UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
PÓS – GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

SUPERFÍCIES DE WEINGARTEN LINEARES EM $\mathbb{R}^3$

Michel Pinho Rebouças

Fortaleza
2007

Michel Pinho Rebouças

SUPERFÍCIES DE WEINGARTEN LINEARES EM $\mathbb{R}^3$

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto

Fortaleza

2007

Rebouças, Michel Pinho

R241s Superfícies de Weingarten Lineares em $\mathbb{R}^3$

Michel Pinho Rebouças. - Fortaleza: 2007.

$108f$.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto.

1. Geometria Diferencial.

CDD 516.36.

Esta folha será substituida pela ata.

À minha família.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço minha família, por tudo que fez por mim durante este período de pós – graduação.

Agradeço também ao professor Antonio Caminha Muniz Neto, meu orientador, pelo excelente acompanhamento e orientação dados durante a elaboração desta dissertação. Deve – se observar que a paciência do professor Caminha foi algo fundamental na relação orientador – orientando.

Sou grato aos professores Jorge Herbert Soares de Lira e Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante, pelas diversas correções e sugestões que fizeram para a redação final deste trabalho. Também sou grato ao professor Jorge Herbert por ter esclarecido diversas dúvidas sobre o tema "Aplicações Harmônicas".

Agradeço ao professor José Antonio Galvez, da Universidad de Granada, Espanha, por um grande auxílio prestado com o Teorema 2.2 (veja início da prova do Teorema 2.2).

Sou eternamente grato a todos aqueles que foram meus professores na Universidade Estadual do Ceará e na Universidade Federal do Ceará, especialmente aos professores Antonio Gervásio Colares, Luquésio Petrola de Melo Jorge, João Montenegro de Miranda, Rui Benevides de Alencar Araripe e Manoel Azevedo pelas excelentes aulas e pelos diversos conselhos que ajudaram a direcionar o caminho universitário deste estudante.

À Andréa Costa Dantas, pela sua eficiência e grande paciência, meus sinceros agradecimentos.

Agradeço a Chiara Lima Costa pela paciência que teve durante a digitação deste trabalho.

Sou grato a todos os meus colegas de pós – graduação. Em especial, agradeço à Jânio Kléo de Sousa Castro, por seus ótimos conselhos, observações e por ter disposto parte de seu tempo para assistir a um ensaio da minha defesa de dissertação, dando valiosas sugestões para melhorar tal apresentação. Também sou grato aos colegas Valdenize, Wilker, Joserlan, Jonathan, Jobson, Elivaldo e Luís Farias.

A Capes e a Funcap, pelo apoio financeiro, meus sinceros agradecimentos.

E finalmente, agradeço a Deus, por tudo que fez por mim durante toda a minha vida.

“Faça as coisas o mais simples que você puder, mas não se restrinja as mais simples.”

Albert Einstein

Resumo

Nesta dissertação, estudaremos algumas propriedades das Superfícies de Weingarten Lineares em $\mathbb{R}^3$. Estas, são imersões de uma superfície abstrata S em $\mathbb{R}^3$, para as quais existem três números reais a, b e c, não todos nulos, satisfazendo $2aH(P) + bK(P) = c$ para todo $P \in S$, sendo H a curvatura média e K a curvatura Gaussiana de S, respectivamente.

Daremos uma estimativa para a altura de uma Superfície de Weingaten Linear Elíptica ($a^2 + bc > 0$), compacta, em relação a um plano. Também daremos uma estimativa para $2aH + bK$ em uma superfície de Weingarten linear compacta e em um gráfico compacto com bordo planar convexo.

Também, vamos provar o seguinte resultado: Seja S um disco topológico fechado e $\psi : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão linear de Weingarten satisfazendo $a^2+bc > 0$. Se a imagem do bordo de S, $\psi(\partial S)$, é uma linha de curvatura então $\psi(S)$ está contido em um plano ou numa esfera. Para provar este resultado, precisaremos do cálculo dos laplacianos de duas funções, em relação a uma métrica Riemanniana especial (Proposição 2.2) .

Sumário

Introdução

Esta dissertação consiste em um estudo interpretativo do artigo de pesquisa "Linear Weingarten Surfaces in $\mathbb{R}^3$". Tal artigo foi publicado em 2003, no número 138 do periódico Monatshefte für Mathematik, e tem como autores José Antonio Gálvez, Antonio Martínez e Francisco Milán, da Universidad de Granada, Espanha.

Nesta dissertação, iremos estudar algumas propriedades das superfícies de Weingarten lineares em $\mathbb{R}^3$. Estas, por definição, são imersões de uma superfície S (abstrata, orientável, possivelmente com bordo) em $\mathbb{R}^3$ tais que uma combinação linear entre a curvatura média H e a curvatura Gaussiana K é constante em S. Isto é, existem três números reais a, b, c não todos nulos, tais que $2aH(P)+bK(P) = c$, $\forall P \in S$. As propriedades dessas superfícies que iremos estudar estão relacionadas, por exemplo, com estimativas para a altura e para as curvaturas, que a imersão deve satisfazer (no caso de S ser compacta) . Além disso, daremos uma "representação harmônica" para uma superfície de Weingarten linear.

Esta dissertação possui quatro capí tulos. Os capítulos 1 e 3 possuem material auxiliar (Gradiente, Divergente, Laplaciano, Variação de uma curva, Princípio da Tangência, ...) que visa facilitar a leitura deste trabalho.

No capítulo 2, abordaremos as superfícies de Weingarten lineares elípticas, que são aquelas satisfazendo $2aH + bK = c$, com $a^2 + bc > 0$. Faremos o cálculo dos laplacianos, em relação a uma métrica riemanniana especial, das funções -

coordenada da imersão e da Aplicação de Gauss. Este resultado será utilizado para mostrar que se considerarmos em S a estrutura conforme induzida por essa métrica especial, então a Aplicação de Gauss é harmônica. Escreveremos então a imersão em função de um difeomorfismo local harmônico sobre a esfera unitária : a Aplicação de Gauss. Usaremos também o cálculo dos laplacianos para mostrar o seguinte resultado: *Seja S um disco topológico fechado e $\psi : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$* uma imersão de Weingarten linear elíptica. Se $\psi(\partial S)$ é uma linha de curvatura então $\psi(S)$ é umbílica.

No capítulo IV serão estendidos alguns resultados de Heinz [9] e Rosenberg - Earp [19]. Será dada uma estimativa para a altura de uma superfície de Weingarten linear elíptica compacta, em relação um plano. Também serão dadas estimativas para $2aH + bK$ em uma superfície de Weingarten linear compacta com bordo planar e para gráficos compactos com bordo planar. Nestes dois casos, vamos supor que o bordo é convexo.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, faremos a apresentação de alguns fatos que serão utilizados nos capítulos 2 e 4 desta dissertação.

Na seção 1.1 abordaremos os conceitos de gradiente, divergente e Laplaciano, em uma variedade Riemanniana. A fórmula do Laplaciano em um sistema de coordenadas (Proposição 1.10) nos será especialmente útil para demonstrar um dos resultados do capítulo 2. Para a seção 1.1, nos serviu de referência um conjunto de notas chamado Tópicos de Análise em Variedades, de Antonio Caminha Muniz Neto.

Na seção 1.2, abordamos o conceito de Variação de uma Curva e enunciamos, sem prova, um resultado conhecido como Fórmula da Primeira Variação da Energia de uma Curva, que nos será útil na demonstração de um dos resultados do capí tulo 4.

Na seção 1.3 faremos um pequeno comentário sobre o tema Aplicações Harmônicas, com o objetivo de compreender o enunciado e a demonstração de um dos resultados do capítulo 2.

1.1 Gradiente, Divergente e Laplaciano

Nesta seção, M^n representa uma variedade Riemanniana de dimensão n, munida de uma métrica Riemanniana $g = \langle , \rangle$ e de uma conexão Riemanniana ∇.

Definição 1.1 *Seja $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞. O gradiente de f é o campo vetorial ∇f em M tal que $\langle \nabla f, X\rangle = X(f)$, para todo campo vetorial X em M.*

Antes de enunciar uma Proposição relativa ao gradiente, lembramos que um referencial móvel em um aberto $U \subset M$ é uma coleção $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de campos em U tal que $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$, em todo ponto de U e para todos $1 \leq i, j \leq n$.

Proposição 1.1 *Sejam $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ e $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ um referencial móvel em um aberto $U \subset M$. Então $\nabla f = \sum_{i=1}^{n} e_i(f)e_i$ em U.*

Demonstração :

Seja X um campo vetorial em M e suponha que $X = \sum_{i=1}^{n} a_i(f)e_i$ em U. Veja que

$$X(f) = \sum_i a_i e_i(f) = \left\langle \sum_i a_i e_i, \sum_j e_j(f)e_j \right\rangle = \left\langle X, \sum_j e_j(f)e_j \right\rangle.$$

Como X é um campo qualquer em M, segue que $\nabla f = \sum_j e_j(f)e_j$.

■

A seguinte Proposição mostra que o gradiente tem um comportamento semelhante ao da derivada usual.

Proposição 1.2 *Se f, $g : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções de classe C^∞, então*

a) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$*;*

b) $\nabla(f \cdot g) = g \cdot \nabla f + f \cdot \nabla g$*.*

Demonstração :

Seja X um campo vetorial qualquer em M. Então

$$\begin{aligned} \langle \nabla(f+g), X \rangle &= X(f+g) = X(f) + X(g) = \\ &= \langle \nabla f, X \rangle + \langle \nabla g, X \rangle = \langle \nabla f + \nabla g, X \rangle. \end{aligned}$$

Assim, $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$. Também,

$$\begin{aligned} \langle \nabla(f \cdot g), X \rangle &= X(f \cdot g) = f \cdot X(g) + g \cdot X(f) \\ &= f \cdot \langle \nabla g, X \rangle + g \langle \nabla f, X \rangle = \langle f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f, X \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, $\nabla(f \cdot g) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$.

■

Proposição 1.3 *Seja $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ e sejam $P \in M$ e $v \in T_P M$. Se $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ é uma curva C^∞ tal que $c(0) = P$ e $c'(0) = v$ então*

$$\langle \nabla f, v \rangle_P = \frac{d}{dt}(f \circ c)(t)\Big|_{t=0}.$$

Demonstração :

Seja V uma extensão local de v. Então

$$\langle \nabla f, v \rangle_P = \langle \nabla f, V \rangle_P = (V(f))(P) = \frac{d}{dt}(f \circ c)(t)\Big|_{t=0}.$$

■

Observação 1.1 *Seja $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle$. Na Proposição abaixo, g^{ij} denota um elemento genérico da matriz (g^{ij}) cuja inversa é a matriz (g_{ij}).*

Proposição 1.4 *Sejam $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ e $U \subset M$ uma vizinhança coordenada , com campos coordenados $\partial_1, \ldots, \partial_n$. Então o gradiente de f é dado em U pela relação*

$$\nabla f = \sum_k \left(\sum_{lk} g^{kl} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_l} \right) \partial_k.$$

Vamos provar a Proposição.

Demonstração :

Veja que

$$\frac{\partial f}{\partial x_l} = \langle \nabla f, \partial_l \rangle = \left\langle \sum_j a_j \partial_j, \partial_l \right\rangle = \sum_j a_j \langle \partial_j, \partial_l \rangle = \sum_j a_j g_{jl}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_l g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x_l} &= \sum_l g^{kl} \left(\sum_j a_j g_{jl} \right) = \sum_{j,l} a_j g^{kl} \cdot g_{lj} = \\ &= \sum_j a_j \left(\sum_l g^{kl} g_{lj} \right) = \sum_j a_j \cdot \delta_{kj} = a_k. \end{aligned}$$

∎

Definição 1.2 *Seja X um campo vetorial em M^n. A divergência de X é a função C^∞ $divX : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$(divX)(P) = tr\{v \longmapsto (\nabla_v X)(P)\},$$

onde $v \in T_P M$, e tr denota o traço do operador linear entre chaves.

A Proposição a seguir nos dar uma expressão para a divergência de um campo vetorial em termos de um referencial móvel.

Proposição 1.5 *Sejam X um campo vetorial C^∞ na variedade M^n e $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ um referencial móvel em um aberto $U \subset M$. Se $X = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ em U, então*

$$divX = \sum_{i=1}^{n} \{e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle\}$$

em U.

Demonstração :

Veja que $divX = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle$.

Agora note que $e_i \langle X, e_i \rangle = \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle + \langle X, \nabla_{e_i} e_i \rangle$. Logo,

$$divX = \sum_{i=1}^{n} \{e_i \langle X, e_i \rangle - \langle X, \nabla_{e_i} e_i \rangle\} = \sum_{i=1}^{n} \{e_i(a_i) - \langle X, \nabla_{e_i} e_i \rangle\}.$$

∎

Proposição 1.6 *Sejam X, Y campos vetoriais em M^n e $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função C^∞. Então:*

a) $div(X + Y) = divX + divY$,

b) $div(f \cdot X) = f \cdot divX + \langle \nabla f, X \rangle$.

Demonstração :

Sejam $P \in M^n$ e $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ um referencial móvel em um aberto $U \subset M$. Suponha que em U, $X = \sum_i a_i \cdot e_i$ e $Y = \sum_i b_i \cdot e_i$. Pela Proposição anterior vale em P o seguinte

$$\begin{aligned} div(X+Y) &= \sum_{i=1}^{n} \{e_i(a_i+b_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X+Y \rangle\} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \{e_i(a_i) + e_i(b_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle - \langle \nabla_{e_i} e_i, Y \rangle\} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \{e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle\} + \sum_{i=1}^{n} \{e_i(b_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, Y \rangle\} \\ &= divX + divY. \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} div(f \cdot X) &= div \left(\sum_{i=1}^{n} f \cdot a_i e_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \{e_i(f \cdot a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, fX \rangle\} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \{f \cdot e_i(a_i) + a_i \cdot e_i(f) - f \cdot \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle\} \\ &= f \cdot \sum_{i=1}^{n} \{e_i a_i - \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle\} + \sum_{i=1}^{n} a_i e_i(f) \\ &= f \cdot divX + \langle X, \nabla f \rangle . \end{aligned}$$

■

Proposição 1.7 *Seja X um campo vetorial em M^n e seja $U \subset M$ uma vizinhança coordenada, com campos coordenados $\partial_1, \ldots, \partial_n$. Se $X = \sum_i a_i \partial_i$ em U então a divergência de X é dada por*

$$divX = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i \cdot \sqrt{g}),$$

onde $g = det(g_{ij})$.

Observação 1.2 *Veja a prova desta Proposição em [17].*

Definição 1.3 *Seja* $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^∞. *O Laplaciano de* f *é a função* $\Delta f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$\Delta f = div(\nabla f).$$

Proposição 1.8 *Seja* $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^∞ *e seja* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *um referencial móvel em um aberto* $U \subset M$. *Então*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \{e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i) f\}.$$

Demonstração :

Veja que $\nabla f = \sum_{i=1}^{n} e_i(f) e_i$ em U. Como $\Delta f = div(\nabla f)$ segue da Proposição 1.5 que

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \{e_i(e_i(f)) - \langle \nabla_{e_i} e_i, \nabla f\rangle\} = \sum_{i=1}^{n} \{e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i) f\}.$$

■

Proposição 1.9 *Sejam* f, $g : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *funções* C^∞. *Então*

$$\Delta(f \cdot g) = g\Delta f + f\Delta g + 2\left\langle \nabla f, \nabla g\right\rangle.$$

Demonstração :

Veja que $\nabla(f \cdot g) = g \cdot \nabla f + f \cdot \nabla g$. Daí

$$\begin{aligned}
\Delta(f \cdot g) &= div(\nabla(f \cdot g)) = \\
&= div(g \cdot \nabla f + f \cdot \nabla g) = div(g\nabla f) + div(f \cdot \nabla g) \\
&= gdiv(\nabla f) + \langle \nabla g, \nabla f\rangle + fdiv(\nabla g) + \langle \nabla f, \nabla g\rangle \\
&= g \cdot \Delta f + f\Delta g + 2\left\langle \nabla f, \nabla g\right\rangle
\end{aligned}$$

■

Proposição 1.10 *Se $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função C^∞ e $U \subset M$ é uma vizinhança coordenada, com campos coordenados $\partial_1, \ldots, \partial_n$, então o Laplaciano de f é dado em U por*

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g^{ij} \sqrt{g} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \right).$$

Demonstração :

Seja $\nabla f = \sum_i a_i \cdot \partial_i$, onde $a_i = \sum_j g^{ij} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}$ (Veja Proposição 1.4).

Assim, pela Proposição 1.7, temos

$$\begin{aligned} \Delta f &= div(\nabla f) = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i \sqrt{g}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{g} \cdot \sum_j g^{ij} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g^{ij} \cdot \sqrt{g} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \right). \end{aligned}$$

■

1.2 Variação de uma Curva

Como na seção anterior, aqui M denota uma variedade Riemanniana, com métrica Riemanniana $g = \langle , \rangle$ e conexão Riemanniana ∇.

Definição 1.4 *Seja $\alpha : [0, a] \longrightarrow M$ uma curva diferenciável por partes na va - riedade M. Uma variação de α é uma aplicação contínua*

$$f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, a] \longrightarrow M$$

satisfazendo o seguinte :

a) $f(0, t) = \alpha(t) \quad \forall t \in [0, a],$

b) *existe uma partição $P : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{K+1} = a$, de $[0, a]$, tal que f restrita a cada $(-\varepsilon, \varepsilon) \times (t_i, t_{i+1})$, $i = 0, \ldots, K$, é diferenciável.*

Dizemos que a variação é própria quando $f(s, 0) = \alpha(0)$ e $f(s, a) = \alpha(a)$, $\forall s \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Quando f é diferenciável, dizemos que a variação é *diferenciável*.

Para cada $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a curva parametrizada $f_s : [0, a] \longrightarrow M$ definida por $f_s(t) = f(s, t)$ é chamada uma *curva da variação*. Note que uma variação é própria quando as curvas f_s têm o mesmo ponto inicial $\alpha(0)$ e o mesmo ponto final $\alpha(a)$.

A curva parametrizada diferenciável $f_t : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$, dada por $f_t(s) = f(s, t)$ é chamada uma *curva transversal da variação*. O vetor velocidade de uma curva transversal f_t em $s = 0$, que denotaremos por $V(t) = \dfrac{\partial f}{\partial s}(0, t)$, é um campo vetorial diferenciável por partes ao longo de α. Este campo é chamado *campo variacional de f*.

A seguinte Proposição não será provada neste trabalho. Sua demonstração pode ser encontrada na referência [2].

Proposição 1.11 *Seja V um campo, diferenciável por partes, ao longo de uma curva diferenciável por partes $\alpha : [0, a] \longrightarrow M$. Então, existe uma variação $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, a] \longrightarrow M$ de α, tal que V é o campo variacional de f. Além disso, se $V(0) = V(a) = 0$, é possível escolher f como uma variação própria.*

Dada uma variação $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, a] \longrightarrow M$ de uma curva diferenciável por partes $\alpha : [0, a] \longrightarrow M$, vamos denotar por $\dfrac{\partial f}{\partial t}(s, t_o)$, o vetor velocidade da curva f_s em $t = t_o$. Considere agora as funções

$$L : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad E : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$$

definidas por

$$L(s) = \int_0^a \left| \frac{\partial f}{\partial t}(s,t) \right| dt \quad \text{e} \quad E(s) = \int_0^a \left| \frac{\partial f}{\partial t}(s,t) \right|^2 dt$$

Definição 1.5 *Seja $\alpha : [0,a] \longrightarrow M$ uma curva. Os números*

$$L(\alpha) = \int_0^a \left| \frac{d\alpha}{dt} \right| dt \quad e \quad E(\alpha) = \int_0^a \left| \frac{d\alpha}{dt} \right|^2 dt,$$

são chamados de comprimento e energia da curva α, respectivamente.

Proposição 1.12 *Seja $\alpha : [0,a] \longrightarrow M$ uma curva e sejam*

$$L(\alpha) = \int_0^a \left| \frac{d\alpha}{dt} \right| dt \quad e \quad E(\alpha) = \int_0^a \left| \frac{d\alpha}{dt} \right|^2 dt.$$

Então, $L(\alpha)^2 \leq aE(\alpha)$. A igualdade ocorre se, e somente se, $\left| \frac{d\alpha}{dt} \right|$ é constante.

Demonstração :

Basta fazer $g \equiv 1$ e $h = \left| \frac{d\alpha}{dt} \right|$ na desigualdade de Schwarz

$$\left(\int_0^a g \cdot h dt \right)^2 \leq \int_0^a g^2 dt \cdot \int_0^a h^2 dt.$$

Daí

$$\left(\int_0^a \left| \frac{d\alpha}{dt} \right| dt \right)^2 \leq \int_0^a dt \cdot \int_0^a \left| \frac{d\alpha}{dt} \right|^2 dt,$$

isto é,

$$L(\alpha)^2 \leq aE(\alpha).$$

■

Proposição 1.13 (Fórmula da Primeira Variação da Energia de uma Curva) *Sejam $\alpha : [0,a] \longrightarrow M$ uma curva diferenciável por partes e $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0,a] \longrightarrow M$ uma variação de α. Se $E : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ é a energia de f então*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}E'(0) &= -\int_0^a \left\langle V(t), \frac{D}{dt}\frac{d\alpha}{dt}(t) \right\rangle dt - \sum_{i=1}^{k} \left\langle V(t), \frac{d\alpha}{dt}(t_i^+) - \frac{d\alpha}{dt}(t_i^-) \right\rangle \\ &\quad - \left\langle V(0), \frac{d\alpha}{dt}(0) \right\rangle + \left\langle V(a), \frac{d\alpha}{dt}(a) \right\rangle, \end{aligned}$$

sendo V o campo variacional de f e

$$\frac{d\alpha}{dt}(t_i^+) = \lim_{\substack{t \to t_i \\ t > t_i}} \frac{d\alpha}{dt} \qquad e \qquad \frac{d\alpha}{dt}(t_i^-) = \lim_{\substack{t \to t_i \\ t < t_i}} \frac{d\alpha}{dt}.$$

Veja a prova desta Proposição na referência [2].

1.3 Um comentário sobre Aplicações Harmônicas

Sejam S_1, $S_2 \subset \mathbb{R}^3$ superfícies, possivelmente com bordo, e $f : S_1 \longrightarrow S_2$ uma aplicação diferenciável. Definimos a energia de f por

$$E(f) := \frac{1}{2} \int_{S_1} |df_x|^2 \, dS_1$$

onde $|df_x|^2 = |df_x(e_1)|^2 + |df_x(e_2)|^2$, sendo que $\{e_1, e_2\}$ é uma base ortonormal de T_xS_1. Pode–se mostrar que $|df_x|^2$ não depende da base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de T_xS_1.

Definição 1.6 *Sejam S_1, $S_2 \subset \mathbb{R}^3$ superfícies, possivelmente com bordo, e $f : S_1 \longrightarrow S_2$ uma aplicação diferenciável. Uma variação própria de f é uma aplicação*

$$F : S_1 \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S_2$$

tal que

i) $F(x, 0) = f(x)$

ii) $F(x, s) = f(x) \quad \forall x \in \partial S_1$.

Para cada $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ seja $f_s(x) = F(x, s)$. Em particular $f_0 = f$. A energia da aplicação f_s será denotada por $E(s)$. Assim

$$E(s) = E(f_s) = \frac{1}{2} \int_{S_1} |(df_s)_x|^2 \, dS_1.$$

Definição 1.7 *Sejam S_1, $S_2 \subset \mathbb{R}^3$ superfícies, possivelmente com bordo, e $f : S_1 \longrightarrow S_2$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que f é harmônica quando $E'(0) = 0$ para toda variação própria de f.*

Em outras palavras, dizemos que $f : S_1 \longrightarrow S_2$ é harmônica quando f é ponto crítico do funcional energia, para toda variação própria de f.

Agora, sejam (u, v) parâmetros conformes em S_1, isto é,

$$\langle X_u, X_u\rangle = \langle X_v, X_v\rangle = \lambda \quad \text{e} \quad \langle X_u, X_v\rangle = 0,$$

onde X é uma parametrização de uma vizinhança aberta de S_1 e λ é uma função positiva.

Note que

$$\left\langle \frac{X_u}{\sqrt{\lambda}}, \frac{X_u}{\sqrt{\lambda}} \right\rangle = \left\langle \frac{X_v}{\sqrt{\lambda}}, \frac{X_v}{\sqrt{\lambda}} \right\rangle = 1 \quad \text{e} \quad \left\langle \frac{X_u}{\sqrt{\lambda}}, \frac{X_v}{\sqrt{\lambda}} \right\rangle = 0.$$

Daí, $\left\{ \frac{X_u}{\sqrt{\lambda}}, \frac{X_v}{\sqrt{\lambda}} \right\}$ é base ortonormal de $T_x S_1$. Logo,

$$\begin{aligned}
E(s) &= \frac{1}{2} \int_{S_1} \left[\left\langle df_s\left(\frac{X_u}{\sqrt{\lambda}}\right), df_s\left(\frac{X_u}{\sqrt{\lambda}}\right) \right\rangle + \left\langle df_s\left(\frac{X_v}{\sqrt{\lambda}}\right), df_s\left(\frac{X_v}{\sqrt{\lambda}}\right) \right\rangle \right] dS_1 \\
&= \frac{1}{2} \int_{S_1} \frac{1}{\lambda} \left[\langle df_s(X_u), df_s(X_u)\rangle + \langle df_s(X_v), df_s(X_v)\rangle \right] dS_1 \\
&= \frac{1}{2} \int_{S_1} \left[\langle df_s(X_u), df_s(X_u)\rangle + \langle df_s(X_v), df_s(X_v)\rangle \right] du\, dv
\end{aligned}$$

já que $dS_1 = \lambda\, du\, dv$. Nas igualdades acima, estamos escrevendo $(df_s)_x$ como df_s.

