UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

Fabrício de Figueredo Oliveira

Hipersuperfícies completas com k-ésima função simétrica nula na esfera unitária.

FORTALEZA
2008

Fabrício de Figueredo Oliveira

Hipersuperfícies completas com k-ésima função simétrica nula na esfera unitária.

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros.

FORTALEZA

2008

Oliveira, Fabrício de Figueredo.

O47h Hipersuperfícies completas com k-ésima função simétrica nula na esfera unitária. Fabrício de Figueredo Oliveira. - Fortaleza: 2008.

57f.

Orientador: Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros.

Dissertação(Mestrado)- Universidade Federal do Ceará. Departamento de Matemática, 2008.

1- Geometria Diferencial.

CDD 516.36

folha de aprovação

Dedico este trabalho aos meus pais e à minha amada Natália.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos os amigos que me deram a força necessária para suportar aqueles momentos mais complicados, Edvaldo de Souza Soares pelos ensinamentos, Claudemir de Almeida, o companheiro desde a graduação, por ter caminhado comigo até o mestrado. Cícero Fagner, por ter me ensinado como agir em situações difíceis e pelas conversas sobre a vida. Luiz Antônio, por suas brincadeiras que sempre aliviavam um pouco a tensão existente. Nailson, por sempre acreditar que eu era capaz. Elivaldo Macedo, por dar o exemplo do professor que devo ser. Também, Carlos Mário, Glaucio, Loester, Denise, Carpegianni, Darlan, Eliezer, Daniel Leite, Junio Damião, Diana Lima, Jocel Faustino, Flávio Cruz, Gurgel do Amaral, Gleydson Ricarte e Wilker Lima pelas conversas, dúvidas e incentivos.

À super secretária da pós graduação da UFC, Andréa Costa Dantas, por sempre nos atender com sua típica boa vontade, sempre resolvendo os problemas dos alunos.

Aos professores Alexandre Fernandes e Antônio Caminha pelo alto nível de suas aulas. Ao Professor Abdênago pela paciência e impaciência também, afinal somos humanos.

Em especial à minha noiva que sempre me deu apoio incondicional mesmo quando eu a "trocava"nos fins de semana pelo estudo.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

“Desista não meu filho, está perto do fim....”
(Papai e mamãe)

Resumo

Neste trabalho vamos estudar hipersuperfícies M^n da esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$, conexas, completas, com duas curvaturas principais distintas, uma das quais de multiplicidade $n-1$ e possuindo k-ésima função de curvatura nula. Sob tais condições, vamos provar que o toro de Clifford é a única hipersuperfície que satisfaz $S \geqslant \dfrac{n(k^2-2k+n)}{k(n-k)} = c(n,k)$, onde S representa o quadrado da norma da segunda forma fundamental. Além disso, vamos mostrar que no caso compacto, $\int_M S \leq c(n,k)vol(M)$, ocorrendo igualdade somente no toro de Clifford.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

No trabalho seminal de E. Cartan [4] foi provado, entre vários outros resultados, que o toro de Clifford é a única hipersuperfície compacta da esfera unitária com duas curvaturas principais constantes. Após Cartan surgiram vários trabalhos que classificam toros de Clifford. Podemos, por exemplo, destacar o trabalho de M. do Carmo, S. S. Chern e S. Kobayashi em [7] e H. B. Lawson em [12]. Eles provaram, independentemente, que se M é uma variedade $n-$dimensional compacta, mínima e imersa em um espaço $(n+p)-$dimensional N de curvatura constante c e a norma $\|A\|$ da segunda forma fundamental de M em N satisfaz $\|A\|^2 \leq \frac{nc}{2-1/p}$, então $A \equiv 0$ ou $\|A\|^2 \equiv \frac{nc}{2-1/p}$.
Além disso, se $N = \mathbb{S}^{n+1}$, a esfera unitária $(n+1)-$dimensional e $\|A\|^2 = n$, então M é localmente o produto riemanniano dos espaços V_1 e V_2 de curvaturas $\frac{n}{m}$ e $\frac{n}{n-m}$ respectivamente, onde $dimV_1 = m \geq 1$ e $dimV_2 = n - m \geq 1$. Mais tarde, em 1970, T. Otsuki em [16] estudou as tais hipersuperfícies da esfera unitária de dimesão $(n+1)$ e provou que se as curvaturas principais são de multiplicidades maior que 1, então M^n é localmente o toro de Clifford. Além disso, T. Otsuki construiu hipersuperfícies mínimas em $\mathbb{S}^{n+1}$ com duas curvaturas principais distintas uma das quais de multiplicidade um, diferentes do toro de Clifford $\mathbb{S}^1(\sqrt{1/n}) \times \mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{(n-1)/n})$.

Q. M. Cheng provou em 1996 (veja [5]) que se $M^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$ é mínima, compacta e o quadrado da norma S da segunda forma fundamental satisfaz $n \leq S \leq n + \frac{2n^2(n+4)}{3[n(n+4)+4]}$, então $S = n$ e M^n é toro mínimo de Clifford.
Já em 2000 T.Hasanis e T. Vlachos provaram em [10] que a limitação superior sugerida por Q. M. Cheng é desnecessária. Ou seja, se M for hipersuperfície mínima compacta em $\mathbb{S}^{n+1}$ com duas curvaturas principais distintas, basta que $S \geq n$ para que $S = n$ e M seja o toro mínimo de Clifford.
Estes mesmos autores em colaborção com A. Savas-Halilaj mostraram que o resultado anterior é ainda válido quando M^n deixa de ser compacta e passa a ser completa.
O objetivo principal deste trabalho é caracterizar o toro de Clifford. Ampliaremos os resultados anteriores trocando a condição de ser M mínima pela nulidade de sua k-ésima função simétrica normalizada, H_k. Em seguida, para o caso de M ser compacta, obteremos uma desigualdade integral para o quadrado da segunda forma S, mostrando que esta integral é majorada por um múltiplo do volume V de M. Mais precisamente, mostraremos que,

$$\int_M S \leq \frac{n(k^2 - 2k + n)}{k(n-k)} V.$$

O presente trabalho é o conteúdo dos artigos de G. Wei [17] e [18].

Capítulo 2

Cálculos Preliminares

2.1 Equações de estrutura

Seja $x : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ uma imersão da variedade n-dimensional M na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$. Considere $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}\}$ um referencial ortonormal adaptado a M, ou seja, $e_1, \ldots, e_n$ são tangentes a M e e_{n+1} é normal a M. Sejam $\{\overline{\omega}_1, \ldots, \overline{\omega}_{n+1}\}$ as formas duais de $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}\}$ e $\omega_i = \overline{\omega_i} \mid M$ para $1 \leq i \leq n$.
Usaremos a convenção de índices já adotada na literatura, qual seja,

$$1 \leq A, B, C, \cdots \leq n+1, \quad 1 \leq i, j, k, \cdots \leq n, \quad 1 \leq a, b, c, \cdots \leq n-1. \tag{2.1}$$

Um dos resultados mais básicos no estudo do método do referencial móvel é o lema de Cartan, que pode ser enunciado da seguinte maneira.

Lema 1 (Cartan) *Consideremos V um espaço vetorial real de dimensão n e $\omega_1, \ldots, \omega_r : V \to \mathbb{R}$, $r \leq n$, formas lineares em V, linearmente independentes. Suponhamos que existam formas lineares $\theta_1, \ldots, \theta_r : V \to \mathbb{R}$ satisfazendo a seguinte condição,*

$$\sum_{i=1}^{r} \omega_i \wedge \theta_i = 0.$$

Então,

$$\theta_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}\omega_j, \quad i,j = 1,\ldots,r, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Demonstração: Primeiramente vamos completar as formas $\omega_1, \ldots, \omega_r$ em uma base $\omega_1, \ldots, \omega_r, \omega_{r+1}, \ldots, \omega_n$ de V^*, e escrevamos

$$\theta_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}\omega_j + \sum_{l>r} b_{il}\omega_l.$$

Por hipótese,

$$\sum_{i=1}^{r} \omega_i \wedge \theta_i = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{i=1}^{r} \omega_i \wedge \theta_i &= \sum_{i=1}^{r} \omega_i \wedge \sum_{j=1}^{r} a_{ij}\omega_j + \sum_{i=1}^{r} \omega_i \wedge \sum_{l>r} b_{il}\omega_l \\ &= \sum_{i<j\leq r} (a_{ij} - a_{ji})\omega_i \wedge \omega_j + \sum_{i\leq r<l} b_{il}\omega_i \wedge \omega_l. \end{aligned}$$

Como o conjunto

$$A = \{\omega_k \wedge \omega_s | \quad k < s, \quad k,s = 1,\ldots,n\}$$

é linearmente independente, conclui-se que

$$a_{ij} = a_{ji}$$

e

$$b_{il} = 0.$$

□

Passemos agora ao estudo das chamadas equações de estrutura. Observando que $\langle x, x\rangle = 1$, temos $\langle dx, x\rangle = 0$. Assim, o vetor posição x em $\mathbb{S}^{n+1}$ é perpendicular ao plano tangente e, portanto, $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}, x = e_{n+2}\}$ é

um referencial ortonormal adaptado em $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$.
Logo,

$$dx = \sum_A w_A e_A.$$

Observando que todo vetor v no espaço tangente T_pM é escrito na forma $v = \sum_i a_i e_i$, temos

$$\bar{\omega}_{n+1}(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{\omega}_{n+1}(e_i) = 0, \quad \text{pois} \quad 1 \leq i \leq n,$$

donde obtemos $\bar{\omega}_{n+1} \mid M = 0$.
Assim,

$$dx = \sum_{i=1}^{n} \omega_i e_i. \tag{2.2}$$

Escrevendo o campo de_i no referencial escolhido obtemos

$$de_i = \sum_j \omega_{ij} e_j + \omega_{in+1} e_{n+1} + \omega_{ix} x. \tag{2.3}$$

Fazendo produto interno da expressão (2.3) com x, obtemos

$$\langle de_i, x \rangle \;\; = \;\; \sum_j \omega_{ij} \langle e_j, x \rangle + \omega_{in+1} \langle e_{n+1}, x \rangle + \omega_{ix} \langle x, x \rangle.$$

Agora usando que $\langle e_j, x \rangle = \langle e_{n+1}, x \rangle = 0$ e $\langle x, x \rangle = 1$, obtemos

$$\langle de_i, x \rangle \;\; = \;\; \omega_{ix}.$$

Como

$$\langle x, e_i \rangle = 0 \Rightarrow \langle de_i, x \rangle = -\langle dx, e_i \rangle = -\sum_j \omega_j \langle e_j, e_i \rangle = -\sum_j \omega_j \delta_{ji} = -\omega_i,$$

concluímos que $\omega_{ix} = -\omega_i$.
Observando que $\omega_{n+1} = 0$, obtemos

$$\sum_i \omega_{n+1i} \wedge \omega_i = d\omega_{n+1} = 0.$$

Pelo lema de Cartan,

$$\omega_{in+1} = \sum_j h_{ij}\omega_j.$$

Podemos então reescrever (2.3) como

$$de_i = \sum_j \omega_{ij}e_j + \sum_j h_{ij}\omega_j e_{n+1} - \omega_i x. \tag{2.4}$$

De um modo análogo ao anterior,

$$de_{n+1} = \sum_i \omega_{n+1i}e_i + \omega_{n+1n+1}e_{n+1} + \omega_{n+1x}x. \tag{2.5}$$

Utilizando o fato que $\langle e_{n+1}, x\rangle = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\langle de_{n+1}, x\rangle &= -\langle e_{n+1}, dx\rangle \\
&= -\langle e_{n+1}, \sum_j \omega_j e_j\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Daí, utilizando (2.5) podemos escrever

$$\omega_{n+1x} = \sum_i \omega_{n+1i}\langle e_i, x\rangle + \omega_{n+1x}\langle x, x\rangle = \langle de_{n+1}, x\rangle = 0.$$

Portanto, (2.5) se reescreve como

$$de_{n+1} = \sum_i \omega_{n+1i}e_i = -\sum_{i,j} h_{ij}\omega_j e_i. \tag{2.6}$$

Devido à simetria da segunda forma, o operador linear associado é auto-adjunto, portanto diagonalizável. Logo, considere $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, as curvaturas principais de M^n em $\mathbb{S}^{n+1}$. Por isso, podemos considerar, em cada ponto $p \in M$, um referencial $\{e_1, e_2, \cdots, e_{n+1}\}$ tal que

$$\omega_{in+1} = \lambda_i\omega_i.$$

Ou seja, como $\omega_{in+1} = \sum_j h_{ij}\omega_j$, teremos para cada ponto $p \in M$,

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}_{in+1}(e_k) &= \sum_j h_{ij}\omega_j(e_k) = \sum_j h_{ij}\delta_{jk} = h_{ik}. \\
h_{ij} &= \lambda_i\omega_i(e_j) = \lambda_i\delta_{ij}, \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

onde (h_{ij}) é a matriz da segunda forma de M^n.

