

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

DAVI MAXIMO ALEXANDRINO NOGUEIRA

COLAGEM DE ESPAÇOS
ANELADOS E UM ESQUEMA
SEM PONTOS FECHADOS

FORTALEZA
2007

Davi Maximo Alexandrino Nogueira

**COLAGEM DE ESPAÇOS
ANELADOS E UM ESQUEMA
SEM PONTOS FECHADOS**

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Franciso Luiz Rocha Pimentel.

**FORTALEZA
2007**

N711c Código	Nogueira, Davi Maximo Alexandrino. Colagem de espaços anelados e um esquema sem pontos fechados/ Davi Maximo Alexandrino Nogueira. Fortaleza, 2007. 28 folhas. Orientador: Franciso Luiz Rocha Pimentel. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Ceará. Departamento de Matemática, Fortaleza, 2007. 1 - Geometria algébrica. Código 516.35
-----------------	--

FOLHA DE APROVAÇÃO

Dedico este trabalho à minha família, amigos e mestres.

AGRADECIMENTOS

Esta dissertação foi feita durante os meses de maio e junho de 2007. Foi uma tarefa laboriosa e que só se tornou possível graças a ajuda de algumas pessoas às quais eu gostaria de prestar meus agradecimentos.

Começo agradecendo ao meu orientador Franciso Luiz Rocha Pimentel. Foi ele quem me sugeriu este trabalho e me guiou no momentos em que estava perdido.

Como já comentei na ocasião da minha monografia de graduação, em toda a minha carreira de matemático sempre contei com o importante apoio de instituições. Gostaria de agradecer ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro e à todo Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, professores e funcionários. Também agradeço a Associação Olímpíada Brasileira de Matemática (AOBM) e ao Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), em especial aos professores Carlos Gustavo Moreira (Gugu), Marcelo Viana e Jacob Palis.

Aproveito para agradecer as pessoas que me incetivaram e ajudaram à ingressar no doutorado. Sendo assim, agradeço aos amigos Antônio Caminha Muniz Neto, professor do departamento da UFC, e Emanuel Augusto de Souza Carneiro, doutorando da Univeristy of Texas at Austin, pelas as palavras amigas e conselhos valiosos. Aos professores Luquésio Jorge, Lev Birbrair e Eduardo Esteves agradeço pela oportunidade de trabalhar com vocês e pelo apoio durante o processo de admissão no doutorado. No mais, agradeço aos professores Abdenâgo Barros, Alexandre Fernandes e Levi Lima pelos valiosos ensinamentos.

Fora da atividade matemática, agradeço à minha esposa Ilane, à minha família e aos meus super-amigos: Yuri, Samuel, Cícero, Onofre, Marcelo, Juscelino, Jocel, Flávio.

Termino agradecendo a Deus por ter me mostrado o caminho.

“As it turned out, the field seems to have acquired the reputation of being esoteric, exclusive and very abstract with adherents who are secretly plotting to take over all the rest of mathematics!”

David Mumford, 1975

“Os nerds sempre vencem no final.”

Edmilson Motta, em algum dos treinamentos para IMO

RESUMO

Neste trabalho mostraremos resultados sobre a colagem de espaços anelados e suas aplicações a teoria de Esquemas, seguindo a linha de [5]. O principal resultado sobre espaços é o teorema 2.1:

Teorema Suponha que W é um espaço anelado e que para cada $i \in I$ existem mapas $\psi_i : X_i \longrightarrow W$ tais que quadrados da forma

$$\begin{array}{ccc}
 & Z_{i,j} & \\
 \phi_{(i,j),i} \swarrow & & \searrow \phi_{(i,j),j} \\
 X_i & & X_j \\
 \psi_i \searrow & & \swarrow \psi_j \\
 & W &
 \end{array}$$

comutam. Então os mapas ψ_i fatoram-se via os mapas naturais α_i por $Y = \bigcup_{Z_{s,t}} X_i$, induzindo um único mapa

$$\delta : \bigcup_{Z_{s,t}} X_i \longrightarrow W$$

tal que o seguinte diagrama comuta para quaisquer $i, j \in I$:

$$\begin{array}{ccc}
 & Z_{i,j} & \\
 \phi_{(i,j),i} \swarrow & & \searrow \phi_{(i,j),j} \\
 X_i & & X_j \\
 \alpha_i \searrow & & \swarrow \alpha_j \\
 & \bigcup_{Z_{s,t}} X_i & \\
 \phi_i \searrow & \delta \downarrow & \swarrow \phi_j \\
 & W &
 \end{array}$$

Como aplicação do teorema 2.1, provamos o teorema 3.1:

Teorema Suponha que A e B são anéis. Ademais suponha que I é um ideal de A e que existe um morfismo de anéis $\gamma : B \longrightarrow A/I$. Denotamos o morfismo quociente de A para A/I por π . Sejam $X = \text{Spec } A$, $Y = \text{Spec } B$,

$Z = \text{Spec } A/I$ e $\phi : X \rightarrow Z$ e $\psi : Z \rightarrow X$ morfismos de esquemas induzidos pelos mapas entre os respectivos anéis (note que Z é um subesquema fechado de X). Então, $X \cup_Z Y$ é um esquema afim com Y um subesquema fechado, $(X \cup_Z Y) - Y \cong X - Z$, e os mapas $\alpha : X \rightarrow X \cup_Z Y$ e $\beta : Y \rightarrow X \cup_Z Y$ são morfismos de esquemas.

No final, usamos este último resultado para construir um esquema sem pontos fechados. Uma outra construção usando anéis de valorização também é apresentada.

ABSTRACT

In this paper, we present results concerning gluing of ringed spaces and its applications to Schemes, following [5]. Our principal result about ringed spaces is theorem 2.1:

Theorem Assume W is a ringed space and also that for each $i \in I$ there exists maps $\psi_i : X_i \longrightarrow W$ such that the squares bellow

$$\begin{array}{ccc}
 & Z_{i,j} & \\
 \phi_{(i,j),i} \swarrow & & \searrow \phi_{(i,j),j} \\
 X_i & & X_j \\
 \psi_i \searrow & & \swarrow \psi_j \\
 & W &
 \end{array}$$

commute. Then, the maps ψ_i can be factorized through natural maps α_i por $Y = \bigcup_{Z_{s,t}} X_i$, inducing this was a unique map

$$\delta : \bigcup_{Z_{s,t}} X_i \longrightarrow W$$

such that the following diagram commutes for any $i, j \in I$:

$$\begin{array}{ccc}
 & Z_{i,j} & \\
 \phi_{(i,j),i} \swarrow & & \searrow \phi_{(i,j),j} \\
 X_i & & X_j \\
 \alpha_i \searrow & & \swarrow \alpha_j \\
 & \bigcup_{Z_{s,t}} X_i & \\
 \phi_i \searrow & \delta \downarrow & \swarrow \phi_j \\
 & W &
 \end{array}$$

As an application of theorem 2.1, we prove theorem 3.1:

Theorem Suppose that A e B are rings. Furthermore assume that I is an ideal of A and that exists a ring homomorphism $\gamma : B \longrightarrow A/I$. Let the quotient of A through A/I be π . Let $X = \text{Spec } A$, $Y = \text{Spec } B$, $Z = \text{Spec } A/I$

and $\phi : X \rightarrow Z$ and $\psi : Z \rightarrow X$ be schemes morphism induces by the respectively maps between respectively rings (note that Z is a closed subscheme of X). Then, $X \cup_Z Y$ is an affine scheme with Y as a closed subscheme, $(X \cup_Z Y) - Y \cong X - Z$, and the maps $\alpha : X \rightarrow X \cup_Z Y$ and $\beta : Y \rightarrow X \cup_Z Y$ are schemes morphisms.

In the end, we use this last result to construct an scheme without closed points. Another construction is given using valuation rings.

Sumário

1	Introdução	1
2	Colagem de Espaços Anelados	3
2.1	Colagem topológica	4
2.2	A Estrutura de Feixe	7
3	Aplicações em Esquemas	12
4	Um esquema sem pontos fechados	22
4.1	A Primeira Construção	22
4.2	A segunda	24

Capítulo 1

Introdução

Este trabalho é basicamente um estudo detalhado do artigo [5]. Ele me foi sugerido pelo professor Francisco Pimentel como possível tema para minha dissertação de mestrado e foi aceito por mim prontamente. Antes disto, tínhamos concordado em estudar algo que me familiarizasse com a linguagem moderna da geometria algébrica e o tema do artigo acima se adequou muito bem aos nossos propósitos. Vamos ao conteúdo.

Esta dissertação é essencialmente um estudo sobre a colagem de espaços anelados. Começamos no capítulo 2 definindo uma colagem de espaços anelados que é a generalização natural da conhecida colagem de esquemas ao longo de subsquemas fechados. Primeiro mostramos como colar os conjuntos, no resultado desta colagem introduzimos uma topologia conveniente e, finalmente, equipamos o espaço topológico obtido com uma estrutura de feixe de anéis. Além da construção da colagem em si, o capítulo 2 também é dedicado à estudar algumas propriedades topológicas da colagem, os lemas 2.1, 2.2 e 2.3. Ainda neste capítulo, temos o teorema 2.1, uma propriedade universal satisfeita pela colagem, e a proposição 2.1, que nos permite colar ao pedaços.

Dedicamos o capítulo 3 à estudar esta colagem aplicada em esquemas. Como veremos (exemplo 3.2), o método desenvolvido no capítulo 2 nem sempre produz esquemas como resultado, até mesmo quando os espaços anelados envolvidos são esquemas e os morfismos entre eles são morfismos de esquemas. Mas, com algumas hipóteses à mais sobre os esquemas a serem colados, veremos casos onde o espaço anelado obtido é um esquema afim (teorema 3.1 e corolários). Mesmo assim nesses casos temos exemplos de mau comportamento: colagem de esquema noetherianos onde o resultado é um esquema

mas não é noetheriano.

Finalmente, no capítulo 4, utilizamos esta colagem para construir um exemplo de um esquema sem pontos fechados. Também apresentamos um outra construção do mesmo esquema utilizando anéis de valorização.

