questões ambientais e por pressionar os negociadores comerciais a considerarem mais questões sociais) só é equilíbrio para as estabilidades GMR e SMR, porém o artigo original do qual estamos utilizando esse exemplo informa que o estado 35 é equilíbrio, também, para as estabilidades NASH e SEQ, o que não é verdade, pois o DM SES pode se mover unilateralmente para um estado mais preferido (estado 18, por exemplo). Os demais estados da Tabela 3 são equilíbrios de acordo com menos conceitos de estabilidade. Os estados 1, 6 e 11 são equilíbrios de acordo com apenas 4 dos 5 conceitos de solução das estabilidades usuais. Os estados 3, 8, 13, 16, 17, 23, 27 e 31 são equilíbrios de acordo com GMR e SMR. Os demais estados do conflitos não são equilíbrios para os conceitos de estabilidade usuais.

Para a análise das estabilidades Berge, observe que o estado 20 (em que o DM GMDE opta por reformar a OMC e o DM SES opta por fomentar uma educação pública e por pressionar os governos a incorporarem questões ambientais) é o que é equilíbrio de acordo com o maior número de estabilidades Berge, sendo equilíbrio de acordo com 4 destes conceitos. Esse é um detalhe interessante pois o estado 20 está na classificação dos estados menos preferidos

para o GMDE e mais preferidos para o SES. Portanto, é altamente improvável que esse estado constitua uma solução final para o conflito. Os demais estados da Tabela 4 são equilíbrio de acordo com menos conceitos de estabilidade Berge. Os estados 3, 4, 8, 9, 13, 14, 16, 18, 19 são equilíbrios de acordo com apenas 3 dos 6 conceitos de solução das estabilidades Berge. Os estados 5, 10 e 15 são equilíbrios de acordo com a Berge e Berge Fraca. Os estados 1, 6, 11 e 36 são equilíbrios de acordo somente com a Berge Fraca e os demais estados do conflitos não são equilíbrios para os conceitos de estabilidade Berge.

Analisando de uma forma geral, os estados 18 (em que o DM GMDE opta por promover os ideais de globalização e internacionalização e o DM SES opta por fomentar uma educação pública e por pressionar os governos a incorporarem questões ambientais) e 19 (em que o DM GMDE opta influenciar os estados a adotarem políticas econômicas voltadas para o mercado e por promover os ideais de globalização e internacionalização e o DM SES opta por fomentar uma educação pública e por pressionar os governos a incorporarem questões ambientais) são possíveis soluções para o conflito, pois são equilíbrios de acordo com 8 dos 11 conceitos de solução das estabilidades usuais e Berge.

4 REPRESENTAÇÕES MATRICIAIS DOS CONCEITOS DE ESTABILIDADE BERGE PARA n DECISORES

No Capítulo 3 foram apresentadas as representações matriciais das estabilidades Berge para dois DMs. Para um modelo com n DMs, as representações matriciais das 6 variantes propostas de estabilidade Berge no contexto do GMCR (Berge, Berge Fraca, Meta-Berge, Berge Simétrica, Meta-Berge Fraca e Berge Simétrica Fraca) são apresentadas nos seguintes teoremas.

4.1 Representação

Seja o conjunto de DMs representado por $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Um estado $s \in S$ é classificado como Berge estável para o DM i se, e somente se, para todo $s_1 \in R_{N-\{i\}}(s)$, $s \succeq_i s_1$. O Teorema 4.1.1 estabelece a representação matricial para determinar se um estado é Berge estável para n DMs.

Teorema 4.1.1: *Seja $i \in N$. Defina a matriz M_i^{Berge} de dimensão $|S| \times |S|$ como $M_i^{Berge} = J_{N-\{i\}} \cdot (P_i^+)^T$. Considere $s \in S$, dizemos que o estado s é Berge estável (Berge) para o DM i se, e somente se,*

$$M_i^{Berge}(s, s) = 0. \quad (4.1)$$

Prova: Por definição de produto de matrizes, temos

$$\begin{aligned} M_i^{Berge}(s, s) &= \sum_{s_1 \in S} J_{N-\{i\}}(s, s_1) \cdot (P_i^+)^T(s_1, s) \\ &= \sum_{s_1 \in S} J_{N-\{i\}}(s, s_1) \cdot P_i^+(s, s_1). \end{aligned}$$

Então, como cada termo do somatório é não negativo, temos que (4.1) é válida se, e somente se,

$$J_{N-\{i\}}(s, s_1) \cdot P_i^+(s, s_1) = 0, \forall s_1 \in S. \quad (4.2)$$

Isso é equivalente a que para todo estado $s_1 \in R_{N-\{i\}}(s)$, devemos ter $s \succeq_i s_1$, que é a definição de Estabilidade Berge. \square

Um estado $s \in S$ é classificado como fracamente Berge estável para o DM i se, e somente se, para todo $s_1 \in R_{N-\{i\}}^+(s)$, $s \succeq_i s_1$. O Teorema 4.1.2 estabelece a representação matricial para determinar se um estado é fracamente Berge estável para n DMs.

Teorema 4.1.2: *Seja $i \in N$. Defina a matriz M_i^{WB} de dimensão $|S| \times |S|$ como $M_i^{WB} = J_{N-\{i\}}^+ \cdot (P_i^+)^T$. Considere $s \in S$, dizemos que o estado s é fracamente Berge estável (WB) para o DM i se, e somente se,*

$$M_i^{WB}(s, s) = 0. \quad (4.3)$$

Prova: Por definição de produto de matrizes, $M_i^{WB}(s, s)$ é equivalente a

$$\begin{aligned} & \sum_{s_1 \in S} J_{N-\{i\}}^+(s, s_1) \cdot (P_i^+)^T(s_1, s) \\ &= \sum_{s_1 \in S} J_{N-\{i\}}^+(s, s_1) \cdot P_i^+(s, s_1). \end{aligned}$$

Então (4.3) é válida se, e somente se,

$$J_{N-\{i\}}^+(s, s_1) \cdot P_i^+(s, s_1) = 0, \forall s_1 \in S. \quad (4.4)$$

Isso implica que, para cada estado $s_1 \in R_{N-\{i\}}^+(s)$, $s \succeq_i s_1$. □

Dizemos que um estado $s \in S$ é Meta-Berge estável (MB) para o DM $i \in N$ se, e somente se, para todo $s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}$ e todo $s_2 \in R_{N-\{i\}}(s_1)$, $s \succeq_i s_2$. O Teorema 4.1.3 estabelece a representação matricial para determinar se um estado é Meta-Berge estável para n DMs.