Quando a segunda forma de M^n está diagonalizada, definimos a k-ésima função simétrica normalizada, ou H_k-curvatura, por,

$$H_k = \frac{1}{C_n^k}\left(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} \lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_k}\right),$$

onde representamos $C_n^k := \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$. Ou seja, isto equivale a tomarmos uma "média"dos determinantes das submatrizes de ordem k da matriz (h_{ij}), cujas diagonais principais coincidem com a diagonal principal de (h_{ij}).

Vamos encontrar agora as equações de Gauss

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) + (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}). \\ n(n-1)R &= n(n-1) + n^2H^2 - S. \end{aligned}$$

Para tanto, representemos por $\overline{\omega}_A$ as formas duais em $\mathbb{S}^{n+1}$, por $\overline{\omega}_{AB}$ as formas de conexão em $\mathbb{S}^{n+1}$ e $\omega_i = \overline{\omega}_i\mid_M$, $\omega_{ij} = \overline{\omega}_{ij}\mid_M$.

Usando as formas de conexão

$$d\bar{\omega}_{ij} = \sum_C \bar{\omega}_{iC}\wedge\bar{\omega}_{Cj} + \bar{\Omega}_{ij}$$

e

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik}\wedge\omega_{kj} + \Omega_{ij},$$

obtemos

$$\begin{aligned} \Omega_{ij} &= d\omega_{ij} - \sum_k \omega_{ik}\wedge\omega_{kj} \\ &= d\bar{\omega}_{ij}\mid_M - \sum_k(\bar{\omega}_{ik}\mid_M)\wedge(\bar{\omega}_{kj}\mid_M) \\ &= \bar{\Omega}_{ij} + \sum_C(\bar{\omega}_{iC}\mid_M)\wedge(\bar{\omega}_{Cj}\mid_M) - \sum_k(\bar{\omega}_{ik}\mid_M)\wedge(\bar{\omega}_{kj}\mid_M) \\ &= \bar{\Omega}_{ij} + (\bar{\omega}_{in+1}\mid_M)\wedge(\bar{\omega}_{n+1j}\mid_M). \end{aligned}$$

Utilizando novamente

$$\omega_{n+1j} = -\sum_l h_{jl}\omega_l,$$

dos cálculos anteriores, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\Omega_{ij} &= \bar{\Omega}_{ij} - \sum_k h_{ik}\bar{\omega}_k \mid_M \wedge \sum_l h_{jl}\bar{\omega}_l \mid_M \\
&= \bar{\Omega}_{ij} - \sum_{k,l} h_{ik}h_{jl}\omega_k \wedge \omega_l \\
&= \bar{\Omega}_{ij} - \sum_{k<l}(h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk})\omega_k \wedge \omega_l.
\end{aligned}$$

Sabendo que

$$\overline{\Omega}_{ij} = -\frac{1}{2}\sum_{k,l} \bar{R}_{ijkl}\bar{\omega}_k \wedge \bar{\omega}_l,$$

teremos

$$-\sum_{k<l} R_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l = -\sum_{k<l} \bar{R}_{ijkl}(\bar{\omega}_k \mid_M) \wedge (\bar{\omega}_l \mid_M) - \sum_{k<l}(h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk})\omega_k \wedge \omega_l.$$

Portanto, $\bar{\omega}_k \mid_M = \omega_k$ nos dá

$$-\sum_{k<l}(R_{ijkl} - \bar{R}_{ijkl} - (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}))\omega_k \wedge \omega_l \equiv 0,$$

e daí

$$R_{ijkl} = \bar{R}_{ijkl} + (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}).$$

Considerando

$$X = \sum_A x_A e_A \quad \text{e} \quad Y = \sum_A y_A e_A \quad \text{em} \quad T_p\mathbb{S}^{n+1},$$

podemos escrever

$$\langle (\bar{R}_{XY})X, Y\rangle = \sum_{A,B,C,D} x_A y_B x_C y_D \bar{R}_{ABCD}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle X, X\rangle\langle Y, Y\rangle - \langle X, Y\rangle^2 &= \sum_{A,C} x_A x_C \delta_{AC} \sum_{B,D} y_B y_D \delta_{BD} \\
&- \sum_{A,D} x_A y_D \delta_{AD} \sum_{C,B} x_C y_B \delta_{CB} \\
&= \sum_{A,B,C,D} (\delta_{AC}\delta_{BD} - \delta_{AD}\delta_{CB}) x_A y_B x_C y_D.
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando o fato de que a curvatura seccional de $\mathbb{S}^{n+1}$ é constante igual a 1, obtemos

$$\sum_{A,B,C,D} x_A y_B x_C y_D \bar{R}_{ABCD} = \sum_{A,B,C,D} x_A y_B x_C y_D (\delta_{AC}\delta_{BD} - \delta_{AD}\delta_{CB}).$$

Portanto,

$$\bar{R}_{ABCD} = \delta_{AC}\delta_{BD} - \delta_{AD}\delta_{CB}. \tag{2.8}$$

Quando restringimos a M, tal expressão passa a ser

$$\bar{R}_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}. \tag{2.9}$$

Encontramos assim a primeira das equações de Gauss

$$R_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) + (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}). \tag{2.10}$$

Para obter a segunda equação, da expressão (2.10) temos, para $i \neq j$,

$$R_{ijij} = 1 + h_{ii}h_{jj} - h_{ij}^2.$$

Ao somarmos em i, obtemos

$$\sum_i R_{ijij} = n + \sum_i (h_{ii}h_{jj} - h_{ij}^2).$$

Agora, somando em $j \neq i$,

$$\sum_{i \neq j} R_{ijij} = n(n-1) + \sum_{i \neq j} (h_{ii}h_{jj} - h_{ij}^2). \tag{2.11}$$

Por definição temos,

$$H = \frac{1}{n}\sum_i h_{ii}, \quad \text{donde} \quad n^2H^2 = (\sum_i h_{ii})^2.$$

$$S = \sum_{i,j} h_{ij}^2, \quad \text{e daí} \quad n^2H^2 - S = (\sum_i h_{ii})^2 - \sum_{i,j} h_{ij}^2.$$

Observando que

$$(\sum_k^n a_k)^2 - \sum_k^n a_k^2 = 2\sum_{i<j}^n a_i a_j = \sum_{i \neq j}^n a_i a_j,$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} n^2H^2 - S &= (\sum_i h_{ii})^2 - \sum_{i,j} h_{ij}^2 \\ &= (\sum_i h_{ii})^2 - \sum_i h_{ii}^2 - \sum_{i\neq j} h_{ij}^2 \\ &= \sum_{i\neq j} h_{ii}h_{jj} - \sum_{i\neq j} h_{ij}^2 \\ &= \sum_{i\neq j}(h_{ii}h_{jj} - h_{ij}^2). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Portanto, de (2.11) e (2.12) obtemos

$$\sum_{i\neq j} R_{ijij} = n(n-1) + n^2H^2 - S$$

e assim,

$$n(n-1)\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i\neq j} R_{ijij} = n(n-1) + n^2H^2 - S.$$

Finalmente, obtemos a equação desejada

$$n(n-1)R = n(n-1) + n^2H^2 - S. \tag{2.13}$$

2.2 Derivada covariante da segunda forma

A partir das equações de estrutura, obteremos as expressões da derivada covariante da segunda forma fundamental. Inicialmente, da segunda equação de estrutura

$$d\bar{\omega}_{AB} = \sum_C \bar{\omega}_{AC} \wedge \bar{\omega}_{CB} + \bar{\Omega}_{AB},$$

podemos escrever

$$d\bar{\omega}_{n+1i} = \sum_C \bar{\omega}_{n+1C} \wedge \bar{\omega}_{Ci} + \bar{\Omega}_{n+1i},$$

portanto

$$\bar{\Omega}_{n+1i} = d\bar{\omega}_{n+1i} - \sum_k \bar{\omega}_{n+1k} \wedge \bar{\omega}_{ki}. \tag{2.14}$$

Observando que

$$d\bar{\omega}_{n+1i} = d(-\sum_j h_{ij}\omega_j) = -\sum_j (dh_{ij} \wedge \omega_j) - \sum_j h_{ij} d\omega_j,$$

e utilizando a equação

$$d\omega_j = \sum_k \omega_{jk} \wedge \omega_k,$$

chegamos ao resultado,

$$\begin{aligned} d\omega_{n+1i} &= -\sum_j (dh_{ij} \wedge \omega_j) - \sum_j h_{ij} \sum_k \omega_{jk} \wedge \omega_k \\ &= -\sum_j dh_{ij} \wedge \omega_j - \sum_k \sum_j h_{ij}\omega_{jk} \wedge \omega_k. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Temos também

$$\begin{aligned} \omega_{n+1k} \wedge \omega_{ki} &= (-\sum_j h_{kj}\omega_j) \wedge \omega_{ki} \\ &= \sum_j h_{kj}\omega_{ki} \wedge \omega_j. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Portanto, substituindo (2.15) e (2.16) em (2.14), teremos

$$\begin{aligned} \overline{\Omega}_{n+1i} &= -\sum_j (dh_{ij} \wedge \omega_j) - \sum_k \sum_j (h_{ij}\omega_{jk} \wedge \omega_k) - \sum_k \sum_j (h_{kj}\omega_{ki} \wedge \omega_j) \\ &= -\sum_k (dh_{ik} \wedge \omega_k) - \sum_k \sum_j (h_{ij}\omega_{jk} \wedge \omega_k) - \sum_k \sum_j (h_{jk}\omega_{ji} \wedge \omega_k) \\ &= -\sum_k (dh_{ik} + \sum_j h_{ij}\omega_{jk} + \sum_j h_{jk}\omega_{ji}) \wedge \omega_k. \end{aligned}$$

Definimos a derivada covariante

$$\begin{aligned} Dh_{ik} &:= d\,h_{ik} + \sum_j h_{ij}\omega_{jk} + \sum_j h_{jk}\omega_{ji} \qquad (2.17) \\ &:= \sum_j h_{ikj}\omega_j, \end{aligned}$$

e assim

$$\overline{\Omega}_{n+1i} = -\sum_k \sum_j (h_{ikj}\omega_j \wedge \omega_k).$$

Ao derivarmos (2.17) exteriormente, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_k (dh_{ijk} \wedge \omega_k) + \sum_k h_{ijk} d\omega_k &= \sum_k (dh_{kj} \wedge \omega_{ki}) + \sum_k h_{kj} d\omega_{ki} \\ &+ \sum_k (dh_{ik} \wedge \omega_{kj}) + \sum_k h_{ik} d\,\omega_{kj}. \quad (2.18)\end{aligned}$$

Da equação (2.17) temos que

$$\begin{aligned} dh_{kj} &= \sum_l h_{kjl}\omega_l - \sum_l h_{lj}\omega_{lk} - \sum_l h_{kl}\omega_{lj}. \\ dh_{ik} &= \sum_l h_{ikl}\omega_l - \sum_l h_{lk}\omega_{li} - \sum_l h_{il}\omega_{lk}. \end{aligned}$$

