UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO EM MATEMÁTICA

Luiz Antônio Caetano Monte

CRITÉRIOS DE IRRACIONALIDADE E O TEOREMA DE APÉRY.

Fortaleza
2009

Luiz Antônio Caetano Monte

CRITÉRIOS DE IRRACIONALIDADE E O TEOREMA DE APÉRY.

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes.

Fortaleza

2009

.

Monte, Luiz Antônio Caetano

M767c Critérios de Irracionalidade e o Teorema de Apéry.

Luiz Antônio Caetano Monte - Fortaleza: 2009.

Orientador: Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes.

1.Teoria dos Números.

CDD 512.7

A Deus e meus familiares.

Aos meus avós Luiz, Eliete e Benilza (in memorian).

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus que tornou tudo isso possível, por ter me sustentado nos momentos mais díficeis e me fez acreditar que tudo se pode naquele que nos fortalece, pois a honra e a glória é para Ele. Aos meus pais, José Arnaldo Souza Monte, Maria Neide Caetano Monte e minha irmã Patricia Caetano Monte que tanto me incentivaram.

Ao meu orientador, Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes, pela orientação, apoio e paciência.

Agradeço aos meus amigos Diego Marques que me coorientou, ajudou e incentivou como um irmão, Ana Paula, Clodomir Neto, Paulo Ítalo, Loester, Flávio (cantina), Paulo César, Cicero Fagner, Luisão, Carlos Henrique, Flávio França, Júnio Damião, Denise, Juliana, Cléber Tito e Cinthia, Paulo Ricardo, Nazareno, irmão Davi e Weslley, Jonathan, Edno e aos outros amigos, o meu muito obrigado.

Novamente ao Clodomir Neto, obrigado pelo trabalho e paciência para comigo no LaTeX.

Aos professores Robério Rogério, Romildo, Manoel Azevedo, Alexandre Fernandes, Gervásio Gurgel, Abdênago, Afonso, Angelo Papa, agradeço pelo incentivo que foi dado durante todo o período.

Ao CNPq pela ajuda financeira.

RESUMO

Nessa dissertação, mostraremos vários critérios de irracionalidade. Como aplicação de um desses critérios, provaremos que algumas funções teta falsa de Ramanujan, de Watson e as q-séries de Rogers-Ramanujan assumem valores irracionais em $\pm\frac{1}{q}$ onde $q \in \mathbb{Z}$ com $q \geqslant 2$. Para finalizar, provaremos a irracionalidade de Zeta de três $\zeta(3)$.

ABSTRACT

This dissertation, show several graunds of irrationality. As an application of these criteria, prove that some false theta functions of Ramanujan of Watson and q- series of Rogers-Ramanujan of take irrational values in $\pm\frac{1}{q}$ where $q \in \mathbb{Z}$ with $q \geqslant 2$. To end, prove the irrationality of zeta three $\zeta(3)$.

Sumário

Neste trabalho, estudaremos alguns critérios e resultados sobre irracionalidade. Dentre os primeiros, estabeleceremos condições para que um número real θ seja irracional a partir de uma aproximação racional. Uma delas é que devem existir infinitos $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tais que $0 < \left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$. Outro resultado, conhecido como Teorema de Hurwitz, mostra que θ é irracional se, e somente se, existem infinitos $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tais que $0 < \left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$. Mostraremos também que $\sqrt{5}$ é o maior número real t tal que

$$0 < \left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{tq^2}$$

Na teoria das frações contínuas, uma condição necessária e suficiente para que um número real seja irracional, é que sua fração contínua simples seja infinita. Em 1869, George Cantor deu uma condição necessária e suficiente para que a série

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_1 \dots a_n}$$

onde $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ com $a_n \geqslant 2$ e $0 \leqslant b_n \leqslant a_n - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, convirja para um irracional. Apresentaremos uma prova dada por Oppenheim para tal condição, representada da seguinte maneira:

Teorema Seja S uma série de Cantor. Suponha que para cada inteiro k positivo, existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $k | a_1 a_2 \dots a_n$. Então S é irracional se e somente se $b_m > 0$ e $b_n < a_n - 1$ para infinitos $m, n \in \mathbb{N}$.

Mais dois critérios de irracionalidade para S, são representados pelos seguintes Lemas

Lema Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seqüências de inteiros e S definida acima. Suponha que $a_n \geqslant 2$ e $0 \leqslant b_n \leqslant a_n - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $b_n > 0$ para infinitos $n \in \mathbb{N}$ e existe uma subseqüência $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\dfrac{b_{i_n}}{a_{i_n}} \to 0$ e $a_{i_n} \to \infty$ quando $n \to \infty$, então S é irracional.

Esse resultado foi extendido em 1955, num trabalho de Oppenheim, para o caso em que os $b_n's$ podem ser negativos, originando o seguinte lema.

Lema Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seqüências de inteiros e S definidas acima. Suponha que $a_n \geqslant 2$ e $|b_n| \leqslant a_n - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se para todo $i \in \mathbb{N}$ existirem $m, n > i$ tais que $b_m \cdot b_n < 0$ e existir uma subseqüência $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\dfrac{b_{i_n}}{a_{i_n}} \to 0$ e $a_{i_n} \to \infty$ quando $n \to \infty$, então S é irracional.

Como consequência desses lemas, apresentaremos a prova de que as funções teta falsa de Ramanujan de ordem 3 e algumas de ordem 5, as funções teta falsa de Watson de ordem 3 e as q-séries de Rogers-Ramanujan aplicadas aos valores $\pm\dfrac{1}{q}$ onde $q \in \mathbb{Z}$ com $q \geqslant 2$ assumem valores irracionais, estes resultados foram obtidos em 2007 por Angelo B. Mingarelli. Porém, esses resultados falham para mostrar a irracionalidade de outras funções teta falsa de ordem 5 e de ordem superior, para mais detalhes, veja em [2].

Euler provou que a função Zeta $\zeta(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ aplicada aos inteiros negativos assume valores racionais onde $\zeta(-2m) = 0$ e $\zeta(1-2m) = \dfrac{(-1)^m B_{2m}}{2m}$ com $B_{2m} \in \mathbb{Q}$ números de Bernoulli e $\zeta(0) = -\dfrac{1}{2}$ com $m \in \mathbb{N}$. Para os números pares positivos ,a função Zeta assume valores irracionais, já que $\zeta(2m) = \dfrac{2^{2m-1}\pi^{2m}B_{2m}}{(2m)!}$ é um multíplo racional de π^{2m} que é irracional, pois é transcendente pelo Teorema de Linderman, para mais detalhes veja [5] e [14]. No entanto, nada se sabia sobre a irracionalidade da função Zeta aplicada aos números ímpares maiores ou iguais a três. Em junho de 1978 na cidade de Marseille-Luminy, R. Apéry surpreendeu sua platéia com a prova da irracionalidade de $\zeta(3)$. Apresentaremos uma prova da irracionalidade de $\zeta(2)$ e $\zeta(3)$ dada por F.Beukers utilizando integrais duplas e triplas. Atu almente os melhores avanços sobre este assunto estão nos trabalhos de T. Rivoal em 2000, na qual infinitos $\zeta(2m+1)$ onde $m \in \mathbb{Z}$ com $m \geqslant 2$ assumem valores irracionais e de W. Zudilin em 2001, na qual temos que pelo menos um dos números $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9)\,\mathrm{e}\,\zeta(11)$ é irracional, para mais detalhes, veja em [12] e [17].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, daremos ênfase as ferramentas necessárias para o desenvolvimento do nosso trabalho que é estabelecer condições para que um número seja irracional. Também dentro desta seção, provaremos a irracionalidade de alguns números.

1.1 Teorema dos Números Primos

Dados $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ então

$$\begin{aligned} a_1 &= p_1^{\alpha_{11}} p_2^{\alpha_{12}} \ldots p_m^{\alpha_{1m}} \\ a_2 &= p_1^{\alpha_{21}} p_2^{\alpha_{22}} \ldots p_m^{\alpha_{2m}} \\ &\vdots \\ a_n &= p_1^{\alpha_{n1}} p_2^{\alpha_{n2}} \ldots p_m^{\alpha_{nm}} \end{aligned}$$

onde $\alpha_{ij} \geqslant 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$.

O mínimo múltiplo comum é dado por

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] = p_1^{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\alpha_{i1}\}} p_2^{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\alpha_{i2}\}} \ldots p_m^{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\alpha_{im}\}}$$

Vamos definir

$$d_n = [1, 2, \ldots, n] \tag{1.1}$$

o mínimo múltiplo comum entre $1, 2, \ldots, n$.

Teorema 1.1.1 *(Teorema dos Números Primos). Seja $\pi(x)$ o número de primos que não excede o número real x. Então*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

ou seja, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\pi(x)}{(x/logx)} = 1$, *onde* $\log x = \log_e^x$.

Demonstração

Veja [13].

$\square$

Lema 1.1.1 *Existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ com $n \in \mathbb{N}$, tem-se $d_n < 3^n$.*

Demonstração

Temos que

$$d_n = \prod_{j=1}^{m} p_j^{\gamma_j}, \text{ onde } \gamma_j = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\alpha_{ij}\}$$

Veja que $p_j^{\gamma_j} \leqslant n$. Assim

$$d_n < \prod_{j=1}^{m} n \Rightarrow d_n < n^m \tag{1.2}$$

onde $m = \pi(n)$, isto é, o número de primos menores ou iguais a n. Pelo Teorema 1.1.1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)\log n}{n} = 1$$

Como $\log_3^n < \log n$ para todo $n \geqslant 3$, segue-se que

$$\frac{\pi(n)\log_3^n}{n} < \frac{\pi(n)\log n}{n}, \forall\, n \geqslant 3$$

Fazendo $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)\log_3^n}{n} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)\log n}{n} \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)\log_3^n}{n} \leqslant 1$$

ou seja, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\pi(n)\log_3^n}{n} \leqslant 1, \forall\, n > n_0$$

o que implica

$$\log_3^{n^{\pi(n)}} \leqslant n \Rightarrow n^{\pi(n)} \leqslant 3^n, \forall\, n > n_0$$

e junto com (1.2) temos que $d_n < 3^n$ para n suficientemente grande.

$\square$

O lema 1.1.1 será utilizado para demonstração da irracionalidade dos números Zeta de dois e Zeta de três, para mais detalhes desta seção veja [8], p.21.

1.2 Função Maior Inteiro

Definição 1.2.1 *Para x real, o símbolo $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a x.*

Teorema 1.2.1 *Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Então temos:*

(1) $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$, $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$, $0 \leqslant x - \lfloor x \rfloor < 1$

(2) $\lfloor x + m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$ *se* $m \in \mathbb{Z}$

(3) $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$

(4) $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ *é parte fracionária de* x

Demonstração

Veja [8], p.100.

$\square$

Lema 1.2.1 *Seja* $N \in \mathbb{Z}$ *e* p *um primo, então*

$$\left\lfloor \frac{N}{p^j} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N-1}{p^j} \right\rfloor = \begin{cases} 1, & se \quad p^j | N \\ 0, & se \quad p^j \nmid N \end{cases}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$.

Demonstração

1º **caso**: $p^j | N$

Assim $N = kp^j$ com $k \in \mathbb{Z}$, logo $\left\lfloor \dfrac{N}{p^j} \right\rfloor = \lfloor k \rfloor = k$. Além de que

$\left\lfloor \dfrac{N-1}{p^j} \right\rfloor = \left\lfloor k - \dfrac{1}{p^j} \right\rfloor = k - 1$, pois $k - 1 < k - \dfrac{1}{p^j} < k$ para $j \geqslant 1$.

Daí

$$\left\lfloor \frac{N}{p^j} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N-1}{p^j} \right\rfloor = k - (k-1) = 1$$

2º **caso**: $p^j \nmid N$

Pelo Algoritmo da Divisão, $N = p^j r + s$ onde $0 < s < p^j$, assim $\dfrac{s}{p^j} < 1$. Portanto

$$\left\lfloor \frac{N}{p^j} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{p^j r + s}{p^j} \right\rfloor = \left\lfloor r + \frac{s}{p^j} \right\rfloor = r, \text{ pois } r < r + \frac{s}{p^j} < r + 1.$$

$$\left\lfloor \frac{N-1}{p^j} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{p^j r + s - 1}{p^j} \right\rfloor = \left\lfloor r + \frac{s-1}{p^j} \right\rfloor = r, \text{ pois } r \leqslant r + \frac{s-1}{p^j} < r + 1.$$

Logo

$$\left\lfloor \frac{N}{p^j} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{N-1}{p^j} \right\rfloor = r - r = 0$$

□

Definição 1.2.2 *A valorização p-ádica é definida por* $v_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *onde*

$$v_p(N) = m\acute{a}x\{k \in \mathbb{N};\, p^k | N\} \;\; e \;\; v_p(0) = \infty$$

onde p *primo e* $N \in \mathbb{Z}$.

Além do mais, para $a, b \in \mathbb{Z}$ temos que $v_p(a \cdot b) = v_p(a) + v_p(b)$ e se $b \neq 0$ então $v_p\left(\frac{a}{b}\right) = v_p(a) - v_p(b)$.

Lema 1.2.2 *Temos que* $v_p(N!) = \sum_{j \geqslant 1} \left\lfloor \frac{N}{p^j} \right\rfloor$ *onde* $N \in \mathbb{Z}$.

Demonstração

Mostraremos por indução sobre N:

Para $N = 1$ temos:

$$\left\lfloor \frac{1}{p^j} \right\rfloor = 0, \text{ pois } 0 < \frac{1}{p^j} < 1 \Rightarrow \sum_{j \geqslant 1} \left\lfloor \frac{1}{p^j} \right\rfloor = 0$$

Mas

$$p^{v_p(1!)} | 1! \Rightarrow v_p(1!) = 0$$

Portanto, $v_p(1!) = \sum_{j \geqslant 1} \left\lfloor \frac{1}{p^j} \right\rfloor$.

Suponha que seja verdade para $N = k - 1$, ou seja

$$v_p((k-1)!) = \sum_{j \geqslant 1} \left\lfloor \frac{k-1}{p^j} \right\rfloor$$

Queremos mostrar que vale para $N = k$. Como $p^j | k$ para $1 \leqslant j \leqslant i$ e $p^j \nmid k$ para $i < j$, temos pelo Lema 1.2.1 respectivamrnte que

$$\left\lfloor \frac{k}{p^j} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k-1}{p^j} \right\rfloor = 1$$

e

$$\left\lfloor \frac{k}{p^j} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k-1}{p^j} \right\rfloor = 0$$

onde $i = v_p(k)$. Assim

$$\begin{aligned}
\sum_{j \geqslant 1} \left\lfloor \frac{k}{p^j} \right\rfloor &= \sum_{j=1}^{i} \left\lfloor \frac{k}{p^j} \right\rfloor + \sum_{j \geqslant i+1} \left\lfloor \frac{k}{p^j} \right\rfloor \\
&= \sum_{j=1}^{i} \left(\left\lfloor \frac{k-1}{p^j} \right\rfloor + 1 \right) + \sum_{j \geqslant i+1} \left\lfloor \frac{k-1}{p^j} \right\rfloor \\
&= \sum_{j \geqslant 1} \left\lfloor \frac{k-1}{p^j} \right\rfloor + \sum_{j=1}^{i} 1
\end{aligned}$$

Pela hipótese de indução temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j \geqslant 1} \left\lfloor \frac{k}{p^j} \right\rfloor &= v_p((k-1)!) + i \\
&= v_p((k-1)!) + v_p(k) \\
&= v_p((k-1)!k) \\
&= v_p(k!)
\end{aligned}$$

□

Definição 1.2.3 *Para $x \in \mathbb{R}$, o símbolo $\lceil x \rceil$ denota o menor inteiro maior ou igual a x, onde*

$$\lceil x \rceil - 1 < x \leqslant \lceil x \rceil$$

Para mais detalhes sobre valorização p-ádica veja em [10], p.14.

1.3 Critérios de Convergência Uniforme

Definição 1.3.1 *Uma seqüência de funções $f_n : D \to \mathbb{C}$ converge uniformemente para uma função $f : D \to \mathbb{C}$ quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (dependendo apenas de ε) tal que*

$$\forall\, n > n_0 \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon,\ \forall\, z \in D \subseteq \mathbb{C}$$

Definição 1.3.2 *A série $\sum f_n$ converge uniformemente em D se, dado $\varepsilon > 0$ então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant N$*

$$|S_n(z) - S(z)| < \varepsilon,\ \forall\, z \in D$$

onde $S_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \ldots + f_n(z)$ é a reduzida de ordem n da série $S(z) = \sum f_n$. Em outras palavras

$$\lim_{n\to\infty} S_n(z) = S(z),\ \forall\, z \in D$$

Teorema 1.3.1 *Se uma seqüência de funções integráveis $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, então f é integrável e*

$$\int_a^b (\lim f_n(x))\, dx = \lim \left(\int_a^b f_n(x) dx \right)$$

Demonstração

Veja [3].

□

Corolário 1.3.1 *Seja $\sum f_n$ uma série uniformemente convergente de funções integráveis $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, então a série é integrável e temos que*

$$\int_a^b \left(\sum_n f_n \right) = \sum_n \left(\int_a^b f_n \right)$$

Em outras palavras é permitido integrar termo a termo uma série uniformemente convergente.

Demonstração

Veja [3].

□

Teorema 1.3.2 *Uma condição necessária e suficiente para que a série $\sum f_n$ convirja uniformemente em D,onde $f_n : D \to \mathbb{C}$, é que, dado $\varepsilon > 0$, então é possível determinar $N \in \mathbb{N}$ tal que $|S_{n+p}(z) - S_n(z)| \leqslant \varepsilon$ para todo $n \geqslant N$, onde p é arbitrário e $z \in D$.*

Demonstração

Veja [3].

□

Teorema 1.3.3 *Seja $\sum M_n$ uma série convergente e $(f_n(z))$ uma seqüência de funções definidas num conjunto D, satisfazendo a condição $|f_n(z)| \leqslant M_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $z \in D$, então a série $\sum f_n(z)$ converge uniformemente em D.*

Demonstração

Veja [3].

□

Teorema 1.3.4 *Seja a um ponto de acumulação de* $X \subseteq \mathbb{R}$. *Se a seqüência* $f_n : X \to \mathbb{R}$ *converge uniformemente para* $f : X \to \mathbb{R}$ *e para cada* $n \in \mathbb{N}$ *existe* $\lim_{x\to a} f_n(x)$, *então*

$$\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{x\to a} f_n(x)\right] = \lim_{x\to a}\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right]$$

Demonstração

Veja [3].

□

Corolário 1.3.2 *Seja a um ponto de acumulação de* X. *Se a série* $\sum f_n$ *converge uniformemente para* f *em* X *e para cada* $n \in \mathbb{N}$ *existe* $\lim_{x\to a} f_n(x)$, *então*

$$\lim_{x\to a}\left(\sum_n f_n(x)\right) = \sum_n \left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right)$$

Demonstração

Veja [3].

□

Corolário 1.3.3 *Uma série convergente de funções contínuas não-negativas num conjunto compacto é uniformemente convergente se, e somente se, a soma é uma função contínua no compacto.*

Demonstração

Veja [3].

□

Corolário 1.3.4 *Seja $f_n : X \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções contínuas tal que para todo $x \in X$ temos que $\sum_n |f_n(x)| = f(x)$ onde $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua, então a série $\sum f_n$ converge uniformemente em X. (Supondo ainda X compacto).*

Demonstração

Veja [3].

$\square$

Teorema 1.3.5 *Seja $a_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A série $\sum a_n$ converge se, e somente se, as reduzidas $S_n = a_1 + \ldots + a_n$ formam uma seqüência limitada, isto é, se e somente se, existe $k > 0$ tal que $a_1 + \ldots + a_n < k$ para todo $n \in \mathbb{N}$*

Demonstração

Veja [3].

$\square$

1.4 Princípio da Boa Ordenação

Uma das mais importantes propriedades da relação de ordem $m < n$ entre os números naturais é dado pelo Lema:

Lema 1.4.1 *(Princípio da Boa Ordenação) Todo subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ não-vazio possui um elemento mínimo, isto é, um elemento $n_0 \in A$ tal que $n_0 \leqslant n$ para todo $n \in A$.*

Demonstração

Veja [3].

$\square$

Lema 1.4.2 *Não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < n < 1$.*

Demonstração

Suponha que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < n < 1$. Considere

$$A = \{m \in \mathbb{N};\, 0 < m < 1\}$$

Como $n \in A$, isso implica que $A \neq \emptyset$ e sendo $A \subset \mathbb{N}$, pelo Lema 1.4.1, A possui um elemento mínimo m_0. Logo

$$0 < m_0 < 1$$

Multiplicando a desigualdade por m_0, obtemos

$$0 < m_0^2 < m_0 \Rightarrow 0 < m_0^2 < m_0 < 1$$

Assim $m_0^2 \in A$, já que $m_0^2 \in \mathbb{N}$. Absurdo, pois $m_0^2 < m_0$ e m_0 é elemento mínimo.

$\square$

1.5 Multiplicador de Lagrange

Teorema 1.5.1 *(Multiplicador de Lagrange) Seja $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^k $(k \geqslant 1)$ no aberto U, e $M = \varphi^{-1}(c)$ uma hiperfície contida em U que é imagem inversa de um valor regular $c \in \mathbb{R}$ por uma função $\varphi : U \to \mathbb{R}$ de classe C^k. Um ponto $p \in M$ é ponto crítico de $f_{|M}$ se, e somente se, existe um número real λ tal que*

$$grad\, f(p) = \lambda\, grad\, \varphi(p)$$

A pesquisa dos pontos críticos de $f_{|M}$ reduz-se a resolver o sistema de $n+2$ equações

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}(p),\ i = 1, 2, \ldots, n+1 \\ \varphi(p) = c \end{cases}$$

com $n+2$ incógnitas $\lambda, x_1, \ldots, x_{n+1}$, onde $p = (x_1, \ldots, x_{n+1})$.

Demonstração

Veja em [4].

1.6 Prova da irracionalidade de alguns números

Nesta seção, mostraremos a irracionalidade de alguns números como motivação para o nosso trabalho.

1.6.1 Irracionalidade de $\sqrt{2}$

São conhecidas várias formas de provar que $\sqrt{2}$ é irracional. Vamos fazer uma demonstração via construção de uma seqüência de polinômios $P_n(z)$, que produzirão inteiros não-nulos avaliados em $z = \sqrt{2}$. Para isso considere as seqüências de inteiros (a_n) e (b_n) definidas da seguinte forma

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2},\ \forall n \geqslant 2$$

e

$$b_0 = 1, b_1 = 1, b_n = 2b_{n-1} + b_{n-2},\ \forall n \geqslant 2$$

Definimos $P_n(z) = a_n^2 z^2 - b_n^2$. Observe que $P_n(\sqrt{2}) = 2a_n^2 - b_n^2$ é inteiro.

Afirmação 1.1 *Para todo $n \geqslant 0$, temos que $P_n(\sqrt{2}) \neq 0$.*

Demonstração

Mostraremos por indução que $2a_n^2 - b_n^2 = (-1)^{n+1}$ e $2a_{n-1}a_n - b_{n-1}b_n = (-1)^n$. Para $n = 0$, temos $2a_0^2 - b_0^2 = 2.0^2 - 1^2 = (-1)^{0+1}$. Além de que para $n = 1$, temos $2a_1^2 - b_1^2 = 2.1^2 - 1^2 = 1 = (-1)^{1+1}$ e $2a_0a_1 - b_0b_1 = -1 = (-1)^1$.

Suponhamos que o resultado seja valído para $n \leqslant k$, isto é

$$2a_k^2 - b_k^2 = (-1)^{k+1} \text{ e } 2a_{k-1}a_k - b_{k-1}b_k = (-1)^k$$

Então vamos mostrar a validade para $n = k + 1$. Para tanto, veja que

$$\begin{aligned} 2a_{k+1}^2 - b_{k+1}^2 &= 2\left(2a_k + a_{k-1}\right)^2 - \left(2b_k + b_{k-1}\right)^2 \\ &= 2\left(4a_k^2 + 4a_ka_{k-1} + a_{k-1}^2\right) - \left(4b_k^2 + 4b_kb_{k-1} + b_{k-1}^2\right) \\ &= 4\left(2a_k^2 - b_k^2\right) + 4\left(2a_ka_{k-1} - b_kb_{k-1}\right) + 2a_{k-1}^2 - b_{k-1}^2 \\ &= 4(-1)^{k+1} + 4(-1)^k + (-1)^{(k-1)+1} = (-1)^k = (-1)^{(k+1)+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2a_ka_{k+1} - b_kb_{k+1} &= 2a_k\left(2a_k + a_{k-1}\right) - b_k\left(2b_k + b_{k-1}\right) \\ &= 2\left(2a_k^2 - b_k^2\right) + 2a_ka_{k-1} - b_kb_{k-1} \\ &= 2(-1)^{k+1} + (-1)^k = (-1)^k(-2+1) = (-1)^{k+1} \end{aligned}$$

Portanto, $2a_n^2 - b_n^2 = (-1)^{n+1}$ e $2a_{n-1}a_n - b_{n-1}b_n = (-1)^n$. Como

$$P_n(\sqrt{2}) = 2a_n^2 - b_n^2 \text{ temos } P_n(\sqrt{2}) \neq 0, \ \forall n \geqslant 0$$

Logo, estabelecemos a afirmação.

Em particular, para todo $n \geqslant 1$, $\left|P_n(\sqrt{2})\right| = 1$. Suponha que $\sqrt{2}$ é racional, assim $\sqrt{2} = \dfrac{r}{s}$ com $r, s \in \mathbb{N}$. Temos então

$$\begin{aligned} 1 = \left|P_n(\sqrt{2})\right| &= \left|\left(a_n\sqrt{2} - b_n\right)\left(a_n\sqrt{2} + b_n\right)\right| \\ &= \left|\left(a_n\frac{r}{s} - b_n\right)\left(a_n\frac{r}{s} + b_n\right)\right| \\ &= |a_n r - b_n s| \cdot \frac{a_n r + b_n s}{s^2}; \forall n \end{aligned} \tag{1.3}$$

É claro que $a_n r - b_n s$ é inteiro não-nulo e por (1.3), temos

$$0 < |a_n r - b_n s| = \frac{s^2}{a_n r + b_n s}$$

As seqüências (a_n) e (b_n) são estritamente crescentes e, dessa forma $(a_n r + b_n s)$ é estritamente crescente, pois $r, s > 0$. Daí, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$s^2 < a_{n_0} r + b_{n_0} s$$

logo

$$0 < |a_{n_0} r - b_{n_0} s| = \frac{s^2}{a_{n_0} r + b_{n_0} s} < 1$$

Contradição, já que $|a_{n_0} r - b_{n_0} s| \in \mathbb{Z}$. Logo, $\sqrt{2}$ é irracional.
Veja em [10], p.4 que $\sqrt{d}$ é irracional onde $d \in \mathbb{N}$ tal que não é raiz de nenhum inteiro.

1.6.2 Irracionalidade de $e, e^2, e^{\sqrt{2}}, e^4, e^{\sqrt{3}}$

Irracionalidade de e

A série da função exponencial e^x é dada da seguinte forma:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Daí $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

$$e - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \tag{1.4}$$

onde $N \in \mathbb{N}$.

Multiplicando ambos os membros de (1.4) por $N!$, obtemos:

$$N!e - \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{N!}{n!}$$

Assim

$$N!e - \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N!}{(N+k)!} \tag{1.5}$$

Veja que

$$\frac{(N+k)!}{N!k!} = \frac{N+k}{k} \cdot \frac{N+k-1}{k-1} \cdots \frac{N+2}{2} \cdot \frac{N+1}{1}$$

Como $N + k \geqslant k$ para todo $k \geqslant 0$, temos

$$\frac{(N+K)!}{N!k!} \geqslant \frac{k}{k} \cdot \frac{k-1}{k-1} \cdots \frac{2}{2} \cdot N+1 \Rightarrow$$

$$\frac{(N+K)!}{N!k!} \geqslant N+1 \Rightarrow$$

$$\frac{N!}{(N+k)!} \leqslant \frac{1}{k!(N+1)}$$

Logo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{N!}{(N+k)!} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!(N+1)} = \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{e-1}{N+1}$$

Por (1.5) obtemos a seguinte desigualdade:

$$N!e - \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!} \leqslant \frac{e-1}{N+1}$$

A série em (1.5) é uma soma de termos positivos, logo $N!e - \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!}$ é positivo, daí

$$0 < N!e - \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!} \leqslant \frac{e-1}{N+1}$$

Suponha e racional, assim $e = \frac{p}{q}$ com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$, portanto

$$0 < N!\frac{p}{q} - \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!} \leqslant \frac{e-1}{N+1}$$

$$0 < N!p - q\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!} \leqslant \frac{q(e-1)}{N+1} \tag{1.6}$$

Temos que $\frac{q(e-1)}{N+1} \to 0$ quando $N \to \infty$, isto é, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{q(e-1)}{N+1} < 1$ para todo $N > N_0$, assim

$$0 < N!p - q\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!} < 1, \forall\, N > N_0$$

Absurdo, haja vista que $N!p - q\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!} \in \mathbb{N}$. Portanto, e é irracional.

Irracionalidade de e^2

Vamos mostrar que e é não quadrático, ou seja, que não é raiz de uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a, b,$ e c são inteiros, com $a \neq 0$.

Se $ae^2+be+c = 0$ onde $a, b,$ e c são inteiros com $a \neq 0$, temos $ae+b+ce^{-1} = 0$. Pelas séries de e e e^{-1}, segue-se que:

$$a\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + b + c\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 0 \tag{1.7}$$

Reescrevendo (1.7), obtemos

$$b+\sum_{n=0}^{N}\frac{(a+(-1)^n c)}{n!}=-\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{(a+(-1)^n c)}{n!} \tag{1.8}$$

Multiplicando (1.8) por $N!$ e tomando $n = N+1+k$ no 2º membro, temos que

$$bN!+\sum_{n=0}^{N}(a+(-1)^n c)\,\frac{N!}{n!}=-\sum_{k=0}^{\infty}\left(a+(-1)^{N+1+k}c\right)\frac{N!}{(N+1+k)!} \tag{1.9}$$

temos também

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|(a+(-1)^{N+1+k}c)\frac{N!}{(N+1+k)!}\right| \leqslant (|a|+|c|)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=(|a|+|c|)e$$

Pelo Teorema 1.3.3, a série em (1.9) converge uniformemente. Logo pelo Corolário 1.3.2, temos

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(a+(-1)^{N+1+k}c\right)\frac{N!}{(N+1+k)!}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\lim_{N\to\infty}\left(\left(a+(-1)^{N+1+k}c\right)\frac{N!}{(N+1+k)!}\right)$$

já que

$$\lim_{N\to\infty}\left(a+(-1)^{N+1+k}c\right)\frac{N!}{(N+1+k)!}=0$$

concluímos então que a série em (1.9) converge para 0 quando N tende para o infinito.

Vamos escrevê-la do seguinte modo:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(a+(-1)^{N+1+k}c\right)\frac{N!}{(N+1+k)!}=A_N+B_N+C_N$$

onde

$$\begin{aligned} A_N &= \left(a + (-1)^{N+1}c\right) \frac{1}{N+1} \\ B_N &= \left(a + (-1)^{N+2}c\right) \frac{1}{(N+1)(N+2)} \\ C_N &= \sum_{k=2}^{\infty} \left(a + (-1)^{N+1+k}c\right) \frac{N!}{(N+1+k)!} \end{aligned}$$

Como $A_N + B_N + C_N$ converge para 0 quando N tende para o infinito e como

$$A_N + B_N + C_N = bN! + \sum_{n=0}^{N} (a + (-1)^n c) \frac{N!}{n!} \in \mathbb{Z},$$

existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $A_N + B_N + C_N = 0$ para todo $N > N_0$.

Considere $A_N, (N+1)B_N$ e $(N+1)(N+2)C_N$, note que as sequências convergem para 0. Observe que

$$\begin{aligned} (N+1)(N+2)C_N &= -(N+1)(N+2)A_N - (N+1)(N+2)B_N \\ &= -(N+2)\left(a - (-1)^N c\right) - \left(a + (-1)^N c\right) \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

assim

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ tal que } (N+1)(N+2)C_N = 0, \forall N > N_1$$

Como $(N+1)(N+2) \neq 0$ então $C_N = 0$ para todo $N > N_1$. Daí,

$$\begin{gathered} A_N + B_N = 0,\ \forall N > N_1 \text{ e} \\ (N+1)B_N = -(N+1)A_N = -\left(a - (-1)^N c\right) \in \mathbb{Z}, \forall N > N_1 \end{gathered}$$

logo

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \text{ tal que } (N+1)B_N = 0, \forall N > N_2.$$

Como $(N+1) \neq 0$, $B_N = 0$ para $N > N_2$, desse modo, $A_N = 0, \forall N > N_2$.

Considere $m = máx\{N_0, N_1, N_2\}$, então

$$A_N = B_N = C_N = 0, \; \forall \, N > m$$

ou seja, $\big(a - (-1)^N c\big) = 0$ e $a + (-1)^N c = 0$, e daí $a = c = 0$. Absurdo pois $a \neq 0$, logo e é não quadrático.

Suponha que $e^2 = \dfrac{a}{b}$ onde $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{N}$. Assim $be^2 - a = 0$, como e é não quadrático temos que $a = b = 0$. Absurdo, pois $b \neq 0$ e portanto e^2 é irracional.

Observação 1.6.1 *Vimos que $e \notin \mathbb{Q}$, então para cada inteiro $m \geqslant 1$, $e^{\frac{1}{m}}$ é irracional. Suponha que*

$$e^{\frac{1}{m}} \in \mathbb{Q} \Rightarrow (e^{\frac{1}{m}})^m \in \mathbb{Q} \Rightarrow e \in \mathbb{Q}$$

Absurdo!

Irracionalidade de $e^{\sqrt{2}}$

Considere $\theta = e^{\sqrt{2}} + e^{-\sqrt{2}}$. Vamos provar que θ é irracional.