Capítulo 2

Colagem de Espaços Anelados

Seja $(X_i, \mathcal{O}_{X_i})_{i \in I}$ uma coleção (indexada por um conjunto I) de espaços anelados. Suponha que para cada par não-ordenado (i, j) exista um espaço anelado $(Z_{i,j}, \mathcal{O}_{Z_{i,j}})$ e morfismos de espaços anelados

$$\begin{aligned} \phi_{(i,j),i} : Z_{i,j} &\longrightarrow X_i & \phi_{(i,j),j} : Z_{i,j} &\longrightarrow X_j. \\ \phi_{(i,j),i}^\# : \mathcal{O}_{X_i} &\longrightarrow (\phi_{(i,j),i})_* \mathcal{O}_{Z_{i,j}} & \phi_{(i,j),j}^\# : \mathcal{O}_{X_j} &\longrightarrow (\phi_{(i,j),j})_* \mathcal{O}_{Z_{i,j}} \end{aligned}$$

que, salvo em caso de confusão, trataremos apenas por $\phi_{(i,j),i}$ e $\phi_{(i,j),j}$. Com essas condições será possível colar os espaços X_i 's ao longo dos $Z_{i,j}$'s de modo a obter um espaço anelado.

Começamos colando apenas os X_i 's como conjuntos.

Definição 2.1 (Colagem dos Conjuntos). *Nas condições acima, considere apenas os espaços topológicos (como conjuntos) e os respectivos mapas entre eles. Definimos a colagem dos X_i 's ao longo dos $Z_{i,j}$, a partir de agora denotada por $\bigcup_{Z_{s,t}} X_i$, como o quociente*

$$\prod_{i \in I} X_i / \sim,$$

onde $x_i \sim x_j$ ($x_i \in X_i, x_j \in X_j$) se existe um $z \in Z_{i,j}$ tal que $\phi_{(i,j),i}(z) = x_i$ e $\phi_{(i,j),j}(z) = x_j$.

Na colagem que acabamos de definir dois elementos $x_i \in X_i$ e $x_j \in X_j$ serão identificados se, e somente se, existir uma cadeia finita $x_{n_t} \in X_{n_t}$ onde

$t = 1, 2, \dots, m$, com $x_i = x_{n_1}$ e $x_j = x_{n_m}$, e para cada par (n_t, n_{t+1}) houver um $z_{n_t, n_{t+1}} \in Z_{n_t, n_{t+1}}$ tal que

$$\phi_{(n_t, n_{t+1}), n_t}(z_{n_t, n_{t+1}}) = x_{n_t} \text{ e } \phi_{(n_t, n_{t+1}), n_{t+1}}(z_{n_t, n_{t+1}}) = x_{n_{t+1}}.$$

Definimos por $\alpha_i : X_i \longrightarrow \bigcup_{Z_{s,t}} X_i$ os mapas (naturais) que levam cada $x_i \in X_i$ na sua respectiva classe de equivalência. Sendo assim, para quaisquer $i, j \in I$, temos que

$$\alpha_i \circ \phi_{(i,j),i} = \alpha_j \circ \phi_{(i,j),j}. \quad (2.1)$$

De fato, dado $z \in Z_{i,j}$ temos $\phi_{(i,j),i}(z) \sim \phi_{(i,j),j}(z)$ e portanto, $\alpha_i(\phi_{(i,j),i}(z)) = \alpha_j(\phi_{(i,j),j}(z)) \in \bigcup_{Z_{s,t}} X_i$.

Nosso próximo passo consiste em olhar essa colagem pelo prisma topológico.

2.1 Colagem topológica

Definiremos uma topologia em $\bigcup_{Z_{s,t}} X_i$ que faz cada α_i ser contínuo.

Proposição-definição 2.1. *Em $\bigcup_{Z_{s,t}} X_i$ temos (definimos) a topologia (basta definir quem serão os abertos): $U \in \bigcup_{Z_{s,t}} X_i$ é aberto se, e somente se, cada $\alpha_i^{-1}(U_i) \subset X_i$ for aberto.*

Prova. É imediata, assim como o fato de que os α_i 's serão contínuos. \square

No restante dessa seção provaremos alguns resultados que caracterizam a topologia recém introduzida de $\bigcup_{Z_{s,t}} X_i$.

Lema 2.1. *Os conjuntos abertos (respectivamente fechados) de $\bigcup_{Z_{s,t}} X_i$ correspondem bijectivamente as uplas $(U_i)_{i \in I}$ de abertos (respectivamente fechados) de X_i tais que $\phi_{(i,j),i}^{-1}(U_i) = \phi_{(i,j),j}^{-1}(U_j)$.*

Prova. Em outras palavras, o lema diz que a associação (onde U_i é um aberto de X_i)

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{array}{l} \text{subconjuntos abertos} \\ \text{de } \bigcup_{Z_{s,t}} X_i \end{array} \right\} \longrightarrow \mathcal{U} = \left\{ \begin{array}{l} \text{uplas } (U_i)_{i \in I} \text{ tais que} \\ \phi_{(i,j),i}^{-1}(U_i) = \phi_{(i,j),j}^{-1}(U_j) \end{array} \right\}$$

que leva $U \in \mathcal{A}$ na upla $(\alpha_i^{-1}(U_i))_{i \in I}$ de \mathcal{U} é uma correspondência bijetiva.

Como um subconjunto $U \subset \bigcup_{Z_{s,t}} X_i$ é aberto se, e somente se, suas

pré-imagens U_i em cada um dos X_i 's é aberta e nesse caso é claro que $\phi_{(i,j),i}^{-1}(U_i) = \phi_{(i,j),j}^{-1}(U_j)$, temos para cada aberto de $\bigcup_{Z_{s,t}} X_i$ somente uma upla (precisamente $(\alpha_i^{-1}(U))_{i \in I}$) associada em \mathcal{U} , o que deixa claro um lado da correspondência. Mas não é tão claro que dada uma upla de abertos $(U_i)_{i \in I} \in \mathcal{U}$ temos um aberto correspondente. Para isso, provaremos que dada $(U_i)_{i \in I} \in \mathcal{U}$ o subconjunto $U = \bigcup \alpha_i(U_i) \subset \bigcup_{Z_{s,t}} X_i$ é um aberto que satisfaz a propriedade desejada, isto é, que $\alpha_i^{-1}(U) = U_i$.

Claramente, $U_i \subset \alpha_i^{-1}(U)$. Sendo assim, se tomarmos $x_i \in \alpha_i^{-1}(U)$, devemos mostrar então que $x_i \in U_i$. Como $\alpha_i(x_i) \in U$, existe um $x_j \in U_j$ onde $\alpha_i(x_i)$ é identificado com $\alpha_j(x_j)$ em $\bigcup_{Z_{s,t}} X_i$. Assim, sem perder a generalidade, digamos que $X_i = X_1$ e $X_j = X_n$ e que para $1 \leq t \leq n$ exista $y_t \in X_t$ com

$$x_1 = y_1 \sim y_2 \sim \dots \sim y_n = x_j,$$

ou seja, mais precisamente, para cada y_t, y_{t+1} tenhamos $z_{t,t+1} \in Z_{t,t+1}$ tal que $\phi_{(t,t+1),t}(z_{t,t+1}) = y_t$ e $\phi_{(t,t+1),t+1}(z_{t,t+1}) = y_{t+1}$. Note que alguns X_t 's podem ser iguais. Como estamos assumindo $x_j = y_n \in U_n = U_j$, temos $z_{n-1,n} \in \phi_{(n-1,n),n}^{-1}(U_n)$ e, portanto,

$$y_{n-1} = \phi_{(n-1,n),n-1}(z_{n-1,n}) \in \phi_{(n-1,n),n-1}(\phi_{(n-1,n),n}^{-1}(U_n)) \subset U_{n-1}.$$

Do mesmo modo, $y_{n-2} \in U_{n-2}$, e assim por diante, até obtermos $x_i = y_1 \in U_1 = U_i$ como queríamos. □

Lema 2.2. *Seja $\phi : Z \rightarrow X$ e $\psi : Z \rightarrow Y$ mapas contínuos entre espaços topológicos e sejam $\alpha : X \rightarrow X \bigcup_Z Y$ e $\beta : Y \rightarrow X \bigcup_Z Y$ os mapas induzidos por ϕ e ψ . Suponha que ϕ (respectivamente ψ) é um homeomorfismo sobre sua imagem. Então, β (respectivamente α) também é um homeomorfismo sobre sua imagem.*

Prova. Começamos provando que β é injetivo. Suponha $y_1, \tilde{y}_1 \in Y$ tais que $\beta(y_1) = \beta(\tilde{y}_1)$. Logo, devem existir $n \geq 2$ e $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in X$ e $y_2, y_3, \dots, y_n \in Y$ tais que x_1 é identificado com y_1 (via $z_{1,1} \in Z$), y_1 é identificado com x_2 (via $z_{1,2} \in Z$), x_2 é identificado com y_2 (via $z_{2,2} \in Z$), y_2 é identificado com x_3 (via $z_{2,3} \in Z$) e assim sucessivamente até que y_{n-1} é identificado com x_n (via $z_{n-1,n} \in Z$) e x_n é identificado com $y_n = \tilde{y}_1$ (via $z_{n,n} \in Z$). Mas desse modo temos $\phi(z_{1,2}) = x_2 = \phi(z_{2,2})$ ($n \geq 2$), o que é um absurdo já que ϕ é injetiva. Logo, β é injetiva.