Sabendo que

$$\begin{aligned} d\omega_k &= \sum_l \omega_{kl} \wedge \omega_l + \omega_{kn+1} \wedge \omega_{n+1} \\ d\omega_{ki} &= \sum_l \omega_{kl} \wedge \omega_{li} + \omega_{kn+1} \wedge \omega_{n+1i} \\ d\omega_{kj} &= \sum_l \omega_{kl} \wedge \omega_{lj} + \omega_{kn+1} \wedge \omega_{n+1j}, \end{aligned}$$

temos de (2.18) a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \sum_k (dh_{ijk} \wedge \omega_k) &+ \sum_k h_{ijk} (\sum_l \omega_{kl} \wedge \omega_l) \\ &= \sum_k \sum_l (h_{kjl}\omega_l \wedge \omega_{ki}) - \sum_k \sum_l (h_{lj}\omega_{lk} \wedge \omega_{ki}) \\ &- \sum_k \sum_l h_{kl} (\omega_{lj} \wedge \omega_{ki}) + \sum_k h_{kj} \sum_l (\omega_{kl} \wedge \omega_{li}) \\ &+ \sum_k (h_{kj}\omega_{kn+1} \wedge \omega_{n+1i}) + \sum_k \sum_l (h_{ikl}\omega_l \wedge \omega_{kj}) \\ &- \sum_k \sum_l (h_{lk}\omega_{li} \wedge \omega_{kj}) - \sum_k \sum_l (h_{il}\omega_{lk} \wedge \omega_{kj}) \\ &+ \sum_k h_{ik} \sum_l (\omega_{kl} \wedge \omega_{lj}) + \sum_k (h_{ik}\omega_{kn+1} \wedge \omega_{n+1j}). \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\sum_k (dh_{ijk} \wedge \omega_k) \;&+\; \sum_{k,l} (h_{ijk}\omega_{kl} \wedge \omega_l) \\
&+ \sum_{k,l} (h_{kjl}\omega_{ki} \wedge \omega_l) + \sum_{k,l} (h_{ikl}\omega_{kj} \wedge \omega_l) \\
&= \sum_{k,l} (h_{lj}\omega_{ki} \wedge \omega_{lk}) + \sum_{k,l} (h_{kl}\omega_{ki} \wedge \omega_{lj}) \\
&+ \sum_{k,l} (h_{kj}\omega_{kl} \wedge \omega_{li}) + \sum_{k} (h_{kj}\omega_{kn+1} \wedge \omega_{n+1i}) \\
&+ \sum_{k,l} (h_{lk}\omega_{kj} \wedge \omega_{li}) + \sum_{k,l} (h_{il}\omega_{kj} \wedge \omega_{lk}) \\
&+ \sum_{k,l} (h_{ik}\omega_{kl} \wedge \omega_{lj}) + \sum_{k,l} (h_{ik}\omega_{kn+1} \wedge \omega_{n+1j}).
\end{aligned}$$

Trocando l por k no primeiro membro obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_k (dh_{ijk} \wedge \omega_k) \;&+\; \sum_{k,l} (h_{ijl}\omega_{lk} \wedge \omega_k) \\
&+ \sum_{k,l} (h_{ljk}\omega_{li} \wedge \omega_k) + \sum_{k,l} (h_{ilk}\omega_{lj} \wedge \omega_k) \\
&= \sum_{k,l} (h_{kj}\omega_{li} \wedge \omega_{kl}) + \sum_{k,l} (h_{lk}\omega_{li} \wedge \omega_{kj}) \\
&+ \sum_{k,l} (h_{kj}\omega_{kl} \wedge \omega_{li}) + \sum_{k} (h_{kj}\omega_{kn+1} \wedge \omega_{n+1i}) \\
&+ \sum_{k,l} (h_{lk}\omega_{kj} \wedge \omega_{li}) + \sum_{k,l} (h_{il}\omega_{kj} \wedge \omega_{lk}) \\
&+ \sum_{k,l} (h_{il}\omega_{lk} \wedge \omega_{kj}) + \sum_{k} (h_{ik}\omega_{kn+1} \wedge \omega_{n+1j}).
\end{aligned}$$

E assim

$$\begin{aligned}
\sum_k (dh_{ijk} + \sum_l h_{ijl}\omega_{lk} \;&+\; \sum_l h_{ljk}\omega_{li} + \sum_l h_{ilk}\omega_{lj}) \wedge \omega_k = \\
&= \sum_m (h_{mj}\omega_{mn+1} \wedge \omega_{n+1i}) + \sum_m (h_{im}\omega_{mn+1} \wedge \omega_{n+1j}).
\end{aligned}$$

Desta expressão definimos

$$\sum_l h_{ijkl}\omega_l \;:=\; dh_{ijk} + \sum_l h_{ijl}\omega_{lk} + \sum_l h_{jlk}\omega_{li} + \sum_l h_{ilk}\omega_{lj}. \quad (2.19)$$

Portanto

$$\sum_k(\sum_l h_{ijkl}\omega_l)\wedge\omega_k=\sum_m(h_{mj}\omega_{mn+1}\wedge\omega_{n+1i})+\sum_m(h_{mi}\omega_{mn+1}\wedge\omega_{n+1j}).$$

Já que

$$\Omega_{mi}=d\omega_{mi}-\sum_k(\omega_{mk}\wedge\omega_{ki})=\omega_{mn+1}\wedge\omega_{n+1i}$$

e

$$\Omega_{mj}=d\omega_{mj}-\sum_k(\omega_{mk}\wedge\omega_{kj})=\omega_{mn+1}\wedge\omega_{n+1j},$$

temos

$$\sum_{k,l}(h_{ijkl}\omega_l\wedge\omega_k)=\sum_m h_{mj}\Omega_{mi}+\sum_m h_{mi}\Omega_{mj}.$$

Donde

$$\begin{aligned}\sum_{k<l}(h_{ijkl}\omega_l\wedge\omega_k)+\sum_{l<k}(h_{ijkl}\omega_l\wedge\omega_k) &= \sum_m h_{mj}\sum_{k,l}[(-\frac{1}{2}R_{mikl})\omega_k\wedge\omega_l]\\ &+ \sum_m h_{mi}\sum_{k,l}[(-\frac{1}{2}R_{mjkl})\omega_k\wedge\omega_l].\end{aligned}$$

Portanto

$$\sum_{k<l}[(h_{ijkl}-h_{ijlk})\omega_l\wedge\omega_k] = \sum_{k<l}\left[(\sum_m h_{mj}R_{mikl}+\sum_m h_{mi}R_{mjkl})\omega_l\wedge\omega_k\right].$$

Donde obtemos

$$h_{ijkl}-h_{ijlk} = \sum_m h_{mj}R_{mikl}+\sum_m h_{mi}R_{mjkl}. \tag{2.20}$$

Diagonalizando a segunda forma fundamental, com curvaturas principais

$$\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_{n-1}:=\lambda \;\text{ e }\; \lambda_n=\mu,$$

podemos escrever

$$H=\frac{1}{n}((n-1)\lambda+\mu)$$

e

$$S=(n-1)\lambda^2+\mu^2.$$

Daí obtemos

$$\begin{aligned} n^2H^2 - S &= (n-1)^2\lambda^2 + 2\lambda\mu(n-1) + \mu^2 - (n-1)\lambda^2 - \mu^2 \\ &= (n-1)\lambda[(n-1)\lambda + 2\mu - \lambda] \\ &= \lambda(n-1)[(n-2)\lambda + 2\mu]. \end{aligned}$$

Então (2.13) transforma-se em,

$$n(n-1)R = n(n-1) + \lambda(n-1)[(n-2)\lambda + 2\mu]. \tag{2.21}$$

2.3 A k-ésima função simétrica nula

Anteriormente definimos a k-ésima função simétrica por

$$H_k = \frac{1}{C_n^k}\left[\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} \lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_k}\right].$$

Em particular, considerando $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-1} := \lambda$ e $\lambda_n = \mu$, as curvaturas principais de M, se separarmos na soma da definição de H_k os termos que contém $\lambda_n = \mu$ e os que não o contém, obteremos

$$H_k = \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n-1} \lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_k} + \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{k-1}\leqslant n-1} \lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_{k-1}}\mu.$$

Como dos n possíveis valores de λ_i não podemos ter λ_n nos produtos do primeiro somatório, então queremos escolher k dentre os $n-1$ λ_i restantes e isto nos dá C_{n-1}^k possibilidades. Da mesma forma, dos k valores de λ_i para os produtos da segunda soma, um deles é μ fixado, e portanto, queremos escolher $k-1$ dentre os $n-1$ restantes, assim temos C_{n-1}^{k-1} possibilidades de fazer tal escolha.

E assim,

$$C_n^k H_k = C_{n-1}^k\lambda^k + C_{n-1}^{k-1}\lambda^{k-1}\mu. \tag{2.22}$$

Em particular, considerando $H_k = 0$, a equação (2.22) transforma-se em

$$C_{n-1}^k\lambda^k + C_{n-1}^{k-1}\lambda^{k-1}\mu = 0.$$

Usando que $C_{n-1}^{k} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}$ e $C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$, obtemos

$$\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}\lambda^k + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\lambda^{k-1}\mu = 0.$$

Portanto,

$$(n-k)\lambda^k + k\mu\lambda^{k-1} = 0.$$

Ou seja,

$$\lambda^{k-1}[(n-k)\lambda + k\mu] = 0. \tag{2.23}$$

Lema 2 *Seja $x : M^n \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ imersão tal que M^n tem duas curvaturas principais distintas λ e μ e, também $H_k = 0$. Então a curvatura principal λ não se anula em M. Além disso, $(n-k)\lambda + k\mu = 0$.*

Demonstração: Suponhamos que $\lambda(p) = 0$, $p \in M$, e definamos os conjuntos

$$\begin{cases} N = \{q \mid q \in M, \lambda(q) \neq 0\}. \\ Q = \{q \mid q \in M, (n-k)\lambda(q) + k\mu(q) = 0\}. \end{cases}$$

Dado um ponto em N, pela continuidade das curvaturas principais, existe uma vizinhança deste ponto em N, isto é, N é aberto. Pelo mesmo argumento, Q é fechado. Já que $p \notin N$ temos que os conjuntos N e M são distintos. A seguir mostraremos que $N = Q$. Tome $q \in N$, pela equação (2.23), obtemos que $(n-k)\lambda(q) + k\mu(q) = 0$ donde $q \in Q$. Portanto, $N \subset Q$. Agora, como λ e μ são duas curvaturas principais distintas em M, nós temos $\lambda(q) \neq \mu(q)$ para todo q de M. Assim, se $(n-k)\lambda(q) + k\mu(q) = 0$ obtemos que $\lambda(q) \neq 0$, caso contrário teríamos $\mu(q) = 0 = \lambda(q)$ uma contradição. Ou seja, $Q \subset N$. Logo, $N = Q$. Pela conexidade de M, e como $N \neq M$ obtemos que N é vazio. Portanto se λ se anula em algum ponto de M, se anulará sempre.

Segue de (2.21) que

$$n(n-1)R = n(n-1),$$

isto é, $R = 1$.

Anteriormente, em (2.10), obtivemos

$$R_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) + (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}).$$

Seja K a curvatura seccional, dada por,

$$K = \frac{R_{ijij}}{\langle e_i, e_i\rangle\langle e_j, e_j\rangle - \langle e_i, e_j\rangle^2}.$$

Usando que $h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$, obtemos, para $i \neq j$,

$$R_{ijij} = 1 + h_{ii}h_{jj}.$$

Como $\lambda \equiv 0$,

$$R_{ijij} = \begin{cases} 1 + \lambda^2 = 1 & \text{se} \quad i, j < n \\ 1 + \lambda\mu = 1 & \text{se} \quad i < n \ \text{ e } \ j = n. \end{cases}$$

Em todo caso, $K = 1$. Então, o teorema de Bonnet-Myers garante que M é compacta. Mas, pelo teorema de Cartan (em [3]) M é isométrica a S^n. Conseqüentemente (ver [8] p. 72) M é totalmente umbílica, uma contradição. Deste modo, λ não se anula em ponto algum de M. Usando (2.23) conclui-se que

$$(n - k)\lambda + k\mu = 0, \tag{2.24}$$

terminando a prova do lema.