Temos que $e^{\sqrt{2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2^{\frac{1}{2}})^n}{n!}$ e $e^{-\sqrt{2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2^{\frac{1}{2}})^n}{n!}$ o que resulta:

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2^{\frac{n}{2}})}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2^{\frac{n}{2}})(-1)^n}{n!}$$

Fazendo $n = 2m$ com $m = 0, 1, 2, \ldots$, obtemos:

$$\theta = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m}{(2m)!} \tag{1.10}$$

Reescrevendo (1.10) temos:

$$\theta - 2 \sum_{m=0}^{N} \frac{2^m}{(2m)!} = 2 \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{2^m}{(2m)!} \tag{1.11}$$

Multiplicando (1.11) por $\dfrac{(2N)!}{2^N}$ deduzimos:

$$\frac{(2N)!}{2^N}\theta - 2\sum_{m=0}^{N}\frac{(2N)!}{2^{N-m}(2m)!} = 2\sum_{m=N+1}^{\infty}\frac{(2N)!}{2^{N-m}(2m)!} \tag{1.12}$$

Fazendo $m = N + k + 1$ no segundo menbro (1.12) temos

$$\begin{aligned}\frac{(2N)!}{2^N}\theta - 2\sum_{m=0}^{N}\frac{(2N)!}{2^{N-m}(2m)!} &= 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2N)!}{(2N+2k+2)!}2^{k+1}\\ &= 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2N)!2^k}{(2N+2k+2)!} \qquad (1.13)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{(2N)!}{(2N+2k+2)!} &= \frac{(2N)!}{(2N+2k+2)(2N+2k+1)\ldots(2N+1)(2N)!}\\ &= \frac{1}{(2N+2k+2)(2N+2k+1)\ldots(2N+1)}\end{aligned}$$

Para todo inteiro $k \geqslant 0$, temos que

$$\begin{aligned}2N+2 \leqslant 2N+2k+2 &\Rightarrow \frac{1}{2N+2k+2} \leqslant \frac{1}{2N+2}\\ 2k+1 \leqslant 2N+2k+1 &\Rightarrow \frac{1}{2N+2k+1} \leqslant \frac{1}{2k+1}\\ 2k \leqslant 2N+2k &\Rightarrow \frac{1}{2N+2k} \leqslant \frac{1}{2k}\\ &\vdots\\ 1 \leqslant 2N+1 &\Rightarrow \frac{1}{2N+1} \leqslant 1\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}\frac{(2N)!}{(2N+2k+2)!} &\leqslant \frac{1}{(2N+2)}\frac{1}{2k+1}\cdots\frac{1}{1} = \frac{1}{(2N+2)(2k+1)!}\\ &\leqslant \frac{1}{(2N+2)k!}\end{aligned}$$

Em (1.13) temos uma série de termos positivos, daí

$$
\begin{aligned}
0 < \frac{(2N)!}{2^N}\theta - 2\sum_{m=0}^{N}\frac{(2N)!}{2^{N-m}(2m)!} &= 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2N)!2^k}{(2N+2k+2)!}\\
&= 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2N)!2^k}{(2N+2k+2)!}\\
&\leqslant 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{(2N+2)(2k+1)!}\\
&= \frac{2}{N+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{(2k+1)!}\\
&< \frac{2}{N+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{k!}\\
&= \frac{2}{N+1}e^2
\end{aligned}
$$

Suponha θ racional, assim $\theta = \dfrac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$. Por conseguinte

$$
0 < \frac{(2N)!}{2^N}\frac{p}{q} - 2\sum_{m=0}^{N}\frac{(2N)!}{2^{N-m}(2m)!} < \frac{2e^2}{N+1}
$$
$$
0 < \frac{(2N)!}{2^N}p - 2q\sum_{m=0}^{N}\frac{(2N)!}{2^{N-m}(2m)!} < \frac{2qe^2}{N+1}
$$

O termo $\dfrac{(2N)!}{2^{N-m}(2m)!}$ é inteiro, pois

$$
\begin{aligned}
\frac{(2N)!}{2^{N-m}(2m)!} &= \frac{(2N)(2N-1)\dots(2m+1)(2m)!}{2^{N-m}(2m)!}\\
&= \frac{(2N)(2N-1)\dots(2N-(2N-2m-1))}{2^{N-m}}
\end{aligned}
$$

sendo o produto $(2N)(2N-1)\dots(2N-(2N-2m-1))$ formado por $(N-m)$ números pares, haja vista que é um produto de $(2N-2m)$ inteiros consecutivos. Assim,

$$(2N)(2N-1)\dots(2N-(2N-2m-1)) = a2^{N-m},\ a \in \mathbb{Z}$$

o que implica

$$a = \frac{(2N)!}{2^{N-m}(2m)!}$$

consequentemente

$$\left|\frac{(2N)!}{2^N}p - 2q\sum_{m=0}^{N}\frac{(2N)!}{2^{N-m}(2m)!}\right| \in \mathbb{Z}$$

Quando $N \to \infty$, temos que $\dfrac{2qe^2}{N+1} \to 0$, ou seja, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{2qe^2}{N+1} < 1$ para todo $N > N_0$, isto é,

$$0 < \frac{(2N)!}{2^N}p - 2q\sum_{m=0}^{N}\frac{(2N)!}{2^{N-m}(2m)!} < 1,\ \forall\, N > N_0$$

Absurdo. Portanto, θ é irracional.

Suponha que $e^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$, daí $e^{-\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$, logo $\theta \in \mathbb{Q}$. Absurdo, pois θ é irracional. Desta forma, concluímos que $e^{\sqrt{2}}$ é irracional.

Irracionalidade de e^4

Vamos mostrar que e^2 é não quadrático.

Considere a seguinte relação quadrática $ae^4 + be^2 + c = 0$, onde a, b e c são inteiros com $a \neq 0$. Essa relação equivale a $ae^2 + b + ce^{-2} = 0$. Assim

$$a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!} + b + c\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n!} = 0$$

Reescrevendo, obtemos:

$$b + \sum_{n=0}^{N}\left(a + c(-1)^n\right)\frac{2^n}{n!} = -\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(a + c(-1)^n\right)\frac{2^n}{n!} \tag{1.14}$$

Multiplicando (1.14) por $\dfrac{N!}{2^{N-1}}$, segue-se que,

$$\frac{N!}{2^{N-1}}b+\sum_{n=0}^{N}\left(a+(-1)^n c\right)\frac{N!}{2^{N-n-1}n!}=-\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\left(a+(-1)^n c\right)N!}{2^{N-n-1}n!} \tag{1.15}$$

Para a série em (1.15), tomando $n=N+1+k$ concluímos que:

$$\frac{N!}{2^{N-1}}b+\sum_{n=0}^{N}\left(a+(-1)^n c\right)\frac{N!}{2^{N-n-1}n!}=-\sum_{k=0}^{\infty}\left(a+(-1)^{N+1+k}c\right)\frac{2^{k+2}N!}{(N+1+k)!} \tag{1.16}$$

Vamos mostrar que $\dfrac{N!}{2^{N-n-1}n!}$ para $0\leqslant n\leqslant N$ são números inteiros para infinitos valores de N suficientemente grande.

Pelo Lema 1.2.2, $v_p(N!)=\displaystyle\sum_{j\geqslant 1}\left\lfloor\frac{N}{p_j}\right\rfloor$ para todo $N\geqslant 0$. Por definição, $\left\lfloor\dfrac{N}{p^j}\right\rfloor\leqslant\dfrac{N}{p^j}$, daí

$$v_p(N!)\leqslant\sum_{j\geqslant 1}\frac{N}{p^j}=N\sum_{j\geqslant 1}\frac{1}{p^j}=\frac{N}{p-1}$$

Considere $N=p^t$, com p primo, assim

$$v_p(N!)=\sum_{j\geqslant 1}\left\lfloor\frac{p^t}{p^j}\right\rfloor=\sum_{j\geqslant 1}\left\lfloor p^{t-j}\right\rfloor=\sum_{j=1}^{t}\left\lfloor p^{t-j}\right\rfloor+\sum_{j\geqslant t+1}\left\lfloor p^{t-j}\right\rfloor$$

quando $t-j<0$ temos $0<p^{t-j}<1$, por conseguinte $\lfloor p^{t-j}\rfloor=0$. Portanto,

$$v_p(N!)=\sum_{j=1}^{t}\left\lfloor p^{t-j}\right\rfloor=\sum_{j=1}^{t}p^{t-j}=\frac{p^t-1}{p-1}=\frac{N-1}{p-1} \tag{1.17}$$

Em particular, quando $N=2^t$, temos que $N!$ é divisível por 2^{N-1}, pois

$$v_2(N!)=N-1 \text{ e então } 2^{N-1}|N!$$

Para $0 \leqslant n \leqslant N$, $v_2(n!) \leqslant n$, como $v_2\left(\dfrac{N!}{n!}\right) = v_2(N!) - v_2(n!)$ segue-se que

$$v_2\left(\frac{N!}{n!}\right) \geqslant N - 1 - n \tag{1.18}$$

Desse modo, para cada $\dfrac{N!}{2^{N-n-1}n!}$ com $0 \leqslant n \leqslant N$ temos um inteiro quando $N = 2^t$ para t suficientemente grande. Logo

$$\frac{N!b}{2^{N-1}} + \sum_{n=0}^{N}(a + (-1)^n c)\frac{N!}{2^{N-n-1}n!} \in \mathbb{Z}$$

De maneira análoga à demonstração que e é não quadrático, os dois primeiros termos da série em (1.16) são nulos para N suficientemente grande, já que a série converge para 0, ou seja,

$$-(a + (-1)^{N+1}c)\frac{2N!}{(N+1)!} = 0 \text{ e } -(a + (-1)^{N+2}c)\frac{2^2N!}{(N+2)!} = 0$$

daí,

$$a + (-1)^{N+1}c = 0 \text{ e } a + (-1)^{N+2}c = 0 \Rightarrow a = c = 0$$

Absurdo, pois $a \neq 0$. Logo, e^2 é não quadrático.

Suponha que $e^4 = \dfrac{a}{b}$ com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{N}$. Dessa forma, $be^4 - a = 0$, como e^2 é não quadrático, temos que $b = a = 0$, contradição. Portanto, e^4 é irracional.

Irracionalidade de $e^{\sqrt{3}}$

Vamos mostrar que $\theta = e^{\sqrt{3}} + e^{-\sqrt{3}}$ é irracional.

Seja $e^{\sqrt{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{3})^n}{n!}$ e $e^{-\sqrt{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\sqrt{3})^n}{n!}$, dessa maneira

$$\begin{aligned}
\theta &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{3})^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\sqrt{3})^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{\frac{n}{2}}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{\frac{n}{2}}}{n!} \\
&= 2\sum_{m=0}^{\infty} \frac{3^m}{(2m)!} \qquad (1.19)
\end{aligned}$$

Reescrevendo (1.19), obtemos:

$$\theta - 2\sum_{m=0}^{N} \frac{3^m}{(2m)!} = 2\sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{3^m}{(2m)!}$$

Tomando $m = N + 1 + k$, daí

$$\theta - 2\sum_{m=0}^{N} \frac{3^m}{(2m)!} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{N+1+k}}{(2N+2+2k)!}$$

Multiplicando a igualdade acima por $\frac{(2N)!}{3^{N-1}}$, temos

$$\frac{(2N)!}{3^{N-1}}\theta - 2\sum_{m=0}^{N} \frac{(2N)!}{3^{N-m-1}(2m)!} = 18\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2N)!3^k}{(2N+2k+2)!} \qquad (1.20)$$

Em (1.20) nos deparamos com uma série de termos positivos ,e pelo fato de $\frac{(2N)!}{(2N+2k+2)!} \leqslant \frac{1}{(2N+2)(2k+1)!}$, tem-se

$$\begin{aligned}
0 < \frac{(2N)!\theta}{3^{N-1}} - 2\sum_{m=0}^{N} \frac{(2N)!}{3^{N-m-1}(2m)!} &\leqslant 18\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{(2N+2)(2k+1)!} \\
&\leqslant \frac{9}{(N+1)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{(2k+1)!} \\
&< \frac{9}{(N+1)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k!} \\
&= \frac{9}{N+1} e^3 \qquad (1.21)
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que $\dfrac{(2N)!}{3^{N-m-1}(2m)!}$ é inteiro para algum N suficientemente grande e $0 \leqslant m \leqslant N$.

Considere $N = \dfrac{3^t+1}{2}$ para t suficientemente grande. Para $p=3$ temos:

$$\begin{aligned} v_3((2N)!) &= \sum_{j\geqslant 1}\left\lfloor \frac{2N}{3^j}\right\rfloor = \\ &= \sum_{j=1}^{t}\left\lfloor \frac{3^t+1}{3^j}\right\rfloor + \sum_{j\geqslant t+1}\left\lfloor \frac{3^t+1}{3^j}\right\rfloor \\ &= \sum_{j=1}^{t}\left\lfloor 3^{t-j}+\frac{1}{3^j}\right\rfloor + \sum_{j\geqslant t+1}\left\lfloor \frac{3^t+1}{3^j}\right\rfloor \end{aligned}$$

Pelo fato de $0 < \dfrac{1}{3^j} < 1$ para $1 \leqslant j \leqslant t$ e $0 < \dfrac{3^t+1}{3^j} < 1$ para $j \geqslant t+1$, temos respectivamente que $\left\lfloor 3^{t-j}+\dfrac{1}{3^j}\right\rfloor = 3^{t-j}$ pela parte 2 do Teorema 1.2.1 e $\left\lfloor \dfrac{3^t+1}{3^j}\right\rfloor = 0$, assim

$$\begin{aligned} v_3((2N)!) &= \sum_{j=1}^{t} 3^{t-j} + \sum_{j=t+1} 0 \\ &= \frac{3^t-1}{3-1} = \frac{3^t-1}{2} = N-1 \end{aligned}$$

Pelo fato de $v_p((2m)!) \leqslant \dfrac{2m}{p-1}$ com $0 \leqslant m \leqslant N$, temos

$$v_3\left(\frac{(2N)!}{(2m)!}\right) = v_3((2N)!) - v_3((2m)!) \geqslant N-1-m$$

logo

$$v_3\left(\frac{(2N)!}{(2m)!}\right) \geqslant N-m-1$$

Portanto 3^{N-m-1} divide $\left(\dfrac{(2N)!}{(2m)!}\right)$ para $N = \dfrac{3^t+1}{2}$ com t suficientemente grande.

Suponha que θ é racional, assim $\theta = \dfrac{p}{q}$ onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$. Dessa maneira,

$$0 < \frac{(2N)!}{3^{N-1}}\frac{p}{q} - 2\sum_{m=0}^{N}\frac{(2N)!}{3^{N-m-1}(2m)!} < \frac{9e^3}{N+1}$$
$$0 < \frac{(2N)!}{3^{N-1}}p - 2q\sum_{m=0}^{N}\frac{(2N)!}{3^{N-m-1}(2m)!} < \frac{9qe^3}{N+1}$$

Como $N = \dfrac{3^t+1}{2} \to \infty$, quando $t \to \infty$, segue-se que $\dfrac{9qe^3}{N+1} \to 0$, isto é, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{9qe^3}{N+1} < 1$ para todo $N > N_0$.

Para todo $N > N_0$, temos que

$$0 < \frac{(2N)!}{3^{N-1}}p - 2q\sum_{m=0}^{N}\frac{(2N)!}{3^{N-m-1}(2m)!} < 1$$

Pelo fato de $\dfrac{(2N)!}{3^{N-m-1}(2m)!} \in \mathbb{Z}$ para $0 \leqslant m \leqslant N$ onde $N = \dfrac{3^t+1}{2}$ com t suficientemente grande, concluímos que $\dfrac{(2N)!}{3^{N-1}}p - 2q\displaystyle\sum_{m=0}^{N}\frac{(2N)!}{3^{N-m-1}(2m)!} \in \mathbb{Z}$. Contradição. Daí, θ é irracional.

Se $e^{\sqrt{3}} \in \mathbb{Q}$ então $e^{-\sqrt{3}} \in \mathbb{Q}$, como $\theta = e^{\sqrt{3}} + e^{-\sqrt{3}}$ θ seria racional, contradição. Dessa maneira, inferimos que $e^{\sqrt{3}}$ é irracional.

1.6.3 Prova Geométrica da Irracionalidade de e

Vamos construir uma sequência de intervalos $(I_n)_{n\geqslant 1}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ o intervalo I_n é construído da seguinte maneira:

Devemos particionar o intervalo I_{n-1} em n subintervalos de mesmo comprimento, mantendo somente um subintervalo que é exatamente o I_n. O comprimento de I_n é $\dfrac{1}{n!}$.

Começando com $I_1 = [2,3]$. Para $n \geqslant 2$, particionando I_{n-1} em n subintervalos e mantendo o segundo subintervalo (esse é o I_n). Se $I_{n-1} = [a,b]$ então $I_n = \left[a + \frac{1}{n!}, a + \frac{2}{n!}\right]$. Assim

$I_1 = [2,3]$

$I_2 = \left[2 + \frac{1}{2!}, 2 + \frac{2}{2!}\right] = \left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}, 1 + \frac{1}{1!} + \frac{2}{2!}\right] = \left[\frac{5}{2!}, \frac{6}{2!}\right]$

$I_3 = \left[\frac{5}{2!} + \frac{1}{3!}, \frac{5}{2!} + \frac{2}{3!}\right] = \left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}, 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!}\right] = \left[\frac{16}{3!}, \frac{17}{3!}\right]$

$\vdots$

$I_n = \left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}, 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{2}{n!}\right]$

Fazendo $\frac{a_n}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ segue-se que $I_n = \left[\frac{a_n}{n!}, \frac{a_n + 1}{n!}\right]$ onde $a_n \in \mathbb{Z}$. Indutivamente $I_{n+1} = \left[\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}, \frac{a_{n+1}+1}{(n+1)!}\right]$. Logo,

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a_n}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} \text{ e daí } a_{n+1} = (n+1)a_n + 1; \ \forall n \geqslant 1$$

Afirmação 1.2 *Temos que* $e \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$.

Demonstração

Para cada $k \in \mathbb{N}$,temos $I_k = \left[1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{k!}, 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{2}{k!}\right]$.

Observe que

$$e = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \text{ e então } \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} < e \tag{1.22}$$

Considere o seguinte termo:

$$\begin{aligned} c_k &= \left(1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{2}{k!} - e\right) k! \\ &= \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+2)!} - \ldots\right) k! \\ &= 1 - \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \ldots\right) \end{aligned}$$

Percebemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\ldots &< \frac{1}{(k+1)}+\frac{1}{(k+1)^2}+\ldots \\
&= \frac{\frac{1}{(k+1)}}{1-\frac{1}{k+1}} \\
&= \frac{1}{k}
\end{aligned}
$$

Dessa maneira

$$c_k > 1-\frac{1}{k},\ \forall\, k \geqslant 1 \text{ e daí } c_k > 0$$

Portanto

$$e < 1+\frac{1}{1!}+\ldots+\frac{2}{k!} \tag{1.23}$$

Por (1.22) e (1.23) concluímos que $e \in I_k$ para todo $k \geqslant 1$, ou seja, $e \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$.

Suponha que $e = \dfrac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$. Tome $k = q$, assim

$$e \in I_q \text{ e então } \frac{a_q}{q!} < \frac{p}{q} < \frac{a_q+1}{q!}$$

note que $\dfrac{p}{q} = \dfrac{p(q-1)!}{q!}$. Logo

$$\frac{a_q}{q!} < \frac{p(q-1)!}{q!} < \frac{a_q+1}{q!} \text{ e daí } a_q < p(q-1)! < a_q+1. \text{ Assim}$$
$$0 < p(q-1)! - a_q < 1$$

Contradição. Portanto e é irracional.

Para mais detalhes desta seção, veja [10] e [11]. Na seção 3.2 utilizaremos o método de Hermite para demonstrar que e^r é irracional para $r \in \mathbb{Q}$ não nulo.

Capítulo 2

Critérios de Irracionalidade

Neste capítulo dissertaremos sobre diversos critérios de irracionalidade, incluindo o Teorema de Hurwitz e o resultado sobre a irracionalidade das Séries de Cantor.

Afirmação 2.1 *Dado $\theta \in \mathbb{Q}$, existe $c = c(\theta)$ uma constante positiva tal que para qualquer número racional $\dfrac{p}{q}$ diferente de θ, temos que*

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{c}{q}$$

Demonstração

Considere $\theta = \dfrac{a}{b}$ com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{N}$. Dado $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ diferente de θ, temos que

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{a}{b} - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{aq - bp}{bq}\right| = \frac{|aq - bp|}{bq}$$

Como $\theta - \dfrac{p}{q} \neq 0$, $aq - bp$ é um inteiro não-nulo, daí $|aq - bp| \geqslant 1$. Portanto

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| = \frac{|aq - bp|}{bq} \geqslant \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{q} = \frac{c}{q}$$

onde $c = \dfrac{1}{b}$.

$\square$

2.1 Primeiro Critério

Lema 2.1.1 *Seja θ um número real. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) *θ é irracional;*

(ii) *Dado $\varepsilon > 0$, existe $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < \left|\theta - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{\varepsilon}{q}$;*

(iii) *Para qualquer real $Q > 1$, existem $q, p \in \mathbb{Z}$ onde $1 \leqslant q < Q$ tais que $0 < \left|\theta - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{qQ}$;*

(iv) *Existem infinitos $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tais que $0 < \left|\theta - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{q^2}$.*

Demonstração

(iii) $\Rightarrow$ *(iv)*: Para cada n existem $q_n, p_n \in \mathbb{Z}$ com $1 \leqslant q_n < n$ tais que

$$0 < \left|\theta - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{nq_n} \tag{2.1}$$

Como $q_n < n$ temos que

$$0 < \left|\theta - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2} \tag{2.2}$$

Suponha que a sequência $\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tem um número finito de termos distintos. Então $A = \left\{\left|\theta - \dfrac{p_n}{q_n}\right|; n \in \mathbb{N}\right\}$ é um conjunto finito, daí possui um elemento mínimo $l = \left|\theta - \dfrac{p_k}{q_k}\right|$. Consequentemente por (2.1)

$$0 < l \leq \left|\theta - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{nq_n} < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.3}$$

assim $n < \dfrac{1}{l}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Absurdo.

$(iv) \Rightarrow (ii)$: Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$, pela propriedade Arquimediana. Seja $\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de termos distintos tais que $0 < \left|\theta - \dfrac{p_n}{q_n}\right| < \dfrac{1}{q_n^2}$.
temos então:

$$0 < \left|\theta - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2} \Longleftrightarrow \frac{-1}{q_n^2} < \theta - \frac{p_n}{q_n} < \frac{1}{q_n^2} \text{ e } \theta \neq \frac{p_n}{q_n} \Longleftrightarrow$$

$$\frac{-1}{q_n} < q_n\theta - p_n < \frac{1}{q_n} \text{ e } q_n\theta - p_n \neq 0 \Longleftrightarrow q_n\theta - \frac{1}{q_n} < p_n < q_n\theta + \frac{1}{q_n} \text{ e } p_n \neq q_n\theta$$

A sequência $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui infinitos termos distintos, caso contrário teríamos $m \leq q_n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto

$$m\theta - 1 \leq q_n\theta - 1 < q_n\theta - \frac{1}{q_n} < p_n \text{ e } q_n\theta + \frac{1}{q_n} < q_n\theta + 1 \leq M\theta + 1$$

e daí $m\theta - 1 < p_n < M\theta + 1$. Assim a sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possuiria somente um número finito de termos distintos. Consequentemente $\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ também possuiria somente um número finito de termos distintos. Absurdo.
Pelo fato da sequência $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possuir um número infinito de termos distintos, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $q_{k_0} > n_0$ e assim $\dfrac{1}{qk_0} < \epsilon$. Dessa forma mostramos que dado $\epsilon > 0$ existe $\dfrac{p_{k_0}}{q_{k_0}} \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < \left|\theta - \dfrac{p_{k_0}}{q_{k_0}}\right| < \dfrac{1}{q_{k_0}^2} < \dfrac{\epsilon}{q_{k_0}}$.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Contra-positiva da Afirmação 2.1.

$(i) \Rightarrow (iii)$: Dado $Q > 1$, definimos $N = \lceil Q \rceil$ onde N é um inteiro tal que $N-1<Q\leqslant N$. Note que $N\geqslant 2$.

Seja E o conjunto cujo os elementos são $0,\{\theta\},\ldots,\{q\theta\},\ldots,\{(N-1)\theta\},1$ (onde "$\{\}$" indica a parte fracionária), com $q=1,\ldots,N-1$. Sendo θ irracional, temos que $0<\{q\theta\}<1$ e daí $E\subset[0,1]$. O conjunto E possui $N+1$ elementos distintos. De fato, temos $q_1\theta=\lfloor q_1\theta\rfloor+\{q_1\theta\}$ e $q_2\theta=\lfloor q_2\theta\rfloor+\{q_2\theta\}$, (onde o simbolo "$\lfloor\rfloor$" indica a parte inteira), se $\{q_1\theta\}=\{q_2\theta\}$ então:

$$(q_2-q_1)\,\theta=\lfloor q_2\theta\rfloor-\lfloor q_1\theta\rfloor \tag{2.4}$$

Contradição, pois o lado direito em (2.4) é um inteiro, sendo um irracional o lado esquerdo. Subdividindo $[0,1]$ em N subintervalos do tipo $I_j=\left[\dfrac{j}{N},\dfrac{j+1}{N}\right]$, com $j=0,\ldots,N-1$. Pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, existe $j_0\in\mathbb{N}$ tal que I_{j_0} contém pelo menos dois elementos de E.

Tirando 0 e 1, todos os elementos de E são irracionais, daí pertencem à união de intervalos abertos $\left(\dfrac{j}{N},\dfrac{(j+1)}{N}\right)$, com $0\leqslant j\leqslant N-1$.

Se $j_0=N-1$, então $I_{j_0}=\left[1-\dfrac{1}{N},1\right]$. Assim, I_{j_0} contém um elemento de E da forma $\{q\theta\}$ com $1\leqslant q\leqslant N-1$. Tomando $p=\lfloor q\theta\rfloor+1$, temos que

$$p-q\theta=\lfloor q\theta\rfloor+1-q\theta=1+\lfloor q\theta\rfloor-(\lfloor q\theta\rfloor+\{q\theta\})=1-\{q\theta\}$$

Como $\{q\theta\}$ é um irracional pertencente a I_{j_0}, $1-\{q\theta\}<l\,(I_{j_0})\leqslant\dfrac{1}{Q}$, onde $l\,(I_{j_0})=\dfrac{1}{N}$ é comprimento do intervalo I_{j_0}. Logo

$$0<|p-q\theta|<\frac{1}{Q}$$

Se $0 \leqslant j_0 \leqslant N-2$ então I_{j_0} contém dois elementos $\{q_1\theta\}$ e $\{q_2\theta\}$, com $0 \leqslant q_1 < q_2 \leqslant N-1$. Tomando $q = q_2 - q_1$ e $p = \lfloor q_2\theta \rfloor - \lfloor q_1\theta \rfloor$ segue-se que

$$\begin{aligned} |p - q\theta| &= |\lfloor q_2\theta \rfloor - \lfloor q_1\theta \rfloor - [(q_2 - q_1)\,\theta]| \\ &= |\lfloor q_2\theta \rfloor - \lfloor q_1\theta \rfloor - \lfloor q_2\theta \rfloor - \{q_2\theta\} + \lfloor q_1\theta \rfloor + \{q_1\theta\}| \\ &= |\{q_1\theta\} - \{q_2\theta\}| \end{aligned}$$

Pelo menos um dos $\{q_1\theta\}$ e $\{q_2\theta\}$ é irracional pertencentes a I_{j_0}. Logo concluímos que $|p - q\theta| < l\left(I_{j_0}\right) \leqslant \dfrac{1}{Q}$. Daí

$$0 < |q\theta - p| < \frac{1}{Q}$$

□

A implicação que acabamos de provar é conhecida como o **Teorema de Dirichlet**. Uma aplicação para este critério, será apresentada na seção 3.3 para as séries de Liouville.

Na próxima seção apresentaremos uma generalização para o lema 2.1.1.

2.2 Irracionalidade de pelo menos um número

Lema 2.2.1 *Seja $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ números reais. As seguintes condições são equivalentes.*

(i) *Pelo menos um dos números $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ é irracional.*

(ii) *Dado $\varepsilon > 0$, existem $p_1, p_2, \ldots, p_m, q \in \mathbb{Z}$ com $q > 0$ tais que*

$$0 < \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \left| \theta_i - \frac{p_i}{q} \right| < \frac{\varepsilon}{q}$$

(iii) *Para qualquer inteiro* $Q > 1$, *existem* $p_1, p_2, \ldots, p_m, q \in \mathbb{Z}$ *tais que*

$$1 \leqslant q \leqslant Q^m \text{ e } 0 < \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \left| \theta_i - \frac{p_i}{q} \right| < \frac{1}{qQ}$$

(iv) *Existem infinitos* $q \in \mathbb{N}$ *tais que para cada um dos quais, existem* $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{Z}$ *satisfazendo* $0 < \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \left| \theta_i - \frac{p_i}{q} \right| < \frac{1}{q^{1+\frac{1}{m}}}$

Demonstração

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Dado $n \in \mathbb{N}$, existem $p_{1n}, p_{2n}, \ldots, p_{mn}, q_n \in \mathbb{Z}$ tais que

$$1 \leqslant q_n \leqslant n^m \,\mathrm{e}\, 0 < \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \left| \theta_i - \frac{p_{in}}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n n} \tag{2.5}$$

Veja que $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{q_n^{\frac{1}{m}}}$, logo

$$0 < \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \left| \theta_i - \frac{p_{in}}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^{1+\frac{1}{m}}} \tag{2.6}$$

Vamos mostrar que existem infinitos q_n distintos satisfazendo (2.5) e de imediato (2.6).Suponha que exista finitos, assim existem finitos $p_{1n}, p_{2n}, \ldots, p_{mn}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Logo o conjunto $A = \left\{ \left| \theta_i - \frac{p_{in}}{q_n} \right| ; n \in \mathbb{N} \text{ e } 1 \leq i \leq m \right\}$ é finito, portanto tem um elemento máximo l. Por (2.5) concluimos que

$$0 < l = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \left| \theta_i - \frac{p_{in}}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n n} \leq \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.7}$$

assim $n < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Contradição.

$(iv) \Rightarrow (ii)$: Dado $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon^m$ pela Propredade Arquimediana. Considere $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ a seqüência de inteiros positivos satisfazendo a hipótese. Assim, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $q_{k_0} > n$ para o qual existem $p_{1k_0}, \ldots, p_{mk_0} \in \mathbb{Z}$ tais que

$$0 < \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \left| \theta_i - \frac{p_{ik_0}}{q_{k_0}} \right| < \frac{1}{q_{k_0}^{1+\frac{1}{m}}}$$

Assim $\dfrac{1}{q_{k_0}^{\frac{1}{m}}} < \dfrac{1}{n^{\frac{1}{m}}}$. Logo

$$0 < \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \left| \theta_i - \frac{p_{ik_0}}{q_{k_0}} \right| < \frac{1}{q_{k_0}^{1+\frac{1}{m}}} < \frac{1}{q_{k_0} n^{\frac{1}{m}}} < \frac{\varepsilon}{q_{k_0}}$$

$(ii) \Rightarrow (i)$: Se todos os θ_i fossem racionais, teríamos pela Afirmação 2.1 que $\left|\theta_i - \dfrac{p_i}{q}\right| \leq \dfrac{c_i}{q}, \forall\ \dfrac{p_i}{q} \in \mathbb{Q}$. Daí $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \left|\theta_i - \dfrac{p_i}{q}\right| \geq \dfrac{c}{q}$ onde $c = min\{c_i; i = 1, 2, \ldots, m\}$, o que contrária (ii). Logo, pelo menos um dos números $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ é irracional.

$(i) \Rightarrow (iii)$: Dado um inteiro $Q > 1$. Considere o subconjunto E do cubo $[0,1)^m$ do $\mathbb{R}^m$, formado pelos $\xi_q = (\{q\theta_1\}, \ldots, \{q\theta_m\})$ com $q = 0, 1, 2, \ldots, Q^m$. Vamos subdividir $[0,1)^m$ em cubos cujas arestas medem $\dfrac{1}{Q}$. Portanto, temos Q^m cubos e $Q^m + 1$ elementos em E, daí pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, existe pelo menos dois ξ_q em um mesmo cubo cuja aresta mede $\dfrac{1}{Q}$. Digamos ξ_{q_1}, ξ_{q_2} com $0 \leqslant q_1 < q_2 \leqslant Q^m$.

Tomando $q = q_2 - q_1 > 0$ e $p_i = \lfloor q_2\theta_i \rfloor - \lfloor q_1\theta_i \rfloor$ com $i = 1, \ldots, m$. Como temos pelo menos um irracional entre $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$, considere θ_{i_0} um tal irracional, assim:

$$0 < |p_{i_0} - q\theta_{i_0}| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |p_i - q\theta_i| = |p_l - q\theta_l| \tag{2.8}$$

no entanto

$$\begin{aligned}
|p_l - q\theta_l| &= |\lfloor q_2\theta_l \rfloor - \lfloor q_1\theta_l \rfloor - (q_2 - q_1)\,\theta_l| \\
&= |\lfloor q_2\theta_l \rfloor - \lfloor q_1\theta_l \rfloor - q_2\theta_l + q_1\theta_l| \\
&= |\lfloor q_2\theta_l \rfloor - \lfloor q_1\theta_l \rfloor - (\lfloor q_2\theta_l \rfloor + \{q_2\theta_l\}) + \lfloor q_1\theta_l \rfloor + \{q_1\theta_l\}| \\
&= |\{q_1\theta_l\} - \{q_2\theta_l\}| \\
&< \frac{1}{Q}
\end{aligned}$$

e com (2.8) deduzimos que

$$0 < \max_{1\leqslant i\leqslant m} |q\theta_i - p_i| < \frac{1}{Q}$$

□

2.3 Teorema de Hurwitz

O Teorema de Hurwitz (Lema 2.3.4) melhora o resultado da implicação $(i) \Rightarrow (iv)$ do Lema 2.1.1. É claro que a implicação $(ii) \Rightarrow (i)$ do Teorema de Hurwitz é mais fraca que a implicação $(iv) \Rightarrow (i)$ do Lema 2.1.1. As provas clássicas do teorema envolvem frações contínuas ou séries de Farey. A prova apresentada aqui não envolve frações contínuas, embora elas apareçam implicitamente.

