UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Jocel Faustino Norberto de Oliveira

INTERSEÇÕES COMPLETAS E CONEXIDADE

Fortaleza
2007

Aos meus pais, Eládio Faustino e M^a Ilza Norberto

AGRADECIMENTOS

A Deus pelo dom da vida e por todas oportunidades que esta me concedeu. Aos meus pais por todo amor e carinho. Aos meus irmãos Manoel, Mª Madalena, Herivelto e Verônica pelo bom convívio e pela amizade. Às minhas tias Josefa Maria e Maria do Carmo (*In Memorian*) pela ajuda em minha formação como pessoa e por todo apoio. Ao meu sobrinho Paulo Víctor, por sempre nos dar alegria. Ao professor Francisco Pimentel pela paciência, por inúmeros ensinamentos e pelo sempre presente bom humor.

Ao meu amigão Dário Bandeira, pelo seu incentivo, encorajamento e ajuda quando vim para Fortaleza. Aos amigos Esaú Romualdo, Anderson William, Juliano Brandão e Vanderli. Agradeço a cada um pela valiosa amizade.

À minha amiga Isabelle, que sempre torceu por mim, pela amizade e apoio.

Aos meus grandes amigos: Célio, Manin, Luís André, Edilânio, Kléber, Sérgio, Patrício, Klíver.

Aos professores José Alberto, Paulo César, Mário de Assis, Wilson Hugo e Carlos Humberto pelo incentivo ao estudo da Matemática. Em especial gostaria de agradecer aos professores Augusto, Francisco de Assis de Brito e Francisco Eduardo que foram mais que professores, bons amigos.

Pelo apoio, amizade e benevolência em todos os momentos nestes últimos dois anos, agradeço à Silvana. Ao Juscelino por sua sempre presente ajuda e por sua amizade e companheirismo. Também sou grato à Allana e ao Víctor Hugo.

Aos companheiros da Pós-graduação: Paulo Alexandre, Tony, Davi Máximo, Yuri lima, Daniel Leite, Fágner, Fabrício, Jonatan, Sibério, Tiago Caúla, Jobson, Denize, Wilker, Carpegiane, Darlan, Jânio, Gláucio, Michel, Joserlan, David Carneiro, Marcus Samuel, José Tiago, Leidimar, Aurineide e Leandro.

Aos professores Abdênago Barros, Antônio Caminha, Luquésio Petrola, Lev Birbrair e Robério Rogério.

Agradeço à Andréa por sua prestatividade e eficiência nos assustos pertinentes aos alunos da Pós-graduação.

Ao amigo Damião Júnio, parceiro de estudo e quem esteve sempre me apoiando no decorrer deste curso.

Por fim gostaria de agradecer ao meu grande amigo Flávio França, por sempre me incentivar e encorajar a estudar. Com quem tive o prazer de compartilhar diversos momentos de alegria e apredizado e a quem sou deveras grato.

"Filósofos e semeadores. Cada um
deve saber sua parte para
plantar uma nova mentalidade,
mais próxima do coração"

Geddy Lee

RESUMO

O objetivo deste trabalho é caracterizar uma variedade algébrica V em um espaço topológico noetheriano X como interseção completa, isto é, um fechado de X que possa ser escrito como união de s hipersuperfícies, onde $s = codim(V, X)$ e por uma hipersuperfície entendemos como um fechado de codimensão pura 1.

Em busca deste objetivo estudamos os conceitos de espaço conexo em codimensão k e de espaço localmente conexo em codimensão k. Alguns resultados relacionados com anéis locais são demonstrados tendo em vista o teorema principal.

Sumário

Introdução

Essa dissertação consiste no estudo do artigo *Complete Intersections and Connectedness* de Robin Hartshorne [3].

Dado um subconjunto fechado V de um espaço topológico noetheriano X estaremos interessados em saber quando V é uma *interseção completa*, isto é, um fechado que possa ser expresso como interseção de $s = codim(V, X)$ hipersuperfícies H_i (por uma hipersuperfície de X entendemos um fechado de codimensão pura 1). Diremos também que V é uma interseção completa localmente se cada um de seus pontos possue uma vizinhança em X na qual V é uma interseção completa.

Para tanto estudaremos primeiro a noção de conexidade em codimensão k. Com isso definiremos o que seja um espaço topológico local, e a partir daí passaremos ao que se entende por um espaço topológico localmente conexo em codimensão k. Esses conceitos estão expostos no capítulo 1.

No capítulo 2 definiremos profundidade de um anel local e relacionaremos profundidade com conexidade. Com isso em mãos, poderemos então considerar X como um esquema localmente noetheriano (isto é, que pode ser coberto por $Spec(A_i)$ com cada A_i um anel noetheriano).

No capítulo 3 estudaremos as aplicações dos resultados anteriores para as interseções completas. Poderemos considerar X um esquema não-singular de dimensão n, como por exemplo $\mathbb{A}^n(k)$ ou $Spec(A)$ com A um anel regular local de dimensão n. Faremos uso da noção de sub-esquema de um esquema não-singular X.

Se V for um subconjunto fechado de um esquema noetheriano X, e $x \in V$, chamaremos V_x^* *o espaço local formal de* V *em* x, onde V_x^* é o espaço topológico subjacente de $Spec(\mathcal{O}_{x,V})^*$ e $(*)$ denota completamento do anel local $\mathcal{O}_{x,V}$. Uma propriedade topológica local de V será dita valer *formalmente* se vale para cada espaço local formal de V.

Com todos os resultados obtidos provaremos um teorema que nos dará uma condição necessária para que um fechado V seja uma interseção completa em X. A condição é que V deve ser localmente conexo em codimensão 1, mais precisamente temos:

Teorema. *Seja V um subespaço fechado de um esquema não-singular X, que é localmente uma interseção completa. Então V é localmente e formalmente conexo em codimensão um.*

Finalizamos o trabalho analisando alguns exemplos.

Capítulo 1

Conexidade em codimensão k

Para o estudo das interseções completas é necessário antes conhecer o conceito de conexidade em codimensão k, como também algumas propriedades referentes a conexidade de espaços topológicos noetherianos.

Ao longo deste capítulo X denotará sempre um espaço topológico noetheriano. Um espaço topológico X é *irredutível* se para qualquer decomposição $X = X_1 \cup X_2$ com X_1, X_2 fechados de X, tivermos que $X = X_1$ ou $X = X_2$. Se Y é um subconjunto de X, diremos que Y é irredutível se o for para a topologia induzida.

Uma componente irredutível do espaço topológico X é um subconjunto irredutível maximal de X.

Definição 1. *Seja X um espaço topológico e $Y \subset X$ um subconjunto fechado. Se $X \neq \varnothing$, a dimensão de Krull de X é o supremo dos comprimentos n de todas as cadeias*

$$X_0 \subsetneq X_1 \cdots \subsetneq X_n \tag{1.1}$$

de subconjuntos fechados irredutíveis não vazios X_i de X. Se Y é irredutível, então a codimensão de Y em X, $codim(Y,X)$, é o supremo de todos inteiros r tais que existe uma sequência de subespaços fechados irredutíveis Z_i de X,

$$Y = Z_0 \subsetneq Z_1 \cdots \subsetneq Z_r = X. \tag{1.2}$$

Quando Y é um subconjunto fechado não irredutível temos

$$codim(Y,X) = \inf\{codim(Y',X)\}, \tag{1.3}$$

onde o ínfimo é tomado sob todos subespaços fechados irredutíveis Y' de Y. Definimos a dimensão do espaço topológico vazio como -1, e o subconjunto vazio de X tem codimensão ∞.

Proposição 1. *Seja X um espaço topológico noetheriano, e $k \geq 0$ um inteiro. Então são equivalentes:*

i) Se Y é um subconjunto fechado de X e $codim(Y, X) > k$, então $X - Y$ é conexo.

ii) Se X' e X'' são componentes irredutíveis de X, então existe uma sequência finita $X' = X_1, X_2, \cdots, X_r = X''$ de componentes irredutíveis de X, tal que para cada $i = 1, 2, \cdots, r-1$ temos que $codim(X_i \cap X_{i+1}, X) \leq k$ em X.