Como

$$df_s(X_u) = \frac{\partial f_s}{\partial u} \quad \text{e} \quad df_s(X_v) = \frac{\partial f_s}{\partial v},$$

segue que

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dE}{ds}\right|_{s=0} &= \int_{S_1} \left[\left\langle \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial f_s}{\partial u}, \frac{\partial f_s}{\partial u} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial f_s}{\partial v}, \frac{\partial f_s}{\partial v} \right\rangle \right] du\, dv \\
&= \int_{S_1} \left[\left\langle \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial f_s}{\partial s}, \frac{\partial f_s}{\partial u} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial f_s}{\partial s}, \frac{\partial f_s}{\partial v} \right\rangle \right] du\, dv.
\end{aligned}$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial u}\left\langle \frac{\partial f_s}{\partial s}, \frac{\partial f_s}{\partial u}\right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial f_s}{\partial s}, \frac{\partial f_s}{\partial u}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial f_s}{\partial s}, \frac{\partial^2 f_s}{\partial u^2}\right\rangle$$

e

$$\frac{\partial}{\partial v}\left\langle \frac{\partial f_s}{\partial s}, \frac{\partial f_s}{\partial v}\right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial f_s}{\partial s}, \frac{\partial f_s}{\partial v}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial f_s}{\partial s}, \frac{\partial^2 f_s}{\partial v^2}\right\rangle,$$

segue que

$$\begin{aligned} \frac{dE}{ds}\Big|_{s=0} &= \int_{S_1}\Big[\frac{\partial}{\partial u}\left\langle \frac{\partial f_s}{\partial s}, \frac{\partial f_s}{\partial u}\right\rangle + \frac{\partial}{\partial v}\left\langle \frac{\partial f_s}{\partial s}, \frac{\partial f_s}{\partial v}\right\rangle - \\ &\quad -\left\langle \frac{\partial f_s}{\partial s}, \frac{\partial^2 f_s}{\partial u^2}\right\rangle - \left\langle \frac{\partial f_s}{\partial s}, \frac{\partial^2 f_s}{\partial v^2}\right\rangle\Big]du\, dv \end{aligned}$$

Sendo $h = \frac{\partial f_s}{\partial s}\Big|_{s=0}$ e como $f_0 = f$, temos

$$\begin{aligned} \frac{dE}{ds}\Big|_{s=0} &= \int_{S_1}\frac{1}{\lambda}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left\langle h, \frac{\partial f}{\partial u}\right\rangle + \frac{\partial}{\partial v}\left\langle h, \frac{\partial f}{\partial v}\right\rangle\right]\lambda\, du\, dv - \\ &\quad - \int_{S_1}\left\langle h, \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)\right\rangle \lambda\, du\, dv \\ &= \int_{S_1}\frac{1}{\lambda}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left\langle h, \frac{\partial f}{\partial u}\right\rangle + \frac{\partial}{\partial v}\left\langle h, \frac{\partial f}{\partial v}\right\rangle\right] dS_1 - \\ &\quad - \int_{S_1}\left\langle h, \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)\right\rangle dS_1. \end{aligned}$$

Como a métrica $\langle , \rangle$ é tal que

$$\langle X_u, X_u\rangle = \langle X_v, X_v\rangle = \lambda \quad \text{ e } \quad \langle X_u, X_v\rangle = 0,$$

então sendo Δf o laplaciano de f em relação a essa métrica, temos que

$$\Delta f = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right).$$

(Veja a prova da Proposição 2.2, no Capítulo 2).

Logo,

$$\frac{dE}{ds}\Big|_{s=0} = \int_{S_1}\operatorname{div} h\, dS_1 - \int_{S_1}\langle h, \Delta f\rangle.$$

Pelo Teorema da Divergência,

$$\int_{S_1} \mathrm{div} h \, dS_1 = \int_{S_1} \langle h, V \rangle \, dS_1,$$

onde V denota a normal unitária exterior a S_1, ao longo de ∂S_1. Como F é uma variação própria, segue que $h \equiv 0$ em ∂S_1, donde $\displaystyle\int_{S_1} \mathrm{div}\ h \, dS_1 = 0$. Portanto,

$$\left.\frac{dE}{ds}\right|_{s=0} = -\int_{S_1} \langle h, \Delta f \rangle \, dS_1. \tag{1.1}$$

Capítulo 2

Superfícies de Weingarten Lineares Elípticas

Neste capítulo, vamos abordar um caso particular de superfícies de Weingarten, as superfícies de Weingarten Lineares Elípticas. Vamos nos inspirar no trabalho [6].

Na Proposição 2.2, iremos calcular o Laplaciano de duas aplicações, ψ e η, em relação a uma métrica Riemanniana especial. As aplicaç ões $\psi : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $\eta : S \longrightarrow S^2$ são o que chamaremos futuramente de imersão ELW e aplicação de Gauss associada, respectivamente. A Proposição 2.2, que é um resultado puramente técnico, nos será útil para provar alguns resultados interessantes sobre superfí cies de Weingarten Lineares Elípticas (Veja Teoremas 2.1 e 2.2).

Vamos então dar início a nossa discussão.

Seja S uma superfície abstrata orientável, possivelmente com bordo, e $\psi : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão. Dado $P \in M$, como ψ é localmente um mergulho, podemos escolher um campo normal $N : V \longrightarrow S^2$, onde V é uma vizinhança de $\psi(P)$. Dizemos então que S possui um campo normal $N : S \longrightarrow S^2$ sendo que $N(P) = N(\psi(P))$. A aplicação N é chamada *Aplicação de Gauss* da imersão

$\psi : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

Feita a escolha de um campo normal em uma vizinhança V de $\psi(P)$, faz sentido falar na curvatura média H e na curvatura Gaussiana K de $\psi(S)$ nessa vizinhança. Diremos então que a curvatura média de S em $P \in S$ é a curvatura média de $\psi(S)$ em $\psi(P)$. Analogamente, diremos que a curvatura Gaussiana de S em $P \in S$ é a curvatura Gaussiana de $\psi(S)$ em $\psi(P)$. É importante ressaltar que os valores de K e H em S dependem da imersão $\psi : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

Dizemos que $\psi : S \to \mathbb{R}^3$ é uma *imersão linear de Weingarten* quando existe uma combinação linear entre a curvatura média e a curvatura Gaussiana de S, isto é, quando existem números reais a, b, c, não todos nulos, tais que

$$2aH(P) + bK(P) = c\,, \quad \forall P \in S.$$

Agora, vamos mostrar que a equação acima é uma EDP elíptica sobre S se, e somente se, $a^2 + bc > 0$. Quando $a^2 + bc > 0$ diremos que $\psi : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão de Weingarten linear elíptica, ou, abreviadamente, diremos que $\psi : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão ELW.

Proposição 2.1 *A equação $2aH + bK = c$ é elíptica se, e somente se, $a^2 + bc > 0$.*

Antes de provar esta Proposição, façamos uma observação.

Observação 2.1 *Sabemos que toda superfície imersa em $\mathbb{R}^3$ é localmente um gráfico. Suponha então que S é dada localmente por $f(x, y) = (x, y, z(x, y))$. Sejam $p = z_x$, $q = z_y$, $r = z_{xx}$, $s = z_{xy}$ e $t = z_{yy}$. Veja que: $f_x = (1, 0, p)$ e $f_y = (0, 1, q)$. Daí,*

$$E = \langle f_x, f_x\rangle = 1 + p^2 \quad , \quad F = \langle f_x, f_y\rangle = pq \quad , \quad G = \langle f_y, f_y\rangle = 1 + q^2.$$

Além disso,

$$f_x \wedge f_y = (1, 0, p) \wedge (0, 1, q) = (-p, -q, 1),$$

donde

$$N = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}(-p,-q,1),$$

e

$$f_{xx} = (0,0,r), f_{xy} = (0,0,s), f_{yy} = (0,0,t).$$

Logo,

$$\begin{aligned} e &= \langle N, f_{xx}\rangle = \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\ f = \langle N, f_{xy}\rangle = \frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \\ g &= \langle N, f_{yy}\rangle = \frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} = \frac{\dfrac{r\cdot t}{1+p^2+q^2} - \dfrac{s^2}{1+p^2+q^2}}{(1+p^2)(1+q^2)-p^2\cdot q^2} = \frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}$$

e

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\cdot\frac{eG-2fF+gE}{EG-F^2} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\dfrac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\cdot(1+q^2) - 2\cdot\dfrac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\cdot p\cdot q}{1+p^2+q^2} \\ &\quad +\frac{1}{2}\cdot\frac{\dfrac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\cdot(1+p^2)}{1+p^2+q^2} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{r(1+q^2)-2spq+t(1+p^2)}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Agora, vamos provar a Proposição.

Demonstração :

Suponha, sem perda de generalidade, que S é dada localmente por $f(x,y) = (x,y,z(x,y))$. Para S, temos que $U(K,H) = 2aH + bK - c = 0$. E usando as expressões para K e H dadas pela observação acima, temos que

$$\varphi(r,s,t,p,q) = 2a\cdot\frac{1}{2}\frac{r(1+q^2)-2spq+t(1+p^2)}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} + b\cdot\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2} - c = 0$$

onde $r = z_x$, $q = z_y$, $r = z_{xx}$, $s = z_{xy}$, e $t = z_{yy}$.

Assim, a relação de Weingarten $2aH + bK = c$ equivale a uma equação dife - rencial de segunda ordem para z, $\varphi(r, s, t, p, q) = 0$.

Agora, seja $P = 1 + p^2 + q^2$. Veja que

$$\varphi_r = U_K \cdot K_r + U_H \cdot H_r = U_K \cdot \frac{t}{P^2} + U_H \cdot \frac{1+q^2}{2P^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{1}{2}\varphi_s = \frac{1}{2}(U_K \cdot K_s + U_H \cdot H_s) = \frac{1}{2}\left(U_K \cdot \frac{-2s}{P^2} + U_H \cdot \frac{-2pq}{2P^{\frac{3}{2}}}\right) = U_K \cdot \frac{-s}{P^2} + U_H \cdot \frac{-pq}{2P^{\frac{3}{2}}}$$

$$\varphi_t = U_K \cdot K_t + U_H \cdot H_t = U_K \cdot \frac{r}{P^2} + U_H \cdot \frac{1+p^2}{2P^{\frac{3}{2}}}.$$

Assim, o discriminante D da equação $\varphi(r, s, t, p, q) = 0$ é dado por

$$\begin{aligned}
D &= \varphi_r \cdot \varphi_t - \frac{1}{4}\varphi_s^2 \\
&= \left(U_K \cdot \frac{t}{P^2} + U_H \cdot \frac{1+q^2}{2P^{\frac{3}{2}}}\right)\left(U_K \cdot \frac{r}{P^2} + U_H \cdot \frac{1+p^2}{2P^{\frac{3}{2}}}\right) - \\
&\quad - \left(U_K \cdot \frac{-s}{P^2} + U_H \cdot \frac{-pq}{2P^{\frac{3}{2}}}\right)^2 \\
&= U_K^2 \cdot \frac{tr}{P^4} + U_K \cdot U_H \cdot \frac{t}{P^2} \cdot \frac{1+p^2}{2P^{\frac{3}{2}}} + U_H \cdot U_K \cdot \frac{1+q^2}{2P^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{r}{P^2} + \\
&\quad + U_H^2 \cdot \frac{(1+q^2)(1+p^2)}{4P^3} - U_K^2 \cdot \frac{s^2}{P^4} - 2U_K U_H \cdot \frac{spq}{2P^2 P^{\frac{3}{2}}} - U_H^2 \cdot \frac{p^2q^2}{4P^3} \\
&= \frac{1}{p^2}\left[U_K^2 \cdot \frac{rt - s^2}{P^2} + U_K \cdot U_H \frac{t(1+p^2) + r(1+q^2) - 2spq}{2P^{\frac{3}{2}}} + \right. \\
&\quad \left. + U_H^2 \cdot \frac{(1+p^2)(1+q^2) - p^2q^2}{4P}\right] \\
&= \frac{1}{p^2}\left(U_K^2 \cdot K + U_K \cdot U_H \cdot H + \frac{U_H^2}{4}\right) \\
&= \frac{1}{p^2}\left(U_K \cdot K_2 + \frac{1}{2}U_H\right)\left(U_K \cdot K_1 + \frac{1}{2}U_H\right).
\end{aligned}$$

Sendo $W(K_1, K_2) = a(K_1 + K_2) + bK_1K_2 - c$ temos que

$$U(H, K) = W(K_1, K_2).$$

Daí,

$$W_{K_1} = U_H \cdot H_{K_1} + U_K \cdot K_{K_1} = U_H \cdot \frac{1}{2} + U_K \cdot K_2$$
$$W_{K_2} = U_H \cdot H_{K_2} + U_K \cdot K_{K_2} = U_H \cdot \frac{1}{2} + U_K \cdot K_1.$$

Logo,

$$\varphi_r \cdot \varphi_t - \frac{1}{4}\varphi_s^2 = \frac{1}{P^2} \cdot W_{K_1} \cdot W_{K_2}.$$

Para S temos que $W_{K_1} \cdot dK_1 + W_{K_2} \cdot dK_2 = 0$.

Daí,

$$\frac{W_{K_1}}{W_{K_2}} = -\frac{dK_2}{dK_1}.$$

Assim o sinal de $W_{K_1} \cdot W_{K_2}$ é o contrário do sinal de $\frac{dK_2}{dK_1}$.

Logo,

$$\frac{dK_2}{dK_1} < 0 \text{ se, e somente se, } \varphi_r \cdot \varphi_t - \frac{1}{4}\varphi_s^2 > 0.$$

Isto é,

$$\frac{dK_2}{dK_1} < 0 \text{ se, e somente se, } 2aH + bK = c \text{ é elíptica.}$$

Agora veja que

$$\begin{aligned} 2aH + bk = c \quad &\Leftrightarrow \quad a(K_1 + K_2) + bK_1K_2 = c \Leftrightarrow K_2(a + bK_1) = c - aK_1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad K_2 = \frac{c - aK_1}{a + bK_1}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{dK_2}{dK_1} = \frac{-a(a + bK_1) - (c - aK_1)b}{(a + bK_1)^2} = \frac{-a^2 - abK_1 + abK_1 - bc}{(a + bK_1)^2} = \frac{-(a^2 + bc)}{(a + bK_1)^2}.$$

Assim,

$$\frac{dK_2}{dK_1} < 0 \Leftrightarrow a^2 + bc > 0.$$

■

Exemplos de Imersões ELW

a) Superfícies com curvatura média constante

Seja S uma superfície com curvatura média constante H. Neste caso, tomamos $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$, $c = H$. Veja que

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot H(P) + 0 \cdot K(P) = H, \quad \forall P \in S \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0 \cdot H > 0.$$

b) Superfícies com curvatura Gaussiana constante e positiva.

Seja S uma superfíicie com curvatura Gaussiana constante e positiva K_o. Neste caso, tomamos $a = 0$, $b = 1$ e $c = K$. Veja que

$$2 \cdot 0 \cdot H(P) + 1 \cdot K(P) = K, \quad \forall P \in S \quad \text{e} \quad 0^2 + 1 \cdot K > 0.$$

Lema 2.1 *Seja $\psi : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão ELW que satisfaz $2aH + bK = c$. Então podemos escolher uma orientação $\eta : S \longrightarrow S^2$ para S e dois números reais α, β tais que*

$$2\alpha H + \beta K = \gamma \geq 0 \quad \textit{e} \quad \sigma = \alpha\langle d\psi, d\psi\rangle + \beta\langle d\psi, -d\eta\rangle$$

é uma métrica positiva definida em S.

Demonstração :

Se $c \geq 0$ tomamos $\alpha = a$ e $\beta = b$.

Se $c \leq 0$ tomamos $\alpha = -a$, $\beta = -b$ e $\gamma = -c$.

Agora sejam $N : S \longrightarrow S^2$ a aplicação de Gauss de S e $P \in S$. Como $-dN_p : T_PS \longrightarrow T_PS$ é uma aplicação linear auto-adjunta, existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de T_PS tal que $-dN_P(e_i) = \lambda_i(P)e_i$, $i = 1, 2$ onde $\lambda_1(P) \geq \lambda_2(P)$ são o máximo e o mínimo, respectivamente, da forma quadrática $Q(v) = \langle -dN_p(v), v\rangle$ restrita ao círculo unitário de T_PS. Assim, $\lambda_1(P) = K_1(P)$ e $\lambda_2(P) = K_2(P)$ são as curvaturas principais de S em P.

Logo, $dN_P(e_i) = -K_i(P)e_i$, $i = 1, 2$.

Sendo $\sigma = \alpha\langle d\psi, d\psi\rangle + \beta\langle d\psi, -dN\rangle$ temos:

$$\begin{aligned}
\sigma(e_1, e_1) \cdot \sigma(e_2, e_2) &= [\alpha\langle d\psi(e_1), d\psi(e_1)\rangle + \beta\langle d\psi(e_1), -dN(d\psi(e_1))\rangle] \cdot \\
&\quad \cdot[\alpha\langle d\psi(e_2), d\psi(e_2)\rangle + \beta\langle d\psi(e_2), -dN(d\psi(e_2))\rangle] \\
&= [\alpha + \beta\langle d\psi(e_1), K_1(P)d\psi(e_1)\rangle] \cdot \\
&\quad \cdot[\alpha + \beta\langle d\psi(e_2), K_2(P)d\psi(e_2)\rangle] \\
&= [\alpha + \beta K_1(P)][\alpha + \beta K_2(P)],
\end{aligned}$$

onde acima, utilizamos o fato de que $\langle d\psi(e_1), d\psi(e_1)\rangle = \langle d\psi(e_2), d\psi(e_2)\rangle = 1$.

Denotando $K_i(P)$ por K_i, $i = 1, 2$ temos:

$$\begin{aligned}
[\alpha + \beta K_1(P)][\alpha + \beta K_2(P)] &= \alpha^2 + \alpha\beta K_2 + \alpha\beta K_1 + \beta^2 K_1 K_2 \\
&= \alpha^2 + 2\alpha\beta H + \beta^2 K = \alpha^2 + \beta(2\alpha H + \beta K) \\
&= \alpha^2 + \beta\gamma = a^2 + bc > 0,
\end{aligned}$$

já que a imersão é elíptica.

Daí $\sigma(e_1, e_1) \cdot \sigma(e_2, e_2) > 0$

Além disso:

$$\begin{aligned}
\sigma(e_1, e_2)^2 &= [\alpha\langle d\psi(e_1), d\psi(e_2)\rangle + \beta\langle d\psi(e_1), -dN(d\psi(e_2))\rangle]^2 \\
&= [\beta\langle d\psi(e_1), K_2(P) \cdot d\psi(e_2)\rangle] = 0,
\end{aligned}$$

visto que $\langle d\psi(e_1), d\psi(e_2)\rangle = 0$.

Se $\sigma(e_1, e_1) > 0$ e $\sigma(e_2, e_2) > 0$ então a métrica σ é positiva definida.

De fato, se $v \in T_P S$, $v \neq 0$. Então

$$\begin{aligned}
\sigma(v, v) &= \sigma(xe_1 + ye_2, xe_1 + ye_2) \\
&= x^2\sigma(e_1, e_1) + y^2\sigma(e_2, e_2) - 2xy\sigma(e_1, e_2) \\
&= x^2\sigma(e_1, e_1) + y^2\sigma(e_2, e_2) > 0.
\end{aligned}$$

Neste caso, tome $\eta = N$.

Se $\sigma(e_1, e_1) < 0$ e $\sigma(e_2, e_2) < 0$ então a métrica σ é negativa definida. Neste caso tome $\eta = -N$. Agora, a superfície S passa a ter curvatura média $\widetilde{H} = -H$ e curvatura Gaussiana $\widetilde{K} = K$, onde H e K são as curvaturas média e Gaussiana de S relativas a orientação N, respectivamente.

Veja que:

$$\begin{aligned} 2\alpha H + \beta K = \gamma \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad 2(-\alpha)(-H) + \beta K = \gamma \geq 0 \\ &\Rightarrow \quad 2(-\alpha)\widetilde{H} + \beta\widetilde{K} = \gamma \geq 0. \end{aligned}$$

Seja $\widetilde{\sigma} = (-\alpha)\langle d\psi, d\psi\rangle + \beta\langle d\psi, -d(-N)\rangle$. Daí

$$\widetilde{\sigma} = (-\alpha)\langle d\psi, d\psi\rangle - \beta\langle d\psi, d(-N)\rangle = -[\alpha\langle d\psi, d\psi\rangle + \beta\langle d\psi, d(-N)\rangle] = -\sigma.$$

Assim, $\widetilde{\sigma}$ é positiva definida.

■

Observação 2.2 *Veja que $\sigma(e_1, e_1)$ tem sempre o mesmo sinal em S.*

De fato, suponha que existam P e Q em S tais que $\alpha + \beta K_1(P) > 0$ e $\alpha + \beta K_1(Q) < 0$. Como K_1 é contínua existe R em S tal que $\alpha + \beta K_1(R) = 0$, o que é absurdo.

Assim, de agora em diante, podemos supor que toda imersão ELW satisfaz o lema acima. Por conveniência, vamos introduzir uma nomenclatura. Vamos chamar a aplicação de Gauss η dada pelo lema acima de *aplicação de Gauss associada*.

Agora, vamos provar outro resultado.

Lema 2.2 *Seja $\psi : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão ELW satisfazendo $2\alpha H + \beta K = \gamma \geq 0$ com aplicação de Gauss associada η. Seja $P \in S$ um ponto com curvatura Gaussiana $K(P) > 0$. Então $\eta(P)$ é normal interior se, e somente se, $\alpha \geq 0$ ou $\beta \geq 0$.*

Demonstração :

($\Rightarrow$)

Suponha $\alpha < 0$ e $\beta < 0$. Como $K_1(P) > 0$ teríamos $\alpha + \beta K_1(P) < 0$, uma contradição. Logo $K_1(P) < 0$, donde $K_2(P) < 0$ já que $K(P) > 0$. Daí, $\eta(P)$ é normal exterior, um absurdo.

($\Leftarrow$)

Suponha que $\eta(P)$ não é normal interior. Assim, as curvaturas principais $K_1(P)$ e $K_2(P)$ são ambas negativas em P.

Sabemos que

$$[\alpha + \beta K_1(P)] \cdot [\alpha + \beta K_2(P)] = \alpha^2 + \beta\gamma > 0.$$

Logo,

$$\alpha + \beta K_2(P) = \frac{\alpha^2 + \beta \cdot \gamma}{\alpha + \beta K_1(P)} \Rightarrow K_2(P) = \frac{1}{\beta}\left[-\alpha + \frac{\alpha^2 + \beta \cdot \gamma}{\alpha + \beta K_1(P)}\right]$$

$$\Rightarrow K_2(P) = \frac{1}{\beta}\left[\frac{-\alpha^2 - \alpha\beta K_1(P) + \alpha^2 + \beta\gamma}{\alpha + \beta K_1(P)}\right] = \frac{\gamma - \alpha K_1(P)}{\alpha + \beta K_1(P)},$$

desde que $\beta \neq 0$. Como $K_2(P) < 0$ segue que $\dfrac{\gamma - \alpha K_1(P)}{\alpha + \beta K_1(P)} < 0$.

Além disso, como σ é positiva definida, temos que $\alpha + \beta K_1(P) > 0$. Logo, $\gamma - \alpha K_1(P) < 0$.

Como $\gamma \geq 0$ segue que $-\alpha K_1(P) < 0$. Logo, $\alpha K_1(P) > 0$ donde $\alpha < 0$.

Como $\alpha + \beta K_1(P) > 0$ e $\alpha < 0$ segue que $\beta K_1(P) > 0$. Logo $\beta < 0$. Assim $\alpha < 0$ e $\beta < 0$. Absurdo! Para estas conclusões estávamos supondo $\beta \neq 0$.

Agora suponha $\beta = 0$. Veja que:

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta K_1(P) \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad \alpha > 0 \\
2\alpha H + \beta K = \gamma > 0 \quad &\Rightarrow \quad 2\alpha H(P) \geq 0 \Rightarrow K_1(P) + K_2(P) \geq 0 \\
&\Rightarrow \quad K_1(P) > 0 \quad \text{e} \quad K_2(P) > 0 \\
&\Rightarrow \quad \eta(P) \ \text{ é normal interior.}
\end{aligned}$$

■

Antes de enunciarmos uma Proposição, façamos um pequeno comentário. Vimos anteriormente que a definição de Laplaciano é dada para funções $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$, isto é, dada uma função C^∞, $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$, o Laplaciano de f é a função $\Delta f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\Delta f = div(\nabla f)$. Na Proposição a seguir, a igualdade $\Delta^\sigma \psi = \dfrac{\gamma + \beta K}{\alpha^2 + \beta\gamma}\, \eta$ significa que $\Delta^\sigma \psi_i = \dfrac{\gamma + \beta K}{\alpha^2 + \beta\gamma}\, \eta_i$, $i = 1, 2, 3$, onde ψ_i, $i = 1, 2, 3$ é a i-ésima função coordenada de ψ, e η_i, $i = 1, 2, 3$ é a i-ésima função coordenada de η. Assim, a igualdade $\Delta^\sigma \psi = \dfrac{\gamma + \beta K}{\alpha^2 + \beta\gamma}\, \eta$ é um abuso de notação.

Proposição 2.2 *Seja $\psi : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão ELW satisfazendo $2\alpha H + \beta K = \gamma \geq 0$, com aplicação de Gauss associada η. Então:*

$$\begin{aligned} \Delta^\sigma \psi &= \frac{\gamma + \beta K}{\alpha^2 + \beta\gamma}\, \eta \\ \Delta^\sigma \eta &= 2\frac{\alpha K - \gamma H}{\alpha^2 + \beta\gamma}\, \eta \end{aligned}$$

onde Δ^σ denota o Laplaciano com respeito a métrica riemanniana σ.

Demonstração :

Sejam (u, v) parâmetros isotérmicos para a métrica σ, isto é, $\sigma = \lambda(du^2 + dv^2)$. Desde que

$$\langle d\psi, d\psi \rangle = E_1 du^2 + 2F_1 du\, dv + G_1 dv^2$$

e

$$\langle d\psi, -d\eta \rangle = E_2 du^2 + 2F_2 du\, dv + G_2 dv^2,$$

onde

$$E_1 = \langle \psi_u, \psi_u \rangle, F_1 = \langle \psi_u, \psi_v \rangle, G_1 = \langle \psi_v, \psi_v \rangle,$$

$$E_2 = \langle \psi_u, -\eta_u \rangle, F_2 = \langle \psi_u, -\eta_v \rangle, G_2 = \langle \psi_v, -\eta_v \rangle,$$

temos:

$$\begin{aligned}
\sigma &= \alpha\langle d\psi, d\psi\rangle + \beta\langle d\psi, -d\eta\rangle \\
&= \alpha(E_1du^2 + 2F_1du\,dv + G_1dv^2) + \beta(E_2du^2 + 2F_2du\,dv + G_2dv^2) \\
&= (\alpha E_1 + \beta E_2)du^2 + 2(\alpha F_1 + \beta F_2)du\,dv + (\alpha G_1 + \beta G_2)dv^2
\end{aligned}$$

Daí para os parâmetros isotérmicos (u, v) temos

$$\lambda = \alpha E_1 + \beta E_2 = \alpha G_1 + \beta G_2 \quad \text{e} \quad \alpha F_1 + \beta F_2 = 0.$$

Vamos denotar por $\wedge$ o produto vetorial usual em $\mathbb{R}^3$. Veja que

$$\{\eta(\psi(P)) \wedge \psi_u(P), \eta(\psi(P)) \wedge \psi_v(P)\}$$

é base de $T_{\psi(P)}\psi(S)$.

Veja a prova desta afirmação no Apêndice da demonstração.

Acima, podemos abusar da notação e dizer que $\{\eta(P)\wedge\psi_u(P), \eta(P)\wedge\psi_v(P)\}$ é base de T_PS.