Teorema 4.1.3: *Seja $i \in N$. Defina a matriz M_i^{MB} de dimensão $|S| \times |S|$ como $M_i^{MB} = (J_i + D) \cdot (J_{N-\{i\}} \cdot (P_i^+)^T)$. Considere $s \in S$, dizemos que o estado s é Meta-Berge estável (MB) para o DM i se, e somente se,*

$$M_i^{MB}(s, s) = 0. \quad (4.5)$$

Prova: $M_i^{MB}(s, s)$ é equivalente a

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{s_1 \in S} (J_i + D)(s, s_1) \cdot (J_{N-\{i\}} \cdot (P_i^+)^T)(s_1, s) \right) \\ &= \left(\sum_{s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}} \left(\sum_{s_2 \in S} J_{N-\{i\}}(s_1, s_2) \cdot P_i^+(s, s_2) \right) \right) \\ &= \left(\sum_{s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}} \left(\sum_{s_2 \in R_{N-\{i\}}(s_1)} P_i^+(s, s_2) \right) \right). \end{aligned}$$

Então (4.5) é válida se, e somente se,

$$P_i^+(s, s_2) = 0, \forall s_2 \in R_{N-\{i\}}(s_1) \text{ e } s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}. \quad (4.6)$$

Isso é equivalente a que para todo $s_2 \in R_{N-\{i\}}(s_1)$ tal que $s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}$, temos que $s \succeq_i s_2$. \square

Dizemos que um estado $s \in S$ é simétrico Berge estável (SMB) para o DM $i \in N$ se, e somente se, para todo $s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}$ e para todo $s_2 \in R_{N-\{i\}}(s_1)$, temos que $s \succeq_i s_2$ e para todo $s_3 \in R_i(s_2)$, temos que $s \succeq_i s_3$. O Teorema 4.1.4 estabelece a representação matricial para determinar se um estado é simétrico Berge estável para n DMs.

Teorema 4.1.4: *Seja $i \in N$. Defina a matriz M_i^{SMB} de dimensão $|S| \times |S|$ como $M_i^{SMB} = (J_i + D) \cdot (J_{N-\{i\}} \cdot [(P_i^+)^T + (J_i \cdot (P_i^+)^T)])$. Considere $s \in S$, dizemos que o estado s é simétrico Berge estável (SMB) para o DM i se, e somente se,*

$$M_i^{SMB}(s, s) = 0. \quad (4.7)$$

Prova: $M_i^{SMB}(s, s)$ é equivalente a

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{s_1 \in S} (J_i + D)(s, s_1) \cdot (J_{N-\{i\}} \cdot [(P_i^+)^T + (J_i \cdot (P_i^+)^T)])(s_1, s) \right) \\ &= \left(\sum_{s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}} \left(\sum_{s_2 \in S} J_{N-\{i\}}(s_1, s_2) \cdot [(P_i^+)^T + (J_i \cdot (P_i^+)^T)](s_2, s) \right) \right) \\ &= \left(\sum_{s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}} \left(\sum_{s_2 \in R_{N-\{i\}}(s_1)} P_i^+(s, s_2) + (J_i \cdot (P_i^+)^T)(s_2, s) \right) \right) \\ &= \left(\sum_{s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}} \left(\sum_{s_2 \in R_{N-\{i\}}(s_1)} P_i^+(s, s_2) + \left(\sum_{s_3 \in S} J_i(s_2, s_3) \cdot P_i^+(s, s_3) \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Então (4.7) é válida se, e somente se,

$$P_i^+(s, s_2) = 0 \text{ e } P_i^+(s, s_3) = 0, \forall s_3 \in R_i(s_2), \forall s_2 \in R_{N-\{i\}}(s_1) \text{ e } \forall s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}. \quad (4.8)$$

Isso implica que, para cada estado $s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}$ e para cada estado $s_2 \in R_{N-\{i\}}(s_1)$, $s \succeq_i s_2$ e, para cada estado $s_3 \in R_i(s_2)$, $s \succeq_i s_3$. \square

Dizemos que um estado $s \in S$ é fracamente Meta-Berge estável (WMB) para o DM $i \in N$ se, e somente se, para todo $s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}$ e todo $s_2 \in R_{N-\{i\}}^+(s_1)$, $s \succeq_i s_2$. O Teorema 4.1.5

estabelece a representação matricial para determinar se um estado é fracamente Meta-Berge estável para n DMs.