Lema 2.3.1 *Seja θ um número irracional. Então existem infinitos pares $\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right)$ de frações irredutíveis tais que*

$$\frac{p}{q} < \theta < \frac{r}{s} \text{ e } qr - ps = 1$$

Demonstração

Dado $H \in \mathbb{N}$, considere o conjunto:

$$A = \left\{ \frac{a_k}{b_k} \in \mathbb{Q};\ (a_k, b_k) = 1 \,\mathrm{e}\, 1 \leqslant b_k \leqslant H \,\mathrm{com}\, k = 1, 2, \ldots \right\}$$

Afirmação 2.3.1 *Existe* $\frac{a}{b} \in A$ *tal que* $\left|\theta - \frac{a}{b}\right|$ *é mínimo.*

Demonstração

Seja $N = [\theta]$ o inteiro mais próximo de θ. Daí $N < \theta < N+1$ ou $N-1 < \theta < N$. Sem perda de generalidade, suponhamos $N < \theta < N+1$. Assim $\frac{b_k N}{b_k} < \theta < \frac{b_k(N+1)}{b_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Dessa forma, $\left\{ \frac{b_k N}{b_k}, \frac{b_k N + 1}{b_k}, \ldots, \frac{b_k N + b_k}{b_k} \right\}$ é um conjunto finito contido em $[N, N+1] \cap \mathbb{Q}$ e que contém os elementos de A com denominador b_k e pertencentes a $[N, N+1]$. Para cada k seja c_k o racional mais próximo de θ dentre esses. Como temos finitos b_k's, temos também finitos c_k's. Chamamos então $\frac{a}{b}$ o racional mais próximo de θ dentre os c_k's.

Voltando à prova do Lema, vamos dividí-la em dois casos:

1^{o} **caso**: $\frac{a}{b} < \theta$.

Tome $p = a$ e $q = b$. Como $(p, q) = 1$, existem $r_0, s_0 \in \mathbb{Z}$ tais que $qr_0 - ps_0 = 1$.

Afirmação 2.3.2 *Existem* $r, s \in \mathbb{Z}$ *tais que* $qr - ps = 1$ *onde* $1 \leqslant s < q$ *e* $|r| < |p|$.

Demonstração

Considere $r_t = r_0 + tp$ e $s_t = s_0 + tq$ com $t \in \mathbb{Z}$. Veja que $qr_t - ps_t = 1$. Como $q > 0$, fazendo $t \to +\infty$ temos $s_t \to +\infty$. Daí existe $t_0 \in \mathbb{N}$ tal que $s_t > q$ para todo $t > t_0$, e pelo algoritmo de Divisão existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $s_t = qn + m$ com $0 \leqslant m < q$. Dessa forma

$$s_0 + tq = qn + m \Rightarrow m = s_0 + (t-n)q \Rightarrow m = s_{t-n}$$

Portanto $0 \leqslant s_{t-n} < q$. Se $m = s_{t-n} = 0$ então $s_t = qn$. Pelo fato de $qr_t - ps_t = 1$, segue-se que

$$qr_t - pqn = 1 \Rightarrow q\left(r_t - pn\right) = 1 \Rightarrow q = 1$$

Logo $s_t = n$. Se $m > n$, como $m < q$, $s_t > q$ e $s_t = n$ e temos $q > m > s_t$, absurdo. Se $m \leqslant n$, pelo algorimo da divisão existem k, l inteiros tais que $n = ml + k$ com $0 \leqslant k < m$, absurdo pois $m = 0$. Logo $m \neq 0$. Assim, tome $s = m = s_{t-n}$ e $r = r_{t-n}$. Neste caso $1 \leqslant s < q$.

Observe que

$$qr - ps = 1 \Rightarrow |r| \leqslant |p|\frac{s}{q} + \frac{1}{q} \Rightarrow |r| \leqslant \frac{|p|(q-1)}{q} + \frac{\mid p \mid}{q}$$

Assim $|r| \leqslant |p|$. Se $|r| = |p|$ temos $r(q-s) = 1$ ou $r(q+s) = 1$, que implica $(q-s) = 1$ ou $(q-s) = -1$ ou $(q+s) = 1$. Se $(q-s) = 1$ temos $q < s$, absurdo. Se $(q-s) = -1$, como $q > s$ temos $(q-s) > 0$, absurdo. Se $(q+s) = 1$, isso implica que $q = 0$ ou $s = 0$, absurdo. Portanto $|r| < |p|$. Prosseguindo com a demonstração do lema, temos pela escolha de $\dfrac{p}{q}$ temos e pelas condições da afirmação 2.3.2 que

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \leq \left|\theta - \frac{r}{s}\right|$$

Como $qr - ps = 1$, $\dfrac{p}{q} \neq \dfrac{r}{s}$ e portanto $\dfrac{r}{s} \notin \left[\dfrac{p}{q}, \theta\right]$. Por outro lado

$$qr - ps = 1 \Rightarrow qr - ps > 0 \Rightarrow \frac{r}{s} > \frac{p}{q} \Rightarrow \theta < \frac{r}{s} \Rightarrow \frac{p}{q} < \theta < \frac{r}{s}$$

2º caso: $\dfrac{a}{b} > \theta$.

Tome $r = a$ e $s = b$, como $(r, s) = 1$, de maneira análoga ao 1º caso, existem $p, q \in \mathbb{Z}$ tais que $qr - ps = 1$, $1 \leqslant q < s$ e $|p| < |r|$. Sendo $1 \leqslant q < s \leqslant H$, pela escolha de $\dfrac{r}{s}$ temos:

$$\left|\theta - \frac{r}{s}\right| \leq \left|\theta - \frac{p}{q}\right|$$

Portanto $\dfrac{p}{q} \notin \left[\theta, \dfrac{r}{s}\right]$. Por outro lado

$$qr - ps = 1 \Rightarrow qr - ps > 0 \Rightarrow \frac{r}{s} > \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{p}{q} < \theta \Rightarrow \frac{p}{q} < \theta < \frac{r}{s}.$$

Vamos agora mostrar que existem infinitos tais pares $\left(\dfrac{p}{q}, \dfrac{r}{s}\right)$. Como θ é irracional existe $\dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ mais próximo de θ do que os $\dfrac{p}{q}$ e $\dfrac{r}{s}$ dos pares, pela densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$. Usamos então o mesmo argumento para $H \leq n$. Isso produz um novo par $\left(\dfrac{p_1}{q_1}, \dfrac{r_1}{s_1}\right)$ diferente do par anterior onde pelo menos umdeles está, mais próximo de θ. Como θ é irracional esse processo pode ser repetido indefinidamente, obtendo assim uma quantidade infinita de pares $\left(\dfrac{p}{q}, \dfrac{r}{s}\right)$ satisfazendo as condições desejadas.

□

Lema 2.3.2 *Seja θ um número irracional. Assumimos que $\dfrac{p}{q}$ e $\dfrac{r}{s}$ são frações irredutíveis tais que $\dfrac{p}{q} < \theta < \dfrac{r}{s}$ e $qr - ps = 1$. Então*

$$min\left\{q^2\left(\theta - \frac{p}{q}\right), s^2\left(\frac{r}{s} - \theta\right)\right\} < \frac{1}{2}$$

Demonstração

Seja $\delta = min\left\{q^2\left(\theta - \dfrac{p}{q}\right), s^2\left(\dfrac{r}{s} - \theta\right)\right\}$. Logo

$$\delta \leqslant q^2\left(\theta - \frac{p}{q}\right) \text{ e } \delta \leqslant s^2\left(\frac{r}{s} - \theta\right) \Rightarrow \frac{\delta}{q^2} \leqslant \theta - \frac{p}{q} \text{ e } \frac{\delta}{s^2} \leqslant \frac{r}{s} - \theta$$

Somando as duas desigualdades membro a membro temos:

$$\frac{\delta}{q^2}+\frac{\delta}{s^2}\leqslant\frac{r}{s}-\frac{p}{q}=\frac{qr-ps}{qs}=\frac{1}{qs}\Rightarrow\frac{\delta s}{q}+\frac{\delta q}{s}\leqslant 1$$

sendo $\delta>0$ temos $\dfrac{s}{q}+\dfrac{q}{s}\leqslant\dfrac{1}{\delta}$.

Considere $F(t)=t+\dfrac{1}{t}$. Dessa forma, $F'(t)=1-\dfrac{1}{t^2}=0$ que implica $t=\pm1$. Como, $F''(1)=2>0$, 1 é ponto de mínimo de F, ou seja

$$F(1)<F\left(\frac{q}{s}\right)=\frac{s}{q}+\frac{q}{s}\leqslant\frac{1}{\delta},\text{ pois } q\neq s\Rightarrow 2<\frac{1}{\delta}\Rightarrow\delta<\frac{1}{2}$$

$\square$

Lema 2.3.3 *Seja θ um número irracional. Assumimos que $\dfrac{p}{q}$ e $\dfrac{r}{s}$ são frações irredutíveis tais que $\dfrac{p}{q}<\theta<\dfrac{r}{s}$ e $qr-ps=1$. Se $u=p+r$ e $v=q+s$ então*

$$min\left\{q^2\left(\theta-\frac{p}{q}\right),s^2\left(\frac{r}{s}-\theta\right),v^2\left|\theta-\frac{u}{v}\right|\right\}<\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Demonstração

Temos que $qu-pv=q(p+r)-p(q+s)=qr-ps=1$. De maneira análoga, $vr-us=1$. Como

$$qu-pv>0 \text{ e } rv-su>0 \text{ temos } \frac{p}{q}<\frac{u}{v} \text{ e } \frac{u}{v}<\frac{r}{s}.$$

assim, $\dfrac{p}{q}<\dfrac{u}{v}<\dfrac{r}{s}$.

Seja $\delta=min\left\{q^2\left(\theta-\dfrac{p}{q}\right),s^2\left(\dfrac{r}{s}-\theta\right),v^2\left|\dfrac{u}{v}-\theta\right|\right\}$. Vamos considerar dois casos:

1º **caso**: $\theta<\dfrac{u}{v}$.

Assim

$$\delta\leqslant v^2\left(\frac{u}{v}-\theta\right)\text{ e }\delta\leqslant q^2\left(\theta-\frac{p}{q}\right)\Rightarrow\frac{\delta}{v^2}\leqslant\frac{u}{v}-\theta\text{ e }\frac{\delta}{q^2}\leqslant\theta-\frac{p}{q}$$

Somando as desigualdades membro a membro temos:

$$\frac{\delta}{v^2}+\frac{\delta}{q^2}\leqslant\frac{u}{v}-\frac{p}{q}=\frac{uq-pv}{vq}=\frac{1}{vq}\Rightarrow\frac{q}{v}\delta+\frac{v}{q}\delta\leqslant 1\Rightarrow\frac{q}{v}+\frac{v}{q}\leqslant\frac{1}{\delta}$$

2^{o} **caso**: $\frac{u}{v}<\theta$.

Desse modo

$$\delta\leqslant v^2\left(\theta-\frac{u}{v}\right)\text{ e }\delta\leqslant s^2\left(\frac{r}{s}-\theta\right)\Rightarrow\frac{\delta}{v^2}\leqslant\theta-\frac{u}{v}\text{ e }\frac{\delta}{s^2}\leqslant\frac{r}{s}-\theta$$

Somando as desigualdades membro a membro temos:

$$\frac{\delta}{v^2}+\frac{\delta}{s^2}\leqslant\frac{r}{s}-\frac{u}{v}=\frac{vr-us}{vs}=\frac{1}{vs}\Rightarrow\frac{s}{v}\delta+\frac{v}{s}\delta\leqslant 1\Rightarrow\frac{s}{v}+\frac{v}{s}\leqslant\frac{1}{\delta}$$

Considere agora $\delta\leqslant s^2\left(\frac{r}{s}-\theta\right)$ e $\delta\leqslant q^2\left(\theta-\frac{p}{q}\right)$. Obtemos, de maneira análoga aos dois casos que:

$$\frac{q}{s}+\frac{s}{q}\leqslant\frac{1}{\delta}$$

Mostraremos para o 1^{o} caso que $\delta<\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Veja que $\frac{s}{q}$ e $\frac{q}{v}$ satisfazem a inequação $t+\frac{1}{t}\leqslant\frac{1}{\delta}$.

Considere a função $F(t)=t+\frac{1}{t}$ onde $t>0$. Como $F'(t)=1-\frac{1}{t^2}$ temos que $F'(t)<0$ para $t\in(0,1)$, isto é, F é decrescente nesse intervalo e $F'(t)>0$ para $t\in(1,+\infty)$, ou seja, F é crescente nesse intervalo.

A equação $x+\frac{1}{x}=\frac{1}{\delta}$ é equivalente a $x^2-\frac{1}{\delta}x+1=0$, que possui duas raízes reais distintas, pois considerando

$$\delta'=min\left\{q^2\left(\theta-\frac{p}{q}\right),s^2\left(\frac{r}{s}-\theta\right)\right\}$$

Temos pelo Lema 2.3.2, $\delta'<\frac{1}{2}$. Como $\delta\leqslant\delta'$, segue que $\delta<\frac{1}{2}$, daí $\left(\frac{1}{\delta}\right)^2>4$ e portanto $\Delta=\left(\frac{1}{\delta}\right)^2-4>0$.

As raízes de $x^2-\frac{1}{\delta}x+1=0$ são

$$x' = \frac{\frac{1}{\delta} + \sqrt{\frac{1}{\delta^2} - 4}}{2} \text{ e } x'' = \frac{\frac{1}{\delta} - \sqrt{\frac{1}{\delta^2} - 4}}{2} \Rightarrow x' = x \text{ e } x'' = \frac{1}{x}$$

Logo $x \neq \frac{1}{x}$, daí $x^2 \neq 1$, isto é $x \neq \pm 1$. Seja x a raiz maior do que 1. Como θ é irracional, $q^2\left(\theta - \frac{p}{q}\right)$, $s^2\left(\frac{r}{s} - \theta\right)$ e $v^2\left(\frac{u}{v} - \theta\right)$ também são irracionais, desta forma, δ sendo mínimo de irracionais também é irracional.

Daí x é irracional, caso contrário

$$x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{1}{x} \in \mathbb{Q} \Rightarrow x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Q} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{1}{\delta} \in \mathbb{Q}$$

Contradição.

Pelo fato de $\frac{s}{q} + \frac{q}{s} \leqslant \frac{1}{\delta}$ e $\frac{v}{q} + \frac{q}{v} \leqslant \frac{1}{\delta}$ temos $\frac{v}{q}, \frac{q}{v}, \frac{s}{q}, \frac{q}{s} \in \left(\frac{1}{x}, x\right)$. Como $x - \frac{1}{x} = \sqrt{\frac{1}{\delta^2} - 4}$ e $\frac{v}{q} - \frac{s}{q} = \frac{q + s - s}{q} = 1$, com $\frac{v}{q}$, $\frac{s}{q} \in \left(\frac{1}{x}, x\right)$, temos

$$\frac{v}{q} - \frac{s}{q} < x - \frac{1}{x} \Rightarrow 1 < \sqrt{\frac{1}{\delta^2} - 4} \Rightarrow 1 < \frac{1}{\delta^2} - 4 \Rightarrow 5 < \frac{1}{\delta^2} \Rightarrow \delta < \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Para o 2º caso, mostramos de modo análogo ao 1º caso.

□

Lema 2.3.4 ***(Teorema de Hurwitz)*** *Seja θ um número real. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) *θ é irracional;*

(ii) *Existem infinitos $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tais que $0 < \left|\theta - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}b^2}$.*

Demonstração

$(ii) \Rightarrow (i)$: Veja que

$$\sqrt{5} > 1 \Rightarrow \sqrt{5}q^2 > q^2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}q^2} < \frac{1}{q^2}$$

Portanto, existem infinitos $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tais que $0 < \left|\theta - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{q^2}$. Pela implicação $(iv) \Rightarrow (i)$ do Lema 2.1.1, θ é irracional.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Como θ é irracional, as condições do Lema 2.3.1 são satisfeitas. Então pelo Lema 2.3.3, $min\left\{q^2\left(\theta - \dfrac{p}{q}\right), s^2\left(\dfrac{r}{s} - \theta\right), v^2\left|\theta - \dfrac{u}{v}\right|\right\} < \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Portanto

$$0 < \left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$$

ou

$$0 < \left|\theta - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}s^2}$$

ou

$$0 < \left|\theta - \frac{u}{v}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}v^2}$$

ou seja, como são infinitos pares de racionais que obedecem essas desigualdades, existem infinitos racionais $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tais que $0 < \left|\theta - \dfrac{a}{b}\right| < \dfrac{1}{\sqrt{5}b^2}$.

□

Teorema 2.3.1 *A constante $\sqrt{5}$ é a melhor possível para o Teorema de Hurwitz (Lema 2.3.4). Em outras palavras, não existe um outro número t maior que $\sqrt{5}$ tal que*

$$0 < \left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{tq^2}$$

Demonstração

Considere $\theta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Então

$$(x-\theta)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = x^2 - x - 1$$

Para quaisquer p, q com $q > 0$, temos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{p}{q} - \theta\right| \left|\frac{p}{q} - \theta + \sqrt{5}\right| &= \left|\left(\frac{p}{q} - \theta\right)\left(\frac{p}{q} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right| \\
&= \left|\frac{p^2}{q^2} - \frac{p}{q} - 1\right| \\
&= \frac{1}{q^2}\left|p^2 - pq - q^2\right| \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

A expressão em (2.9) é não-nula, pois θ e $\sqrt{5}-\theta$ são irracionais. Portanto $|p^2 - pq - q^2| \geqslant 1$, já que $p^2 - pq - q^2$ é inteiro não-nulo, daí

$$\left|\frac{p}{q} - \theta\right| \left|\frac{p}{q} - \theta + \sqrt{5}\right| \geqslant \frac{1}{q^2} \qquad (2.10)$$

Agora, suponhamos que existe uma seqüência infinita de racionais $\dfrac{p_j}{q_j}$ onde $q_j > 0$ e um número real t positivo tal que

$$\left|\frac{p_j}{q_j} - \theta\right| < \frac{1}{tq_j^2}$$

então

$$q_j\theta - \frac{1}{tq_j} < p_j < q_j\theta + \frac{1}{tq_j}$$

isso implica que para cada q_j, existe uma quantidade finita de p_j. Entretanto, temos $q_j \to \infty$ quando $j \to \infty$, mas por (2.9) e (2.10) e pela desigualdade triangular, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{q_j^2} \leqslant \left|\frac{p_j}{q_j} - \theta\right| \left|\frac{p_j}{q_j} - \theta + \sqrt{5}\right| &\leqslant \left|\frac{p_j}{q_j} - \theta\right| \left(\left|\frac{p_j}{q_j} - \theta\right| + \sqrt{5}\right) \\
&\leqslant \frac{1}{tq_j^2}\left(\frac{1}{tq_j^2} + \sqrt{5}\right)
\end{aligned}$$

daí

$$\frac{1}{q_j^2} \leqslant \frac{1}{tq_j^2}\left(\frac{1}{tq_j^2}+\sqrt{5}\right) \Rightarrow t \leqslant \frac{1}{tq_j^2}+\sqrt{5}$$

entretanto

$$t \leqslant \lim_{j\to\infty}\left(\frac{1}{tq_j^2}+\sqrt{5}\right) \Rightarrow t \leqslant \sqrt{5}$$

□

Denotamos por $\Phi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ a razão de ouro, a qual é raiz do polinômio $x^2 - x - 1$. Recordamos a definição da sequência de Fibonacci $(F_n)_{n\geqslant 0}$:

$$F_0 = 0, F_1 = 1 \text{ e } F_n = F_{n-1} + F_{n-2};\ \forall n \geqslant 2$$

Lema 2.3.5 *Para quaisquer $q \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{Z}$:*

$$\left|\Phi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{\sqrt{5}q^2 + \dfrac{q}{2}}$$

Além disso, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} F_{n-1}^2 \left|\Phi - \frac{F_n}{F_{n-1}}\right| = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Demonstração

Dado um inteiro $q \geqslant 1$, considere $\widehat{p} = [q\Phi]$ o inteiro mais próximo de $q\Phi$. Temos que Φ e $-\Phi^{-1}$ são as raízes do polinômio $x^2 - x - 1$, onde $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\Phi + \Phi^{-1} = \sqrt{5}$. Portanto, $x^2 - x - 1 = (x-\Phi)(x+\Phi^{-1})$.

Substituindo x por $\dfrac{\widehat{p}}{q}$ temos:

$$\left(\frac{\widehat{p}}{q}\right)^2 - \frac{\widehat{p}}{q} - 1 = \left(\frac{\widehat{p}}{q} - \Phi\right)\left(\frac{\widehat{p}}{q} + \Phi^{-1}\right) \Rightarrow (\widehat{p})^2 - \widehat{p}q - q^2 = q^2\left(\frac{\widehat{p}}{q} - \Phi\right)\left(\frac{\widehat{p}}{q} + \Phi^{-1}\right)$$

Como Φ é irracional temos que Φ^{-1} é irracional. Portanto, $\dfrac{\widehat{p}}{q} \in \mathbb{Q}$ não pode ser raiz de $x^2 - x - 1$, logo $(\widehat{p})^2 - \widehat{p}q - q^2$ é um inteiro não nulo, daí

$$1 \leqslant \left|q^2\left(\frac{\widehat{p}}{q} - \Phi\right)\left(\frac{\widehat{p}}{q} + \Phi^{-1}\right)\right| \tag{2.11}$$

Como $\widehat{p}$ é o inteiro mais próximo de $q\Phi$ então $|\widehat{p} - q\Phi| < \dfrac{1}{2}$. Logo

$$\left|\frac{\widehat{p}}{q} + \Phi^{-1}\right| = \left|\frac{\widehat{p}}{q} + \sqrt{5} - \Phi\right| \leqslant \left|\frac{\widehat{p}}{q} - \Phi\right| + \sqrt{5} < \frac{1}{2q} + \sqrt{5} \tag{2.12}$$

Pela desigualdade (2.11) temos:

$$1 \leqslant q^2 \left|\frac{\widehat{p}}{q} - \Phi\right| \left|\frac{\widehat{p}}{q} + \Phi^{-1}\right| < q^2 \left|\frac{\widehat{p}}{q} - \Phi\right| \left(\frac{1}{2q} + \sqrt{5}\right)$$

assim

$$\left|\frac{\widehat{p}}{q} - \Phi\right| > \frac{1}{\dfrac{q}{2} + \sqrt{5}q^2}$$

Como $\widehat{p} = [q\Phi]$, assim para todo $p \in \mathbb{Z}$, $|p - q\Phi| \geqslant |\widehat{p} - q\Phi|$ o que implica que $\left|\dfrac{p}{q} - \Phi\right| \geqslant \left|\dfrac{\widehat{p}}{q} - \Phi\right|$, portanto

$$\left|\frac{p}{q} - \Phi\right| > \frac{1}{\dfrac{q}{2} + \sqrt{5}q^2}$$

Desta forma, segue-se a primeira parte.

Para a segunda parte, vamos deduzir por indução a seguinte igualdade:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - (-1)^n \Phi^{-n}\right)$$

Para $n = 0, F_0 = 0$ e $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^0 - (-1)^0\Phi^{-0}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1-1) = 0$. Logo, $F_0 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^0 - (-1)^0\Phi^{-0}\right)$ ok!

Para $n = 1, F_1 = 1$ e $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^1 - (-1)^1\Phi^{-1}\right) = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$. Logo,

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^1 - (-1)^1\Phi^{-1}\right)$$

Suponhamos que $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - (-1)^n \Phi^{-n}\right)$ para $n \leqslant k$.

Queremos provar que vale para $n = k+1$. Temos que $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$. Pela hipótese de indução $F_{k-1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{k-1} - (-1)^{k-1}\Phi^{-(k-1)}\right)$ e $F_k = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^k - (-1)^k \Phi^{-k}\right)$. Portanto,

$$\begin{aligned}
F_{k+1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^k - (-1)^k\Phi^{-k}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{k-1} - (-1)^{k-1}\Phi^{-(k-1)}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{\Phi^{k+1}}{\Phi} + (-1)^{k+1}\cdot\frac{\Phi^{-k-1}}{\Phi^{-1}} + \frac{\Phi^{k+1}}{\Phi^2} - (-1)^{k+1}\cdot\frac{\Phi^{-(k+1)}}{\Phi^{-2}}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\Phi^{k+1}\left(\frac{1}{\Phi} + \frac{1}{\Phi^2}\right) - (-1)^{k+1}\Phi^{-(k+1)}\left(\frac{1}{\Phi^{-2}} - \frac{1}{\Phi^{-1}}\right)\right]
\end{aligned}$$

No entanto,

$$\frac{1}{\Phi} + \frac{1}{\Phi^2} = \frac{1}{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} + \frac{1}{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} + \frac{4}{6+2\sqrt{5}} = \frac{16+8\sqrt{5}}{16+8\sqrt{5}} = 1$$

$$\frac{1}{\Phi^{-2}} - \frac{1}{\Phi^{-1}} = \Phi^2 - \Phi = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

Portanto, $F_{k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{k+1} - (-1)^{k+1}\Phi^{-(k+1)}\right)$, concluímos que $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - (-1)^n\Phi^{-n}\right)$.

Vamos considerar $u_n = \dfrac{F_n}{F_{n-1}}$ para $n \geqslant 2$.

Assim

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n-(-1)^n\Phi^{-n}\right)}{\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{n-1}-(-1)^{n-1}\Phi^{-(n-1)}\right)}\\
&= \frac{\Phi^n-(-1)^n\Phi^{-n}}{\Phi^{n-1}-(-1)^{n-1}\Phi^{-(n-1)}}\\
&= \frac{1-\dfrac{(-1)^n}{\Phi^{2n}}}{\dfrac{1}{\Phi}-\dfrac{(-1)^{n-1}\Phi}{\Phi^{2n}}}
\end{aligned}$$

daí, $\lim_{n\to\infty} u_n = \Phi$.

Vamos mostrar por indução que $F_n^2 - F_nF_{n-1} - F_{n-1}^2 = (-1)^{n-1}$, para $n \geqslant 1$.

Para $n = 1$ temos:

$F_1^2 - F_1F_0 - F_0^2 = 1^2 - 1\cdot 0 - 0^2 = 1$ e $(-1)^{1-1} = 1$, logo

$$F_1^2 - F_1F_0 - F_0^2 = (-1)^{1-1}$$

Suponha que o resultado seja verdade para $n \leqslant k$. Mostraremos que vale para $n = k+1$.

$$\begin{aligned}
F_{k+1}^2 - F_{k+1}F_k - F_k^2 &= (F_k+F_{k-1})^2 - (F_k+F_{k+1})F_k - F_k^2\\
&= F_k^2 + 2F_kF_{k-1} + F_{k-1}^2 - F_k^2 - F_kF_{k-1} - F_k^2\\
&= (-1)\left[F_k^2 - F_kF_{k-1} - F_{k-1}^2\right]
\end{aligned}$$

Pela hipótese de indução, $F_k^2 - F_kF_{k-1} - F_{k-1}^2 = (-1)^{k-1}$, portanto, $F_{k+1}^2 - F_{k+1}F_k - F_k^2 = (-1)\cdot(-1)^{k-1} = (-1)^{(k+1)-1}$. Assim vale para $k+1$, logo vale para $n \leq 1$.

Na 1ª parte da prova tínhamos que $x^2 - x - 1 = (x-\Phi)\cdot(x+\Phi^{-1})$. Substituindo x por u_n, temos:

$$u_n^2 - u_n - 1 = (u_n - \Phi) \cdot (u_n + \Phi^{-1})$$

Multiplicando por F_{n-1}^2, obtemos

$$F_{n-1}^2 \left(u_n^2 - u_n - 1\right) = F_{n-1}^2(u_n - \Phi) \cdot (u_n + \Phi^{-1})$$

Substituindo $u_n = \dfrac{F_n}{F_{n-1}}$ no 1º membro,
$F_{n-1}^2 \left(\dfrac{F_n^2}{F_{n-1}^2} - \dfrac{F_n}{F_{n-1}} - 1\right) = F_{n-1}^2(u_n - \Phi) \cdot (u_n + \Phi^{-1})$
$F_n^2 - F_nF_{n-1} - F_{n-1}^2 = F_{n-1}^2(u_n - \Phi) \cdot (u_n + \Phi^{-1})$
$(-1)^{n-1} = F_{n-1}^2(u_n - \Phi) \cdot (u_n + \Phi^{-1})$

Assim
$\left|F_{n-1}^2(u_n - \Phi) \cdot (u_n + \Phi^{-1})\right| = |(-1)^{n-1}|$
$F_{n-1}^2 \left|u_n - \Phi\right| = \dfrac{1}{u_n + \Phi^{-1}}$
Portanto
$\lim\limits_{n\to\infty} F_{n-1}^2 \left|u_n - \Phi\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{u_n + \Phi^{-1}} = \dfrac{1}{\Phi + \Phi^{-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, logo

$$\lim_{n\to\infty} F_{n-1}^2 \left|\Phi - \frac{F_n}{F_{n-1}}\right| = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

□

Lema 2.3.6 *Seja α um algébrico real e $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ o polinômio minimal de α de grau $d \geqslant 2$. Considere $c = |P'(\alpha)|$. Dado $\varepsilon > 0$, então existe $q_0 \in \mathbb{Z}$ tal que para qualquer $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ com $q \geqslant q_0$, temos*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{(c+\varepsilon)q^d}$$

Demonstração

Seja q um natural suficientemente grande e $\tilde{p} = [q\alpha]$ o inteiro mais próximo de $q\alpha$. Assim, $|q\alpha - \tilde{p}| \leqslant \dfrac{1}{2}$, ou seja, $\left|\alpha - \dfrac{\tilde{p}}{q}\right| \leqslant \dfrac{1}{2q}$.

Denotamos por a_0 o coeficiente líder de $P(x)$ e por $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ suas raízes onde tomamos sem perda de generalidade $\alpha_1 = \alpha$. Assim

$$P(x) = a_0 (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_d)$$

e

$$q^d P\left(\frac{\tilde{p}}{q}\right) = a_0 q^d \prod_{i=1}^{d} \left(\frac{\tilde{p}}{q} - \alpha_i\right) \tag{2.13}$$

Temos que $P'(x) = a_0 \left[\sum_{i=1}^{d} (x - \alpha_1) \ldots \left(\widehat{x - \alpha_i}\right) \ldots (x - \alpha_d)\right]$, onde o símbolo "$\widehat{\ }$"indica que o termo $(x - \alpha_i)$ em cada parcela da derivada $P'(x)$ não deve aparecer. Daí

$P'(\alpha) = a_0 (\alpha - \alpha_2) (\alpha - \alpha_3) \ldots (\alpha - \alpha_i) \ldots (\alpha - \alpha_d)$

$P'(\alpha) = a_0 \prod_{i=2}^{d} (\alpha - \alpha_i)$

Como $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ e $q^d P\left(\frac{\tilde{p}}{q}\right) \in \mathbb{Z}$. Por ser polinômio minimal $P(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ e assim $q^d P\left(\frac{\tilde{p}}{q}\right)$ é diferente de zero.

Para $i \geqslant 2$ usaremos a estimativa abaixo:

$$\left|\alpha_i - \frac{\tilde{p}}{q}\right| = \left|\alpha_i - \alpha + \alpha - \frac{\tilde{p}}{q}\right| \leqslant |\alpha_i - \alpha| + \left|\alpha - \frac{\tilde{p}}{q}\right| \leqslant |\alpha_i - \alpha| + \frac{1}{2q}$$

Assim, deduzimos que

$$\begin{aligned}
1 &\leqslant \left|q^d P\left(\frac{\tilde{p}}{q}\right)\right| = \left|a_0 q^d \prod_{i=1}^{d} \left(\frac{\tilde{p}}{q} - \alpha_i\right)\right| \\
&= |a_0|\, q^d \left|\frac{\tilde{p}}{q} - \alpha\right| \prod_{i=2}^{d} \left|\frac{\tilde{p}}{q} - \alpha_i\right| \\
&\leqslant |a_0|\, q^d \left|\frac{\tilde{p}}{q} - \alpha\right| \prod_{i=2}^{d} \left(|\alpha - \alpha_i| + \frac{1}{2q}\right) \\
&\leqslant |a_0|\, q^d \left|\frac{\tilde{p}}{q} - \alpha\right| \left[\prod_{i=2}^{d} |\alpha - \alpha_i| + \frac{k}{(2q)^{d-1}}\right]
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $q_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{|a_0|\, k}{(2q)^{d-1}} \leqslant \varepsilon$, para todo $q \geqslant q_0$. Logo

$$\begin{aligned} 1 &\leqslant q^d \left|\alpha - \frac{\tilde{p}}{q}\right| \left(|a_0| \prod_{i=2}^{d} |\alpha - \alpha_i| + \varepsilon\right) \\ &= q^d \left|\alpha - \frac{\tilde{p}}{q}\right| (|P'(\alpha)| + \varepsilon) \end{aligned} \tag{2.15}$$

Agora para todo $p \in \mathbb{Z}$, $|q\alpha - p| \geqslant |q\alpha - \tilde{p}|$ pelo fato de $\tilde{p}$ ser o inteiro mais próximo de $q\alpha$, assim $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| \geqslant \left|\alpha - \dfrac{\tilde{p}}{q}\right|$. Logo

$$1 \leqslant q^d \left|\alpha - \frac{\tilde{p}}{q}\right| \cdot (|P'(\alpha)| + \varepsilon) \Rightarrow \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{q^d(c+\varepsilon)}$$

□

Lema 2.3.7 *Seja θ um número real. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) *θ é irracional*

(ii) *Para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\dfrac{p}{q}$ e $\dfrac{r}{s}$ em $\mathbb{Q}$ tais que*

$$\frac{p}{q} < \theta < \frac{r}{s},\ qr - ps = 1 \ \text{ e } máx\{q\theta - p; r - s\theta\} < \varepsilon$$

(iii) *Existem infinitos pares $\left(\dfrac{p}{q}, \dfrac{r}{s}\right)$ de racionais tais que*

$$\frac{p}{q} < \theta < \frac{r}{s}, qr - ps = 1 \ \text{ e } máx\{q(q\theta - p)s(r - s\theta)\} < 1$$

Demonstração

$(iii) \Rightarrow (ii)$: Dado $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$, pela propriedade arquimediana.