Então, já que $\{\eta(P) \wedge \psi_u, \eta(P) \wedge \psi_v(P)\}$ é base de T_PS temos

$$\begin{aligned}
\alpha\psi_u - \beta\eta_u &= f_{11}\eta \wedge \psi_u + f_{12}\eta \wedge \psi_v \\
\alpha\psi_v - \beta\eta_v &= f_{21}\eta \wedge \psi_u + f_{22}\eta \wedge \psi_v
\end{aligned}$$

para certas funções $f_{11},\ f_{12},\ f_{21},\ f_{22} : S \longrightarrow \mathbb{R}$. Nas duas igualdades acima, omitimos o ponto P por simplicidade.

Vamos tomar o produto interno das duas igualdades acima por ψ_u e ψ_v. Temos quatros casos:

a)

$$\langle \alpha\psi_u - \beta\eta_u, \psi_u\rangle = f_{11}\ \langle \eta \wedge \psi_u, \psi_u\rangle + f_{12}\ \langle \eta \wedge \psi_v, \psi_u\rangle$$

$$\Rightarrow \alpha\ \langle \psi_u, \psi_u\rangle + \beta\ \langle \psi_u, -\eta_u\rangle = f_{12} \cdot det(\eta, \psi_v, \psi_u)$$

$$\Rightarrow \lambda = \sigma(\psi_u, \psi_u) = -f_{12} \cdot det(\psi_u, \psi_v, \eta) = -f_{12} \cdot \langle \psi_u \wedge \psi_v, \eta\rangle$$

$$\Rightarrow \lambda = -f_{12} \cdot |\psi_u \wedge \psi_v|$$

b)

$$\begin{aligned}
\langle \alpha \cdot \psi_u - \beta \eta_u, \psi_v \rangle &= f_{11} \langle \eta \wedge \psi_u, \psi_v \rangle + f_{12} \langle \eta \wedge \psi_v, \psi_v \rangle \\
&\Rightarrow \alpha \langle \psi_u, \psi_v \rangle + \beta \langle \psi_v, -\eta_u \rangle = f_{11} \cdot det(\eta, \psi_u, \psi_v) \\
&\Rightarrow \alpha \langle \psi_u, \psi_v \rangle + \beta \langle \psi_u, -\eta_v \rangle = f_{11} \cdot det(\psi_u, \psi_v, \eta) \\
&\Rightarrow 0 = \sigma(\psi_u, \psi_v) = f_{11} \cdot |\psi_u \wedge \psi_v| \Rightarrow f_{11} \equiv 0
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\langle \alpha \psi_v - \beta \eta_v, \psi_u \rangle &= f_{21} \langle \eta \wedge \psi_u, \psi_u \rangle + f_{22} \langle \eta \wedge \psi_v, \psi_u \rangle \\
&\Rightarrow \alpha \langle \psi_v, \psi_u \rangle + \beta \langle \psi_u, -\eta_v \rangle = f_{22} \cdot det(\eta, \psi_v, \psi_u) \\
&\Rightarrow \alpha \langle \psi_v, \psi_u \rangle + \beta \langle \psi_v, -\eta_u \rangle = -f_{22} \cdot det(\psi_u, \psi_v, \eta) \\
&\Rightarrow 0 = \sigma(\psi_v, \psi_u) = -f_{22} \cdot |\psi_u \wedge \psi_v| \Rightarrow f_{22} \equiv 0
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\langle \alpha \psi_v - \beta \eta_v, \psi_v \rangle &= f_{21} \langle \eta \wedge \psi_u, \psi_v \rangle + f_{22} \langle \eta \wedge \psi_v, \psi_v \rangle \\
&\Rightarrow \alpha \langle \psi_v, \psi_v \rangle + \beta \langle \psi_v, -\eta_v \rangle = f_{21} \cdot det(\eta, \psi_u, \psi_v) \\
&\Rightarrow \lambda = \sigma(\psi_v, \psi_v) = f_{21} \cdot det(\psi_u, \psi_v, \eta) = f_{21} \cdot |\psi_u \wedge \psi_v| \\
&\Rightarrow \lambda = f_{21} \cdot |\psi_u \wedge \psi_v|
\end{aligned}$$

Agora , veja que $|\psi_u \wedge \psi_v| = \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}$. Logo,

$$\alpha \psi_u - \beta \eta_u = f_{12} \eta \wedge \psi_v = \frac{-\lambda}{|\psi_u \wedge \psi_v|} \eta \wedge \psi_v = \frac{-\lambda}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}} \eta \wedge \psi_v$$

e

$$\alpha \psi_v - \beta \eta_v = f_{21} \eta \wedge \psi_u = \frac{\lambda}{|\psi_u \wedge \psi_v|} \eta \wedge \psi_u = \frac{\lambda}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}} \eta \wedge \psi_u.$$

A afirmação abaixo será provada no Apêndice da demonstração.

Afirmação 2.1 $\lambda^2 = (\alpha^2 + \beta\gamma) \cdot (E_1 G_1 - F_1^2)$

Segue da afirmação que

$$\lambda = \sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma} \cdot \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} \Rightarrow \frac{\lambda}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}} = \sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}$$

Como

$$\alpha\psi_u - \beta\eta_u = \frac{-\lambda}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}} \eta \wedge \psi_v \quad \text{e} \quad \alpha\psi_v - \beta\eta_v = \frac{\lambda}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}} \eta \wedge \psi_u$$

segue-se que

$$\alpha\psi_u - \beta\eta_u = -\sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}\, \eta \wedge \psi_v \quad \text{e} \quad \alpha\psi_v - \beta\eta_v = \sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}\, \eta \wedge \psi_u$$

Tomando o produto vetorial das duas igualdades acima por η, temos:

$$\begin{aligned} \alpha\psi_u \wedge \eta - \beta\eta_u \wedge \eta &= -\sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}\, (\eta \wedge \psi_v) \wedge \eta \\ &= -\sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}\, \left[\langle \eta, \eta \rangle \psi_v - \langle \psi_v, \eta \rangle \eta\right] \end{aligned}$$

Logo,

$$\alpha\psi_u \wedge \eta - \beta\eta_u \wedge \eta = -\sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}\, \psi_v$$

e similarmente,

$$\alpha\psi_v \wedge \eta - \beta\eta_v \wedge \eta = \sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma} \cdot \psi_u.$$

Assim, obtemos as duas equações

$$\begin{aligned} \alpha\psi_u \wedge \eta - \beta\eta_u \wedge \eta &= -\sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma} \cdot \psi_v \\ \alpha\psi_v \wedge \eta - \beta\eta_v \wedge \eta &= \sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma} \cdot \psi_u. \end{aligned}$$

Agora, vamos derivar a segunda equação em relação a u e a primeira com relação a v. Assim,

$$\alpha\psi_{vu} \wedge \eta + \alpha\psi_v \wedge \eta_u - \beta\eta_{vu} \wedge \eta - \beta\eta_v \wedge \eta_u = \sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}\, \psi_{uu}$$

$$\alpha\psi_{uv} \wedge \eta + \alpha\psi_u \wedge \eta_v - \beta\eta_{uv} \wedge \eta - \beta\eta_u \wedge \eta_v = -\sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}\, \psi_{vv}$$

$$\Rightarrow -\alpha\psi_{uv} \wedge \eta - \alpha\psi_u \wedge \eta_v + \beta\eta_{uv} \wedge \eta + \beta\eta_u \wedge \eta_v = \sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}\, \psi_{vv}$$

Logo,

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}\, (\psi_{uu} + \psi_{vv}) = \alpha \cdot (\psi_v \wedge \eta_u - \psi_u \wedge \eta_v) + \beta(\eta_u \wedge \eta_v - \eta_v \wedge \eta_u)$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}(\psi_{uu} + \psi_{vv}) &= \alpha \cdot 2H\psi_u \wedge \psi_v + 2\beta\eta_u \wedge \eta_v \\
&= 2\alpha H\psi_u \wedge \psi_v + 2\beta K\psi_u \wedge \psi_v \\
&= (2\alpha H + 2\beta K)\psi_u \wedge \psi_v \\
&= (2\alpha H + \beta K + \beta K)\psi_u \wedge \psi_v \\
&= (\gamma + \beta K)\psi_u \wedge \psi_v.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\psi_{uu} + \psi_{vv} = \frac{\gamma + \beta K}{\sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}} \cdot \psi_u \wedge \psi_v$$

Observação 2.3 *Acima, usamos que*

$$\psi_v \wedge \eta_u - \psi_u \wedge \eta_v = 2H\psi_u \wedge \psi_v \quad e \quad \eta_u \wedge \eta_v = K\psi_u \wedge \psi_v.$$

A prova destes fatos é um cálculo imediato.

Agora, temos que

$$\alpha\psi_u - \beta\eta_u = -\sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}\, \eta \wedge \psi_v$$

$$\alpha\psi_v - \beta\eta_v = \sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}\, \eta \wedge \psi_u$$

Vamos derivar a primeira igualdade em relação a u e a segunda igualdade em relação a v.

Temos:

$$\begin{aligned}
\alpha\psi_{uu} - \beta\eta_{uu} &= -\sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}\, \eta_u \wedge \psi_v - \sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}\, \eta \wedge \psi_{vu} \\
\alpha\psi_{vv} - \beta\eta_{vv} &= \sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}\, \eta_v \wedge \psi_u + \sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}\, \eta \wedge \psi_{uv}
\end{aligned}$$

Somando as duas igualdades temos

$$\begin{aligned}\alpha(\psi_{uu}+\psi_{vv})-\beta(\eta_{uu}+\eta_{vv}) &= \sqrt{\alpha^2+\beta\gamma}\,(\eta_v\wedge\psi_u-\eta_u\wedge\psi_v)\\ &= \sqrt{\alpha^2+\beta\gamma}\,(\psi_v\wedge\eta_u-\psi_u\wedge\eta_v)\\ &= \sqrt{\alpha^2+\beta\gamma}\cdot 2H\psi_u\wedge\psi_v\end{aligned}$$

Logo,

$$\alpha\cdot\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta\gamma}}\cdot\psi_u\wedge\psi_v-\beta(\eta_{uu}+\eta_{vv})=2H\sqrt{\alpha^2+\beta\gamma}\cdot\psi_u\wedge\psi_v$$

Logo,

$$\begin{aligned}\beta(\eta_{uu}+\eta_{vv}) &= \left(\alpha\cdot\frac{\gamma+\beta K}{\sqrt{\alpha^2+\beta\gamma}}-2H\sqrt{\alpha^2+\beta\gamma}\right)\psi_u\wedge\psi_v\\ &= \left(\frac{\alpha\gamma+\alpha\beta K-2H(\alpha^2+\beta\gamma)}{\sqrt{\alpha^2+\beta\gamma}}\right)\psi_u\wedge\psi_v\\ &= \left(\frac{\alpha\gamma+\alpha\beta K-\alpha(2\alpha H)-2H\beta\gamma)}{\sqrt{\alpha^2+\beta\gamma}}\right)\psi_u\wedge\psi_v\\ &= \left[\frac{\alpha\gamma+\alpha\beta K-\alpha(\gamma-\beta K)-2H\beta\gamma)}{\sqrt{\alpha^2+\beta\gamma}}\right]\psi_u\wedge\psi_v\\ &= \left[\frac{2\alpha\beta K-2H\beta\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta\gamma}}\right]\psi_u\wedge\psi_v.\end{aligned}$$

Assim, desde que $\beta\neq 0$ temos

$$\eta_{uu}+\eta_{vv}=2\frac{\alpha K-\gamma H}{\sqrt{\alpha^2+\beta\gamma}}\psi_u\wedge\psi_v.$$

O caso em que $\beta=0$ será analisado no Apêndice da demonstração.

Agora, vamos ao cálculo dos Laplacianos. Veja que

$$\Delta^\sigma\psi=\frac{1}{\sqrt{g}}\cdot\left[\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(g^{ij}\cdot\sqrt{g}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)\right].$$

Temos que $g_{ij}=\sigma(\psi_i,\psi_j)=\lambda\delta_{ij}$. Logo,

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

e

$$(g^{ij}) = \frac{1}{\lambda^2} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\Delta^\sigma \psi &= \frac{1}{\lambda}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda \cdot \frac{\partial}{\partial u}\right) + \frac{\partial \psi}{\partial v}\left(\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\lambda}(\psi_{uu} + \psi_{vv}) = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\gamma + \beta K}{\sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}} \cdot \psi_u \wedge \psi_v \\
&= \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\gamma + \beta K}{\sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}} \cdot |\psi_u \wedge \psi_v| \cdot \frac{\psi_u \wedge \psi_v}{|\psi_u \wedge \psi_v|} \\
&= \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\gamma + \beta K}{\sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}} \cdot \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} \cdot \eta \\
&= \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\gamma + \beta K}{\sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}} \cdot \frac{\lambda}{\sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}} \cdot \eta \\
&= \frac{\gamma + \beta K}{\alpha^2 + \beta\gamma} \cdot \eta.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\Delta^\sigma \eta &= \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \left[\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(g^{ij} \cdot \sqrt{g} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x_j}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\lambda}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda \cdot \eta_u\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda \cdot \eta_v\right)\right] \\
&= \frac{1}{\lambda}(\eta_{uu} + \eta_{vv}).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\Delta^\sigma \eta &= \frac{1}{\lambda} \cdot 2 \cdot \frac{\alpha K - \gamma H}{\sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}} \cdot \psi_u \wedge \psi_v \\
&= \frac{1}{\lambda} \cdot 2 \cdot \frac{\alpha K - \gamma H}{\sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}} \cdot |\psi_u \wedge \psi_v| \cdot \frac{\psi_u \wedge \psi_v}{|\psi_u \wedge \psi_v|} \\
&= \frac{1}{\lambda} \cdot 2 \cdot \frac{\alpha K - \gamma H}{\sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}} \cdot \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} \cdot \eta \\
&= \frac{1}{\lambda} \cdot 2 \cdot \frac{\alpha K - \gamma H}{\sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}} \cdot \frac{\lambda}{\sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}} \cdot \eta \\
&= 2 \cdot \frac{\alpha K - \gamma H}{\alpha^2 + \beta\gamma} \cdot \eta
\end{aligned}$$

■

Apêndice da Demonstração :

1) Afirmação 2.2 $\lambda^2 = (\alpha^2 + \beta\gamma) \cdot (E_1G_1 - F_1^2)$

Demonstração :

Veja que:

$$\begin{aligned}
\lambda^2 &= (\alpha E_1 + \beta E_2) \cdot (\alpha G_1 + \beta G_2) - (\alpha F_1 + \beta F_2)^2 \\
&= \alpha^2 E_1 G_1 + \alpha\beta E_1 G_2 + \alpha\beta E_2 G_1 + \beta^2 E_2 G_2 - \alpha^2 F_1^2 - 2\alpha\beta F_1 F_2 - \beta^2 F_2^2 \\
&= \alpha^2 (E_1G_1 - F_1^2) + \alpha\beta(E_1G_2 - 2F_1F_2 + E_2G_1) + \beta^2(E_2G_2 - F_2^2) \\
&= \alpha^2 (E_1G_1 - F_1^2) + \alpha \cdot \beta \cdot 2H(E_1G_1 - F_1^2) + \beta^2 \cdot K(E_1G_1 - F_1^2) \\
&= (\alpha^2 + \beta \cdot 2\alpha H + \beta \cdot \beta K)(E_1G_1 - F_1^2) \\
&= [\alpha^2 + \beta(2\alpha H + \beta K)](E_1G_1 - F_1^2) \\
&= (\alpha^2 + \beta\gamma)(E_1G_1 - F_1^2).
\end{aligned}$$

■

2) Afirmação 2.3 $\{\eta(P) \wedge \psi_u(P), \eta(P) \wedge \psi_v(P)\}$ *é base de* T_PS.

Demonstração :

Suponha, por absurdo, que exista $x \neq 0$ tal que

$$\eta \wedge \psi_u = x \cdot \eta \wedge \psi_v.$$

Veja que

$$\langle \eta \wedge \psi_u, \psi_u \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle \eta \wedge \psi_u, \psi_v \rangle = \langle x \cdot \eta \wedge \psi_v, \psi_v \rangle = 0$$

Logo, $\eta \wedge \psi_u$ é paralelo a η. Absurdo!

■

3) A análise do caso $\beta = 0$.

Inicialmente façamos algumas considerações antes do cálculo de $\Delta^{\sigma}\eta$ no caso em que $\beta = 0$.

Definição 2.1 *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície orientada e X, Y, Z campos de vetores em S. O operador de curvatura M é a correspondência*

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Definição 2.2 *Se S é orientada pelo campo normal N, o operador de Weingarten de S associado a N é a correspondência $A : \mathcal{X}(S) \longrightarrow \mathcal{X}(S)$ dada por $AX = -\overline{\nabla}_X N$.*

Definição 2.3 *Se S é orientada pelo campo N, e A é o operador de Weingarten associado a N, definimos a derivada covariante de A na direção de $X \in \mathcal{X}(S)$ como sendo o operador linear $\nabla_X A$ dado por :*

$$(\nabla_X A)Y = \nabla_X AY - A\nabla_X Y.$$

Proposição 2.3 *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície orientada pelo campo normal unitário N e A o operador de Weingarten associado a N. Sejam X, Y campos de vetores em S. Então:*

$$(\nabla_X A)Y = (\nabla_Y A)X.$$

Demonstração :

Suponha que $\nabla_X AY - A\nabla_X Y \neq \nabla_Y AX - A\nabla_Y X$. Daí:

$$\begin{aligned}
& \nabla_X AY - A\nabla_X Y \neq \nabla_Y AX - A\nabla_Y X \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\quad & \nabla_X AY - \nabla_Y AX \neq A\nabla_X Y - A\nabla_Y X \\
\Leftrightarrow\quad & \nabla_X AY - \nabla_Y AX \neq A[X,Y] \\
\Leftrightarrow\quad & \overline{\nabla}_X AY - \alpha(X,AY) - [\overline{\nabla}_Y AX - \alpha(Y,AX)] \neq A[X,Y] \\
\Leftrightarrow\quad & \overline{\nabla}_X AY - \alpha(X,AY) - \overline{\nabla}_Y AX + \alpha(Y,AX) \neq A[X,Y] \\
\Leftrightarrow\quad & -\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y N + \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X N - \langle X, AY\rangle N + \langle Y, AX\rangle N \neq -\overline{\nabla}_{[X,Y]} N \\
\Leftrightarrow\quad & \overline{R}(X,Y)N \neq 0,
\end{aligned}$$

onde $\overline{R}$ é o tensor curvatura de $\mathbb{R}^3$.

Absurdo.

Definição 2.4 *Sejam $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície orientada, X um campo de vetores em S e $\{e_1, e_2\}$ um referencial móvel em um aberto U de S. Definimos:*

$$w_{ij}(X) = \langle \nabla_X e_i, e_j \rangle \quad , \quad 1 \leq i, j \leq 2.$$

Note que $w_{11} = w_{22} = 0$ e $w_{12} = -w_{21}$.

Afirmação 2.4 *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície orientada pelo campo normal unitário N, e sejam A e H o operador de Weingarten associado a N e a função curvatura média de S relativa a N, respectivamente. Se $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é dada por $f(P) = \langle N(P), a\rangle$, $a \in \mathbb{R}^3$ fixo, então $\Delta f = -2\langle a, \nabla H\rangle - |A|^2 f$, onde $|A|^2 = tr(A^2)$.*

Demonstração :

Sendo X um campo de vetores em S, temos:

$$\begin{aligned}
X(f) &= X\langle N, a\rangle = \langle \overline{\nabla}_X N, a\rangle = -\langle AX, a\rangle = \\
&= -\langle AX, a^T\rangle = -\langle X, Aa^T\rangle = \langle X, -Aa^T\rangle.
\end{aligned}$$

Daí, $\nabla f = -Aa^T$. Continuando, sendo $\{e_1, e_2\}$ um referencial móvel numa vizinhança de $P \in S$,

$$\Delta f = \sum_i \langle \nabla_{e_i} \nabla f, e_i \rangle = -\sum_i \langle \nabla_{e_i} A a^T, e_i \rangle.$$

Sabemos que

$$(\nabla_{e_i} A) a^T = \nabla_{e_i} A a^T - A \nabla_{e_i} a^T.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\Delta f &= -\sum_i \langle (\nabla_{e_i} A) a^T + A \nabla_{e_i} a^T, e_i \rangle \\
&= -\sum_i \langle (\nabla_{a^T} A) e_i, e_i \rangle - \sum_i \langle A \nabla_{e_i} a^T, e_i \rangle \\
&= -\sum_i \langle \nabla_{a^T} A e_i - A \nabla_{a^T} e_i, e_i \rangle - \sum_i \langle A \nabla_{e_i} a^T, e_i \rangle \\
&= -\sum_i \langle \nabla_{a^T} A e_i, e_i \rangle + \sum_i \langle A \nabla_{a^T} e_i, e_i \rangle - \sum_i \langle A \nabla_{e_i} a^T, e_i \rangle \\
&= -\sum_i \{ a^T(\langle A e_i, e_i \rangle) - \langle A e_i, \nabla_{a^T} e_i \rangle \} + \sum_i \langle A \nabla_{a^T} e_i, e_i \rangle - \\
&\quad - \sum_i \langle \nabla_{e_i} a^T, A e_i \rangle \\
&= -\sum_i a^T(\langle A e_i, e_i \rangle) + 2 \sum_i \langle A e_i, \nabla_{a^T} e_i \rangle - \\
&\quad - \sum_i \langle \overline{\nabla}_{e_i} (a - \langle a, N \rangle N), A e_i \rangle \\
&= -a^T(trA) + 2 \sum_i \langle A e_i, \nabla_{a^T} e_i \rangle + \sum_i \overline{\nabla}_{e_i} (\langle a, N \rangle N), A e_i \rangle.
\end{aligned}$$

Agora, suponha desde o início que $\{e_1, e_2\}$ é tal que $Ae_i = \lambda_i \cdot e_i$ em P, $i = 1, 2$.

Continuando,

$$\begin{aligned}
\Delta f &= -a^T(2H) + 2\sum_i \lambda_i \langle \nabla_{a^T} e_i, e_i\rangle + \sum_i \langle e_i\left(\langle a, N\rangle\right) N, Ae_i\rangle + \\
&\quad + \sum_i \left\langle \langle a, N\rangle\, \overline{\nabla}_{e_i} N, Ae_i \right\rangle \\
&= -a^T(2H) + 2\sum_i \lambda_i w_{ii}(a^T) + \sum_i e_i\left(\langle a, N\rangle\right)\langle N, Ae_i\rangle + \\
&\quad + \sum_i \langle a, N\rangle \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, Ae_i \right\rangle .
\end{aligned}$$

Como $w_{11}(a^T) = w_{22}(a^T) = 0$ e $\langle N, Ae_i\rangle = 0$, segue que

$$\begin{aligned}
\Delta f &= -2a^T(H) + \sum_i \langle a, N\rangle \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, Ae_i \right\rangle \\
&= -2\left\langle \nabla H, a^T \right\rangle - \langle a, N\rangle \sum_i \langle Ae_i, Ae_i\rangle \\
&= -2\langle \nabla H, a\rangle - \langle a, N\rangle \cdot |A|^2.
\end{aligned}$$

■

Agora estamos em condições de calcular $\Delta^\sigma \eta$ no caso em que $\beta = 0$.

Na afirmação anterior, faça $a = (1, 0, 0)$. Neste caso,

$$f = \langle N, a\rangle = N_1 \quad \text{e} \quad \Delta N_1 = -2\langle a, \nabla H\rangle - |A|^2 N_1$$

Agora, note que se $\beta = 0$, a superfície S tem curvatura média constante $H = \dfrac{\gamma}{2\alpha}$. Assim,

$$\nabla H = 0 \quad \text{e} \quad \Delta N_1 = -|A|^2 N_1.$$

Veja que

$$\begin{aligned}
|A|^2 &= \text{tr}(A^2) = \langle Ae_1, Ae_1\rangle + \langle Ae_2, Ae_2\rangle \\
&= \langle K_1 e_1, K_1 e_1\rangle + \langle K_2 e_2, K_2 e_2\rangle = K_1^2 + K_2^2 \\
&= (K_1 + K_2)^2 - 2K_1K_2 = 4H^2 - 2K = \frac{\gamma^2}{\alpha^2} - 2K \\
&\Rightarrow -|A|^2 = 2K - \frac{\gamma^2}{\alpha^2}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\Delta N_1 = \left(2K - \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right) N_1.$$

Por outro lado, $\sigma = \alpha\langle d\psi, d\psi\rangle$. Assim,

$$\Delta^\sigma N_1 = \frac{1}{\sqrt{g_\sigma}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(g_\sigma^{ij}\sqrt{g_\sigma} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial x_j}\right).$$

Veja que

$$(g_{ij})_\sigma = \sigma(\psi_i, \psi_j) = \alpha\langle \psi_i, \psi_j\rangle = \alpha g_{ij}.$$

Daí

$$g_\sigma = \begin{vmatrix} (g_{11})_\sigma & (g_{12})_\sigma \\ (g_{21})_\sigma & (g_{22})_\sigma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha g_{11} & \alpha g_{12} \\ \alpha g_{21} & \alpha g_{22} \end{vmatrix} = \alpha^2 \cdot g.$$

$$(g^{ij})_\sigma = \frac{1}{\alpha^2 g}\begin{bmatrix} \alpha g_{22} & -\alpha g_{12} \\ -\alpha g_{21} & \alpha g_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha g}\left| \begin{matrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{matrix} \right] = \frac{1}{\alpha}(g^{ij}).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Delta^\sigma N_1 &= \frac{1}{|\alpha|\sqrt{g}} \cdot \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\alpha} g^{ij} \cdot |\alpha|\sqrt{g} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial x_j}\right) = \\ &= \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(g^{ij}\sqrt{g} \cdot \frac{\partial N}{\partial x_j}\right)\right] = \\ &= \frac{1}{\alpha}\Delta N_1. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Delta^\sigma N_1 &= \frac{1}{\alpha}\Delta N_1 = \frac{1}{\alpha}\left(2K - \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\right) N_1 = \left(\frac{2K}{\alpha} - \frac{\gamma^2}{\alpha^3}\right) N_1 = \\ &= \frac{2\alpha^2 K - \gamma^2}{\alpha^3} N_1 = 2\frac{\alpha K - \gamma \cdot \dfrac{\gamma}{2\alpha}}{\alpha^2} N_1 = 2\frac{\alpha K - \gamma H}{\alpha^2} N_1. \end{aligned}$$

■

Agora, façamos uma observação que está relacionada com o próximo teorema(Teorema 2.1).

Observação 2.4 *Veja que*

$$\begin{aligned} d(\eta\wedge\eta_v du-\eta\wedge\eta_u dv) &= (\eta\wedge\eta_v)_u du\wedge du+(\eta\wedge\eta_v)_v dv\wedge du \\ &\quad -(\eta\wedge\eta_u)_u du\wedge dv-(\eta\wedge\eta_u)_v dv\wedge dv \\ &= (\eta_v\wedge\eta_v+\eta\wedge\eta_{vv})dv\wedge du \\ &\quad -(\eta_u\wedge\eta_u+\eta\wedge\eta_{uu})du\wedge dv \\ &= (\eta\wedge\eta_{vv}+\eta\wedge\eta_{uu})dv\wedge du \\ &= [\eta\wedge(\eta_{uu}+\eta_{vv})]dv\wedge du=0 \end{aligned}$$

já que $\eta_{uu}+\eta_{vv}$ é múltiplo de η.