Antes de fazer a prova consideremos a seguinte afirmação:

Afirmação 1. *Um espaço topológico noetheriano X é conexo se, e somente se, dadas duas componentes irredutíveis Y e Z de X existe uma sequência de componentes irredutíveis $Y = X_1, X_2, \cdots, X_r = Z$ tais que $X_i \cap X_{i+1} \neq \varnothing$, $\forall i = 1, \cdots, r-1$.*

Demonstração da afirmação: Suponha que existem duas componentes irredutíveis Y e Z de X para as quais não existe nenhuma sequência de componentes irredutíveis $Y = X_1, \cdots, X_r = Z$ com $X_i \cap X_{i+1} \neq \varnothing$ para todo $i = 1, \cdots, r-1$. Seja W_Y a união de todas as componentes irredutíveis de X que se ligam a Y por alguma sequência como as consideradas anteriormente, e seja W_Z a união das componentes irredutíveis restantes. A decomposição $X = W_Y \cup W_Z$ mostra que X é desconexo.

Suponha que existe uma sequência $Y = X_1, X_2, \cdots, X_r = Z$ de componentes irredutíveis de X tal que $X_i \cap X_{i+1} \neq \varnothing$ para todo $i = 1, \cdots, r-1$. Como cada componente irredutível X_i é conexa e $X_i \cap X_{i+1} \neq \varnothing$ então a união $X_i \cup X_{i+1}$ é conexa para todo $i = 1, \cdots, r-1$. Se $X_1 \cup X_2 = X$ acabamos. Senão tome X_3 componente irredutível de X, como $X_2 \cap X_3 \neq \varnothing$ temos que a união $(X_1 \cup X_2) \cup X_3$ é conexa, se esta união for todo X acaba, senão prossiguimos. Como X é noetheriano seguindo esse raciocínio teremos X expresso como uma união de conexos que se intersectam, logo X é conexo. $\square$

Demonstração da proposição:

$i) \Rightarrow ii)$ Por hipotótese se Y é um fechado de X tal que $codim(Y, X) > k$ temos que $W = X - Y$ é conexo. Sendo W conexo então dadas duas de suas componentes irredutíveis existe uma sequência de componentes irredutíveis $W_i = X_i \cap W, \cdots, W_r = X_r \cap W$ satisfazendo $W_i \cap W_{i+1} \neq \varnothing$, para todo $i = 1, \cdots, r-1$, pela nossa afirmação. Daí $X_i \cap X_{i+1} \neq \varnothing$ para todo $i = 1, \cdots, r-1$, e assim garantimos a existência de uma sequência finita $X_1, X_2, \cdots, X_r$ de componentes irredutíveis de X com $X_i \cap X_{i+1} \neq \varnothing$, para todo $i = 1, \cdots, r-1$. Devemos mostrar que $codim(X_i \cap X_{i+1}, X) \leq k$, para todo $i = 1, \cdots, r-1$. Suponha que $codim(X_i \cap X_{i+1}, X) > k$ para algum i e tome o fechado $Y = \bigcup(X_i \cap X_{i+1})$, temos $codim(Y, X) > k$ com $X - Y$ desconexo, contrariando nossa hipótese. Daí $codim(X_i \cap X_{i+1}, X) \leq k$, para todo $i = 1, \cdots, r-1$.

$ii) \Rightarrow i)$ Sejam X' e X'' componentes irredutíveis de X tal que existe uma sequência finita de componentes irredutíveis $X' = X_1, \cdots, X_r = X''$ de X satisfazendo $X_i \cap X_{i+1} \neq \varnothing$ e $codim(X_i \cap X_{i+1}, X) \leq k$ para cada $i = 1, 2, \cdots, r-1$. Então pondo $W = X - Y$ temos que as componentes irredutíveis de W são da forma $W_i = X_i \cap W$. Para mostrar que W é conexo devemos mostrar que $W_i \cap W_{i+1} \neq \varnothing$, pela nossa afirmação.

Ora, $W_i \cap W_{i+1} = (X_i \cap W) \cap (X_{i+1} \cap W) = (X_i \cap X_{i+1}) \cap W$, se tivermos $\varnothing = W_i \cap W_{i+1} = (X_i \cap X_{i+1}) \cap (X - Y)$ tem-se $X_i \cap X_{i+1} \subset Y$, mas $codim(Y, X) > k$, donde segue que $\dim X > \dim Y + k$. Por outro lado $\dim X \leq \dim(X_i \cap X_{i+1}) + k$ já que $codim(X_i \cap X_{i+1}, X) \leq k$. Analisando as desigualdades $\dim X > \dim Y + k$ e $\dim X \leq \dim(X_i \cap X_{i+1}) + k$ obtemos assim que $\dim(X_i \cap X_{i+1}) > \dim Y$, o que é absurdo já que $X_i \cap X_{i+1}$ é um subconjunto de Y. $\square$

Definição 2. *Se X satisfaz as condições equivalentes da proposição acima dizemos que X é conexo em codimensão k.*

Observação 1. *Se X é conexo em codimensão k, então também é conexo em codimensão k' para qualquer $k' \geq k$, já que $codim(X_i \cap X_{i+1}, X) \leq k \leq k'$.*

Definição 3. *Seja Y um subconjunto fechado de um espaço topológico X. O ponto $y \in Y$ é chamado de ponto genérico de Y se $Y = \overline{\{y\}}$, o fecho de $\{y\}$ em X.*

Vale observar que se Y tem um ponto genérico, então Y é irredutível, já que $\{x\}$ é irredutível então também o é $\overline{\{x\}}$.

De agora em diante supomos que o espaço topológico considerado tem a propriedade do ponto genérico, isto é todo subconjunto irredutível possui um único ponto genérico.

Um exemplo de um espaço topológico desse tipo é o espectro de um anel noetheriano.

Definição 4. *Um espaço topológico local é um espaço topológico que tem um único ponto fechado. Definimos o espaço local de X em y, com $y \in X$ como sendo o conjunto das generalizações de y, isto é, o conjunto de pontos $w \in X$ tais que $y \in \overline{\{w\}}$, denotamo-lo por X_y.*

Note que X_y é conexo. De fato, ponha $X_y = Y \cup Z$, onde Y e Z são fechados disjuntos e não vazios. Sem perda de generalidade tome $y \in Y$. Dado $z \in Z$, então $y \in \overline{\{z\}} \subset Z$. Absurdo pois $y \in Y \cap Z = \varnothing$.

Note também que a localização é transitiva, isto é: $(X_y)_z = X_z$ para todo $z \in X_y$. De fato, $X_y \subseteq X$ implica que $(X_y)_z \subseteq X_z$. Como $z \in X_y$, segue que $y \in \overline{\{z\}}$. Seja

$x \in X_z$, então $z \in \overline{\{x\}}$ e $\overline{\{z\}} \subseteq \overline{\{x\}}$ e daí $y \in \overline{\{x\}}$, com isso $x \in X_y$. Logo $x \in X_y$, assim $x \in (X_y)_z$.

Lema 1. *Seja X um espaço topológico conexo e Y um subespaço fechado de X tal que para cada $y \in Y$, $X_y - y$ é não-vazio e conexo. Então $X - Y$ é conexo.*

Demonstração: Faremos por contradição. Suponha $X - Y = X_1 \cup X_2$ com X_1 e X_2 fechados em $X - Y$, disjuntos e não-vazios. Para cada $y \in Y$ temos $X_y - y$ é não-vazio, e então $X - Y$ é denso em X. De fato, se não fosse denso $(X - Y) \cap X_i = \varnothing$ para alguma componente irredutível X_i de X, daí $X_i \subset Y$. Tomando um ponto genérico y da componente irredutível X_i, temos que $y \in Y$ e como $X_y - y \neq \varnothing$ existe w tal que $y \in \overline{\{w\}}$. Então $X_i = \overline{\{y\}} \subset \overline{\{w\}}$, e sendo $\overline{\{w\}}$ irredutível, temos $X_i = \overline{\{w\}}$. Segue que y e w são pontos genéricos de X_i, o que é absurdo. Logo $X - Y$ é denso em X.

Tomando os fechos de X_1 e X_2 em X temos $\overline{X_1 \cup X_2} = \overline{X_1} \cup \overline{X_2} = X$, e como X é conexo então $\overline{X_1} \cap \overline{X_2} \neq \varnothing$. Tomaremos agora y um ponto genérico de uma componente de $\overline{X_1} \cap \overline{X_2}$. Vamos mostrar que $X_y - y$ é desconexo o que nos dará uma contradição. De fato, $y \in \overline{X_1} \cap \overline{X_2}$ então $y \in Y$, caso contrário $y \in X - Y$ daí $y \in \overline{X_1} \cap \overline{X_2} \cap (X - Y)$. No entanto $\overline{X_1} \cap \overline{X_2} \cap (X - Y) \subset X_1 \cap X_2 = \varnothing$.