Teorema 4.1.5: *Seja $i \in N$. Defina a matriz M_i^{WMB} de dimensão $|S| \times |S|$ como $M_i^{WMB} = (J_i + D) \cdot (J_{N-\{i\}}^+ \cdot (P_i^+)^T)$. Considere $s \in S$, dizemos que o estado s é fracamente Meta-Berge estável (WMB) para o DM i se, e somente se,*

$$M_i^{WMB}(s, s) = 0. \quad (4.9)$$

Prova: $M_i^{WMB}(s, s)$ é equivalente a

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{s_1 \in S} (J_i + D)(s, s_1) \cdot (J_{N-\{i\}}^+ \cdot (P_i^+)^T)(s_1, s) \right) \\ &= \left(\sum_{s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}} \left(\sum_{s_2 \in S} J_{N-\{i\}}^+(s_1, s_2) \cdot P_i^+(s, s_2) \right) \right) \\ &= \left(\sum_{s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}} \left(\sum_{s_2 \in R_{N-\{i\}}^+(s_1)} P_i^+(s, s_2) \right) \right). \end{aligned}$$

Então (4.9) é válida se, e somente se,

$$P_i^+(s, s_2) = 0, \forall s_2 \in R_{N-\{i\}}^+(s_1) \text{ e } s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}. \quad (4.10)$$

Isso implica que, para cada estado $s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}$ e para cada estado $s_2 \in R_{N-\{i\}}^+(s_1)$, $s \succeq_i s_2$. \square

Dizemos que um estado $s \in S$ é fracamente simétrico Berge estável (WSMB) para o DM $i \in N$ se, e somente se, para todo para todo $s_1 \in R_i(s) \cup s$ e para todo $s_2 \in R_{N-\{i\}}^+(s_1)$, temos que $s \succeq_i s_2$ e para todo $s_3 \in R_i(s_2)$, temos que $s \succeq_i s_3$. O Teorema 4.1.6 estabelece a representação matricial para determinar se um estado é fracamente simétrico Berge estável para n DMs.

Teorema 4.1.6: *Seja $i \in N$. Defina a matriz M_i^{WSMB} de dimensão $|S| \times |S|$ como $M_i^{WSMB} = (J_i + D) \cdot (J_{N-1}^+ \cdot [(P_i^+)^T + (J_i \cdot (P_i^+)^T)])$. Considere $s \in S$, dizemos que o estado s é fracamente simétrico Berge estável (WSMB) para o DM i se, e somente se,*

$$M_i^{WSMB}(s, s) = 0. \quad (4.11)$$

Prova: $M_i^{WSMB}(s, s)$ é equivalente a

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{s_1 \in S} (J_i + D)(s, s_1) \cdot (J_{N-\{i\}}^+ \cdot [(P_i^+)^T + (J_i \cdot (P_i^+)^T)])(s_1, s) \right) \\
&= \left(\sum_{s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}} \left(\sum_{s_2 \in S} J_{N-\{i\}}^+(s_1, s_2) \cdot [(P_i^+)^T + (J_i \cdot (P_i^+)^T)](s_2, s) \right) \right) \\
&= \left(\sum_{s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}} \left(\sum_{s_2 \in R_{N-\{i\}}^+(s_1)} P_i^+(s, s_2) + (J_i \cdot (P_i^+)^T)(s_2, s) \right) \right) \\
&= \left(\sum_{s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}} \left(\sum_{s_2 \in R_{N-\{i\}}^+(s_1)} P_i^+(s, s_2) + \left(\sum_{s_3 \in S} J_i(s_2, s_3) \cdot P_i^+(s, s_3) \right) \right) \right).
\end{aligned}$$

Então 4.11 é válida se, e somente se,

$$P_i^+(s, s_2) = 0 \text{ e } P_i^+(s, s_3) = 0, \forall s_3 \in R_i(s_2), \forall s_2 \in R_{N-\{i\}}^+(s_1) \text{ e } \forall s_1 \in R_i(s) \cup \{s\}. \quad (4.12)$$

Isso implica que, para cada estado $s_1 \in R_i(s) \cup s$ e para cada estado $s_2 \in R_{N-\{i\}}^+(s_1)$, $s \succeq_i s_2$ e, para cada estado $s_3 \in R_i(s_2)$, $s \succeq_i s_3$. \square

4.2 Aplicação

Para ilustrar a ideia dos conceitos Berge adaptados ao cenário GMCR para n -DMs propostos neste artigo, consideramos a aplicação na disputa de contaminação da água subterrânea em Elmira (HIPEL *et al.*, 1993). Elmira, uma pequena cidade agrícola conhecida por seu festival anual de xarope de bordo, está localizada no sudoeste de Ontário, Canadá. Em 1989, o *Ministry of Environment* / Ministério do Meio Ambiente (MoE) de Ontário testou o aquífero subterrâneo que fornecia água para Elmira e determinou que ele estava poluído por N-nitrosodimetilamina (NDMA). Uma fabricante local de pesticidas e borracha, a *Uniroyal Chemical Ltd.* (UR), foi identificada como a principal suspeita, uma vez que o NDMA era um subproduto de seu processo de produção. Uma ordem de controle foi emitida pelo MoE exigindo que a UR tomasse medidas para remediar a contaminação. A UR apelou imediatamente da ordem de controle. O *Local Government* / Governo Local (LG), que consiste no Município Regional de Waterloo e no Município de Woolwich, ficou do lado do MoE, mas procurou aconselhamento jurídico de consultores independentes sobre seu possível papel na resolução deste conflito. A respeito do caso, em (HIPEL *et al.*, 1993) foi estabelecido um modelo de grafo para este conflito e em (XU *et al.*, 2018) foi estabelecido a resolução de acordo com os conceitos de estabilidades usuais através do uso das expressões matriciais. De acordo com (HIPEL *et al.*, 1993), o conflito é composto por três DMs e cinco opções, da seguinte forma: a única opção do Ministério do Meio

Ambiente (MoE) é modificar (modificar a ordem de controle para torná-la mais aceitável para a UR). A fabricante Uniroyal Chemical Ltd. (UR) pode atrasar (atrasar o processo de apelação), aceitar (aceitar a ordem de controle em sua forma atual) ou abandonar (abandonar a operação de Elmira). A única opção do Governo Local (LG) é insistir (insistir na aplicação da ordem de controle original).