Assim, $w=\eta\wedge\eta_v du-\eta\wedge\eta_u dv$ é uma forma de grau 1 tal que $dw=0$. Assim, se $U\subset\mathbb{R}^2$ é o domínio de uma parametrização de S e $\gamma_1,\gamma_2:[j,l]\longrightarrow U$ são duas curvas contínuas, homotópicas em U, tais que $\gamma_1(j)=\gamma_2(j)$ e $\gamma_1(l)=\gamma_2(l)$, então

$$\int_{\gamma_1} w=\int_{\gamma_2} w.$$

Assim, a notação

$$\psi=-\frac{\alpha}{\gamma}\eta+\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta\gamma}}{\gamma}\cdot\int\eta\wedge\eta_v du-\eta\wedge\eta_u dv$$

no Teorema 2.1 abaixo significa que

$$\psi(u,v)=-\frac{\alpha}{\gamma}\eta(u,v)+\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta\gamma}}{\gamma}\cdot\int_h\eta\wedge\eta_v du-\eta\wedge\eta_u dv$$

onde $h:[j,l]\longrightarrow U\subset\mathbb{R}^2$ é qualquer curva contínua ligando o ponto $(u,v)\in B_R(u_o,v_o)$ ao ponto (u_o,v_o), sendo $B_R(u_o,v_o)$ o domínio de uma parametrização de S.

Teorema 2.1 *Seja $\psi:S\longrightarrow\mathbb{R}^3$ uma imersão ELW satisfazendo $2\alpha H+\beta K=\gamma\geq 0$, com aplicação de Gauss associada η. Se considerarmos em S uma estrutura conforme induzida por $\sigma=\alpha\cdot\langle d\psi,d\psi\rangle+\beta\cdot\langle d\psi,-d\eta\rangle$, então η é harmônica.*

Além disso, se $\gamma \neq 0$, ψ pode ser escrita como

$$\psi = -\frac{\alpha}{\gamma} \cdot \eta + \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}}{\gamma} \cdot \int [\eta \wedge \eta_v du - \eta \wedge \eta_u dv] \quad (*)$$

para parâmetros isotémicos (u, v) em S.

Demonstração :

Seja F uma variação própria da aplicação $\eta : S \longrightarrow S^2$ e E a energia dessa variação.

Pela Proposição 2.2, $\Delta^\sigma \eta$ é múltiplo do vetor η. Logo, pela equação (1.1), da seção 1.3, temos que $E'(0) = 0$, para toda variação própria F da aplicação $\eta : S \longrightarrow S^2$. Portanto, η é harmônica.

Vimos na demonstração da Proposição 2.2 que

$$\alpha\psi_u - \beta\eta_u = -\sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma} \cdot \eta \wedge \psi_v$$

$$\alpha\psi_v - \beta\eta_v = \sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma} \cdot \eta \wedge \psi_u.$$

Logo,

$$\alpha\psi_u = \beta\eta_u - \sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma} \cdot \eta \wedge \psi_v \tag{2.1}$$

$$\alpha\psi_v = \beta\eta_v + \sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma} \cdot \eta \wedge \psi_u \tag{2.2}$$

Multiplicando a igualdade (2.1) por α temos:

$$\alpha^2\psi_u = \alpha\beta\eta_u - \sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma} \cdot \wedge(\alpha\psi_v).$$

Daí

$$\begin{aligned} \alpha^2\psi_u &= \alpha\beta\eta_u - \sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma} \cdot \eta \wedge (\beta\eta_v + \sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma} \cdot \eta \wedge \psi_u) \\ &= \alpha\beta\eta_u - \beta\sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma} \cdot \eta \wedge \eta_v + (\alpha^2 + \beta\gamma) \cdot (\eta \wedge \psi_u) \wedge \eta \\ &= \alpha\beta\eta_u - \beta\sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}\, \eta \wedge \eta_v + (\alpha^2 + \beta\gamma)[\langle \eta, \eta \rangle \psi_u - \langle \psi_u, \eta \rangle \cdot \eta] \\ &= \alpha\beta\eta_u - \beta\sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}\, \eta \wedge \eta_v + \alpha^2\psi_u + \beta\gamma\psi_u. \end{aligned}$$

Logo,

$$\beta\gamma\psi_u = -\alpha\beta\eta_u + \beta\sqrt{\alpha^2+\beta\gamma}\,\eta\wedge\eta_v$$

Daí, se $\beta \neq 0$ temos,

$$\psi_u = -\frac{\alpha}{\gamma}\eta_u + \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta\gamma}}{\gamma}\,\eta\wedge\eta_v.$$

Analogamente

$$\psi_v = -\frac{\alpha}{\gamma}\eta_v - \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta\gamma}}{\gamma}\cdot\eta\wedge\eta_u$$

∎

Observação 2.5 *Considerações sobre aplicações harmônicas podem ser encontradas no Capítulo 1.*

Observação 2.6 *Vamos mostrar que existe, a menos de isometria, uma única imersão totalmente umbílica no conjunto das imersões ELW satisfazendo $2\alpha H + \beta K = \gamma \geq 0$. Essa imersão totalmente umbílica é dada por:*

i) *Uma esfera de raio $R = \dfrac{|\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta\gamma}|}{\gamma}$ se $\gamma \neq 0$,*

ii) *Uma esfera de raio $R = \dfrac{|\beta|}{2|\alpha|}$ se $\gamma = 0$ e $\alpha < 0$,*

iii) *Um plano se $\gamma = 0$ e $\alpha > 0$.*

Vejamos:

1º caso: $\gamma \neq 0$ e $\beta \neq 0$

$2\alpha H + \beta K = \gamma \Rightarrow \beta H^2 + 2\alpha H - \gamma = 0.$

Assim temos uma equação do 2º grau em H e

$$\Delta = 4\alpha^2 - 4\beta(-\gamma) = 4(\alpha^2+\beta\gamma) > 0.$$

Daí
$$H = \frac{-2\alpha \pm 2\sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}}{2\beta} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}}{\beta}$$
Como S é umbílica segue que $H = K_1 = K_2$ onde K_1, K_2 são as curva - turas principais da imersão. Assim, devemos ter $\alpha + \beta H > 0$.
Se $H = \dfrac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}}{\beta}$ então $\alpha + \beta H = -\sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma} < 0$, um absurdo.
Logo, $H = \dfrac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}}{\beta}$.
Daí,
$$\frac{1}{R} = \frac{|-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}|}{|\beta|} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{|\beta|}{|-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}|} = \frac{|\beta||-\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}|}{|\beta\gamma|}$$
$$\Rightarrow \quad R = \frac{|\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}|}{|\gamma|}$$

2º caso: $\gamma \neq 0$ e $\beta = 0$

Neste caso,
$$2\alpha H = \gamma \Rightarrow H = \frac{\gamma}{2\alpha}$$

Como devemos ter $\alpha + \beta H > 0$, segue que $\alpha > 0$. Daí,
$$R = \frac{2\alpha}{\gamma} = \frac{|\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 0 \cdot \gamma}|}{\gamma}$$

3º caso:$\gamma = 0$, $\alpha < 0$ e $\beta \neq 0$

$2\alpha H + \beta H^2 = 0 \Rightarrow H(\beta H + 2\alpha) = 0$

Se $H = 0$ então $\alpha + \beta H < 0$, um absurdo.

Logo, $\beta H + 2\alpha = 0$ donde $H = \dfrac{-2\alpha}{\beta}$.

Daí, $R = \dfrac{|\beta|}{|2\alpha|}$

4º caso: $\gamma = 0$, $\alpha > 0$ e $\beta \neq 0$

$2\alpha H + \beta H^2 = 0 \Rightarrow H(\beta H + 2\alpha) = 0$

Se $\beta H + 2\alpha = 0$ então $H = \dfrac{-2\alpha}{\beta}$.

Daí, $\alpha + \beta H = \alpha + \beta \cdot \dfrac{(-2\alpha)}{\beta} = -\alpha < 0$, um absurdo.

Logo, devemos ter $H = 0$ e assim, S é um plano.

5º caso: $\gamma = 0$ e $\beta = 0$.

Como $\alpha + \beta H > 0$ devemos ter $\alpha > 0$.

Como $2\alpha H = 0$ segue que $H = 0 \Rightarrow K = 0$.

Logo, S é um plano.

■

Teorema 2.2 *Seja S um disco topológico fechado e $\psi : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão ELW satisfazendo $2\alpha H + \beta K = \gamma \geq 0$. Se a imagem do bordo de S, $\psi(\partial S)$, é uma linha de curvatura, então $\psi(S)$ é umbílica. Assim, $\psi(S)$ está contida em um plano ou numa esfera.*

Demonstração :

Podemos supor que S é uma superfície de Riemann com estrutura conforme induzida por $\sigma = \alpha\langle d\psi, d\psi\rangle + \beta \cdot \langle d\psi, -d\eta\rangle$. Assim, S é conformemente equivalente ao disco fechado unitário $D = \{z \in \mathbb{C}/|z| \leq 1\}$.

De fato, seja $h : D \longrightarrow S$ um homeomorfismo entre D e S. As parametrizações do tipo $X \circ h : V \longrightarrow \mathbb{R}^2$, onde V é aberto em D e $X : W \subset S \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é parametrização isotérmica de S, formam uma estrutura conforme em D. Com tal estrutura, D é conformemente equivalente a S.

É possível mostrar que existe um aberto simplesmente conexo $\widetilde{D}$, contendo D, no qual estendemos a estrutura conforme de D. Pelo Teorema da Uniformização de Koebe, $\widetilde{D}$ é conformemente equivalente ao plano ou a int$D$. Seja φ esta equivalência conforme. Como $\varphi(D)$ é simplemente conexo e $\varphi(D) \neq \mathbb{C}$, segue do Teorema da Aplicação de Riemann que $\varphi(D)$ é conformemente equivalente a D (com estrutura conforme usual). Portanto, S é conformemente equivalente a D (com a estrutura conforme usual).

Assim, vamos considerar $S = D$ e trabalhar com coordenadas polares (r, θ) dadas por $z = u + iv = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$. Considere a seguinte afirmação.

Afirmação 2.5

$$\frac{\partial}{\partial r} = \cos\theta \cdot \frac{\partial}{\partial u} + \text{sen}\theta \cdot \frac{\partial}{\partial v}$$
$$\frac{\partial}{\partial \theta} = -\text{sen}\theta \cdot \frac{\partial}{\partial u} + \cos\theta \cdot \frac{\partial}{\partial v}$$

em ∂D.

Prova da Afirmação :

Seja $\varphi(r, \theta) = (r \cdot \cos\theta, r \cdot \text{sen}\theta)$ e $g : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $A \subset \mathbb{R}^2$ é aberto. Pela regra da Cadeia,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(g \circ \varphi)}{\partial r}(r, \theta) &= \frac{\partial g}{\partial u}(\varphi(r, \theta)) \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\partial g}{\partial v}(\varphi(r, \theta)) \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}(r, \theta) \\ &= \frac{\partial g}{\partial u}(\varphi(r, \theta)) \cdot \cos\theta + \frac{\partial g}{\partial v}(\varphi(r, \theta)) \cdot \text{sen}\theta, \end{aligned}$$

onde $\varphi_1(r, \theta) = r\cos\theta$ e $\varphi_2(r, \theta) = r\text{sen}\theta$.

Analogamente, e escrevendo de forma simplificada,

$$\frac{\partial(g \circ \varphi)}{\partial \theta} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta}$$

Assim, se $h : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma função diferenciável, $h = (h_1, h_2, h_3)$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(h\circ\varphi)}{\partial r}(r,\theta) &= \left(\frac{\partial(h_1\circ\varphi)}{\partial r}(r,\theta), \frac{\partial(h_2\circ\varphi)}{\partial r}(r,\theta), \frac{\partial(h_3\circ\varphi)}{\partial r}(r,\theta)\right)\\
&= \left(\frac{\partial h_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}+\frac{\partial h_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}, \frac{\partial h_2}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}+\frac{\partial h_2}{\partial v}\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial r},\right.\\
&\quad \left.\frac{\partial h_3}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}+\frac{\partial h_3}{\partial v}\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right)\\
&= \left(\frac{\partial h_1}{\partial u}\cdot\cos\theta+\frac{\partial h_1}{\partial v}\cdot\mathrm{sen}\theta, \frac{\partial h_2}{\partial u}\cdot\cos\theta+\frac{\partial h_2}{\partial v}\cdot\mathrm{sen}\theta,\right.\\
&\quad \left.\frac{\partial h_3}{\partial u}\cdot\cos\theta+\frac{\partial h_3}{\partial v}\cdot\mathrm{sen}\theta\right)\\
&= \frac{\partial h}{\partial u}\left(\varphi(r,\theta)\right)\cos\theta+\frac{\partial h}{\partial v}\left(\varphi(r,\theta)\right)\cdot\mathrm{sen}\theta
\end{aligned}$$

Em notação simplificada,

$$\frac{\partial}{\partial r}=\cos\theta\cdot\frac{\partial}{\partial u}+\mathrm{sen}\theta\cdot\frac{\partial}{\partial v}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(h\circ\varphi)}{\partial\theta}(r,\theta) &= \left(\frac{\partial(h_1\circ\varphi)}{\partial\theta}(r,\theta), \frac{\partial(h_2\circ\varphi)}{\partial\theta}(r,\theta), \frac{\partial(h_3\circ\varphi)}{\partial\theta}(r,\theta)\right)\\
&= \frac{\partial h}{\partial u}\left(\varphi(r,\theta)\right)\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta}(r,\theta)+\frac{\partial h}{\partial v}\left(\varphi(r,\theta)\right)\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta}(r,\theta)\\
&= \frac{\partial h}{\partial u}\left(\varphi(r,\theta)\right)\cdot(-r\mathrm{sen}\theta)+\frac{\partial h}{\partial v}\left(\varphi(r,\theta)\right)\cdot r\cos\theta
\end{aligned}$$

Logo, em $\partial D=\{z\in\mathbb{C}/|z|=1\}$ temos

$$\frac{\partial(h\circ\varphi)}{\partial\theta}=\frac{\partial h}{\partial u}\cdot(-\mathrm{sen}\theta)+\frac{\partial h}{\partial v}\cdot\cos\theta$$

Assim, em ∂D, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}&=\cos\theta\cdot\frac{\partial}{\partial u}+\mathrm{sen}\theta\cdot\frac{\partial}{\partial v}\\
\frac{\partial}{\partial\theta}&=-\mathrm{sen}\theta\cdot\frac{\partial}{\partial u}+\cos\theta\cdot\frac{\partial}{\partial v}.
\end{aligned}$$

Provamos assim a afirmação.

■

Agora veremos que

$$\alpha\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial r},\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right\rangle+\beta\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial r},-\frac{\partial\eta}{\partial\theta}\right\rangle=0$$

em ∂D.

De fato, como (u,v) são parâmetros conformes para σ, temos

$$\alpha\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial r},\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right\rangle+\beta\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial r},-\frac{\partial n}{\partial\theta}\right\rangle=$$

$$\begin{aligned}
= \;& \alpha\left\langle\cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial u}+\mathrm{sen}\theta\frac{\partial\psi}{\partial v},-\mathrm{sen}\theta\cdot\frac{\partial\psi}{\partial u}+\cos\theta\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v}\right\rangle\\
& +\beta\left\langle\cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial u}+\mathrm{sen}\theta\frac{\partial\psi}{\partial v},\mathrm{sen}\theta\cdot\frac{\partial n}{\partial u}-\cos\theta\cdot\frac{\partial n}{\partial v}\right\rangle\\
= \;& -\alpha\cdot\mathrm{sen}\theta\cdot\cos\theta\cdot\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial u},\frac{\partial\psi}{\partial u}\right\rangle+\alpha\cdot\cos^2\theta\cdot\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial u},\frac{\partial\psi}{\partial v}\right\rangle\\
& -\alpha\mathrm{sen}^2\theta\cdot\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial v},\frac{\partial\psi}{\partial u}\right\rangle+\alpha\cdot\mathrm{sen}\theta\cdot\cos\theta\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial v},\frac{\partial\psi}{\partial v}\right\rangle\\
& +\beta\mathrm{sen}\theta\cdot\cos\theta\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial u},\frac{\partial n}{\partial u}\right\rangle-\beta\cos^2\theta\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial u},\frac{\partial\eta}{\partial v}\right\rangle\\
& +\beta\mathrm{sen}^2\theta\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial v},\frac{\partial n}{\partial u}\right\rangle-\beta\cdot\mathrm{sen}\theta\cdot\cos\theta\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial v},\frac{\partial\eta}{\partial v}\right\rangle\\
= \;& -\mathrm{sen}\theta\cdot\cos\theta\cdot\left[\alpha\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial u},\frac{\partial\psi}{\partial u}\right\rangle+\beta\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial u},-\frac{\partial n}{\partial u}\right\rangle\right]\\
& +\cos^2\theta\cdot\left[\alpha\cdot\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial u},\frac{\partial\psi}{\partial v}\right\rangle+\beta\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial u},-\frac{\partial n}{\partial v}\right\rangle\right]\\
& -\mathrm{sen}^2\theta\cdot\left[\alpha\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial v},\frac{\partial\psi}{\partial u}\right\rangle+\beta\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial v},-\frac{\partial n}{\partial u}\right\rangle\right]\\
& +\mathrm{sen}\theta\cos\theta\left[\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial v},\frac{\partial\psi}{\partial v}\right\rangle+\beta\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial v},-\frac{\partial n}{\partial v}\right\rangle\right]\\
= \;& -\lambda\mathrm{sen}\theta\cdot\cos\theta+\lambda\mathrm{sen}\theta\cdot\cos\theta=0
\end{aligned}$$

Usando que $|z|=1$ é linha de curvatura com curvatura normal K_n temos

$$0=(\alpha+\beta K_n)\cdot\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial r},\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right\rangle$$

em $|z| = 1$.

De fato,

$$\alpha \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial r}, \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right\rangle + \beta \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial r}, -\frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right\rangle = 0 \Rightarrow \alpha \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial r}, \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right\rangle + \beta \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial r}, -\varepsilon \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right\rangle = 0$$

onde $-\varepsilon = K_n$ é uma curvatura principal, já que $|z| = 1$ é linha de curvatura. Na igualdade anterior, usamos o Teorema de Olinde - Rodrigues (Veja na referência [1]). Assim

$$(\alpha + \beta K_n) \cdot \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial r}, \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right\rangle = 0$$

Como σ é positiva definida, temos que $\sigma(e_1, e_1) > 0$ e $\sigma(e_2, e_2) > 0$, onde $\{e_1, e_2\}$ é uma base ortonormal que diagonaliza $d\eta$ em $P \in S$.

Assim, $\alpha + \beta K_i = \sigma(e_i, e_i) > 0$, $i = 1, 2$. Logo $\alpha + \beta K_n > 0$. (Lembre que para uma linha de curvatura temos $K_n = K_1$ ou $K_n = K_2$). Daí segue-se que

$$\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial r}, \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right\rangle = 0.$$

Além disso,

$$\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial r}, -\frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right\rangle = -\lambda(t) \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial r}, \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right\rangle = 0$$

em ∂D.

Veja que

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial r}, \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right\rangle = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left\langle \cos\theta \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} + \text{sen}\theta \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v}, -\text{sen}\theta \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} + \cos\theta \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v} \right\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -\text{sen}\theta \cos\theta \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial u}, \frac{\partial \psi}{\partial u} \right\rangle + (\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial u}, \frac{\partial \psi}{\partial v} \right\rangle \\
&\qquad + \text{sen}\theta \cos\theta \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial v}, \frac{\partial \psi}{\partial v} \right\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -\frac{\text{sen}2\theta}{2} \cdot E_1 + \cos 2\theta \cdot F_1 + \frac{\text{sen}2\theta}{2} \cdot G_1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -\frac{\text{sen}2\theta}{2}(E_1 - G_1) + \cos 2\theta \cdot F_1 = 0
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial\psi}{\partial r}, -\frac{\partial\eta}{\partial\theta}\right\rangle = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left\langle \cos\theta\cdot\frac{\partial\psi}{\partial u} + \mathrm{sen}\theta\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v}, \mathrm{sen}\theta\cdot\frac{\partial\eta}{\partial u} - \cos\theta\cdot\frac{\partial\eta}{\partial v}\right\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -\mathrm{sen}\theta\cdot\cos\theta\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial u}, -\frac{\partial\eta}{\partial u}\right\rangle + \cos^2\theta\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial u}, -\frac{\partial\eta}{\partial v}\right\rangle \\
&\qquad -\mathrm{sen}^2\theta\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial v}, -\frac{\partial\eta}{\partial u}\right\rangle + \mathrm{sen}\theta\cdot\cos\theta\cdot\left\langle\frac{\partial\psi}{\partial v}, -\frac{\partial\eta}{\partial v}\right\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -\frac{\mathrm{sen}2\theta}{2}\cdot E_2 + (\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta)F_2 + \frac{\mathrm{sen}2\theta}{2}\cdot G_2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -\frac{\mathrm{sen}2\theta}{2}(E_2 - G_2) + \cos 2\theta\cdot F_2 = 0
\end{aligned}$$

em ∂D.

Agora, vamos utilizar a Proposição 1.2 para mostrar que as funções complexas

$$f_1(z) = \left\langle\frac{\partial\psi}{\partial z}, \frac{\partial\psi}{\partial z}\right\rangle \quad \text{e} \quad f_2(z) = \left\langle\frac{\partial\psi}{\partial z}, -\frac{\partial\eta}{\partial z}\right\rangle$$

são holomorfas.

Veja que

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\psi}{\partial u} - i\frac{\partial\psi}{\partial v}\right]$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\psi}{\partial\bar{z}\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u} - i\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} - i\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v} + i\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial v\partial u} + \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}(\psi_{uu} + \psi_{vv}) = \frac{1}{4}\cdot(\lambda\cdot\Delta^\sigma\psi).
\end{aligned}$$

Aqui, $\Delta^\sigma\psi = (\Delta^\sigma\psi_1, \Delta^\sigma\psi_2, \Delta^\sigma\psi_3)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial\bar{z}} &= \left\langle 2\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\bar{z}\partial z}, \frac{\partial\psi}{\partial z}\right\rangle = \left\langle\frac{\lambda}{2}\Delta^\sigma\psi, \frac{\partial\psi}{\partial z}\right\rangle \\
&= \frac{\lambda}{2}\left\langle\Delta^\sigma\psi, \frac{1}{2}(\psi_u - i\psi_v)\right\rangle = \frac{\lambda}{4}\left[\langle\Delta^\sigma\psi, \psi_u\rangle - \langle\Delta^\sigma\psi, \psi_v\rangle\right] = 0
\end{aligned}$$

já que $\Delta^\sigma\psi$ é múltiplo do vetor normal.

Lembre que $\Delta^\sigma \psi = \dfrac{\gamma + \beta K}{\alpha^2 + \beta\gamma} \cdot \eta.$

Assim, f_1 é holomorfa (em uma vizinhança de D).

Analogamente,

$$\frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}} = \left\langle \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{z} \partial z}, -\frac{\partial \eta}{\partial z} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial z}, -\frac{\partial^2 \eta}{\partial \bar{z} \partial z} \right\rangle$$

Veja que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{z} \partial z}, -\frac{\partial n}{\partial z} \right\rangle &= \left\langle \frac{\lambda}{4} \cdot \Delta^\sigma \psi, -\frac{1}{2}(\eta_u - i\eta_v) \right\rangle \\ &= -\frac{\lambda}{8} \left(\langle \Delta^\sigma \psi, \eta_u \rangle - i \langle \Delta^\sigma \psi, \eta_v \rangle \right) = 0, \end{aligned}$$

já que $\langle \eta_u, \eta \rangle = \langle \eta_v, \eta \rangle = 0$.

Além disso,

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{1}{2}(\eta_u - i \cdot \eta_v)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \bar{z} \partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right) \cdot \left[\frac{1}{2}(\eta_u - i\eta_v) \right] \\ &= \frac{1}{4}(\eta_{uu} - i\eta_{vu} + i\eta_{uv} + \eta_{vv}) \\ &= \frac{1}{4}(\eta_{uu} + \eta_{vv}) = \frac{\lambda}{4} \cdot \Delta^\sigma \eta. \end{aligned}$$

Aqui, $\Delta^\sigma \eta = (\Delta^\sigma \eta_1, \Delta^\sigma \eta_2, \Delta^\sigma \eta_3)$. Logo,

$$\left\langle \frac{\partial \psi}{\partial z}, -\frac{\partial^2 \eta}{\partial \bar{z} \partial z} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial z}, \frac{-\lambda}{4} \Delta^\sigma \eta \right\rangle = \frac{-\lambda}{4} \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial z}, \Delta^\sigma \eta \right\rangle = 0$$

já que $\Delta^\sigma \eta$ é múltiplo do vetor normal. Lembre que

$$\Delta^\sigma \eta = 2 \left(\frac{\alpha K - \gamma H}{\alpha^2 + \beta\gamma} \right) \eta.$$

Logo, $\dfrac{\partial f_2}{\partial \bar{z}} = 0$ e assim, f_2 também é holomorfa.

Segue que $g_i(z) = z^2 \cdot f_i(z)$, $i = 1, 2$, é holomorfa (em uma vizinhança de D). Assim $Im(g_i)$, $i = 1{,}2$, é harmônica.

Agora, vamos provar uma afirmação.

Afirmação 2.6 $Im(g_i) = \frac{1}{4}[\text{sen}2\theta(E_i - G_i) - 2\cos 2\theta \cdot F_i]$, $i = 1, 2$, *em* ∂D.

Demonstração :

$$\begin{aligned} g_1(z) &= z^2 \cdot f_1(z) = (x+iy)^2 \cdot \left\langle \frac{\partial\psi}{\partial z}, \frac{\partial\psi}{\partial z} \right\rangle \\ &= (x^2 - y^2 + 2xyi) \cdot \left\langle \frac{1}{2}(\psi_u - i\psi_v), \frac{1}{2}(\psi_u - i\psi_v) \right\rangle \\ &= (x^2 - y^2 + 2xyi) \cdot \frac{1}{4}(\langle\psi_u, \psi_u\rangle - i\langle\psi_u, \psi_v\rangle - i\langle\psi_v, \psi_u\rangle - \langle\psi_v, \psi_v\rangle) \\ &= (x^2 - y^2 + 2xyi) \cdot \frac{1}{4}(E_1 - 2iF_1 - G_1). \end{aligned}$$

Logo,

$$Im(g_1) = \frac{1}{4} \cdot 2xy(E_1 - G_1) - \frac{2}{4}(x^2 - y^2)F_1 =$$
$$-\frac{1}{2}(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)F_1 + \frac{1}{2}\text{sen}\theta \cdot \cos\theta(E_1 - G_1),$$

onde θ é o argumento de z. (Lembre que $|z| = 1$).