Como existem infinitos pares $\left(\dfrac{p}{q}, \dfrac{r}{s}\right)$ de racionais tais que

$$\frac{p}{q} < \theta < \frac{r}{s}, qr - ps = 1 \text{ e } m\acute{a}x\{q(q\theta - p); s(r - s\theta)\} < 1$$

Considere um par $\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right)$ tais que $q, s > n$, assim:

$$q(q\theta - p) < 1 \Rightarrow q\theta - p < \frac{1}{q} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

e

$$s(r - s\theta) < 1 \Rightarrow r - s\theta < \frac{1}{s} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

o que implica

$$m\acute{a}x\{q\theta - p, r - s\theta\} < \varepsilon$$

$(ii) \Rightarrow (i)$: Dado $\varepsilon > 0$, existe $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tais que

$$q\theta - p < \varepsilon \text{ e } \frac{p}{q} < \theta$$

assim

$$\theta - \frac{p}{q} < \frac{\varepsilon}{q} \text{ e } \theta - \frac{p}{q} > 0 \text{ portanto } 0 < \left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{\varepsilon}{q}$$

Logo, pela implicação $(ii) \Rightarrow (i)$ do Lema 2.1.1, θ é irracional.

$(i) \Rightarrow (iii)$: Como θ é irracional, pela implicação $(i) \Rightarrow (iv)$ do Lema 2.1.1, existem infinitos $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tais que $0 < \left|\theta - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{b^2}$.

Podemos supor $(a, b) = 1$, pois se não fosse teríamos $a = da'$ e $b = db'$ onde $(a', b') = 1$ e $d \in \mathbb{Z}$. Logo

$$0 < \left|\theta - \frac{da'}{db'}\right| < \frac{1}{b^2} \leqslant \frac{1}{b'^2} \text{ e daí } \theta < \left|\theta - \frac{a'}{b'}\right| < \frac{1}{(b')^2}$$

Pelo mesmo argumento da prova do Lema 2.3.1,

Se $\frac{a}{b} < \theta$, fazemos $a = p$ e $b = q$ e existe $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ tal que

$$qr - ps = 1 \text{ e } \frac{p}{q} < \theta < \frac{r}{s} \text{ com } 1 \leqslant s < q$$

assim

$$0 < \frac{r}{s} - \theta < \frac{r}{s} - \frac{p}{q} = \frac{qr - ps}{sq} = \frac{1}{sq} < \frac{1}{s^2} \text{ e daí } s^2\left(\frac{r}{s} - \theta\right) < 1 \text{ e então}$$
$$s(r - s\theta) < 1$$

como

$$\theta - \frac{p}{q} < \frac{1}{q^2} \text{ temos } q(q\theta - p) < 1$$

daí

$$\textit{máx}\{s(r - s\theta); q(q\theta - p)\} < 1$$

Se $\frac{a}{b} > \theta$, fazemos $a = r$ e $b = s$ e existe $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tal que

$$qr - ps = 1 \text{ e } \frac{p}{q} < \theta < \frac{r}{s} \text{ com } 1 \leqslant q < s$$

assim

$$0 < \theta - \frac{p}{q} < \frac{r}{s} - \frac{p}{q} < \frac{qr - ps}{sq} = \frac{1}{sq} < \frac{1}{q^2}\ q^2\left(\theta - \frac{p}{q}\right) < 1\ q(q\theta - p) < 1$$

como

$$\frac{r}{s} - \theta < \frac{1}{s^2}\ s(r - s\theta) < 1$$

daí

$$\textit{máx}\{q(q\theta - p; s(r - s\theta))\} < 1$$

portanto, como existem infinitos $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, segue-se que existem infinitos $\left(\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right)$ de tais que $\frac{p}{q} < \theta < \frac{r}{s}$, $qr - ps = 1$ e $\textit{máx}\{q(q\theta - p); s(r - s\theta)\} < 1$.

□

Para maiores detalhes desta seção veja [8] e [10].

2.4 Séries de Cantor

O Estudo das chamadas Séries de Cantor, teve início em 1869 com George Cantor, com uma publicação na qual deu uma condição necessária e suficiente para que a série

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_1 a_2 \ldots a_n}, \text{ onde } a_i,\, b_i \in \mathbb{Z}, \forall i \in \mathbb{N}. \tag{2.16}$$

convirja para um irracional.

Definição 2.4.1 *A série S definida em (2.16) com a_i e b_i inteiros tais que $a_i \geqslant 2$ e $0 \leqslant b_i \leqslant a_i - 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$ é chamada de Série de Cantor.*

Veja que a Série de Cantor é convergente. Como

$$S = \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_1 a_2} + \frac{b_3}{a_1 a_2 a_3} + \ldots \text{ e } b_i \leqslant a_i - 1,\ \forall\, i \in \mathbb{N}$$

segue-se que

$$\begin{aligned} S &\leqslant \frac{a_1 - 1}{a_1} + \frac{a_2 - 1}{a_1 a_2} + \frac{a_3 - 1}{a_1 a_2 a_3} + \ldots = \\ &= 1 - \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{a_1 a_2 a_3} + \ldots = \\ &= 1 \end{aligned}$$

Como $\dfrac{b_n}{a_1 \ldots a_n} \geqslant 0$ e $S_n = \dfrac{b_1}{a_1} + \ldots + \dfrac{b_n}{a_1 \ldots a_n} < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, S é convergente, pelo Teorema 1.3.5.

Agora, mostraremos resultados que funcionam como critérios de irracionalidade para séries do tipo (2.16).

Teorema 2.4.1 ***(Cantor)*** *Seja S uma série de Cantor. Suponha que para cada inteiro positivo k, existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $k | a_1 a_2 \ldots a_n$. Então S é irracional se e somente se $b_m > 0$ e $b_n < a_n - 1$ para infinitos $m, n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração

($\Leftarrow$) Considere

$$S_i = \sum_{n=i}^{\infty} \frac{b_n}{a_i \ldots a_n} \tag{2.17}$$

temos $0 \leqslant b_i \leqslant a_i - 1$ e $a_i \geqslant 2$ para todo $i \in \mathbb{N}$, pois S é série de Cantor. Temos que $b_i < a_i - 1$ para infinitos $i \in \mathbb{N}$. Assim, para todo $i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
S_i &= \frac{b_i}{a_i} + \frac{b_{i+1}}{a_i a_{i+1}} + \frac{b_{i+2}}{a_i a_{i+1} a_{i+2}} + \ldots < \\
&< \frac{a_i - 1}{a_i} + \frac{a_{i+1} - 1}{a_i a_{i+1}} + \frac{a_{i+2} - 1}{a_i a_{i+1} a_{i+2}} + \ldots = \\
&= 1 - \frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_i a_{i+1}} + \frac{1}{a_i a_{i+1}} - \frac{1}{a_i a_{i+1} a_{i+2}} + \ldots = \\
&= 1
\end{aligned}$$

Note que S_i é uma soma de termos não-negativos, haja vista que $a_i \geqslant 2$ e $b_i \geqslant 0$ além de que, $b_j > 0$ para infinitos $j \in \mathbb{N}$. Logo, $0 < S_i < 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Multiplicando S_i por $\dfrac{1}{a_1 \ldots a_{i-1}}$ temos:

$$\begin{aligned}
\frac{S_i}{a_1 \ldots a_{i-1}} &= \frac{b_i}{a_1 \ldots a_{i-1} a_i} + \frac{b_{i+1}}{a_1 \ldots a_{i-1} a_i a_{i+1}} + \frac{b_{i+2}}{a_1 \ldots a_{i-1} a_i a_{i+1} a_{i+2}} + \ldots = \\
&= S - \left(\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_1 a_2} + \frac{b_3}{a_1 a_2 a_3} + \ldots + \frac{b_{i-1}}{a_1 a_2 \ldots a_{i-1}} \right) = \\
&= S - \frac{c}{a_1 \ldots a_{i-1}}
\end{aligned}$$

onde $c \in \mathbb{Z}$. Assim

$$S_i = S a_1 \ldots a_{i-1} - c \tag{2.18}$$

Suponhamos que $S = \dfrac{p}{q}$ onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$, assim

$$S_i = \frac{p}{q} a_1 \ldots a_{i-1} - c$$

Dado $q \in \mathbb{N}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $q|a_1 \ldots a_{n_0}$ o que implica $a_1 \ldots a_{n_0} = kq$ onde $k \in \mathbb{Z}$. Tomando $i = n_0 + 1$, obtemos:

$$S_{n_0+1} = pk - c \in \mathbb{Z},$$

o que não pode ocorrer, já que $0 < S_{n_0+1} < 1$. Logo, S é irracional.

($\Rightarrow$) Suponha que $b_n > 0$ ou $b_n < a_n - 1$ para uma quantidade finita de n naturais.

1º **caso**: $b_n > 0$ para finitos $n \in \mathbb{N}$.

Daí, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b_n = 0$ para todo $n > n_0$. Portanto,

$$S = \frac{b_1}{a_1} + \ldots + \frac{b_{n_0}}{a_1 \ldots a_{n_0}}$$

daí $S \in \mathbb{Q}$.

2º **caso**: $b_n < a_n - 1$ para finitos $n \in \mathbb{N}$.

Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b_n = a_n - 1$ para todo $n > n_0$. Logo,

$$\begin{aligned} S &= \frac{b_1}{a_1} + \ldots + \frac{b_{n_0}}{a_1 \ldots a_{n_0}} + \frac{a_{n_0+1} - 1}{a_1 \ldots a_{n_0} a_{n_0+1}} + \frac{a_{n_0+2} - 1}{a_1 \ldots a_{n_0} a_{n_0+1} a_{n_0+2}} = \\ &= \frac{b_1}{a_1} + \ldots + \frac{b_{n_0}}{a_1 \ldots a_{n_0}} + \frac{1}{a_1 \ldots a_{n_0}} - \frac{1}{a_1 \ldots a_{n_0} a_{n_0+1}} + \frac{1}{a_1 \ldots a_{n_0} a_{n_0+1}} - \\ &- \frac{1}{a_1 \ldots a_{n_0} a_{n_0+1} a_{n_0+2}} + \ldots = \\ &= \frac{b_1}{a_1} + \ldots + \frac{b_{n_0}}{a_1 \ldots a_{n_0}} + \frac{1}{a_1 \ldots a_{n_0}} \end{aligned}$$

daí $S \in \mathbb{Q}$.

Para os dois casos $S \in \mathbb{Q}$. Logo, se S é irracional temos $b_m > 0$ e $b_n < a_n - 1$ para infinitos $m, n \in \mathbb{N}$.

□

Uma prova geométrica para o teorema de Cantor é dada em [6].

Lema 2.4.1 *Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seqüências de inteiros e S definidos em (2.16). Suponha que $a_n \geqslant 2$ e $0 \leqslant b_n \leqslant a_n - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $b_n > 0$ para infinitos $n \in \mathbb{N}$ e existe uma subseqüência $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\dfrac{b_{i_n}}{a_{i_n}} \to 0$ e $a_{i_n} \to \infty$ quando $n \to \infty$, então S é irracional.*

Demonstração

Considere a seguinte série

$$S_i = \sum_{n=i}^{\infty} \frac{b_n}{a_i \ldots a_n} \tag{2.19}$$

Pelo fato de $b_i \geqslant 0$ e $a_i \geqslant 2$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e $b_i > 0$ para infinitos $i \in \mathbb{N}$, obtemos que

$$\frac{b_i}{a_i} < S_i, \quad \forall\, i \in \mathbb{N} \tag{2.20}$$

como $b_n \leqslant a_n - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$b_{i_n} \leqslant a_{i_n} - 1 \text{ e daí } \frac{b_{i_n}}{a_{i_n}} \leqslant 1 - \frac{1}{a_{i_n}} \tag{2.21}$$

onde $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a subseqüência tal que $\dfrac{b_{i_n}}{a_{i_n}} \to 0$ e $a_{i_n} \to \infty$ quando $n \to \infty$. Pelo fato de $1 - \dfrac{1}{a_{i_n}} \to 1$ e $\dfrac{b_{i_n}}{a_{i_n}} \to 0$ quando $n \to \infty$, concluímos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{b_{i_n}}{a_{i_n}} < 1 - \frac{1}{a_{i_n}}, \quad \forall\, n > n_0$$

ou seja,

$$\frac{b_i}{a_i} < 1 - \frac{1}{a_i} \Leftrightarrow b_i < a_i - 1 \,\text{para infinitos } i \in \mathbb{N} \tag{2.22}$$

Sabendo que $b_i \leqslant a_i - 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$, concluímos que

$$\begin{aligned} S_i &< \frac{b_i}{a_i} + \frac{a_{i+1}-1}{a_i a_{i+1}} + \frac{a_{i+2}-1}{a_i a_{i+1} a_{i+2}} + \frac{a_{i+3}-1}{a_i a_{i+1} a_{i+2} a_{i+3}} + \ldots = \\ &= \frac{b_i}{a_i} + \frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_i a_{i+1}} + \frac{1}{a_i a_{i+1}} - \frac{1}{a_i a_{i+1} a_{i+2}} + \frac{1}{a_i a_{i+1} a_{i+2}} - \\ &- \frac{1}{a_i a_{i+1} a_{i+2} a_{i+3}} + \ldots = \\ &= \frac{b_i}{a_i} + \frac{1}{a_i}, \quad \forall\, i \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Portanto, podemos concluir junto com (2.20) que

$$\frac{b_i}{a_i} < S_i < \frac{b_i + 1}{a_i}$$

sendo $\dfrac{b_i}{a_i} \geqslant 0$, inferimos que

$$0 < S_i < \frac{b_i + 1}{a_i}, \quad \forall\, i \in \mathbb{N}$$

desse modo

$$0 < S_{i_n} < \frac{b_{i_n} + 1}{a_{i_n}} \tag{2.23}$$

Suponhamos que $S = \dfrac{p}{q}$ onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$. Por (2.18)

$$S_i = \frac{p}{q} a_1 \ldots a_{i-1} - c \text{ onde } c \in \mathbb{Z} \quad \text{portanto} \quad qS_i \in \mathbb{Z}, \quad \forall\, i \in \mathbb{N}$$

Por (2.23), temos

$$0 < qS_{i_n} < q\left(\frac{b_{i_n}}{a_{i_n}} + \frac{1}{a_{i_n}}\right)$$

Pelo fato de $q\left(\dfrac{b_{i_n}}{a_{i_n}} + \dfrac{1}{a_{i_n}}\right) \to 0$ quando $n \to \infty$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $q\left(\dfrac{b_{i_n}}{a_{i_n}} + \dfrac{1}{a_{i_n}}\right) < 1$ para $n > n_1$. Assim

$$0 < qS_{i_n} < 1 \qquad \forall\, n > n_1$$

o que não pode ocorrer já que qS_{i_n}. Portanto, S é irracional.

□

O próximo resultado extende o lema anterior. Foi demonstração em 1955 num trabalho de Oppenheim para o caso em que os $b_i's$ podem ter ambos os sinais.

Lema 2.4.2 *Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seqüências de inteiros e S definidos em (2.16). Suponha que $a_n \geqslant 2$ e $|b_n| \leqslant a_n - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se para todo $i \in \mathbb{N}$ existirem $m, n > i$ tais que $b_m \cdot b_n < 0$ e existir uma subseqüência $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\dfrac{b_{i_n}}{a_{i_n}} \to 0$ e $a_{i_n} \to \infty$ quando $n \to \infty$, então S é irracional.*

Demonstração

Para todo $n \in \mathbb{N}$

$$|b_n| \leqslant a_n - 1 \text{ e daí } \frac{|b_n|}{a_n} \leqslant 1 - \frac{1}{a_n} \tag{2.24}$$

Daí para a subseqüência $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ temos que

$$\frac{|b_{i_n}|}{a_{i_n}} \leqslant 1 - \frac{1}{a_{i_n}}$$

Como $a_{i_n} \to \infty$ quando $n \to \infty$, segue-se que $1 - \dfrac{1}{a_{i_n}} \to 1$. Mas $\dfrac{|b_{i_n}|}{a_{i_n}} \to 0$, dessa maneira, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{|b_{i_n}|}{a_{i_n}} < 1 - \frac{1}{a_{i_n}}, \qquad \forall\, n > n_0$$

Logo concluímos que

$$|b_n| < a_n - 1 \,\text{para infinitos}\; n \in \mathbb{N} \tag{2.25}$$

Por (2.24) e (2.25) temos respectivamente,

$$1 - a_n \leqslant b_n \leqslant a_n - 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

e

$$1 - a_n < b_n < a_n - 1, \text{ para infinitos } n \in \mathbb{N}$$

De (2.19), obtemos as desigualdades abaixo:

$$\begin{aligned} \dots & + \frac{1-a_{i+3}}{a_ia_{i+1}a_{i+2}a_{i+3}} + \frac{1-a_{i+2}}{a_ia_{i+1}a_{i+2}} + \frac{1-a_{i+1}}{a_ia_{i+1}} + \frac{b_i}{a_i} < S_i < \frac{b_i}{a_i} + \frac{a_{i+1}-1}{a_ia_{i+1}} + \\ + & \frac{a_{i+2}-1}{a_ia_{i+1}a_{i+2}} + \frac{a_{i+3}-1}{a_ia_{i+1}a_{i+2}a_{i+3}} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dots & + \frac{1}{a_ia_{i+1}a_{i+2}a_{i+3}} - \frac{1}{a_ia_{i+1}a_{i+2}} + \frac{1}{a_ia_{i+1}a_{i+2}} - \frac{1}{a_ia_{i+1}} + \frac{1}{a_ia_{i+1}} - \frac{1}{a_i} + \\ + & \frac{b_i}{a_i} < S_i < \frac{b_i}{a_i} + \frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_ia_{i+1}} + \frac{1}{a_ia_{i+1}} - \frac{1}{a_ia_{i+1}a_{i+2}} + \frac{1}{a_ia_{i+1}a_{i+2}} - \\ - & \frac{1}{a_ia_{i+1}a_{i+2}a_{i+3}} + \dots \end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{b_i-1}{a_i} < S_i < \frac{b_i+1}{a_i}, \quad \forall\, i \in \mathbb{N} \tag{2.26}$$

Afirmação 2.4.1 *Temos que $S_i \neq 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$.*

Demonstração

Vamos considerar três casos:

1º **caso**: $b_i \geqslant 1$.

Por (2.26) temos que $S_i > \dfrac{b_i-1}{a_i}$, como $b_i - 1 \geqslant 0$ e $a_i \geqslant 2 \Rightarrow S_i > 0$.

2º **caso**: $b_i \leqslant -1$.

Por (2.26) temos que $S_i < \dfrac{b_i+1}{a_i}$, como $b_i + 1 \leqslant 0$ e $a_i \geqslant 2 \Rightarrow S_i < 0$.

3º **caso**: $b_i = 0$.

Dado $i \in \mathbb{N}$ existem $m, n > i$ tal que $b_mb_n < 0$ o que implica $b_m, b_n \neq 0$. Sem perda de generalidade, suponha que $m < n$. Como $m > i$ temos $m =$

$i+s$ com $s \in \mathbb{N}$. Dessa forma, se $b_i = b_{i+1} = \ldots = b_{i+s-1} = 0$ e $b_{i+s} \neq 0$ então

$$\begin{aligned} S_i &= \frac{b_{i+s}}{a_i \ldots a_{i+s}} + \frac{b_{i+s+1}}{a_i \ldots a_{i+s} a_{i+s+1}} + \frac{b_{i+s+2}}{a_i \ldots a_{i+s} a_{i+s+1} a_{i+s+2}} + \ldots = \\ &= \frac{1}{a_i \ldots a_{i+s-1}} \left(\frac{b_{i+s}}{a_{i+s}} + \frac{b_{i+s+1}}{a_{i+s} a_{i+s+1}} + \frac{b_{i+s+2}}{a_{i+s} a_{i+s+1} a_{i+s+2}} \right) = \\ &= \frac{S_{i+s}}{a_i \ldots a_{i+s-1}} \end{aligned}$$

Pelos casos anteriores, $S_{i+s} \neq 0$, logo $S_i \neq 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Voltando à prova do lema, vamos extrair uma subseqüência $(i_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ de $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ onde $\mathbb{N}'$ é um subconjunto de $\mathbb{N}$ infinito tal que S_{i_n} tenha o mesmo sinal. Suponha sem perda de generalidade que $S_{i_n} > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}'$. Por (2.26) concluímos que

$$0 < S_{i_n} < \frac{b_{i_n} + 1}{a_{i_n}}, \quad \forall n > n_0 \text{ e } n \in \mathbb{N}' \tag{2.27}$$

Suponhamos que $S = \dfrac{p}{q}$ onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$. Por (2.18) temos que $S_i = \dfrac{p}{q} a_1 \ldots a_{i-1} - c$ onde $c \in \mathbb{Z}$ e então $qS_i \in \mathbb{Z}$, $\forall\, i \in \mathbb{N}$.

Logo por (2.27)

$$0 < qS_{i_n} < q \left(\frac{b_{i_n} + 1}{a_{i_n}} \right), \forall\, n > n_0 \text{ e } n \in \mathbb{N}'$$

Sabendo que $(i_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ é subseqüência de $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $q \left(\dfrac{b_{i_n} + 1}{a_{i_n}} \right) \to 0$ quando $n \to \infty$. Logo existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $q \left(\dfrac{b_{i_n} + 1}{a_{i_n}} \right) < 1$ para todo $n > n_1$. Assim,

$$0 < qS_{i_n} < 1, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}' \text{ com } n > m\acute{a}x\, \{n_0, n_1\}$$

o que não pode ocorrer, já que $qS_{i_n} \in \mathbb{Z}$. Portanto, S é irracional.

$\square$

Lema 2.4.3 *Sejam* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *seqüências de inteiros onde* $a_n > 1$ *e* $a_n \nmid b_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Se* $\liminf_{i\to\infty} |S_i| = 0$ *onde* S_i *está definida em (2.19), então* S *definida em (2.16) é irracional.*

Demonstração

Considere

$$S_{M,N} = \sum_{n=M}^{N-1} \frac{b_n}{a_M \dots a_n}, \text{ onde } M, N \in \mathbb{N} \text{ e } M < N$$

Afirmação 2.4.2 *Temos que* $S_{M,N} \neq 0$.

Demonstração

Suponha que $S_{M,N} = 0$, assim:

$$\frac{b_M}{a_M} + \frac{b_{M+1}}{a_M a_{M+1}} + \dots + \frac{b_{N-2}}{a_M \dots a_{N-2}} + \frac{b_{N-1}}{a_M \dots a_{N-1}} = 0$$

$$\frac{b_M (a_{M+1} \dots a_{N-1}) + b_{M+1} (a_{M+2} \dots a_{N-1}) + \dots + b_{N-2} a_{N-1} + b_{N-1}}{a_M \dots a_{N-1}} = 0$$

$$\frac{a_{N-1} [b_M (a_{M+1} \dots a_{N-2}) + b_{M+1} (a_{M+2} \dots a_{N-2}) + \dots + b_{N-2}] + b_{N-1}}{a_M \dots a_{N-1}} = 0$$

isto é,

$$a_{N-1} k + b_{N-1} = 0$$

onde $k = b_M (a_{M+1} \dots a_{N-2}) + b_{M+1} (a_{M+2} \dots a_{N-2}) + \dots + b_{N-2} \in \mathbb{Z}$, o que significa dizer que $a_{N-1} | b_{N-1}$. Absurdo, pois $a_n \nmid b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, daí $S_{M,N} \neq 0$.

De volta à prova do lema, obtemos a seguinte relação para S_N:

$$\frac{S_N}{a_1 \dots a_{N-1}} = \frac{b_N}{a_1 \dots a_{N-1} a_N} + \frac{b_{N+1}}{a_1 \dots a_{N-1} a_N a_{N+1}} + \dots$$

Temos então

$$\frac{S_N}{a_1 \dots a_{N-1}} = S - \left(\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_1 a_2} + \dots + \frac{b_{N-1}}{a_1 \dots a_{N-1}} \right)$$

Suponhamos que $S = \dfrac{p}{q}$ onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$. Daí

$$\frac{S_N}{a_1 \dots a_{N-1}} = \frac{p}{q} - \left(\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_1 a_2} + \dots + \frac{b_{N-1}}{a_1 \dots a_{N-1}} \right) \text{ e daí}$$

$$qS_N = pa_1 \dots a_{N-1} - d \text{ onde } d \in \mathbb{Z} \text{ logo } qS_N \in \mathbb{Z}, \forall N \in \mathbb{N}$$

Temos que $\liminf_{N\to\infty} (q |S_N|) = q \liminf_{N\to\infty} (|S_N|)$ onde $q \in \mathbb{N}$. Pelo fato de $\liminf_{N\to\infty} |S_N| = 0$, concluímos que $\liminf_{N\to\infty} (q |S_N|) = 0$, ou seja, existe uma subseqüência $(q |S_N|)_{N\in\mathbb{N}'}$ de $(q |S_N|)_{N\in\mathbb{N}}$ onde $\mathbb{N}'$ é um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ tal que

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ N\in\mathbb{N}'}} q |S_N| = 0 \Leftrightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N}' \text{ tal que } q |S_N| = 0, \forall N > N_1 \text{ e } N \in \mathbb{N}'$$

Tomemos $M, N \in \mathbb{N}'$ tal que $N > M > N_1$ o que implica

$$q |S_N| = q |S_M| = 0 \text{ e daí } S_N = S_M = 0$$

no entanto

$$\begin{aligned} S_M &= \frac{b_M}{a_M} + \frac{b_{M+1}}{a_M a_{M+1}} + \dots + \frac{b_{N-1}}{a_M \dots a_{N-1}} + \frac{b_N}{a_M \dots a_{N-1} a_N} + \\ &+ \frac{b_{N+1}}{a_M \dots a_{N-1} a_N a_{N+1}} + \dots \end{aligned}$$

e $S_N = \dfrac{b_N}{a_N} + \dfrac{b_{N+1}}{a_N a_{N+1}} + \dots$.

$$\text{Daí } S_{M,N} = S_M - \frac{S_N}{a_1 \dots a_{N-1}} \text{ e então } S_{M,N} = 0$$

o que contradiz a Afirmação 2.4.2. Portanto, S é irracional.

Para maiores detalhes sobre estas séries, veja em [7] e [9].

$\square$

2.5 Frações Contínuas Simples

1. **O Algoritmo de Euclides**

Dada qualquer fração racional $\dfrac{u_0}{u_1}$, com $(u_0, u_1) = 1$ e $u_1 > 0$. Aplicando o algoritmo de Euclides

$$\begin{aligned} u_0 &= u_1a_0 + u_2, & 0 < u_2 < u_1 \\ u_1 &= u_2a_1 + u_3, & 0 < u_3 < u_2 \\ u_2 &= u_3a_2 + u_4, & 0 < u_4 < u_3 \\ &\vdots \\ u_{n-1} &= u_na_{n-1} + u_{n+1}, & 0 < u_{n+1} < u_n \\ u_n &= u_{n+1}a_n \end{aligned} \tag{2.28}$$

Fazendo $\zeta_i = \dfrac{u_i}{u_{i+1}}$ para $0 \leqslant i \leqslant n$, tem-se a partir das equações (2.28) que

$$\zeta_i = a_i + \frac{1}{\zeta_{i+1}},\ 0 \leqslant i \leqslant n-1 \quad e \quad \zeta_n = a_n \tag{2.29}$$

Daí temos

$$\zeta_0 = a_0 + \frac{1}{\zeta_1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\zeta_2}} = \ldots = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \ddots + \cfrac{1}{a_{j-1} + \cfrac{1}{a_j}}} \tag{2.30}$$

Essa é a expansão em fração contínua de $\dfrac{u_0}{u_1}$. Os inteiros a_i são chamadas de quocientes parciais. Presumimos que $\dfrac{u_0}{u_1}$ tem denominador positivo, mas não podemos fazer suposição similar para u_0 e portanto a_0 pode ser positivo, negativo ou zero. Entretanto, sendo $0 < u_2 < u_1$, notemos que a_1 é positivo e similarmente a subseqüência $a_2, a_3, \ldots$ é formada por inteiros positivos.

Usaremos a notação $\langle a_0, a_1, \ldots, a_j \rangle$ para designar a fração contínua em (2.30). Em geral, para quaisquer $x_0, x_1, \ldots, x_j$ números reais positivos, exceto possivelmente x_0, podemos escrever:

$$\langle x_0, x_1, \ldots, x_j \rangle = x_0 + \cfrac{1}{x_1 + \ddots + \cfrac{1}{x_{j-1} + \cfrac{1}{x_j}}}$$

tal fração contínua é chamada de simples, se todos os x_i são inteiros.

Facilmente obtemos a relação abaixo:

$$\begin{aligned} \langle x_0, x_1, \ldots, x_j \rangle &= x_0 + \frac{1}{\langle x_1, \ldots, x_j \rangle} \\ &= \left\langle x_0, x_1, \ldots, x_{j-2}, x_{j-1} + \frac{1}{x_j} \right\rangle \end{aligned} \tag{2.31}$$

2. **Unicidade**

Em geral, note que a fração contínua simples em (2.30) tem uma forma alternativa

$$\frac{u_0}{u_1} = \langle a_0, a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j \rangle = \langle a_0, a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j - 1, 1 \rangle \tag{2.32}$$

O seguinte resultado estabelece que essas são duas únicas expansões em fração contínua simples de um número racional fixado.

Teorema 2.5.1 *Se $\langle a_0, a_1, \ldots, a_n \rangle = \langle b_0, b_1, \ldots, b_m \rangle$ onde essas duas frações contínuas finitas são simples e se $a_n > 1$ e $b_m > 1$, então $n = m$ e $a_i = b_i$ para $i = 0, 1, \ldots, n$.*

Demonstração

Podemos supor sem perda de generalidade que $n \leq m$.

Considere $y_j = \langle b_j, b_{j+1}, \ldots, b_m \rangle$ e observe que

$$y_j = \langle b_j, b_{j+1}, \ldots, b_m \rangle = b_j + \frac{1}{\langle b_{j+1}, b_{ij+2}, \ldots, b_m \rangle} = b_j + \frac{1}{y_{j+1}} \tag{2.33}$$

Temos que $y_j > b_j$ e assim $y_j > 1$, $\forall j = 1, 2, \ldots, m$, pois $b_j > 0$ para todo $j = 1, \ldots, m$. Dessa forma, $0 < \dfrac{1}{y_{j+1}} < 1$ e assim $b_j < y_j < b_j + 1$ e pela parte 1 do Teorema 1.2.1 temos $b_j = \lfloor y_j \rfloor$ para todo $0 \leqslant j \leqslant m$.

Usando a notação das igualdades em (2.30), $y_0 = \zeta_0$. Agora, como $\zeta_i = \dfrac{u_i}{u_{i+1}}$, temos que $\zeta_i > 1$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ e daí $0 < \dfrac{1}{\zeta_{i+1}} < 1$. Por (2.29) temos que $\zeta_i = a_i + \dfrac{1}{\zeta_{i+1}}$, segue-se que $a_i = \lfloor \zeta_i \rfloor$ para $0 \leqslant i \leqslant j$.

Para $i = 0$, temos $b_0 = \lfloor y_0 \rfloor = \lfloor \zeta_0 \rfloor = a_0$, já que $y_0 = \zeta_0$.

Para $i = 1$ temos

$$\frac{1}{\zeta_1} = \zeta_0 - a_0 = y_0 - b_0 = \frac{1}{y_1} \Rightarrow \zeta_1 = y_1 \Rightarrow a_1 = \lfloor \zeta_1 \rfloor = \lfloor y_1 \rfloor = b_1$$

Para $i = 2$ temos

$$\frac{1}{\zeta_2} = \zeta_1 - a_1 = y_1 - b_1 = \frac{1}{y_2} \Rightarrow \zeta_2 = y_2 \Rightarrow a_2 = \lfloor \zeta_2 \rfloor = \lfloor y_2 \rfloor = b_2$$

Repetindo o raciocínio mostra-se que $a_3 = b_3, a_4 = b_4, \ldots, a_n = b_n$. Suponha que $n < m$, então

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}} = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \ddots + \cfrac{1}{b_{n-1} + \cfrac{1}{b_n} + \cfrac{1}{y_{n+1}}}}$$

Portanto $\dfrac{1}{y_{n+1}} = 0$. Absurdo, logo $n = m$.

$\square$

Teorema 2.5.2 *Qualquer fração contínua simples e finita representa um número racional. Reciprocamente, qualquer número racional pode ser expresso como uma fração contínua simples e finita.*

Demonstração

A primeira afirmação pode ser estabelecida por indução matemática sobre a quantidade n de termos que forma a fração contínua $\langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle$ onde $a_i \in \mathbb{Z}$.

Para $n = 1$ temos $\langle a_0\rangle = a_0 \in \mathbb{Q}$. No caso $n = 2$ obtemos $\langle a_0, a_1\rangle = a_0 + \dfrac{1}{a_1} \in \mathbb{Q}$.

Suponha que a afirmação seja verdade para $n = k$. Para $n = k + 1$ temos

$$\langle a_0, \ldots, a_k\rangle = a_0 + \frac{1}{\langle a_1, \ldots, a_k\rangle}$$

Por hipotése de indução $\langle a_1, \ldots, a_k\rangle \in \mathbb{Q}$ e daí $\langle a_0, \ldots, a_k\rangle \in \mathbb{Q}$.

A recíproca segue-se do desenvolvimento de $\dfrac{u_0}{u_1}$ em (2.20).