Dadas as cinco opções do modelo, existem 32 estados matematicamente possíveis, mas muitos deles são inviáveis por uma variedade de razões. Os nove estados possíveis estão listados na Figura 6 (em que o número "1" indica que uma opção é selecionada pelo DM que a controla, o número "0" significa que a opção não foi escolhida e um traço "-" indica que a entrada pode ser "1" ou "0"). O modelo de grafo integrado do conflito de Elmira é mostrado na Figura 7, em que os rótulos nos arcos indicam o DM controlando o movimento e as informações de preferência sobre os estados estão abaixo do grafo integrado.

Figura 6 – Opções e estados viáveis para o conflito de Elmira

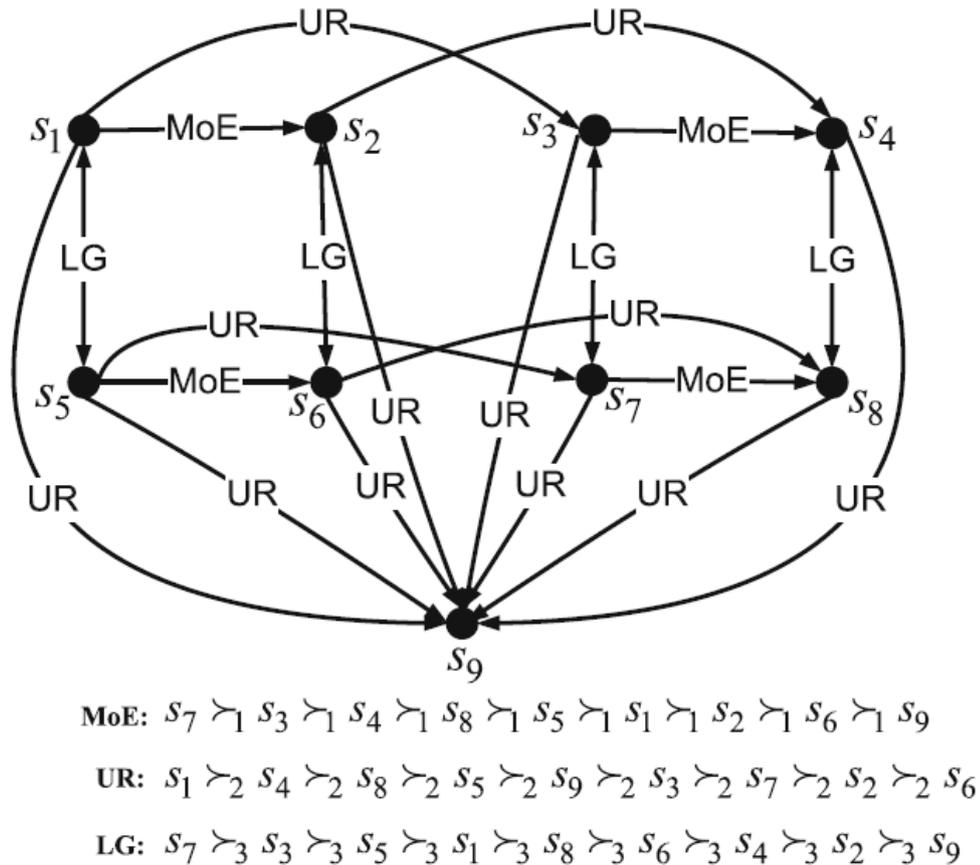
DECISORES	OPÇÕES	ESTADOS								
		S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9
MoE	1. MODIFICAR	0	1	0	1	0	1	0	1	-
	UR									
UR	2. ATRASAR	1	1	0	0	1	1	0	0	-
	3. ACEITAR	0	0	1	1	0	0	1	1	-
	4. ABANDONAR	0	0	0	0	0	0	0	0	1
LG	5. INSISTIR	0	0	0	0	1	1	1	1	-

Fonte: (XU *et al.*, 2018) (Adaptado)

A partir disso, podemos utilizar as definições dadas no Capítulo 2 com relação às matrizes J_i , J_i^+ , P_i^+ e $P_i^{-,=}$ e determinar as estabilidades usuais e Berge dos estados através de operações entre essas matrizes dentro do GMCR. Devido ao grande número de estados, fizemos a utilização de ferramenta computacional para analisar todos os estados de acordo com cada um dos os conceitos usuais e de estabilidade Berge. Para análise do conflito, utilizamos um algoritmo, que se encontra no Apêndice A, implementado no software R i386 3.6.0 e executado sobre a versão R x64 3.6.0 em um hardware Intel(R) Core(TM) i3-6100U (2.30 GHz) - 4 GB de RAM. Os resultados foram obtidos quase que instantaneamente e os equilíbrios resultantes estão listados nas Tabelas 5 e 6.

De forma geral, o estado s_9 (em que o DM UR opta por abandonar a operação em Elmira) é o único que é equilíbrio de acordo com todos os 11 conceitos de solução das

Figura 7 – Modelo de grafo integrado para o conflito de Elmira



Fonte: (XU *et al.*, 2018) (Adaptado)

Tabela 5 – Análise de equilíbrio de acordo com os conceitos usuais de estabilidade aplicados ao conflito de Elmira

Estados	Estabilidades Usuais - Equilíbrio				
	NASH	GMR	SMR	SEQ	SSEQ
s_1		✓	✓		
s_2					
s_3					
s_4		✓	✓		
s_5	✓	✓	✓	✓	✓
s_6					
s_7					
s_8	✓	✓	✓	✓	✓
s_9	✓	✓	✓	✓	✓

estabilidades (usuais e Berge). Note que o estado s_9 é um estado acessível apenas para o DM UR e é o menos preferido pelos DM MoE e pelo DM LG, o que o torna altamente indesejável como uma solução final para o conflito. Os estados s_4 e s_8 são equilíbrios de acordo com apenas 8 dos 11 conceitos. Um detalhe importante é que a única diferença entre os estados s_4 (em que o DM MoE opta por modificar a ordem de controle e o DM UR opta por aceitar a ordem de controle