Logo,

$$\begin{aligned} Im(g_1) &= -\frac{\cos 2\theta}{2}F_1 + \frac{\text{sen}2\theta}{4}(E_1 - G_1) \\ &= \frac{1}{4} \cdot [\text{sen}2\theta(E_1 - G_1) - 2\cos 2\theta \cdot F_1]. \end{aligned}$$

Agora, vamos calcular a parte imaginária de g_2.

$$\begin{aligned} g_2(z) &= z^2 \cdot f_2(z) = z^2 \cdot \left\langle \frac{\partial\psi}{\partial z}, -\frac{\partial\eta}{\partial z} \right\rangle \\ &= (x^2 - y^2 + 2xyi) \cdot \left\langle \frac{1}{2}(\psi_u - i\psi_v), -\frac{1}{2}(\eta_u - i\eta_v) \right\rangle \\ &= (x^2 - y^2 + 2xyi) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot [\langle\psi_u, \eta_u\rangle - i\langle\psi_u, \eta_v\rangle - i\langle\psi_v, \eta_u\rangle - \langle\psi_v, \eta_v\rangle] \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)(x^2 - y^2 + 2xyi) \cdot [\langle\psi_u, -\eta_u\rangle - i\langle\psi_u, -\eta_v\rangle - i\langle\psi_v, -\eta_u\rangle - \langle\psi_v, -\eta_v\rangle] \\ &= \frac{1}{4}(\cos 2\theta + \text{sen}2\theta i)(E_2 - G_2 - 2iF_2). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} Im(g_2) &= \frac{\text{sen}2\theta}{4}(E_2 - G_2) - \frac{1}{2}\cos 2\theta F_2 \\ &= \frac{1}{4} \cdot [\text{sen}2\theta(E_2 - G_2) - 2\cos 2\theta \cdot F_2], \end{aligned}$$

em ∂D.

E assim, a afirmação 2.7 está provada.

Vimos anteriormente que

$$-\text{sen}2\theta(E_i - G_i) + 2\cos 2\theta \cdot F_i = 0,\ i = 1, 2, \text{ em } \partial D.$$

Assim, $Im(g_i) \equiv 0$ em ∂D, $i = 1, 2$.

Pela afirmação 1.8 abaixo, temos $Im(g_i) \equiv 0$ em D, $i = 1, 2$.

Afirmação 2.7 *Seja $G \subset \mathbb{C}$ um domínio limitado e suponha que $u : \bar{G} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e harmônica em G. Se $u(z) = 0 \forall z \in \partial G$ então $u(z) = 0 \ \ \forall z \in G$.*

Veja a prova da afirmação 1.8 na referência [5].

Como $Im(g_i) \equiv 0$ em D, segue do Teorema da Aplicação Aberta (Veja na referência [5]) que g_i, $i = 1, 2$, é constante em D, já que g_i só assume valores reais.

Como $g_i(0) = 0$ segue que $g_i \equiv 0$. Logo $f_i \equiv 0$ em D, $i = 1, 2$.

Afirmamos então que $\text{II} = \langle d\psi, -dn \rangle$ é proporcional a $I = \langle d\psi, d\psi \rangle$.

De fato, mostramos anteriormente que

$$f_1(z) = \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial z}, \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\rangle \quad \text{e} \quad f_2(z) = \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial z}, -\frac{\partial \eta}{\partial z} \right\rangle$$

são identicamente nulas. Assim,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{2}(\psi_u - i\psi_v), \frac{1}{2}(\psi_u - i\psi_v) \right\rangle = 0 \quad &\Rightarrow \quad [\langle \psi_u, \psi_u \rangle - \langle \psi_v, \psi_v \rangle - 2i\langle \psi_u, \psi_v \rangle] = 0 \\ &\Rightarrow \quad (E_1 - G_1) - 2iF_1 = 0 \\ &\Rightarrow \quad E_1 = G_1 \quad e \quad F_1 = 0 \end{aligned}$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{2}(\psi_u - i\psi_v), -\frac{1}{2}(\eta_u - i\eta_v) \right\rangle = 0 \quad &\Rightarrow \quad \langle \psi_u - i\psi_v, \eta_u - in_v \rangle = 0 \\
&\Rightarrow \quad \langle \psi_u, \eta_u \rangle - \langle \psi_v, \eta_v \rangle - 2i\langle \psi_u, \eta_v \rangle] = 0 \\
&\Rightarrow \quad \langle \psi_u, -\eta_u \rangle - \langle \psi_v, -\eta_v \rangle - 2i\langle \psi_u, -\eta_v \rangle] = 0 \\
&\Rightarrow \quad (E_2 - G_2) - 2iF_2 = 0 \\
&\Rightarrow \quad E_2 = G_2 \quad e \quad F_2 = 0.
\end{aligned}
$$

Assim, II é proporcional a I.

Finalmente, temos

$$
\begin{aligned}
H^2 - K &= \left(\frac{1}{2} \frac{E_2 G_1 + G_2 E_1}{E_1 G_1} \right) - \frac{E_2 G_2}{E_1 G_1} \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{E_2 E_1 + E_2 E_1}{E_1^2} \right)^2 - \frac{E_2^2}{E_1^2} \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{4 \cdot E_1^2 E_2^2}{E_1^4} - \frac{E_2^2}{E_1^2} = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\psi(S)$ é umbílica.

$\blacksquare$

Capítulo 3

O Princípio da Tangência

Este capítulo, que contém apenas material auxiliar para o capítulo 4, é uma pequena discussão sobre operadores elípticos e fatos relacionados. Iremos abordar dois resultados que nos serão úteis nas demonstrações de algumas proposições do capítulo 4. Esses dois resultados são o Princípio do Máximo e o Princípio da Tangência.

Para este capítulo, utilizamos como referência a dissertação de mestrado de Kátia Rosenvald Frensel Leão, intitulada O Princípio da Tangência e Aplicações.

Definição 3.1 *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Um operador diferencial parcial linear de segunda ordem é uma aplicação do tipo*

$$\begin{aligned} L &: C^2(U) \longrightarrow E(U) \\ Lu &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} + c \cdot u, \end{aligned}$$

onde a_{ij}, b_i, $c : U \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções, $C^2(U) = \{f : U \longrightarrow \mathbb{R}; f \in C^2\}$ e $E(U)$ é o conjunto das funções $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$.

Se para todo $x \in U$ a matriz $A(x) = (a_{ij}(x))$ for simétrica e positiva definida, ou seja, se $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ para todos $1 \leq i,\, j \leq n$ e se $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j > 0$ para *todo* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, *dizemos que* L *é um operador diferencial parcial elíptico, linear de segunda ordem (ou simplesmente elíptico).*

Proposição 3.1 *Sejam* $u : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função* C^2 *e* $c : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua tal que* $c(x) \leq 0 \quad \forall x \in U$. *Se* $Lu > 0$ *em* U*, então* u *não atinge máximo local não – negativo em* U.

Demonstração :

Suponha, por absurdo, que exista $x_o \in U$ tal que x_o é ponto de máximo local para u e $u(x_o) \geq 0$. Veja que grad$u(x_o) = 0$ e a matriz $B = \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_o)\right)$ é negativa semi – definida. Como grad$u(x_o) = 0$ temos

$$0 < Lu(x_o) = \sum_{i,j} a_{ij}(x_o) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_o) + c(x_o)u(x_o).$$

Note que $c(x_o)u(x_o) \leq 0$.

Vamos mostrar que o traço$((AB)(x_o)) = \displaystyle\sum_{i,j} a_{ij}(x_o)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \leq 0$, onde $(AB)(x_o)$ é o produto das matrizes $A(x_o) = (a_{ij}(x_o))$ e $B = \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_o)\right)$, chegando assim a uma contradição.

Sabemos que o traço de uma matriz, e o fato de ela ser positiva ou negativa (semi –)definida, são invariantes por semelhança de matrizes. Seja P uma matriz tal que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Como $(P^{-1}AP)(x_o)$ é positiva definida temos que $\lambda_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Por outro lado $(P^{-1}BP)(x_o) = (b_{ij})$ é negativa semi – definida. Assim $b_{ii} \leq 0$. Portanto,

$$tr\left((AB)(x_o)\right) = tr\left((P^{-1}AP)(P^{-1}BP)\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_{ii} \leq 0.$$

■

Vamos agora a uma definição.

Definição 3.2 *O operador L é dito localmente uniformemente elíptico quando, para todo $P \in U$ existem uma vizinhança V de P em U e constantes a, $b > 0$ tais que $a|\lambda|^2 \leq \langle A(x)\lambda, \lambda\rangle \leq b|\lambda|^2, \forall x \in V$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$.*

Para provar o Princípio da Tangência, precisaremos do seguinte e importante resultado.

Teorema 3.1 (Princípio do Máximo Forte – Hopf) *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $L = \sum_{i,j} a_{ij} \cdot \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} + c$ um operador localmente uniformemente elíptico em U, onde $b_1, \ldots, b_n, c$ são localmente limitadas e $c \leq 0$. Seja $u : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função C^2 tal que $Lu \geq 0$. Se u atinge máximo local não – negativo em $p \in U$ então u é constante numa vizinhança de p.*

Demonstração :

Como u atinge máximo local em $p \in U$, existe $r > 0$ tal que

$$x \in B_r(p) \Rightarrow u(x) \leq u(p).$$

Suponha, por absurdo, que u não é constante em vizinhança alguma de P. Logo, existe $q \in B_{\frac{r}{3}}(p)$ com $u(q) < u(p)$. Seja $\delta_o = |q - p|$. Então

$$\overline{B_{\delta_o}(q)} \subset B_r(p) \quad \text{e} \quad p \in \partial B_{\delta_o}(q).$$

De fato,

$$x \in \overline{B_{\delta_o}(q)} \Rightarrow |x - p| \leq |x - q| + |q - p| \leq 2\delta_o < 2 \cdot \frac{r}{2} = r.$$

Agora, seja

$$\delta = \inf\{\rho > 0 / \overline{B_\rho(q)} \subset B_r(p) \quad \text{e} \quad \partial B_\rho(q) \cap u^{-1}(u(P)) \neq \emptyset\}.$$

Afirmação 3.1 $\delta > 0.$

Suponha que $\delta = 0$. Assim, dado $n \in \mathbb{N}$ existe $0 < \rho_n < \dfrac{1}{n}$ tal que

$$\overline{B_{\rho_n}(q)} \subset B_r(p) \text{ e } \partial\overline{B_{\rho_n}(q)} \cap u^{-1}(u(p)) \neq \emptyset.$$

Seja então $y_n \in B_{\rho_n}(q) \cap u^{-1}(u(p))$. Como $y_n \longrightarrow q$ segue que $u(y_n) \longrightarrow u(q)$. Como $u(y_n) = u(p) \quad \forall n$ segue que $u(p) = u(q)$.
Absurdo.

E assim a afirmação 3.1 está provada.

Afirmação 3.2 $x \in B_\delta(q) \Rightarrow u(x) < u(p).$

Prova:

Como $B_\delta(q) \subset B_r(p)$ segue que $u(x) \leq u(p), \forall x \in B_\delta(q)$. Se existisse $y \in B_\delta(q)$ tal que $u(y) = u(p)$, então sendo $a = |y - q|$, teríamos $\overline{B_a(q)} \subset B_r(p)$ e $\partial B_a(q) \cap u^{-1}(u(p)) \neq \emptyset$, uma contradição, já que $a < \delta$.

Provamos assim a afirmação 3.2.

Afirmação 3.3 *Existe* $p^* \in \partial B_\delta(q)$ *tal que* $u(p^*) = u(p)$.

Prova:

Suponha que $u(x) < u(p)$ para todo $x \in \partial B_\delta(q)$. Então, como $\partial B_\delta(q)$ é compacto, existiria uma cobertura finita de $\partial B_\delta(q)$ por bolas abertas $B_1, \ldots, B_l$ tal que $u(x) < u(P) \quad \forall x \in B_i, i = 1, \ldots, l$. Assim, existiria $\mathcal{T} > \delta$ tal que se $\delta \leq m \leq \mathcal{T}$ e $x \in \partial B_m(q)$ então $u(x) < u(p)$. Mas isso contradiz a definição de δ.

Assim a afirmação 3.3 está provada.

Agora, veja que $\delta < \dfrac{r}{3}$ pois $\delta \leq \delta_o < \dfrac{r}{3}$. Se $0 < \delta_1 < \delta$, afirmamos que $\overline{B_{\delta_1}(p^*)} \subset B_r(p)$. De fato,

$$x \in \overline{B_{\delta_1}(p^*)} \Rightarrow |x-p| \leq |x-p^*|+|P^*-q|+|q-p| < \delta_1+\delta+\frac{r}{3} < \frac{r}{3}+\frac{r}{3}+\frac{r}{3} = r.$$

Daí, $u(x) \leq u(p) = u(p^*), \forall x \in \overline{B_{\delta_1}(p^*)}$.

Seja $q^* \in [p^*, q]$ com $q^* \neq q$ e $|q^* - p^*| > \delta_1$.

Seja $v : B_{\delta_1}(p^*) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $v(x) = e^{-K|x-q^*|^2} - e^{-K\beta^2}$ (veja figura anterior), onde K será escolhida posteriormente.

Veja que

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = -2K(x_i - q_i^*) \cdot e^{-K|x-q^*|^2}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} &= -2K\delta_{ij} \cdot e^{-K|x-q^*|^2} + (-2K)(x_i - q_i^*)(-2K)(x_j - q_j^*)e^{-K|x-q^*|^2} \\
&= -2K\delta_{ij} \cdot e^{-K|x-q^*|^2} + 4K^2(x_i - q_i^*)(x_j - q_j^*)e^{-K|x-q^*|^2}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
Lv(x) &= \sum_{i,j} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_i b_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x) + c(x)v(x) \\
&= \sum_{i,j} a_{ij}(x)\left[-2K\delta_{ij} \cdot e^{-K|x-q^*|^2} + 4K^2(x_i - q_i^*)(x_j - q_j^*)e^{-K|x-q^*|^2}\right] + \\
&\quad + \sum_i b_i(x)\left[-2K(x_i - q_i^*)e^{-K|x-q^*|^2}\right] + c(x)\left[e^{-K|x-q^*|^2} - e^{-K\beta^2}\right] \\
&= \left[-2K\sum_i a_{ii}(x) + \sum_{i,j} 4K^2 a_{ij}(x)(x_i - q_i^*)(x_j - q_j^*) - 2K\sum_i b_i(x)(x_i - q_i^*)\right] \cdot \\
&\quad \cdot e^{-K|x-q^*|^2} + c(x)\left[e^{-K|x-q^*|^2} - e^{-K\beta^2}\right]
\end{aligned}$$

e como $c(x)\left[-e^{-K\beta^2}\right] \geq 0$ a expressão anterior é maior ou igual a

$$\left[-2K\sum_i a_{ii}(x) + \sum_{i,j} 4K^2 a_{ij}(x)(x_i - q_i^*)(x_j - q_j^*) - 2K\sum_i b_i(x)(x_i - q_i^*) + c(x)\right] e^{-K|x-q^*|^2}$$

$\forall x \in \overline{B_{\delta_1}(p^*)}$.

Como o operador L é localmente uniformemente elíptico em U, existe uma vizinhança V de p em U e constantes $a, b > 0$ tais que

$$a|\lambda|^2 \leq \langle A(x)\lambda, \lambda\rangle \leq b|\lambda|^2, \forall x \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

Seja $\lambda = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, onde 1 é a i – ésima coordenada de λ. Daí, $\langle A(x)\lambda, \lambda\rangle = a_{ii}(x)$. Logo $0 < a \leq a_{ii}(x) \leq b \quad \forall x \in V$.

Agora, tomando $\lambda = x - q^*$ temos

$$a|x - q^*|^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij}(x)(x_i - q_i^*)(x_j - q_j^*) \leq b|x - q^*|^2.$$

Observação 3.1 *Se* $x \in B_{\delta_1}(P^*)$ *veja que* $a|x - q^*| > 0$.

Suponha que V é tal que os b_i, $i = 1, \ldots, n$ e c são limitados em V (isto é possível, pois b_i, c são localmente limitadas). Considere desde o início $\overline{B_r(P)} \subset V$. Daí, a compacidade de $\overline{B_{\delta_1}(p^*)}$ junto com a elipticidade uniforme de L em $\overline{B_r(p)}$ garante a existência de constantes A,B, C (independentes de K) com $A > 0$ e

$$Lv(x) \geq (4AK^2 + BK + C)e^{-K|x-q^*|^2} \quad \forall x \in \overline{B_{\delta_1}(p^*)}.$$

Como $A > 0$, existe K suficientemente grande tal que $Lv(x) > 0 \quad \forall x \in \overline{B_{\delta_1}(p^*)}$. Assim, para todo $\lambda > 0$ temos $L(u + \lambda v) > 0$ em $B_{\delta_1}(p^*)$.

Escreva $\partial\overline{B_{\delta_1}(p^*)} = E \cup F$, onde $E = \partial B_{\delta_1}(p^*) \cap \overline{B_\beta(q^*)}$ e F seu complemento.

Se $x \in F$ então $|x - q^*| > \beta$, donde $v(x) < 0$. Como $u(x) \leq u(P)$ tem – se

$$u(x) + \lambda v(x) < u(p) = u(p^*) + \lambda v(p^*), \quad \forall x \in F, \quad \forall \lambda > 0.$$

Se $x \in E$ então $u(x) < u(p)$ pois a escolha de q^* e β garante $E \subset B_\delta(q)$. Como E é compacto, existe $\lambda > 0$ suficientemente pequeno tal que $u(x) + \lambda v(x) < u(p) \quad \forall x \in E$. De fato, como v é contínua e E é compacto, existe $\lambda > 0$ tal que $v(x) \leq \dfrac{M}{\lambda} \quad \forall x \in E$, onde $M > 0$ é tal que $u(x) + M < u(p) \quad \forall x \in E$. Daí $u(x) + \lambda v(x) \leq u(x) + M < u(p) = u(p^*) + \lambda v(p^*), \quad \forall x \in E$.

Dos dois casos acima, segue que $u + \lambda v$ atinge seu máximo em um ponto $y \in B_{\delta_1}(p^*)$ com $u(y) + \lambda v(y) \geq u(p^*) + \lambda v(p^*) = u(P) \geq 0$, contradizendo a Proposição 3.1. Portanto, u é constante em alguma vizinhança de p.

■

Corolário 3.1 *Nas notações e hipotéses do teorema anterior, se U é conexo e $p \in U$ é um ponto de máximo global para u, então u é constante em U.*

Demonstração:

Veja que $A = \{x \in U; u(x) = u(p)\}$ é fechado em U. Pelo Teorema anterior, A é aberto em U. Como U é conexo segue que $A = U$.

■

Corolário 3.2 *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado e*

$$L = \sum_{i,j} a_{ij} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c$$

um operador localmente uniformemente elíptico em $\overline{U}$, tal que b_i, $i = 1, \ldots, n$, e c são localmente limitadas e $c \leq 0$. Sejam u, $v : \overline{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções C^2 tais que $L\,u \geq L\,v$ em $\overline{U}$. Se $u \leq v$ em ∂U então $u \leq v$ em U.

Demonstração :

Suponha que exista $q \in U$ tal que $u(q) > v(q)$. Daí

$$(u - v)(p) = \max\nolimits_{\overline{U}}(u - v) \geq u(q) - v(q) > 0.$$

E como $L(u - v) \geq 0$, segue do Princípio do Máximo Forte que $u - v =$ constante > 0. Absurdo, pois $u \leq v$ no bordo.

■

Teorema 3.2 (Princípio do Máximo Forte para pontos do Bordo – Hopf) *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $p \in \partial U$ tal que U satisfaz a condição da esfera interior em p (isto é, existe $\rho > 0$ e $q \in U$ tal que $\overline{B_\rho(q)} \subset U \cup \{p\}$, com $p \in \partial B_\rho(q)$). Seja*

$$L = \sum_{i,j} a_{ij} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c$$

um operador localmente uniformemente em $U \cup \{p\}$, com b_i, c localmente limitadas em $U \cup \{p\}$ e $c \leq 0$.

Seja $u : U \cup \{p\} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2, com $Lu \geq 0$ em $U \cup \{p\}$. Se u atingir máximo local não – negativo em p e a derivada direcional $\dfrac{\partial u}{\partial(q-p)}(p) \geq 0$, então u é constante em uma vizinhança de p em $U \cup \{p\}$.

Demonstração:

Suponha que u não é constante em vizinhança alguma de p.

Seja $0 < \rho' < \rho$ tal que $u(x) \leq u(p)$, $\forall x \in B_{\rho'}(p) \cap (U \cup \{p\})$ e K o compacto, hachurado ao lado, definido por

$$K = \{x \in U \cup \{p\} / |x-p| \leq \rho', |x-q| \leq \rho\}.$$

Seja $v : K \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $v(x) = e^{-\alpha|x-q|^2} - e^{-\alpha\rho^2}$. Analogamente à prova do Teorema 3.2, obtemos $\alpha > 0$ tal que $Lv(x) > 0$, $\forall x \in K$. Além disso, note que $v \geq 0$ em K, sendo igual a zero somente em $K \cap \partial B_\rho(q)$.

Agora, seja $0 < \rho'' < \rho'$ e considere o compacto K' definido por

$$K' = \{x \in U \cup \{p\} / |x-q| \leq \rho, |x-P| \leq \rho''\}.$$

Escreva $\partial K' = C \cup D$, onde $D = \overline{\partial K' \cap B_{\rho''}(p)}$ e $C = \partial K' - D$.

Se $x \in D$ então $x \in \partial B_\rho(q)$, donde $v(x) = 0$. Assim,

$$u(x) + \lambda v(x) = u(x) \leq u(p), \quad \forall x \in D, \quad \forall \lambda > 0.$$

Se $x \in C$ então $u(x) < u(p)$. De fato, note que $C \subset K$. Logo, $u(x) \leq u(p)$ $\forall x \in C$. Suponha que exista $y \in C$ tal que $u(y) = u(p)$. Logo y é um ponto de máximo global não – negativo para $u\Big|_{B_{\rho'}(p) \cap U}$. Pelo Corolário 3.1, u é constante em $B_{\rho'}(P) \cap U$, uma contradição.

Como C é compacto, existe $\gamma > 0$ suficientemente pequeno tal que $u(x) + \gamma v(x) < u(p)$, $\forall x \in C$ (obtemos γ de maneira análoga a da prova do Teorema 3.1).

Dos dois casos anteriores, segue que

$$u(x) - u(P) + \gamma v(x) \leq 0 \quad \forall x \in \partial K'.$$

Temos que $Lu \geq 0$ em $U \cup \{p\}$ e $Lv > 0$ em K. Além disso $c(x)u(p) \leq 0 \quad \forall x \in U \cup \{p\}$. Assim,

$$L(u - u(P) + \gamma v) = Lu - c \cdot u(p) + \lambda L(v) > 0 \quad \text{em} \quad K'.$$

Pela Proposição 3.1 $u - u(p) + \gamma v$ não atinge máximo local não – negativo em intK'. Daí $u - u(P) + \gamma v < 0$ em intK'. Portanto, $u(x) - u(P) + \gamma v(x) \leq 0$ em K'.

Seja $N = \dfrac{q-p}{|q-p|}$. Como $v(p) = 0$ temos para $t > 0$ suficientemente pequeno

$$u(p+tN) - u(p) \leq -\gamma(v(p+tN) - v(p)) \Rightarrow 0 \leq \frac{\partial u}{\partial N}(P) \leq -\gamma \frac{\partial v}{\partial N}(p) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial N}(p) \leq 0.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial N}(p) &= \frac{d}{dt} v(p+tN)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} e^{-\alpha|P+tN-q|^2}\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} e^{-\alpha|-\rho N+tN|^2}\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} e^{-\alpha(t-\rho)^2}\Big|_{t=0} = -2\alpha(t-\rho)e^{-\alpha(t-\rho)^2} = 2\alpha\rho e^{-\alpha\rho^2} > 0. \end{aligned}$$

Absurdo.

■

Corolário 3.3 *Nas notações e hipóteses do Teorema 3.2, se U é conexo e $p \in \partial U$ é ponto de máximo global para u em $U \cup \{p\}$ então u é constante em $U \cup \{p\}$.*

Demonstração:

O conjunto $A = \{x \in U \cup \{p\} / u(x) = u(p)\}$ é fechado em $U \cup \{p\}$. Pelos Teoremas 3.1 e 3.2, A é aberto em $U \cup \{p\}$. Como $U \cup \{p\}$ é conexo segue que $A = U \cup \{p\}$.

■

Corolário 3.4 *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $p \in \overline{U}$ e*

$$L = \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c$$

um operador localmente uniformemente elíptico, com b_i, c localmente limitadas em $U \cup \{p\}$ (agora não é necessário ser $c \leq 0$). Suponha que U satisfaz a condição da esfera interior em p.

Se $Lu \geq 0$ e $u \leq 0$ em $U \cup \{p\}$, com $u(p) = 0$, e se a derivada direcional de u, em P, na direção do centro da esfera interior for não – negativa, então $u \equiv 0$ na componente conexa de $U \cup \{p\}$ contendo p.

Demonstração:

Seja $\widetilde{L} = L - c = \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Como min$\{c, 0\} - c \leq 0$ e $u \leq 0$ em $U \cup \{P\}$ segue que (min$\{c, 0\} - c) \cdot u \geq 0$. E como $Lu \geq 0$ temos

$$(\widetilde{L} + \text{min}\{c, 0\})u = Lu - cu + \text{min}\{c, 0\} \cdot u = Lu + (\text{min}\{c, 0\} - c) \cdot u \geq 0$$

em $U \cup \{P\}$.

Como $u \leq 0$ em $U \cup \{p\}$ e $u(p) = 0$ então u atinge máximo local não – negativo em p. Pelos Teoremas 3.1 e 3.2 aplicados a $\widetilde{L} + \text{min}\{c, 0\}$, temos em qualquer caso $u \equiv 0$ em uma vizinhança de p. Pelos Corolários 3.1 e 3.2, $u \equiv 0$ na componente conexa de $U \cup \{P\}$ contendo p.

Definição 3.3 *Seja*

$$\phi = \phi(r_{11}, \ldots, r_{1n}, r_{22}, \ldots, r_{2n}, \ldots, r_{n-1,n}, r_{nn}, P_1, \ldots, P_n, z, x_1, \ldots, x_n)$$

uma função de $K = \dfrac{n(n+1)}{2} + 2n + 1$ variáveis, $n \geq 2$, definida em um domínio D de $\mathbb{R}^K$. Se ϕ possui derivadas parciais de primeira ordem contínuas, *dizemos que* $\phi = 0$ *é uma equação diferencial parcial de segunda ordem na função incógnita* $z = z(x_1, \ldots, x_n)$ *onde* $P_i = \dfrac{\partial z}{\partial x_i}$, $r_{ij} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}$. *para* $1 \leq i, j \leq n, i \leq j$.