Pela definição β é contínuo e já provamos sua injetividade. Portanto, para provarmos que β é um homeomorfismo sobre sua imagem falta provarmos que dado $U \subset Y$ existe um aberto $V \subset X \cup_Z Y$ tal que $\beta^{-1}(U) = V$. Mas dado U como acima, temos que $\psi^{-1}(U)$ aberto de Z e como ϕ é um homeomorfismo sobre sua imagem, temos um aberto U' de X tal que $\phi^{-1}(U') = \psi^{-1}(U)$. Assim, pelo lema anterior, a upla (U', U) corresponde a um aberto de $X \cup_Z Y$, de fato, pela prova do lema anterior, o conjunto $V = \alpha(U') \cup \beta(U)$. Logo, fica provado que β é um homeomorfismo sobre sua imagem. \square

Lema 2.3. *Sejam X, Y, Z como no lema anterior e os mapas entre eles identificados da mesma maneira. Suponha agora que ψ é um homeomorfismo sobre sua imagem e que Z é um espaço de Zariski (noetheriano e todo conjunto irreduzível possui um único ponto genérico). Então, se $x \in X$ e $y \in Y$ e se $\beta(y) \in \overline{\alpha(x)}$ então existe $z \in Z$ tal que $y \in \overline{\psi(z)}$ e $\phi(z) \in \overline{x}$.*

Demonstração. Como ψ é um homeomorfismo sobre sua imagem, pelo lema anterior, temos que α também o é e portanto, $\overline{\{x\}} = \alpha^{-1}(\overline{\{\alpha(x)\}})$. Vamos procurar candidatos à z em $\phi^{-1}(\overline{\{x\}})$. Se $\phi^{-1}(\overline{\{x\}}) = \emptyset$ então nenhum ponto de Y será identificado com pontos de $\overline{\{x\}}$. Mas isso é uma contradição já que $\overline{\{x\}} = \alpha^{-1}(\overline{\{\alpha(x)\}})$ e $\beta(y) \in \overline{\{\alpha(x)\}}$, isto é, $y \in Y$ é identificado com algum ponto de $\overline{\{x\}}$. Logo, $\phi^{-1}(\overline{\{x\}}) \neq \emptyset$.

Como ψ é um homeomorfismo sobre sua imagem, todo fechado de Z é imagem inversa de um fechado de Y , inclusive aqueles fechados de Z que são imagem inversa de fechados de X . Assim, como $\beta(y) \in \overline{\{\alpha(x)\}}$ e pelo lema 2.1, temos que para todo fechado V de X contendo x , qualquer fechado de W de Y (sabemos que existe pelo menos um) tal que $\psi^{-1}(V) = \phi^{-1}(W)$ deve conter y . Em particular, $\overline{\psi(\phi^{-1}(\overline{\{x\}}))}$ contém y . Agora, como Z é um espaço de Zariski e $\psi(\phi^{-1}(\overline{\{x\}}))$ é um fechado de Z podemos escrever $\psi(\phi^{-1}(\overline{\{x\}})) = Z_1 \cup Z_2 \cup \dots \cup Z_n$ para conjuntos fechados irreduzíveis Z_i com respectivos pontos genéricos z_i . Sendo assim, temos que

$$y \in \overline{\psi(Z_1 \cup Z_2 \cup \dots \cup Z_n)} = \overline{\psi(Z_1) \cup \psi(Z_2) \cup \dots \cup \psi(Z_n)}$$

e, portanto, temos $y \in \overline{\psi(Z_i)} = \overline{\psi(\{z_i\})}$, para algum i . Daí, $y \in \overline{\psi(z_i)}$ e, por outro lado, $\psi z_i \in \overline{\{x\}}$ (já que $Z_i \subset \psi^{-1}(\overline{\{x\}})$), o que completa a demonstração. \square

2.2 A Estrutura de Feixe

Bem entendida a topologia de $\bigcup_{Z_{s,t}} X_i$, vamos continuar com a nossa colagem de espaços anelados.

Seja U aberto de $\bigcup_{Z_{s,t}} X_i$. Logo, cada $\alpha_i^{-1}(U)$ é um aberto de X_i ($i \in I$) e, pela identidade 2.1, temos que

$$\phi_{(i,j),i}^{-1}(\alpha_i^{-1}(U_i)) = \phi_{(i,j),j}^{-1}(\alpha_j^{-1}(U_j)). \quad (2.2)$$

Agora, considerando os mapas (de feixes):

$$\phi_{(i,j),i}^\# : \mathcal{O}_{X_i} \longrightarrow (\phi_{(i,j),i})_* \mathcal{O}_{Z_{i,j}}$$

$$\phi_{(i,j),j}^\# : \mathcal{O}_{X_j} \longrightarrow (\phi_{(i,j),j})_* \mathcal{O}_{Z_{i,j}}$$

se tomarmos a_i e a_j (para quaisquer que sejam $i, j \in I$) seções de $\mathcal{O}_{X_i}(\alpha_i^{-1}(U_i))$ e $\mathcal{O}_{X_j}(\alpha_j^{-1}(U_j))$, respectivamente, teremos

$$\begin{aligned} \phi_{(i,j),i}^\#(a_i) &\in (\phi_{(i,j),i})_* \mathcal{O}_{Z_{i,j}} \\ &= \mathcal{O}_{Z_{i,j}}(\phi_{(i,j),i}^{-1}(\alpha_i^{-1}(U_i))) \end{aligned}$$

e também,

$$\begin{aligned} \phi_{(i,j),j}^\#(a_j) &\in (\phi_{(i,j),j})_* \mathcal{O}_{Z_{i,j}} \\ &= \mathcal{O}_{Z_{i,j}}(\phi_{(i,j),j}^{-1}(\alpha_j^{-1}(U_j))) \end{aligned}$$

Sendo assim, por 2.2, $\phi_{(i,j),i}^\#(a_i)$ e $\phi_{(i,j),j}^\#(a_j)$ são elementos do mesmo anel

$$\mathcal{O}_{Z_{i,j}}(\phi_{(i,j),j}^{-1}(\alpha_j^{-1}(U_j))) = \mathcal{O}_{Z_{i,j}}(\phi_{(i,j),i}^{-1}(\alpha_i^{-1}(U_i))),$$

e, portanto, podem ser comparados.

Essa condição era o que faltava para captar para $\bigcup_{Z_{s,t}} X_i$ informações da estrutura dos feixes estruturais sobre X_i , $i \in I$, que permitam encontrar um feixe sobre $\bigcup_{Z_{s,t}} X_i$ que seja o “encaixe” dos feixes sobre X_i ao longo dos $Z's$.

Proposição-definição 2.2 (Colagem como espaços anelados). *Para cada subconjunto aberto U de $\bigcup_{Z_{s,t}} X_i$, seja $\Gamma(U, \mathcal{O}_{\bigcup_{Z_{s,t}} X_i})$ o subanel de*

$$\prod_{i \in I} \Gamma(\alpha_i^{-1}(U), \mathcal{O}_{X_i})$$

consistindo de todas as uplas $(a_i)_{i \in I}$ tais que para quaisquer $i, j \in I$

$$\phi_{(i,j),i}^\#(a_i) = \phi_{(i,j),j}^\#(a_j),$$

isto é, as uplas de $\Gamma(\alpha_i^{-1}(U))$ e $\Gamma(\alpha_j^{-1}(U))$ são compatíveis em $Z_{(i,j)}$.
A associação:

$$U \longmapsto \Gamma(U, \mathcal{O}_{\bigcup_{Z_{s,t}} X_i}),$$

munida com as restrições naturais:

$$\begin{aligned} \rho_{UV} : \Gamma(U, \mathcal{O}_{\bigcup_{Z_{s,t}} X_i}) &\longrightarrow \Gamma(V, \mathcal{O}_{\bigcup_{Z_{s,t}} X_i}) \\ (a_i)_{i \in I} &\longmapsto (a_i)_{i \in I}|_V = (a_i|_{\alpha_i^{-1}(V)})_{i \in I} \end{aligned}$$

onde $V \subset U \subset \bigcup_{Z_{s,t}} X_i$ são abertos, é um feixe sobre o espaço topológico $\bigcup_{Z_{s,t}} X_i$. Este feixe, por sua vez, é chamado de a colagem dos espaços anelados X_i 's ao longo dos $Z_{i,j}$,

Prova. Vamos primeiramente mostrar que $(\bigcup_{Z_{s,t}} X_i, \mathcal{O}_{\bigcup_{Z_{s,t}} X_i})$ é um prefeixe de anéis. A única exigência (relevante para tal ocorrer) à discutida é o fato das restrições (como foram definidas) se encaixarem.

Note que pela a estrutura de feixe dos X_i 's e dos morfismos $\phi_{(i,j)}$'s, temos que $a_i|_{\alpha_i^{-1}(V)} \in \Gamma(V, \mathcal{O}_{\bigcup_{Z_{s,t}} X_i})$. Como as restrições de \mathcal{O}_{X_i} e \mathcal{O}_{X_j} comutam com $\phi_{(i,j),i}^\#$ e $\phi_{(i,j),j}^\#$, temos que $a_i|_{\alpha_i^{-1}(V)}$ são compatíveis nos $Z_{i,j}$'s e, portanto,

$$(a_i|_{\alpha_i^{-1}(V)})_{i \in I} \in \Gamma\left(V, \bigcup_{Z_{s,t}} X_i\right).$$

Provada a boa definição dos ρ 's, fica claro que se $W \subset V$ é outro aberto de $\bigcup_{Z_{s,t}} X_i$ temos que $\rho_{UW} = \rho_{UV} \circ \rho_{VW}$. Portanto, $(\bigcup_{Z_{s,t}} X_i, \mathcal{O}_{\bigcup_{Z_{s,t}} X_i})$ é um prefeixe.

Vamos provar agora que $\mathcal{O}_{\bigcup_{Z_{s,t}} X_i}$ é um feixe. Para isso, suponha que $U \subset \bigcup_{Z_{s,t}} X_i$ é um aberto e $\{V_t\}_{t \in T}$ é uma cobertura aberta de U . Se $s = (s_i)_{i \in I} \in \Gamma(U, \bigcup_{Z_{s,t}} X_i)$ é tal que $s|_{V_t} = 0$ para $t \in T$, teremos para cada $i \in I$ que $s_i|_{\alpha_i^{-1}(V_t)} = 0$. Sendo assim, para cada $i \in I$, como \mathcal{O}_{X_i} é um feixe sobre X_i e os $\alpha_i^{-1}(V_t)$'s cobrem $\alpha_i^{-1}(U)$, temos $s_i = 0$. Assim, s corresponde a upla $(0)_{i \in I}$ e, portanto, $s = 0$.