Tabela 6 – Análise de equilíbrio de acordo com os conceitos de estabilidade Berge e suas adaptações aplicados ao conflito de Elmira

Estados	Estabilidades Berge - Equilíbrio					
	Berge	WB	MB	WMB	SMB	WSMB
s_1						
s_2						
s_3						
s_4	✓	✓	✓	✓	✓	✓
s_5		✓				
s_6						
s_7		✓		✓		✓
s_8		✓		✓		✓
s_9	✓	✓	✓	✓	✓	✓

atual) e s_8 (em que o DM MoE opta por modificar a ordem de controle, o DM UR opta por aceitar a ordem de controle atual e o DM LG opta por insistir na aplicação da ordem de controle original) é a opção do DM LG em insistir ou não na aplicação da ordem de controle original, sendo que o estado s_8 é um equilíbrio para todas as estabilidades usuais e que o estado s_4 é um equilíbrio para todas as estabilidades Berge. O estado s_5 (em que DM UR opta por atrasar o processo de apelação e o DM LG opta por insistir na aplicação da ordem de controle original) é equilíbrio de acordo com todos os 5 conceitos de solução das estabilidades usuais, porém só é equilíbrio para a estabilidade Berge-Fraca entre as variantes de estabilidade Berge. Os demais estados do conflito são equilíbrios de acordo com um número menor de estabilidades usuais e Berge.

5 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

Nesta dissertação, propomos expressões matriciais para determinar as estabilidades Berge de estados no modelo de grafos para resolução de conflitos com 2 ou mais DMs. Para isso, estudamos os conceitos necessários referentes ao GMCR e às estabilidades Berge para formulação do problema. O GMCR é um modelo matemático flexível, útil e tem sido amplamente usado para modelar, analisar e compreender conflitos estratégicos do mundo real. Além disso, o GMCR facilita o desenvolvimento de algoritmos aprimorados para avaliar as estabilidades de estados e implementar novos conceitos de estabilidade. No entanto, os procedimentos para identificar estados estáveis com base nos conceitos de solução não são fáceis de codificar devido à natureza das representações lógicas, especialmente em modelos de conflito complexos com muitos estados viáveis. Diante disso, a utilização de representações matriciais dos conceitos de solução trata este problema com eficiência, pois facilita o desenvolvimento de algoritmos aprimorados para avaliar a estabilidade dos estados e tem a vantagem de fácil cálculo e implementação por computador, em comparação com a representação lógica dos conceitos da solução. Analisamos as resoluções das representações lógicas e matriciais dos conceitos de estabilidades usuais em exemplo teórico de jogo na literatura (Conflito do Biscoito).

Fornecer expressões algébricas explícitas que podem ser adaptadas para outros conceitos de solução é uma outra vantagem importante para a utilização de representações matriciais. Nesse caso, surgiu a motivação de expandir a utilização dessa ferramenta para a análise do conceito de equilíbrio de Berge, um conceito de solução usado em Teoria dos Jogos útil para a avaliação de conflitos estratégicos entre DMs com comportamentos altruístas e que atuam de forma colaborativa, ou seja, atuam de forma a maximizar os ganhos individuais de seus oponentes, esperando que os outros também se comportem de forma similar, de modo a que todos saiam beneficiados deste comportamento altruísta. Analisamos as resoluções das representações lógicas dos conceitos de estabilidades Berge no Conflito do Biscoito.

Demonstramos a equivalência entre as noções lógicas de estabilidade Berge e as representações matriciais propostas. Ademais, analisamos as resoluções de dois exemplos teóricos de jogos na literatura (conflito de valores para o caso com dois decisores e conflito de Elmira para o caso com n decisores) para ilustrar aplicações das expressões matriciais propostas. Para isso, foi necessário codificar os métodos matriciais para as estabilidades Berge (os algoritmos foram implementados em linguagem de programação R, usando o RStudio). Os códigos computacionais implementados estão no apêndice A apresentando as análises para um DM focal.

Os algoritmos para os demais decisores são análogos, alterando apenas as matrizes de entrada. As representações matriciais propostas apresentaram desempenho satisfatório para cálculo dos equilíbrios de Berge e os resultados foram obtidos quase que instantaneamente. Mostramos que expressões matriciais podem ser empregadas para analisar e determinar as estabilidades Berge dos estados no modelo de grafos para resolução de conflitos e que representações lógicas podem não ser necessárias.

Em trabalhos futuros, pretendemos:

- (a) Generalizar estes conceitos para diferentes estruturas de preferências;
- (b) Estudar a complexidade computacional das representações matriciais para determinar as estabilidades Berge de um estado;
- (c) Estender as análises das estabilidades Berge para problemas de coalizão.