Seja $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ e considere a forma quadrática $Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $Q(\lambda) = \langle A\lambda, \lambda\rangle$, onde $A = (\alpha_{ij})$ é a matriz simétrica de entradas $\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\partial \phi}{\partial r_{ij}}$ se $i < j$ e $\alpha_{ii} = \dfrac{\partial \phi}{\partial r_{ii}}$.

Dizemos que a equação $\phi = 0$ é elíptica em um domínio D de $\mathbb{R}^K$ se a forma quadrática Q for positiva definida em todo ponto de D.

Se $\phi = \sum_{i \leq j} a_{ij} r_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b_i P_i + cz + d$ onde a_{ij}, b_i, c, d são funções contínuas em um domínio de $\mathbb{R}^n$, dizemos que $\phi = 0$ é uma equação diferencial parcial linear. Quando $d = 0$, ϕ é dita homogênea. Veja que uma equação linear é elíptica se, e somente se a forma quadrática $T(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{i \leq j} a_{ij} \lambda_i \lambda_j$ ($a_{ij} = a_{ji}$ para $i > j$) for positiva definida.

Antes do Princípio da Tangência, vamos provar dois lemas.

Lema 3.1 *Seja* $D \subset \mathbb{R}^K$ *um domínio convexo e seja* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função diferenciável. Dados* $x = (x_1, \ldots, x_K)$, $y = (y_1, \ldots, y_K) \in D$, *tem – se*

$$f(x) - f(y) = \sum_{i=1}^{K} A_i(x, y) \cdot (x_i - y_i),$$

onde $A_i(x, y) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial u_i}(tx + (1-t)y)dt$, $1 \leq i \leq K$.

Demonstração:

Seja $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(t) = f(tx + (1-t)y)$. Veja que

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^{K} \frac{\partial f}{\partial u_i}(tx + (1-t)y) \cdot (x_i - y_i)dt \\ &= \sum_{i=1}^{K} \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial u_i}(tx + (1-t)y)dt \right) (x_i - y_i) \end{aligned}$$

■

Lema 3.2 *Seja $\phi = 0$ uma EDP linear elíptica em um domínio convexo $D \subset \mathbb{R}^K$, $K = \dfrac{n(n+1)}{2} + 2n + 1$, $n \geq 2$, e z_1, $z_2 : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ duas soluções dessa equação. Então $z = z_1 - z_2$ satisfaz uma EDP linear, elíptica e homogênea.*

Demonstração:

Sejam $r_{ij}^l = \dfrac{\partial^2 z_l}{\partial x_i \partial x_j}$, $P_i^l = \dfrac{\partial z_l}{\partial x_i}$, $l = 1, 2$ e $1 \leq i \leq j \leq n$. Temos, por hipótese, que

$$\phi(r_{11}^l, \ldots, r_{1n}^l, \ldots, r_{nn}^l, P_1^l, \ldots, P_n^l, z_l, x_1, \ldots, x_n) = 0$$

para $l = 1, 2$.

Seja $(r_{11}^l, \ldots, r_{1n}^l, \ldots, r_{nn}^l, P_1^l, \ldots, P_n^l, z_l, x_1, \ldots, x_n) = y_l$, $l = 1, 2$. Pelo Lema anterior, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \phi(y_1) - \phi(y_2) \\ &= \sum_{i \leq j} A_{ij}(y_1, y_2) \cdot (r_{ij}^1 - r_{ij}^2) \\ &\quad + \sum_{i}^{n} B_i(y_1, y_2) \cdot (P_i^1 - P_i^2) + c(y_1, y_2) \cdot (z_1 - z_2) \qquad (*) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} A_{ij}(y_1, y_2) &= \int_0^1 \frac{\partial \phi}{\partial r_{ij}}(ty_1 + (1-t)y_2)dt, B_i(y_1, y_2) \\ &= \int_0^1 \frac{\partial \phi}{\partial P_i}(ty_1 + (1-t)y_2)dt \\ C(y_1, y_2) &= \int_0^1 \frac{\partial \phi}{\partial z}(ty_1 + (1-t)y_2)dt. \end{aligned}$$

Por $(*)$ temos

$$\sum_{i \leq j} A_{ij}(y_1, y_2) \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i}^{n} B_i(y_1, y_2) \frac{\partial z}{\partial x_i} + C(y_1, y_2) \cdot z = 0,$$

e veja que esta equação é linear e homogênea.

Resta mostrar que tal equação é elíptica.

Para isto, sejam

$$\alpha_{ij}(t) = \alpha_{ji}(t) = \frac{1}{2}\frac{\partial \phi}{\partial r_{ij}}(ty_1 + (1-t)y_2) \qquad \text{para } i < j,$$
$$\beta_{ij} = \beta_{ji} = \frac{1}{2}A_{ij}(y_1, y_2) \qquad \text{para } i < j,$$
$$\alpha_{ii}(t) = \frac{\partial \phi}{\partial r_{ii}}(ty_1 + (1-t)y_2) \quad , \quad \beta_{ii} = A_{ii}(y_1, y_2).$$

Então,

$$\sum_{i\leq j} \beta_{ij}\lambda_i\lambda_j = \sum_{i\leq j}\left(\int_0^1 \alpha_{ij}(t)dt\right)\lambda_i\lambda_j = \int_0^1\left(\sum_{i\leq j}\alpha_{ij}(t)\lambda_i\lambda_j\right)dt \geq 0$$

já que o integrando é não – negativo, pois $\phi = 0$ é elíptica. Assim,

$$\int_0^1\left(\sum_{i\leq j}\alpha_{ij}(t)\lambda_i\lambda_j\right)dt = 0$$

se, e só se,

$$\sum_{i\leq j}\alpha_{ij}(t)\lambda_i\lambda_j = 0,$$

o que por sua vez equivale a $\lambda = 0$.

■

Teorema 3.3 (Princípio da Tangência Interior) *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e conexo e z_1, $z_2 : U \longrightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis, soluções de uma mesma EDP elíptica $\phi = 0$ em U. Se $z_1 \leq z_2$ em U e se existe $P \in U$ tal que $z_1(P) = z_2(P)$, então $z_1 = z_2$ em U.*

Demonstração:

Pelo Lema anterior, $z = z_1 - z_2$ satisfaz uma EDP linear, elíptica e homogênea, isto é, existem funções contínuas a_{ij}, b_i, c tais que

$$Lz = \sum_{i\leq j} a_{ij}\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial z}{\partial x_i} + cz = 0,$$

onde os a_{ij} são tais que a forma quadrática $Q(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{i \leq j} a_{ij}\lambda_i\lambda_j$ é positiva definida em todo ponto do domínio das funções a_{ij}. Veja que $z_1 - z_2 \leq 0$ em U e que $z_1 - z_2$ atinge um máximo local não – negativo em P. Aplicando o Corolário 3.4 a L e a $z = z_1 - z_2$ concluimos que $z_1 - z_2 \equiv 0$ em U.

■

Teorema 3.4 (Princípio da Tangência no Bordo) *Seja* $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)/x_n \geq 0\}$ *e seja* $U \subset \mathbb{R}^n_+$ *um aberto conexo contendo* 0*. Suponha que* z_1*,* $z_2 : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *são funções diferenciáveis, soluções de uma mesma EDP elíptica* $\phi = 0$ *em* U*. Se* $z_1 \leq z_2$ *em* U *e se* $z_1(0) = z_2(0)$*,* $\dfrac{\partial z_1}{\partial x_n}(0) \geq \dfrac{\partial z_2}{\partial x_n}(0)$*, então* $z_1 = z_2$ *em* U*.*

Demonstração:

Segue do Coralário 3.3 e do Lema 3.2.

■

Capítulo 4

Estimativas em Superfícies de Weingarten Lineares e Gráficos

Neste capítulo, como o próprio título acima indica, faremos estimativas.

No Lema 4.1, temos um gráfico compacto ELW $\psi : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sobre o plano $P = \{x_3 = 0\}$ e com bordo nesse plano. Vamos então dar uma estimativa para a altura desse gráfico em relação a P. Para dar essa estimativa, iremos supor que a terceira coordenada da imersão satisfaz uma certa condição.

No Teorema 4.1, temos uma superfície compacta S, com bordo, e um mergulho ELW $\psi : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\psi(\partial S)$ está contido em um plano P. Além disso, vamos supor que $\alpha \geq 0$ ou $\beta \geq 0$ em $2\alpha H + \beta K = \gamma \geq 0$. Nestas condições, o Teorema 4.1 nos dar uma estimativa para a altura de $\psi(S)$ em relação a P.

Um outro resultado que merece destaque é o Teorema 4.2. Nele, temos uma superfície compacta S, com bordo, e $\psi : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão linear de Weingarten satisfazendo $2aH + bK = c$, tal que $\psi(\partial S) \subset \{x_3 = 0\}$ é uma curva de Jordan convexa. Daremos então uma estimativa para $|2aH + bK|$ olhando, entre outras coisas, para o comprimento da curva $\psi(\partial S)$ e para a área limitada por $\psi(\partial S)$.

Vamos começar provando um lema.

Lema 4.1 *Sejam S uma superfície compacta com bordo ∂S e $\psi : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão ELW satisfazendo $2\alpha H + \beta K = \gamma \geq 0$. Suponha que $\psi(S)$ é um gráfico não – planar sobre o plano $P = \{x_3 = 0\}$ e que $\psi(\partial S) \subset P$. Então $\psi(S)$ está contido num dos semi – espaços determinados por P. Além disso, seja h a altura de $\psi(S)$ em relação a P, ψ_3 a terceira coordenada da imersão, e R o raio da única esfera satisfazendo $2\alpha H + \beta K = \gamma \geq 0$, dada pela Observação 2.6. Então, sendo $\nabla\psi_3$ o gradiente de ψ_3 em relação à métrica induzida, temos:*

1) *Se $\alpha \geq 0$ ou $\beta \geq 0$ e se existe uma constante m, $0 \leq m \leq 1$ tal que $|\nabla\psi_3| \leq m$ ao longo de ∂S, então $h \leq R(1 - \sqrt{1 - m^2})$;*

2) *Se $\alpha < 0$, $\beta < 0$ e se existe uma constante m, $0 \leq m \leq 1$ tal que $|\nabla\psi_3| \geq m$ ao longo de ∂S, então $h \geq R(1 - \sqrt{1 - m^2})$.*

Demonstração :

Vamos supor que $\alpha \geq 0$ ou $\beta \geq 0$. Como $\psi(S)$ é não – planar podemos assumir que existe um ponto $P_1 \in S$ tal que $\psi(P_1) \in \{x_3 > 0\}$. Considere um hemisfério $\mathcal{H}$, com bordo em P, tal que $S \cap \{x_3 \geq 0\}$ está contido na região limitada por $\mathcal{H}$ e P. Podemos supor isso, já que S é compacta. Considere agora a família F de todas as calotas esféricas situadas em $\{x_3 \geq 0\}$ e com bordo em $\mathcal{H} \cap P$. Então existirá uma calota de F que encontrará $\psi(S)$ a primeira vez, e isso ocorrrerá em um ponto $q_1 \in \psi(S)$ com curvatura Gaussiana positiva .

Como $\alpha \geq 0$ ou $\beta \geq 0$ e $K(q_1) > 0$, segue do Lema 2.2 que a aplicação de Gauss associada η aponta para baixo em q_1.

Agora, suponha por absurdo que exista um ponto $P_2 \in S$ tal que $\psi(P_2) \in$
$\in \{x_3 < 0\}$. Repetindo o argumento do parágrafo anterior, existe um ponto $q_2 \in S \cap \{x_3 < 0\}$ tal que $K(q_2) > 0$ e η aponta para cima em q_2. Mas isso é

um absurdo, pois a terceira coordenada de η não muda de sinal, já que $\psi(S)$ é um gráfico. Portanto, $\psi(S)$ está contido num dos semi – espaços determinados por P.

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\psi(S) \subset \{x_3 \geq 0\}$.

Sendo η_3 a terceira coordenada da aplicação de Gauss associada η, segue da proposição 2.1 que

$$\begin{aligned}
\Delta^\sigma\left(\frac{1}{R}\psi_3 + \eta_3\right) &= \frac{1}{R}\Delta^\sigma\psi_3 + \Delta^\sigma\eta_3 \\
&= \frac{1}{R}\cdot\frac{\gamma+\beta K}{\alpha^2+\beta\gamma}\eta_3 + \frac{2(\alpha K - \gamma H)}{\alpha^2+\beta\gamma}\eta_3 \\
&= \left(\frac{1}{R}\frac{\gamma+\beta K}{\alpha^2+\beta\gamma} + \frac{2(\alpha K - \gamma H)}{\alpha^2+\beta\gamma}\right)\eta_3 \\
&= \frac{\gamma + \beta K + 2\alpha R K - 2\gamma R H}{R(\alpha^2+\beta\gamma)}\eta_3 \\
&= \frac{(2\alpha R + \beta)\cdot K + \gamma(1 - 2RH)}{R(\alpha^2+\beta\gamma)}\eta_3.
\end{aligned}$$

Agora, vamos provar uma afirmação.

Afirmação 4.1 $2\alpha R + \beta = \gamma R^2$

Demonstração :

Sabendo que R é o raio da única esfera E satisfazendo $2\alpha H_E + \beta K_E = \gamma \geq 0$. Como E está orientada com o campo normal que aponta para seu centro segue-se que $H_E = \dfrac{1}{R}$. Logo,

$$2\alpha\cdot\frac{1}{R} + \beta\cdot\frac{1}{R^2} = \gamma \Rightarrow \frac{2\alpha R + \beta}{R^2} = \gamma \Rightarrow 2\alpha R + \beta = \gamma R^2,$$

e a afirmação está provada.

■

Usando a afirmação, temos que

$$\begin{aligned}
\Delta^{\sigma}\left(\frac{1}{R}\psi_3+\eta_3\right) &= \frac{(2\alpha R+\beta)\cdot K+\gamma(1-2RH)}{R(\alpha^2+\beta\gamma)}\eta_3\\
&= \frac{\gamma R^2\cdot K+\gamma(1-2RH)}{R(\alpha^2+\beta\gamma)}\eta_3\\
&= \left[\frac{\gamma RK}{\alpha^2+\beta\gamma}+\frac{\gamma R(1-2RH)}{R^2(\alpha^2+\beta\gamma)}\right]\eta_3\\
&= \frac{\gamma R}{\alpha^2+\beta\gamma}\left(K+\frac{1-2RH}{R^2}\right)\eta_3\\
&= \frac{\gamma R}{\alpha^2+\beta\gamma}\left(K_1K_2+\frac{1}{R^2}-\frac{K_1}{R}-\frac{K_2}{R}\right)\eta_3\\
&= \frac{\gamma R}{\alpha^2+\beta\gamma}\left(K_1-\frac{1}{R}\right)\left(K_2-\frac{1}{R}\right)\eta_3,
\end{aligned}$$

onde K_1 e K_2 são as curvaturas principais da imersão ψ.

Agora, veja que se $\beta \neq 0$, os pontos (K_1, K_2) e $\left(\frac{1}{R}, \frac{1}{R}\right)$ pertencem a hipérbole equilátera $\alpha(x+y)+\beta xy=\gamma$, do plano (x, y).

De fato,

$$\begin{aligned}
2\alpha H+\beta K=\gamma \quad &\Rightarrow \quad \alpha(K_1+K_2)+\beta K_1K_2=\gamma\\
2\alpha R+\beta=\gamma R^2 \quad &\Rightarrow \quad \alpha\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R}\right)+\beta\cdot\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{R}=\gamma.
\end{aligned}$$

Sabemos que $\alpha+\beta K_i>0$, $i=1,2$. Além disso, R é o raio da única esfera E, imagem de uma imersão totalmente umbílica que satisfaz

$$2\alpha H_E++\beta K_E=\gamma\geq 0.$$

Também, estamos supondo que E está orientada com a aplicação de Gauss associada η_E (a orientação que aponta para o centro de E). Com esta orientação, as curvaturas principais de E, K_{1E} e K_{2E}, são tais que $K_{iE}=\frac{1}{R}$ e $\alpha+\beta K_{iE}>0$, $i=1,2$. Logo, $\alpha+\frac{\beta}{R}>0$.

Como $\alpha+\beta K_i>0$, $i=1,2$ e $\alpha+\frac{\beta}{R}>0$, afirmamos que os pontos (K_1,K_2) e $\left(\frac{1}{R},\frac{1}{R}\right)$ pertencem a uma mesma componente conexa da hipérbole em questão.

De fato, temos que $\alpha(x+y)+\beta xy=\gamma$ com $\beta \neq 0$.

Daí,

$$\alpha x+\alpha y+\beta xy=\gamma \Rightarrow y(\alpha+\beta x)=\gamma-\alpha x \Rightarrow y=\frac{\gamma-\alpha x}{\alpha+\beta x} \quad , \quad x \neq -\frac{\alpha}{\beta}$$

Assim,

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{(-\alpha)(\alpha+\beta x)-(\gamma-\alpha x)\beta}{(\alpha+\beta x)^2}=\frac{-\alpha^2-\alpha\beta x-\gamma\beta+\alpha\beta x}{(\alpha+\beta x)^2} \\ &= -\frac{(\alpha^2+\beta\gamma)}{(\alpha+\beta x)^2}<0. \end{aligned}$$

Em particular, y é decrescente em suas componentes conexas. Além disso,

$$y''(x)=\frac{(\alpha^2+\beta\gamma)\cdot 2\,(\alpha+\beta x)\beta}{(\alpha+\beta x)^4}$$

Como $\alpha+\beta K_1>0$ e $\alpha+\dfrac{\beta}{R}>0$, segue que $y''(K_1)$ e $y''\left(\dfrac{1}{R}\right)$ tem o mesmo sinal. Logo, (K_1,K_2) e $\left(\dfrac{1}{R},\dfrac{1}{R}\right)$ estão em uma mesma componente conexa da hipérbole. E como y é decrescente em suas componentes conexas, segue que

$$\left(K_1-\frac{1}{R}\right)\left[y(K_1)-y\left(\frac{1}{R}\right)\right]\leq 0, \text{ isto é, } \left(K_1-\frac{1}{R}\right)\cdot\left(K_2-\frac{1}{R}\right)\leq 0.$$

Se $\beta=0$, a desigualdade anterior também é verdadeira. Este é o conteúdo da afirmação abaixo.

Afirmação 4.2 *Se $\beta=0$ então* $\left(K_1-\dfrac{1}{R}\right)\left(K_2-\dfrac{1}{R}\right)\leq 0$

De fato,

$$\begin{aligned} 2\alpha H+\beta K=\gamma\geq 0 &\Rightarrow 2\alpha H=\gamma \\ 2\alpha R+\beta=\gamma R^2 &\Rightarrow 2\alpha=\gamma R. \end{aligned}$$

Logo,

$$2\alpha=2\alpha HR\Rightarrow H=\frac{1}{R}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}\left(K_1 - \frac{1}{R}\right)\left(K_2 - \frac{1}{R}\right) &= K - \frac{(K_1+K_2)}{R} + \frac{1}{R^2}\\ &= K - 2H\cdot\frac{1}{R} + \frac{1}{R^2}\\ &= K - 2H^2 + H^2\\ &= K - H^2 \leq 0,\end{aligned}$$

e a afirmação está provada.

Pelo Lema 2.2 temos que $\eta_3 \leq 0$. E como

$$\Delta^\sigma\left(\frac{1}{R}\cdot\psi_3 + n_3\right) = \frac{\gamma R}{\alpha^2+\beta\gamma}\cdot\left(K_1 - \frac{1}{R}\right)\left(K_2 - \frac{1}{R}\right)n_3,$$

segue que

$$\Delta^\sigma\left(\frac{1}{R}\cdot\psi_3 + n_3\right) \geq 0.$$

Vamos fazer mais uma afirmação, mas esta será provada no Apêndice da demonstração.

Afirmação 4.3 $\eta_3 = -\sqrt{1-|\nabla\psi_3|^2}$

Agora, lembre que $\psi(\partial S) \subset P = \{x_3 = 0\}$, donde $\psi_3 \equiv 0$ em ∂S. Disso e da afirmação anterior, concluimos que, ao longo de ∂S temos

$$\frac{1}{R}\cdot\psi_3 + n_3 = n_3 = -\sqrt{1-|\nabla\psi_3|^2} \leq -\sqrt{1-m^2}.$$

Agora, temos outra afirmação.

Afirmação 4.4 Δ^σ *é um operador diferencial parcial elíptico, linear de segunda ordem (localmente uniformemente elíptico).*

Demonstração :

De fato, vimos na demonstração da Proposição 2.2 que $\Delta^\sigma = \frac{1}{\lambda}\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)$. E assim a afirmação está provada.

Continuando, vimos que $\Delta^\sigma\left(\frac{1}{R}\psi_3+\eta_3\right) \geq 0 = \Delta^\sigma\left(-\sqrt{1-m^2}\right)$. Além disso, vimos que $\frac{1}{R}\psi_3+\eta_3 \leq -\sqrt{1-m^2}$ ao longo de ∂S. Assim, pelo Corolário 3.2, segue que $\frac{1}{R}\psi_3+\eta_3 \leq -\sqrt{1-m^2}$ em S. Portanto, em S, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R}\psi_3 \leq -\eta_3 - \sqrt{1-m^2} \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{R}\psi_3 \leq \sqrt{1-|\nabla\psi_3|^2} - \sqrt{1-m^2} \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{R}\psi_3 \leq 1 - \sqrt{1-m^2} \\
&\Rightarrow \quad \psi_3 \leq R(1-\sqrt{1-m^2}).
\end{aligned}$$

A Demonstração do item 2) é análogo.

■

Apêndice da Demonstração :

Agora, vamos provar a seguinte afirmação:

Afirmação 4.5 $\eta_3 = -\sqrt{1-|\nabla\psi_3|^2}$

Demonstração :

Temos que

$$\nabla\psi_3 = g^{11}\psi_{3u}\psi_u + g^{12}\psi_{3v}\psi_u + g^{21}\psi_{3u}\psi_v + g^{22}\psi_{3v}\psi_v$$

sendo (g^{ij}) a inversa da matriz (g_{ij}), onde

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} \langle\psi_u,\psi_u\rangle & \langle\psi_u,\psi_v\rangle \\ \langle\psi_v,\psi_u\rangle & \langle\psi_v,\psi_v\rangle \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\left(g^{ij}\right) = \frac{1}{\mathcal{T}}\begin{bmatrix} G_1 & -F_1 \\ -F_1 & E_1 \end{bmatrix},$$

onde

$$E_1 = \langle \psi_u, \psi_u \rangle \quad , \quad F_1 = \langle \psi_u, \psi_v \rangle \quad , \quad G_1 = \langle \psi_v, \psi_v \rangle \quad \text{e} \quad \mathcal{T} = E_1 G_1 - F_1^2.$$

Assim

$$\begin{aligned}
|\nabla \psi_3|^2 &= \langle \frac{G_1}{\mathcal{T}}\psi_{3u}\psi_u + \frac{-F_1}{\mathcal{T}}\psi_{3v}\psi_u + \frac{-F_1}{\mathcal{T}}\psi_{3u}\psi_v + \frac{E_1}{\mathcal{T}}\psi_{3v}\psi_v, \\
&\quad \frac{G_1}{\mathcal{T}}\psi_{3u}\psi_u + \frac{-F_1}{\mathcal{T}}\psi_{3v}\psi_u + \frac{-F_1}{\mathcal{T}}\psi_{3u}\psi_v + \frac{E_1}{\mathcal{T}}\psi_{3v}\psi_v \rangle \\
&= \frac{G_1^2}{\mathcal{T}^2} \cdot \psi_{3u}^2 E_1 - \frac{F_1 G_1}{\mathcal{T}^2}\psi_{3u}\psi_{3v}E_1 - \frac{F_1 G_1}{\mathcal{T}^2}\psi_{3u}^2 F_1 + \frac{E_1 G_1}{\mathcal{T}^2}\psi_{3u}\psi_{3v}F_1 \\
&\quad - \frac{F_1 G_1}{\mathcal{T}^2}\psi_{3u}\psi_{3v}E_1 + \frac{F_1^2}{\mathcal{T}^2}\psi_{3v}^2 E_1 + \frac{F_1^2}{\mathcal{T}^2}\psi_{3u}\psi_{3v}F_1 - \frac{F_1 E_1}{\mathcal{T}^2}\psi_{3v}^2 F_1 \\
&\quad - \frac{F_1 G_1}{\mathcal{T}^2}\psi_{3u}^2 F_1 + \frac{F_1^2}{\mathcal{T}^2}\psi_{3u}\psi_{3v}F_1 + \frac{F_1^2}{\mathcal{T}^2}\psi_{3u}^2 G_1 - \frac{E_1 F_1}{\mathcal{T}^2}\psi_{3u}\psi_{3v}G_1 \\
&\quad + \frac{E_1 G_1}{\mathcal{T}^2}\psi_{3u}\psi_{3v}F_1 - \frac{E_1 F_1}{\mathcal{T}^2}\psi_{3v}^2 F_1 - \frac{E_1 F_1}{\mathcal{T}^2}\psi_{3u}\psi_{3v}G_1 + \frac{E_1^2}{\mathcal{T}^2}\psi_{3v}^2 G_1 \\
&= \frac{G_1^2}{\mathcal{T}^2}\psi_{3u}^2 E_1 - \frac{2F_1 G_1}{\mathcal{T}^2}\psi_{3u}\psi_{3v}E_1 - \frac{F_1 G_1}{\mathcal{T}^2}\psi_{3u}^2 F_1 + \frac{2E_1 G_1}{\mathcal{T}^2}\psi_{3u}\psi_{3v}F_1 \\
&\quad - \frac{2E_1 F_1}{\mathcal{T}^2}\psi_{3u}\psi_{3v}G_1 - \frac{F_1 E_1}{\mathcal{T}^2}\psi_{3v}^2 F_1 + 2\frac{F_1^2}{\mathcal{T}^2}\psi_{3u}\psi_{3v}F_1 + \frac{E_1^2}{\mathcal{T}^2}\psi_{3v}^2 G_1 \\
&= \frac{E_1 G_1}{\mathcal{T}^2}\left(G_1\psi_{3u}^2 - 2F_1\psi_{3u}\psi_{3v} + E_1\psi_{3v}^2\right) \\
&\quad - \frac{F_1^2}{\mathcal{T}^2}\left(G_1\psi_{3u}^2 - 2F_1\psi_{3u}\psi_{3v} + E_1\psi_{3v}^2\right) \\
&= \frac{1}{\mathcal{T}}\left(G_1\psi_{3u}^2 - 2F_1\psi_{3u}\psi_{3v} + E_1\psi_{3v}^2\right)
\end{aligned}$$

Agora, veja que

$$\begin{aligned}
1 - \eta_3^2 &= \eta_1^2 + \eta_2^2 \\
&= \frac{(\psi_{2u}\psi_{3v} - \psi_{3u}\psi_{2v})^2}{\mathcal{T}} + \frac{(\psi_{1u}\psi_{3v} - \psi_{3u}\psi_{1v})^2}{\mathcal{T}} \\
&= \frac{\psi_{3u}^2}{\mathcal{T}}(\psi_{1v}^2 + \psi_{2v}^2) + \frac{\psi_{3v}^2}{\mathcal{T}}(\psi_{1u}^2 + \psi_{2u}^2) - \frac{2\psi_{3u}\psi_{3v}}{\mathcal{T}}(\psi_{2u}\psi_{2v} + \psi_{1u}\psi_{1v}) \\
&= \frac{\psi_{3u}^2}{\mathcal{T}}(\psi_{1v}^2 + \psi_{2v}^2) + \frac{\psi_{3v}^2}{\mathcal{T}}(\psi_{1u}^2 + \psi_{2u}^2) - \frac{2\psi_{3u}\psi_{3v}}{\mathcal{T}}(F_1 - \psi_{3u}\psi_{3v}) \\
&= \frac{\psi_{3u}^2}{\mathcal{T}}G_1 - \frac{2F_1\psi_{3u}\psi_{3v}}{\mathcal{T}} + \frac{\psi_{3v}^2}{\mathcal{T}}E_1
\end{aligned}$$

Assim,

$$|\nabla \psi_3|^2 = 1 - \eta_3^2 \Rightarrow \eta_3^2 = 1 - |\nabla \psi_3|^2.$$

Como η aponta para baixo, segue que

$$\eta_3 = -\sqrt{1 - |\nabla \psi_3|^2}.$$

A Demonstração do item 2) é análoga.