Note que $X_y - y = Z_1 \cup Z_2$ onde $Z_1 = \overline{X_1} \cap (X_y - y)$ e $Z_2 = \overline{X_2} \cap (X_y - y)$. Afirmamos agora que vale $Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$. Pois se w está na interseção temos $y \in \overline{\{w\}}$, e w está numa componente C_j de $\overline{X_1} \cap \overline{X_2}$, daí $\overline{\{w\}} \subset C_j$, como y é um ponto genérico de uma componente irredutível de $\overline{X_1} \cap \overline{X_2}$, digamos C_i temos que $C_i = \overline{\{y\}} \subset \overline{\{w\}} \subset C_j$. Se $i = j$ temos um absurdo, já que não podemos ter dois pontos genéricos para uma mesma componente irredutível. Se $i \neq j$ também temos um absurdo já que uma compoente não pode estar contida em outra, pois uma componente irredutível de X é um subconjunto irredutível maximal de X.

Agora resta-nos mostrar que Z_1 e Z_2 são não-vazios. Como $y \in \overline{X_1}$ segue que existe um ponto genérico x_i de uma componente irredutível C_i de $\overline{X_1}$ tal que $y \in \overline{\{x_i\}}$. Observe que $X_y - y \neq \varnothing$ implica que y não pode ser ponto genérico em X, logo $y \neq x_i$. Daí $x_i \in X_y - y$, assim $Z_1 \neq \varnothing$. Analogamente prova-se que $Z_2 \neq \varnothing$. □

Proposição 2. *Seja X um espaço topológico noetheriano, e $k \geq 0$, um inteiro. São equivalentes:*

i) Para qualquer $y \in X$, X_y é conexo em codimensão k.

ii) Se $y \in X$ é tal que $\dim X_y > k$, então $X_y - y$ é conexo.

Demonstração: $i) \Rightarrow ii)$ Dado $y \in X$ com $\dim X_y > k$, segue definição de conexidade em codimensão k para X_y que $X_y - y$ é conexo.

$ii) \Rightarrow i)$ Seja $y \in X$ e Y um subconjunto fechado de X_y tal que $codim(Y, X_y) > k$. Daí temos $dim(X_y) > k$ e então para qualquer $z \in Y$ tem-se $dim(X_z) > k$ (lembremos que $(X_y)_z = X_z$). Pela hipótese de $ii)$ temos que $X_z - z$ é conexo. Também é não-vazio já que $\dim X_z > k \geq 0$. Como X_y é um espaço local então é conexo. Ora, estamos em condições de aplicar o lema 1 ao par X_y e Y, o que implica que $X_y - Y$ é conexo e daí X_y é conexo em codimensão k.$\square$

Definição 5. *Um espaço topológico nas condições da proposição* 2 *é dito ser localmente conexo em codimensão* k.

Veremos adiante que se um subespaço fechado de um espaço topológico é uma interseção completa então ele é localmente conexo em codimensão 1, isto é, satisfaz as condições da proposição 2 com $k = 1$.

Capítulo 2

Profundidade e conexidade em anéis locais

O estudo de profundidade de um anel local fornece inúmeros resultados em álgebra comutativa. Passemos agora a discutir algumas propriedades de anéis locais, exibindo alguns resultado referentes a anéis Cohen-Macaulay.

2.1 A-sequências e anéis Cohen-Macaulay

Definição 6. *Seja M um A-módulo. Um elemento $a \in A$ é chamado M-regular (ou um não divisor de zero de M) se $ax = 0$ com $x \in M$ implicar $x = 0$. Um sequência $\{a_1, \cdots, a_m\}$ $(m \geq 0)$ de elementos de A é chamada de M-sequência regular se:*

i) $M \neq (a_1, \cdots, a_m)M$ e
ii) Para cada $i = 0, \cdots, m-1$, o elemento a_{i+1} não é um divizor de zero no A-módulo $M/(a_1, \cdots, a_i)M$.

Seja M um módulo finitamente gerado sobre um anel noetheriano A e seja I um ideal de A tal que $IM \neq M$. Para qualquer M-sequência regular $\{a_1, \cdots, a_m\}$ temos $(a_1, \cdots, a_i)M \neq (a_1, \cdots, a_{i+1})M$ para $i = 0, \cdots, m-1$. Como M é um módulo noetheriano segue que qualquer M-sequência regular $\{a_1, \cdots, a_m\}$ com elementos $a_i \in I$ pode ser estendida a uma sequência maximal, isto é uma M-sequência regular $\{a_1, \cdots, a_n\} \subset I$ $(n \geq m)$ tal que cada $a \in I$ é um divizor de zero de $M/(a_1, \cdots, a_n)M$.

Em particular os elementos $a_1, \cdots, a_n$ de A formam uma A-sequência regular se e somente se o ideal $(a_1, \cdots, a_n)$ é próprio em A e para cada $i = 1, \cdots, n$, o elemento a_i

não é um divisor de zero em $A/(a_1, \cdots, a_{i-1})$.

Vejamos o seguinte exemplo: Seja A um anel comutativo noetheriano e considere $R = A[X_1, \cdots, X_n]$ o anel de polinômios sobre A em n indeterminadas $X_1, \cdots, X_n$. Note que R é noetheriano pelo Teorema da Base de Hilbert. Claramente X_1 não é divisor de zero em R. Seja $i \in \mathbb{N}$ com $1 < i \leq n$. Temos que $(X_1, \cdots, X_{i-1})$ é o núcleo do homomorfismo de avaliação $A[X_1, \cdots, X_n] \to A[X_i, \cdots, X_n]$ em $0, \cdots, 0, X_i \cdots, X_n$ e daí deduzimos que X_i não é divisor de zero em $R/(X_1, \cdots, X_{i-1})$. Como $(X_1, \cdots, X_n)$ é um ideal próprio de R segue que $X_1, \cdots, X_n$ é uma R-sequência regular.

Novamente considere M um módulo finitamente gerado sobre um anel noetheriano A e seja I um ideal de A, temos que:

Lema 2. *Se $\{a, b\}$ é uma M-sequência regular e b não é um divisor de zero de M, então $\{b, a\}$ é também uma M-sequência regular.*

Demonstração: Se a fosse um divisor de zero de $M/(bM)$, então existiria um $m \in M$ com $m \notin bM$ e $am = bm'$, $(m' \in M)$. Como $\{a, b\}$ é uma M-sequência regular devemos ter $m' \in aM$, consequentemente $m' = am''$ com $m'' \in M$; então $m = bm''$, já que a não é um divisor de zero de M. Mas isso contradiz o fato de $m \notin bM$. $\square$

Proposição 3. *Quaisquer duas M-sequências regulares maximais têm o mesmo número de elementos.*

Demonstração: Entre todas as M-sequências regulares maximais em I existe uma com o menor número de elementos n. Argumentaremos por indução sobre n. Se $n = 0$, então I consiste somente de divisores de zero de M e não há nada a fazer. Seja $n > 0$ e $\{a_1, \cdots, a_n\}$ uma M-sequência regular maximal em I, e seja $\{b_1, \cdots, b_n\}$ outra M-sequência regular em I. Devemos mostrar que I consiste somente de divisores de zero de $M/(b_1, \cdots, b_n)M$.