Para acabar, suponha U e $\{V_t\}$ satisfazendo as mesmas hipóteses de antes que para cada $t \in T$ tenhamos $s_t = ((s_t)_i) \in \Gamma\left(V_t, \bigcup_{Z_{s,t}} X_i\right)$ tais que

$$s_t|_{V_t \cap V_{t'}} = s_{t'}|_{V_t \cap V_{t'}}.$$

Precisamos mostrar que os s_t colam sobre U , isto é, que existe $s \in \Gamma\left(U, \bigcup_{Z_{s,t}} X_i\right)$ tal que $s|_{V_t} = s_t$. Mas,

$$\begin{aligned} s_t|_{V_t \cap V_{t'}} &= \left((s_t)_i|_{\alpha_i^{-1}(V_t \cap V_{t'})} \right)_{i \in I} \\ &= \left((s_t)_i|_{\alpha_i^{-1}(V_t) \cap \alpha_i^{-1}(V_{t'})} \right)_{i \in I}, \end{aligned}$$

e então, mais o fato de \mathcal{O}_{X_i} ser um feixe sobre X_i , existem $s_i \in \Gamma(\alpha_i^{-1}(U))$ tais que $(s_i)|_{\alpha_i^{-1}(V_t)} = s_t$.

Feito isso, obtemos um candidato natural para o s : a upla $(s_i)_{i \in I}$. Para mostrar este candidato satisfaz o que procuramos basta mostrarmos que ele pertence de fato ao anel $\Gamma\left(U, \bigcup_{Z_{s,t}} X_i\right)$, ou seja, precisamos garantir que

$$\phi_{(i,j),i}^\#(s_i) = \phi_{(i,j),j}^\#(s_j).$$

Mas,

$$\begin{aligned} \left(\phi_{(i,j),i}^\#(s_i) - \phi_{(i,j),i}^\#(s_j) \right) |_{\phi_{(i,j),i}^{-1}(\alpha_i^{-1}(V_t))} &= \phi_{(i,j),i}^\# \left((s_t)|_{\alpha_i^{-1}(V_t)} \right) \\ &\quad - \phi_{(i,j),i}^\# \left((s_t)|_{\alpha_j^{-1}(V_t)} \right) \end{aligned}$$

pois $\phi_{(i,j),i}^{-1} \circ \alpha_i^{-1}(V_t) = \phi_{(i,j),j}^{-1} \circ \alpha_j^{-1}(V_t)$. Como em $Z_{i,j}$ as imagens inversas de V_t cobrem a imagem inversa de U e $\mathcal{O}_{Z_{i,j}}$ é um feixe, concluímos que $\phi_{(i,j),i}^\#(s_i) = \phi_{(i,j),i}^\#(s_j)$ e, portanto, $s = (s_i)_{i \in I} \in \Gamma\left(U, \bigcup_{Z_{s,t}} X_i\right)$ cola s_t sobre U . \square

A última proposição nos dá ainda morfismos de espaços anelados

$$\alpha_i : X_i \longrightarrow \bigcup_{Z_{s,t}} X_i.$$

De fato, o mapa entre os respectivos espaços topológicos é mais do que conhecido e $\alpha_i^\# : \mathcal{O}_{\bigcup_{Z_{s,t}} X_i} \longrightarrow \mathcal{O}_{X_i}$ é simplesmente a projeção natural.

Este processo não produz esquemas em geral, nem mesmo quando os X_i 's e $Z_{i,j}$'s são esquemas (veremos exemplos onde isto acontece no próximo capítulo). Mas uma vantagem desta colagem já pode ser vista (pela seguinte propriedade universal):

Teorema 2.1. *Suponha que W é um espaço anelado e que para cada $i \in I$ existem mapas $\psi_i : X_i \rightarrow W$ tais que quadrados da forma*

$$\begin{array}{ccc}
 & Z_{i,j} & \\
 \phi_{(i,j),i} \swarrow & & \searrow \phi_{(i,j),j} \\
 X_i & & X_j \\
 \psi_i \searrow & & \swarrow \psi_j \\
 & W &
 \end{array}$$

comutam. Então os mapas ψ_i fatoram-se via os mapas naturais α_i por $Y = \bigcup_{Z_{s,t}} X_i$, induzindo um único mapa

$$\delta : \bigcup_{Z_{s,t}} X_i \rightarrow W$$

tal que o seguinte diagrama comuta para quaisquer $i, j \in I$:

$$\begin{array}{ccc}
 & Z_{i,j} & \\
 \phi_{(i,j),i} \swarrow & & \searrow \phi_{(i,j),j} \\
 X_i & & X_j \\
 \alpha_i \searrow & \bigcup_{Z_{s,t}} X_i & \swarrow \alpha_j \\
 \phi_i \searrow & \downarrow \delta & \swarrow \phi_j \\
 & W &
 \end{array}$$

Prova. À essa altura, é mais do que claro quem deve ser o mapa entre espaços topológicos

$$\delta : \bigcup_{Z_{s,t}} X_i \rightarrow W.$$

E, claro, quem devem ser mapas

$$\begin{aligned}
 \delta^\#(V) : \mathcal{O}_W(V) &\longrightarrow \left(\mathcal{O}_{\bigcup_{Z_{s,t}} X_i} \right)_*(V) \\
 \lambda &\longrightarrow (\psi_i^\#(\lambda))_{i \in I}
 \end{aligned}$$

para cada aberto V de W , que juntos formam o mapa de feixes:

$$\delta^\# : \mathcal{O}_W \longrightarrow \mathcal{O}_{\bigcup_{Z,s,t} X_i}.$$

Portanto, temos a existência e a unicidade do mapa de espaços anelados δ , como queríamos. \square

A próxima proposição nos diz que não precisamos colar todos os espaços anelados de uma vez.

Proposição 2.1. *Dados os X_i , $i \in I$, e $S = \{Z_{i,j} | i, j \in I\}$ como em todo o capítulo, suponha que $I = I' \cup I''$ e $I' \cap I'' = \emptyset$. Seja S' o subconjunto de S onde ambos os índices de $Z_{i,j}$ estão em I' e seja S'' o subconjunto de S com ambos os índices de $Z_{i,j}$ em I'' . Seja $S_0 = S - (S' \cup S'')$. Seja $Z = \prod_{S_0} Z_{i,j}$ (produto direto dos espaço anelados $Z_{i,j}$, indexados por S_0). Sejam $X' = \bigcup_{S'} X_i$ e $X'' = \bigcup_{S''} X_i$. Então existem mapas $\psi' : Z \longrightarrow X'$ e $\psi'' : Z \longrightarrow X''$ induzidos pelos $Z_{i,j}$'s e a colagem de X' e X'' que decorre destes mapas satisfaz $X' \cup_Z X'' \cong \bigcup_{Z_{i,j}} X_i$.*

Prova. Decorre da definição. \square

Capítulo 3

Aplicações em Esquemas

Neste capítulo, como o título indica, vamos estudar como a colagem de espaços anelados que vimos no capítulo anterior se comporta em esquemas.

A menos que seja indicado o contrário, por todo o capítulo trataremos X, Y e Z por esquemas e os mapas $\phi : X \rightarrow Z$ e $\psi : Y \rightarrow Z$ por morfismos de esquemas. Da mesma maneira, trataremos por $\alpha : X \rightarrow X \cup_Z Y$ e por $\beta : Y \rightarrow X \cup_Z Y$ os mapas de espaços anelados induzidos quando colamos X, Y sobre Z (como espaços anelados é claro).

Antes de fazer qualquer conta, vamos fazer mais um lema.

Lema 3.1. *Suponha X, Y e Z como acima e que existam abertos $U \subset X$, $V \subset Y$ tais que $W = \phi^{-1}(U) = \psi^{-1}(V)$. Então os espaços anelados $U \cup_W V$ e $X \cup_Z Y|_{\alpha(U) \cap \beta(V)}$ são isomorfos.*

Prova. Pela prova do lema 2.1, $\alpha(U) \cup \beta(V)$ é o aberto de $X \cup_Z Y$ que responde a dupla (U, V) . Portanto, a estrutura de espaço anelado de $\alpha(U) \cup \beta(V)$ é bem definida como a restrição da estrutura de $X \cup_Z Y$.

Agora, pelo mesmo lema, os abertos de $U \cup_W V$ correspondem as duplas (U_1, V_1) , onde $U_1 \subset U$ e $V_1 \subset V$ são abertos satisfazendo a identidade $\phi^{-1}(U_1) = \psi^{-1}(V_1)$. Mas estas correspondem exatamente aos abertos de $X \cup_Z Y$, e portanto, $U \cup_W V$ e $X \cup_Z Y$ são homeomorfos.

Agora, seja T um aberto de $U \cup_W V$ correspondente a dupla (T_1, T_2) , que por sua vez corresponde ao aberto T' em $X \cup_Z Y$. As seções de $\Gamma(T, \mathcal{O}_{U \cup_W V})$ são o produto das seções $\Gamma(T_1, \mathcal{O}_X)$ e $\Gamma(T_2, \mathcal{O}_Y)$ que coincidem em $\Gamma(\phi^{-1}(T_1) = \psi^{-1}(T_2), \mathcal{O}_Z)$. Mas estas também são as seções de $\Gamma(T', \mathcal{O}_{X \cup_Z Y})$. Portanto,

$\Gamma(T, \mathcal{O}_{U \cup_W V}) \cong \Gamma(T', \mathcal{O}_{X \cup_Z Y})$ e os espaços anelados $U \cup_W V$ e $X \cup_Z Y$ são isomorfos. \square

Observação 3.1. Imitando a demonstração do lema acima, podemos provar imediatamente sua versão mais geral: Se $U_i \subset X_i$ são abertos tais que $W_{i,j} = \phi_{(i,j),i}^{-1}(U_i) = \phi_{(i,j),j}^{-1}(U_j) \subset Z_{i,j}$, então os espaços anelados

$$\bigcup_{Z_{s,t}} X_i \Big|_{\mathcal{W}} \text{ e } \bigcup_{W_{s,t}} U_i$$

são isomorfos, onde $\mathcal{W} = \bigcup_{i \in I} \alpha_i(U_i)$.

Exemplo 3.1 (Colagem ao longo de subesquemas abertos). Suponha que ϕ e ψ são imersões abertas. Então $X \cup_Z Y$ é a colagem padrão de X e Y ao longo de Z . (Ver [3] ou [6]).