□

3. **Frações Contínuas Infinitas**

Dados $a_0, a_1, \ldots$ uma seqüência infinita de inteiros, todos positivos, exceto possivelmente a_0. Definimos duas seqüências de inteiros (h_n) e (k_n) indutivamente da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} h_{-2} = 0, h_{-1} = 1, h_i = a_i h_{i-1} + h_{i-2}, &\quad \forall\, i \geqslant 0 \\ k_{-2} = 1, k_{-1} = 0, k_i = a_i k_{i-1} + k_{i-2}, &\quad \forall\, i \geqslant 0 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Notemos que $k_0 = 1, k_1 = a_1 k_0 \geqslant k_0, k_2 > k_1, k_3 > k_2$, etc. Logo, $1 = k_0 \leqslant k_1 < k_2 < k_3 < \ldots < k_n < \ldots$.

Teorema 2.5.3 *Para qualquer número real x positivo*

$$\langle a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, x\rangle = \frac{x h_{n-1} + h_{n-2}}{x k_{n-1} + k_{n-2}}$$

Demonstração

Por indução, se $n = 0$ o resultado é interpretado assim:

$$x = \frac{x h_{-1} + h_{-2}}{x k_{-1} + k_{-2}}$$

a qual é verdade por (2.34). Para $n = 1$,

$$\frac{xh_0 + h_{-1}}{xk_0 + k_{-1}} = \frac{xa_0 + 1}{x.1 + 0}$$

Já que $h_0 = a_0, h_{-1} = 1, k_0 = 1$ e $k_{-1} = 0$, por (2.34). Daí

$$\frac{xh_0 + h_{-1}}{xk_0 + k_{-1}} = a_0 + \frac{1}{x} = \langle a_0, x\rangle$$

Suponhamos que seja verdade para $n = m$:

$$\langle a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, x\rangle = \frac{xh_{m-1} + h_{m-2}}{xk_{m-1} + k_{m-2}}$$

Queremos provar que vale para $n = m + 1$. Note que

$$\langle a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m, x\rangle = \left\langle a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m + \frac{1}{x}\right\rangle$$

Pela hipótese de indução,

$$\begin{aligned}
\left\langle a_0, a_1, a_{m-1}, a_m + \frac{1}{x}\right\rangle &= \frac{\left(a_m + \frac{1}{x}\right) h_{m-1} + h_{m-2}}{\left(a_m + \frac{1}{x}\right) k_{m-1} + k_{m-2}} \\
&= \frac{x\left(a_m h_{m-1} + h_{m-2}\right) + h_{m-1}}{x\left(a_m k_{m-1} + k_{m-2}\right) + k_{m-1}} \\
&= \frac{xh_m + h_{m-1}}{xk_m + k_{m-1}}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, x\rangle = \frac{xh_{n-1} + h_{n-2}}{xk_{n-1} + k_{n-2}}$$

□

Teorema 2.5.4 *Se definimos* $r_n = \langle a_0, a_1, \ldots, a_n\rangle$ *para todo* $n \geqslant 0$, *então* $r_n = \dfrac{h_n}{k_n}$.

Demonstração

Aplicaremos o Teorema 2.5.3 com $x = a_n$ e usaremos a equação (2.34), assim:

$$r_n = \langle a_0, a_1, \ldots, a_n \rangle = \frac{a_n h_{n-1} + h_{n-2}}{a_n k_{n-1} + k_{n-2}} = \frac{h_n}{k_n}$$

$\square$

Teorema 2.5.5 *$h_i k_{i-1} - h_{i-1} k_i = (-1)^{i-1}$ e $r_i - r_{i-1} = \dfrac{(-1)^{i-1}}{k_i k_{i-1}}$ para $i \geq 1$ e*

$$h_i k_{i-2} - h_{i-2} k_i = (-1)^i a_i \ \text{ e } r_i - r_{i-2} = \frac{(-1)^i a_i}{k_i k_{i-2}} \ \text{ para } i \geq 2$$

A fração $\dfrac{h_i}{k_i}$ é irredutível.

Demonstração

Para mostrar a primeira igualdade usaremos indução.

Para $i = 1$ temos, por (2.34)

$$\begin{aligned} h_1 k_0 - h_0 k_1 &= (a_1 h_0 + h_{-1})\, k_0 - h_0 (a_1 k_0 + k_{-1}) \\ &= (a_1 a_0 + 1)\,.1 - a_0 (a_1.1 + 0) \\ &= 1 \\ &= (-1)^{1-1} \end{aligned}$$

Suponha que o resultado verdade para $i = m$, isto é

$$h_m k_{m-1} - h_{m-1} k_m = (-1)^{m-1}$$

Mostraremos que o resultado vale para $i = m + 1$. Usando a relação (2.34), temos

$$\begin{aligned} h_{m+1}k_m - h_m k_{m+1} &= (a_{m+1}h_m + h_{m-1})\, k_m - h_m\,(a_{m+1}k_m + k_{m-1}) = -(-1)^{m-1} = (-1)^{(m+1)-} \\ &= h_{m-1}k_m - h_m k_{m-1} \\ &= -\,(h_m k_{m-1} - h_{m-1}k_m) \end{aligned}$$

portanto

$$h_i k_{i-1} - h_{i-1}k_i = (-1)^{i-1}, \quad \forall\, i \geqslant 1$$

Pelo Teorema 2.5.4, $r_i = \dfrac{h_i}{k_i}$ e $r_{i-1} = \dfrac{h_{i-1}}{k_{i-1}}$ para todo $i \geqslant 1$. Assim

$$r_i - r_{i-1} = \frac{h_i k_{i-1} - h_{i-1}k_i}{k_i k_{i-1}} = \frac{(-1)^{i-1}}{k_i k_{i-1}}, \quad \forall\, i \geqslant 1$$

Vamos agora mostrar que $h_i k_{i-2} - h_{i-2}k_i = (-1)^i a_i$. Por (2.34), $h_i = a_i h_{i-1} + h_{i-2}$ e $k_i = a_i k_{i-1} + k_{i-2}$. Desse modo:

$$\begin{aligned} h_i k_{i-2} - h_{i-2}k_i &= (a_i h_{i-1} + h_{i-2})\, k_{i-2} - h_{i-2}\,(a_i k_{i-1} + k_{i-2}) \\ &= a_i\,(h_{i-1}k_{i-2} - h_{i-2}k_{i-1}) \\ &= a_i \cdot (-1)^{i-1-1} \\ &= (-1)^i a_i \end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.5.4, $r_i = \dfrac{h_i}{k_i}$ e $r_{i-2} = \dfrac{h_{i-2}}{k_{i-2}}$ para todo $i \geqslant 2$. Assim

$$r_i - r_{i-2} = \frac{h_i k_{i-2} - h_{i-2}k_i}{k_i k_{i-2}} = \frac{(-1)^i a_i}{k_i k_{i-2}}, \quad \forall\, i \geqslant 2$$

$\square$

Teorema 2.5.6 *Os valores de r_n definidos no Teorema 2.5.4 satisfazem a infinita cadeia de desigualdades $r_0 < r_2 < r_4 < r_6 < \ldots < r_7 < r_5 < r_3 < r_1$. Em outras palavras, a subseqüência $(r_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente e a subseqüência $(r_{2j-1})_{j\in\mathbb{N}}$ é decrescente, e todo r_{2n} é menor do que r_{2j-1}. Além do mais, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n$ existe e, para todo $j \geqslant 0$, $r_{2j} < \lim\limits_{n\to\infty} r_n < r_{2j+1}$.*

Demonstração

Temos identidades do Teorema 2.5.5:

$$r_i - r_{i-1} = \frac{(-1)^{i-1}}{k_i k_{i-1}} \text{ e } r_i - r_{i-2} = \frac{(-1)^i a_i}{k_i k_{i-2}}, \ \forall i \geqslant 2$$

Vimos na definição da seqüência $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que $k_n > 0$ para todo $n \geqslant 0$ e $a_i > 0$ para todo $i \geqslant 1$. Dessa forma,

$$r_{2j} - r_{2j-1} = \frac{(-1)^{2j-1}}{k_{2j}k_{2j-1}} < 0$$

$$r_{2j+2} - r_{2j} = \frac{(-1)^{2j+2}a_{2j+2}}{k_{2j+2}k_{2j}} > 0$$

$$r_{2j+1} - r_{2j-1} = \frac{(-1)^{2j+1}a_{2j+1}}{k_{2j+1}k_{2j-1}} < 0$$

Assim, $r_{2j} < r_{2j-1}$, $r_{2j} < r_{2j+2}$ e $r_{2j-1} > r_{2j+1}$. Então temos que

$$r_{2n} < r_{2j-1}$$

A seqüência $r_0, r_2, r_4, \ldots$ é monótona crescente e limitada por r_1, logo tem limite. Analogamente, a seqüência $r_1, r_3, r_5, \ldots$ é monótona decrescente e limitada por r_0, daí tem limite. Pelo Teorema 2.5.5

$$|r_i - r_{i-1}| = \frac{1}{k_i k_{i-1}}$$

onde $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência crescente de números positivos, logo $k_i \to \infty$ quando $i \to \infty$.

Como $|r_i - r_{i-1}| \leqslant \dfrac{1}{k_i}$ temos $|r_i - r_{i-1}| \to 0$ quando $i \to \infty$. Assim

$$\lim_{i\to\infty} r_{2i} = \lim_{i\to\infty} r_{2i-1}$$

Portanto,

$$\lim_{i\to\infty} r_{2i} = \lim_{i\to\infty} r_i = \lim_{i\to\infty} r_{2i-1}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} r_{2n} > r_{2j}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} r_{2n-1} < r_{2j+1}$; para todo $j \in \mathbb{N}$ então

$$r_{2j} < \lim_{n\to\infty} r_n < r_{2j+1}$$

□

Definição 2.5.1 *A seqüência infinita de inteiros $a_0, a_1, a_2, \ldots$ todos positivos, exceto possivelmente a_0, determinam uma fração contínua simples e infinita $\langle a_0, a_1, a_2, \ldots\rangle$. O valor de $\langle a_0, a_1, a_2, \ldots\rangle$ é definida como*

$$\lim_{n\to\infty} \langle a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$$

Observe que $r_n = \langle a_0, a_1, \ldots, a_n\rangle$ e pelo Teorema 2.5.6, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n$ existe e podemos escrevê-lo como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{h_n}{k_n}$, pelo Teorema 2.5.4. O número racional $\langle a_0, a_1, \ldots, a_n\rangle = \dfrac{h_n}{k_n} = r_n$ é chamado n-convergente para a fração contínua infinita. Dizemos que a fração contínua infinita converge para o valor $\lim\limits_{n\to\infty} r_n$. O próximo Teorema é um critério de irracionalidade no qual tem uma grande aplicabilidade, onde daremos uma maior ênfase na seção 3.1.

Teorema 2.5.7 *O valor de qualquer fração contínua simples e infinita $\langle a_0, a_1, a_2, \ldots\rangle$ é irracional.*

Demonstração

Seja $\theta = \langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle$. Pela definição 2.5.1, $\theta = \lim_{n\to\infty} \langle a_0, a_1, \ldots, a_n \rangle$, entretanto, pelo Teorema 2.5.6, $r_n < \theta < r_{n+1}$. Logo

$$0 < |\theta - r_n| < |r_{n+1} - r_n|$$

Usando a identidade $r_{n+1} - r_n = \dfrac{(-1)^n}{k_n k_{n+1}}$ do Teorema 2.5.5, temos

$$0 < |\theta - r_n| < \frac{1}{k_n k_{n+1}}$$

Multiplicando essa desigualdade por k_n obtemos:

$$0 < |k_n\theta - r_n k_n| < \frac{1}{k_{n+1}} \Rightarrow 0 < |k_n\theta - h_n| < \frac{1}{k_{n+1}}$$

Suponha que $\theta = \dfrac{a}{b}$ com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{N}$. Daí

$$0 < |k_n a - h_n b| < \frac{b}{k_{n+1}}$$

Como $k_{n+1} \to \infty$ quando $n \to \infty$, ou seja, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$0 < |k_n a - h_n b| < 1, \; \forall n > n_0$$

Contradição, já que $k_n a - h_n b \in \mathbb{Z}$. Portanto, θ é irracional.

Lema 2.5.1 *Seja $\theta = \langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle$ uma fração contínua simples e infinita, então $a_0 = \lfloor \theta \rfloor$. Além do mais, se θ_1 denota $\langle a_1, a_2, a_3, \ldots \rangle$ então $\theta = a_0 + \dfrac{1}{\theta_1}$.*

Demonstração

Pelo Teorema 2.5.6,

$$r_0 < \theta < r_1, \text{ isto é } a_0 < \theta < a_0 + \frac{1}{a_1}$$

Como $a_1 \geqslant 1$ temos $a_0 < \theta < a_0 + 1$ e daí $a_0 = \lfloor \theta \rfloor$. Logo

$$\begin{aligned}
\theta &= \lim_{n\to\infty} \langle a_0, a_1, \ldots, a_n \rangle = \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(a_0 + \frac{1}{\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle} \right) = \\
&= a_0 + \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \langle a_1, \ldots, a_n \rangle} = \\
&= a_0 + \frac{1}{\theta_1}
\end{aligned}$$

□

Suponha que temos duas frações contínuas simples e infinitas, $\langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle$ e $\langle b_0, b_1, b_2, \ldots \rangle$. As duas podem convergir para o mesmo valor? A resposta é não, estaleceremos isso no próximo resultado.

Teorema 2.5.8 *Duas frações contínuas simples e infinitas convergem para valores distintos.*

Demonstração

Suponha que $\langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle = \langle b_0, b_1, b_2, \ldots \rangle = \theta$. Pelo Lema 2.5.1,

$$\lfloor \theta \rfloor = a_0 = b_0 \text{ e } \theta = a_0 + \frac{1}{\langle a_1, a_2, \ldots \rangle} = b_0 + \frac{1}{\langle b_1, b_2, \ldots \rangle}$$

daí $\langle a_1, a_2, \ldots \rangle = \langle b_1, b_2, \ldots \rangle$. Repetindo o mesmo argumento, $a_1 = b_1$. Indutivamente $a_n = b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

Para mais detalhes sobre esta seção veja em [8].

Capítulo 3

Irracionalidade de alguns números

3.1 Prova da irracionalidade de $\sqrt{2}, \sqrt{5}, e$ por frações contínuas

Agora aplicaremos nesta seção o que foi trabalhado na seção 2.5 sobre a teoria das frações contínuas. Mostraremos a irracionalidade de alguns números utlizando o Teorema 2.5.7.

Irracionalidade de $\sqrt{2}$

A irracionalidade de $1+\sqrt{2}$ é equivalente a irracionalidade de $\sqrt{2}$, observe que $1+\sqrt{2} = 2 + \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$, pois

$$2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)} = 2 + \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2})^2 - 1^2}.$$

Logo

$$1+\sqrt{2} = 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\sqrt{2}}} = 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots+2+\cfrac{1}{2+\ddots}}} =< 2,2,2,\ldots >$$

A fração contínua de $1+\sqrt{2}$ é simples e infinita, portanto pelo Teorema 2.5.7, $1+\sqrt{2}$ é irracional. Assim $\sqrt{2}$ é irracional.

Irracionalidade de $\sqrt{5}$

Veja também que a irracionalidade de $\sqrt{5}$ é equivalente a irracionalidade de $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ que é raiz do polinômio $x^2 - x - 1$.

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1+\sqrt{5}}{2}} = 1 + \frac{1}{\Phi}$$

pois

$$1 + \cfrac{1}{\cfrac{1+\sqrt{5}}{2}} = 1 + \frac{2\cdot(\sqrt{5}-1)}{(1+\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)} = 1 + \frac{2\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

assim,

$$\Phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots 1+\cfrac{1}{1+\ddots}}} =< 1,1,1,\ldots >$$

Como a fração contínua de Φ é simples e infinita, Φ é irracional.

Irracionalidade de e

Lema 3.1.1 *Se $a \geqslant 1$ é qualquer inteiro, então*

$$\frac{e^{\frac{2}{a}}+1}{e^{\frac{2}{a}}-1}=[a,3a,5a,7a,\ldots]$$

Em particular,

$$\frac{e^2+1}{e^2-1}=[1,3,5,7,\ldots] \text{ e } \frac{e+1}{e-1}=[2,6,10,14,\ldots]$$

Demonstração

Considere para cada $m \in \mathbb{Z}$ com $m \geqslant 0$, a série

$$S_m=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{2^m(m+i)!}{i!(2m+2i)!}\left(\frac{1}{a}\right)^{2i+m} \tag{3.1}$$

Veja que

$$\frac{2^m(m+i)!}{i!(2m+2i)!}\left(\frac{1}{a}\right)^{2i+m} \leqslant \frac{2^m}{a^m}\frac{1}{i!}\left(\frac{1}{a^2}\right)^i$$

Como $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\frac{2^m}{a^m}\frac{1}{i!}\left(\frac{1}{a^2}\right)^i=\left(\frac{2}{a}\right)^m e^{\frac{1}{a^2}}$, a série em (3.1) converge. Pelo pelo Teorema 1.4.3

$$S_0=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{i!}{i!(2i)!}\left(\frac{1}{a}\right)^{2i} \Rightarrow S_0=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(2i)!}\left(\frac{1}{a}\right)^{2i}$$

sendo

$$e^{\frac{1}{a}}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\left(\frac{1}{a}\right)^i \text{ e } e^{\frac{-1}{a}}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\left(\frac{-1}{a}\right)^i$$

temos

$$S_0=\frac{e^{\frac{1}{a}}+e^{\frac{-1}{a}}}{2}$$

temos também

$$S_1=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{2^1(1+i)!}{i!(2i+2)!}\left(\frac{1}{a}\right)^{2i+1} \Rightarrow S_1=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(2i+1)!}\left(\frac{1}{a}\right)^{2i+1}$$

De maneira análoga

$$S_1 = \frac{e^{\frac{1}{a}} - e^{\frac{-1}{a}}}{2}$$

Afirmação 3.1.1 *Temos que* $S_m - (2m+1)aS_{m+1} = S_{m+2}$ *com* $m \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant 0$.

Demonstração

Sendo

$$S_m = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^m(m+i)!}{i!(2m+2i)!}\left(\frac{1}{a}\right)^{2i+m} \text{ e } S_{m+1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^{m+1}(m+1+i)!}{i!(2m+2+2i)!}\left(\frac{1}{a}\right)^{2i+m+1}$$

assim $S_m - (2m+1)aS_{m+1}$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^m(m+i)!}{i!(2m+2i)!}\left(\frac{1}{a}\right)^{2i+m} - (2m+1)a\sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^{m+1}(m+1+i)!}{i!(2m+2+2i)!}\left(\frac{1}{a}\right)^{2i+m+1}$$

A série S_m é formada por termos positivos e sendo convergente, temos que $S_m - a(2m+1)S_{m+1}$ é dado por

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{2^m(m+i)!}{i!(2m+2i)!}\left(\frac{1}{a}\right)^{2i+m} - \frac{(2m+1)a2^{m+1}(m+1+i)!}{i!(2m+2+2i)!}\left(\frac{1}{a}\right)^{2i+m+1}\right)\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{2^m(m+i)!(2m+1+2i)(2m+2+2i)-(2m+1)2^{m+1}(m+1+i)!}{i!(2m+2+2i)!}\left(\frac{1}{a}\right)^{2i+m}\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{2^{m+1}[(m+i+1)(2m+2i+1)(m+i)!-(2m+1)(m+1+i)!]}{i!(2m+2+2i)!}\left(\frac{1}{a}\right)^{2i+m}\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{2^{m+1}[(2m+2i+1)(m+i+1)!-(2m+1)(m+1+i)!]}{i!(2m+2+2i)!}\left(\frac{1}{a}\right)^{2i+m}\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{2^{m+1}[2i(m+i+1)!]}{i!(2m+2+2i)!}\left(\frac{1}{a}\right)^{2i+m}\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{2^{m+2}i(m+i+1)!}{i!(2m+2+2i)!}\left(\frac{1}{a}\right)^{2i+m}\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{2^{m+2}(m+i+1)!}{(i-1)!(2m+2+2i)!}\left(\frac{1}{a}\right)^{2i+m}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Fazendo $k = i-1$, temos que

$$\begin{aligned}
S_m - a(2m+1)S_{m+1} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{m+2}(m+k+2)!}{k!(2m+4+2k)!}\left(\frac{1}{a}\right)^{2k+m+2}\\
&= S_{m+2}
\end{aligned}$$

Voltando à prova do lema, definimos $R_m = \dfrac{S_m}{S_{m+1}}$. Logo

$$R_0 = \frac{S_0}{S_1} \Rightarrow R_0 = \frac{\dfrac{e^{\frac{1}{a}}+e^{\frac{-1}{a}}}{2}}{\dfrac{e^{\frac{1}{a}}-e^{\frac{-1}{a}}}{2}} \Rightarrow R_0 = \frac{e^{\frac{2}{a}}+1}{e^{\frac{2}{a}}-1}$$

Pela Afirmação 3.4.1, temos que

$$R_m = (2m+1)a + \frac{1}{R_{m+1}}$$

em particular

$$R_0 = a + \frac{1}{R_1},\ R_1 = 3a + \frac{1}{R_2},\ R_2 = 5a + \frac{1}{R_3}, \ldots$$

portanto

$$\frac{e^{\frac{2}{a}}+1}{e^{\frac{2}{a}}-1} = a + \frac{1}{R_1} = a + \cfrac{1}{3a + \cfrac{1}{R_2}} = \ldots = a + \cfrac{1}{3a + \cfrac{1}{5a + \ddots}} = [a, 3a, 5a, 7a, \ldots]$$

Para $a = 1$ e $a = 2$ temos respectivamente que

$$\frac{e^2+1}{e^2-1} = [1, 3, 5, 7, \ldots] \text{ e } \frac{e+1}{e-1} = [2, 6, 10, 14, \ldots]$$

Observe que se e é racional então $\frac{e+1}{e-1}$ é racional. Como $\frac{e+1}{e-1} = [2, 4, 6, 8, \ldots]$, ou seja, $\frac{e+1}{e-1}$ tem fração contínua infinita simples, $\frac{e+1}{e-1}$ é irracional, logo e é irracional.

Veja estas e outras aplicações em [10] e [11].

3.2 Irracionalidade de e^r e π

As provas dadas no capitulo 1 da irracionalidade para alguns valores de r são baseadas na idéia de expandir a função exponencial, e truncá-la. Em termos de exponencial isso equivale a aproximar por um polinômio. A principal idéia de Hermite, é aproximar a exponencial por funções racionais $A(z)/B(z)$, veja em [10]. Dizer que uma função analítica é bem aproximada por uma função racional $A(z)/B(z)$(onde A e B são polinômios) significa dizer que $B(z)f(z) - A(z)$ tem um zero de alta multiplicidade na origem.

Quando truncamos a expansão em série da função exponencial, nós aproximamos por um polinômio em z com coeficientes racionais, e substituímos z por a, este polinômio produz um número racional, mas o denominador deste número é muito grande (a não ser que $a = 1$). Quando a é um número primo grande, por exemplo, há um problema: se multiplicam pelo denominador, então o resto não tem forma pequena. Se produzirmos uma diferença suficientemente em $B(z)$ resolveremos o problema.

Nosso primeiro objetivo nesta seção é provar a irracionalidade de e^r quando r é um número racional não nulo. Em seguida, com uma ligeira modificação, mostraremos a irracionalidade de π

. Considere o desenvolvimento de Taylor de uma função analítica na origem.

$$f(z) = \sum_{k \geqslant 0} a_k z^k \tag{3.3}$$

onde $a_k = \dfrac{f^k(0)}{k!}$.

Vamos construir uma função analítica a partir da função f, de tal forma que vários coeficientes de Taylor consecutivos dessa nova função sejam nulos.

Vamos considerar o operador derivada

$$\delta = z\frac{d}{dz}$$

onde $D = \dfrac{d}{dz}$. Usualmente denotamos $D^m = D^{m-1} \circ D$ para $m \geqslant 2$. Temos que

$$D(zf) = f + zD(f)$$

assim

$$\delta(z^k) = z\frac{d}{dz}(z^k) = kz^k$$

Indutivamente segue-se que

$$\delta^m(z^k) = k^m z^k \tag{3.4}$$

Para qualquer polinômio $T \in \mathbb{C}[t]$, associamos o operador derivada $T(\delta)$. Sendo $T(t) = b_0 + b_1 t + \ldots + b_n t^n$, então

$$\begin{aligned} T(\delta)z^k &= (b_0 + b_1\delta + \ldots + b_n\delta^n)\, z^k \\ &= b_0 z^k + b_1 k z^k + \ldots + b_n k^n z^k \\ &= (b_0 + b_1 k + \ldots + b_n k^n)\, z^k \\ &= T(k) z^k \end{aligned}$$

Para f em (3.3), temos

$$T(\delta)f(z) = T(\delta)\left(\sum_{k\geqslant 0} a_k z^k\right) = \sum_{k\geqslant 0} a_k T(\delta) z^k = \sum_{k\geqslant 0} a_k T(k) z^k$$

Queremos que $T(\delta)f(z)$ seja uma função analítica tal que tenha n_1 coeficientes consecutivos nulos. Basta tomar T um polinômio tal que possui n_1 raízes inteiras consecutivas. Tomemos n_0, n_1 dois inteiros não-negativos e definimos

$$T(t) = (t - n_0 - 1)(t - n_0 - 2)\ldots(t - n_0 - n_1)$$

Dessa forma a série $T(\delta)f(z)$ pode ser escrita da seguinte maneira

$$T(\delta)f(z) = A(z) + R(z)$$

onde $A(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n_0} a_k T(k) z^k$ e $R(z) = \displaystyle\sum_{k\geqslant n_1+n_0+1} a_k T(k) z^k$, já que os números $n_0{+}1, n_0{+}2, \ldots, n_0{+}n_1$ são raízes de T, os coeficientes de $z^{n_0+1}, z^{n_0+2}, \ldots, z^{n_0+n_1}$

da série são todos nulos.

Definimos $N = n_0 + n_1$, logo

$$T(t) = (t - n_0 - 1)(t - n_0 - 2)\ldots(t - N) \text{ é mônico e de grau } \partial T = n_1$$

Segue-se que para a equação diferencial da função exponencial

$$\delta(e^z) = ze^z$$

Existe um polinômio $B \in \mathbb{Z}[z]$, o qual é mônico e de grau n_1, tal que

$$T(\delta)e^z = B(z)e^z$$

De fato, sendo $T(\delta) = b_0 + b_1\delta + \ldots + b_{n_1-1}\delta^{n_1-1} + \delta^{n_1}$, assim

$$T(\delta)e^z = b_0e^z + b_1\delta(e^z) + + \ldots + b_{n_1-1}\delta^{n_1-1}(e^z) + \delta^{n_1}(e^z)$$

Por indução vamos mostrar que

$$\delta^k(e^z) = P_k(z)e^z \tag{3.5}$$

onde $P_k(z) \in \mathbb{Z}[z]$ é mônico e $\partial P_k = k$. Para $n = 0$ e $n = 1$ temos

$$\begin{aligned} \delta^0(e^z) &= e^z = 1e^z \\ \delta^1(e^z) &= ze^z \end{aligned}$$

Suponha que seja verdade para $k = m$, isto é

$$\delta^m(e^z) = P_m(z)e^z$$

Queremos provar que vale para $k = m + 1$. Como

$$\begin{aligned} \delta^{m+1}(e^z) &= \delta(\delta^m(e^z)) = \delta(P_m(z)e^z) = z\frac{d}{dz}(P_m(z)e^z) \\ &= z[P'_m(z)e^z + P_m(z)e^z] = [zP'_m(z) + zP_m(z)]e^z \end{aligned}$$

onde $P_{m+1}(z) = zP'_m(z) + zP_m(z)$, mônico e $\partial P_{m+1} = m+1$. Portanto vale (3.5). Dessa forma

$$\begin{aligned} T(\delta)e^z &= a_0e^z + P_1(z)a_1e^z + \ldots + P_{n_1}(z)e^z \\ &= (a_0 + P_1(z)a_1 + \ldots + P_{n_1}(z))e^z \end{aligned}$$

onde $B(z) = a_0 + P_1(z)a_1 + \ldots + P_{n_1}(z)$, polinômio mônico cujo grau é n_1. Sendo

$$A(z) = \sum_{n=0}^{n_0} \frac{T(k)z^k}{k!} \text{ e } R(z) = \sum_{k \geqslant N+1} \frac{T(k)z^k}{k!} \tag{3.6}$$

então

$$B(z)e^z = A(z) + R(z)$$

onde A é um polinômio de coeficientes racionais e grau n_0, cujo coeficiente líder é

$$\frac{T(n_0)}{n_0!} = \frac{(n_0 - n_0 - 1)(n_0 - n_0 - 2)\ldots(n_0 - n_0 - n_1)}{n_0!} = \frac{(-1)^{n_1} n_1!}{n_0!}$$

e R uma função analítica que tem um zero na origem de multiplicidade maior ou igual a $N+1$. Veja que

$$T(k) = (k - n_0 - 1)(k - n_0 - 2)\ldots(k - N) \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Se $0 \leqslant k \leqslant n_0$

$$\begin{aligned} T(k) &= (-1)^{n_1}(n_0 - k + n_1)\ldots(n_0 - k + 2)(n_0 - k + 1) \\ &= (-1)^{n_1}\frac{(n_0 - k + n_1)\ldots(n_0 - k + 2)(n_0 - k + 1)(n_0 - k)!}{(n_0 - k)!} \\ &= \frac{(-1)^{n_1}(n_0 - k + n_1)!}{(n_0 - k)!} \\ &= \frac{(-1)^{n_1}(N - k)!}{(n_0 - k)!} \end{aligned}$$

Se $k \geqslant N+1$

$$\begin{aligned} T(k) &= (k-n_0-1)(k-n_0-2)\dots(k-n_0-n_1) \\ &= (k-n_0-1)(k-n_0-2)\dots(k-n_0-n_1)\frac{(k-n_0-n_1-1)!}{(k-n_0-n_1-1)!} \\ &= \frac{(k-n_0-1)!}{(k-N-1)!} \end{aligned}$$

Por (3.6), temos que

$$A(z) = (-1)^{n_1}\sum_{k=0}^{n_0}\frac{(N-k)!}{(n_0-k)!k!}z^k \text{ e } R(z) = \sum_{k\geqslant N+1}\frac{(k-n_0-1)!}{(k-N-1)!k!}z^k$$

Como $n_1 \geqslant n_0$ e $0 \leqslant k \leqslant n_0$ temos $n_1 - k \geqslant 0$ e então

$$\begin{aligned} \frac{(N-k)!}{(n_0-k)!k!} &= (n_0+n_1-k)(n_0+n_1-k-1)\dots(n_0+1)\frac{n_0!}{(n_0-k)!k!} \\ &= (n_0+n_1-k)(n_0+n_1-k-1)\dots(n_0+1)\binom{n_0}{k} \end{aligned}$$

daí $\dfrac{(N-k)!}{(n_0-k)!k!} \in \mathbb{Z}$ para $n_1 \geqslant n_0$. Logo $A \in \mathbb{Z}[z]$.

Demonstramos então a seguinte proposição.

Proposição 3.2.1 *Sejam $n_0 \geqslant 0$ e $n_1 \geqslant 0$ dois inteiros. Defina $N = n_0+n_1$. Dados*

$$A(z) = (-1)^{n_1}\sum_{k=0}^{n_0}\frac{(N-k)!}{(n_0-k)!k!}z^k \text{ e } R(z) = \sum_{k\geqslant N+1}\frac{(k-n_0-1)!}{(k-N-1)!k!}z^k$$

Se $B \in \mathbb{Z}[z]$ e tal que

$$(\delta-n_0-1)(\delta-n_0-2)\dots(\delta-N)e^z = B(z)e^z$$

então $B(z)e^z = A(z)+R(z)$, *onde* B *é um polinômio mônico com coeficientes inteiros de grau* n_1, *enquanto que* A *é um polinômio de coeficientes racionais de grau* n_0 *e coeficiente líder* $\dfrac{(-1)^{n_1}n_1!}{n_0!}$ *e* R *uma função analítica cuja origem é um zero de multiplicidade* $N+1$.

Além do mais, o polinômio $\dfrac{n_0!}{n_1!}A$ *tem coeficientes inteiros. Em particular, se* $n_1 \geqslant n_0$ *então os coeficientes de* A *são inteiros.*

Vamos restrigir para o caso $n = n_0 = n_1$ então

$$T_n(z) = (z-n-1)(z-n-2)\dots(z-2n)$$

e denotamos por A_n, B_n e R_n satisfazendo a proposição anterior.

Lema 3.2.1 *Seja* $z \in \mathbb{C}$, *então*

$$|R_n(z)| \leqslant \frac{|z|^{2n+1}e^{|z|}}{n!}$$

Em particular, a seqüência $(R_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ *tende para zero quando* $n \to \infty$.

Demonstração

$$\begin{aligned} R_n(z) &= \sum_{k\geqslant 2n+1} \frac{(k-n-1)!}{(k-2n-1)!k!} z^k \\ &= \sum_{l\geqslant 0} \frac{(l+n)!}{l!(l+2n+1)!} z^{l+2n+1} \end{aligned}$$

Como

$$\frac{(l+2n+1)!}{(l+n)!} = (l+2n+1)\dots(l+n+1) \geqslant (n+1)! \geqslant n!$$

daí segue-se que

$$\begin{aligned} |R_n(z)| &\leqslant \sum_{l\geqslant 0} \frac{1}{l!n!}|z|^{l+2n+1} \\ &\leqslant \frac{|z|^{2n+1}}{n!}\sum_{l\geqslant 0}\frac{|z|^l}{l!} \end{aligned}$$

$$0 \leqslant R_n(z) \leqslant \frac{|z|^{2n+1}}{n!}e^{|z|}$$

Fazendo $n \to \infty$,temos que $\dfrac{|z|^{2n+1}}{n!}e^{|z|} \to 0$. Portanto $R_n(z) \to 0$.