REFERÊNCIAS

- ABALO, K.; KOSTREVA, M. Some existence theorems of nash and berge equilibria. **Applied Mathematics Letters**, [United States], v. 17, n. 5, p. 569–573, 2004.
- BERGE, C. **Théorie générale des jeux à n personnes**. Paris: Gauthier-Villars, 1957. (Mémorial des sciences mathématiques, 138).
- COLMAN, A. M.; KORNER, T. W.; MUSY, O.; TAZDAT, T. Mutual support in games: some properties of berge equilibria. **Journal of Mathematical Psychology**, [United States], v. 55, n. 2, p. 166–175, 2011.
- COURTOIS, P.; NESSAH, R.; TAZDAT, T. How to play games? Nash versus Berge behaviour rules. **Economics and Philosophy**, [United Kingdom], v. 31, n. 1, p. 123–139, 2015.
- FANG, L.; HIPEL, K. W.; KILGOUR, D. M. **Interactive decision making: the graph model for conflict resolution**. [S.l.]: John Wiley Sons, 1993.
- FRASER, N. M.; HIPEL, K. W. Solving complex conflicts. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybern**, [United States], v. 9, n. 12, p. 805–817, 1979.
- FRASER, N. M.; HIPEL, K. W. **Conflict analysis: models and resolution**. New York: Wiley, 1984.
- HIPEL, K. W.; FANG, L.; KILGOUR, D. M.; HAIGHT, M. Environmental conflict resolution using the graph model. **Proceedings of IEEE Systems Man and Cybernetics Conference**, [United States], IEEE, v. 1, p. 153–158, oct 1993.
- HIPEL, K. W.; OBEIDI, A. Trade versus the environment: strategic settlement from a systems engineering perspective. **Systems Engineering**, [United States], v. 8, n. 3, p. 211–233, 2005.
- HOWARD, N. **Paradoxes of rationality: theory of metagames and political behavior**. Cambridge, MA: MIT Press, 1971.
- KILGOUR, D. M.; HIPEL, K. W.; FANG, L. The graph model for conflicts. **Automatica**, [United Kingdom], v. 23, n. 1, p. 41–55, 1987.
- LARBANI, M.; NESSAH, R. A note on the existence of Berge and Berge–Nash equilibria. **Mathematical Social Sciences**, [Netherlands], v. 55, n. 2, p. 258–271, 2008.
- LARBANI, M.; ZHUKOVSKII, V. I. Berge equilibrium in normal form static games: a literature review. **Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.**, [s.l.], v. 49, p. 80–110, 2017.
- MADANI, K.; HIPEL, K. Non-cooperative stability definitions for strategic analysis of generic water resources conflicts. **Water Resources Management**, [Netherlands], v. 25, n. 8, p. 1949–1977, 2011.
- MÉRÓ, L. The prisoner’s dilemma. **Moral calculations: game theory, Logic, and human frailty**, Springer, New York, NY, p. 28–47, 1998.
- NASH, J. F. Equilibrium points in n-person games. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, [United States], v. 36, n. 1, p. 48–49, 1950.

NEUMANN, J. V.; MORGENSTERN, O. **Theory of games and economic behavior**. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1944.

OSBORNE, M.; RUBINSTEIN, A. **A course in game theory**. Cambridge, Mass: MIT Press, c1994.

RÊGO, L.; VIEIRA, G. Matrix representation of solution concepts in the graph model for conflict resolution with probabilistic preferences. *In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON GROUP DECISION AND NEGOCIATION LETTERS*, **15**, Warsaw, Poland. [S. l.: s. n.], v. 1, p. 239–244, 2015.

RÊGO, L. C.; VIEIRA, G. I. A. Symmetric sequential stability in the graph model for conflict resolution with multiple decision makers. **Group Decision and Negotiation**, [Netherlands], v. 26, p. 775–792, 2017.

RÊGO, L. C.; VIEIRA, G. I. A. Matrix representation of solution concepts in the graph model for conflict resolution with probabilistic preferences and multiple decision makers. **Group Decision and Negotiation**, [Netherlands], v. 30, p. 697–717, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10726-021-09729-y>. Acesso em: 16 jul. 2021.

ROBBINS, S. **Organization theory: structures, designs and applications**. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 7th ed, 1990.

VIEIRA, G. I. A. **Advances in the graph model for conflict resolution** 2017. 164 f. Tese (Doutorado em Estatística) – Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Estatística, Universidade Federal de Pernambuco, Pernambuco, 2017.

VIEIRA, G. I. A.; RÊGO, L. C. Berge stabilities in the graph model for conflict resolution. *In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON GROUP DECISION AND NEGOTIATION LETTERS*, **18**, Nanjing, China. [Proceedings], [S.l.:s.n.], v. 1, p. 126–130, 2018.

VIEIRA, G. I. A.; RÊGO, L. C. Berge solution concepts in the graph model for conflict resolution. **Group Decision and Negotiation**, [Netherlands], v. 29, p. 103–125, 2020.

WU, N.; KILGOUR, D. M.; HIPEL, K. W.; XU, Y. Matrix representation of stability definitions for the graph model for conflict resolution with reciprocal preference relations. **Fuzzy Sets and Systems**, [Netherlands], v. 409, p. 32–54, apr 2021. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165011420300737>. Acesso em: 25 fev. 2020.

XU, H.; HIPEL, K.; KILGOUR, D. Matrix representation of conflicts with two decision-makers. *In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON SYSTEMS, MAN AND CYBERNETICS*, 2007, Montreal, QC. [Proceedings], [United States], IEEE, v. 1, p. 1764–1769, 2007.

XU, H.; HIPEL, K. W.; KILGOUR, D. M. Matrix representation of solution concepts in multiple-decision-maker graph models. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part A: Systems and Humans**, [United States], v. 39, n. 1, p. 96–108, Jan 2009.

XU, H.; HIPEL, K. W.; KILGOUR, D. M.; FANG, L. **Conflict resolution using the graph model: strategic interactions in competition and cooperation**. Waterloo, ON: Dept. Syst. Design Eng., Univ. Waterloo, 2018. v. 153.

XU, H.; KILGOUR, D. M.; HIPEL, K. W. An algebraic approach to calculating stabilities in the graph model with strength of preference. *In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON SYSTEMS, MAN AND CYBERNETICS*, 2009, San Antonio, Texas. [**Proceedings**], [United States], IEEE, p. 1539–1544, Oct 2009.

XU, H.; KILGOUR, D. M.; HIPEL, K. W. An integrated algebraic approach to conflict resolution with three-level preference. **Applied Mathematics and Computation**, v. 216, n. 3, p. 693–707, 2010.

XU, H.; KILGOUR, D. M.; HIPEL, K. W. Matrix representation of conflict resolution in multiple-decision-maker graph models with preference uncertainty. **Group Decision and Negotiation**, v. 20, n. 6, p. 755–779, 2011.