Exemplo 3.2. Suponha $X = \mathbb{A}_k^2 = \text{Spec } k[x, y]$ e $Z = X = \{0\}$, onde O é a origem. Suponha também $Y = \text{Spec } k[x, y, z] - \{0\}$. Temos mapas $\phi : Z \rightarrow X$ e $\psi : Z \rightarrow Y$ naturais, onde ϕ é uma imersão aberta e ψ é uma imersão fechada. Vamos mostrar que $X \cup_Z Y$ não é um esquema. Seja P a origem de X , o ponto não atingido por ϕ . Toda vizinhança de $\alpha(P)$ em $X \cup_Z Y$ corresponde a um par de aberto $U \subset X$ e $V \subset Y$ tais que $\phi^{-1}(U) = \psi^{-1}(V)$. Note que as seções de $U \subset X$ e $\phi^{-1}(U) \subset Z$ são isomorfas e, portanto, temos que colar à X não adiciona nem remove seções além daquelas associadas com Y . Logo, para todo aberto $U \cup_W V$ de $X \cup_Z Y$, temos $\mathcal{O}_{X \cup_Z Y}(U \cup_W V) = \mathcal{O}_Y(V)$. Além disso, temos que o conjunto $F = \{z = 0\}$ é fechado em Y e o conjunto $F' = \beta(F)$ é um fechado de $X \cup_Z Y$ já que $(\alpha^{-1}(F'), \beta^{-1}(F'))$ satisfaz as condições do lema 2.1. Mas, então, F' é uma reta menos a origem e é fechado em $X \cup_Z Y$ e, portanto, este não pode ser um esquema.

O próximo resultado é o mais importante do capítulo. Ele nos dá uma condição para saber quando podemos colar esquemas afins e obter um esquema afim.

Teorema 3.1. *Suponha que A e B são anéis. Ademais suponha que I é um ideal de A e que existe um morfismo de anéis $\gamma : B \rightarrow A/I$. Denotamos o morfismo quociente de A para A/I por π . Sejam $X = \text{Spec } A$, $Y = \text{Spec } B$, $Z = \text{Spec } A/I$ e $\phi : X \rightarrow Z$ e $\psi : Z \rightarrow Y$ morfismos de esquemas induzidos pelos mapas entre os respectivos anéis (note que Z é um subesquema*

fechado de X). Então, $X \cup_Z Y$ é um esquema afim com Y um subsquema fechado, $(X \cup_Z Y) - Y \cong X - Z$, e os mapas $\alpha : X \rightarrow X \cup_Z Y$ e $\beta : Y \rightarrow X \cup_Z Y$ são morfismos de esquemas.

Informalmente, vamos colar $Y = \text{Spec } B$ sobre X ao longo de Z . Isto vai trocar Z por Y (whatever that might mean) mantendo $X \cup_Z Y$ esquema afim.

Prova. Vamos ver como $X \cup_Z Y$ se parece como conjunto. Como ϕ é um homeomorfismo sobre sua imagem, pela lema 2.2, β também será. Além disso, Z é um subconjunto fechado de X e como estamos colando ao longo de Z , X permanecerá intacto fora de Z . Assim, Z será substituído por Y em X via o mapa $\psi : Z \rightarrow Y$ induzido por γ .

Como estamos afirmando que $X \cup_Z Y$ será afim, vamos olhar para as seções globais de $X \cup_Z Y$. Tais seções são o produto das seções em X e Y que coincidem em Z . Logo, elas compõem o anel

$$\Gamma(X \cup_Z Y, \mathcal{O}_{X \cup_Z Y}) = C = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B; a + I = \gamma(b)\}.$$

Sendo assim, temos as projeções

$$f : C \rightarrow A$$

$$g : C \rightarrow B.$$

Sejam $J = \{(a, 0) \in C\} = \ker g$ e $J' = \{(0, b) \in C\} = \ker f$ ideais de C . Pela definição, g é claramente injetivo e portanto $C/J \cong B$. Agora, como $\pi^{-1}(\Gamma(B)) = f(C) \subset A$, temos $C/J' \cong \pi^{-1}(\Gamma(B))$ e portanto, podemos ver C/J' como subanel de A , que chamaremos a partir de agora por B' .

Seja P primo de C . Como $J \cdot J' = (0)$, pela proposição 1.11 do Atiyah (colocar referência), P deve conter J ou J' . Se P contém J , então P corresponde a um ideal primo de B (via o isomorfismo $C/J \cong B$). Caso contrário, se P não contém J , P deve conter J' e portanto corresponde a um ideal primo Q' de B' . E, por P não conter J , Q' não contém I já que $J = \{(I, 0)\}$. Logo, existe $a \in I$ tal que $a \notin Q'$. Logo, Q' corresponde a um primo Q da localização $B'_{(a)} = B'[a^{-1}]$. Mas $a \in I$ e $I \subset B'$, temos $B_{(a)} = B[a^{-1}] = A$.

Sendo assim, todo primo de C corresponde a um primo de B ou um primo de A que não contém I . Portanto, pelo menos como conjunto $\text{Spec } C$ corresponde a $(X - Z) \cup Y$ e os mapas f e g induzem as correspondências

esperadas e assim temos uma correspondência entre os conjuntos $\text{Spec } C$ e $X \cup_Z Y$. Vamos mostrar que esta correspondência respeita as topologias de $\text{Spec } C$ e $X \cup_Z Y$, e portanto, é um homeomorfismo.

Seja W fechado de $X \cup_Z Y$. Logo, $\alpha^{-1}(W)$ e $\beta^{-1}(W)$ são fechados de X e Y , respectivamente, e portanto eles são associados a ideais primos $K \subset A$ e $K' \subset B$. Seja $L = f^{-1}(K) \cap g^{-1}(K')$ ideal (primo) de C . Seja P um primo de C correspondente a um ponto de W . Então, tal ponto vem de X ou Y e portanto, de algum ponto de $\alpha^{-1}(W)$ e $\beta^{-1}(W)$. Logo, o primo associado a este ponto em A ou B deve conter K ou K' . De qualquer modo, P deve conter L . Por outro lado suponha que P é um ideal primo de C contendo L . Então, P deve conter $f^{-1}(K)$ ou $g^{-1}(K')$. Se P contém $g^{-1}(K')$, então P também contém $J = \ker g \subset g^{-1}(K')$ e portanto P corresponde a um elemento de $\beta^{-1}(W)$. Se P contém $f^{-1}(K)$ e não contém J então P corresponde a um primo de A contendo K , isto, é a um elemento de $\alpha^{-1}(W)$. O único caso que resta é quando P contém $f^{-1}(K)$ e J . Neste caso, vamos mostrar que P contém $g^{-1}(K')$, o que coloca P no primeiro caso.

Em particular, é suficiente provar que $K' \subset g(P)$, já que g é sobrejetivo e P contém $K = \ker g$. Como a imagem inversa dos primos de A que contêm K são os primos de A/I que contêm $\pi(K)$ e, por sua vez, a imagem inversa dos primos de B que contêm K' são os primos de A/I que contêm $\gamma(K')$ temos

$$\sqrt{\gamma(K')A/I} = \sqrt{\pi(K)}$$

já que as imagens inversas de $\alpha^{-1}(W)$ e $\beta^{-1}(W)$ em Z devem coincidir.

Sendo assim, tome $b \in K' \subset B$. Então, $\gamma(b) \in \gamma(K') \subset \sqrt{\pi(K)}$. Logo, $\gamma(b^n) \in \pi(K)$, para algum n . Daí, existe a tal que

$$a + I = \gamma(b^n)$$

e $a \in K$. Assim, $(a, b^n) \in C$. Como $a \in K$ e $b^n \in K'$, temos que $(a, b^n) \in L \Rightarrow (a, b^n) \in P \Rightarrow b^n g(P)$ e concluímos que $g(P) \supset K'$. Assim, a correspondência estabelecida entre $X \cup_Z Y$ e $\text{Spec } C$ realmente é um homeomorfismo.

Agora precisamos mostrar que $X \cup_Z Y$ e $\text{Spec } C$ são isomorfos como esquemas. Como um feixe em um espaço topológico é determinado por suas restrições em uma base de abertos do espaço e já sabemos que $\text{Spec } C$ e $X \cup_Z Y$ são o mesmo espaço topológico, é suficiente mostrar que os feixes estruturais destes são isomorfos em cada aberto de uma determinada base deste espaço. Tomemos então como base os de $\text{Spec } C$ os abertos afins Spec

C_c , onde Dado $c = (s, t) \in C$. Vamos mostrar que o mapa natural entre C_c e as sessões globais do aberto correspondente em $X \bigcup_Z Y$ (que pelo lema 3.1 é $T = (X - V(s)) \bigcup_{Z-V(s+I)} (Y - V(t))$),

$$\frac{(a, b)}{c^n} \xrightarrow{\mu} \left(\frac{a}{s^n}, \frac{b}{t^n} \right),$$

é um isomorfismo. Vamos começar provando a injetividade. Se $\mu((a, b)/c^n) = (a/s^n, b/t^n) = 0 = (0, 0)$ então existem inteiros positivos m_1 e m_2 tais que $s_1^{m_1} a = 0$ e $t_2^{m_2} b = 0$. Mais daí podemos então escolher um m suficientemente grande tal que $c^m(a, b) = 0$ e, portanto, teremos também $(a, b)/c^n = 0$. Para mostrar a sobrejetividade, tome $(a/s^n, b/t^n) \in \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$. Mudando a e b se necessário, podemos assumir $n = m$. Daí, pela maneira como foi construído \mathcal{O}_T , temos $\pi(a)/\pi(s)^n = \gamma(b)/\gamma(t)^n$ e como $\pi(s) = \gamma(t)$, teremos um inteiro l tal que $\pi(s)^l(\pi(a) - \pi(b)) = 0$, ou seja, $\pi(as^l) = \gamma(bt^l)$ para algum l . Então $\mu((as^l, bt^l)/c^{n+l}) = (a/s^n, b/t^n)$ como desejávamos. Portanto os esquemas $X \bigcup_Z Y$ e $\text{Spec } C$ são isomorfos. Além disso, podemos observar que $\text{Spec } C$ tem Y como subesquema fechado e é isomorfo a $X - Z$ “fora” de Y .