$\square$

Exemplo 1 *Vamos construir um toro de Clifford* $\mathbb{S}^m(r_1) \times \mathbb{S}^q(r_2) \subset \mathbb{S}^{m+q+1}$ *com* $H_k = 0$. *Inicialmente, sejam* $x_1 : \mathbb{S}^m(r_1) \to \mathbb{R}^{m+1}$ *e* $x_2 : \mathbb{S}^q(r_2) \to \mathbb{R}^{q+1}$ *as imersões canônicas das esferas de raios* r_1 *e* r_2 *nos espaços euclidianos* $\mathbb{R}^{m+1}$ *e* $\mathbb{R}^{q+1}$*, respectivamente.*

Defina a imersão

$$x : \mathbb{S}^m(r_1) \times \mathbb{S}^q(r_2) \to \mathbb{S}^{m+q+1} \subset \mathbb{R}^{m+q+2}$$

por

$$x = \frac{x_1 + x_2}{r},$$

onde $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

Vamos encontrar a segunda forma fundamental associada a x. Para isto, considere o referencial adaptado $\{e_0, e_1, \ldots, e_m, f_0, f_1, \ldots, f_q\}$ tal que,

$$\begin{cases} e_0 = \dfrac{x_1}{r_1}, \quad f_0 = \dfrac{x_2}{r_2}. \\ e_1, \ldots, e_m \ \text{ são tangentes a } \ \mathbb{S}^m(r_1). \\ f_1, \ldots, f_q \ \text{ são tangentes a } \ \mathbb{S}^q(r_2). \end{cases}$$

Observe que $N = \dfrac{r_2 e_0 - r_1 f_0}{r}$ é unitário normal a x e aos e_i, f_j, com $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq q$. Defina formas ϕ_i com $i = 1, \ldots, m$ e ψ_j com $j = 1, \ldots, q$ por

$$de_0 = \sum \phi_i e_i \ \text{ e } \ df_0 = \sum \psi_j e_j.$$

Portanto, a segunda forma fundamental de x na direção de N é dada por

$$\begin{aligned} -II &= \langle dx, dN \rangle \\ &= \langle \frac{dx_1 + dx_2}{r}, \frac{r_2 de_0 - r_1 df_0}{r} \rangle \\ &= \langle \frac{r_1}{r} de_0 + \frac{r_2}{r} df_0, \frac{r_2}{r} de_0 - \frac{r_1}{r} df_0 \rangle \\ &= \frac{r_1 r_2}{r^2} \langle de_0, de_0 \rangle - \frac{r_1^2}{r^2} \langle de_0, df_0 \rangle + \frac{r_2^2}{r^2} \langle de_0, df_0 \rangle - \frac{r_1 r_2}{r^2} \langle df_0, df_0 \rangle. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \langle de_0, de_0 \rangle &= \sum_i \phi_i^2, \\ \langle df_0, df_0 \rangle &= \sum_j \psi_j^2, \end{aligned}$$

e

$$\langle df_0, de_0 \rangle = 0,$$

teremos finalmente

$$-II = \frac{r_1 r_2}{r^2}(\sum_i \phi_i^2 - \sum_j \psi_j^2).$$

Assim, definindo $\omega_i = \frac{r_2}{r}\phi_i$ e $\theta_j = \frac{r_1}{r}\psi_j$ temos

$$\begin{aligned} -II &= \langle dx, dN \rangle \\ &= \frac{r_1 r_2}{r^2}\sum_i \frac{r^2}{r_2^2}\omega_i^2 - \frac{r_1 r_2}{r^2}\sum_j \frac{r^2}{r_1^2}\theta_j^2 \\ &= \frac{r_1}{r_2}\sum_i \omega_i^2 - \frac{r_2}{r_1}\sum_j \theta_j^2. \end{aligned}$$

Portanto

$$(h_{ij}) = \left(\begin{array}{c|c} \frac{r_1}{r_2} \cdot I_m & 0 \\ \hline 0 & -\frac{r_2}{r_1} \cdot I_q \end{array} \right),$$

onde I_m e I_q representam as matrizes identidades de ordem m e q, respectivamente, enquanto 0 representam as matrizes nulas com suas respectivas ordens. Em particular, se $m = n-1$, $q = 1$, $r_1 = \sqrt{\frac{k}{n}}$ e $r_2 = \sqrt{\frac{n-k}{n}}$, teremos

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-1} := \lambda = \frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{k}{n-k}}$$

e

$$\lambda_n := \mu = -\frac{r_2}{r_1} = -\sqrt{\frac{n-k}{k}}.$$

Portanto, fazendo

$$\alpha = \frac{C_n^k k(n-k)(k-1)!(n-k-1)!}{(n-1)!\lambda^{k-1}},$$

de (2.22) teremos

$$\begin{aligned} \alpha H_k &= (n-k)\lambda + k\mu \\ &= (n-k)\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n-k}} - k\frac{\sqrt{n-k}}{\sqrt{k}} \\ &= \frac{(n-k)k - k(n-k)}{\sqrt{k(n-k)}} = 0, \end{aligned}$$

isto é, $H_k = 0$. Além disso, é fácil deduzirmos que $S = \frac{n(k^2-2k+n)}{k(n-k)}$.

Capítulo 3

Prova dos Teoremas

3.1 Distribuição do espaço de direções principais

Dada uma variedade M, de dimensão n, denotamos por TM o fibrado tangente de M, cuja dimensão é $2n$. Observe que,

$$TM = \{(p, v), p \in M \quad \text{e} \quad v \in T_pM\}.$$

Seja $\pi : TM \to M$ a projeção canônica de TM em M. Chamamos $\pi^{-1}(p) \simeq T_pM$ de fibra de p em TM. Uma distribuição $k-$dimensional sobre M é uma função $p \to \triangle_p$, onde $\triangle_p \subset \pi^{-1}(p)$ é um subespaço $k-$dimensional de $\pi^{-1}(p)$. Para todo $p \in M$ existe uma vizinhança U de p em M e k campos vetoriais $X_1, \ldots X_k$ tais que $X_1(q), \ldots, X_k(q)$ é uma base para $\triangle_q$, para cada $q \in U$. Dizemos que $\triangle$ é uma distribuição C^∞ se esses campos $X_1, \ldots, X_k$ puderem ser escolhidos como campos suaves. Uma subvariedade $k-$dimensional N de M é chamada uma variedade integral de $\triangle$ se para cada $p \in N$ temos $i_*(T_pN) = \triangle_p$, onde $i : N \to M$ é aplicação de inclusão. Uma distribuição $\triangle$ é integrável se para X, Y campos de $\triangle$, tivermos que $[X, Y]$ pertence a $\triangle$, ou seja, em cada ponto p, o vetor $[X, Y]$ está em $\triangle_p$.

Admita que M é uma hipersuperfície imersa numa variedade riemanniana $(n+1)-$ dimensional N e que M tem p curvaturas principais distintas $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ de multiplicidades constantes $m_1, \ldots, m_p$, respectivamente.
Seja

$$\triangle^i : M \to TM$$

tal que

$$\triangle_x^i = \{X \in T_xM; A(X) = \lambda_i(x)X\},$$

onde $1 \leq i \leq p$ e A é o operador linear associado à segunda forma h, isto é,

$$h(X,Y) = \langle A_x(X), Y\rangle \quad \forall\, x \in M \quad \text{e} \quad \forall\, X, Y \in T_xM.$$

Então, obtemos distribuições suaves (veja [15]) $\triangle^1, \ldots, \triangle^p$ de dimensões $m_1, \ldots, m_p$ sobre M, respectivamente.
Chamamos $\triangle^i$ de distribuição do espaço de direções principais.
Uma subvariedade m_i-dimensional M_i de M cujo espaço tangente T_xM_i é $\triangle_x^i$ para todo $x \in M$, isto é, é o subespaço de direções principais associado a λ_i, é dita uma subvariedade integral de $\triangle^i$.
Considere agora $\triangle$, uma distribuição C^∞, $k-$dimensional em M^n. Dizemos que uma $p-$forma ω se anula em $\triangle$ se, para cada $q \in M^n$,

$$\omega_q(X_1, X_2, \ldots, X_p) = 0 \quad \text{sempre que} \quad X_1, X_2, \ldots, X_p \in \triangle_q.$$

Definindo

$$I_p = \{\omega \in \Omega^p(M^n) |\, \omega \quad \text{se anula em} \quad \triangle\},$$

onde $\Omega^p(M^n)$ é o conjunto das p-formas em M^n, o teorema de Frobenius via formas (veja [19] p. 229) nos diz que a distribuição $\triangle$ é completamente integrável se, e somente se, $dI_p \subset I_{p+1}$.
Após estas considerações passemos ao próximo lema.

Lema 3 (Otsuki) *Seja M uma hipersuperfície n-dimensional numa variedade $(n+1)$-dimensional de curvatura constante $\bar{c}$, tal que as multiplicidades* *das curvaturas principais são todas constantes. Então, as distribuições do espaço de direções principais correspondentes a cada curvatura principal são completamente integráveis. Em particular, se a multiplicidade de uma curvatura principal é maior que 1, então esta curvatura principal é constante em cada subvariedade integral da distribuição correspondente do espaço de direções principais.*

Demonstração: Escolha o referencial $\{x, e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}\}$ tal que,

$$\omega_{in+1} = \lambda_i \omega_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.1}$$

onde λ_i é curvatura principal.
Então, temos

$$d\omega_{in+1} = d(\lambda_i \omega_i) = d\lambda_i \wedge \omega_i + \lambda_i d\omega_i = d\lambda_i \wedge \omega_i + \lambda_i \sum_j \omega_j \wedge \omega_{ji}.$$

Por outro lado, utilizando que a curvatura de $\bar{M}$ é $\bar{c}$ e repetindo o mesmo cálculo onde obtivemos (2.8), chegamos a expressão

$$\bar{R}_{ABCD} = \bar{c}(\delta_{AC}\delta_{BD} - \delta_{AD}\delta_{CB}).$$

Sabendo que

$$\bar{\Omega}_{AB} = -\sum_{C<D} \bar{R}_{ABCD} \bar{\omega}_C \wedge \bar{\omega}_D,$$

temos as formas de curvatura em $\bar{M}$

$$\bar{\Omega}_{in+1} = -\bar{c}\omega_i \wedge \omega_{n+1} = 0 \ \text{ em } \ M, \ \text{ pois em } \ M \ \ \omega_{n+1} = 0. \tag{3.2}$$

Assim, substituindo (3.1) e (3.2) em

$$d\omega_{in+1} = \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_{jn+1} + \bar{\Omega}_{in+1},$$

obtemos

$$d\lambda_i \wedge \omega_i + \lambda_i \sum_j \omega_j \wedge \omega_{ji} = \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_{jn+1} = \sum_j \omega_{ij} \wedge \lambda_j \omega_j,$$

ou seja,

$$d\lambda_i \wedge \omega_i + \sum_j (\lambda_i - \lambda_j)\omega_{ij} \wedge \omega_j = 0. \tag{3.3}$$

Escrevendo

$$d\lambda_i \wedge \omega_i \quad \text{como} \quad \sum_j d\lambda_j \wedge \omega_j \delta_{ij}$$

e pondo

$$\theta_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j)\omega_{ij}, \tag{3.4}$$

(3.3) se reescreve como

$$\sum_j (d\lambda_j \delta_{ij} + \theta_{ij}) \wedge \omega_j = 0.$$

Pelo lema de Cartan,

$$d\lambda_j \delta_{ij} + \theta_{ij} = \sum_k h_{ijk}\omega_k, \tag{3.5}$$

onde $h_{ijk} = h_{ikj}$.

Assim, como $\theta_{ij} = \theta_{ji}$ temos o seguinte

$$\begin{aligned} \theta_{ij} &= \sum_k h_{ijk}\omega_k - d\lambda_j \delta_{ij} \\ &= \sum_k h_{jik}\omega_k - d\lambda_i \delta_{ji} \\ &= \sum_k h_{jik}\omega_k - d\lambda_j \delta_{ij} \\ &= \theta_{ji}, \end{aligned}$$

portanto,

$$\sum_k h_{ijk}\omega_k = \sum_k h_{jik}\omega_k,$$

ou seja,

$$h_{ijk} = h_{jik} = h_{ikj} = h_{kji}. \tag{3.6}$$

Por outro lado, se $i \neq j$ e

$$\lambda_i = \lambda_j,$$

temos

$$\theta_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j)\omega_{ij} = 0,$$

de modo que

$$0 = d\lambda_j \delta_{ij} + \theta_{ij} = \sum_k h_{ijk}\omega_k \tag{3.7}$$

isto é,

$$h_{ijk} = 0.$$

Usando a notação $[i] = \{j|\lambda_i = \lambda_j\}$, das equações de estrutura e de (3.4) temos que

$$\begin{aligned}
d\omega_i &= \sum_j \omega_j \wedge \omega_{ji} \\
&= \sum_{j\in[i]} \omega_j \wedge \omega_{ji} + \sum_{j\notin[i]} \omega_j \wedge \omega_{ji} \\
&= \sum_{j\in[i]} \omega_j \wedge \omega_{ji} + \sum_{j\notin[i]} \omega_j \wedge \frac{\theta_{ij}}{\lambda_j - \lambda_i} \\
&= \sum_{j\in[i]} \omega_j \wedge \omega_{ji} + \sum_{j\notin[i]} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i}\omega_j \wedge \theta_{ij}.
\end{aligned}$$

Observe agora que

$$j \notin [i] \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow i \neq j \Rightarrow \theta_{ij} = \sum_k h_{ijk}\omega_k.$$

Substituindo (3.5) e usando (3.6) e (3.7) obtemos a expressão

$$d\omega_i = \sum_{j\in[i]} \omega_j \wedge \omega_{ji} + \sum_{j\notin[i]} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i}\omega_j \wedge \sum_k h_{ijk}\omega_k.$$

Vamos separar esta última soma em duas: uma para $k = i$ e outra para $k \neq i$.