XU, H.; KILGOUR, D. M.; HIPEL, K. W.; KEMKES, G. Using matrices to link conflict evolution and resolution in a graph model. **European Journal of Operational Research**, v. 207, n. 1, p. 318–329, 2010. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221710002249>. Acesso em: 17 ago. 2019.

XU, H.; LI, K. W.; HIPEL, K. W.; KILGOUR, D. M. A matrix approach to status quo analysis in the graph model for conflict resolution. **Applied Mathematics and Computation**, v. 212, n. 2, p. 470–480, 2009. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300309001799>. Acesso em: 17 ago. 2019.

XU, H.; LI, N.; HAN, X.; ZHANG, P. An algebraic approach to conflict resolution with hybrid preference in two decision maker graph models. *In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON SYSTEMS, MAN AND CYBERNETICS*, 2011, Anchorage, AK. [**Proceedings**], [United States], IEEE, p. 2725–2730, Oct 2011.

XU, H.; ZHAO, J.; KE, G. Y.; ALI, S. Matrix representation of consensus and dissent stabilities in the graph model for conflict resolution. **Discrete Applied Mathematics**, [Netherlands], v. 259, p. 205–217, Apr 2019.

ZHUKOVSKII, V. I. Some problems of nonantagonistic differential games. **Mathematical Methods of Operations Research**, [Bulgaria], p. 103–195, 1985.

APÊNDICE A – CÓDIGOS COMPUTACIONAIS

Código-fonte 1 – Estabilidades Berge para 2 decisores

```

1 N = sqrt(length(EJ1)) #Numero de estados
2 D = diag(rep(1,N)) #Matriz diagonal
3 J1 = matrix(data = EJ1, nrow = N, ncol = N, byrow = TRUE) #Matriz de
   acessibilidade do DM 1
4 J1plus = matrix(data = EJ1plus, nrow = N, ncol = N, byrow = TRUE) #
   Matriz de melhorias unilaterais do DM 1
5 J2 = matrix(data = EJ2, nrow = N, ncol = N, byrow = TRUE) #Matriz de
   acessibilidade do DM 2
6 J2plus = matrix(data = EJ2plus, nrow = N, ncol = N, byrow = TRUE) #
   Matriz de melhorias unilaterais do DM 2
7 P1plus = matrix(data = EP1plus, nrow = N, ncol = N, byrow = TRUE) #
   Matriz de relacao de preferencia estrita do DM 1
8 P2plus = matrix(data = EP2plus, nrow = N, ncol = N, byrow = TRUE) #
   Matriz de relacao de preferencia estrita do DM 2
9 E = matrix(1, nrow = N, ncol = N, byrow = TRUE) #Matriz de uns
10
11 #Teorema 3.1.1 - Berge
12 MBerge1 = J2 %*% t(P1plus)
13 Berge1 = diag(MBerge1)
14 #Teorema 3.1.2 - WB
15 MWB1 = J2plus %*% t(P1plus)
16 WB1 = diag(MWB1)
17 #Teorema 3.1.3 - MB
18 MMB1 = (J1 + D) %*% (J2 %*% t(P1plus))
19 MB1 = diag(MMB1)
20 #Teorema 3.1.4 - SMB
21 MSMB1 = (J1 + D) %*% (J2 %*% (t(P1plus) + (J1 %*% t(P1plus))))
22 SMB1 = diag(MSMB1)
23 #Teorema 3.1.5 - WMB
24 MWMB1 = (J1 + D) %*% (J2plus %*% t(P1plus))
25 WMB1 = diag(MWMB1)
26 #Teorema 3.1.6 - WSMB
27 MWSMB1 = (J1 + D) %*% (J2plus %*% (t(P1plus) + (J1 %*% t(P1plus))))
28 WSMB1 = diag(MWSMB1)
29

```

```

30 #Acoplar os resultados lado a lado
31 est = cbind(Berge1,WB1,MB1,SMB1,WMB1,WSMB1)

```

Código-fonte 2 – Estabilidades Berge para 3 decisores

```

1 N = sqrt(length(EJ1)) #Numero de estados
2 D = diag(rep(1,N)) #Matriz diagonal
3 J1 = matrix(data = EJ1, nrow = N, ncol = N, byrow = TRUE) #Matriz de
   acessibilidade do DM 1
4 J1plus = matrix(data = EJ1plus, nrow = N, ncol = N, byrow = TRUE) #
   Matriz de melhorias unilaterais do DM 1
5 J2 = matrix(data = EJ2, nrow = N, ncol = N, byrow = TRUE) #Matriz de
   acessibilidade do DM 2
6 J2plus = matrix(data = EJ2plus, nrow = N, ncol = N, byrow = TRUE) #
   Matriz de melhorias unilaterais do DM 2
7 J3 = matrix(data = EJ3, nrow = N, ncol = N, byrow = TRUE) #Matriz de
   acessibilidade do DM 3
8 J3plus = matrix(data = EJ3plus, nrow = N, ncol = N, byrow = TRUE) #
   Matriz de melhorias unilaterais do DM 3
9 P1plus = matrix(data = EP1plus, nrow = N, ncol = N, byrow = TRUE) #
   Matriz de relacao de preferencia estrita do DM 1
10 P2plus = matrix(data = EP2plus, nrow = N, ncol = N, byrow = TRUE) #
   Matriz de relacao de preferencia estrita do DM 2
11 P3plus = matrix(data = EP3plus, nrow = N, ncol = N, byrow = TRUE) #
   Matriz de relacao de preferencia estrita do DM 3
12 E = matrix(1, nrow = N, ncol = N, byrow = TRUE) #Matriz de uns
13
14 #Teorema 4.1.1 - Berge
15 BergeN1 <- function(J2, J3, P1plus)
16 {
17   M2 <- matrix(NA, nrow=N, ncol=N, byrow=TRUE)
18   M3 <- matrix(NA, nrow=N, ncol=N, byrow=TRUE)
19   M23 <- matrix(NA, nrow=N, ncol=N, byrow=TRUE) #Matriz de
   acessibilidade a coalizao dos DMs 2 e 3
20   delta <- sum(!J2)+sum(!J3)
21   M2 <- J2
22   M3 <- J3
23   M23 <- sign(M2+M3)