$\blacksquare$

Agora vamos enunciar e provar um Teorema.

Teorema 4.1 *Seja S uma superfície compacta com bordo ∂S, P um plano e $\psi : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ um mergulho ELW não – planar satisfazendo $2\alpha H + \beta K = \gamma \geq 0$, com $\psi(\partial S) \subset P$. Então, se $\alpha \geq 0$ ou $\beta \geq 0$, a altura máxima de $\psi(S)$ em relação a P é*

$$\frac{2|\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta\gamma}|}{\gamma}, \quad \textit{quando } \gamma \neq 0 \quad \textit{e} \quad \frac{|\beta|}{|\alpha|}, \textit{ quando } \gamma = 0.$$

Demonstração :

Suponha, sem perda de generalidade, que $P = \{z = 0\}$. Como S é não – planar, podemos supor que $S \cap \{z > 0\} \neq \emptyset$. Seja $Q \in S \cap \{z > 0\}$ o ponto de S mais distante do plano P e seja $P_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = a\}$.

Sabemos que, em uma vizinhança de Q, S é um gráfico sobre o plano P_a, desde que $z_Q - a > 0$ seja suficientemente pequeno. Seja $c = \inf A$, onde $A = \{0 \leq a < z_Q /$ em uma vizinhança de Q, S é um gráfico sobre P_a, com bordo em $P_a\}$. Para cada $a \in A$, seja S_a a tal vizinhança.

Na demonstração do Lema 4.1, vimos que $|\nabla \psi_3|^2 = 1 - n_3^2$, donde $|\nabla \psi_3| \leq 1$ em S. Agora, para cada $a \in A$, seja h_a a distância de Q ao plano P_a. Como S_a é gráfico sobre P_a e $\partial S_a \subset P_a$ então tomando $m = 1$ no Lema 4.1, concluimos que $h_a \leq R$, onde R é como no Lema 4.1. Assim, se h_c é a distância entre Q e P_c, temos que $h_c \leq R$.

Agora, seja S_c a componente conexa de $S \cap \{z \geq c\}$ que contém Q, e seja $\widetilde{S_c}$ a reflexão de S_c em torno de P_c.

Afirmamos que $\widetilde{S}_c$ intercepta P.

De fato, suponha que $\widetilde{S}_c$ não intercepta P. Note que S_c não é gráfico sobre P_c, já que $c = \inf A$. (Se S fosse gráfico sobre P_c, teríamos $\inf A < c$). Além disso, como $c = \inf A$, existe $D \in S_c \cap P_c$ tal que S_c é ortogonal a P_c em D. Daí, sendo $\widetilde{S}$ a porção de S entre P e P_c, segue que $\widetilde{S}$ e $\widetilde{S}_c$ são tangentes em D. Pelo Princípio da Tangência no bordo aplicado a equação elíptica $2\alpha H + \beta K = \gamma$, concluimos que $\widetilde{S} = \widetilde{S}_c$. Absurdo, pois o bordo de $\widetilde{S}_c$ tem uma componente conexa (em P_c) enquanto o bordo de $\widetilde{S}$ possui duas componentes (uma em P e a outra em P_c).

■

Seja S uma superfície compacta, orientável e com bordo ∂S e seja $\psi : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão linear de Weingarten satisfazendo $2aH+bK = c$. Seja $N : S \longrightarrow S^2$ a aplicação de Gauss de S.

Seja U uma vizinhança coordenada de S, com coordenadas (u, v). Em U, temos

$$\begin{aligned} dN \wedge d\psi &= (N_u du + N_v dv) \wedge (\psi_u du + \psi_v dv) \\ &= (N_u \wedge \psi_v) du \wedge dv + (N_v \wedge \psi_u) dv \wedge du \\ &= (N_u \wedge \psi_v - \psi_u \wedge N_v) du \wedge dv \\ &= -2H(\psi_u \wedge \psi_v) du \wedge dv \end{aligned}$$

onde o símbolo $\wedge$ dentro dos parênteses é o produto vetorial em $\mathbb{R}^3$ e o símbolo $\wedge$ em $du \wedge dv$ é o produto exterior entre as formas de grau 1 du e dv.

Agora note que

$$d\psi \wedge d\psi = (\psi_u du + \psi_v dv) \wedge (\psi_u du + \psi_v dv) = 2(\psi_u \wedge \psi_v) du \wedge dv.$$

Logo,

$$dN \wedge d\psi = -H d\psi \wedge d\psi.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} dN \wedge dN &= (N_u du + N_v dv) \wedge (N_u du + N_v dv) = 2(N_u \wedge N_v) du \wedge dv \\ &= 2K(\psi_u \wedge \psi_v) du \wedge dv = K d\psi \wedge d\psi. \end{aligned}$$

Assim, sendo d a diferencial exterior, concluimos que

$$\begin{aligned} -2ad(N \wedge d\psi) + bd(N \wedge dN) &= -2adN \wedge d\psi + bdN \wedge dN \\ &= -2a(-Hd\psi \wedge d\psi) + bKd\psi \wedge d\psi \\ &= (2aH + bK)d\psi \wedge d\psi = cd(\psi \wedge d\psi) \end{aligned}$$

Segue, do Teorema de Stokes, que

$$-2a \int_{\partial S} N \wedge d\psi + b \int_{\partial S} N \wedge dN = c \int_{\partial S} \psi \wedge d\psi.$$

(Fórmula do Fluxo).

Observação 4.1 *i) Em* $\int_{\partial S} \psi \wedge d\psi$*,* $\psi \wedge d\psi$ *é um abuso de notação para uma das seguintes formas diferenciais de grau* 1*:*

$$\psi_2 d\psi_3 - \psi_3 d\psi_2,\ \psi_1 d\psi_3 - \psi_3 d\psi_1,\ \psi_1 d\psi_2 - \psi_2 d\psi_1.$$

Observações análogas valem para $N \wedge d\psi$ *e* $N \wedge dN$*.*

ii) $dN \wedge d\psi$ *é um abuso de notação para uma das seguintes formas diferenciais de grau* 2*:*

$$dN_2 \wedge d\psi_3 - dN_3 \wedge d\psi_2, dN_1 \wedge d\psi_3 - dN_3 \wedge d\psi_1,\ dN_1 \wedge d\psi_2 - dN_2 \wedge d\psi_1.$$

Sabemos que a área algébrica da curva $\psi(\partial S)$ é dada por

$$\overline{A} = \frac{1}{2} \int_{\partial S} \psi \wedge d\psi,$$

onde a $\psi \wedge d\psi$ é como na Observação 4.1.

Além disso, tal área depende somente da curva ∂S e não de sua representação $\psi\Big|_{\partial S}$. Também, se $\psi(\partial S)$ é uma curva planar de Jordan, então $\left|\overline{A}\right|$ é a área limitada por $\psi(\partial S)$ no plano.

Teorema 4.2 *Seja S uma superfície compacta com bordo ∂S e $\psi : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão linear de Weingarten satisfazendo $2aH + bK = c$. Suponha que $\psi(\partial S) \subset \{x_3 = 0\}$ é uma curva de Jordan convexa e que $|\nabla\psi_3| \leq m \leq 1$ ao longo de ∂S. Sejam L o comprimento da curva $\psi(\partial S)$ e A a área limitada por essa curva. Então*

$$|2aH + bK| \leq \frac{|a|mL + |b|m^2\pi}{A}.$$

Além disso, se S é um disco topológico e a igualdade ocorre na desigualdade acima, então $\psi(S)$ é planar ou uma calota esférica.

Demonstração:

Seja t um campo vetorial tangente e unitário ao longo de ∂S. Veja que $-dN(t) = = K_n t + \lambda \cdot N \wedge t$, onde K_n é a curvatura normal ao longo de ∂S e $\lambda : \partial S \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função C^∞. De fato, como dN_P aplica T_PS em T_PS e como $\{t, N \wedge t\}$ é uma base de T_PS segue que $-dN(t) = \alpha t + \lambda N \wedge t$, para certas funções α, $\lambda : \partial S \longrightarrow \mathbb{R}$. Mas note que $\alpha = \langle -dN(t), t\rangle = K_n$.

Temos então que $-dN(t) = K_n t + \lambda N \wedge t$. Segue, por Olinde – Rodrigues que ∂S é uma linha de curvatura se, e somente se, $\lambda \equiv 0$.

Agora, pela Fórmula do Fluxo, temos

$$-2a\int_{\partial S} N \wedge d\psi + b\int_{\partial S} N \wedge dN = c\int_{\partial S} \psi \wedge d\psi.$$

Logo, tomando $v_3 = (0, 0, 1)$, temos que

$$-2a\int_{\partial S}\langle N \wedge d\psi, v_3\rangle + b\int_{\partial S}\langle N \wedge dN, v_3\rangle = c\int_{\partial S}\langle \psi \wedge d\psi, v_3\rangle,$$

onde

$$\langle N \wedge d\psi, v_3\rangle = N_1 \cdot d\psi_2 - N_2 d\psi_1$$

$$\langle N \wedge dN, v_3 \rangle = N_1 \cdot dN_2 - N_2 dN_1$$

$$\langle \psi \wedge d\psi, v_3 \rangle = \psi_1 \cdot d\psi_2 - \psi_2 d\psi_1.$$

Assim,

$$-2a \int_{\partial S} [N_1 d\psi_2 - N_2 d\psi_1] + b \int_{\partial S} [N_1 dN_2 - N_2 dN_1] = c \int_{\partial S} [\psi_1 d\psi_2 - \psi_2 d\psi_1].$$

Assim, se $\gamma : [j, l] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma parametrização para ∂S, segue que

$$\begin{aligned}
& -2a \int_j^l [N_1(\gamma(s)) d\psi_{2\gamma(s)}(\gamma'(s)) - N_2(\gamma(s)) d\psi_{1\gamma(s)}(\gamma'(s))] ds \\
& +b \int_j^l [N_1(\gamma(s)) dN_{2\gamma(s)}(\gamma'(s)) - N_2(\gamma(s)) dN_{1\gamma(s)}(\gamma'(s))] ds \\
& = c \int_j^l [\psi_1(\gamma(s)) d\psi_{2\gamma(s)}(\gamma'(s)) - \psi_2(\gamma(s)) d\psi_{1\gamma(s)}(\gamma'(s))] ds \\
\Rightarrow \quad & -2a \int_j^l \langle N(\gamma(s)) \wedge d\psi_{\gamma(s)}(\gamma'(s)), v_3 \rangle ds \\
& +b \int_j^l \langle N(\gamma(s)) \wedge dN_{\gamma(s)}(\gamma'(s)), v_3 \rangle ds \\
& = c \int_j^l \langle \psi(\gamma(s)) \wedge d\psi_{\gamma(s)}(\gamma'(s)), v_3 \rangle ds.
\end{aligned}$$

Identificando $d\psi_{\gamma(s)}(\gamma'(s))$ com $\gamma'(s)$, temos:

$$\begin{aligned}
& -2a \int_j^l \langle N(\gamma(s)) \wedge \gamma'(s), v_3 \rangle ds + b \int_j^l \langle N(\gamma(s)) \wedge dN_{\gamma(s)}(\gamma'(s)), v_3 \rangle ds \\
= \quad & c \int_j^l \langle \psi(\gamma(s)) \wedge d\psi_{\gamma(s)}(\gamma'(s)), v_3 \rangle ds.
\end{aligned}$$

Daí

$$-2a \int_{\partial S} \langle N \wedge t, v_3 \rangle + b \int_{\partial S} \langle N \wedge dN(t), v_3 \rangle = c \int_{\partial S} \langle \psi \wedge d\psi, v_3 \rangle ds.$$

Continuando,

$$\begin{aligned}
|c| 2A \quad &= \quad \left| c \int_{\partial S} \langle \psi \wedge d\psi, v_3 \rangle \right| \\
&= \quad \left| -2a \int_{\partial S} \langle N \wedge t, v_3 \rangle + b \int_{\partial S} \langle N \wedge dN(t), v_3 \rangle \right| \\
&\leq \left| -2a \int_{\partial S} \langle N \wedge t, v_3 \rangle \right| + \left| b \int_{\partial S} \langle N \wedge dN(t), v_3 \rangle \right|.
\end{aligned}$$

Veja que

$$\begin{aligned} N \wedge dN(t) &= N \wedge (-K_n t - \lambda N \wedge t) = -K_n N \wedge t - \lambda N \wedge (N \wedge t) \\ &= -K_n N \wedge t + \lambda (N \wedge t) \wedge N = -K_n N \wedge t + \lambda t. \end{aligned}$$

Logo,

$$\langle N \wedge dN(t), v_3 \rangle = -K_n \langle N \wedge t, v_3 \rangle.$$

Daí,

$$|c| 2A \leq \left| -2a \int_{\partial S} \langle N \wedge t, v_3 \rangle \right| + \left| -b \int_{\partial S} K_n \langle N \wedge t, v_3 \rangle \right|.$$

Note que $t \wedge v_3$ é um vetor normal a ∂S. Como

$$K_n = \mathcal{K} \langle t \wedge v_3, N \rangle = \mathcal{K} det(t, v_3, N) = \mathcal{K} det(N, t, v_3) = \mathcal{K} \langle N \wedge t, v_3 \rangle,$$

onde $\mathcal{K}$ é a curvatura da curva ∂S, segue que

$$|c| 2A \leq \left| 2a \int_{\partial S} \langle N \wedge t, v_3 \rangle \right| + \left| b \int_{\partial S} \mathcal{K} \langle N \wedge t, v_3 \rangle^2 \right|.$$

Agora, vamos provar uma afirmação.

Afirmação 4.6 $\langle N \wedge t, v_3 \rangle^2 = |\nabla \psi_3|^2$

Demonstração:

Como $\{t \wedge v_3, v_3, t\}$ é base do $\mathbb{R}^3$, segue que $N = xt \wedge v_3 + y v_3 + z t$. Daí,

$$x = \langle N, t \wedge v_3 \rangle \quad , \quad y = \langle N, v_3 \rangle \quad \text{e} \quad z = 0.$$

Logo,

$$N = \langle N, t \wedge v_3 \rangle t \wedge v_3 + \langle N, v_3 \rangle v_3.$$

Além disso,

$$1 = \langle N, N \rangle = \langle xt \wedge v_3 + y v_3, xt \wedge v_3 + y v_3 \rangle = x^2 + y^2,$$

isto é,

$$\langle N, t \wedge v_3 \rangle^2 + \langle N, v_3 \rangle^2 = 1 \Rightarrow \langle N, t \wedge v_3 \rangle^2 = 1 - \langle N, v_3 \rangle^2.$$

Lembre que

$$\langle t \wedge v_3, N \rangle = det(t, v_3, N) = det(N, t, v_3) = \langle N \wedge t, v_3 \rangle.$$

Daí, $\langle N \wedge t, v_3 \rangle^2 = 1 - \langle N, v_3 \rangle^2$. Vimos, na demonstração do Lema 4.1 que $\langle N, v_3 \rangle^2 = 1 - |\nabla \psi_3|^2$. Daí, $\langle N \wedge t, v_3 \rangle^2 = |\nabla \psi_3|^2$.

E assim, a afirmação está provada.

Logo,

$$\begin{aligned} |c|2A &\leq \left| 2a \int_{\partial S} \langle N \wedge t, v_3 \rangle \right| + \left| b \int_{\partial S} \mathcal{K} \langle N \wedge t, v_3 \rangle^2 \right| \\ &\leq 2|a| \int_{\partial S} |\langle N \wedge t, v_3 \rangle| + |b| \int_{\partial S} |\mathcal{K}| \langle N \wedge t, v_3 \rangle^2 = \\ &= 2|a| \int_{\partial S} |\nabla \psi_3| + |b| \int_{\partial S} |\mathcal{K}| \cdot |\nabla \psi_3|^2 \leq 2|a| \int_{\partial S} m + |b| \int_{\partial S} |\mathcal{K}| m^2 \\ &= 2|a| m L + |b| m^2 \int_{\partial S} |\mathcal{K}|. \end{aligned}$$

Como $\psi(\partial S)$ é uma curva convexa, sua curvatura não muda de sinal. Daí,

$$\int_{\partial S} |\mathcal{K}| = \left| \int_{\partial S} \mathcal{K} \right|.$$

Assim

$$|c|2A \leq 2|a| m L + |b| m^2 \cdot 2\pi.$$

Portanto,

$$|c| \leq \frac{|a| m L + |b| m^2 \pi}{A}.$$

Agora, vamos analisar o caso da igualdade.

Façamos uma afirmação.

Afirmação 4.7 *Se a igualdade ocorre na desigualdade anterior, então* $\langle N \wedge t, v_3 \rangle$ *e* $\langle N, v_3 \rangle$ *são constantes ao longo de* ∂S*.*

Esta afirmação será provada no Apêndice da demonstração. Agora, vamos obter uma consequência desta afirmação.

Suponha então que $|c| = \dfrac{|a|mL + |b|m^2\pi}{A}$.

Daí, pela afirmação, $\langle N, v_3 \rangle$ e $\langle N \wedge t, v_3 \rangle$ são constantes ao longo de ∂S. Derivando estes dois termos com relação a t (parâmetro da curva),temos

$$0 = \langle N', v_3 \rangle = \langle -K_n t - \lambda N \wedge t, v_3 \rangle = -\lambda \langle N \wedge t, v_3 \rangle$$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (N \wedge t)', v_3 \rangle = \langle N' \wedge t + N \wedge t', v_3 \rangle \\ &= \langle (-K_n t - \lambda N \wedge t) \wedge t, v_3 \rangle + \langle N \wedge t', v_3 \rangle \\ &= \langle -\lambda (N \wedge t) \wedge t, v_3 \rangle + \langle N \wedge t', v_3 \rangle \\ &= -\lambda \langle -N, v_3 \rangle + \langle N \wedge t', v_3 \rangle. \end{aligned}$$

Daí

$$\lambda \langle N, v_3 \rangle + \langle N \wedge t', v_3 \rangle = 0.$$

A afirmação a seguir será provada no Apêndice da demonstração.

Afirmação 4.8 $\langle N \wedge t', v_3 \rangle = \langle N \wedge K_g(N \wedge t), v_3 \rangle$, *onde* K_g *é a curvatura geodésica de* ∂S. *Segue desta afirmação que*

$$\langle N \wedge t', v_3 \rangle = K_g \langle N \wedge (N \wedge t), v_3 \rangle = K_g \langle -t, v_3 \rangle = 0.$$

Logo, $\lambda \langle N, v_3 \rangle = 0$.

Suponha que exista $P \in S$ tal que $\lambda(P) \neq 0$. Daí,

$$\langle N, v_3 \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle N \wedge t, v_3 \rangle = 0$$

em P¿ Absurdo, já que devemos ter $\langle N, v_3 \rangle^2 + \langle N, t \wedge v_3 \rangle^2 = 1$. Assim, $\lambda \equiv 0$ e portanto ∂S é uma linha de curvatura.

Portanto, se a igualdade ocorre na desigualdade

$$|2aH + bK| \leq \frac{|a|mL + |b|m^2\pi}{A},$$

então ∂S é uma linha de curvatura.

Agora, suponha que S é um disco topológico.

Vamos considerar três casos:

1) $a^2 + bc > 0$.

Neste caso, a imersão é ELW. Como $\psi(\partial S)$ é uma linha de curvatura segue, do Teorema 2.2, que $\psi(S)$ é umbílica. Assim, $\psi(S)$ é planar ou uma calota esférica.

2) $a^2 + bc < 0$.

Primeiramente, afirmamos que S não possui pontos umbílicos.

De fato, sabemos que $P \in S$ é umbílico se, e somente se $H(P)^2 = K(P)$.

Assim, como $2aH + bK = c$, segue que

$$2aH(P) + bH(P)^2 = c \Rightarrow bH(P)^2 + 2aH(P) - c = 0.$$

Como $\Delta = 4a^2 - 4b(-c) = 4(a^2 + bc) < 0$, concluimos que $H(P)$ não é solução de $bx^2 + 2ax - c = 0$. Assim, S não possui pontos umbílicos.

Antes de prosseguir, uma observação. O Teorema de Poincaré – Hopf nos diz que, em uma superfície compacta com bordo, a soma dos índices das singularidades de um campo de retas, que é transversal ao longo do bordo e tem um número finito de singularidades, é igual a característica de Euler da superfície.

Continuando, como ∂S é linha de curvatura, sua curvatura normal em cada ponto $P \in \partial S$ é igual a uma das curvaturas principais em P.

Também, como S não possui pontos umbílicos, cada ponto $P \in S$ possui exatamente duas direções principais.

Afirmação 4.9 *Em ∂S temos: $K_n \equiv K_1$ ou $K_n \equiv K_2$*

Demonstração:

Suponha, sem perda de generalidade, que exista $Q \in \partial S$ tal que $K_n(Q) = = K_1(Q)$. Considere o conjunto $A = \{P \in \partial S / K_n(P) = K_1(P)\}$. Veja que $A \neq \emptyset$.

Seja $T \in A$. Como $K_1 > K_2$ em S segue que $K_n(T) > K_2(T)$.

Pela continuidade das funções K_n e K_2, existe uma vizinhança aberta $V_T \subset \subset \partial S$ de T tal que $K_n(P) > K_2(P)$, $\forall P \in V_T$. Assim, $K_n = K_1$ em V_T. Portanto A é aberto em ∂S. Como K_n e K_1 são contínuas, A é fechado em ∂S. Como ∂S é conexo, segue que $A = \partial S$.

Agora, considere em S o campo de retas associado a curvatura principal diferente da curvatura normal K_n de ∂S. Como a reta tangente a ∂S em P é uma direção principal para todo $P \in \partial S$, segue que esse campo de retas é perpendicular a ∂S. Além disso, tal campo não possui singularidades. Daí, pelo Teorema de Poincaré – Hopf, a característica de Euler de S é zero. Absurdo, pois S é um disco topológico, logo sua característica de Euler é 1.

3) $a^2 + bc = 0$.

$a^2 + bc = 0 \Rightarrow (a + bK_1)(a + bK_2) = 0$, onde K_1 e K_2 são as curvaturas principais da imersão. Assim , se $P \in \partial S$ temos $a + bK_1(P) = 0$ ou $a + bK_2(P) = 0$.

Lembre que estamos supondo $|2aH + bK| = \dfrac{|a|mL + |b|m^2\pi}{A}$. Neste caso, supondo $a \neq 0$, afirmamos que $a + bK_n(P) \neq 0 \quad \forall P \in \partial S$.

De fato, observando os cálculos que nos levam a concluir a desigualdade $2|c|A \leq 2|a|mL + 2|b|m^2\pi$ e supondo que a igualdade ocorre nesta desigualdade, veja que teremos

$$\left| -2a \int_{\partial S} \langle N \wedge t, v_3 \rangle - b \int_{\partial S} K_n \langle N \wedge t, v_3 \rangle \right| =$$

$$= \left| 2a \int_{\partial S} \langle N \wedge t, v_3 \rangle \right| + \left| b \int_{\partial S} K_n \langle N \wedge t, v_3 \rangle \right| .$$

Daí, existe $M \geq 0$ tal que $2a \int_{\partial S} \langle N \wedge t, v_3 \rangle = Mb \int_{\partial S} K_n \langle N \wedge t, v_3 \rangle$. Lembre que $\langle N \wedge t, v_3 \rangle$ é constante ao longo de ∂S. Como $K_n = \mathcal{K}\langle N \wedge t, v_3 \rangle$, e $\mathcal{K}$ não muda de sinal, já que a curva é convexa, segue que K_n não muda de sinal. Assim, e como $2a \int_{\partial S} \langle N \wedge t, v_3 \rangle = Mb \int_{\partial S} K_n \langle N \wedge t, v_3 \rangle$, com $M \geq 0$, segue que a e bK_n têm o mesmo sinal. Daí, $a + bK_n \neq 0$ em ∂S. Note que se $\langle N \wedge t, v_3 \rangle = 0$ em ∂S então $K_n \equiv 0$ em ∂S. Nesse caso, como $a \neq 0$, também teremos $a + bK_n \neq 0$ em ∂S.

Assim, se $P \in \partial S$ temos:

i) $a + bK_n(P) \neq 0$

ii) $a + bK_1(P) = 0$ ou $a + bK_2(P) = 0$

Portanto, ∂S não possui pontos umbílicos. (Lembre que $K_n(P) = K_1(P)$ ou $K_n(P) = K_2(P)$). Analogamente ao que foi feito no caso $a^2 + bc < 0$, mostra - se que $K_n \equiv K_1$ ou $K_n \equiv K_2$.

Observação 4.2 *Se $a = 0$ então $b^2 K_1 K_2 = 0$. Daí $K \equiv 0$. Portanto $c = 0$, donde $\dfrac{|b| m^2 \pi}{A} = 0$. Absurdo!*

Vamos voltar ao caso $a \neq 0$. Vimos que ∂S não possui pontos umbílicos e que a curvatura principal K_n é diferente da curvatura principal constante $-\dfrac{a}{b}$.

Agora, vamos fazer uma afirmação.

Afirmação 4.10 *Se P é um ponto interior de S e Q é o ponto de ∂S mais próximo de P então a geodésica minimizante γ que liga P a Q encontra o bordo ortogonalmente.*

Para provar esta afirmação, vamos utilizar o conceito de variação de uma curva. Um pequeno comentário sobre este conceito é encontrado no Capítulo 1 desta dissertação.