Se $n = 1$ então I consiste somente de divisores de zero de M/a_1M. Como M é um módulo finitamente gerado sobre um anel noetheriano A, se I for um ideal de A consistindo somente de divisores de zero de M, então existe um $m \in M$, $m \neq 0$ tal que $Im = (0)$. Com efeito, como a união $\bigcup_{\mathfrak{p} \in Ass(M)} \mathfrak{p}$ ($Ass(M)$ denota o conujunto de ideais primos associados ao módulo M) é o o conjunto de divisores de zero de M e $Ass(M)$ é um conjunto finito (pois M é um módulo finitamente gerado sobre o anel noetheriano A) segue que $I \subset \bigcup_{\mathfrak{p} \in Ass(M)} \mathfrak{p}$. Daí $I \subset \mathfrak{p}$ para algum $\mathfrak{p} \in Ass(M)$. Essa última inclusão é válida pelo seguinte fato:

Afirmação 2. *Sejam $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$ ideais primos e $\mathfrak{a}$ um ideal contido em $\bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$. Então $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_i$ para algum i.*

Demonstração da afirmação: Faremos indução sobre n da seguinte forma: supondo que $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}_i (1 \leq i \leq n)$ então $\mathfrak{a} \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$. Claramente é verdade para $n = 1$. Se $n > 1$ e o resultado vale para $n - 1$, daí para cada i existe $x_i \in \mathfrak{a}$ tal que $x_i \notin p_j$ sempre que $j \neq i$. Ora, se para algum i tivermos $x_i \notin \mathfrak{p}_i$, acabamos. Se não, então $x_i \in p_i, \forall i$. Tome agora o elemento

$$y = \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 \cdots x_{i-1} x_{i+1} x_{i+2} \cdots x_n \tag{2.1}$$

onde suprimimos o termo x_i. Assim temos $y \in \mathfrak{a}$ e $y \notin p_i (1 \leq i \leq n)$. Com isso $\mathfrak{a} \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$. □

Com isso garantimos que existe um $m \in M$, $m \notin a_1 M$ com $Im \subset a_1 M$. Em particular, $b_1 m = a_1 m'$ com algum $m' \in M$. Se tivermos $m' \in b_1 M$, então devemos ter $m \in a_1 M$, então $m' \notin b_1 M$. De $a_1 I m' = I b_1 m \subset a_1 b_1 M$ segue que $Im' \subset b_1 M$, e então I consiste somente de divisores de zero de $M/b_1 M$.

Se $n > 1$ ponha agora $M_i := M/(a_1, \cdots, a_i)M$, $M_i' := M/(b_1, \cdots, b_i)M$ para $i = 0, \cdots, n-1$, e escolha $c \in I$ que não seja divisor de zero de M_i e M_i' para todo $i = 0, \cdots, n-1$. Isso é possível pois o conjunto de divisores de zero de M_i e M_i' são uniões finitas dos ideais primos e o ideal I não está contido em nenhum destes conjuntos.

Aplicando o lema 2 repetidamente segue que $\{c, a_1, \cdots, a_{n-1}\}$ e $\{c, b_1, \cdots, b_{n-1}\}$ são M-sequências regulares em I, onde $\{c, a_1, \cdots, a_{n-1}\}$ é maximal, $\{a_1, \cdots, a_{n-1}, c\}$ é também maximal tomando como base o caso em que $n = 1$ aplicado a M_{n-1}, já tratado. Então $\{a_1, \cdots, a_{n-1}\}$ e $\{b_1, \cdots, b_{n-1}\}$ são M/cM-sequências regulares em I; a primeira é maximal, então por hipótese de indução a segunda também. Mas se $\{b_1, \cdots, b_{n-1}, c\}$ é uma M-sequência regular maximal, então também é $\{b_1, \cdots, b_n\}$, novamente pelo caso $n = 1$. Assim concluimos a demonstração. □

Com as hipóteses do proposição acima, chamamos o número de elementos na M-sequência regular maximal em I de I-profundidade de M e escrevemos $d(I, M)$. Se A é um anel local e I é o ideal maximal de A, então escrevemos $d(M)$ ao invés de $d(I, M)$.

Em particular podemos definir $d(A)$ quando $M = A$, da seguinte maneira:

Definição 7. *A profundidade (ou codimensão homológica) do anel local A é o número de elementos em uma A-sequência regular maximal. Se a profundidade de A é igual a sua dimensão, dizemos que A é um anel Cohen-Macaulay.*

Vale ressaltar que em geral têm-se $d(A) \leq \dim A$.

Para estudo posterior iremos precisar da noção de interseção completa para um anel A. Antes lembremos que se A é um anel local de dimensão d e $\mathfrak{m}$ é o seu ideal maximal, dizemos que A é um *anel regular local* se $\mathfrak{m}$ pode ser gerado por d elementos.

Dado um anel local $(A, \mathfrak{m})$ de dimensão d, o conjunto $\{x_1, \cdots, x_d\}$ de d elementos de A é chamado de *sistema de parâmetros* de A se ele gera um ideal $\mathfrak{m}$-primário. Para a prova da existência de um sistema de parâmetros em qualquer anel local veja [8], teorema 20, pg. 288. Então qualquer sistema de d elementos de um anel regular local A que gera $\mathfrak{m}$ é obviamente um sistema de parâmetros e o chamamos de *sistema de parâmetros regulares* de A.

Definição 8. *Um anel local A de dimensão d é uma interseção completa se pode ser expresso como quociente de um anel regular local B por um ideal $\mathfrak{b}$ gerado por* $\dim B - d$ *elementos.*

Sejam A um anel noetheriano, $\mathfrak{a}$ um ideal de A e a um elemento de A. Dizemos que *a é primo* com o ideal $\mathfrak{a}$ se $\mathfrak{a} : Aa = \mathfrak{a}$ (onde : indica o *ideal quociente*, isto é $\mathfrak{a} : Aa = \{x \in A$ tal que $xAa \subset \mathfrak{a}\}$). Isso significa que a não pertence a qualquer ideal primo associado de $\mathfrak{a}$, pois para um elemento x em um anel noetheriano A pertencer a algum ideal primo associado de um ideal $\mathfrak{a}$ de A é necessário e suficiente que exista um elemento $y \notin \mathfrak{a}$ tal que $xy \in \mathfrak{a}$ (Veja mais detalhes em [7], cap. IV, pg. 214).

Enunciaremos aqui os seguintes lemas referentes ao estudo de A-sequências regulares:

Lema 3. *Seja A um anel local, $\mathfrak{a}$ um ideal em A, b um elemento não invertível primo com $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{p}$ um ideal primo associado de $\mathfrak{a}$. Então existe um ideal primo associado $\mathfrak{p}'$ de $\mathfrak{a} + Ab$ tal que $\mathfrak{p}' \supset \mathfrak{p}$.*

Demonstração: Veja [8] pg. 394.

Lema 4. *Seja A um anel local de dimensão d, $a_1, \cdots, a_j$ elementos distintos de A. Para que* $\dim A/(Aa_1 + \cdots + Aa_j) = d - j$ *é necessário e suficiente que $\{a_1, \cdots, a_j\}$ seja um subconjunto de um sistema de parâmetros de A.*

Demonstração: Veja [8] pg. 397.

Teorema 1. *(Macaulay) Seja A um anel Cohen-Macaulay com dimensão d. Sejam $\{a_1, \cdots, a_j\}$ elementos distintos de A e $\mathfrak{a}$ o ideal gerado por esses j elementos. Se* $\dim(A/\mathfrak{a}) = d - j$, *então $\{a_1, \cdots, a_j\}$ é uma A-sequência regular e para todo ideal primo associado $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{a}$, temos $h(\mathfrak{p}) = j$ (h denota a altura do ideal $\mathfrak{p}$)* e $\dim(A/\mathfrak{p}) = d - j$.

Demonstração: Procedemos por indução sobre j. Se $j = 0$, o dado conjunto é vazio e é uma A-sequência. Temos então $\mathfrak{a} = (0)$. Consideremos um ideal primo associado $\mathfrak{p}$ de

(0). Seja $\{b_1, \cdots, b_d\}$ uma A-sequência regular em A. Aplicando o lema 3 repetidas vezes encontramos uma sequência estritamente crescente de ideais primos $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_d$ tais que $\mathfrak{p}_i$ é um ideal primo associado de $Ab_1 + \cdots + Ab_i$. E isso prova que $\dim(A/\mathfrak{p}) \geq d$, de onde $\dim(A/\mathfrak{p}) = d$ já que $\dim(A) = d$. Por outro lado $h(p) = 0$, caso contrário obteríamos uma cadeia de ideais primos em A com $d + 2$ termos distintos.