Assim,

$$d\omega_i = \sum_{j\in[i]} \omega_j \wedge \omega_{ji} + \sum_{j\notin[i]} \frac{h_{iji}}{\lambda_j - \lambda_i}\omega_j \wedge \omega_i + \sum_{\substack{j\notin[i]\\ k\neq i}} \frac{h_{ijk}}{\lambda_j - \lambda_i}\omega_j \wedge \omega_k.$$

Nesta última parcela poderemos ter $k = j$ ou $k \neq j$; separemos estes casos em mais duas somas:

$$d\omega_i = \sum_{j\in[i]} \omega_j \wedge \omega_{ji} + \sum_{j\notin[i]} \frac{h_{iji}}{\lambda_j - \lambda_i} \omega_j \wedge \omega_i + \sum_{j\notin[i]} \frac{h_{ijj}}{\lambda_j - \lambda_i} \omega_j \wedge \omega_j + \sum_{\substack{j\notin[i]\\ k\neq i,j}} \frac{h_{ijk}}{\lambda_j - \lambda_i} \omega_j \wedge \omega_k.$$

Neste último termo, se $\lambda_k = \lambda_i$, então $h_{ijk} = 0$ e o mesmo para $\lambda_k = \lambda_j$. Portanto, nesta soma os termos possívelmente não nulos são aqueles onde $k \notin [i],\ k \notin [j]$.

Deste modo,

$$d\omega_i = \left\{ \sum_{j\in[i]} \omega_j \wedge \omega_{ji} + \sum_{j\notin[i]} \frac{h_{iji}}{\lambda_j - \lambda_i} \omega_j \wedge \omega_i \right\} + \sum_{\substack{j\notin[i]\\ k\notin[i],[j]}} \frac{h_{ijk}}{\lambda_j - \lambda_i} \omega_j \wedge \omega_k.$$

Notando que os termos entre chaves do lado direito da equação são nulos em $\mathrm{mod}\{\omega_j, j \in [i]\}$, e ω_j e ω_k no terceiro somatório estão em diferentes classes de índices, vemos que o sistema de equações (para i fixado)

$$\omega_j = 0 \qquad (j \notin [i]), \tag{3.8}$$

é completamente integrável, desde que

$$d\omega_j = 0 \qquad (\mathrm{mod}\{\omega_k, k \notin [i]\}). \tag{3.9}$$

Desde que o sistema de equações (3.8) nos dá a distribuição do espaço de direções principais correspondentes as curvaturas principais λ_i de M em $\bar{M}$, a distribuição do espaço de direções principais correspondentes a cada curvatura principal é completamente integrável.

Suponha agora que a multiplicidade de λ_i é maior que 1. De (3.6) e (3.7) aplicados em (3.5), temos

$$d\lambda_i = h_{iii}\omega_i + \sum_{k\notin[i]} h_{iik}\omega_k,$$

e para todo $j \in [i]\ j \neq i$, nós temos também,

$$d\lambda_i = d\lambda_j = h_{jjj}\omega_j + \sum_{k\notin[j]=[i]} h_{jjk}\omega_k.$$

Então,

$$h_{jjj} = 0, \quad h_{jjk} = h_{iik}, \quad j \in [i], \quad k \notin [i].$$

Desta forma, ao longo da subvariedade correspondente ao campo λ_i, nós temos $d\lambda_i = 0$.

□

No nosso caso, em que o número de curvaturas principais de M em $\bar{M}$ é dois, sendo uma de multiplicidade $n-1$, e $H_k = 0$, podemos escrever

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-1} = \lambda \ \text{ e } \ \lambda_n = \mu. \tag{3.10}$$

Como $H_k = 0$, temos

$$(n-k)\lambda + k\mu = 0, \tag{3.11}$$

e vamos escolher $\lambda > 0$. Denote as subvariedades integrais passando por $x \in M$ e correspondentes a λ e μ por $M_1^m(x)$ e $M_2^{n-m}(x)$, respectivamente. Considere

$$d\lambda = \sum_k \lambda_{,k}\,\omega_k \ \text{ e } \ d\mu = \sum_k \mu_{,k}\,\omega_k.$$

Assim, pelo Lema 3 temos que

$$\lambda_{,1} = \ldots = \lambda_{,n-1} = 0.$$

Pela equação (3.11), temos que,

$$(n-k)d\lambda + kd\mu = 0 \Rightarrow \sum_k [(n-k)\lambda_{,k} + k\mu_{,k}] = 0.$$

Portanto

$$\lambda_{,1} = \lambda_{,2}, \ldots, \lambda_{,n-1} = 0 \Rightarrow \mu_{,1} = \mu_{,2}, \ldots, \mu_{,n-1} = 0.$$

Finalmente

$$\lambda_{,1} = \ldots = \lambda_{,n-1} = 0. \tag{3.12}$$

$$\mu_{,1} = \ldots = \mu_{,n-1} = 0. \tag{3.13}$$

Proposição 1 *Seja M uma hipersuperfície n-dimensional ($n \geq 3$) conexa em $\mathbb{S}^{n+1}$ com $H_k = 0\,(k < n)$ e com duas curvaturas principais distintas λ e μ, com multiplicidades $(n-1)$ e 1, respectivamente. Então, M é o lugar geométrico das subvariedades $(n-1)$-dimensionais M_1^{n-1} em que a curvatura principal λ de multiplicidade $n-1$ é constante e que é localmente isométrico a uma esfera $(n-1)$-dimensional $\mathbb{S}^{n-1}(c(s)) = E^n(s) \cap \mathbb{S}^{n+1}(1)$ de curvatura constante onde $E^n(s)$ é um subespaço linear n-dimensional no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+2}$ que é paralelo ao E^n fixado.. Além disso, λ satisfaz a equação diferencial ordinária de 2^a ordem,*

$$\frac{d^2\omega}{ds^2} = \omega\left\{\frac{(n-k)}{k}\omega^{-\frac{2n}{k}} - 1\right\}, \tag{3.14}$$

Demonstração: Aqui vamos considerar localmente λ como função de um parâmetro s, por exemplo, o comprimento de arco de uma trajetória ortogonal de uma família de subvariedades integrais correspondentes a λ.
Então, teremos

$$\begin{aligned} d\lambda = d\lambda_a = \sum_i h_{aai}\omega_i &= \sum_b h_{aab}\omega_b + h_{aan}\omega_n \\ &= \sum_b \lambda_{,b}\,\omega_b + \lambda_{,n}\,\omega_n. \end{aligned}$$

Portanto

$$h_{aab} = 0\,, \forall \;\; a, b \leq n-1 \,\mathrm{e}\, h_{aan} = \lambda_{,n}\,. \tag{3.15}$$

Com isso

$$\begin{aligned} d\mu = d\lambda_n = \sum_i h_{nni}\omega_i &= \sum_b h_{nnb}\omega_b + h_{nnn}\omega_n \\ &= \mu_{,n}\,\omega_n. \end{aligned}$$

Portanto

$$h_{nnb} = 0\,, \forall b \leq n-1 \,\mathrm{e}\, h_{nnn} = -(n-1)\lambda_{,n}\,. \tag{3.16}$$

Assim, de (3.6) e (3.7),

$$\theta_{an} = \sum_k h_{ank}\omega_k = h_{ana}\omega_a + h_{ann}\omega_n + \sum_{\substack{k\neq a\\ k\neq n}} h_{ank}\omega_k.$$

O último somatório se anula pois sempre temos $\lambda_k = \lambda_a$.
Donde

$$\theta_{an} = \lambda,_n \omega_a.$$

Assim, escrevemos

$$\omega_{an} = \frac{1}{\lambda_a - \lambda_n}\theta_{an} = \frac{1}{\lambda - \mu}\lambda,_n \omega_a = \frac{k\lambda,_n}{n\lambda}\omega_a. \tag{3.17}$$

Levando em consideração que

$$d\omega_n = \sum_a \omega_a \wedge \omega_{an},$$

obtemos

$$\sum_a \omega_a \wedge \left(\frac{k\lambda,_n}{n\lambda}\omega_a\right) = \sum_a \frac{k\lambda,_n}{n\lambda}\omega_a \wedge \omega_a = 0.$$

Portanto

$$\omega_n = ds. \tag{3.18}$$

Se o símbolo $'$ representa derivada com respeito a s, temos

$$(\log \lambda^{\frac{k}{n}})' = \frac{k}{n}\frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{ds} = \frac{k\lambda,_n}{n\lambda}.$$

Portanto

$$\omega_{an} = (\log \lambda^{\frac{k}{n}})'\omega_a. \tag{3.19}$$

Assim

$$d\omega_{an} = d(\log \lambda^{\frac{k}{n}})'\omega_a + (\log \lambda^{\frac{k}{n}})' d\omega_a.$$

Observando que

$$d(\log \lambda^{\frac{k}{n}})' = (\log \lambda^{\frac{k}{n}})'' ds,$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}
d\omega_{an} &= (\log \lambda^{\frac{k}{n}})'' ds \wedge \omega_a + (\log \lambda^{\frac{k}{n}})' \sum_i \omega_i \wedge \omega_{ia} \\
&= -(\log \lambda^{\frac{k}{n}})''\omega_a \wedge ds + (\log \lambda^{\frac{k}{n}})' \sum_b \omega_b \wedge \omega_{ba} + (\log \lambda^{\frac{k}{n}})'\omega_n \wedge \omega_{na} \\
&= -(\log \lambda^{\frac{k}{n}})''\omega_a \wedge ds + [(\log \lambda^{\frac{k}{n}})']^2 \omega_a \wedge ds + (\log \lambda^{\frac{k}{n}})' \sum_b \omega_b \wedge \omega_{ba}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$d\omega_{an} = \{-(\log \lambda^{\frac{k}{n}})'' + [(\log \lambda^{\frac{k}{n}})']^2\}\omega_a \wedge ds + (\log \lambda^{\frac{k}{n}})' \sum_b \omega_{ab} \wedge \omega_b. \quad (3.20)$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} d\omega_{an} &= \sum_b \omega_{ab} \wedge \omega_{bn} + \omega_{an} \wedge \omega_{nn} + \omega_{an+1} \wedge \omega_{n+1n} - \omega_a \wedge \omega_n \\ &= \sum_b \omega_{ab} \wedge \omega_{bn} - \lambda\mu\omega_a \wedge \omega_n - \omega_a \wedge \omega_n \\ &= \sum_b \omega_{ab} \wedge (\log \lambda^{\frac{k}{n}})'\omega_b - (\lambda\mu + 1)\omega_a \wedge \omega_n. \end{aligned}$$

Já que $-\lambda\mu = \frac{n-k}{k}\lambda^2$, temos finalmente

$$d\omega_{an} = (\log \lambda^{\frac{k}{n}})' \sum_b \omega_{ab} \wedge \omega_b + (\frac{n-k}{k}\lambda^2 - 1)\omega_a \wedge \omega_n. \quad (3.21)$$

Igualando as equações (3.20) e (3.21) acima obtemos

$$(\log \lambda^{\frac{k}{n}})'' - [(\log \lambda^{\frac{k}{n}})']^2 + \frac{n-k}{k}\lambda^2 - 1 = 0. \quad (3.22)$$

Fazendo $\omega = \lambda^{-\frac{k}{n}}$ temos o que segue

$$\begin{aligned} 0 &= (\log \omega^{-1})'' - [(\log \omega^{-1})']^2 + \frac{n-k}{k}\omega^{-\frac{2n}{k}} - 1 \\ &= \left[-\frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{ds}\right]' - \left[-\frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{ds}\right]^2 + \frac{n-k}{k}\omega^{-\frac{2n}{k}} - 1 \\ &= -\frac{1}{\omega}\frac{d^2\omega}{ds^2} + \frac{n-k}{k}\omega^{-\frac{2n}{k}} - 1 \\ &= -\frac{1}{\omega}\left\{\frac{d^2\omega}{ds^2} - \frac{n-k}{k}\omega^{-\frac{2n}{k}+1} + \omega\right\}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{d^2\omega}{ds^2} = \omega\left\{\frac{n-k}{k}\omega^{-\frac{2n}{k}} - 1\right\}.$$

Assim

$$\frac{d^2\omega}{ds^2} - \frac{n-k}{k}\omega^{-\frac{2n}{k}+1} + \omega = 0.$$

Multiplicando ambos os membros por $2\frac{d\omega}{ds}$ teremos

$$2\frac{d\omega}{ds}\frac{d^2\omega}{ds^2} - 2\frac{n-k}{k}\frac{d\omega}{ds}\omega^{-\frac{2n}{k}+1} + 2\omega\frac{d\omega}{ds} = 0.$$

Ou seja,

$$\left[(\frac{d\omega}{ds})^2 + \omega^{\frac{-2n+2k}{k}} + \omega^2\right]' = 0.$$

Donde, a equação

$$\frac{d^2\omega}{ds^2} - \frac{n-k}{k}\omega^{-\frac{2n}{k}+1} + \omega = 0,$$

é equivalente à equação de primeira ordem

$$\left(\frac{d\omega}{ds}\right)^2 = C - \omega^{2-\frac{2n}{k}} - \omega^2,$$

onde C é uma constante de integração positiva.