□

3.2.1 Irracionalidade de e^r

Vamos mostrar que e^r é irracional para $r \in \mathbb{Q}$ com $r \neq 0$. Seja $r = \dfrac{a}{b}$ racional não-nulo. Assumimos que $r > 0$ primeiramente. Fazendo $s = e^r$ e substituindo z por $a = br$ em $B(z)e^z = A(z) + R(z)$, obtemos que

$$B_n(a)s^b - A_n(a) = R_n(a)$$

onde todos os coeficientes de R_n são positivos, portanto $R_n(a) > 0$. Entretanto $B_n(a)s^b - A_n(a) \neq 0$. Como $R_n(a)$ converge para zero quando n tende para o infinito e, sendo $B_n(a)$ e $A_n(a)$ inteiros, tem-se dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que

$$0 < |B_n(a)s^b - A_n(a)| < \varepsilon;\ \forall\, n > n_0 \text{ e daí } 0 < \left|s^b - \frac{A_n(a)}{B_n(a)}\right| < \frac{\varepsilon}{B_n(a)}$$

Pela implicação $(ii) \Rightarrow (i)$ do Lema 2.1.1, s^b é irracional. Portanto $s = e^r$ é irracional o que implica $s^{-1} = e^{-r}$ é irracional.

3.2.2 Irracionalidade de π

Suponha que $\pi = \dfrac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{N}$. Substituindo $z = ia = i\pi b$ em $B(z)e^z = A(z) + R(z)$. Como $e^z = (-1)^b$, temos

$$B_n(ia)(-1)^b - A_n(ia) = R_n(ia) \tag{3.7}$$

onde $A_n(ia)$ e $B_n(ia)$ são complexos em $\mathbb{Z}[i]$. Assim o lado esquerdo em (3.7) está em $\mathbb{Z}[i]$, mas seu lado direito vai para zero quando $n \to \infty$. Veja que

$$B_n(ia)(-1)^b - A_n(ia) = c_n + id_n,\ c_n, d_n \in \mathbb{Z}$$

Portanto, quando $n \to \infty$ temos que $c_n + id_n \to 0$ o que implica $c_n^2 + d_n^2 \to 0$. Como $c_n^2 + d_n^2 \in \mathbb{Z}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $c_n^2 + d_n^2 = 0$ para todo $n > n_0$, ou seja, $c_n = d_n = 0$ para todo $n > n_0$. O que significa que $c_n + id_n = 0$ para todo $n > n_0$. Logo

$$B_n(ia)(-1)^b - A_n(ia) = 0,\ \forall\, n > n_0$$

Considere dois índices consecutivos n e $n+1$, vamos eliminar e^z das duas expressões abaixo:

$$B_n(z)e^z - A_n(z) = R_n(z) \text{ e } B_{n+1}(z)e^z - A_{n+1}(z) = R_{n+1}(z)$$

assim

$$B_nA_{n+1} - B_{n+1}A_n = -B_nR_{n+1} + B_{n+1}R_n \tag{3.8}$$

Pela Proposição 3.5.1, B_n é um polinômio mônico de grau n, A_n tem grau n e o termo de maior grau é $(-1)^n z^n$. Dessa forma, o polinômio à esquerda em (3.8) tem grau $2n+1$ e o termo de maior grau é $(-1)^{n+1}2z^{2n+1}$. Por outro lado, R_n tem um zero de multiplicidade de pelo menos $2n+1$, o mesmo ocorrendo para $-B_nR_{n+1} + B_{n+1}R_n$. Assim os dois termos são iguais a $(-1)^{n+1}2z^{2n+1}$. Considerando

$$C_n(z) = B_n(z)A_{n+1}(z) - B_{n+1}(z)A_n(z)$$

temos

$$C_n(z) = -B_n R_{n+1} + B_{n+1} R_n$$

assim $C_n(z) = (-1)^{n+1} 2z^{2n+1}$.

Logo $C_n(z)$ só se anula na origem. Desse modo, R_n e R_{n+1} só possuem um zero em comum, isto é, não se anulam ao mesmo tempo fora da origem. Vimos que $R_n(ia) = B_n(ia)(-1)^b - A_n(ia) = 0$ para todo $n > n_0$, o que significa que $R_n(ia) = R_{n+1}(ia) = 0$ para todo $n > n_0$. Assim $ia \neq 0$ é raiz de R_n e R_{n+1}. Contradição, portanto π é irracional.

Para maiores detalhes sobre o método de Hermite e suas aplicações veja em [10].

3.3 Irracionalidade das séries de Liouville

Usando implicitamente a implicação $(ii) \Rightarrow (i)$ do Lema 2.1.1, mostraremos que as séries de Liouville

$$\sum_{n \geqslant 0} g^{-n^2} \text{ e } \sum_{n \geqslant 0} g^{-2^n}$$

convergem para um irracional, onde $g \in \mathbb{Z}$ e $g \geqslant 2$. As duas séries são limitadas pela progressão geométrica $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{g^n}$ e pelo critério de comparação convergem, já que a progresão em questão converge.

Primeiramente, considere

$$\theta = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{g^{n^2}}$$

então

$$\theta - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{g^{n^2}} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{g^{n^2}} \tag{3.9}$$

onde N é um inteiro suficientemente grande.

Veja que a série à direita em (3.9) converge para um valor estritamente positivo, pois é uma série de termos positivos. Logo

$$0 < \left| \theta - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{g^{n^2}} \right| = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{g^{n^2}}$$

Fazendo $n = k + N$ no 2^{o} membro

$$\begin{aligned} 0 < \left| \theta - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{g^{n^2}} \right| &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{g^{(N+k)^2}} \\ &= \frac{1}{g^{N^2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{g^{k^2+2kN}} \\ &< \frac{1}{g^{N^2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{g^{2kN}} \\ &= \frac{1}{g^{N^2}} \frac{\frac{1}{g^{2N}}}{1 - \frac{1}{g^{2N}}} \\ &= \frac{1}{g^{N^2}} \cdot \frac{1}{(g^{2N} - 1)} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Fazendo $N \to \infty$, temos que $\dfrac{1}{g^{2N} - 1} \to 0$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{g^{2N} - 1} < \varepsilon$ para todo $N > n_0$. Assim

$$0 < \left| \theta - \frac{p_N}{q_N} \right| < \frac{\varepsilon}{q_N}$$

onde $q_N = g^{N^2}$ e $p_N \in \mathbb{Z}$. Portanto, $\sum\limits_{n \geqslant 0} g^{-n^2}$ é irracional.

Considere agora

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{g^{2^n}}$$

Repetindo o mesmo processo que foi feito para a 1ª série, temos

$$\begin{aligned}
0 < \left|\theta - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{g^{2^n}}\right| &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{g^{2^{N+k}}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(g^{2^N})^{2^k}} \\
&= \left[\left(\frac{1}{g^{2^N}}\right)^2 + \left(\frac{1}{g^{2^N}}\right)^4 + \left(\frac{1}{g^{2^N}}\right)^8 + \dots\right] \\
&= \left(\frac{1}{g^{2^N}}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{1}{g^{2^N}}\right)^2 + \left(\frac{1}{g^{2^N}}\right)^6 + \dots\right] \\
&< \left(\frac{1}{g^{2^N}}\right)^2 \left[1 + \frac{1}{g^{2^N}} + \left(\frac{1}{g^{2^N}}\right)^2 + \left(\frac{1}{g^{2^N}}\right)^3 + \dots\right] \\
&= \left(\frac{1}{g^{2^N}}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{g^{2^N}}} \\
&= \frac{1}{g^{2^N}\left(g^{2^N} - 1\right)} \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Fazendo $N \to \infty$, temos que $\dfrac{1}{g^{2^N} - 1} \to 0$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{g^{2^N} - 1} < \varepsilon$, para todo $N > n_0$. Assim

$$0 < \left|\theta - \frac{p_N}{q_N}\right| < \frac{\varepsilon}{q_N}$$

onde $q_N = g^{2^N}$ e $p_N \in \mathbb{Z}$. Portanto, $\sum\limits_{n \geqslant 0} g^{-2^N}$ é irracional.

Capítulo 4

Valores irracionais de Funções Teta Falsa

Neste capítulo mostraremos as funções teta falsa de Ramanujan de ordem 3 e algumas de ordem 5, as funções teta falsa de Watson de ordem 3 e as q-séries de Rogers-Ramanujan aplicadas aos valores $\pm\frac{1}{q}$ onde $q \in \mathbb{Z}$ com $q \geqslant 2$ assumem valores irracionais.

As funções Theta Falsa foram introduzidas por S. Ramanujan numa carta enviada para G. H. Hardy, em janeiro de 1920. Nessa carta, Ramanujan listou 17 funções teta falsa, junto com as identidades que elas satisfazem. Ramanujan dividiu essas funções em ordem três, cinco e sete, mas não disse o que significava ordem. Não existe uma definição formal para ordem, mas parece que pelas identidades que elas satisfazem, fica claro que são relacionadas com os números 3, 5 e 7. Entretanto a ordem é considerada para as funções teta falsa como uma etiqueta, na qual não tem um profundo significado.

Uma definição melhor reformulada é dada por: Uma função teta falsa f é uma função de variável complexa q, definida por uma q-série que converge para $|q| < 1$ e que satisfaz as seguintes condições:

1. Infinitas raízes da unidade são singularidades exponenciais.

2. Para cada raiz da unidade ξ existe uma função teta $\theta_\xi(q)$ tal que $f(q) - \theta_\xi(q)$ é limitada quando $q \to \xi$ radialmente.

3. f não é soma de duas funções, uma das quais é uma função teta θ e a outra é uma função que é limitada em toda raiz da unidade.

Em geral não é fácil estabelecer estas propriedades, veja [16].

obs:As funções teta θ acima são séries do tipo $\sum_{n-\infty}^{+\infty} \epsilon^n q^{an^2+bn}$ onde $a, b \in \mathbb{Q}$ e $\epsilon = \pm 1$.

Funções teta falsa de Ramanujan de ordem 3:

- $f(q) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1+q)^2 (1+q^2)^2 \dots (1+q^n)^2}$

- $\phi(q) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1+q^2)(1+q^4)\dots(1+q^{2n})}$

- $\psi(q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^3)\dots(1-q^{2n-1})}$

- $\chi(q) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q+q^2)(1-q^2+q^4)\dots(1-q^n+q^{2n})}$

Funções teta falsa de Watson de ordem 3:

- $\omega(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n(n+1)}}{(1-q)^2 (1-q^3)^2 \dots (1-q^{2n+1})^2}$

- $\nu(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)}}{(1+q)(1+q^3)\dots(1+q^{2n+1})}$
- $\rho(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n(n+1)}}{(1+q+q^2)(1+q^3+q^6)\dots(1+q^{2n+1}+q^{4n+2})}$

O símbolo de Pochhamer $(a,q)_k$ é definido por:

$$(a,q)_k = \begin{cases} \prod_{j=1}^{|k|} \left(1-aq^{-j}\right)^{-1}, & \text{se} \quad k<0 \\ 1, & \text{se} \quad k=0 \\ \prod_{j=0}^{k-1} \left(1-aq^{j}\right), & \text{se} \quad k>0 \\ \prod_{j=0}^{\infty} \left(1-aq^{j}\right), & \text{se} \quad k=\infty \end{cases}$$

Funções teta falsa de Ramanujan de ordem 5:

- $f_0(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(-q,q)_n}$
- $f_1(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)}}{(-q,q)_n}$
- $F_0(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n^2}}{(q,q^2)_n}$
- $F_1(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n(n+1)}}{(q,q^2)_{n+1}}$
- $\Phi(q) = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{5n^2}}{(q,q^5)_{n+1}(q^4,q^5)_n}$
- $\Psi(q) = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{5n^2}}{(q^2,q^5)_{n+1}(q^3,q^5)_n}$

Teorema 4.1 *As funções Teta falsa de Ramanujam de ordem* 3 f, Φ, ψ, χ *assumem valores irracionais em* $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{4}, \ldots$

Demonstração

1) Sejam $p, q \in \mathbb{C}$ com $q \neq 0$, de tal forma que $f\left(\frac{p}{q}\right)$ esteja bem definida. Então,

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{p}{q}\right) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{p}{q}\right)^2 \left(1+\left(\frac{p}{q}\right)^2\right)^2 \ldots \left(1+\left(\frac{p}{q}\right)^n\right)^2} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{n^2} q^2 q^4 \ldots q^{2n}}{q^{n^2}(q+p)^2 \left(q^2+p^2\right)^2 \ldots \left(q^n+p^n\right)^2} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{n^2} q^{n+n^2}}{q^{n^2}(q+p)^2 \left(q^2+p^2\right)^2 \ldots \left(q^n+p^n\right)^2} \\
&= 1 + \frac{pq}{(q+p)^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{p^{n^2} q^{n}}{(q+p)^2 \left(q^2+p^2\right)^2 \ldots \left(q^n+p^n\right)^2} \\
&= 1 + \frac{pq}{(q+p)^2} + \frac{pq}{(q+p)^2}\left\{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{p^{n^2-1} q^{n-1}}{\left(q^2+p^2\right)^2 \ldots \left(q^n+p^n\right)^2}\right\}
\end{aligned}
$$

Fazendo $n = k+1$, temos:

$$
f\left(\frac{p}{q}\right) = 1 + \frac{pq}{(q+p)^2} + \frac{pq}{(q+p)^2}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^{k(k+2)} q^{k}}{\left(q^2+p^2\right)^2 \ldots \left(q^{k+1}+p^{k+1}\right)^2}\right\} \quad (4.1)
$$

Considere $p = \pm 1$ e $q \in \mathbb{Z}$ com $q \geqslant 2$ em (4.1). Assim

$$
f\left(\frac{\pm 1}{q}\right) = 1 + \frac{(\pm 1)q}{(q\pm 1)^2} + \frac{(\pm 1)q}{(q\pm 1)^2}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^{k(k+2)} q^{k}}{\left(q^2+(\pm 1)^2\right)^2 \ldots \left(q^{k+1}+(\pm 1)^{k+1}\right)^2}\right\} \quad (4.2)
$$

Para mostrar que $f\left(\frac{\pm 1}{q}\right)$ é irracional, basta mostrar que a série em (4.2) converge para um irracional.

A série em (4.2) é do tipo (2.16) onde $b_k = (\pm 1)^{k^2} q^k$ e $a_k = \left(q^{k+1} + (\pm 1)^{k+1}\right)^2$. Agora verificaremos as condições dos Lemas 2.4.1 e 2.4.2, respectivamente para $p = 1$ e $p = -1$.

a) $a_k = \left(q^{k+1} + (\pm 1)^{k+1}\right)^2 \geqslant (2^{1+1} + (\pm 1)^{1+1})^2 \geqslant 25 \Rightarrow a_k > 2$.

b) $|b_k| = q^k > 0$

$a_k - 1 - |b_k| = \left(q^{2k+2} + 2q^{k+1}(\pm 1)^{k+1} + 1\right) - 1 - q^k$

$a_k - 1 - |b_k| = q^{2k+2} \pm 2q^{k+1} - q^k \geqslant 2^{2\cdot 1+2} - 2 \cdot 2^{1+1} - 2^1$.

$a_k - 1 - |b_k| \geqslant 6 \Rightarrow a_k - 1 - |b_k| > 0 \Rightarrow a_k - 1 > |b_k|$.

c) Se $b_k = (\pm 1)^{k^2} q^k$ e $b_s = (\pm 1)^{s^2} q^s$ então $b_k b_s = (\pm 1)^{k^2+s^2} q^{k+s}$.

Se $p = -1$, dado $i \in \mathbb{N}$, tome $k, s > i$ com $k = s + 1$ então:

$$b_k b_s = (-1)^{(s+1)^2+s^2} q^{2s+1} = -q^{2s+1} \Rightarrow b_k b_s < 0$$

Se $p = 1$ então $b_k > 0$ para infinitos $k \in \mathbb{N}$.

d) Escolha $i_k = k$ uma subsequência dos índices da série, logo

$$\frac{b_{i_k}}{a_{i_k}} = \frac{(\pm 1)^k q^k}{q^{2k+2} \pm 2q^{k+1} + 1} \Rightarrow \frac{b_{i_k}}{a_{i_k}} = \frac{\left(\dfrac{(\pm 1)^k}{q^k}\right)}{q^2 \pm \dfrac{2q}{q^k} + \dfrac{1}{q^{2k}}}$$

quando $k \to \infty$, concluímos que $\dfrac{b_{i_k}}{a_{i_k}} \to 0$ e $a_{i_k} \to \infty$.

As hipóteses dos Lemas 2.4.1 e 2.4.2 são satisfeitas respectivamente quando $p = -1$ e $p = 1$ em **a**, **b**, **c** e **d** e portanto a série em (4.2) converge para um irracional. Dessa forma $f\left(\pm\dfrac{1}{q}\right)$ assume valor irracional.

2) Seja $p, q \in \mathbb{C}$ com $q \neq 0$. Então,

$$\begin{aligned}
\phi\left(\frac{p}{q}\right) &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{n^2}}{\left(1+\left(\frac{p}{q}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{p}{q}\right)^4\right)\ldots\left(1+\left(\frac{p}{q}\right)^{2n}\right)} \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p^{n^2}q^{2+4+\ldots+2n}}{q^{n^2}\left(q^2+p^2\right)\left(q^4+p^4\right)\ldots\left(q^{2n}+p^{2n}\right)} \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p^{n^2}q^{n^2+n}}{q^{n^2}\left(q^2+p^2\right)\left(q^4+p^4\right)\ldots\left(q^{2n}+p^{2n}\right)} \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p^{n^2}q^{n}}{\left(q^2+p^2\right)\left(q^4+p^4\right)\ldots\left(q^{2n}+p^{2n}\right)} \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

Tomando $p = \pm 1$ e $q \in \mathbb{Z}$ com $q \geqslant 2$ em (4.3), temos

$$\phi\left(\frac{\pm 1}{q}\right) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm 1)^{n^2}q^n}{\left(q^2+1\right)\left(q^4+1\right)\ldots\left(q^{2n}+1\right)} \qquad (4.4)$$

A série em (4.4) é do tipo (2.1.6) onde $b_n = (\pm 1)^{n^2}q^n$ e $a_n = q^{2n}+1$.

Vamos mostrar que para esta série as condições dos Lemas 2.4.1 e 2.4.2 são satisfeitas respectivamente para $p = 1$ e $p = -1$.

a) $a_n = q^{2n}+1 \geqslant 2^{2.1}+1 = 5 > 2 \Rightarrow a_n > 2$.

b)$|b_n| = q^n > 0$.

$a_n - 1 - |b_n| = q^{2n}+1-1-q^n = q^{2n}-q^n \geqslant 2^{2.1}-2^1 = 2 > 0$

$a_n - 1 - |b_n| > 0 \Rightarrow a_n - 1 > |b_n|$.

c) Se $b_m = (\pm 1)^{m^2}q^m$ e $b_n = (\pm 1)^{n^2}q^n$ então $b_m b_n = (\pm 1)^{m^2+n^2}q^{m+n}$.

Se $p = -1$, dado $i \in \mathbb{N}$, tome $n, m > i$ com $m = n+1$, então

$$b_m b_n = (-1)^{(n+1)^2+n^2}q^{2n+1} = -q^{2n+1} \Rightarrow b_m b_n < 0$$

Se $p = 1$, então $b_n = q^n \Rightarrow b_n > 0$ para infinitos $n \in \mathbb{N}$.

d) Escolha $i_n = n$ uma subseqüência dos índices da série, assim

$$\frac{b_{i_n}}{a_{i_n}} = \frac{(\pm 1)^n q^n}{q^{2n}+1} \Rightarrow \frac{b_{i_n}}{a_{i_n}} = \frac{\left(\dfrac{(\pm 1)^n}{q^n}\right)}{1+\dfrac{1}{q^{2n}}}$$

quando $n \to \infty$, concluímos que $\dfrac{b_{i_n}}{a_{i_n}} \to 0$ e $a_{i_n} \to \infty$.

Por **a**, **b**, **c** e **d**, a série em (4.4) converge para um irracional, dessa forma $\phi\left(\dfrac{\pm 1}{q}\right)$ é irracional.

3) Dados $p, q \in \mathbb{C}$ com $q \neq 0$, então:

$$\begin{aligned}
\psi\left(\frac{p}{q}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\dfrac{p}{q}\right)^{n^2}}{\left(1-\dfrac{p}{q}\right)\left(1-\left(\dfrac{p}{q}\right)^3\right)\left(1-\dfrac{p}{q}\right)\left(1-\left(\dfrac{p}{q}\right)^{2n-1}\right)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{n^2} q^{1+3+\ldots+2n-1}}{q^{n^2}(q-p)(q^3-p^3)\ldots(q^{2n-1}-p^{2n-1})} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{n^2} q^{n^2}}{q^{n^2}(q-p)(q^3-p^3)\ldots(q^{2n-1}-p^{2n-1})} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{n^2}}{(q-p)(q^3-p^3)\ldots(q^{2n-1}-p^{2n-1})} \\
&= \frac{p}{q-p} + \frac{1}{(q-p)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{p^{n^2}}{(q^3-p^3)\ldots(q^{2n-1}-p^{2n-1})}
\end{aligned}$$

Fazendo $n = k+1$, temos:

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q-p} + \frac{1}{(q-p)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^{(k+1)^2}}{(q^3-p^3)\ldots(q^{2k+1}-p^{2k+1})} \tag{4.5}$$

Tomando $p = \pm 1$ e $q \in \mathbb{Z}$ com $q \geqslant 2$ em (4.5), obtemos:

$$\psi\left(\frac{\pm 1}{q}\right) = \frac{(\pm 1)}{(q \mp 1)} \left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^{(k+1)^2-1}}{(q^3 \mp 1)\ldots(q^{2k+1} \mp 1)}\right\} \tag{4.6}$$

Vamos mostrar que as condições dos Lemas 2.4.1 e 2.4.2 são satisfeitas respectivamente para a série quando $p = 1$ e $p = -1$, sabendo que a série em (4.6) é do tipo (2.1.6), onde $a_k = q^{2k+1} \mp 1$ e $b_k = (\pm 1)^{k^2}$.

a) $a_k = q^{2k+1} \mp 1 \geqslant 2^{2.1+1} - 1 = 7 > 2 \Rightarrow a_k > 2$.

b) $|b_k| = 1 > 0$

$a_k - 1 - |b_k| = q^{2k+1} \mp 1 - 1 - 1 \geqslant 7 - 2 = 5 > 0 \Rightarrow a_k - 1 > |b_k|$.

c) Se $b_k = (\pm 1)^{k^2}$, $b_m = (\pm 1)^{m^2}$ então $b_m b_k = (\pm 1)^{k^2+m^2}$.

Se $p = -1$, dado $i \in \mathbb{N}$, tome $m, k > i$ com $m = k + 1$, então

$$b_m b_k = (-1)^{k^2+(k+1)^2} = -1 \text{ e daí } b_m b_k < 0$$

Se $p = 1$ então $b_k = 1 \Rightarrow b_k > 0$ para infinitos $k \in \mathbb{N}$.

d) Tome $i_k = k$ uma subseqüência dos índices da série, logo

$$\frac{b_{i_k}}{a_{i_k}} = \frac{(\pm 1)^{k^2}}{q^{2k+1} \mp 1}$$

quando $k \to \infty$ temos que $\dfrac{b_{i_k}}{a_{i_k}} \to 0$ e $a_{i_k} \to \infty$.

Por **a**, **b**, **c** e **d**, a série em (4.6) converge para um número irracional, dessa forma $\psi\left(\dfrac{\pm 1}{q}\right)$ é irracional.

4) Dados $p, q \in \mathbb{C}$ com $q \neq 0$. Então,

$$\begin{aligned}
\chi\left(\frac{p}{q}\right) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{n^2}}{\left(1 - \frac{p}{q} + \left(\frac{p}{q}\right)^2\right) \ldots \left(1 - \left(\frac{p}{q}\right)^n + \left(\frac{p}{q}\right)^{2n}\right)} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{n^2} q^{2+4+\ldots+2n}}{q^{n^2}\left(q^2 - pq + p^2\right) \ldots \left(q^{2n} - p^n q^n + p^{2n}\right)} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{n^2} q^{n^2+n}}{q^{n^2}\left(q^2 - pq + p^2\right) \ldots \left(q^{2n} - p^n q^n + p^{2n}\right)} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{n^2} q^{n}}{\left(q^2 - pq + p^2\right) \ldots \left(q^{2n} - p^n q^n + p^{2n}\right)} \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

Tomando $p = \pm 1$ e $q \in \mathbb{Z}$ com $q \geqslant 2$ em (4.7), assim:

$$\chi\left(\frac{\pm 1}{q}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^{n^2} q^n}{\left(q^2 \mp q + 1\right) \ldots \left(q^{2n} - (\pm 1)^n q^n + 1\right)} \qquad (4.8)$$

A série em (4.8) é do tipo (2.1.6), onde $a_n = q^{2n} - (\pm 1)^n q^n + 1$ e $b_n = (\pm 1)^{n^2} q^n$.

Vamos mostrar que as condições dos Lemas 2.4.1 e 2.4.2 são satisfeitas respectivamente para a série quando $p = 1$ e $p = -1$.

a) $a_n = q^{2n} - (\pm 1)^n q^n + 1 \geqslant 2^{2.1} - 1^1 \cdot 2^1 + 1 = 3 \Rightarrow a_n > 2$.

b) $|b_n| = q^n > 0$

$a_n - 1 - |b_n| = q^{2n} - (\pm 1)^n q^n + 1 - 1 - q^n \geqslant 2^{2.1} - 2^1 - 2^1 = 0 \Rightarrow a_n - 1 \geqslant |b_n|$.

c) Se $b_n = (\pm 1)^{n^2} q^n$ e $b_m = (\pm 1)^{m^2} q^m$ então $b_m b_n = (\pm 1)^{n^2+m^2}$.

Se $p = -1$, dado $i \in \mathbb{N}$, tome $m, n > i$ com $m = n + 1$, então

$$b_m b_n = (-1)^{n^2+(n+1)^2} q^{2n+1} = -q^{2n+1} \Rightarrow b_m b_n < 0$$

Se $p = 1$ então $b_n = q^n \Rightarrow b_n > 0$ para infinitos $n \in \mathbb{N}$.

d) Considere $i_n = n$ uma subseqüência dos índices da série, assim

$$\frac{b_{i_n}}{a_{i_n}} = \frac{(\pm 1)^{n^2} q^n}{q^{2n} - (\pm 1)^n q^n + 1} \Rightarrow \frac{b_{i_n}}{a_{i_n}} = \frac{\left(\dfrac{(\pm 1)^{n^2}}{q^n}\right)}{1 - \dfrac{(\pm 1)^n}{q^n} + \dfrac{1}{q^{2n}}}$$

quando $n \to \infty$ temos que $\dfrac{b_{i_n}}{a_{i_n}} \to 0$ e $a_{i_n} \to \infty$.

Por **a**, **b**, **c** e **d**, a série em (4.8) converge para um número irracional, dessa forma $\chi\left(\dfrac{\pm 1}{q}\right)$ é irracional.

$\square$

Teorema 4.2 *As funções Teta falsa de Watson* ω, ν *e* ρ *assumem valores irracionais em* $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{4}, \ldots$

Demonstração

1) Seja $p, q \in \mathbb{C}$ com $q \neq 0$. Então,

$$\begin{aligned}
\omega\left(\frac{p}{q}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\dfrac{p}{q}\right)^{2n(n+1)}}{\left(1-\dfrac{p}{q}\right)^2 \cdots \left(1-\left(\dfrac{p}{q}\right)^{2n+1}\right)^2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{2n(n+1)} q^{2(1+\ldots+2n+1)}}{q^{2n(n+1)}\left(q-p\right)^2 \ldots \left(q^{2n+1}-p^{2n+1}\right)^2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{2n(n+1)} q^{2n^2+4n+2}}{q^{2n^2+2n}\left(q-p\right)^2 \ldots \left(q^{2n+1}-p^{2n+1}\right)^2} \\
&= \frac{q^2}{(q-p)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{2n(n+1)} q^{2n+2}}{\left(q-p\right)^2 \ldots \left(q^{2n+1}-p^{2n+1}\right)^2} \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

Tome $p = \pm 1$ e $q \in \mathbb{Z}$ com $q \geqslant 2$ em (4.9), assim

$$\begin{aligned} \omega\left(\frac{\pm 1}{q}\right) &= \frac{q^2}{(q \mp 1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n+2}}{(q \mp 1)^2 \dots (q^{2n+1} \mp 1)^2} \\ &= \frac{q^2}{(q \mp 1)^2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{(q^3 \mp 1)^2 \dots (q^{2n+1} \mp 1)^2} \right\} \qquad (4.10) \end{aligned}$$

A série em (4.10) é do tipo (2.1.6) onde $a_n = (q^{2n+1} \mp 1)^2$ e $b_n = q^{2n}$.

Vamos mostrar que as condições do Lema 2.4.1 são satisfeitas para $p = \pm 1$.

a) $a_n = (q^{2n+1} \mp 1)^2 \geqslant (2^{2.1+1} - 1)^2 = 49 \Rightarrow a_n > 2$.

b) $b_n = q^{2n} \Rightarrow b_n > 0$ para infinitos valores de $n \in \mathbb{N}$.

$$a_n - 1 - b_n = (q^{2n+1} \mp 1)^2 - 1 - q^n \geqslant (2^{2.1+1} - 1)^2 - 1 - 2^{2.1} = 44 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n - 1 - b_n > 0 \Rightarrow a_n - 1 > b_n$$

c) Considere a subseqüência $i_n = n$ dos índices da série, logo

$$\frac{b_{i_n}}{a_{i_n}} = \frac{q^{2n}}{(q^{2n+1} \mp 1)^2} \Rightarrow \frac{b_{i_n}}{a_{i_n}} = \frac{\left(\frac{1}{q^{2n}}\right)}{\left(q \mp \frac{1}{q^{2n}}\right)^2}$$

quando $n \to \infty$, $\dfrac{b_{i_n}}{a_{i_n}} \to 0$ e $a_{i_n} \to \infty$.

Por **a**, **b** e **c**, a série em (4.10) converge para um número irracional. Portanto, $\omega\left(\dfrac{\pm 1}{q}\right)$ é irracional.

2) Tome $p, q \in \mathbb{C}$ com $q \neq 0$. Então:

$$
\begin{aligned}
\nu\left(\frac{p}{q}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{n(n+1)}}{\left(1+\frac{p}{q}\right)\left(1+\left(\frac{p}{q}\right)^{3}\right)\dots\left(1+\left(\frac{p}{q}\right)^{2n+1}\right)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{n(n+1)}q^{1+3+\dots+(2n+1)}}{q^{n^2+n}(q+p)\,(q^3+p^3)\dots(q^{2n+1}+p^{2n+1})} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{n(n+1)}q^{n^2+2n+1}}{q^{n^2+n}(q+p)\,(q^3+p^3)\dots(q^{2n+1}+p^{2n+1})} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{n(n+1)}q^{n+1}}{(q+p)\,(q^3+p^3)\dots(q^{2n+1}+p^{2n+1})} \qquad (4.11)
\end{aligned}
$$

Considere $p = \pm 1$ e $q \in \mathbb{Z}$ com $q \geqslant 2$ em (4.11), assim:

$$
\begin{aligned}
\nu\left(\frac{\pm 1}{q}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm 1)^{n(n+1)}q^{n+1}}{(q\pm 1)\,(q^3\pm 1)\dots(q^{2n+1}\pm 1)} \\
&= \frac{q}{(q\pm 1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n+1}}{(q\pm 1)\,(q^3\pm 1)\dots(q^{2n+1}\pm 1)} \\
&= \frac{q}{(q\pm 1)}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n}}{(q^3\pm 1)\dots(q^{2n+1}\pm 1)}\right\} \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

A série em (4.12) é uma série do tipo (2.1.6) onde $a_n = (q^{2n+1} \pm 1)$ e $b_n = q^n$. Vamos mostrar que as condições do Lema 2.4.1 são satisfeitas quando $p = \pm 1$.

a) $a_n = q^{2n+1} \pm 1 \geqslant 2^{2.1+1} - 1 = 7 \Rightarrow a_n > 2$.

b) $b_n = q^n \geqslant 2^1 \Rightarrow b_n > 0$ para todos $n \in \mathbb{N}$, logo para infinitos valores.

$$a_n - 1 - b_n = q^{2n+1} \pm 1 - 1 - q^n \geqslant 2^{2.1+1} - 1 - 1 - 2^1 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n - 1 - b_n > 0 \Rightarrow a_n - 1 > b_n.$$

c) Tome $i_n = n$ subseqüência, por conseguinte,

$$\frac{b_{i_n}}{a_{i_n}} = \frac{q^n}{q^{2n+1} \pm 1} \Rightarrow \frac{b_{i_n}}{a_{i_n}} = \frac{\left(\dfrac{1}{q^n}\right)}{q \pm \dfrac{1}{q^{2n}}}$$

quando $n \to \infty$, $\dfrac{b_{i_n}}{a_{i_n}} \to 0$ e $a_{i_n} \to \infty$.

Por **a**, **b** e **c**, a série em (4.12) converge para um número irracional. Portanto $\nu\left(\dfrac{\pm 1}{q}\right)$ é irracional.

3) Tome $p, q \in \mathbb{C}$ com $q \neq 0$. Dessa maneira,

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{p}{q}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\dfrac{p}{q}\right)^{2n(n+1)}}{\left(1 + \dfrac{p}{q} + \dfrac{p^2}{q^2}\right) \dots \left(1 + \dfrac{p^{2n+1}}{q^{2n+1}} + \dfrac{p^{4n+2}}{q^{4n+2}}\right)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{2n(n+1)} q^{2+6+\dots+(4n+2)}}{q^{2n(n+1)} \left(q^2 + pq + q^2\right) \dots \left(q^{4n+2} + p^{2n+1} q^{2n+1} + p^{4n+2}\right)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{2n(n+1)} q^{2n^2+4n+2}}{q^{2n^2+2n} \left(q^2 + pq + q^2\right) \dots \left(q^{4n+2} + p^{2n+1} q^{2n+1} + p^{4n+2}\right)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{2n(n+1)} q^{2n+2}}{\left(q^2 + pq + q^2\right) \dots \left(q^{4n+2} + p^{2n+1} q^{2n+1} + p^{4n+2}\right)} \qquad (4.13)
\end{aligned}$$

Considere $p = \pm 1$ e $q \in \mathbb{Z}$ com $q \geqslant 2$ em (4.13), logo:

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{\pm 1}{q}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n+2}}{(q^2 \pm q + 1) \dots (q^{4n+2} \pm q^{2n+1} + 1)} \\
&= \frac{q^2}{(q^2 \pm q + 1)} \left\{ 1 + \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{(q^6 \pm q^3 + 1) \dots (q^{4n+2} \pm q^{2n+1} + 1)} \right] \right\}
\end{aligned} \qquad (4.14)$$

A série em (4.14) é uma série do tipo (2.1.6) onde $a_n = q^{4n+2} \pm q^{2n+1} + 1$ e $b_n = q^{2n}$.