Agora suponha que o teorema vale pra $j - 1$. Ponha $\mathfrak{a}' = Aa_1 + \cdots + Aa_{j-1}$. Já que $\dim(A/\mathfrak{a}) = d - j$, $\{a_1, \cdots, a_j\}$ é um subconjunto de um sistema de parâmetros pelo lema 4. Consequentemente $\dim(A/\mathfrak{a}') = d - j + 1$ pelo mesmo lema. Pela hipótese de indução, $\{a_1, \cdots, a_{j-1}\}$ é uma A-sequência regular, e todos os ideais primos associados de $\mathfrak{a}'$ tem altura $j - 1$ e dimensão $d - j + 1$. Se a_j pertence a algum ideal primo associado $\mathfrak{p}'$ de $\mathfrak{a}'$, teríamos $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}'$, daí $\dim(A/\mathfrak{a}) \geq \dim(A/\mathfrak{p}') = d - j + 1$, em contradição com nossa hipótese. Daí $\{a_1, \cdots, a_{j-1}, a_j\}$ é uma A-sequência regular. Esta A-sequência regular está contida em alguma A-sequência regular maximal, digamos $\{a_1, \cdots, a_j, a_{j+1}, \cdots, a_d\}$, a qual tem d elementos (e então é um sistema de parâmetros), desde que A é um anel Cohen-Macaulay. As classes $\overline{a_{j+1}}, \cdots, \overline{a_d}$ formam uma A-sequência regular e um sistema de parâmetros no anel $A/\mathfrak{a}$, que é então um anel Cohen-Macaulay. Aplicando o caso $j = 0$ ao anel $A/\mathfrak{a}$, temos $\dim(A/\mathfrak{p}) = d - j$ para todo ideal primo associado $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{a}$. Por outro lado, tal ideal $\mathfrak{p}$ contém algum ideal primo associado $\mathfrak{p}'$ de $\mathfrak{a}'$, e temos $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'$ pois $a_j \in \mathfrak{p}$ e $a_j \notin \mathfrak{p}'$ ($\{a_1, \cdots, a_j\}$ sendo uma A-sequência regular); Temos $h(\mathfrak{p}) \geq h(\mathfrak{p}') + 1 = (j - 1) + 1 = j$. Como a desigualdade $\dim(A/\mathfrak{p}) + h(\mathfrak{p}) \leq d$ vale para todo ideal primo no anel local A de dimensão d (Caso contrário A admitiria uma cadeia de ideais primos com $d + 2$ termos), as relações $\dim(A/\mathfrak{p}) = d - j$ e $h(\mathfrak{p}) \geq j$ nos dizem que $h(\mathfrak{p}) = j$. □

Corolário 1. *Seja A um anel Cohen-Macaulay. Para toda A-sequência regular $\{a_1, \cdots, a_j\}$ em A, o anel local $A' = A/(Aa_1 + \cdots + Aa_j)$ é um anel Cohen-Macaulay.*

Demonstração: De fato, a A-sequência regular está contida em uma A-sequência regular maximal $\{a_1, \cdots, a_j, a_{j+1}, \cdots, a_d\}$, isto é, em um sistema de parâmetros com $d = \dim A$. Temos $\dim A' = d - j$ pelo lema 4. As classes $\overline{a_{j+1}}, \cdots, \overline{a_d}$ em A' formam um sistema de parâmetros. Obviamente formam uma A-sequência regular.□

Proposição 4. *Se o anel A é Cohen-Macaulay, então $A_\mathfrak{p}$ é também Cohen-Macaulay para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de A.*

Demonstração: Se $h(\mathfrak{p}) = n$ (onde h indica a altura do primo $\mathfrak{p}$) então $\mathfrak{p}$ contém uma A-sequência regular de comprimento n. Também é uma $A_\mathfrak{p}$-sequência regular em $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ e então $d(A_\mathfrak{p}) \geq n = h(\mathfrak{p})$. Como temos sempre que $d(A_\mathfrak{p}) \leq \dim A_\mathfrak{p}$, segue que $A_\mathfrak{p}$ é um anel Cohen-Macaulay. □

Proposição 5. *Se o anel A é interseção completa então A é Cohen-Macaulay.*

Demonstração: Se A é uma interseção completa, isto é $A = B/\mathfrak{b}$, onde B é um anel regular local (daí B é um anel Cohen-Macaulay) e $\mathfrak{b}$ pode ser gerado por $d-r = \dim B - \dim A$ elementos com $d = dimB$ e $r = dimA$, temos então que $\dim(B/\mathfrak{b}) = r = d-(d-r)$, sendo B Cohen-Macaulay pelo teorema 1 os $d-r$ elementos que geram o ideal $\mathfrak{b}$ formam uma B-sequência regular. Se $\mathfrak{b}$ é gerado por uma B-sequência o quociente $B/\mathfrak{b}$ é um anel Cohen-Macaulay. $\square$

Definição 9. *Se A é um anel noetheriano e $k > 0$ é um inteiro, dizemos que A tem a propriedade S_k de Serre se para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de A, são verdadeiras:*

i) Se $\dim A_{\mathfrak{p}} \leq k$, então $A_{\mathfrak{p}}$ é um anel Cohen-Macaulay;
ii) Se $\dim A_{\mathfrak{p}} > k$ então $d(A_{\mathfrak{p}}) \geq k$

Não é difícil ver que a propriedade $S_{k'}$ implica S_k sempre que $k' \geq k$. Por exemplo se $\dim A_{\mathfrak{p}} > k'$, tem-se $d(A_{\mathfrak{p}}) \geq k' \geq k$.

Como $\dim A = \sup \dim A_{\mathfrak{p}}$ então se $\dim A \leq k$ tem-se $\dim A_{\mathfrak{p}} \leq k$, daí se A tem a propriedade S_k então $A_{\mathfrak{p}}$ é um anel Cohen-Macaulay e para qualquer $k \geq \dim A$ as propriedades S_k são equivalentes.

Se o anel noetheriano local A tem dimensão n então S_n equivale a A ser Cohen-Macaulay. Isso segue do fato comentado acima e de que $A_{\mathfrak{p}}$ é Cohen-Macaulay para todo ideal primo no anel Cohen-Macaulay A.

Proposição 6. *Seja $(A, \mathfrak{m})$ um anel noetheriano local e seja $y = \{\mathfrak{m}\}$ ponto fechado de $X = Spec(A)$. Se $X - y$ é desconexo, então $d(A) \leq 1$.*

Demonstração: Como A é local então não possui elemento idempotente diferente de 0 e 1. Assim $X = Spec(A)$ é conexo. Já que $X - y$ é desconexo então podemos escrever $X - y = U_1 \cup U_2$ e assim $X = \overline{X - y} = \overline{U_1} \cup \overline{U_2}$ e com isso podemos tomar fechados, digamos $Z_1 = \overline{U_1}$ e $Z_2 = \overline{U_2}$ tais que $Z_1 \cap Z_2 = \{y\}$, logo é possível expressar X como união de dois fechados Z_1 e Z_2 contendo apenas y como interseção. E nenhum desses fechados é igual a y. Tome agora a decomposição primária do ideal zero

$$(0) = q_1 \cap \cdots \cap q_s \tag{2.2}$$

onde os q_i são p_i-primários (isto é $p_i = \sqrt{q_i}$). Podemos assumir que nenhum p_i é igual a $\mathfrak{m}$, pois se $\mathfrak{m}$ é um primo associado de (0) temos $d(A) = 0$ e acabamos. De fato, neste caso $\mathfrak{m}$ só contém divisores de zero logo $d(A) = 0$. Como os $p_i's$ estão nos subconjuntos Z_1 e Z_2, temos que entre os $p_i's$ estão todos os primos minimais de A. Sejam agora

$$\mathfrak{a} = q_1 \cap \cdots \cap q_r, \tag{2.3}$$

$$\mathfrak{b} = q_{r+1} \cap \cdots \cap q_s, \tag{2.4}$$

onde $p_1, \cdots, p_r \in Z_1$ e $p_{r+1}, \cdots, p_s \in Z_2$.

Afirmamos que $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ é $\mathfrak{m}$-primário. De fato, qualquer ideal primo contendo $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ está em Z_1 e em Z_2, consequentemente em $\mathfrak{m}$, então $\mathfrak{m}$ é o único primo associado de $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, o que significa que $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ é $\mathfrak{m}$-primário.

Encontremos agora elementos $x, w \in A$ tais que
i) $x \in \mathfrak{a}$ e $w \in \mathfrak{b}$
ii) $x \notin p_{r+1} \cup \cdots \cup p_s$ e $w \notin p_1 \cup \cdots \cup p_r$
iii) $x\mathfrak{b} = (0)$ e $w\mathfrak{a} = (0)$

Observe que para cada $j = r+1, \cdots, s$ temos que $\mathfrak{a} \nsubseteq p_j$, pois qualquer ideal primo contendo $\mathfrak{a}$ está em Z_1 o que não ocorre, já que $p_j \in Z_2$. Daí segue que $\mathfrak{a} \nsubseteq p_{r+1} \cup \cdots \cup p_s$. Perceba que usamos aqui a afirmação 2, provada na página 13.