Então, por (3.11), (3.18), (3.19) e (3.22) de_a pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} de_a &= \sum_b \omega_{ab}e_b + \omega_{an}e_n + \omega_{an+1}e_{n+1} + \omega_{an+2}e_{n+2} \\ &= \sum_b \omega_{ab}e_b + (\log\lambda^{\frac{k}{n}})'\omega_a e_n + \lambda\omega_a e_{n+1} - \omega_a e_{n+2} \\ &= \sum_b \omega_{ab}e_b + [(\log\lambda^{\frac{k}{n}})'e_n + \lambda e_{n+1} - e_{n+2}]\omega_a. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$d\{(\log\lambda^{\frac{k}{n}})'e_n + \lambda e_{n+1} - e_{n+2}\} =$$

$$d\{(\log\lambda^{\frac{k}{n}})'\}e_n + (\log\lambda^{\frac{k}{n}})'de_n + d\lambda e_{n+1} + \lambda de_{n+1} - de_{n+2},$$

$d[(\log\lambda^{\frac{k}{n}})'] = (\log\lambda^{\frac{k}{n}})''\omega_n$, $d\lambda = \lambda_{,n}\,\omega_n$, $de_{n+1} = -\sum_b \lambda\omega_b e_b - \mu\omega_n e_n$ e $de_{n+2} = \sum_a \omega_a e_a + \omega_n e_n$ implicam que

$$\begin{aligned} d[(\log\lambda^{\frac{k}{n}})'e_n + \lambda e_{n+1} - e_{n+2}] &= (\log\lambda^{\frac{k}{n}})'(\sum_b(-\log\lambda^{\frac{k}{n}})')\omega_b e_b \\ &+ (\log\lambda^{\frac{k}{n}})''\omega_n e_n + \mu\omega_n e_{n+1}(\log\lambda^{\frac{k}{n}})' \\ &- \omega_n e_{n+2}(\log\lambda^{\frac{k}{n}})' \\ &+ \lambda_{,n}\,\omega_n e_{n+1} + \lambda\sum_b(-\lambda\omega_b)e_b \\ &- \lambda\mu\omega_n e_n - \sum_a \omega_a e_a - \omega_n e_n. \end{aligned}$$

Reorganizando os termos teremos

$$\begin{aligned} d[(\log\lambda^{\frac{k}{n}})'e_n + \lambda e_{n+1} - e_{n+2}] &= (\log\lambda^{\frac{k}{n}})''\omega_n e_n - \lambda\mu\omega_n e_n - \omega_n e_n \\ &+ (\log\lambda^{\frac{k}{n}})'\mu\omega_n e_{n+1} + \lambda_{,n}\,\omega_n e_{n+1} \\ &- (\log\lambda^{\frac{k}{n}})'\omega_n e_{n+2} \\ &- [(\log\lambda^{\frac{k}{n}})']^2\sum_b \omega_b e_b \\ &- \sum_b \omega_b e_b - \lambda^2\sum_b \omega_b e_b. \end{aligned}$$

E assim

$$\begin{aligned}
d[(\log\lambda^{\frac{k}{n}})'e_n + \lambda e_{n+1} - e_{n+2}] &= \left[(\log\lambda^{\frac{k}{n}})'' + \frac{n-k}{k}\lambda^2 - 1\right]\omega_n e_n \\
&+ \left[-(\log\lambda^{\frac{k}{n}})'\frac{n-k}{k}\lambda + \lambda'\right]\omega_n e_{n+1} \\
&- (\log\lambda^{\frac{k}{n}})'\omega_n e_{n+2} \\
&- \left[[(\log\lambda^{\frac{k}{n}})']^2 + \lambda^2 + 1\right]\sum_b \omega_b e_b \\
&= \left[(\log\lambda^{\frac{k}{n}})'' + \frac{n-k}{k}\lambda^2 - 1\right]\omega_n e_n \\
&+ \left[-(\log\lambda^{\frac{k}{n}})'\frac{n-k}{k}\lambda + \lambda'\right]\omega_n e_{n+1} \\
&- (\log\lambda^{\frac{k}{n}})'\omega_n e_{n+2}. \\
& (\mathrm{mod}(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}))
\end{aligned}$$

Utilizando 3.22 escrevemos

$$(\log\lambda^{\frac{k}{n}})'' + \frac{n-k}{k}\lambda^2 - 1 = [(\log\lambda^{\frac{k}{n}})']^2,$$

e obtemos finalmente o resultado

$$\begin{aligned}
d[(\log\lambda^{\frac{k}{n}})'e_n + \lambda e_{n+1} - e_{n+2}] &= (\log\lambda^{\frac{k}{n}})'[(\log\lambda^{\frac{k}{n}})'e_n + \lambda e_{n+1} - e_{n+2}]\omega_n. \\
& (\mathrm{mod}(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}))
\end{aligned}$$

Pondo $E = e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_{n-1}$, $F = (\log\lambda^{\frac{k}{n}})'e_n + \lambda e_{n+1} - e_{n+2}$, e por último $W = e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_{n-1} \wedge \{(\log\lambda^{\frac{k}{n}})'e_n + \lambda e_{n+1} - e_{n+2}\}$, temos que

$$W = E \wedge F \Rightarrow dW = dE \wedge F + E \wedge dF.$$

Acima já calculamos dF, calculemos agora $dE \wedge F$.

Observe primeiramente que

$$dE = \sum_a (-1)^{a-1} de_a \wedge e_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{e}_a \wedge \ldots e_{n-1},$$

onde o símbolo $\widehat{}$ indica que o termo foi omitido.
Como

$$\begin{aligned} de_a &= \sum_b \omega_{ab} e_b + \omega_{an} e_n + \omega_{an+1} e_{n+1} + \omega_{n+1} e_{n+2} \\ &= \sum_b \omega_{ab} e_b + [(\log \lambda^{\frac{k}{n}})' e_n + \lambda e_{n+1} - e_{n+2}] \omega_a, \end{aligned}$$

substituindo o termo acima e distribuindo a soma, obtemos a equação

$$\begin{aligned} dE &= \sum_a (-1)^{a-1} \sum_b \omega_{ab} e_b \wedge e_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{e}_a \wedge \ldots e_{n-1} \\ &+ \sum_a (-1)^{a-1} \omega_a [(\log \lambda^{\frac{k}{n}})' e_n + \lambda e_{n+1} - e_{n+2}] \wedge e_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{e}_a \wedge \ldots e_{n-1}. \end{aligned}$$

Observe que no primeiro termo da soma, se $b = a \Rightarrow \omega_{ab} = \omega_{aa} = 0$ e se $b \neq a$, temos que b é um dos índices entre 1 e $n-1$, e assim, o produto $e_b \wedge e_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{e}_a \wedge \ldots e_{n-1}$ é nulo pois um termo se repete. Assim, sendo nulo o primeiro termo da soma, reescrevemos

$$dE = \sum_a (-1)^{a-1} \omega_a [(\log \lambda^{\frac{k}{n}})' e_n + \lambda e_{n+1} - e_{n+2}] \wedge e_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{e}_a \wedge \ldots e_{n-1}.$$

Contudo

$$dE = \sum_a (-1)^{a-1} \omega_a F \wedge e_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{e}_a \wedge \ldots e_{n-1}.$$

Portanto, $dE \wedge F = 0$, pois o vetor F se repete.
Assim

$$dW = E \wedge dF = (\log \lambda^{\frac{k}{n}})' W ds.$$

Esta equação nos mostra que o n-vetor W em $\mathbb{R}^{n+2}$ é constante ao longo de $M^{n-1}(s)$. Deste modo, existe um subespaço linear $E^n(s)$ em $\mathbb{R}^{n+2}$ contendo $M^{n-1}(s)$. Da equação acima, o campo vetorial W depende somente de s e por integração obtemos

$$W(s) = \left[\frac{\lambda(s)}{\lambda(s_0)}\right]^{\frac{k}{n}} W(s_0).$$

Então nós temos que $E^n(s)$ é paralelo a $E^n(s_0)$ em $\mathbb{R}^{n+2}$.

$\square$

Lema 4 *A equação (3.14) é equivalente a equação de* 1^a *ordem,*

$$\left(\frac{d\omega}{ds}\right)^2 = C - \omega^{2-\frac{2n}{k}} - \omega^2, \tag{3.23}$$

onde C *é uma constante. Além disso, a solução constante de (3.14) corresponde ao produto riemanniano,*

$$\mathbb{S}^1(\sqrt{\frac{k}{n}}) \times \mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{\frac{n-k}{n}}).$$

Demonstração: Observando inicialmente que $\langle \nabla_{e_n} e_n, e_n \rangle = \frac{1}{2} e_n \langle e_n, e_n \rangle = 0$ e $\omega_{ij}(e_k) = \langle \nabla_{e_k} e_i, e_j \rangle$, podemos escrever

$$\nabla_{e_n} e_n = \sum_a \langle \nabla_{e_n} e_n, e_a \rangle e_a = \sum_a \omega_{na}(e_n) e_a. \tag{3.24}$$

Por (3.17) temos

$$\nabla_{e_n} e_n = -\sum_a \frac{k\lambda_{,n}}{n\lambda} \omega_a(e_n) e_a = 0.$$

Assim, toda curva integral do campo de direções principais correspondentes a μ é geodésica. Então, como M é completa, $\omega(s) = \lambda^{-\frac{k}{n}}$ é função definida em $(-\infty, \infty)$. Pela demonstração da Proposição 1, a equação 3.14 é equivalente a equação 3.23.

Fazendo $\omega(s) = \omega_0$ em (3.14) obtemos,

$$\frac{n-k}{k}\lambda^2 - 1 = 0.$$

Ou seja,

$$\lambda = \sqrt{\frac{k}{n-k}}.$$

Por (3.11) temos

$$\mu = -\sqrt{\frac{n-k}{k}}.$$

Assim, a solução constante de (3.23) corresponde ao produto riemanniano $\mathbb{S}^1(\sqrt{k/n}) \times \mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{(n-k)/n})$.

□

Lema 5 *Seja M uma hipersuperfície n-dimensional ($n \geq 3$) na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$ com $H_k = 0\,(k < n)$ e com duas curvaturas principais distintas. Admita que uma destas curvaturas principais de M é simples. Então temos*

$$\frac{1}{S}\sum_k (S_{,k})^2 = \frac{4n(k^2-2k+n)}{(3n-2)k^2-2nk+n^2}\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2. \tag{3.25}$$

Demonstração: Como $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = \lambda$, $\lambda_n = \mu$ e $(n-k)\lambda + k\mu = 0$, podemos escrever

$$\mu^2 = \frac{(n-k)^2\lambda^2}{k^2} = \frac{(n^2-2nk+k^2)\lambda^2}{k^2}.$$

Então

$$S = (n-1)\lambda^2 + \mu^2 = \frac{n(k^2-2k+n)}{k^2}\lambda^2. \tag{3.26}$$

Logo

$$S_{,i} = \frac{2n(k^2-2k+n)}{k^2}\lambda\lambda_{,i}\,. \tag{3.27}$$

Usando (3.12), (3.26) e (3.27), temos

$$\sum_k (S_{,k})^2 = \left[\frac{2n(k^2-2k+n)}{k^2}\right]^2 \lambda^2(\lambda_{,n})^2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{S}\sum_k (S_{,k})^2 &= \frac{k^2}{n(k^2-2k+n)\lambda^2}\cdot\frac{4n^2(k^2-2k+n)^2}{k^4}\cdot\lambda^2(\lambda_{,n})^2 \\ &= \frac{4n(k^2-2k+n)}{k^2}(\lambda_{,n})^2. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Usando, (3.7), (3.15) e (3.16) temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 &= \sum_{a,b,c} h_{abc}^2 + \sum_{a,b} h_{abn}^2 + \sum_{a,c} h_{anc}^2 + \sum_{b,c} h_{nbc}^2 \\ &+ \sum_a h_{ann}^2 + \sum_b h_{nbn}^2 + \sum_c h_{nnc}^2 + h_{nnn}^2. \end{aligned}$$

A qual pode ser reescrito da seguinte forma

$$\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 = \sum_{a,b,c} h_{abc}^2 + 3\sum_{a,b} h_{abn}^2 + 3\sum_{a} h_{ann}^2 + h_{nnn}^2.$$

O primeiro termo do segundo membro é sempre nulo quando $a \neq b, b \neq c$ e $c \neq a$ resta só o termo h_{aab} que, por (3.15), é também nulo. No segundo termo do segundo membro, h_{abn} é sempre zero sempre que $a \neq b$ restando só $\sum_a h_{aan}$. Na terceira parcela do segundo membro, h_{ann} é sempre zero. Consequentemente

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 &= 3\sum_{a} h_{aan}^2 + h_{nnn}^2 = 3(n-1)(\lambda_{,n})^2 + (\mu_{,n})^2 \\
&= \left[3(n-1) + \frac{(n-k)^2}{k^2}\right](\lambda_{,n})^2 = \left(\frac{3nk^2 - 3k^2 + n^2 - 2nk + k^2}{k^2}\right)(\lambda_{,n})^2 \\
&= \frac{(3n-2)k^2 - 2nk + n^2}{k^2}(\lambda_{,n})^2.
\end{aligned}$$

Portanto

$$(\lambda_{,n})^2 = \frac{k^2}{(3n-2)k^2 - 2nk + n^2}\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2. \tag{3.29}$$

Agora substituindo (3.29) em (3.28), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{S}\sum_{k}(S_{,k})^2 &= \frac{4n(k^2 - 2k + n)}{k^2} \cdot \frac{k^2}{(3n-2)k^2 - 2nk + n^2}\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 \\
&= \frac{4n(k^2 - 2k + n)}{(3n-2)k^2 - 2nk + n^2}\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2,
\end{aligned}$$

o que conclui a prova do lema.