Finalmente, como os mapas entre espaços anelados $\alpha : X \rightarrow X \bigcup_Z Y$ e $\beta : Y \rightarrow X \bigcup_Z Y$ são induzidos pelos mapas entre as sessões globais destes esquemas afins, temos que α e β são morfismos de esquemas como desejado. \square

Corolário 3.1 (Contraíndo um subconjunto fechado a um ponto em um esquema afim). *Sejam A, I e B como acima e assuma que A é uma k -álgebra (k corpo) e que $B = k$. Então $X \bigcup_Z Y$ é isomorfo a $\text{Spec } A$ fora de $\text{Spec } A/I$ e o subesquema fechado $\text{Spec } A/I$ é contraído à um ponto.*

Exemplo 3.3 (Contraíndo uma reta em \mathbb{A}_k^2). Sejam $A = k[x, y]$, $I = (x)$ e $B = k$. Então, $X \bigcup_Z Y = \text{Spec } k[x, xy, xy^2, xy^3, \dots]$. Isto é \mathbb{A}_k^2 com a reta $x = 0$ contraída a um ponto. Note que este caso o esquema resultante não é Noetheriano mesmo os originais o sendo.

Exemplo 3.4. Sejam $A = K[x]$, $B = k$ e seja $I = ((x - 1)(x + 1))$. Então $X \bigcup_Z Y$ é isomorfo a curva nodal. Se $I = (x^2)$ então $X \bigcup_Z Y$ será a cúspide cúbica.

Corolário 3.2 (Colando sobre subesquemas em geral). *Suponha que Z é um subesquema fechado de ambos X e Y . Então $X \bigcup_Z Y$ é um esquema.*

Prova. Como X e Y são esquemas, todo ponto de $X \cup_Z Y$ fora da imagem de Z possui uma vizinhança afim. Resta-nos, então, analisar os pontos na imagem de Z .

Sendo assim, seja $x \in X$ e $z \in Z$ tal que $\phi(z) = x$. Tomemos aberto afim $U \subset X$ com $x \in U$. Logo, $\phi^{-1}(U)$ é um aberto afim de Z e como $\psi : Z \rightarrow Y$ é um homeomorfismo sobre sua imagem, existe $W \subset Y$ tal que $\psi^{-1}(W) = \phi^{-1}(U)$. Escolhemos então um aberto afim $V \subset W$ tal que $\psi(z) \in V$ e daí temos $\psi^{-1}(V)$ aberto afim de $\phi^{-1}(U)$ contendo z . Assim, existem abertos afins (localizações de V e U) $V' \subset V$ e $U' \subset U$ tais que $z \in \phi^{-1}(U') = \psi^{-1}(V')$. Daí, pelo teorema 3.1, $U' \cup_{\psi^{-1}(U')} V'$ é vizinhança aberta afim de $\alpha(x) \in X \cup_Z Y$. Então $X \cup_Z Y$ é um esquema. \square

Observação 3.2. No colorário acima, suponha que X e Y são subesquemas fechados de um esquema ambiente $\text{Spec } A$ e que Z representa a interseção de X e Y . Sendo assim, existem ideais I_X e I_Y de A tais que $X = \text{Spec } A/I_X$, $Y = \text{Spec } A/I_Y$ e $Z = \text{Spec } A/(I_X + I_Y)$. Tomando $\pi : A/I_X \rightarrow A/(I_X + I_Y)$ e $\gamma : A/I_Y \rightarrow A/(I_X + I_Y)$, temos pela prova do teorema 3.1 que $X \cup_Z Y = \text{Spec } A/(I_X \cap I_Y)$.

Vamos agora provar uma versão do teorema 3.1 com menos hipóteses.

Lema 3.2. *Sejam A, B e C anéis e $\pi : A \rightarrow C$ e $\gamma : B \rightarrow C$ morfismos. Sejam $X = \text{Spec } A$, $Y = \text{Spec } B$ e $Z = \text{Spec } C$ e suponha que os mapas induzidos por π, γ são respectivamente $\phi : Z \rightarrow X$ e $\psi : Z \rightarrow Y$. Além disso, suponha que $\pi(A) \subset \gamma(B) \subset C$ e que ψ é um mapa fechado (de espaços topológicos). Então $X \cup_Z Y$ é afim com X como um subesquema fechado.*

Prova. Das hipóteses entres os anéis A, B e C e os mapas entre eles, podemos extrair o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \pi : A & \xrightarrow{\pi} & \pi(A) & \xrightarrow{i_A} & C \\ & & \downarrow i & & \\ \gamma : B & \xrightarrow{\gamma} & \gamma(B) & \xrightarrow{i_B} & C \end{array}$$

onde i, i_A e i_B são as inclusões naturais. Assim, se $W = \text{Spec } (\gamma(B))$, temos

o diagrama composto por morfismos de esquemas:

$$\begin{array}{ccc}
 & Z = \text{Spec } C & \\
 \phi \swarrow & \downarrow \delta = \tilde{i}_B & \searrow \phi \\
 & W = \text{Spec } (\gamma(B)) & \\
 \phi' \swarrow & & \searrow \psi' \\
 X = \text{Spec } A & & Y = \text{Spec } B
 \end{array}$$

onde $\delta = \tilde{i}_B$ (como indicado no diagrama) é morfismo induzido pelo mapa i_B .

Como $i_B : \gamma(B) \rightarrow C$ é injetivo, δ é um mapa dominante, isto, é $\overline{\delta(Z)} = W$. Mas como $\psi = \psi' \circ \delta$ é fechado, $\psi(Z)$ é fechado em Y e daí, $\delta(Z) = (\psi')^{-1}(\psi(Z))$ é fechado em W . Logo, $W = \overline{\delta(Z)} = \delta Z$, ou seja, δ é sobrejetivo.

Vamos provar que $X \cup_Z Y$ é um esquema afim mostrando que este é isomorfo ao esquema $X \cup_W Y$, que é afim pelo teorema 3.1.

Como δ é sobrejetivo, nenhuma relação adicional entre os pontos de X e Y é adicionada além daquelas já existentes via Z . Assim, $X \cup_Z Y$ e $X \cup_W Y$ são idênticos como conjuntos.

Agora, para vermos que $X \cup_Z Y$ e $X \cup_W Y$ também são topologicamente idênticos começamos notando que se $U \subset X$ e $V \subset Y$ são abertos tais que $\phi^{-1}(U) = \psi^{-1}(V)$, então, novamente pela sobrejetividade de δ , $(\phi')^{-1}(U) = \delta(\phi^{-1}(U)) = (\psi')^{-1}(V) = \delta(\psi^{-1}(V))$ e caso U e V satisfazem $(\phi')^{-1}(U) = (\psi')^{-1}(V)$, então temos $\phi^{-1}(U) = \delta^{-1}((\phi')^{-1}(U)) = \delta^{-1}((\psi')^{-1}(V)) = \psi^{-1}(V)$. Portanto, os abertos de $X \cup_Z Y$ e os abertos de $X \cup_W Y$ correspondem as mesmas uplas de abertos $U \subset X$ e $V \subset Y$. Assim, pelo lema 2.1, $X \cup_Z Y$ e $X \cup_W Y$ têm a mesma topologia e, logo, são homeomorfos.

Finalmente, vamos mostrar que estes são isomorfos como feixes. Tome um aberto \mathcal{U} de $X \cup_W Y$ correspondendo a dupla U e V de abertos de X e Y respectivamente. Logo, as sessões de \mathcal{U} em $X \cup_W Y$ são exatamente as sessões de U e V que coincidem em W , mas como o mapa $\delta^\# = i_B$ entre os feixes \mathcal{O}_W e \mathcal{O}_Z é injetivo, estas também coincidem em Z , e portanto correspondem a sessões do aberto \mathcal{U}' de $X \cup_Z Y$ correspondente a dupla (U, V) . \square

Vamos agora mostrar que uma coleção finita de subesquemas fechados de um esquema podem ser colados sobre suas interseções de modo a obter um esquema. Entretanto, como veremos logo em seguida, este esquema obtido nem sempre é um subesquema do esquema ambiente, embora sempre possa ser mapeado nele (via a propriedade 2.1). Começamos com o caso afim.

Teorema 3.2. *Suponha que Y é um esquema afim e X_1, X_2, \dots, X_n são subesquemas fechados. Se denotamos por $Z_{i,j}$ o subesquema fechado correspondente a interseção de X_i e X_j , então $\bigcup_{Z_{s,t}} X_i$ é um esquema afim com cada X_i subesquema fechado.*

Prova. Suponha $Y = \text{Spec } A$. Neste caso, os subesquemas fechados de Y são afins e correspondem a ideais de A . Sendo assim, temos cada $X_i = \text{Spec } A/I_i$ e $Z_{i,j} = \text{Spec}(A/(I_i + I_j))$.