Com isso garantimos a existência de um elemento x satisfazendo $i)$ e $ii)$. Analogamente para w. Agora mostraremos que $x + w$ forma uma A-sequência regular consistindo de um só elemento e assim $d(A) = 1$. Seguiremos os seguintes passos:

a) Segue das condições $i)$ e $ii)$ que cada p_i contém um e somente um dos elementos x, w, daí $x + w$ não está em nenhum p_i. Então $x + w$ não é um divisor de zero no anel A, pois o conjunto dos divisores de zero de A é a união de todos primos minimais de A, e forma uma A-sequência regular.

b) O elemento x não pertence ao ideal principal $(x + w)$. Suponha o contrário, então $x = a(x+w)$ com $a \in A$. Para cada $i = 1, \cdots, r$, temos $x \in \mathfrak{q}_i$, como vale que $x + w \notin \mathfrak{p}_i$, temos que $a \in \mathfrak{q}_i$, já que $\mathfrak{q}_i$ é primário. Logo $a \in \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r = \mathfrak{a}$, então $aw = 0$ pela condição $iii)$ acima. Assim $x = ax$, isto é, $x(1 - a) = 0$, o que é impossível pois $x \neq 0$ e $1 - a$ é uma unidade, pois $a \in \mathfrak{m}$.

c) Observe agora que $x(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \subseteq (x + w)$. Se $a \in \mathfrak{a}$ e $b \in \mathfrak{b}$ então por $iii)$ temos $wa = xb = 0$ e portanto $x(a + b) = xa = (x + w)a \in (x + w)$.

d) Pra finalizar, mostraremos que qualquer elemento $z \in \mathfrak{m}$ é um divizor de zero no anel $A/(x+w)$, isto é, $x+w$ é uma A-sequência regular maximal. Ora, $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ é $\mathfrak{m}$-primário, daí $z^n \in \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ para algum inteiro n. Por $c)$ acima $xz^n \in (x + w)$. Basta tomar o menor n inteiro tal que $xz^n \in (x + w)$. Desde que $x \notin (x + w)$, e $n \geq 1$ podemos escrever $zxz^{n-1} \in (x+w)$, onde $xz^{n-1} \notin (x+w)$, o que mostra que z é um divisor de zero no anel $A/(x + w)$. $\square$

A propriedade noetheriana na teoria dos esquemas é de fundamental importância tal como a propriedade noetheriana o é para anéis. Dizemos que um esquema X é noetheriano se admite uma cobertura por sub-esquemas abertos afins, dados pelo espectro de anéis noetherianos.

Nesse ponto podemos pensar nosso esquema X como uma variedade algébrica.

Tomando $x \in X$, com X um esquema, e considerando os pares (U, f) com U aberto de X, $x \in U$ e $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ (onde $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ denota o conjunto das funções regulares em X que estão definidas em cada $x \in U$), dois pares (U, f) e (U, g) são ditos equivalentes, se existe um aberto W com $x \in W \subset U \cup V$, tal que $f|_W = g|_W$. As classes de equivalência por esta relação de equivalência são chamadas germes de funções em X. O germe (U, f) é denotado por f_x. O conjunto dos germes é representado por $\mathcal{O}_{x,X}$.

Vale lembrar que o conjunto $\mathcal{O}_{x,X}$ é munido de uma estrutura de anel. Esse anel é uma k-álgebra local com ideal maximal $\mathfrak{m}_{x,X} = \{f \in \mathcal{O}_{x,X} / \exists U$ aberto de $X, x \in U$, $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ tal que $f(x) = 0\}$.

Teorema 2. *Seja X um esquema localmente noetheriano e conexo. Seja Y um subconjunto fechado de X tal que para cada $y \in Y$, o anel local $\mathcal{O}_{y,X}$ de y em X tem profundidade maior ou igual a* 2*. Então $X - Y$ é conexo.*

Demonstração: Pelo lema 1 precisamos mostrar que para cada $y \in Y$, $X_y - y$ é não-vazio e conexo. Segue da definição do espaço local X_y que $X_y = Spec(\mathcal{O}_{y,X})$, já que ideais primos de $\mathcal{O}_{y,X}$ estão em bijeção com as subvariedades fechadas irredutíveis que passam por y. Como $\mathcal{O}_{y,X}$ é um anel noetheriano local, se $X_y - y$ fosse desconexo, então pela proposição anterior teríamos $d(\mathcal{O}_{y,X})$ no máximo igual 1, mas $d(\mathcal{O}_{y,X}) \geq 2$ e segue que $X_y - y$ é conexo. Do fato de $\dim X_y \geq 2$ temos então $X_y - y$ é não-vazio. □

Corolário 2. *Seja X um esquema localmente noetheriano, e $k \geq 0$ um inteiro. Suponha que para qualquer $y \in X$ tal que $\dim \mathcal{O}_{y,X} > k$, temos $d(\mathcal{O}_{y,X}) \geq 2$. Então X é localmente conexo em codimensão k.*

Demonstranção: Pela condição *ii*) da proposição 2 devemos mostrar que sempre que $y \in X$ é tal que $\dim X_y > k$ tem-se $X_y - y$ é conexo. Seja então $y \in X$ tal que $\dim X_y > k$ com isso $\dim \mathcal{O}_{y,X} > k$ e como $d(O_{y,X}) \geq 2$ pelo teorema anterior $X_y - y$ é conexo.

Como tomamos $y \in X$ tal que $\dim X_y > k$ e $X_y - y$ é conexo temos que X é localmene conexo em codimensão k pela proposição 2. □

Corolário 3. *Se X é um esquema localmente noetheriano do qual todos os anéis locais tem a propriedade S_2 de Serre, então X é localmente conexo em codimensão* 1*.*

Demonstração: A propriedade S_2 de Serre implica que:
1) Se $\dim \mathcal{O}_{y,X} > 2$ então teremos $d(\mathcal{O}_{y,X}) \geq 2$.

2) Se tivermos $\dim \mathcal{O}_{y,X} \leq 2$ então $\mathcal{O}_{y,X}$ é um anel Cohen-Macaulay e com isso vale a igualdade $d(\mathcal{O}_{y,X}) = \dim \mathcal{O}_{y,X}$. Nos dois casos se tomarmos $y \in X$ tal que $\dim(\mathcal{O}_{y,X}) > 1$ temos $d(\mathcal{O}_{y,X}) \geq 2$ e basta aplicar o colorário anterior para $k = 1$. Temos então que X é localmente conexo em codimensão 1.$\square$

Capítulo 3

Interseções completas

Seja X um esquema. A *dimensão* de X no ponto $x \in X$, escrevemos $\dim_x X$, é a dimensão (de Krull) do anel local $\mathcal{O}_{x,X}$. A *dimensão* de X é o supremo dessas dimensões locais.

Definição 10. *O espaço cotangente de Zariski de X em x é $\mathfrak{m}_{x,X}/\mathfrak{m}^2_{x,X}$, considerado como espaço vetorial sobre o corpo residual $k(x) = \mathcal{O}_{x,X}/\mathfrak{m}_{x,X}$. O dual desse espaço vetorial é chamado espaço tangente de Zariski em x.*

Dizemos que X é um esquema não-singular em $x \in X$ se o espaço tangente de Zariski de X em x tem dimensão igual a $\dim_x X$. No caso em que X é noetheriano, X é não-singular em x se e somente se o anel $\mathcal{O}_{x,X}$ é um anel regular local.

Dado um esquema não-singular X de dimensão n, por uma *hipersuperfície* em X entendemos um subcojunto fechado H de X que tem *codimensão pura* 1, isto é, tal que a codimensão de H em cada ponto é 1.

Definição 11. *Um subconjunto fechado V de X, de codimensão s, é uma interseção completa em X se pode ser escrito como interseção de s hipersuperfícies. E é localmente uma interseção completa se todo ponto de V tem uma vizinhança em X na qual V é uma interseção completa.*

Proposição 7. *Seja V uma interseção completa em um esquema irredutível não-singular X. Suponha dada uma representação particular*

$$V = H_1 \cap \cdots \cap H_s$$

de V como interseção de $s = codim(V, X)$ hipersuperfícies, e suponha dado também inteiros positivos $n_1, \cdots, n_s$. Para cada $i = 1, \cdots, s$, seja ϑ_i o feixe de ideais de H_i em

$\mathcal{O}_X$, isto é, o feixe de germes de seções de $\mathcal{O}_X$ anulando-se em H_i. Seja $\mathcal{J}$ o feixe de ideais

$$\mathcal{J} = \vartheta_1^{n_1} + \cdots + \vartheta_s^{n_s},$$

e seja $\mathcal{O}_V$ o quociente $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$. Então $(V, \mathcal{O}_V)$ é um sub-esquema fechado de X, do qual todos os anéis locais são interseções completas.