□

Teorema 1 (Simons) *Seja M uma hipersuperfície n-dimensional, $n \geq 2$, na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$, com curvaturas principais $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Então,*

$$\frac{1}{2}\triangle S = \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + \sum_{i} \lambda_i (nH)_{,ii} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} R_{ijij}(\lambda_i - \lambda_j)^2, \tag{3.30}$$

onde $(.)_{,ij}$ é a derivada covariante relativa a métrica induzida.

Demonstração: Inicialmente observe que

$$\begin{aligned}\triangle h_{ij} &:= \sum_k (h_{ij})_{,kk} = \sum_k (h_{ijkk} - h_{ikjk}) + \sum_k (h_{ikjk} - h_{ikkj}) \\ &+ \sum_k (h_{ikkj} - h_{kkij}) + \sum_k h_{kkij}.\end{aligned}$$

Usando a relação (2.20) obtemos

$$\begin{aligned}\triangle h_{ij} &= \sum_k (h_{ijkk} - h_{ikjk}) + \sum_k (h_{ikkj} - h_{kkij}) + (\sum_k h_{kk})_{,ij} \\ &+ \sum_{m,k} h_{mk} R_{mijk} + \sum_{m,k} h_{im} R_{mkjk}.\end{aligned}$$

Por outro lado, $h_{ijk} = h_{ikj}$ implica

$$\triangle h_{ij} = (\sum_k h_{kk})_{,ij} + \sum_{m,k} h_{mk} R_{mijk} + \sum_{m,k} h_{im} R_{mkjk}. \tag{3.31}$$

Assim

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\triangle S &:= \frac{1}{2}\sum_k \left(\sum_{i,j} h_{ij}^2\right)_{,kk} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j,k} (2h_{ij}(h_{ij})_{,k})_{,k} = \sum_{i,j,k} [(h_{ij})_{,k}^2 + h_{ij}(h_{ij})_{,kk}] \\ &= \sum_{i,j,k} [(h_{ij})_{,k}]^2 + \sum_{i,j,k} h_{ij}(h_{ij})_{,kk} \\ &= \sum_{i,j,k} [(h_{ij})_{,k}]^2 + \sum_{i,j} h_{ij} \sum_k (h_{ij})_{,kk} \\ &= \sum_{i,j,k} [(h_{ij})_{,k}]^2 + \sum_{i,j} h_{ij} \triangle h_{ij}.\end{aligned}$$

Utilizando a expressão (3.31) temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\triangle S &= \sum_{i,j} h_{ij} \left[\left(\sum_k h_{kk}\right)_{,ij} + \sum_{m,k} h_{mk} R_{mijk} + \sum_{m,k} h_{im} R_{mkjk} \right] \\ &+ \sum_{i,j,k} [(h_{ij})_{,k}]^2 \\ &= \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + \sum_{i,j} h_{ij}(nH)_{,ij} + \sum_{i,j,k,m} h_{ij} h_{mk} R_{mijk} + \sum_{i,j,k,m} h_{ij} h_{im} R_{mkjk}.\end{aligned}$$

Como $h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$ e

$$\sum_{i,j,k,m} h_{ij} h_{mk} R_{mijk} + \sum_{i,j,k,m} h_{ij} h_{im} R_{mkjk} = \sum_{i,k} h_{ii} h_{kk} R_{kiik} + \sum_{i,k} h_{ii} h_{ii} R_{ikjk},$$

podemos escrever

$$\sum_{i,j} h_{ii} h_{jj} R_{jiij} + \sum_{i,j} h_{ii} h_{ii} R_{ijij} = \sum_{i,j} \lambda_i^2 R_{ijij} - \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j R_{ijij},$$

no qual trocamos k por j.

Agora, separando a soma nos termos para $i < j$ e para $i > j$, temos o seguinte

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} (\lambda_i^2 - \lambda_i \lambda_j) R_{ijij} &= \sum_{i<j} \lambda_i^2 R_{ijij} + \sum_{i>j} \lambda_i^2 R_{ijij} - \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j R_{ijij} - \sum_{i>j} \lambda_i \lambda_j R_{ijij} \\
&= \sum_{i<j} \lambda_i^2 R_{ijij} + \sum_{i<j} \lambda_j^2 R_{jiji} - \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j R_{ijij} - \sum_{i<j} \lambda_j \lambda_i R_{jiji} \\
&= \sum_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 R_{ijij} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 R_{ijij}.
\end{aligned}$$

Finalmente obtemos

$$\frac{1}{2} \triangle S = \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + \sum_{i,j} \lambda_i (nH)_{,ij} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} R_{ijij} (\lambda_i - \lambda_j)^2,$$

concluindo a prova do lema.

$\square$

Capítulo 4

Hipersuperfícies na esfera com $H_k = 0$

Este capítulo apresenta os resultados principais deste trabalho. Mostraremos que uma hipersuperfície M de dimensão n na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}$ com duas curvaturas principais distintas, uma de multiplicidade $n-1$, é o toro de Clifford desde que tal hipersuperfície seja completa, conexa, com k-ésima função simétrica nula e o quadrado da norma da segunda forma satisfaça a desigualdade $S \geqslant \dfrac{n(k^2-2k+n)}{k(n-k)}$. Em seguida, para M compacta, obteremos uma desigualdade integral comparada com o volume de M. Iniciaremos este estudo com o seguinte lema.

Lema 6 *Se M é uma hipersuperfície n-dimensional $(n \geqslant 3)$ em $\mathbb{S}^{n+1}$ com $H_k = 0\,(k < n)$ e duas curvaturas principais distintas λ e μ, de multiplicidades $(n-1)$ e 1, respectivamente, então*

$$S \geqslant \frac{n(k^2-2k+n)}{k(n-k)}$$

vale se, e somente se,

$$\omega^{-\frac{2n}{k}} \geqslant \frac{k}{n-k}.$$

Similarmente,

$$S \leqslant \frac{n(k^2 - 2k + n)}{k(n-k)}$$

vale se, e somente se,

$$\omega^{-\frac{2n}{k}} \leqslant \frac{k}{n-k}.$$

Demonstração: Como $(n-k)\lambda + k\mu = 0$, podemos escrever

$$S = \frac{n(k^2 - 2k + n)}{k^2}\lambda^2.$$

Usando $\omega = \lambda^{-\frac{k}{n}}$ temos

$$S = \frac{n(k^2 - 2k + n)}{k^2}\omega^{-\frac{2n}{k}}.$$

Desta forma $S \geqslant \dfrac{n(k^2 - 2k + n)}{k(n-k)}$ se, e somente se,

$$\omega^{-\frac{2n}{k}}\frac{n(k^2 - 2k + n)}{k^2} \geqslant \frac{n(k^2 - 2k + n)}{k(n-k)}.$$

Ou seja,

$$\omega^{-\frac{2n}{k}} \geqslant \frac{k}{n-k},$$

provando a primeira equivalência. De modo inteiramente análogo prova-se a outra equivalência. E assim concluímos a demonstração do lema.

$\square$

Utilizaremos o lema anterior para obtermos um dos resultados principais deste trabalho enunciado como o seguinte teorema.

Teorema 2 *Seja M uma hipersuperfície da esfera $\mathbb{S}^{n+1}$ completa, conexa, n-dimensional $(n \geq 3)$, com $H_k = 0\,(k < n)$ e com duas curvaturas principais distintas, uma de multiplicidade $n-1$. Se*

$$S \geqslant \frac{n(k^2 - 2k + n)}{k(n-k)}$$

então

$$S = \frac{n(k^2 - 2k + n)}{k(n-k)}.$$

Além disso, M é isométrica ao produto riemanniano

$$\mathbb{S}^1(\sqrt{\frac{k}{n}}) \times \mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{\frac{n-k}{n}}).$$

Demonstração: Da Proposição 1 temos que

$$\frac{d^2\omega}{ds^2} = \omega \left\{ \frac{(n-k)}{k} \omega^{-\frac{2n}{k}} - 1 \right\}.$$

Assim

$$\omega \left\{ \frac{(n-k)}{k} \omega^{-\frac{2n}{k}} - 1 \right\} \geqslant 0 \Leftrightarrow \omega^{-\frac{2n}{k}} \geqslant \frac{k}{(n-k)}.$$

Portanto

$$\frac{d^2\omega}{ds^2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \omega^{-\frac{2n}{k}} \geqslant \frac{k}{(n-k)}.$$

Assim, se

$$S \geqslant \frac{n(k^2 - 2k + n)}{k(n-k)},$$

temos pelo lema anterior que

$$\omega^{-\frac{2n}{k}} \geqslant \frac{k}{n-k},$$

donde concluímos que

$$\frac{d^2\omega}{ds^2} \geqslant 0.$$

Daí, $\frac{d\omega}{ds}$ é função monótona não-decrescente de $s \in (-\infty, +\infty)$. Assim, a partir de uma certa ordem o sinal de $\frac{d\omega}{ds}$ é constante. Conclui-se também daí que $\omega(s)$ é monótona quando $s \to \pm\infty$, pois se

$$\omega'(r) \leqslant \omega'(t) \leqslant \omega'(v) \text{ com } r \leqslant t \leqslant v \text{ e } 0 \leqslant \omega'(r),$$

então

$$\forall\, u \geqslant r, \quad \omega'(u) \geqslant 0 \Rightarrow \omega(s) \text{ é crescente } \ \forall s \geqslant u \ \Rightarrow$$
$$\omega \ \text{ é crescente quando } u \to +\infty.$$

Noutro caso, se

$$\omega'(r) \leqslant \omega'(t) \leqslant \omega'(v) \,\text{com} \quad r \leqslant t \leqslant v \quad \text{e} \quad 0 \geqslant \omega'(v),$$

então

$$\forall\, u \leqslant v, \quad \omega'(u) \leqslant 0 \Rightarrow \omega(s) \,\text{é decrescente}\, \forall s \leqslant u \quad \Rightarrow$$
$$\omega \,\text{é decrescente quando}\, u \to -\infty.$$

Em todo caso, ω é monótona quando $s \to \pm\infty$.
Sabemos de (3.23) que

$$C - \omega^2 \omega^{-\frac{2n}{k}} - \omega^2 = (\frac{d\omega}{ds})^2.$$

Logo, $(\frac{d\omega}{ds})^2 \geq 0$ implica que

$$-\omega^2(\omega^{-\frac{2n}{k}} + 1) \geqslant -C.$$

Portanto,

$$\omega^2 \leqslant \frac{C}{1+\lambda^2} \quad \text{implica} \quad |\omega| \leqslant \sqrt{\frac{C}{1+\lambda^2}}.$$

Assim ω é limitada, sendo também monótona quando $s \to \pm\infty$, existem os limites

$$\lim_{s \to +\infty} \omega(s) \,\text{e}\, \lim_{s \to -\infty} \omega(s).$$

Com isso temos

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{d\omega(s)}{ds} = 0 = \lim_{s \to -\infty} \frac{d\omega(s)}{ds}.$$

Já que $\frac{d\omega}{ds}$ é monótona, temos $\frac{d\omega}{ds} = 0$ e $\omega(s)$ é constante. Logo as curvaturas principais de M são constantes. Pelo Lema 4 e um resultado devido a Cartan [4], M corresponde ao produto riemanniano,

$$\mathbb{S}^1(\sqrt{\frac{k}{n}}) \times \mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{\frac{n-k}{n}}).$$

o que termina a prova do teorema.