```



```

60 MWBN1 <- diag(M23%*%t(P1plus))
61 return(MWBN1)
62 }
63 WBN1(J2plus, J3plus, P1plus) #Mostrar resultados para WB
64 #Teorema 4.1.3 - MB
65 MBN1 <- function(J1, J2, J3, P1plus)
66 {
67   M2 <- matrix(NA, nrow=N, ncol=N, byrow=TRUE)
68   M3 <- matrix(NA, nrow=N, ncol=N, byrow=TRUE)
69   M23 <- matrix(NA, nrow=N, ncol=N, byrow=TRUE) #Matriz de
       acessibilidade a coalizao dos DMs 2 e 3
70   delta <- sum(!J2)+sum(!J3)
71   M2 <- J2
72   M3 <- J3
73   M23 <- sign(M2+M3)
74   for(t in 1:delta)
75   {
76     MT2 <- M2
77     M2 <- sign(J2%*% M3)
78     M3 <- sign(J3%*% MT2)
79     M23 <- sign(M23 + (sign(M2 + M3)))
80   }
81   for(j in 1:N)
82   {
83     M23[j, j] <- 0 #Zerar diagonal principal para garantir que a coalizao
       nao retorne ao estado inicial
84   }
85   MMBN1 <- diag((J1 + D) %*% (M23 %*% t(P1plus)))
86   return(MMBN1)
87 }
88 MBN1(J1, J2, J3, P1plus) #Mostrar resultados para MB
89 #Teorema 4.1.4 - SMB
90 SMBN1 <- function(J1, J2, J3, P1plus)
91 {
92   M2 <- matrix(NA, nrow=N, ncol=N, byrow=TRUE)
93   M3 <- matrix(NA, nrow=N, ncol=N, byrow=TRUE)
94   M23 <- matrix(NA, nrow=N, ncol=N, byrow=TRUE) #Matriz de
       acessibilidade a coalizao dos DMs 2 e 3
95   delta <- sum(!J2)+sum(!J3)

```

```

96 M2 <- J2
97 M3 <- J3
98 M23 <- sign(M2+M3)
99 for(t in 1:delta)
100 {
101   MT2 <- M2
102   M2 <- sign(J2%% M3)
103   M3 <- sign(J3%% MT2)
104   M23 <- sign(M23 + (sign(M2 + M3)))
105 }
106 for(j in 1:N)
107 {
108   M23[j,j] <- 0 #Zerar diagonal principal para garantir que a coalizao
      nao retorne ao estado inicial
109 }
110 MSMBN1 <- diag((J1 + D) %% (M23 %% (t(P1plus) + (J1 %% t(P1plus))))))
111 return(MSMBN1)
112 }
113 SMBN1(J1 ,J2 ,J3 ,P1plus) #Mostrar resultados para SMB
114 #Teorema 4.1.5 - WMB
115 WMBN1 <- function(J1 , J2plus , J3plus , P1plus)
116 {
117   M2 <- matrix(NA, nrow=N, ncol=N, byrow=TRUE)
118   M3 <- matrix(NA, nrow=N, ncol=N, byrow=TRUE)
119   M23 <- matrix(NA, nrow=N, ncol=N, byrow=TRUE) #Matriz de
      acessibilidade a coalizao dos DMs 2 e 3
120   delta <- sum(!J2plus)+sum(!J3plus)
121   M2 <- J2plus
122   M3 <- J3plus
123   M23 <- sign(M2+M3)
124   for(t in 1:delta)
125   {
126     MT2 <- M2
127     M2 <- sign(J2plus%% M3)
128     M3 <- sign(J3plus%% MT2)
129     M23 <- sign(M23 + (sign(M2 + M3)))
130   }
131   for(j in 1:N)
132   {

```

```

133     M23[j,j] <- 0 #Zerar diagonal principal para garantir que a coalizao
        nao retorne ao estado inicial
134   }
135   MWMBNI <- diag((J1 + D) %*% (M23 %*% t(P1plus)))
136   return(MWMBNI)
137 }
138 WMBNI(J1, J2plus, J3plus, P1plus) #Mostrar resultados para WMB
139 #Teorema 4.1.6 - WSMB
140 WSMBNI <- function(J1, J2plus, J3plus, P1plus)
141 {
142   M2 <- matrix(NA, nrow=N, ncol=N, byrow=TRUE)
143   M3 <- matrix(NA, nrow=N, ncol=N, byrow=TRUE)
144   M23 <- matrix(NA, nrow=N, ncol=N, byrow=TRUE) #Matriz de
        acessibilidade a coalizao dos DMs 2 e 3
145   delta <- sum(!J2plus)+sum(!J3plus)
146   M2 <- J2plus
147   M3 <- J3plus
148   M23 <- sign(M2+M3)
149   for(t in 1:delta)
150   {
151     MT2 <- M2
152     M2 <- sign(J2plus%*% M3)
153     M3 <- sign(J3plus%*% MT2)
154     M23 <- sign(M23 + (sign(M2 + M3)))
155   }
156   for(j in 1:N)
157   {
158     M23[j,j] <- 0 #Zerar diagonal principal para garantir que a coalizao
        nao retorne ao estado inicial
159   }
160   MWSMBNI <- diag((J1 + D) %*% (M23 %*% (t(P1plus) + (J1 %*% t(P1plus))))
        )
161   return(MWSMBNI)
162 }
163 WSMBNI(J1, J2plus, J3plus, P1plus) #Mostrar resultados para WSMB

```