Demonstração: Já que V é a variedade de $\mathcal{J}$ e $\mathcal{O}_V$ é o quociente do feixe estrutural $\mathcal{O}_X$ pelo feixe de ideais quasi-coerente $\mathcal{J}$, segue que $(V, \mathcal{O}_V)$ é um sub-esquema fechado de X. Com isso precisamos mostrar apenas que os anéis locais são interseções completas. Para isso tome $x \in V$ e considere o anel local $\mathcal{O}_{x,V} = \mathcal{O}_{x,X}/\mathcal{J}_x$. Sendo X noetheriano e não-singular o anel $\mathcal{O}_{x,X}$ é regular local. Para mostrar que $\mathcal{O}_{x,V}$ é interseção completa é suficiente provarmos que o ideal $\mathcal{J}_x$ pode ser gerado por $t = \dim \mathcal{O}_{x,X} - \dim \mathcal{O}_{x,V}$ elementos. Para qualquer esquema X e qualquer $x \in X$ temos $\dim_x X = \dim \mathcal{O}_{x,X}$. Como $\mathcal{O}_{x,X}$ é regular segue que $t = codim_x(V, X)$. Já que H_i é de codimensão pura 1 em X, e $\mathcal{O}_{x,X}$ é um domínio de fatoração única (Veja [2], pg. 483) segue que o ideal $(\vartheta_i)_x$ de H_i em x é principal, assim o ideal $\mathcal{J}_x$ pode ser gerado por s elementos. Mas $s = codim(V, X)$, daí a codimensão t de V em X em um ponto qualquer x deve ser necessariamente maior ou igual a s, isto é $t \geq s$. $\square$

Dizemos que o feixe estrutural $\mathcal{O}_V$ é induzido sobre V pelos $H_i's$ tomados com multiplicidade n_i.

Devemos observar que $(V, \mathcal{O}_V)$ definido acima em geral não é o esquema reduzido induzido sobre V. Veja o exemplo 4 logo mais.

Definição 12. *Dizemos que um sub-esquema fechado $(V, \mathcal{O}_V)$ de um esquema não-singular X é uma interseção completa se:*

i) O espaço topológico subjacente V é uma interseção completa em X e

ii) Para alguma representação de V como interseção completa de hipersuperfícies $V = H_1 \cap \cdots \cap H_s$, e para alguma escolha de multiplicidades n_i, $\mathcal{O}_V$ é o feixe induzido sobre V por essa representação (como visto acima).

Assim como a localização, o método de completamento simplifica diversas situações pelo fato de concentrar atenção próximo a um ponto. O completamento de um anel com respeito ao ideal $\mathfrak{m}$ é escrito $A^*_{\mathfrak{m}}$, ou simplesmente A^* quando $\mathfrak{m}$ estiver claro no contexto.

O exemplo canônico é $k[x_1, \cdots, x_n]$ o anel de polinômios em n variáveis sobre um corpo k, que tem por completamente o anel das séries de potências formais $k[|x_1, \cdots, x_n|]$ em n variáveis sobre um corpo k. O anel $k[|x_1, \cdots, x_n|]$ é regular local de dimensão n.

O anel das séries de potências formais $k[|x_1, \cdots, x_n|]$ é de fundamental importância em geometria algébrica, pois o anel local de um ponto não-singular sobre uma variedade de dimensão n sempre tem por completamento o anel das séries de potências formais em n variáveis. Esse resultado é provado no capítulo 11 de [1].

Faremos aqui uso dos seguintes resultados da teoria de completamento:

1) Se $(A, \mathfrak{m})$ é um anel local e A^* é o seu completamento, então $\dim A = \dim A^*$.
2) O completamento comuta com o quociente, daí se $A = B/\mathfrak{b}$ tem-se $A^* = B^*/\mathfrak{b}^*$.

Para maiores detalhes sobre completamento de anéis veja [2] ou [8].

Proposição 8. *Se o anel local A é uma interseção completa então o seu completamento A^* também é uma interseção completa.*

Demonstração: $A = B/\mathfrak{b}$ onde B é um anel regular local e $\mathfrak{b}$ pode ser gerado por $r = \dim B - \dim A$ elementos. Tomando o completamento $A^* = B^*/\mathfrak{b}^*$, o completamento preserva dimensão e regularidade de um anel local, daí $\dim A = \dim A^*$ e $\dim B = \dim B^*$, com B^* regular (a regularidade vem do fato de que o ideal maximal de A^* é gerado por $\mathfrak{m}$, onde $\mathfrak{m}$ é o ideal maximal de A e que A e A^* têm a mesma dimensão. Vale também a recíproca, veja [8], pg. 301). Daí $\mathfrak{b}^* = \mathfrak{b} \cdot B^*$, isto é, $\mathfrak{b}^*$ é um B^*-módulo gerado por $\mathfrak{b}$ e então $\mathfrak{b}^*$ pode ser gerado por $\dim B - \dim A = \dim B^* - \dim A^*$ elementos e assim A^* é interseção completa. $\square$

Lema 5. *Seja V um subconjunto fechado de um esquema noetheriano X, e considere $x \in V$. Seja $\mathcal{O}_V$ um feixe estrutural sobre V fazendo-o um sub-esquema de X. Seja V_x^* o subespaço topológico subjacente de $Spec(\mathcal{O}_{x,V})^*$, onde $\mathcal{O}_{x,V}$ é o anel local de x sobre V. Então V_x^* não depende do feixe estrutural $\mathcal{O}_V$ escolhido.*

Demonstração: Sejam $\mathcal{O}_V$ e $\mathcal{P}_V$ duas tais estruturas. Podemos supor que uma delas, digamos $\mathcal{P}_V$ é a estrutura reduzida induzida sobre V. Então $\mathcal{P}_{x,V} = \mathcal{O}_{x,V}/\mathcal{N}$, onde $\mathcal{N}$=Nilradical de $\mathcal{O}_{x,V}$. Tomando os completamentos, obtemos

$$(P_{x,V})^* = (\mathcal{O}_{x,V})^*/\mathcal{N}^*$$

onde $\mathcal{N}^* = \mathcal{N} \cdot (\mathcal{O}_{x,V})^*$. Desde que $\mathcal{N}^*$ é um $(\mathcal{O}_{x,V})^*$-módulo gerado por $\mathfrak{b}$ então o ideal $\mathcal{N}^*$ consiste inteiramente de elementos nilpotentes. Fazer o quociente pelos nilpotentes não altera o espectro do anel, então o espaço topológico subjacente de $Spec(\mathcal{P}_{x,V})^*$ e $Spec(\mathcal{O}_{x,V})^*$ são iguais. $\square$

Definição 13. *Se V é um subconjunto fechado de um esquema noetheriano X e $x \in V$, chamamos V_x^* definido acima o espaço local formal de V em x. Uma propriedade topológica local de V será dita valer formalmente se vale para cada espaço local formal de V.*

Fazendo uso dos resultados obtidos anteriormentes daremos agora uma condição necessária para que um fechado V em um esquema X seja interseção completa.

Teorema 3. *Seja V um subespaço fechado de um esquema não-singular X, que é localmente uma interseção completa. Então V é localmente e formalmente conexo em codimensão um.*

Demonstração: Já que a questão é local sobre V, podemos supor que é globalmente uma interseção completa em X, pois caso contrário tomamos V como a vizinhança onde é interseção completa. Então pela proposição 7 existe um feixe estrutural $\mathcal{O}_V$ sobre V do qual todos anéis locais são interseções completas. Mas um anel local que é uma interseção completa também é Cohen-Macaulay pela proposição 5, e em particular tem a propriedade S_2 de Serre. Então pelo corolário 3, V é localmente conexo em codimensão 1.

Para os espaços locais formais, V_x^* é o espaço topológico subjacente de $Spec(\mathcal{O}_{x,V})^*$, e $(\mathcal{O}_{x,V})^*$ é uma interseção completa pela proposição 8. Com o mesmo argumento temos que V_x^* é localmente conexo em codimensão 1. $\square$

Vejamos agora alguns exemplos de fechados em um esquema X, procurando classificá-los como interseção completa ou não.

Exemplo 1.