□

Para concluir nosso trabalho vamos provar o próximo teorema que nos dá uma majoração para a integral do quadrado da segunda forma sobre M.

Teorema 3 *Seja M uma hipersuperfície n-dimensional, $n \geq 3$, compacta, conexa na esfera $\mathbb{S}^{n+1}$ com $H_k = 0\,(k < n)$ e com duas curvaturas principais distintas. Seja V o volume de M e assuma que uma das curvaturas principais de M tem multiplicidade 1. Então, o quadrado da norma da segunda forma fundamental de M satisfaz*

$$\int_M S \leq \frac{n(k^2 - 2k + n)}{k(n-k)} V. \tag{4.1}$$

Com igualdade valendo se, e somente se, M é isométrica ao produto riemanniano $\mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{(n-k)/n}) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{k/n})$.

Demonstração: Primeiro calculamos,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\triangle(\ln S) &= \frac{1}{2}\sum_k (\ln S)_{,kk} = \frac{1}{2}\sum_k (\frac{S_{,k}}{S})_{,k} \\
&= \frac{1}{2}\sum_k \left(\frac{S_{,kk}}{S} - \frac{1}{S^2} \cdot S_{,k} \cdot S_{,k} \right) \\
&= \frac{1}{2S}\sum_k (S_{,kk}) - \frac{1}{2S^2}\sum_k (S_{,k})^2 \\
&= \frac{1}{2}\frac{\triangle S}{S} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sum_k (S_{,k})^2}{S^2}. \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

Usando (3.30) e a equação de Gauss $R_{anan} = 1 + \lambda\mu$, obtemos,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\triangle S &= \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + \sum_i \lambda_i (nH)_{,ii} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} R_{ijij}(\lambda_i - \lambda_j)^2 \\
&= \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + \sum_a R_{anan}(1 + \lambda - \mu)^2 + \sum_i (nH)_{,ii} \\
&= \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + (n-1)(1 + \lambda\mu)(\lambda - \mu)^2 + \sum_i \lambda_i (nH)_{,ii}\,. \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

Como

$$1 + \lambda\mu \;=\; 1 + \lambda\left[-\frac{(n-k)}{k}\lambda\right] = 1 - \frac{(n-k)}{k}\lambda^2$$

e

$$(\lambda - \mu)^2 \;=\; \left(\lambda + \frac{(n-k)}{k}\lambda\right)^2 = \lambda^2\left(1 + \frac{(n-k)}{k}\right)^2 = \frac{\lambda^2 n^2}{k^2},$$

temos

$$(1 + \lambda\mu)\cdot(\lambda - \mu)^2 = \frac{n^2}{k^2}\left[1 - \frac{(n-k)}{k}\lambda^2\right]\lambda^2.$$

Portanto, (4.3) se reescreve

$$\frac{1}{2}\triangle S = \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + \frac{(n-1)n^2}{k^2}\left[1 - \frac{(n-k)}{k}\lambda^2\right]\lambda^2 + \sum_i \lambda_i (nH)_{,ii}\,. \tag{4.4}$$

Agora, de (2.19) temos que

$$\lambda_{,ij}\,\omega_j = d\lambda_{,i} + \lambda_{,j}\,\omega_{ji}. \tag{4.5}$$

Por outro lado mostramos em (3.19) que $\omega_{an} = (\log\lambda^{\frac{k}{n}})'\omega_a$ e em (3.18) que $\omega_n = ds$. Se $i = a$ em (4.5), vemos que

$$\begin{aligned} \lambda_{,aj}\,\omega_j \;&=\; d\lambda_{,a} + \lambda_{,j}\,\omega_{ja} = \lambda_{,n}\,\omega_{na} \\ &=\; \lambda_{,n}\,\frac{\lambda_{,n}}{\mu - \lambda}\omega_a = -\frac{k}{n\lambda}(\lambda_{,n})^2\omega_a. \end{aligned}$$

De modo que

$$\lambda_{,aa} = -\frac{k}{n\lambda}(\lambda_{,n})^2. \tag{4.6}$$

Se $i = n$ em (4.5), temos

$$\lambda_{,nj}\,\omega_j = \left\{\frac{n+k}{n\lambda}(\lambda_{,n})^2 - \frac{n(n-k)\lambda^3}{k^2} + \frac{n\lambda}{k}\right\}\omega_n. \tag{4.7}$$

E segue que

$$\lambda_{,nn} = \left\{\frac{n+k}{n\lambda}(\lambda_{,n})^2 - \frac{n(n-k)\lambda^3}{k^2} + \frac{n\lambda}{k}\right\}. \tag{4.8}$$

Observando que

$$nH = (n-1)\lambda + \mu = (n-1)\lambda - \frac{(n-k)}{k}\lambda = \frac{n(k-1)\lambda}{k},$$

substituindo (4.6) e (4.8) em (4.4) teremos,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\triangle S &= \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + \frac{(n-1)n^2}{k^2}\left[1 - \frac{(n-k)}{k}\lambda^2\right]\lambda^2 + \sum_i \lambda_i (nH)_{,ii} \\
&= \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + \frac{(n-1)n^2}{k^2}\left[1 - \frac{(n-k)}{k}\lambda^2\right]\lambda^2 + \sum_i \lambda_i (\frac{n(k-1)\lambda}{k})_{,ii} \\
&= \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + \frac{(n-1)n^2}{k^2}\left[1 - \frac{(n-k)}{k}\lambda^2\right]\lambda^2 + (n-1)(1-k)(\lambda_{,n})^2 \\
&- \frac{n-k}{k}\cdot\frac{n(k-1)}{k}\cdot\left[\frac{n+k}{n}(\lambda_{,n})^2 - \frac{n(n-k)}{k^2}\lambda^4 + \frac{n\lambda^2}{k}\right] \\
&= \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + \left[(n-1)(1-k) - \frac{n-k}{k}\cdot\frac{n(k-1)}{k}\cdot\frac{n+k}{n}\right](\lambda_{,n})^2 \\
&+ \frac{(n-1)n^2}{k^2}\left[1 - \frac{(n-k)}{k}\lambda^2\right]\lambda^2 + \frac{n-k}{k^2}n^2\cdot(k-1)\frac{(n-k)}{k^2}\lambda^4 \\
&- \frac{(n-k)}{k}\cdot\frac{n(k-1)}{k}\cdot\frac{n\lambda^2}{k}.
\end{aligned}$$

Usando (3.29) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\triangle S &= \left\{1 - \frac{(k-1)[(n-2)k^2+n^2]}{(3n-2)k^2 - 2nk + n^2}\right\}\left(\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2\right) \\
&+ \frac{n^2(k^2-2k+n)}{k^4}\lambda^2[k - (n-k)\lambda^2].
\end{aligned}$$

Vamos mostrar agora que

$$\frac{1}{2}\triangle(\ln S) \leq \frac{n}{k}\left\{1 - \frac{k(n-k)}{n(k^2-2k+n)}S\right\}.$$

De fato, usando a última expressão em (4.2) teremos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\triangle(\ln S) &= \frac{1}{2}\frac{\triangle S}{S} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sum_k (S_{,k})^2}{S^2}\\
&= \frac{1}{S}\left\{1 - \frac{(k-1)[(n-2)k^2+n^2]}{(3n-2)k^2-2nk+n^2}\right\}\left(\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2\right)\\
&+ \frac{n^2(k^2-2k+n)}{k^4}\lambda^2[k-(n-k)\lambda^2] - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sum_k (S_{,k})^2}{S^2}\\
&= \left\{\frac{(3n-2)k^2-2nk+n^2-(k-1)[(n-2)k^2+n^2]}{4n(k^2-2k+n)} - \frac{1}{2}\right\}\left(\frac{\sum_k (S_{,k})^2}{S^2}\right) r\\
&+ \frac{n}{k}\left\{1 - \frac{k(n-k)S}{n(k^2-2k+n)}\right\}\\
&= -\frac{k(n-2)[k^2-2k+n]}{4n(k^2-2k+n)}\left(\frac{\sum_k (S_{,k})^2}{S^2}\right) + \frac{n}{k}\left\{1 - \frac{k(n-k)S}{n(k^2-2k+n)}\right\}\\
&\leq \frac{n}{k}\left\{1 - \frac{k(n-k)}{n(k^2-2k+n)}S\right\}.
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$
\frac{1}{2}\triangle(\ln S) \leq \frac{n}{k}\left\{1 - \frac{k(n-k)}{n(k^2-2k+n)}S\right\}. \tag{4.9}
$$

Integrando (4.9) sobre M, obtemos

$$
\int_M S \leq \frac{n(k^2-2k+n)}{k(n-k)}V. \tag{4.10}
$$

E assim obtemos a desigualdade desejada. Por outro lado, se vale a igualdade, então de (4.9) vemos que $S = \frac{n(k^2-2k+n)}{k(n-k)}$. Além disso obtemos que λ e μ são constantes. Então, pelo resultado de Cartan [4] já utilizado anteriormente concluímos que M é isométrica ao produto riemanniano $\mathbb{S}^1(\sqrt{k/n}) \times \mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{(n-k)/n})$.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] BARBOSA, J. N. et all. Hypersurfaces of the Euclidean sphere with nonnegative Ricci curvature, *Arch. Math.* Basel, v.81, n° 3, p. 335-341, 2003.

[2] CARMO, M. do, *O método do Referencial Móvel*, Rio de Janeiro, Impa, 1976. 231p

[3] ....; *Geometria riemanniana*, Rio de Janeiro, Impa, 2005. 332p.

[4] CARTAN E. Familles de surfaces isoparametriques dans les espaces a courbure constante. *Ann. Mat.* v. 17, p.177-191, 1938.

[5] CHENG, Q. M. The rigidity of Clifford torus $\mathbb{S}^1(\sqrt{1/n}) \times \mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{(n-1)/n})$. *Comment. Math. Helv.*, v. 71, p. 60-69, 1996.

[6] CHENG S. Y.; Yau S. T. Hypersurfaces with constant scalar curvature. *Math. Ann* v. 225, p. 195-204, 1977.

[7] CHERN, S.S.; CARMO, M. do; KOBAYASHI, S. Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length. *Funct. Anal.* Related Fields p. 59-75, 1970.

[8] DAJCZER, M.; *Submanifolds and Isometric Immersions.* Houston, Texas, 1990. 173p.

[9] HASANIS T. ; SAVAS-HALILAJ, A. ; VLACOS, T. Complete minimal hypersufaces in a sphere. *Monatsh. Math*, v.145, p. 301-305, 2005.

[10] ....; VLACHOS, T.; A piching theorem for minimal hypersurfaces in a sphere, *Arch. Math.* v. 75, p. 469-471, 2000.

[11] HU, A. J.; ZHAI, S. J. Hypersurfaces of the hyperbolic space with constant scalar curvature. *Results Math*, v. 48, p. 65-88, 2005.

[12] LAWSON, H. B. Local rigity theorems for minimal hypersurfaces. *Ann. of Math.* v. 89, p.179-785, 1969.

[13] LI, H.; Hypersurfaces with constant scalar curvature in space forms. *Math. Ann.*, v. 305, p. 665-672, 1996.

[14] ....; Global rigity theorems of hypersurfaces. *Ark. Math.* v. 35, p. 327-351, 1997.

[15] NOMIZU, K. Characteristic Roots and Vectors of a Differentiable Family of Symetric Matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, v. 1, p. 159-162, 1973.

[16] OTSUKI, T. Minimal hypersurfaces in a Riemannian manifold of constant curvature. *Amer. J. Math.*, v.92, p. 145-173, 1970.

[17] WEI, G. Complete hypersurfaces with $H_k = 0$ in a unit sphere. *Differential Geometry and its Applications*, 2007. Disponível em doi: 10.1016/j.difegeo.2007.06.001.

[18] ....; Rigidity theorem for hypersurfaces in a unit sphre. *Monatsh. Math*, v.149, p. 343-350, 2006.

[19] WESTENHOLZ, C. Von. *Differential forms in mathematical physics*, New York, North-Holland Publishing Company, 1978.