Vamos provar o resultado por indução em n . O caso inicial decorre da observação 3.2 e suponha o resultado verdadeiro quando colamos n esquemas. Assim, sejam

$$X = \bigcup_{\substack{Z_{i,j} \\ 1 \leq i, j \leq n}} X_i = \text{Spec } B \text{ (pela hipótese de indução)}$$

$$Y = \coprod_{i=1}^n Z_{i,n+1} = \text{Spec } C = \text{Spec } \bigoplus_{i=1}^n \frac{A}{I_i + I_{n+1}}.$$

e $\phi : Z \rightarrow X$ e $\psi : Z \rightarrow X_{n+1}$ os mapas naturais. Logo, pela proposição 2.1 temos que

$$\bigcup_{\substack{Z_{i,j} \\ 1 \leq i, j \leq n+1}} X_i = X_{n+1} \bigcup_Z X.$$

e seguem os mapas abaixo (δ é obtido pelo teorema 2.1)

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ \phi \swarrow & & \searrow \psi \\ X & & X_{n+1} \\ \delta \searrow & & \swarrow \psi_{n+1} \\ & Y & \end{array}$$

onde $\delta \circ \phi = \psi_{n+1} \circ \psi$. Resumindo, temos os mapas

$$\begin{array}{ccc}
X = \text{Spec } B & Z = \text{Spec } C & Z = \text{Spec } C \\
\downarrow \delta & \downarrow \phi & \downarrow \psi \\
Y = \text{Spec } A & X = \text{Spec } B & X_{n+1} = \text{Spec } \frac{A}{I_{n+1}}
\end{array}$$

induzendo os mapas entre os anéis:

$$A \xrightarrow{\delta^\#} B \xrightarrow{\phi^\#} C$$

$$A \xrightarrow{\pi} \frac{A}{I_{n+1}} \xrightarrow{\psi^\#} C$$

que por sua vez satisfazem (já que $\delta \circ \phi = \psi_{n+1} \circ \psi$ e que π é sobrejetiva)

$$\psi^\# \left(\frac{A}{I_{n+1}} \right) = \psi^\# \circ \pi(A) = \phi^\# \circ \delta^\#(A) \subset \phi^\#(B) \subset C.$$

Logo,

$$\psi^\# \left(\frac{A}{I_{n+1}} \right) \subset \phi^\#(B) \subset C,$$

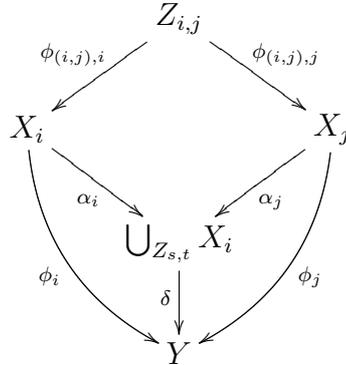
e pelo lema 3.2 segue que

$$\bigcup_{\substack{Z_{i,j} \\ 1 \leq i,j \leq n+1}} X_i = X_{n+1} \bigcup_Z X$$

é um esquema afim. □

Corolário 3.3. *Suponha que Y é um esquema e X_1, X_2, \dots, X_n são subesquemas fechados. Se denotamos por $Z_{i,j}$ o subesquema fechado correspondente a interseção de X_i e X_j , então $\bigcup_{Z_{s,t}} X_i$ é um esquema com cada X_i subesquema fechado.*

Prova. Sabemos que $X = \bigcup_{Z_{s,t}} X_i$ é um espaço anelado e pelo teorema 2.1 o seguinte diagrama é comutativo:



Seja $x \in \bigcup_{Z_{s,t}} X_i$. Logo, $\delta(x) \in Y$. Como Y é um esquema, existe $U \subset Y$ aberto afim tal que $\delta(x) \in U$. Considere então

$$\begin{aligned} \tilde{Y} &= U \\ \tilde{X}_i &= \phi_i^{-1}(U) \subset X_i. \\ \tilde{Z}_{i,j} &= \phi_{(i,j),i}^{-1}(\tilde{X}_i) = \phi_{(i,j),j}^{-1}(\tilde{X}_j) \end{aligned}$$

Temos então \tilde{X}_i subsquema fechado de \tilde{Y} . Logo, pelo teorema anterior, temos que $\bigcup_{\tilde{Z}_{i,j}} \tilde{X}_i$ é uma vizinhança afim de x , e portanto, $\bigcup_{Z_{s,t}} X_i$ é um esquema. \square

Do teorema anterior, poderíamos esperar alguma propriedade análoga a observação 3.2, mas o próximo exemplo mostra que isto não é sempre possível.

Exemplo 3.5. Suponha $Y = \mathbb{A}_k^2 = \text{Spec } k[x, y]$ e $X_1 = \text{Spec } k[x, y]/(x)$, $X_2 = \text{Spec } k[x, y]/(y)$ e $X_3 = \text{Spec } k[x, y]/(x - y)$. Nesse caso, todos os $Z'_{i,j}$ s são iguais a $\text{Spec } k = \text{Spec } k[x, y]/(x, y)$. Se colamos todos de uma vez, obtemos um esquema isomorfo a $\text{Spec } k[x, y, z]/(x, y) \cap (y, z) \cap (x, z)$ que não é isomorfo a $\text{Spec } k[x, y]/(x) \cap (y) \cap (x - y)$ já a dimensão do espaço tangente no ponto de interseção do primeiro é 1 e a dimensão no segundo é 2. Entretanto, se trocarmos os X_i 's por esquemas com pontos mergulhados, isto é, $X_1 = \text{Spec } k[x, y]/(x^2, xy)$, $X_2 = \text{Spec } k[x, y]/(y^2, xy)$ e $X_3 = \text{Spec } k[x, y]/((x - y)^2, x^2 - y^2)$ obtemos o esquema $\text{Spec } k[x, y]/(x) \cap (y) \cap (x - y)$.

Capítulo 4

Um esquema sem pontos fechados

Neste capítulo vamos dar duas construções de um esquema sem pontos fechados. Na primeira construção vamos utilizar os métodos de colagem estudados anteriormente e na outra vamos usar anéis de valorização. Em seguida, veremos que os dois esquemas obtidos serão os mesmos.

4.1 A Primeira Construção

Começamos esta seção com uma proposição.

Proposição 4.1. *Seja X um esquema quase-compacto. Então X tem um ponto fechado.*

Prova. Como X é quase-compacto, podemos tomar uma cobertura finita de X por abertos afins $U_i = \text{Spec } A_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Em $U_1 = \text{Spec } A_1$, tomamos um ponto P_1 fechado (basta escolher um ideal maximal de A_1). Se P_1 for fechado em X , nossa busca terminou. Caso contrário, o fecho de P_1 em X consiste então de P_1 e mais alguns pontos fora de U_1 . Portanto, temos um ponto P_2 fora de U_1 , digamos sem perda de generalidade $P_2 \in U_2$, tal que $P_2 \in \overline{\{P_1\}}$. Se P_2 não for um ponto fechado de U_2 , o fecho de P_2 , e portanto o de P_1 , contém pontos fechados de U_2 . Então podemos supor que P_2 é um ponto fechado de U_2 . Se ele for fechado em X , então acabamos. Caso contrário, o conjunto $\overline{\{P_1, P_2\}}$ deve conter pontos fora de U_1 e U_2 , digamos $P_3 \in U_3$. Pelo mesmo argumento que usamos para P_2 , podemos supor P_3

fechado em U_3 . Se P_3 for fechado em X , a prova está completa. Caso contrário, continuamos o processo que vínhamos fazendo. Como há apenas uma quantidade finita de U_i 's, este processo pára em algum momento e daí obtemos um ponto fechado em X . \square

Como todo esquema noetheriano é quase-afim, todo esquema noetheriano possui um ponto fechado. Isto nos impulsiona à procurar por anéis não noetherianos.

Sendo assim, sejam k um corpo algebricamente fechado e x_1, x_2, \dots indeterminadas sobre k . Considere os anéis:

$$A_n = k(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)[x_n]_{(x_n)}.$$

Em $k(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$, definimos a seguinte valorização em relação a x_n : cada elemento $t \in k(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$ pode ser escrito unicamente sob a forma $x_n^{\alpha_t} \frac{p_t}{q_t}$, onde $p_t, q_t \in k(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$. Daí fica bem definido o morfismo

$$\begin{aligned} v : K(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)^* &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ t &\longmapsto \alpha_t \end{aligned}$$

que, por sua vez, é facilmente reconhecido como uma valorização discreta em $k[x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots]$ com anel de valorização igual a $k(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)[x_n]_{(x_n)}$. Assim, A_n é um anel de valorização discreta e, portanto, $\text{Spec } A_n$ é um espaço com dois pontos, um ponto genérico $P_{n-1} = Z_{n,n-1} = \text{Spec } k(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$ e um ponto fechado $P_n = \text{Spec } k(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$.

Após os comentários acima, estamos prontos para começar a construção do nosso esquema.

Teorema 4.1. *Para $n = 1, 2, \dots$, seja $X_n = \text{Spec } A_n$. Então, o ponto fechado de X_n é identificado com o ponto genérico de X_{n+1} via $Z_{n-1,n}$. Além disso, fazendo todos os outros $Z_{i,j}$'s - $|i - j| = 2$ - serem o esquema vazio, temos que o espaço anelado $X = \bigcup_{Z_{i,j}} X_n$ é um esquema sem pontos fechados.*

Prova. O diagrama abaixo representa a colagem dos espaços em termos dos pontos $\{P_0, P_1, P_2, \dots\}$

$$\begin{array}{ccccccc} & & Z_{1,2} = \{P_1\} & & Z_{2,3} = \{P_2\} & & Z_{3,4} = \{P_1\} \\ & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow \\ X_1 = \{P_0, P_1\} & & & & X_2 = \{P_1, P_2\} & & & & & & X_3 = \{P_2, P_3\} & & & & & X_4 = \{P_3, P_4\} \dots \end{array}$$

Seja F um fechado de X contendo P_0 . Então, pelo lema 2.1, F corresponde a uma upla $(F_i)_{i \in I}$ com cada $F_i \subset X_i$ fechado, e as imagens inversas destes coincidem em cada $Z_{i,i-1}$. Mas como $P_0 \in F_1$ é aberto, temos $F_1 = \{P_0, P_1\}$ e portanto, F_2 deve conter P_1 . Mas este ponto é aberto de X_2 , e portanto, temos $P_2 \in F_2$ o que implica que $P_3 \in F_3$ e assim sucessivamente até encontrarmos $F_i = \{P_{i-1}, P_i\}$. Logo, $F = \{P_0, P_1, \dots\}$ e, portanto, $\overline{\{P_0\}} = \{P_0, P_1, P_2, \dots\}$. Analogamente, analisando os fechados que contem P_1 , obtemos $\overline{\{P_1\}} = \{P_1, P_2, P_3, \dots\}$ e continuando da mesma maneira obtemos

$$\overline{\{P_i\}} = \{P_i, P_{i+1}, P_{i+2}, \dots\}.$$

Sendo assim, X não contém nenhum ponto fechado. Resta provar que X é um esquema. Para isto, vamos mostrar que $Y_n = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ é uma cobertura de X por afins. Faremos isto por indução.

O caso inicial, $Y_1 = \{P_0, P_1\}$, é trivial já que $Y_1 = \text{Spec } A_1$. Sendo assim, suponha o resultado verdadeiro para um certo n . Se na proposição 2.1 tomarmos $X' = Y_n$, $X'' = X_{n+1}$ e objeto Z simplesmente igual a $Z_{n-1,n}$, já que todos os outros $Z_{i,j}$ são vazios, temos que $X' \cup_Z X'' = Y_{n+1}$. E como, por hipótese de indução, $X' = Y_n$ é afim e $Z_{n-1,n}$ é um fechado de Y_n , temos pelo teorema 3.1 que $Y_{n+1} = X' \cup_Z X''$ é afim. Logo, X é um esquema. \square

4.2 A segunda

Como já foi dito, aqui vamos construir o mesmo esquema sem pontos fechados só que agora usando anéis de valorização.