O exemplo mais simples para o qual podemos usar nossa teoria é dado por um subconjunto do $\mathbb{A}^4(k)$ que consiste de dois planos que se intersectam num ponto. Por exemplo quando $X = \mathbb{C}^4$ e V é a variedade dada pela união dos planos $\Lambda_1 = \{(z_1, z_2, 0, 0)\}$ e $\Lambda_2 = \{(0, 0, z_3, z_4)\}$. A interseção de Λ_1 com Λ_2 é somente a origem $(0, 0, 0, 0)$. Temos que V é conexo em codimensão 2, mas não é conexo em codimensão 1. Já que a origem $(0, 0, 0, 0)$ tem codimensão 2 em V. Assim V não é uma interseção completa.

Exemplo 2.

No caso acima a variedade V possuia duas componentes e mostramos que V não era interseção completa. Mesmo sendo V uma variedade irredutível ainda é possível que ela não seja interseção completa. Vejamos o seguinte exemplo. Seja $X = \mathbb{C}^4$ e considere V a superfície dada parametricamente por

$$z_1 = t, \quad z_2 = tu, \quad z_3 = u(u-1), \quad z_4 = u^2(u-1) \tag{3.1}$$

Note que V é imagem pela aplicação injetiva, a menos dos pontos $(0,0)$ e $(0,1)$, do plano (t,u)

$$(t,u) \to (t, tu, u(u-1), u^2(u-1)), \tag{3.2}$$

onde $(0,0) \to (0,0,0,0)$ e $(0,1) \to (0,0,0,0)$. Sendo V irredutível, é localmente conexo em codimensão 1. De fato, da irredutibilidade de V segue que é conexo. Daí um aberto não-vazio em um irredutível é também irredutível. Daí tomando F um fechado de V com codimensão maior que 1 temos que $V - F$ é aberto não-vazio de V e então é irredutível, logo conexo, consequentemente V é conexo em codimensão 1. Mas na origem, não é formalmente interseção completa. Pois aplicando o teorema ao anel local das séries de potências convergentes na origem temos que V não é interseção completa no sentido de várias variáveis, isto é, não pode ser expresso como interseção de 2 hipersuperfícies em $\mathbb{C}^4$. Consequentemente não é interseção completa.

Exemplo 3.

Poderíamos ser levados a pensar que se V é uma interseção completa então quaisquer duas componentes irredutíveis de V passando por um dado ponto p tem interseção com codimensão 1 com respeito a cada componente em p, já que codimensão 1 é a condição para V ser interseção completa em X. Contudo isso não ocorre. Seja $X = \mathbb{C}^4$ e V a união de três planos Q_1, Q_2, Q_3 onde $Q_1 = \{(0,0,z_3,z_4)\}$, $Q_2 = \{(z_1,0,0,z_4)\}$ e $Q_3 = \{(z_1,z_2,0,0)\}$. Segue fácil que V é uma interseção completa já que é definida pela interseção das duas hipersuperfícies $H_1 = \{(z_1,z_2,z_3,z_4) \in \mathbb{A}^4(k)/z_1z_3 + z_2z_4 = 0\}$ e $H_2 = \{(z_1,z_2,z_3,z_4) \in \mathbb{A}^4(k)/z_2z_3 = 0\}$, e $2 =$ codimensão de V em X. Agora perceba que Q_1 e Q_3 têm um único ponto em comum, a saber, o ponto $(0,0,0,0)$, que é de codimensão 2 em relação às componentes.

Exemplo 4.

Um sub-esquema de um esquema não-singular X cujo espaço topológico subjacente é uma interseção completa não é necessariamente uma interseção completa, mesmo localmente. Por exemplo, seja V a curva no espaço afim $X = \mathbb{A}^3(k)$, dada parametricamente por $x = t^3$, $y = t^4$, $z = t^5$

Note que o subconjunto V é uma interseção completa em X dada pela interseção das hipersuperfícies $H_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{A}^3(k)/z^2 - x^2y = 0\}$ e $H_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{A}^3(k)/x^4 + y^3 -$

$2xyz = 0\}$, e $2 = codim(V, X)$. Mostraremos que V, com estrutura reduzida induzida $\mathcal{O}_V$, não é interseção completa no espaço local de X na origem, apesar de V ser uma interseção completa em X. Seja $\mathcal{O}$ o anel local da origem em X e $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}$ o ideal de V. Então dizer que o sub-esquema $(V, \mathcal{O}_V)$ é uma interseção completa no espaço local X_0 de X na origem é dizer que $\mathfrak{p}$ pode ser gerado por 2 elementos de $\mathcal{O}$, pois sendo $\mathfrak{p}$ o ideal de V o quociente $k(V) = k[x, y, z]/\mathfrak{p}$ é tal que $\dim k[x, y, z] = 3$ e $\dim k(V) = \dim V = 1$.

O ideal $\mathfrak{p}$ consiste de todas funções racionais $\frac{f(x,y,z)}{g(x,y,z)}$ onde f e g são polinômios com coeficientes no corpo k, $g(0,0,0) \neq 0$ e $f(t^3, t^4, t^5) \equiv 0$ como polinômio em t. Uma funçãof como acima não pode conter termos constantes e nem termos lineares em x, y, z, então $\mathfrak{p}$ deve está contido em $\mathfrak{m}^2$. Reduzindo módulo $\mathfrak{m}^3$, considere o k-espaço vetorial $\mathfrak{p}/\mathfrak{m}^3 \subseteq \mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3$. Note que $\mathfrak{p}$ contém os polinômios $y^2 - xz$, $x^3 - yz$, $z^2 - x^2y$, cujas classes residuais $\mod \mathfrak{m}^3$ são linearmente independentes sobre k. De fato, se $a_1(\overline{y^2 - xz}) + a_2(\overline{x^3 - yz}) + a_3(\overline{z^2 - x^2y}) = \overline{0}$ com $a_1, a_2, a_3 \in k$ teríamos $a_1(y^2 - xz) + a_2(x^3 - yz) + a_3(z^2 - x^2y) \in \mathfrak{m}^3$. Temos que $a_1y^2 - a_1xz - a_2yz + a_3z^2 \in \mathfrak{m}^2$. Como $a_1y^2 - a_1xz - a_2yz + a_3z^2 \in \mathfrak{m}^3$, a diferença $a_1(y^2 - xz) + a_2(x^3 - yz) + a_3(z^2 - x^2y) - (a_2x^3 - a_3x^2y) = a_1y^2 - a_1xz - a_2yz + a_3z^2$ pertenceria a $\mathfrak{m}^3$, o que não ocorre. Consequentemente o espaço vetorial $\mathfrak{p}/\mathfrak{m}^3$ tem dimensão maior ou igual a 3. Isso mostra que $\mathfrak{p}$ não pode ser gerado como ideal por 2 elementos, pois se pudesse ser gerado por dois elementos, digamos $\mathfrak{p} = \langle p_1, p_2 \rangle$, suas classes residuais $\mod \mathfrak{m}^3$ poderiam gerar $\mathfrak{p}/\mathfrak{m}^3$ como um k-espaço vetorial, mas ao fazer o quociente de $\mathfrak{p}$ por $\mathfrak{m}^3$ a quantidade de geradores não pode aumentar. Com isso $(V, \mathcal{O}_V)$ não é uma interseção completa na origem.

Referências Bibliográficas

[1] ATIYAH, Michel Francis; I.G. Macdonald, Introduction to commutative algebra. London; Addison-Wesley, 1969. 128 p.

[2] EISENBUD, David. Commutative Algebra with a view toward algebraic geometry. New York: Springer-Verlag, 1995. 785 p.

[3] HARTSHORNE, Robin. *Complete intersections and connectedness*. American Journal of Mathematics. Baltimore, v. 84, pg. 497-508, 1962.

[4] KUNZ, Ernst, Introduction to commutative algebra and algebraic geometry. Boston; Basel. 1985. 238 p.

[5] MATSUMURA, Hideyuki. Commutative ring theory. Cambridge: Cambridge University, 1986. 320 p.

[6] PERRIN, Daniel. Géométrie Algébrique. Paris. Savoirs Actuels, CNRS Editions. 1995. 299 p.

[7] ZARISKI, Oscar; SAMUEL, Pierre. Commutative algebra vol. I. New York. Springer-Verlag, 1960. 329 p.

[8] ZARISKI, Oscar; SAMUEL, Pierre. Commutative algebra vol. II. New York. Springer-Verlag, 1960. 414 p.