Vamos verificar que para esta série as condições do Lema 2.4.1 são satisfeitas para $p = \pm 1$:

a) $a_n = q^{4n+2} \pm q^{2n+1} + 1 \geqslant 2^{4.1+2} - 2^{2.1+1} + 1 = 57 \Rightarrow a_n > 2.$

b) $b_n = q^{2n} \Rightarrow b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo para infinitos valores.

$$a_n - 1 - b_n = q^{4n+2} \pm q^{2n+1} + 1 - 1 - q^{2n} \geqslant 2^{4.1+2} - 2^{2.1+1} - 2^{2.1} = 52 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n - 1 - b_n > 0 \Rightarrow a_n - 1 > b_n$$

c) Considere $i_n = n$ subseqüência, desse modo

$$\frac{b_{i_n}}{a_{i_n}} = \frac{q^{2n}}{q^{4n+2} \pm q^{2n+1} + 1} \Rightarrow \frac{b_{i_n}}{a_{i_n}} = \frac{\left(\dfrac{1}{q^{2n}}\right)}{q^2 \pm \dfrac{q}{q^{2n}} + \dfrac{1}{q^{4n}}}$$

daí, $\dfrac{b_{i_n}}{a_{i_n}} \to 0$ e $a_{i_n} \to \infty$, quando $n \to \infty$.

Por **a**, **b** e **c** a série em (4.14) converge para um número irracional. Desse modo, $\rho\left(\dfrac{\pm 1}{q}\right)$ é irracional.

$\square$

Teorema 4.3 *As funções Teta falsa de ordem* 5, f_0, f_1, F_0, F_1, Φ, Ψ *assumem valores irracionais em* $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{4}, \ldots$.

Demonstração

1) Considere $f_0(q) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(-q,q)_n}$ onde

$$(-q,q)_n = \prod_{j=0}^{n-1} \left(1 - (-q)q^j\right) = (1+q)\left(1+q^2\right)\ldots(1+q^n)\,;\ (-q,q)_0 = 1$$

Para $q \in \mathbb{Z}$ com $q \geqslant 2$ temos:

$$\begin{aligned}
f_0\left(\frac{1}{q}\right) &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{q}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{1}{q}\right)\left(1+\frac{1}{q^2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{q^n}\right)}\\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{1+2+\ldots+n}}{q^{n^2}(q+1)\left(q^2+1\right)\ldots\left(q^n+1\right)}\\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{\frac{n^2+n}{2}}}{q^{n^2}(q+1)\left(q^2+1\right)\ldots\left(q^n+1\right)}\\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{q^{\frac{n^2+n}{2}}(q+1)\left(q^2+1\right)\ldots\left(q^n+1\right)}\\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{q^1q^2\ldots q^n(q+1)\left(q^2+1\right)\ldots\left(q^n+1\right)}\\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{\left[q(q+1)\right]\left[q^2\left(q^2+1\right)\right]\ldots\left[q^n\left(q^n+1\right)\right]} \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

A série em (4.15) é do tipo (2.1.6) onde $a_n = q^n\left(q^n+1\right)$ e $b_n = q^n$. Vamos verificar que as condições do Lema 2.4.1 são satisfeitas:

a) $a_n = q^n\left(q^n+1\right) \geqslant 2^1\left(2^1+1\right) = 6 \Rightarrow a_n > 2$.

b) $b_n = q^n \Rightarrow b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, assim para infinitos valores.

$$a_n - 1 - b_n = q^n\left(q^n+1\right) - 1 - q^n \geqslant 2^1\left(2^1+1\right) - 1 - 2^1 = 6 - 3 = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n - 1 - b_n > 0 \Rightarrow a_n - 1 > b_n$$

c) Considere $i_n = n$ subseqüência, portanto:

$$\frac{b_{i_n}}{a_{i_n}} = \frac{q^n}{q^n\left(q^n+1\right)} \Rightarrow \frac{b_{i_n}}{a_{i_n}} = \frac{1}{q^n+1}$$

quando $n \to \infty$, temos que $\dfrac{b_{i_n}}{a_{i_n}} \to 0$ e $a_{i_n} \to \infty$.

Por **a**, **b** e **c**, a série em (4.15) converge para um número irracional. Logo,

$f_0\left(\dfrac{1}{q}\right)$ é irracional.

Agora, considere $f_0\left(\dfrac{-1}{q}\right)$ onde $q \in \mathbb{Z}$ com $q \geqslant 2$, temos

$$\begin{aligned} f_0\left(\frac{-1}{q}\right) &= 1 - \frac{1}{q-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2} q^n}{[q(q-1)]\left[q^2\left(q^2+1\right)\right]\ldots\left[q^n\left(q^n+(-1)^n\right)\right]} \\ &= 1 - \frac{1}{q-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(k+1)^2} q^{k+1}}{[q(q-1)]\left[q^2\left(q^2+1\right)\right]\ldots\left[q^{k+1}\left(q^{k+1}+(-1)^{k+1}\right)\right]} \end{aligned} \tag{4.16}$$

A série em (4.16) é do tipo (2.1.6) onde $a_k = q^{k+1}\left(q^{k+1}+(-1)^{k+1}\right)$ e $b_k = (-1)^{(k+1)^2} q^{k+1}$. Vamos verificar as condições do Lema 2.4.2 para esta série:

a) $a_k = q^{k+1}\left(q^{k+1}+(-1)^{k+1}\right) \geqslant 2^2\left(2^2+(-1)^2\right) = 20 \Rightarrow a_k > 2.$

b) Se $b_k = (-1)^{(k+1)^2} q^{k+1}$, $b_m = (-1)^{(m+1)^2} q^{m+1}$ então

$$b_m b_k = (-1)^{(k+1)^2+(m+1)^2} q^{k+m+2}$$

Dado $i \in \mathbb{N}$, tome $m, k > i$ com $m = k+1$. Dessa forma,

$$b_m b_k = (-1)^{(k+2)^2+(k+1)^2} q^{2k+3} = -q^{2k+3} \Rightarrow b_m b_k < 0$$

c) $|b_k| = q^{k+1}$, assim .

$$\begin{aligned} a_k - 1 - |b_k| &= q^{k+1}\left(q^{k+1}+(-1)^{k+1}\right) - 1 - q^{k+1} \\ &\geqslant 2^2\left(2^2+(-1)^2\right) - 1 - 2^2 = 15 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_k - 1 - |b_k| > 0 \Rightarrow a_k - 1 > |b_k|$$

d) Tome $i_k = k$ uma subseqüência, logo

$$\frac{b_{i_k}}{a_{i_k}} = \frac{(-1)^{(k+1)^2} q^{k+1}}{q^{k+1}\left(q^{k+1}+(-1)^{k+1}\right)} \Rightarrow \frac{b_{i_k}}{a_{i_k}} = \frac{(-1)^{(k+1)^2}}{q^{k+1}+(-1)^{k+1}}$$

quando $k \to \infty$, $\dfrac{b_{i_k}}{a_{i_k}} \to 0$ e $a_{i_k} \to \infty$.

Por **a**, **b**, **c** e **d** a série em (4.16) converge para um número irracional. Portanto $f_0\left(\dfrac{-1}{q}\right)$ é irracional.

2) Considere $f_1(q) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)}}{(-q,q)_n}$ onde $q \in \mathbb{C}$ com $q \neq 0$, tal que

$$(-q,q)_n = (1+q)\left(1+q^2\right)\ldots\left(1+q^n\right);\ (-q,q)_0 = 1$$

Seja $q \in \mathbb{Z}$ com $q \geqslant 2$, assim

$$\begin{aligned}
f_1\left(\frac{1}{q}\right) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{q}\right)^{n(n+1)}}{\left(1+\frac{1}{q}\right)\left(1+\frac{1}{q^2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{q^n}\right)} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^1 q^2 \ldots q^n}{q^{n(n+1)}(q+1)\left(q^2+1\right)\ldots\left(q^n+1\right)} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{q^{n(n+1)}(q+1)\left(q^2+1\right)\ldots\left(q^n+1\right)} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^{\frac{n(n+1)}{2}}(q+1)\left(q^2+1\right)\ldots\left(q^n+1\right)} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^1 q^2 \ldots q^n(q+1)\left(q^2+1\right)\ldots\left(q^n+1\right)} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[q(q+1)]\left[q^2\left(q^2+1\right)\right]\ldots\left[q^n\left(q^n+1\right)\right]} \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

A série em (4.17) é do tipo (2.1.6) onde $a_n = q^n\left(q^n+1\right)$ e $b_n = 1$. Verificando as condições do Lema 2.4.1:

a) $a_n = q^n\left(q^n+1\right) \geqslant 2^1\left(2^1+1\right) = 6 \Rightarrow a_n > 2$.

b) $b_n = 1 \Rightarrow b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, assim para infinitos valores.

$$a_n - 1 - b_n = q^n\left(q^n+1\right) - 1 - 1 \geqslant 2^1\left(2^1+1\right) - 2 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n - 1 - b_n > 0 \Rightarrow a_n - 1 > b_n$$

c) Considere $i_n = n$ subseqüência, daí:

$$\frac{b_{i_n}}{a_{i_n}} = \frac{1}{q^n\left(q^n+1\right)}$$

quando $n \to \infty$, $\dfrac{b_{i_n}}{a_{i_n}} \to 0$ e $a_{i_n} \to \infty$.

Por **a**, **b** e **c**, a série em (4.17) converge para um número irracional. Dessa forma, $f_1\left(\dfrac{1}{q}\right)$ é irracional.

Agora, considere $f_1\left(\dfrac{-1}{q}\right)$ onde $q \in \mathbb{Z}$ com $q \geqslant 2$. Assim

$$\begin{aligned} f_1\left(\frac{1}{q}\right) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n+1)}}{\left[q(q-1)\right]\left[q^2\left(q^2+1\right)\right]\ldots\left[q^n\left(q^n+(-1)^n\right)\right]} \\ &= 1 + \frac{1}{q(q-1)}\left\{1 + \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\left[q^2\left(q^2+1\right)\right]\ldots\left[q^n\left(q^n+(-1)^n\right)\right]}\right]\right\} \\ &= 1 + \frac{1}{q(q-1)}\left\{1 + \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left[q^2\left(q^2+1\right)\right]\ldots\left[q^{k+1}\left(q^{k+1}+(-1)^{k+1}\right)\right]}\right]\right\} \end{aligned} \tag{4.18}$$

A série em (4.18) é do tipo (2.1.6) onde $a_k = q^{k+1}\left(q^{k+1}+(-1)^{k+1}\right)$ e $b_k = 1$. Vamos mostrar que as condições do Lema 2.4.1 são satisfeitas:

a) $a_k = q^{k+1}\left(q^{k+1}+(-1)^{k+1}\right) \geqslant 2^2\left(2^2+(-1)^2\right) = 20 \Rightarrow a_k > 2$.

b) Se $b_k = 1 \Rightarrow b_k > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, logo para infinitos valores.

$$\begin{aligned} a_k - 1 - b_k &= q^{k+1}\left(q^{k+1}+(-1)^{k+1}\right) - 1 - q^{k+1} \\ &\geqslant 2^2\left(2^2+(-1)^2\right) - 1 - 2^2 = 15 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_k - 1 - b_k > 0 \Rightarrow a_k - 1 > b_k$$

c) Considere $i_k = k$ subseqüência, logo

$$\frac{b_{i_k}}{a_{i_k}} = \frac{1}{q^{k+1}\left(q^{k+1} + (-1)^{k+1}\right)}$$

quando $k \to \infty$, $\dfrac{b_{i_k}}{a_{i_k}} \to 0$ e $a_{i_k} \to \infty$.

Por **a**, **b** e **c**, a série em (4.18) converge para um número irracional. Portanto $f_1\left(\dfrac{-1}{q}\right)$ é irracional.

3) Considere $F_0(q) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n^2}}{(q,q^2)_n}$ onde

$$(q,q^2)_n = (1-q)\left(1-q^3\right)\dots\left(1+q^{2n-1}\right);\ (q,q^2)_0 = 1$$

Tomemos $p, q \in \mathbb{C}$ onde $q \neq 0$, assim

$$\begin{aligned}
F_0\left(\frac{p}{q}\right) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{2n^2}}{\left(1-\frac{p}{q}\right)\left(1-\left(\frac{p}{q}\right)^3\right)\dots\left(1-\left(\frac{p}{q}\right)^{2n-1}\right)} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{2n^2} q^1 q^3 \dots q^{2n-1}}{q^{2n^2}(q-p)\left(q^3-p^3\right)\dots\left(q^{2n-1}-p^{2n-1}\right)} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{2n^2} q^{n^2}}{q^{2n^2}(q-p)\left(q^3-p^3\right)\dots\left(q^{2n-1}-p^{2n-1}\right)} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{2n^2}}{q^{n^2}(q-p)\left(q^3-p^3\right)\dots\left(q^{2n-1}-p^{2n-1}\right)} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{2n^2}}{\left(qq^3\dots q^{2n-1}\right)(q-p)\left(q^3-p^3\right)\dots\left(q^{2n-1}-p^{2n-1}\right)} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{2n^2}}{[q(q-p)]\left[q^3\left(q^3-p^3\right)\right]\dots\left[q^{2n-1}\left(q^{2n-1}-p^{2n-1}\right)\right]}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Considere $p = \pm 1$ e $q \in \mathbb{Z}$ com $q \geqslant 2$ em (4.19), obtemos:

$$F_0\left(\frac{\pm 1}{q}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[q(q\mp 1)]\left[q^3\left(q^3 \mp 1\right)\right]\dots\left[q^{2n-1}\left(q^{2n-1}\mp 1\right)\right]} \tag{4.20}$$

A série em (4.20) é do tipo (2.1.6) onde $a_n = q^{2n-1}\left(q^{2n-1} \mp 1\right)$ e $b_n = 1$. Verificando as condições do Lema 2.4.1:

a) $a_n = q^{2n-1}\left(q^{2n-1} \mp 1\right) \geqslant 2^{2.1-1}\left(2^{2.1-1} - 1\right) = 2 \Rightarrow a_n \geqslant 2$.

b) $b_n = 1 \Rightarrow b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, assim para infinitos valores.

$$a_n - 1 - b_n = q^{2n-1}\left(q^{2n-1} \mp 1\right) - 1 - 1 \geqslant 2^{2.1-1}\left(2^{2.1-1} - 1\right) - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n - 1 - b_n \geqslant 0 \Rightarrow a_n - 1 \geqslant b_n$$

c) Considere $i_n = n$ uma subseqüência, logo

$$\frac{b_{i_n}}{a_{i_n}} = \frac{1}{q^{2n-1}\left(q^{2n-1} \mp 1\right)}$$

quando $n \to \infty$, $\dfrac{b_{i_n}}{a_{i_n}} \to 0$ e $a_{i_n} \to \infty$.

Por **a**, **b** e **c**, a série em (4.20) converge para um número irracional. Desse modo, $F_0\left(\dfrac{\pm 1}{q}\right)$ é irracional.

4) Considere $F_1(q) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n(n+1)}}{\left(q, q^2\right)_{n+1}}$ onde

$$\left(q, q^2\right)_{n+1} = (1-q)\left(1-q^3\right)\ldots\left(1-q^{2n-1}\right)$$

daí

$$F_1(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n(n+1)}}{(1-q)\left(1-q^3\right)\ldots\left(1-q^{2n+1}\right)}$$

Tome $p, q \in \mathbb{C}$ onde $q \neq 0$, assim

$$\begin{aligned}
F_1\left(\frac{p}{q}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{2n(n+1)}}{\left(1-\frac{p}{q}\right)\left(1-\left(\frac{p}{q}\right)^3\right)\ldots\left(1-\left(\frac{p}{q}\right)^{2n+1}\right)} \\
&= \frac{q}{q-p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{2n(n+1)} q^1 q^3 \ldots q^{2n+1}}{q^{2n(n+1)}(q-p)\left(q^3-p^3\right)\ldots\left(q^{2n+1}-p^{2n+1}\right)} \\
&= \frac{q}{q-p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{2n(n+1)} q^{n^2+n}}{q^{2n^2+2n}(q-p)\left(q^3-p^3\right)\ldots\left(q^{2n+1}-p^{2n+1}\right)} \\
&= \frac{q}{q-p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{2n(n+1)}}{q^{n^2+n}(q-p)\left(q^3-p^3\right)\ldots\left(q^{2n+1}-p^{2n+1}\right)} \\
&= \frac{q}{q-p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{2n(n+1)}}{qq^3 \ldots q^{2n+1}(q-p)\left(q^3-p^3\right)\ldots\left(q^{2n+1}-p^{2n+1}\right)} \\
&= \frac{q}{q-p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{2n(n+1)}}{[q(q-p)]\left[q^3\left(q^3-p^3\right)\right]\ldots\left[q^{2n+1}\left(q^{2n+1}-p^{2n+1}\right)\right]}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Considere $p = \pm 1$ e $q \in \mathbb{Z}$ com $q \geqslant 2$ em (4.21), logo:

$$\begin{aligned}
F_1\left(\frac{\pm 1}{q}\right) &= \frac{q}{q \mp 1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^{2n(n+1)}}{[q(q \mp 1)]\left[q^3\left(q^3 \mp 1\right)\right]\ldots\left[q^{2n+1}\left(q^{2n+1} \mp 1\right)\right]} \\
&= \frac{q}{q \mp 1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[q(q \mp 1)]\left[q^3\left(q^3 \mp 1\right)\right]\ldots\left[q^{2n+1}\left(q^{2n+1} \mp 1\right)\right]}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

A série em (4.22) é do tipo (2.1.6) onde $a_n = q^{2n+1}\left(q^{2n+1} \mp 1\right)$ e $b_n = 1$. Verificando as condições do Lema 2.4.1 para esta série:

a) $a_n = q^{2n+1}\left(q^{2n+1} \mp 1\right) \geqslant 2^{2.1+1}\left(2^{2.1+1} - 1\right) = 56 \Rightarrow a_n > 2$.

b) $b_n = 1 \Rightarrow b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, assim para infinitos valores.

$$a_n - 1 - b_n = q^{2n+1}\left(q^{2n+1} \mp 1\right) - 1 - 1 \geqslant 2^{2.1+1}\left(2^{2.1+1} - 1\right) - 2 = 54 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n - 1 - b_n > 0 \Rightarrow a_n - 1 > b_n$$

c) Considere $i_n = n$ uma subseqüência, logo

$$\frac{b_{i_n}}{a_{i_n}} = \frac{1}{q^{2n+1}\left(q^{2n+1} \mp 1\right)}$$

quando $n \to \infty$, $\dfrac{b_{i_n}}{a_{i_n}} \to 0$ e $a_{i_n} \to \infty$.

Por **a**, **b** e **c**, a série em (4.22) converge para um número irracional. Logo, $F_1\left(\dfrac{\pm 1}{q}\right)$ é irracional.

5) Considere $\Phi(q) = -1 + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{5n^2}}{\left(q,q^5\right)_{n+1}\left(q^4,q^5\right)_n}$ onde

$$\left(q,q^5\right)_{n+1} = (1-q)\left(1-q^6\right)\ldots\left(1-q^{5n+1}\right)$$

$$\left(q^4,q^5\right)_n = \left(1-q^4\right)\left(1-q^9\right)\ldots\left(1-q^{5n-1}\right),\ \left(q^4,q^5\right)_0 = 1$$

assim

$$\begin{aligned}
\Phi(q) &= -1 + \frac{1}{\left(q,q^5\right)_1\left(q^4,q^5\right)_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{5n^2}}{\left(q,q^5\right)_{n+1}\left(q^4,q^5\right)_n} \\
&= -1 + \frac{1}{1-q} + \frac{1}{1-q}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{5n^2}}{\left(1-q^4\right)\left(1-q^6\right)\ldots\left(1-q^{5n-1}\right)\left(1-q^{5n+1}\right)}
\end{aligned}$$

Escolhemos $p, q \in \mathbb{C}$ onde $q \neq 0$. Então

$$\Phi\left(\frac{p}{q}\right) = -1 + \frac{q}{q-p} + \frac{q}{q-p}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{5n^2}}{q^{5n^2}}\left[\prod_{j=1}^{n} \frac{q^{5j-1}q^{5j+1}}{(q^{5j-1}-p^{5j-1})(q^{5j+1}-p^{5j+1})}\right]\right\} \tag{4.23}$$

Desenvolvendo (4.23) e, tomando $u_j = \dfrac{1}{\left(q^{5j-1} - p^{5j-1}\right)\left(q^{5j+1} - p^{5j+1}\right)}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\frac{p}{q}\right) &= -1 + \frac{q}{q-p}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{5n^2} q^{\frac{(5n+3)n}{2}} q^{\frac{(5n+7)n}{2}}}{q^{5n^2}} \prod_{j=1}^{n} u_j\right\} \\
&= -1 + \frac{q}{q-p}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{5n^2} q^{5n^2+5n}}{q^{5n^2}} \prod_{j=1}^{n} u_j\right\} \\
&= -1 + \frac{q}{q-p}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} p^{5n^2} q^{5n} \prod_{j=1}^{n} u_j\right\} \qquad (4.24)
\end{aligned}$$

Tome $p = \pm 1$ e $q \in \mathbb{Z}$ com $q \geqslant 2$, além disso $(\pm 1)^{5n^2} = (\pm 1)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, assim reescrevendo (4.24):

$$\Phi\left(\frac{\pm 1}{q}\right) = -1 + \frac{q}{q \mp 1}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n q^{5n} \prod_{j=1}^{n} u'_j\right\} \qquad (4.25)$$

onde $u'_j = \dfrac{1}{\left(q^{5j-1} - (\pm 1)^{5j-1}\right)\left(q^{5j+1} - (\pm 1)^{5j+1}\right)}$.

A série em (4.25) é do tipo (2.1.6) onde $a_n = \left(q^{5n-1} - (\pm 1)^{5n-1}\right)\left(q^{5n+1} - (\pm 1)^{5n+1}\right)$ e $b_n = (\pm 1)^n q^{5n}$.

Vamos verificar as condições dos Lemas 2.4.1 e 2.4.2 em tal série, respectivamente para $p = 1$ e $p = -1$:

a) $a_n = \left(q^{5n-1} - (\pm 1)^{5n-1}\right)\left(q^{5n+1} - (\pm 1)^{5n+1}\right) \geqslant \left(2^{5.1-1} - 1\right)\left(2^{5.1+1} - 1\right) \Rightarrow a_n \geqslant \left(2^4 - 1\right)\left(2^6 - 1\right) \Rightarrow a_n > 2$.

b) Se $p = -1$, $b_n = (-1)^n q^{5n}$ e $b_m = (-1)^m q^{5m}$ então $b_m b_n = (-1)^{n+m} q^{5(n+m)}$.

Dado $i \in \mathbb{N}$ tome $m, n > i$ com $m = n + 1$, portanto:

$$b_m b_n = (-1)^{2n+1} q^{10n+5} \Rightarrow b_m b_n = -q^{10n+5} \Rightarrow b_m b_n < 0$$

Se $p = 1$, $b_n = q^{5n} \Rightarrow b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo para infinitos.

c) $|b_n| = q^{5n} > 0$.

$$\begin{aligned} a_n - 1 - |b_n| &= \left(q^{5n+1} - (\pm 1)^{5n-1}\right)\left(q^{5n+1} - (\pm 1)^{5n+1}\right) - 1 - q^{5n} \\ &\geqslant \left(2^{5.1-1} - (\pm 1)^{5.1-1}\right)\left(2^{5.1+1} - (\pm 1)^{5.1+1}\right) - 1 - 2^{5.1} \\ &= 15.63 - 1 - 32 \Rightarrow a_n - 1 - |b_n| > 0 \Rightarrow a_n - 1 > |b_n| \end{aligned}$$

d) Escolhendo $i_n = n$ uma subseqüência, temos que

$$\frac{b_{i_n}}{a_{i_n}} = \frac{(\pm 1)^n q^{5n}}{\left(q^{5n-1} - (\pm 1)^n\right)\left(q^{5n+1} - (\pm 1)^n\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b_{i_n}}{a_{i_n}} = \frac{\left(\dfrac{(\pm 1)^n}{q^{5n}}\right)}{1 - \dfrac{(\pm 1)^n}{q^{5n+1}} - \dfrac{(\pm 1)^n}{q^{5n-1}} + \dfrac{1}{q^{10n}}}$$

quando $n \to \infty$, $\dfrac{b_{i_n}}{a_{i_n}} \to 0$ e $a_{i_n} \to \infty$.

Por **a**, **b**, **c** e **d**, a série em (4.25) converge para um número irracional. Logo $\Phi\left(\dfrac{\pm 1}{q}\right)$ é irracional.

6) Considere $\Psi(q) = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{q^{5n^2}}{(q^2, q^5)_{n+1} (q^3, q^5)_n}$ onde

$$(q^2, q^5)_{n+1} = (1 - q^2)(1 - q^7)\ldots(1 - q^{5n+2})$$

$$(q^3, q^5)_n = (1 - q^3)(1 - q^8)\ldots(1 - q^{5n-2}),\ (q^3, q^5)_0 = 1$$

Sendo

$$\begin{aligned} \Psi(q) &= -1 + \frac{1}{(q^2, q^5)_1 (q^3, q^5)_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{5n^2}}{(q^2, q^5)_{n+1} (q^3, q^5)_n} \\ &= -1 + \frac{1}{(1 - q^2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{5n^2}}{(q^2, q^5)_{n+1} (q^3, q^5)_n} \end{aligned}$$

Dados $p, q \in \mathbb{C}$ onde $q \neq 0$. Então

$$\Psi\left(\frac{p}{q}\right) = -1 + \frac{q^2}{q^2 - p^2} + \frac{q^2}{q^2 - p^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p^{5n^2}}{q^{5n^2}}\left[\prod_{j=1}^{n}\frac{q^{5j-2}q^{5j+2}}{\left(q^{5j-2} - p^{5j-2}\right)\left(q^{5j+2} - p^{5j+2}\right)}\right] \tag{4.26}$$

Desenvolvendo (4.26) e tomando $u_j = \dfrac{1}{\left(q^{5j-2} - p^{5j-2}\right)\left(q^{5j+2} - p^{5j+2}\right)}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\Psi\left(\frac{p}{q}\right) &= -1 + \frac{q^2}{q^2 - p^2}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{p^{5n^2}q^{\frac{(3+5n-2)n}{2}}q^{\frac{(7+5n+2)n}{2}}}{q^{5n^2}}\prod_{j=1}^{n}u_j\right\} \\
&= -1 + \frac{q^2}{q^2 - p^2}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{p^{5n^2}q^{5n^2+5n}}{q^{5n^2}}\prod_{j=1}^{n}u_j\right\} \\
&= -1 + \frac{q^2}{q^2 - p^2}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}p^{5n^2}q^{5n}\prod_{j=1}^{n}u_j\right\} \qquad (4.27)
\end{aligned}$$

Tome $p = \pm 1$ e $q \in \mathbb{Z}$ com $q \geqslant 2$, além disso $(\pm 1)^{5n^2} = (\pm 1)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, assim reescrevendo (4.27):

$$\Psi\left(\frac{\pm 1}{q}\right) = -1 + \frac{q}{q \mp 1}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}(\pm 1)^n q^{5n}\prod_{j=1}^{n}u'_j\right\} \tag{4.28}$$

onde $u'_j = \dfrac{1}{\left(q^{5j-2} - (\pm 1)^{5j-2}\right)\left(q^{5j+2} - (\pm 1)^{5j+2}\right)}$.

A série em (4.28) é do tipo (2.1.6) onde $a_n = \left(q^{5n-2} - (\pm 1)^{5n-2}\right)\left(q^{5n+2} - (\pm 1)^{5n+2}\right)$ e $b_n = (\pm 1)^n q^{5n}$. Vamos mostrar que para esta série, as condições dos Lemas 2.4.1 e 2.4.2 são satisfeitas, respectivamente para $p = 1$ e $p = -1$.

a) $a_n = \left(q^{5n-2} - (\pm 1)^{5n-2}\right)\left(q^{5n+2} - (\pm 1)^{5n+2}\right) \geqslant \left(2^{5.1-2} - 1\right)\left(2^{5.1+2} - 1\right) \Rightarrow$ $a_n \geqslant \left(2^3 - 1\right)\left(2^7 - 1\right) \Rightarrow a_n > 2$.

b) Se $p = -1$, $b_m = (-1)^m q^{5m}$ e $b_n = (-1)^n q^{5n}$ então $b_m b_n = (-1)^{5(m+n)}q^{5(n+m)}$.

Dado $i \in \mathbb{N}$, tome $m, n > i$ com $m = n + 1$, assim

$$b_m b_n = (-1)^{n+1+n} q^{5(2n+1)} = -q^{10n+5} \Rightarrow b_m b_n < 0$$

Se $p = 1$, $b_n = q^{5n} \Rightarrow b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo para infinitos valores.

c) $|b_n| = q^{5n} > 0$.

$$\begin{aligned} a_n - 1 - |b_n| &= \left(q^{5n-2} - (\pm 1)^{5n-2}\right)\left(q^{5n+2} - (\pm 1)^{5n+2}\right) - 1 - q^{5n} \\ &\geqslant \left(2^{5.1-2} - (\pm 1)^{5.1-2}\right)\left(2^{5.1+2} - (\pm 1)^{5.1+2}\right) - 1 - 2^{5.1} \\ &\geqslant \left(2^3 - 1\right)\left(2^7 - 1\right) - 1 - 32 \Rightarrow a_n - 1 - |b_n| > 0 \Rightarrow a_n - 1 > |b_n| \end{aligned}$$

d) Escolhendo $i_n = n$ uma subseqüência, logo

$$\frac{b_{i_n}}{a_{i_n}} = \frac{(\pm 1)^n q^{5n}}{\left(q^{5n-2} - (\pm 1)^{5n-2}\right)\left(q^{5n+2} - (\pm 1)^{5n+2}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b_{i_n}}{a_{i_n}} = \frac{\left(\dfrac{(\pm 1)^{5n^2}}{q^{5n}}\right)}{1 - \dfrac{(\pm 1)^{5n+2}}{q^{5n+2}} - \dfrac{(\pm 1)^{5n-2}}{q^{5n-2}} + \dfrac{1}{q^{10n}}}$$

quando $n \to \infty$, $\dfrac{b_{i_n}}{a_{i_n}} \to 0$ e $a_{i_n} \to \infty$.

Por **a**, **b**, **c** e **d**, a série em (4.28) converge para um número irracional. Logo $\Psi\left(\dfrac{\pm 1}{q}\right)$ é irracional.

□

Teorema 4.4 *As q-séries de Rogers e Ramanujan,*

$$r_1(q) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q)\left(1-q^2\right)\ldots\left(1-q^n\right)}$$

e

$$r_2(q) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)}}{(1-q)\left(1-q^2\right)\ldots\left(1-q^n\right)}$$

assumem valores irracionais em $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{4}, \ldots$

Demonstração

Considere $p, q \in \mathbb{C}$ com $q \neq 0$. Assim,

$$\begin{aligned} r_1\left(\frac{p}{q}\right) &= 1 + \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{n^2}}{\left(1-\frac{p}{q}\right)\left(1-\left(\frac{p}{q}\right)^2\right)\ldots\left(1-\left(\frac{p}{q}\right)^n\right)} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{n^2} q^{1+2+\ldots+n}}{q^{n^2}(q-p)\left(q^2-p^2\right)\ldots\left(q^n-p^n\right)} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{n^2} q^{\frac{n^2+n}{2}}}{q^{n^2}(q-p)\left(q^2-p^2\right)\ldots\left(q^n-p^n\right)} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{n^2} q^{n}}{q^{\frac{n^2+n}{2}}(q-p)\left(q^2-p^2\right)\ldots\left(q^n-p^n\right)} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{n^2} q^{n}}{qq^2\ldots q^n(q-p)\left(q^2-p^2\right)\ldots\left(q^n-p^n\right)} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{n^2} q^{n}}{[q(q-p)]\left[q^2\left(q^2-p^2\right)\right]\ldots\left[q^n\left(q^n-p^n\right)\right]} \qquad (4.29) \end{aligned}$$

Tomando $p = \pm 1$, $q \in \mathbb{Z}$ com $q \geqslant 2$ e $(\pm 1)^{n^2} = (\pm 1)^n$ em (4.29), daí

$$\begin{aligned} r_1\left(\frac{\pm 1}{q}\right) &= 1 + \frac{(\pm 1)}{[q(q\mp 1)]} + \frac{(\pm 1)}{[q(q\mp 1)]} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\pm 1)^n q^n}{\left[q^2\left(q^2-1\right)\right]\ldots\left[q^n\left(q^n-(\pm 1)^n\right)\right]} \\ &= 1 + \frac{(\pm 1)}{[q(q\mp 1)]} + \frac{(\pm 1)}{[q(q\mp 1)]} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^{k+1} q^{k+1}}{\left[q^2\left(q^2-1\right)\right]\ldots\left[q^{k+1}\left(q^{k+1}-(\pm 1)^{k+1}\right)\right]} \end{aligned} \qquad (4.30)$$

Note que a série em (4.30) é do tipo (2.1.6) onde $a_k = q^{k+1}\left(q^{k+1} - (\pm 1)^{k+1}\right)$ e $b_k = (\pm 1)^{k+1} q^{k+1}$. Vamos mostrar que para esta série vale as condições dos Lemas 2.4.1 e 2.4.2, respectivamente para $p = 1$ e $p = -1$:

a) $a_k = q^{k+1}\left(q^{k+1} - (\pm 1)^{k+1}\right) \geqslant 2^2\left(2^2 - (\pm 1)^2\right) = 12 \Rightarrow a_k > 2$.

b) $|b_k| = q^{k+1} > 0$.

$$\begin{aligned} a_k - 1 - |b_k| &= q^{k+1}\left(q^{k+1} - (\pm 1)^{k+1}\right) - 1 - q^{k+1} \\ &\geqslant 2^2\left(2^2 - (\pm 1)^2\right) - 1 - 2^2 = 7 \\ &\Rightarrow a_k - 1 - |b_k| > 0 \Rightarrow a_k - 1 > |b_k| \end{aligned}$$

c) Se $p = -1$, $b_m = (-1)^{m+1}q^{m+1}$ e $b_k = (-1)^{k+1}q^{k+1}$ então

$$b_m b_k = (-1)^{m+k}q^{m+k+2}$$

Dado $i \in \mathbb{N}$, tome $m, k > i$ com $m = k + 1$. Assim

$$b_m b_k = (-1)^{2k+1}q^{2k+3} = -q^{2k+3} \Rightarrow b_m b_k < 0$$

Se $p = 1$, $b_k = q^{k+1} \Rightarrow b_k > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, logo para infinitos valores.

d) Considere a subseqüência $i_k = k$, logo

$$\frac{b_{i_k}}{a_{i_k}} = \frac{(\pm 1)^{k+1}q^{k+1}}{q^{k+1}\left(q^{k+1} - (\pm 1)^{k+1}\right)} \Rightarrow \frac{b_{i_k}}{a_{i_k}} = \frac{(\pm 1)^{k+1}}{q^{k+1} - (\pm 1)^{k+1}}$$

quando $k \to \infty$, $\dfrac{b_{i_k}}{a_{i_k}} \to 0$ e $a_{i_k} \to \infty$.