Seja

$$A' = k[x_1, x_2, x_3, \dots] \left[\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_1}{x_2^2}, \frac{x_1}{x_2^3}, \dots \right] \left[\frac{x_2}{x_3}, \frac{x_2}{x_3^2}, \frac{x_2}{x_3^3}, \dots \right] \dots$$

Em A' , chamamos de monômios qualquer produto finito dos geradores (os x_i/x_{i+1}^n). Sendo assim, o ideal maximal $M = (x_1, x_2, \dots)$ contém todos os monômios de A' e este continuam quando localizamos $A = A'_{(M)}$. Assim definido, A é o conjunto das seções globais do esquema X construído na sessão anterior e quando tomamos o spectrum de A obtemos uma cadeia infinita de pontos abertos e um ponto fechado (correspondente ao único ideal maximal de A). A idéia é remover este ponto e assim obter um esquema sem pontos fechados.

Começamos mostrando que A é um anel de valorização com valorização no grupo $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots$. A ordenação que usaremos em G será a ordem lexicográfica, isto é, $(n_1, n_2, \dots) > (n'_1, n'_2, \dots)$ se, e somente se, a primeira entrada não nula de $(n_1 - n'_1, n_2 - n'_2, \dots)$ for positiva.

Sendo assim, dado um elemento $g \in G$ chamamos de *termo líder* de g o valor da primeira entrada não nula de g e o denotamos por $lv(g)$. Ademais, denotamos por $li(g)$ o índice do termo líder de g e por g_i o valor da i -ésima entrada de g .

Vamos começar definindo a valorização v nos monômios de A (os mesmos de A' , como já observamos). Sendo assim, se $m \in A$ é um monômio, definimos

$$v(m) = (\text{grau de } x_1 \text{ em } m, \text{ grau de } x_2 \text{ em } m, \text{ grau de } x_3 \text{ em } m, \dots).$$

Por exemplo, $v\left(x_1 \frac{x_1}{x_2} \frac{x_2}{x_3}\right) = (2, -1, -1, 0, 0, 0, \dots)$. No próximo passo será provar uma série de resultados que mostram que A é como desejamos.

Proposição 4.2. *Para todo $g \in G$ tal que $g > (0, 0, 0, \dots)$ existe um único monômio mônico $x \in A$ tal que $v(x) = g$.*

Prova. A unicidade segue da própria definição de v . Seja $l = li(g)$ e $n_l = lv(g)$. Começamos resolvendo o caso em que $n_l = 1$ e $g_i \leq 0$ para $i > l$. Nesse caso, seja $t = \sum_{i>l} |g_i| < +\infty$ (só há uma quantidade finita de somandos). Então é fácil ver que o monômio

$$x = \frac{x_l}{x_{l+1}^t} \prod_{i>l} \frac{x_{l+1}^{|g_i|}}{x_i^{|g_i|}}$$

é mônico e satisfaz $v(x) = g$. Se $n_l = 1$ mas existem $i > l$ tais que $g_i > 0$, digamos $i \in I$, então podemos encontrar um monômio x tal que $v(x) = g'$, onde g' é um elemento de G tal que $g' = g$ exceto para $i \in I$ onde temos $g'_i = 0$. Sendo assim, basta multiplicar x por cada $x_i^{g_i^{(i)}}$, onde $i \in I$, e obtemos assim um monômio x' tal que $v(x') = g$. Finalmente, se $n_l > 1$ podemos encontrar um monômio x tal que $v(x) = g'$, onde g' é um elemento de G tal que $g' = g$ exceto em l onde $g'_l = 1$. Sendo assim, o monômio $x' = x_l^{n_l-1} x$ satisfaz $v(x') = g$. \square

Agora estamos quase prontos para provar que todo elemento de A é uma unidade vezes um monômio.

Lema 4.1. *Se m_1 e m_2 são monômios de A e se $v(m_1) > v(m_2)$ então m_2 divide m_1 .*

Prova. Pelas hipóteses, $v(m_1) - v(m_2) > 0$. Então, pela proposição anterior existe um monômio m_3 tal que $v(m_3) = v(m_1) - v(m_2)$, e portanto, $v(m_3m_2) = v(m_1)$. Daí, existe uma constante $\lambda \in k$ tal que $\lambda m_3m_2 = m_1$ e, portanto, m_2 divide m_1 . \square

Proposição 4.3. *Todo elemento de $f \in A$ que não é uma unidade (que é o mesmo de não ter termos constante) é o produto de uma unidade por um produto constante.*

Prova. Todo f da forma acima pode ser escrito como

$$f = \frac{\lambda_1 m_1 + \cdots + \lambda_n m_n}{h}$$

onde cada $\lambda_i \in K$, os monômios m_1, m_2, \dots, m_n satisfazem $v(m_1) > v(m_2) > \cdots > v(m_n)$ e h é um elemento de $A' - M$. Agora, pela proposição anterior, temos monômios $m'_i = \frac{m_i}{m_n} \in A' \subset A$. Portanto,

$$f = \frac{\lambda_1 m'_1 m_n + \lambda_2 m'_2 m_n \cdots + \lambda_n m'_n m_n}{h} = m_n \frac{\lambda_1 m'_1 + \lambda_2 m'_2 \cdots + \lambda_n}{h},$$

ou seja, f é o produto de um monômio por uma unidade como desejado. A unicidade desta representação segue do fato que quaisquer dois monômios não são associados, isto é, um não é o produto do outro por uma unidade. \square

Definida a valorização v nos monômios de A e provada a proposição acima, temos que A é o anel de valorização de v .

Além disso, da proposição acima podemos concluir que todo ideal de A é monomial. Vamos agora identificar os primos de A e usá-los para construir um esquema sem pontos fechados.

Teorema 4.2. *Com A como acima, $\text{Spec } A - M$ é um esquema sem pontos fechados.*

Prova. Seja $P \in \text{Spec } A$ e suponha $P \neq M$ e $P \neq (0)$. Se $m \in P$ é um monômio, então existem n e l naturais tais que $v(x_l^n) > v(m)$ e, portanto, pelo lema 4.1, temos que m divide x_l^n o que implica que $x_l^n \in P$, ou seja, $x_l \in P$, já que P é primo. Sendo assim, seja

$$L = \{l \in \mathbb{Z}_+^* \mid x_l \in P\}.$$

Dado $n \in \mathbb{Z}_+^*$, se existir $l \in L$ tal que $l > n$, então $v(x_n) > v(x_l)$ o que implica que v_l divide x_n e, portanto, $x_n \in M$. Mas daí, fazendo isso para todo $n \in \mathbb{Z}_+^*$, obtemos $P = (M)$, absurdo! Logo, L é limitado e tomamos $l = \max L$.

Agora, para cada monômio $m \in P$ temos que $li(m) \leq P$, pois caso contrário poderíamos escolher um l maior. Vamos provar que P deve conter todos os monômios $m \in A$ tais que $li(m) = l$. De fato, pela prova da proposição 4.2, basta provarmos o caso em que $lv(m) = v(m)_l = 1$ e $v(m)_i \leq l$ para $i > l$. Neste caso, podemos representar m com $\frac{x_l}{m'}$, onde $m' \in k[x_1, x_2, x_3, \dots]$ e $li(m') > l$. Daí, $\frac{x_l}{m'}m' = x_l \in P$ e, portanto, temos $\frac{x_l}{m'} \in P$ ou $m' \in P$, mas este último caso não deve ocorrer pois contradiria a maximalidade de l . Logo, $m \in P$.

Além disso, pelo lema 4.1, P automaticamente contém todos os monômios m tais que $v(m) > v(x_l)$, ou seja, todo monômio m de A tal que $li(m) < l$ e como todo ideal de A é monomial, isto determina P completamente como $P_l = \{x \in A \mid v(x) \leq l\}$.

Até agora provamos que se P é primo não nulo e não maximal, então P deve ser da forma acima. Mas para determinar os pontos de $\text{Spec } A$ precisamos mostrar de fato que um ideal da forma acima deve ser primo. Mas isso segue do fato que $A/P_l = A$, pois A/P_l é A sem as primeiras l variáveis (e os quocientes entre elas) e isto nos deixa com um anel isomorfo a A . Como A é domínio, cada P_l será primo.

Agora note que para $i > j$ P_i contém P_j e portanto o conjunto de primos de A satisfazem

$$(0) \subset P_1 \subset P_2 \subset P_3 \cdots \subset M.$$

Portanto, segue que A é um esquema sem pontos fechados. □

Na prova do teorema acima, vimos que os primos de $\text{Spec } A$ satisfazem

$$(0) \subset P_1 \subset P_2 \subset P_3 \cdots \subset M$$

e, portanto, temos que os abertos finitos de $\text{Spec } A - M$ são da forma $\{(0), P_1, \dots, P_n\}$. Mas isto é exatamente $\text{Spec } A_{(P_n)}$ que é isomorfo a Y_n , onde Y_n são os abertos afins do esquema obtido na primeira construção. Portanto, havendo uma correspondência entre os abertos finitos afins dos dois esquemas obtidos, temos que estes são isomorfos.

Referências Bibliográficas

- [1] Atiyah, M.F. e Macdonald, I.G. *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1969)
- [2] Eisenbud, David *Commutative algebra. With a view toward algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics, 150. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [3] Hartshorne, Robin *Algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.
- [4] Matsumura, Hideyuki *Commutative ring theory*. Translated from the Japanese by M. Reid. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 8. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [5] Schwede, Karl *Gluing schemes and a scheme without closed points*, Recent progress in arithmetic and algebraic geometry, 157–172, Contemp. Math., 386, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [6] Shafarevich, Igor R. *Basic algebraic geometry. 2. Schemes and complex manifolds*. Second edition. Translated from the 1988 Russian edition by Miles Reid. Springer-Verlag, Berlin, 1994.