Prova da Afirmação :

Suponha que a geodésica minimizante γ está definida no intervalo $[0, l]$ com $\gamma(0) = Q$ e $\gamma(l) = P$ e que $\alpha : (-c, c) \longrightarrow \{x_3 = 0\}$ seja parametrização para ∂S com $\alpha(0) = Q$. O seguinte resultado será provado após a demonstração da afirmação.

Lema 4.2 *Existe uma variação $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, l] \longrightarrow S$ de γ tal que $f(s, 0) =$ $= \alpha(s)$ e $f(s, l) = P$, $\forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.*

Seja $V(t) = \dfrac{\partial f}{\partial s}(0, t)$ o campo variacional de f. Veja que

$$\begin{aligned} f(s,l) = P \quad \forall s \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial s}(s,l) = 0 \quad \forall s \in (-\epsilon, \epsilon) \\ &\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial s}(0,l) = 0 \Rightarrow V(l) = 0. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} f(s,0) = \alpha(s) \quad \forall s \in (-\epsilon, \epsilon) \quad &\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial s}(s,0) = \alpha'(s) \quad \forall s \\ &\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial s}(0,0) = \alpha'(0) \Rightarrow V(0) = \alpha'(0). \end{aligned}$$

Agora, se $c : [0, a] \longrightarrow S$ é uma curva, definimos, no Capítulo 1, o comprimento de c e a energia de c por

$$L(c) = \int_0^a \left|\frac{dc}{dt}\right| dt \quad \text{e} \quad E(c) = \int_0^a \left|\frac{dc}{dt}\right|^2 dt$$

respectivamente.

Naquele capítulo, mostramos que $L(c)^2 \leq aE(c)$ e que a igualdade ocorre se, e somente se, o parâmetro de c é proporcional ao comprimento de arco.

Agora, vamos definir as funções $L : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ e $E : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$L(s) = \int_0^l \left|\frac{\partial f}{\partial t}(s,t)\right| dt \quad \text{e} \quad E(s) = \int_0^l \left|\frac{\partial f}{\partial t}(s,t)\right|^2 dt.$$

Temos:

$$l \cdot E(s) \geq L(s)^2 \geq d(P, \alpha(s))^2 \geq d(P, \alpha(0))^2 = L(0)^2.$$

Como $\gamma : [0, l] \longrightarrow S$ é geodésica, seu parâmetro é proporcional ao comprimento de arco. Daí,

$$L(0)^2 = lE(0) \Rightarrow lE(s) \geq lE(0) \Rightarrow E(s) \geq E(0) \quad \forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \Rightarrow E'(0) = 0.$$

Agora, utilizando a fórmula da primeira variação da energia (veja capítulo 1), temos:

$$0 = \frac{1}{2}E'(0) = -\int_0^l \left\langle V(t), \frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt}(t) \right\rangle dt - \langle V(0), \gamma'(0) \rangle + \langle V(l), \gamma'(l) \rangle .$$

Como γ é geodésica, segue que $\dfrac{D}{dt}\dfrac{d\gamma}{dt} \equiv 0$. Além disso, lembre que $V(l) = 0$ e $V(0) = \alpha'(0)$. Portanto, $\langle \alpha'(0), \gamma'(0) \rangle = 0$.

■

Agora, vamos provar o lema.

Demonstração:

Veja que $\gamma(t) = \exp_Q(t\gamma'(0))$. Seja $\widetilde{U}$ uma vizinhança de 0 em T_QS tal que $\exp_Q : \widetilde{U} \longrightarrow U$ é difeomorfismo. E seja $\widetilde{\alpha} : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \widetilde{U}$ tal que $\exp_Q(\widetilde{\alpha}(s)) = = \alpha(s)$.

Veja que

$$\exp_Q(0) = Q = \alpha(0) = \exp_Q(\widetilde{\alpha}(0)) \Rightarrow \widetilde{\alpha}(0) = 0.$$

Seja $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, l] \longrightarrow T_QS$

$$g(s,t) = \left(1 - \frac{t}{l}\right)\widetilde{\alpha}(s) + t\gamma'(0).$$

Veja que $g(s, 0) = \widetilde{\alpha}(s)$ e $g(s, l) = l \cdot \gamma'(0)$.

Defina

$$f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, l] \longrightarrow S$$

$$f(s,t) = \exp_Q(g(s,t)).$$

Veja que

$$\begin{aligned} f(s,0) &= \exp_Q(g(s,0)) = \exp_Q(\widetilde{\alpha}(s)) = \alpha(s) \\ f(s,l) &= \exp_Q(g(s,l)) = \exp_Q(l \cdot \gamma'(0)) = \gamma(l) = P \\ f(0,t) &= \exp_Q(g(0,t)) = \exp_Q\left(\left(1 - \frac{t}{l}\right)\widetilde{\alpha}(0) + t\gamma'(0)\right) \\ &= \exp_Q(t\gamma'(0)) = \gamma(t) \end{aligned}$$

■

Mostramos então que a geodésica minimizante γ que liga os pontos P e Q, encontra o bordo ortogonalmente. Por [20](Lema 3), γ não possui pontos umbílicos e assim P é não – umbílico. Assim a imersão não possui pontos umbílicos. Raciocinando como no caso $a^2 + bc < 0$, segue que a igualdade não é possível.

Apêndice da Demonstração:

Afirmação 4.11 *Se a igualdade ocorre na desigualdade*

$$|2aH + bK| \leq \frac{|a|mL + |b|m^2\pi}{A}$$

então, $\langle N, v_3\rangle$ *e* $\langle N \wedge t, v_3\rangle$ *são constantes ao longo de* ∂S.

Demonstração :

Resumindo cálculos feitos anteriormente, vimos que

$$\begin{aligned} 2|c|A &\leq \left|2a\int_{\partial S}\langle N \wedge t, v_3\rangle\right| + \left|b\int_{\partial S}\mathcal{K}\langle N \wedge t, v_3\rangle^2\right| \\ &\leq 2|a|\int_{\partial S}|\langle N \wedge t, v_3\rangle| + |b|\int_{\partial S}|\mathcal{K}|\left|\langle N \wedge t, v_3\rangle^2\right| \\ &\leq 2|a|\int_{\partial S} m + |b|\int_{\partial S}|\mathcal{K}|m^2 \\ &= 2|a|mL + |b|m^2 \cdot 2\pi. \end{aligned}$$

Assim, se a igualdade ocorre, teremos

$$2|a|\int_{\partial S}|\langle N \wedge t, v_3\rangle| + |b|\int_{\partial S}|\mathcal{K}|\left|\langle N \wedge t, v_3\rangle^2\right| = 2|a|\int_{\partial S} m + |b|\int_{\partial S}|\mathcal{K}|m^2,$$

donde

$$2|a|\int_{\partial S}(|\langle N\wedge t, v_3\rangle| - m) + |b|\int_{\partial S}|\mathcal{K}|\left(\langle N\wedge t, v_3\rangle^2 - m^2\right) = 0.$$

Como $|\langle N\wedge t, v_3\rangle| \leq m$ segue que

$$2|a|\int_{\partial S}(|\langle N\wedge t, v_3\rangle| - m) = 0 \qquad \text{e} \qquad |b|\int_{\partial S}|\mathcal{K}|\left(\langle N\wedge t, v_3\rangle^2 - m^2\right) = 0.$$

Daí,

$$|\langle N\wedge t, v_3\rangle| \equiv m,$$

donde

$$\langle N\wedge t, v_3\rangle \equiv m \qquad \text{ou} \qquad \langle N\wedge t, v_3\rangle \equiv -m.$$

Agora, temos que

$$\langle N, v_3\rangle^2 = 1 - m^2,$$

donde

$$\langle N, v_3\rangle \equiv \sqrt{1-m^2} \qquad \text{ou} \qquad \langle N, v_3\rangle \equiv -\sqrt{1-m^2}$$

■

Teorema 4.3 *Seja S uma superfície compacta e $\psi : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ um gráfico (isto é, $\psi(S)$ é um gráfico) com bordo planar conexo e convexo $\psi(\partial S) \subset \{x_3 = 0\}$. Suponha que exista m, $0 < m \leq 1$ tal que $|\nabla\psi_3| \leq m$ ao longo de ∂S. Se a, b são números reais não – negativos, com $a + b \neq 0$, então*

$$\min_{P\in S}(2aH + bK) \leq \frac{amL + bm^2\pi}{A}$$

para toda Aplicação de Gauss $N : S \longrightarrow S^2$, onde L e A denotam o comprimento de $\psi(\partial S)$ e a área limitada pela curva $\psi(\partial S)$, respectivamente.

Além disso, se a igualdade ocorre, então $\psi(S)$ é uma calota esférica.

Observação 4.3 *Acima $\nabla\psi_3$ denota o gradiente de ψ_3, a terceira coordenada da imersão ψ, em relação a métrica induzida.*

Prova:

Seja c o mínimo da função $2aH + bK$ em S, para a aplicação de Gauss $N : S \longrightarrow S^2$. Se $c \leq 0$, não há o que fazer. Suponha então $c > 0$. Seja $\sigma = a\langle d\psi, d\psi\rangle + b\langle d\psi, -dN\rangle$. Sendo $\{e_1, e_2\}$ uma base ortonormal que diagonaliza dN em $P \in S$, temos

$$\begin{aligned}
\sigma(e_1,e_1)\cdot\sigma(e_2,e_2) &= \prod_{i=1}^{2}\left[a\langle d\psi(e_i), d\psi(e_i)\rangle + b\langle d\psi(e_i), -dN(d\psi(e_i))\rangle\right] \\
&= \prod_{i=1}^{2}[a + b\langle d\psi(e_i), K_i d\psi(e_i)\rangle] \\
&= (a + bK_1)(a + bK_2) \\
&= a^2 + ab(K_1 + K_2) + b^2 K_1 K_2 \\
&= a^2 + b(2aH + bK) \geq a^2 + bc > 0
\end{aligned}$$

Também,

$$\sigma(e_1, e_2) = a\langle d\psi(e_1), d\psi(e_2)\rangle + b\langle d\psi(e_1), -dN(d\psi(e_2))\rangle = 0.$$

Se $v = xe_1 + ye_2$ é um vetor não – nulo em $T_P S$ então

$$\sigma(v, v) = \sigma(xe_1 + ye_2, xe_1 + ye_2) = x^2\sigma(e_1, e_1) + y^2\sigma(e_2, e_2).$$

Da igualdade anterior, e como $\sigma(e_1, e_1)$ e $\sigma(e_2, e_2)$ tem o mesmo sinal, segue que σ é definida.

Supondo que $\psi(S)$ é não – planar, podemos admitir que existe um ponto P de S em $\{x_3 > 0\}$. Então, repetindo o argumento utilizado na demonstração do Lema 4.1, existe um ponto $q \in S \cap \{x_3 > 0\}$ com curvatura gaussiana positiva. Suponha que η é a orientação de S para a qual $K_1(q) > 0$ e $K_2(q) > 0$.

Como $a \geq 0$, $b \geq 0$ e $a + b > 0$ segue que $a + bK_1(q) > 0$ e $a + bK_2(q) > 0$. Assim $a + bK_1 > 0$ e $a + bK_2 > 0$ em S, donde σ é positiva definida para n.

Se a orientação N de S é diferente de n então $H_N = -H_n$, onde H_N é a curvatura média de S relativa a orientação N. Como $H_n(q) > 0$ segue que $2aH_N + bK < 2aH_n + bK$ em q. Como H_N, H_n e K são funções contínuas, essa desigualdade é verdadeira para todo $P \in S$. De fato, se existisse $B \in S$ tal que

$$2aH_N(B) + bK(B) \geq 2aH_n(B) + bK(B)$$

, então existiria $T \in S$ tal que

$$2aH_N(T)+bK(T) = 2aH_n(T)+bK(T) \Rightarrow H_N(T) = -H_N(T) \Rightarrow H_N(T) = 0.$$

Como $H_N^2 \geq K$ segue que $K(T) \leq 0$. Daí $2aH_N(T) + bK(T) \leq 0$, donde $c \leq 0$, uma contradição. Assim, $2aH_N + bK < 2aH_n + bK$ em S, desde que $a \neq 0$. Se $a = 0$ é claro que $2aH_N + bK \leq 2aH_n + bK$ em S. Portanto, em qualquer caso ($a \neq 0$ ou $a = 0$), basta mostrarmos o resultado para n já que

$$\min_{P \in S}(2aH_N + bK) \leq \min_{P \in S}(2aH_n + bK).$$

Suponha, então, que S está desde o início com a orientação $N = n$. Na Observação 4.1 vimos que

$$dn \wedge d\psi = -H d\psi \wedge d\psi \quad \text{e} \quad dn \wedge dn = K d\psi \wedge d\psi.$$

Vamos utilizar estas igualdades para provar a seguinte afirmação.

Afirmação 4.12

$$-2a \int_S \langle dn \wedge d\psi, v_3 \rangle + b \int_S \langle dn \wedge dn, v_3 \rangle \leq c \int_S \langle d\psi \wedge d\psi, v_3 \rangle \leq 0.$$

Prova:

De fato,

$$\begin{aligned} & -2a\int_S \langle dn\wedge d\psi, v_3\rangle + b\int_S \langle dn\wedge dn, v_3\rangle = \\ = \ & -2a\int_S \langle -Hd\psi\wedge d\psi, v_3\rangle + b\int_S \langle Kd\psi\wedge d\psi, v_3\rangle \\ = \ & \int_S (2aH+bK)\langle d\psi\wedge d\psi, v_3\rangle. \end{aligned}$$

Como $2aH + bK \geq c$ e $\langle d\psi\wedge d\psi, v_3\rangle < 0$ segue que

$$(2aH+bK)\langle d\psi\wedge d\psi, v_3\rangle \leq c\langle d\psi\wedge d\psi, v_3\rangle.$$

Assim,

$$\int_S (2aH+bK)\langle d\psi\wedge d\psi, v_3\rangle \leq c\int_S \langle d\psi\wedge d\psi, v_3\rangle,$$

e a afirmação está provada.

Pelo Teorema de Stokes, temos

$$c(-2A) = c\int_{\partial S}\langle \psi\wedge d\psi, v_3\rangle \geq -2a\int_{\partial S}\langle \eta\wedge d\psi, v_3\rangle + b\int_{\partial S}\langle \eta\wedge dn, v_3\rangle.$$

Agora, seja t um campo vetorial tangente e unitário ao longo de ∂S tal que $\mathcal{K} > 0$ em ∂S. Seja $\gamma : [e,f] \longrightarrow \{x_3 = 0\}$ parametrização de ∂S tal que $\gamma'(s) = t$.

Veja que:

$$\begin{aligned} & -2a\int_{\partial S}\langle \eta\wedge d\psi, v_3\rangle + b\int_{\partial S}\langle \eta\wedge d\eta, v_3\rangle = \\ = \ & -2a\int_e^f \langle \eta(\gamma(s))\wedge d\psi_{\gamma(s)}(\gamma'(s)), v_3\rangle ds + b\int_e^f \langle \eta(\gamma(s))\wedge d\eta_{\gamma(s)}(\gamma'(s)), v_3\rangle ds \\ = \ & -2a\int_e^f \langle n(\gamma(s))\wedge \gamma'(s), v_3\rangle ds + b\int_e^f \langle n(\gamma(s))\wedge d\eta_{\gamma(s)}(\gamma'(s)), v_3\rangle ds \end{aligned}$$

onde acima, identificamos $d\psi_{\gamma(s)}(\gamma'(s))$ com $\gamma'(s)$. Continuando, a última soma acima é igual a

$$-2a\int_{\partial S}\langle \eta\wedge t, v_3\rangle + b\int_{\partial S}\langle \eta\wedge d\eta(t), v_3\rangle.$$

Lembrando que

$$\begin{aligned}
\langle \eta \wedge d\eta(t), v_3 \rangle &= \langle \eta \wedge (-K_n t - \lambda \eta \wedge t), v_3 \rangle \\
&= \langle -K_n \eta \wedge t + \lambda (n \wedge t) \wedge \eta, v_3 \rangle \\
&= \langle -K_n \eta \wedge t + \lambda t, v_3 \rangle \\
&= \langle -K_n \eta \wedge t, v_3 \rangle
\end{aligned}$$

onde K_n é a curvatura normal de $\psi(\partial S)$, temos que

$$\begin{aligned}
& -2a \int_{\partial S} \langle \eta \wedge t, v_3 \rangle + b \int_{\partial S} \langle \eta \wedge dn(t), v_3 \rangle = \\
= \; & -2a \int_{\partial S} \langle \eta \wedge t, v_3 \rangle + b \int_{\partial S} \langle -K_n \eta \wedge t, v_3 \rangle \\
= \; & -\int_{\partial S} (2a + bK_n) \langle \eta \wedge t, v_3 \rangle.
\end{aligned}$$

Agora, veja que

$$\langle \eta \wedge t, v_3 \rangle^2 = |\nabla \psi_3|^2 \leq m^2 \;\text{ em }\; \partial S \Rightarrow |\langle \eta \wedge t, v_3 \rangle| \leq m \;\text{ em }\; \partial S \Rightarrow \langle \eta \wedge t, v_3 \rangle \leq m.$$

Como

$$\begin{aligned}
a + \sigma(t,t) &= a + a\langle d\psi(t), d\psi(t) \rangle + b\langle d\psi(t), -d\eta(d\psi(t)) \rangle \\
&= a + a + b \cdot K_n = 2a + bK_n
\end{aligned}$$

segue que $2a + bK_n > 0$ já que $a + \sigma(t,t) > 0$.

Logo

$$\begin{aligned}
& (2a + bK_n)\langle n \wedge t, v_3 \rangle \leq (2a + bK_n)m \;\text{ em }\; \partial S \Rightarrow \\
\Rightarrow \; & -(2a + bK_n)\langle n \wedge t, v_3 \rangle \geq -(2a + bK_n)m.
\end{aligned}$$

Daí,

$$-\int_{\partial S} (2a + bK_n)\langle n \wedge t, v_3 \rangle \geq -m \int_{\partial S} (2a + bK_n) = -m \int_{\partial S} (2a + b\mathcal{K} \cdot \langle \eta \wedge t, v_3 \rangle)$$

onde $\mathcal{K}$ é a curvatura de $\psi(\partial S)$.

Continuando,

$$\begin{aligned}-m\int_{\partial S}(2a+b\mathcal{K}\langle\eta\wedge t,v_3\rangle) &= -m\int_{\partial S}2a+(-m)b\int_{\partial S}\mathcal{K}\langle\eta\wedge t,v_3\rangle\\ &= -2amL-mb\int_{\partial S}\mathcal{K}\langle\eta\wedge t,v_3\rangle.\end{aligned}$$

Como $\langle n\wedge t,v_3\rangle\leq m$ e como $\mathcal{K}>0$ temos

$$\begin{aligned}\mathcal{K}\langle n\wedge t,v_3\rangle\leq\mathcal{K}m &\Rightarrow \int_{\partial S}\mathcal{K}\langle\eta\wedge t,v_3\rangle=\int_{\partial S}\mathcal{K}m\Rightarrow\\ &\Rightarrow -mb\int_{\partial S}\mathcal{K}\langle\eta\wedge t,v_3\rangle\geq(-mb)\int_{\partial S}\mathcal{K}m.\end{aligned}$$

Logo,

$$-2amL-mb\int_{\partial S}\mathcal{K}\langle n\wedge t,v_3\rangle\geq-2amL+(-m^2b)\int_{\partial S}\mathcal{K}=-2amL-2m^2b\pi.$$

Assim,

$$-2cA\geq-2amL-2bm^2\pi\Rightarrow c\leq\frac{amL+bm^2\pi}{A}.$$

Agora, suponha que

$$\min_{P\in S}(2aH+bK)=\frac{amL+bm^2\pi}{A}.$$

Fazendo cálculos análogos aos da demonstração do Teorema 4.2, concluimos que

$$\max_{P\in S}(2aH+bK)\leq\frac{amL+bm^2\pi}{A}.$$

Assim,

$$\min_{P\in S}(2aH+bK)=\max_{P\in S}(2aH+bK)$$

e portanto, ψ é uma imersão linear de Weingarten. Segue do Teorema 4.2 que $\psi(S)$ é uma calota esférica, já que $\psi(S)$ é não – planar.

Observação 4.4 *Se $\psi(S)$ é planar, é claro que*

$$\min_{P\in S}(2aH+b\mathcal{K})=0\leq\frac{amL+bm^2\pi}{A}$$

■

Corolário 4.1 *Seja $\psi : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ um gráfico compacto com bordo planar e conexo. Então*

$$\min_{P\in S} H \leq \frac{L}{2A} \quad e \quad \min_{P\in S} K \leq \frac{\pi}{A}$$

onde L é o comprimento de $\psi(\partial S)$ e A é a área limitada pela curva $\psi(\partial S)$.

Além disso, a igualdade vale se, e somente se, $\psi(\partial S)$ é um hemisfério.

Demonstração :

Na prova do Teorema 4.3, note que se $b = 0$, o termo

$$b \int_{\partial S} K\langle N \wedge t, v_3\rangle$$

desaparece, e concluiremos que

$$\min_{P\in S} (2aH) \leq \frac{amL}{A}$$

(Isto é, a convexidade de $\psi(\partial S)$ é desnecessária quando $b = 0$), onde m é tal que $|\nabla\psi_3| \leq m$ ao longo de ∂S.

Além disso, vimos na prova do Lema 4.1 que $|\nabla\psi_3|^2 = 1 - \eta_3^2$ em S, donde $|\nabla\psi_3| \leq 1$ em S. Assim tomando $a = \frac{1}{2}$ e $m = 1$ em $\min_{P\in S}(2aH) \leq \frac{amL}{A}$, concluimos que $\min_{P\in S} H \leq \frac{L}{2A}$.

Agora, se $\min_{P\in S} K \leq 0$ é claro que $\min_{P\in S} K \leq \frac{\pi}{A}$. Suponha então que $\min_{P\in S} K > 0$. Neste caso, afirmamos que $\psi(\partial S)$ é convexa. De fato, suponha que existam P, $Q \in \partial S$ tais que $\mathcal{K}(P) > 0$ e $\mathcal{K}(Q) < 0$, onde $\mathcal{K}$ é a curvatura de $\psi(\partial S)$. Assim, existe $T \in \partial S$ tal que $\mathcal{K}(T) = 0$. Logo

$$\mathcal{K}_n(T) = |\mathcal{K}(T)|\langle N, t \wedge v_3\rangle = 0.$$

Portanto, $K(T) \leq 0$. Absurdo!

Portanto, $\psi(\partial S)$ é convexa. Então, tomando $m = 1$, $a = 0$ e $b = 1$ no Teorema 4.3, concluimos que

$$\min_{P \in S} K \leq \frac{\pi}{A}.$$

Vimos no Teorema 4.3 que se

$$min(2aH + bK) = \frac{amL + bm^2\pi}{A},$$

então $\psi(S)$ é uma calota esférica.

Se $\min\limits_{P \in S} H = \dfrac{L}{2A}$ então $\dfrac{1}{R} = \dfrac{L}{2A}$, onde R é o raio da esfera que contém a calota $\psi(S)$. Daí, $\dfrac{1}{R} = \dfrac{2\pi r}{2\pi r^2}$, onde r é o raio da base da calota. Assim, $r = R$ e portanto $\psi(S)$ é um hemisfério.

Se $\min\limits_{P \in S} K = \dfrac{\pi}{A}$ então

$$\frac{1}{R^2} = \frac{\pi}{A} \Rightarrow A = \pi R^2.$$

Portanto $\psi(S)$ é um hemisfério.

■

Referências Bibliográficas

[1] CARMO, M. P. do. *Differential geometry of curves and surfaces*. New Jersey : Prentice-Hall, 1976. 503 p.

[2] __________ . *Geometria riemanniana*. 3. ed. Rio de Janeiro : IMPA, 2005. 332 p. (Projeto Euclides)

[3] CHERN, S. S. On special w - surfaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, Providence, R. I., v. 6, p. 783 - 786, 1955.

[4] __________ . Some new characterizations of the Euclidean sphere. *Duke Mathematical Journal*, Durham, v. 12, p. 279 - 290, 1945.

[5] CONWAY, J. B. *Functions of one complex variable*. New York : Springer - Verlag, c 1973. 313 p.

[6] GÁLVEZ, J. A.; MARTÍNEZ, A.; MILÁN, F. Linear weingarten surfaces in $\mathbb{R}^3$. *Monatshefte fur Mathematik*, Wien, v. 138, p. 133 - 144, 2003.

[7] GÁLVEZ, J. A,; MARTÍNEZ, A. Estimates in surfaces with positive constant Gauss curvature. *Proceedings of the American Mathematical Society*, Providence, R. I., v. 128, p. 3655 - 3660, 2000.

[8] HARTMAN, P.; WINTER, W. Umbilical points and W - surfaces. *American Mathematical Society*, Baltimore, v. 76, p. 502 - 508, 1954.

[9] HEINZ, E. On the nonexistence of a surface of constant mean curvature with finite area and prescribed rectifiable boundary. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Berlin, v. 35, p. 249 - 252, 1969.

[10] HIRSCH, M. W. *Differential topology*. New York : Springer, 1976. 221 p.

[11] HOPF, H. *Differencial geometry in the large*. Berlin : Springer - Verlag, 1983. 184 p. (Lecture notes in mathematics; 1000)

[12] KENMOTSU, K. Weierstrass formula for surfaces of prescribed mean curvature. *Mathematische Annalen*, Berlin, v. 245, p. 89 - 99, 1979.

[13] KOREVAAR, N.; KUSNER, R.; SOLOMON, B. The structure of complete embedded surfaces with constant mean curvature. *Journal of Differential Geometry*, Bethlehem, v. 30, p. 465 - 503, 1989.

[14] LEÃO, K. *O princípio da tangência e aplicações*. 1983, 53p. Dissertação. (Mestrado em Matemática) IMPA, Rio de Janeiro.

[15] LI, H. Global rigidity theorems of hypersurfaces. *Arkiv for Mathematik*, Stockholm, v. 35, p. 327 - 351, 1997.

[16] MEEKS, W. H. The topology and geometry of embedded surfaces of constant mean curvature. *Journal of Differential Geometry*, Bethlehem, v. 27, p. 539 - 552, 1988.

[17] MUNIZ NETO, A. C. *Tópicos de análise em variedades*. Fortaleza : UFC, 2006.

[18] ROSENBERG, H. Hypersurfaces of constant curvature in space forms. *Bulletin des Sciences Mathematiques*, Monrtrouge, v. 117, p. 211 - 239, 1993.

[19] ROSENBERG, H.; SA EARP, R. The geometry of propely embedded special surfaces in $\mathbb{R}^3$; e.g., surfaces satisfying $aH + bK = 1$, where a e b are positive. *Duke Mathematical Journal*, Durham, v. 73, p. 291 - 306, 1994.

[20] SHIOHAMA, K.; TAKAGI, R. A characterization of a standard torus in E^3. *Journal of Differential Geometry*, Bethlehem, v. 4, p. 477 - 485, 1970.