Por **a**, **b**, **c** e **d**, a série em (4.30) converge para um irracional. Logo $r_1\left(\dfrac{\pm 1}{q}\right)$ é irracional.

Agora, considere $p, q \in \mathbb{C}$ com $q \geqslant 2$. Assim,

$$
\begin{aligned}
r_2\left(\frac{p}{q}\right) &= 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{n(n+1)}}{\left(1-\frac{p}{q}\right)\left(1-\left(\frac{p}{q}\right)^2\right)\ldots\left(1-\left(\frac{p}{q}\right)^n\right)} \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{n(n+1)} q^{1+2+\ldots+n}}{q^{n(n+1)}(q-p)\left(q^2-p^2\right)\ldots\left(q^n-p^n\right)} \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{n(n+1)} q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{q^{n(n+1)}(q-p)\left(q^2-p^2\right)\ldots\left(q^n-p^n\right)} \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{n(n+1)}}{q^{\frac{n(n+1)}{2}}(q-p)\left(q^2-p^2\right)\ldots\left(q^n-p^n\right)} \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{n(n+1)}}{q q^2 \ldots q^n(q-p)\left(q^2-p^2\right)\ldots\left(q^n-p^n\right)} \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{n(n+1)}}{[q(q-p)]\left[q^2\left(q^2-p^2\right)\right]\ldots\left[q^n\left(q^n-p^n\right)\right]} \qquad (4.31)
\end{aligned}
$$

Tomando $p = \pm 1$ e $q \in \mathbb{Z}$ com $q \geqslant 2$ em (4.31), daí

$$
r_2\left(\frac{\pm 1}{q}\right) = 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[q(q\mp 1)]\left[q^2\left(q^2-1\right)\right]\ldots\left[q^n\left(q^n-(\pm 1)^n\right)\right]} \qquad (4.32)
$$

A série em (4.32) é do tipo (2.1.6) onde $a_n = q^n\left(q^n-(\pm 1)^n\right)$ e $b_n = 1$. Vamos verificar para tal série, as condições dos Lema 2.4.1 para $p = \pm 1$:

a) $a_n = q^n\left(q^n-(\pm 1)^n\right) \geqslant 2^1\left(2^1-(\pm 1)^1\right) \geqslant 2 \Rightarrow a_n \geqslant 2$.

b) $b_n = 1 \Rightarrow b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo para infinitos valores.

$a_n - 1 - b_n = q^n\left(q^n-(\pm 1)^n\right) - 1 - 1 \geqslant 0 \Rightarrow a_n - 1 \geqslant b_n$.

c) Considere $i_n = n$ subseqüência, logo

$$
\frac{b_{i_n}}{a_{i_n}} = \frac{1}{q^n\left(q^n-(\pm 1)\right)}
$$

quando $n \to \infty$, $\dfrac{b_{i_n}}{a_{i_n}} \to 0$ e $a_{i_n} \to \infty$.

Por **a**, **b** e **c**, a série em (4.32) converge para um irracional. Portanto $r_2\left(\dfrac{\pm 1}{q}\right)$ é irracional.

$\square$

obs:Esse método falha para produzir irracionalidade de algumas funções teta falsa de ordem 5 e também as de ordem superior nestes valores. Para mais detalhes veja [2].

Para maiores detalhes veja [7],[15] e[16].

Capítulo 5

Teorema de Apéry

Em junho de 1978 na cidade de Marseille-Luminy, R. Apéry surpreendeu sua platéia com a prova da irracionalidade de $\zeta(3)$, na qual tinha pontos elementares e complexos, com isso dividiu a platéia em defensores e não defensores. Dois meses depois H.Cohen apresentou a prova completa no Congresso Internacional de Matemática em Helsinki. Apresentaremos uma prova da irracionalidade de $\zeta(2)$ e $\zeta(3)$ dada por F. Beukers utilizando integrais duplas e triplas.

Definição: A função Zeta de Riemann é definida por :

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $z \in \mathbb{C}$.

A série converge para $Rez > 1$. Além do mais, é absolutamente e uniformemente convergente em qualquer região finita na qual $Rez \geqslant 1 + \delta$, $\delta > 0$.

Considere

$$d_n = [1, 2, \ldots, n]$$

o mínimo múltiplo comum entre $1, 2, \ldots, n$.

Lema 5.1 *Sejam r e s inteiros não-negativos. Se $r > s$ então*
a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1 - xy} dxdy$
é um número racional cujo denominador é um divisor de d_r^2.
b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \left(-\frac{\log xy}{1 - xy} x^r y^s\right) dxdy$
é um número racional cujo denominador é um divisor de d_r^3.

Se $r = s$ então,
c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1 - xy} dxdy = \zeta(2) - \frac{1}{1^2} - \ldots - \frac{1}{r^2}$
d) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \left(-\frac{\log xy}{1 - xy} x^r y^s\right) dxdy = 2\left(\zeta(3) - \frac{1}{1^3} - \ldots - \frac{1}{r^3}\right)$

Observação 5.1 *Em c) e d) o caso em que $r = 0$, as somas*

$$1^{-2} + \ldots + r^{-2} \text{ e } 1^{-3} + \ldots + r^{-3}$$

desaparecem.

Demonstração

Seja σ qualquer número real não-negativo. Considere a integral

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{r+\sigma} y^{s+\sigma}}{1 - xy} dxdy$$

Note que essa integral dupla é imprópria, sendo equivalente ao seguinte limite:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{x^{r+\sigma} y^{s+\sigma}}{1 - xy} dxdy \tag{5.1}$$

Veja que

$$\frac{1}{1 - xy} = \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k, \text{ com } 0 < xy < 1 \tag{5.2}$$

Substituindo (5.2) na integral dupla de (5.1), obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{x^{r+\sigma}y^{s+\sigma}}{1-xy}dxdy &= \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}x^{r+\sigma}y^{s+\sigma}\left(\sum_{k=0}^{\infty}x^k y^k\right)dxdy \\
&= \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left(\sum_{k=0}^{\infty}x^{u_k}y^{v_k}\right)dxdy
\end{aligned}$$

onde $u_k = k + r + \sigma$ e $v_k = k + s + \sigma$.

A série em (5.2) converge uniformemente pelo Corolário 1.3.4, logo pelo Corolário 1.3.1, temos:

$$\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left(\sum_{k=0}^{\infty}x^{u_k}y^{v_k}\right)dxdy = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}x^{u_k}y^{v_k}dxdy\right)$$

Dessa forma

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{x^{r+\sigma}y^{s+\sigma}}{1-xy}dxdy &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}x^{u_k}y^{v_k}dxdy\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\left[\frac{x^{u_k+1}}{u_k+1}\right]\Bigg|_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\left[\frac{y^{v_k+1}}{v_k+1}\right]\Bigg|_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\left[\frac{(1-\varepsilon)^{u_k+1}-\varepsilon^{u_k+1}}{u_k+1}\right]\left[\frac{(1-\varepsilon)^{v_k+1}-\varepsilon^{v_k+1}}{v_k+1}\right]\right)
\end{aligned}$$

Portanto

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{x^{r+\sigma}y^{s+\sigma}}{1-xy}dxdy = \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left[\frac{(1-\varepsilon)^{u_k+1}-\varepsilon^{u_k+1}}{u_k+1}\right]\left[\frac{(1-\varepsilon)^{v_k+1}-\varepsilon^{v_k+1}}{v_k+1}\right]\right)$$

como a série acima é uniformemente convergente pelo Teorema 1.3.3, segue-que pelo Corolário 1.3.2 que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{x^{r+\sigma}y^{s+\sigma}}{1-xy}dxdy = \sum_{k=0}^{\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\left[\frac{(1-\varepsilon)^{u_k+1}-\varepsilon^{u_k+1}}{u_k+1}\right]\left[\frac{(1-\varepsilon)^{v_k+1}-\varepsilon^{v_k+1}}{v_k+1}\right]\right)$$

como

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{(1-\varepsilon)^{u_k+1}-\varepsilon^{u_k+1}}{u_k+1}\right]\left[\frac{(1-\varepsilon)^{v_k+1}-\varepsilon^{v_k+1}}{v_k+1}\right]=\frac{1}{(u_k+1)(v_k+1)}$$

daí

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{x^{r+\sigma}y^{s+\sigma}}{1-xy}dxdy=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(u_k+1)(v_k+1)}$$

ou seja,

$$\int_0^1\int_0^1\frac{x^{r+\sigma}y^{s+\sigma}}{1-xy}dxdy=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(u_k+1)(v_k+1)} \tag{5.3}$$

Vamos mostrar (a) e (c) primeiramente, separando respectivamente em dois casos:

1º **caso**: $r > s$.

Como $r - s \neq 0$, podemos reescrever a série (5.3) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(u_k+1)(v_k+1)} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(r-s)}\left[\frac{1}{v_k+1}-\frac{1}{u_k+1}\right]\\ &= \frac{1}{(r-s)}\left(\frac{1}{s+1+\sigma}+\frac{1}{s+2+\sigma}+\ldots+\frac{1}{r+\sigma}\right)\end{aligned}$$

Assim

$$\int_0^1\int_0^1\frac{x^{r+\sigma}y^{s+\sigma}}{1-xy}dxdy=\frac{1}{(r-s)}\left(\frac{1}{s+1+\sigma}+\frac{1}{s+2+\sigma}+\ldots+\frac{1}{r+\sigma}\right) \tag{5.4}$$

Fazendo $\sigma = 0$, concluímos que

$$\int_0^1\int_0^1\frac{x^{r}y^{s}}{1-xy}dxdy=\frac{1}{(r-s)}\left(\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+2}+\ldots+\frac{1}{r}\right)=\frac{p}{q}$$

onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q = (r-s)[s+1, s+2, \ldots, r] \in \mathbb{N}$. Como $[s+1, s+2, \ldots, r] | d_r$ temos $d_r = k_1[s+1, s+2, \ldots, r]$ com $k_1 \in \mathbb{Z}$ e pelo fato de $0 < r-s < r$ temos $(r-s)|d_r$ o que implica que $d_r = k_2(r-s)$ com $k_2 \in \mathbb{N}$.
Portanto

$$d_r^2 = k_1 k_2 (r-s)[s+1, s+2, \ldots, r] = k_1 k_2 q \Rightarrow q | d_r^2$$

2º **caso**: $r = s$.

Segue-se de (5.3) que

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{r+\sigma} y^{r+\sigma}}{1-xy} dxdy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+r+\sigma+1)^2}$$

Fazendo $\sigma = 0$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^r}{1-xy} dxdy &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+r+1)^2} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(r+1)^2} - \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{r^2} \right) \\ &= \zeta(2) - \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{r^2} \right) \end{aligned}$$

Em particular quando $r = 0$

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dxdy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \zeta(2)$$

Vamos mostrar (b) e (d), separando respectivamente em dois casos:

1º **caso**: $r > s$.

Derivando (5.4) com respeito a σ, temos:

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{r+\sigma} y^{s+\sigma}}{1-xy} dxdy \right) = \frac{d}{d\sigma} \left[\frac{1}{r-s} \left(\frac{1}{s+1+\sigma} + \frac{1}{s+2+\sigma} + \ldots + \frac{1}{r+\sigma} \right) \right] \tag{5.5}$$

Pelo Corolário 1.3.2, obtemos o seguinte igualdade:

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\int_0^1\int_0^1 \frac{x^{r+\sigma}y^{s+\sigma}}{1-xy}dxdy\right) = \int_0^1\int_0^1 \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{x^{r+\sigma}y^{s+\sigma}}{1-xy}\right)dxdy \tag{5.6}$$

Como

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{x^{r+\sigma}y^{s+\sigma}}{1-xy}\right) &= \frac{1}{1-xy}\frac{d}{d\sigma}\left(e^{(r+\sigma)\log x+(s+\sigma)\log y}\right)\\ &= \frac{1}{1-xy}(\log x+\log y)e^{(r+\sigma)\log x+(s+\sigma)\log y}\\ &= \frac{\log xy}{1-xy}x^{r+\sigma}y^{s+\sigma}\end{aligned}$$

além de que,

$$\frac{d}{d\sigma}\left[\frac{1}{r-s}\left(\frac{1}{s+1+\sigma}+\frac{1}{s+2+\sigma}+\ldots+\frac{1}{r+\sigma}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{r-s}\cdot\left(-\frac{1}{(s+1+\sigma)^2}-\frac{1}{(s+2+\sigma)^2}-\ldots-\frac{1}{(r+\sigma)^2}\right)$$

De (5.5) e (5.6), concluímos que:

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{\log xy}{1-xy}x^{r+\sigma}y^{s+\sigma}dxdy = \frac{1}{r-s}\left(-\frac{1}{(s+1+\sigma)^2}-\frac{1}{(s+2+\sigma)^2}-\ldots-\frac{1}{(r+\sigma)^2}\right)$$

$$\int_0^1\int_0^1 \left(-\frac{\log xy}{1-xy}x^{r+\sigma}y^{s+\sigma}\right)dxdy = \frac{1}{r-s}\left(\frac{1}{(s+1+\sigma)^2}+\frac{1}{(s+2+\sigma)^2}+\ldots+\frac{1}{(r+\sigma)^2}\right)$$

Fazendo $\sigma=0$, segue-se que

$$\int_0^1\int_0^1 \left(-\frac{\log xy}{1-xy}x^{r}y^{s}\right)dxdy = \frac{1}{r-s}\left(\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{(s+2)^2}+\ldots+\frac{1}{r^2}\right) = \frac{p}{q}$$

onde $p\in\mathbb{Z}$ e $q\in\mathbb{N}$ tal que $q=(r-s)\,[(s+1)^2,(s+2)^2,\ldots,r^2]$.

Note que,

$$0<r-s<r \Rightarrow r-s|d_r \Rightarrow d_r = k_1(r-s)\,\text{onde}\,k_1\in\mathbb{Z} \tag{5.7}$$

bem como,

$$1, 2, \ldots, r | d_r \Rightarrow 1^2, 2^2, \ldots, r^2 | d_r^2 \text{ e daí } (s+1)^2, (s+2)^2, \ldots, r^2 | d_r^2$$

Como d_r^2 é múltiplo comum de $(s+1)^2, (s+2)^2, \ldots, r^2$, segue-se que

$$\left[(s+1)^2, (s+2)^2, \ldots, r^2\right] | d_r^2 \Rightarrow d_r^2 = k_2 \left[(s+1)^2, (s+2)^2, \ldots, r^2\right], \ k_2 \in \mathbb{Z} \tag{5.8}$$

Por (5.7) e (5.8), inferimos que

$$d_r^3 = k_1 k_2 q \Rightarrow q | d_r^3$$

2^{o} **caso**: $r = s$.

Por (5.3) deduzimos que

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{r+\sigma} y^{r+\sigma}}{1 - xy} dxdy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k + r + \sigma + 1)(k + r + \sigma + 1)}$$

Assim, derivando com respeito a σ, temos:

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{r+\sigma} y^{r+\sigma}}{1 - xy} dxdy \right) = \frac{d}{d\sigma} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k + r + \sigma + 1)^2} \right)$$

De maneira análoga ao 1^{o} caso,

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{x^{r+\sigma} y^{r+\sigma}}{1 - xy} \right) dxdy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{(k + r + \sigma + 1)^2} \right)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\log xy}{1 - xy} x^{r+\sigma} y^{r+\sigma} dxdy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-2}{(k + r + \sigma + 1)^3}$$

Fazendo $\sigma = 0$,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 \left(-\frac{\log xy}{1 - xy} x^r y^r \right) dxdy &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(k + r + 1)^3} \\
&= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k + r + 1)^3} \\
&= 2 \left(\frac{1}{(r+1)^2} + \frac{1}{(r+2)^3} + \ldots \right) \\
&= 2 \left[\zeta(3) - \left(\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{r^3} \right) \right]
\end{aligned}$$

Em particular, quando $r = 0$, obtemos:

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(-\frac{\log xy}{1-xy} \right) dxdy = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3} = 2\zeta(3)$$

$\square$

Teorema 5.1 *O número $\zeta(2)$ é irracional.*

Demonstração

Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere a integral

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-y)^n P_n(x)}{1-xy} dxdy \tag{5.9}$$

onde $P_n(x) = \dfrac{1}{n!} \dfrac{d^n}{dx^n} \left[x^n (1-x)^n \right]$, $P_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

Veja que

$$(1-y)^n P_n(x) = \sum_{0 \leqslant j_1, j_2 \leqslant n} A_{j_1 j_2} x^{j_1} y^{j_2}$$

Substituindo em (5.9), temos:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-y)^n P_n(x)}{1-xy} dxdy = \sum_{0 \leqslant j_1, j_2 \leqslant n} A_{j_1 j_2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{j_1} y^{j_2}}{1-xy} dxdy$$

Pelos ítens **(a)** e **(c)** do Lema 5.1

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{j_1} y^{j_2}}{1-xy} dxdy = \begin{cases} \dfrac{p_r}{q_s}, \text{ se } j_1 \neq j_2, onde\, r = min\,\{j_1, j_2\} \text{ e } s = max\,\{j_1, j_2\} \\ \zeta(2) - \dfrac{1}{1^2} - \dfrac{1}{2^2} - \ldots - \dfrac{1}{j_1^2}, \text{ se } j_1 = j_2 \end{cases}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_0^1 \frac{(1-y)^n P_n(x)}{1-xy}dxdy &= \sum_{\substack{0\leqslant j_1,j_2\leqslant n\\ j_1=j_2}} A_{j_1j_2}\left(\zeta(2)-\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}-\ldots-\frac{1}{j_1^2}\right)+\\
&+ \sum_{\substack{0\leqslant j_1,j_2\leqslant n\\ j_1\neq j_2}} A_{j_1j_2}\frac{p_r}{q_s} =\\
&= \sum_{\substack{0\leqslant j_1,j_2\leqslant n\\ j_1=j_2}} A_{j_1j_2}\zeta(2) - \sum_{\substack{1\leqslant j_1,j_2\leqslant n\\ j_1=j_2}} \frac{A_{j_1j_2}c_{j_1}}{[1^2,2^2,\ldots,j_1^2]}+\\
&+ \sum_{\substack{0\leqslant j_1,j_2\leqslant n\\ j_1\neq j_2}} A_{j_1j_2}\frac{p_r}{q_s}
\end{aligned}$$

onde $c_{j_1}\in\mathbb{Z}$.

Para todo $j_1 = 1,\ldots,n$, temos:

$$[1^2,2^2,\ldots,j_1^2]\,|\,[1^2,2^2,\ldots,n^2] \text{ e } [1^2,2^2,\ldots,n^2]\,|d_n^2 \text{ e daí}$$
$$[1^2,2^2,\ldots,j_1^2]\,|d_n^2 \text{ logo } d_n^2 = k_{j_1}[1^2,2^2,\ldots,j_1^2]\,,\text{ onde}\, k_{j_1}\in\mathbb{Z}$$

Pelo item **(a)** do Lema 5.1

$$q_s|d_s^2,\ \forall s=1,\ldots,n$$

além disso

$$d_s^2|d_n^2,\ \forall s=1,\ldots,n$$

Portanto $q_s|d_n^2$ para todo $s=1,\ldots,n$ o que implica $d_n^2 = k_s q_s$ onde $k_s\in\mathbb{Z}$. Assim

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_0^1 \frac{(1-y)^n P_n(x)}{1-xy}dxdy &= \sum_{\substack{0\leqslant j_1,j_2\leqslant n\\ j_1=j_2}} A_{j_1j_2}\zeta(2) - \sum_{\substack{1\leqslant j_1,j_2\leqslant n\\ j_1=j_2}} \frac{A_{j_1j_2}c_{j_1}k_{j_1}}{d_n^2}+\\
&+ \sum_{\substack{0\leqslant j_1,j_2\leqslant n\\ j_1\neq j_2}} \frac{A_{j_1j_2}p_r k_s}{d_n^2} =\\
&= \frac{C_n\zeta(2)+D_n}{d_n^2}
\end{aligned}$$

com $C_n = d_n^2 \sum\limits_{\substack{0\leqslant j_1,j_2\leqslant n \\ j_1=j_2}} A_{j_1j_2}$ e $D_n = -\sum\limits_{\substack{1\leqslant j_1,j_2\leqslant n \\ j_1=j_2}} A_{j_1j_2}c_{j_1}k_{j_1} + \sum\limits_{\substack{0\leqslant j_1,j_2\leqslant n \\ j_1\neq j_2}} A_{j_1j_2}p_rk_s$,

ou seja,

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{(1-y)^nP_n(x)}{1-xy}dxdy = (C_n\zeta(2)+D_n)\,d_n^{-2} \tag{5.10}$$

para alguns $C_n, D_n \in \mathbb{Z}$.

Vamos integrar por partes n-vezes com respeito a x, a integral

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{(1-y)^nP_n(x)}{1-xy}dxdy \tag{5.11}$$

Observação 5.2 *Usaremos o símbolo* $\int$ *para indicar a integral dupla em (5.11).*

Por indução matemática, mostraremos que

$$\int \frac{(1-y)^nP_n(x)}{1-xy}dxdy = (-1)^k\frac{k!}{n!}\int \frac{y^k(1-y)^n}{(1-xy)^{k+1}}\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\left[x^n(1-x)^n\right]dxdy \tag{5.12}$$

onde k é o número de integrações por partes da integral à esquerda em (5.12) com respeito a x, com $1\leqslant k\leqslant n$.

Para o caso $k=1$, temos:

Tome $u = \dfrac{(1-y)^n}{1-xy}$ e $dv = P_n(x)dx$ o que implica

$$du = \frac{(1-y)^ny}{(1-xy)^2}dx \text{ e } v = \frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[x^n(1-x)^n\right]$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int \frac{(1-y)^n P_n(x)}{1-xy} dxdy &= \frac{(1-y)^n}{1-xy} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left[x^n(1-x)^n\right] \Big|_0^1 - \\
&- \int \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left[x^n(1-x)^n\right] \frac{(1-y)^n y}{(1-xy)^2} dxdy = \\
&= -\frac{1}{n!} \int \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left[x^n(1-x)^n\right] \frac{(1-y)^n y}{(1-xy)^2} dxdy \\
&= \frac{(-1)^1 \cdot 1!}{n!} \int \frac{y^1(1-y)^n}{(1-xy)^{1+1}} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left[x^n(1-x)^n\right] dxdy
\end{aligned}$$

Suponha que seja verdade para $k = m$, isto é,

$$\int \frac{(1-y)^n P_n(x)}{1-xy} dxdy = \frac{(-1)^m \cdot m!}{n!} \int \frac{y^m(1-y)^n}{(1-xy)^{m+1}} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} \left[x^n(1-x)^n\right] dxdy \tag{5.13}$$

Mostraremos agora que o resultado vale para $k = m+1$. Para tanto, integraremos por partes a integral à direita em (5.13).

Tome $u = \dfrac{y^m(1-y)^n}{(1-xy)^{m+1}}$ e $dv = \dfrac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} \left[x^n(1-x)^n\right] dx$ o que nos leva a

$$du = \frac{(m+1)y^{m+1}(1-y)^n}{(1-xy)^{(m+1)+1}} dx \text{ e } v = \frac{d^{n-(m+1)}}{dx^{n-(m+1)}} \left[x^n(1-x)^n\right]$$

Logo

$$\int \frac{(1-y)^n P_n(x)}{1-xy} dxdy = \frac{(-1)^m m!}{n!} \left[-\int \frac{d^{n-(m+1)}}{dx^{n-(m+1)}} \left[x^n(1-x)^n\right] \frac{(m+1)(1-y)^n y^{m+1}}{(1-xy)^{(m+1)+1}} dxdy \right]$$

já que $\dfrac{(1-y)^n y^m}{(1-xy)^{m+1}} \dfrac{d^{n-(m+1)}}{dx^{n-(m+1)}} \left[x^n(1-x)^n\right] \Big|_0^1 = 0$. Consequentemente,

$$\int \frac{(1-y)^n P_n(x)}{1-xy} dxdy = \frac{(-1)^{m+1} \cdot (m+1)!}{n!} \int \frac{y^{m+1}(1-y)^n}{(1-xy)^{(m+1)+1}} \frac{d^{n-(m+1)}}{dx^{n-(m+1)}} \left[x^n(1-x)^n\right] dxdy$$

Daí, mostramos a igualdade (5.12).

Fazendo $k = n$ em (5.12), obtemos:

$$\int \frac{(1-y)^n P_n(x)}{1-xy} dxdy = (-1)^n \int \frac{y^n(1-y)^n}{(1-xy)^{n+1}} \cdot x^n(1-x)^n dxdy \tag{5.14}$$

Afirmação 5.1 *Para todo x, y tal que $0 \leqslant x, y \leqslant 1$ temos que*

$$\frac{y(1-y)x(1-x)}{1-xy} \leqslant \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^5$$

Observação 5.3 *Como a integral dupla em (5.9) é imprópria, nosso intervalo de integração é de ε à $1-\varepsilon$, assim $\varepsilon \leqslant x, y \leqslant 1-\varepsilon$.*

Demonstração

Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida abaixo:

$$f(x,y) = \frac{x(1-x)y(1-y)}{1-xy}$$

Seja

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \varepsilon \leqslant x, y \leqslant 1-\varepsilon\}$$

Considere o disco

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ g(x,y) = 0\}$$

onde $g(x,y) = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{(1-2\varepsilon)\sqrt{2}}{2}\right)^2.$

Como $\Omega \subset B$, temos que $\max\limits_{p\in\Omega} f(p) \leqslant \max\limits_{p\in B} f(p)$. Pelo Teorema 1.5.1, temos:

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

onde

$$\nabla f = \left(\frac{y(1-y)\,(1-2x+x^2y)}{(1-xy)^2}, \frac{x(1-x)\,(1-2y+y^2x)}{(1-xy)^2}\right)$$

e

$$\nabla g = \left(2\left(x-\frac{1}{2}\right), 2\left(y-\frac{1}{2}\right)\right)$$

Portanto,

$$\begin{cases} \dfrac{y(1-y)\left(1-2x+x^2y\right)}{(1-xy)^2} = 2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\lambda & (I) \\ \dfrac{x(1-x)\left(1-2y+y^2x\right)}{(1-xy)^2} = 2\left(y-\dfrac{1}{2}\right)\lambda & (II) \end{cases}$$

Multiplicando (I) por $\left(y-\dfrac{1}{2}\right)$ e (II) por $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$, temos que:

$$\frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(y-y^2\right)\left(1-2x+x^2y\right)}{(1-xy)^2} = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)\lambda$$
$$\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-x^2\right)\left(1-2y+y^2x\right)}{(1-xy)^2} = 2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)\lambda$$

Como o 2º membro de ambas as equações são iguais, concluímos que:

$$\frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(y-y^2\right)\left(1-2x+x^2y\right)}{(1-xy)^2} = \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-x^2\right)\left(1-2y+y^2x\right)}{(1-xy)^2}$$

sendo $(1-xy)^2 \neq 0$, obtemos:

$$\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(y-y^2\right)\left(1-2x+x^2y\right) = \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-x^2\right)\left(1-2y+y^2x\right)$$
$$y^2-2xy^2+x^2y^3-y^3+2xy^3-x^2y^4-\frac{y}{2}+xy-\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^2}{2}-xy^2+\frac{x^2y^3}{2} =$$
$$= x^2-2x^2y+x^3y^2-x^3+2x^3y-x^4y^2-\frac{x}{2}+xy-\frac{x^2y^2}{2}+\frac{x^2}{2}-x^2y+\frac{x^3y^2}{2}$$
$$(y^2-x^2)-2xy(y-x)+x^2y^2(y-x)-(y^3-x^3)+2xy\left(y^2-x^2\right)-x^2y^2\left(y^2-x^2\right)-$$
$$-\frac{1}{2}(y-x)+\frac{1}{2}\left(y^2-x^2\right)-xy(y-x)+\frac{x^2y^2}{2}(y-x)=0$$
$$(y-x)\left[y+x-2xy+x^2y^2-\left(y^2+yx+x^2\right)+2xy(y+x)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(y+x)-xy+\frac{x^2y^2}{2}\right] =$$
$$= 0$$

$y - x = 0$

ou

$\left[y + x - 2xy + x^2y^2 - (y^2 + yx + x^2) + 2xy(y + x) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(y + x) - xy + \frac{x^2y^2}{2}\right] =$
$= 0.$

Se $y = x$ então $h(x) = f(x, x) = \dfrac{x^2\,(1 - x^2)}{1 - x^2}$. Daí,

$$h'(x) = \frac{2\,(x - x^2)\,(1 - x)\,(-x^2 - x + 1)}{(1 - x^2)^2}$$

Dos pontos críticos de h, o único pertencente a B é $\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$.Pelo fato de $h''(x) = \dfrac{-2x^3 - 6x^2 - 6x + 2}{(1 + x)^3}$ temos $h''\left(\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}\right) < 0$. Dessa forma $\left(\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}, \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)$ é ponto de máximo de $f(x, y)$ no disco B. Portanto, $f(x, y) \leqslant f\left(\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}, \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)$ para todo $(x, y) \in \Omega$.

Veja que,

$$f\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2 \frac{3 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^5$$

Assim,

$$\frac{x(1 - x)y(1 - y)}{1 - xy} \leqslant \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^5 ;\ \forall\, \varepsilon \leqslant x, y \leqslant 1 - \varepsilon$$

Voltando a prova do teorema, pelo fato de $\dfrac{y^n(1 - y)^n x^n(1 - x)^n}{(1 - xy)^{n+1}} > 0$, segue-se que $\displaystyle\int \frac{y^n(1 - y)^n x^n(1 - x)^n}{(1 - xy)^{n+1}} dxdy > 0$.

Por (5.10) e (5.14), temos que:

$$(C_n\zeta(2) + D_n)\, d_n^{-2} = (-1)^n \int \frac{y^n(1 - y)^n x^n(1 - x)^n}{(1 - xy)^{n+1}} dxdy$$

portanto

$$
\begin{aligned}
0 < \left|(C_n\zeta(2) + D_n)\, d_n^{-2}\right| &= \left|\int \frac{y^n(1-y)^n x^n(1-x)^n}{(1-xy)^{n+1}} dxdy\right| \\
&= \int \frac{y^n(1-y)^n x^n(1-x)^n}{(1-xy)^{n+1}} dxdy \\
&= \int \left(\frac{y(1-y)x(1-x)}{1-xy}\right)^n \frac{1}{(1-xy)} dxdy \\
&\leqslant \int \left[\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^5\right]^n \frac{1}{(1-xy)} dxdy \\
&= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n} \int \frac{1}{(1-xy)} dxdy \\
&= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n} \zeta(2)
\end{aligned}
$$

o que implica

$$0 < |C_n\zeta(2) + D_n| \leqslant \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n} \zeta(2) d_n^2$$

Pelo Lema 1.1.1, temos que $d_n < 3^n$, logo

$$
\begin{aligned}
0 < |C_n\zeta(2) + D_n| &< \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n} \zeta(2)(3^n)^2 \\
&= \left[9\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^5\right]^n \zeta(2) \qquad (5.15)
\end{aligned}
$$

Temos que $9\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^5 < 1$, pois

$$80 < 81 \Rightarrow \sqrt{5} < \frac{9}{4} \Rightarrow \sqrt{5} - 1 < \frac{5}{4} \Rightarrow (\sqrt{5}-1)^5 < \frac{5^5}{4^5} \Rightarrow (\sqrt{5}-1)^5 \frac{9}{2^5} < \frac{5^5}{4^5}\frac{9}{2^5} \Rightarrow 9\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^5 < \frac{28125}{32768} \Rightarrow 9\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^5 < 1$$

Suponha que $\zeta(2) = \dfrac{p}{q}$ com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$. Por (5.15) temos que

$$0 < \left| C_n \frac{p}{q} + D_n \right| < \left[9 \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^5 \right]^n \zeta(2)$$

Fazendo $n \to \infty$, $\left[9 \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^5 \right]^n \cdot q\zeta(2) \to 0$, isto é, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left[9 \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^5 \right]^n \cdot q\zeta(2) < 1$ para todo $n > n_0$. Daí,

$$0 < |C_n p + D_n q| < 1, \, \forall \, n > n_0$$

Absurdo, pelo Lema 1.4.2, pois $|C_n p + D_n q| \in \mathbb{Z}$. Assim, $\zeta(2)$ é irracional.

$\square$

Teorema 5.2 ***(Teorema de Apéry)****.O número $\zeta(3)$ é irracional.*

Demonstração

Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere a integral

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(-\frac{\log xy}{1-xy} \right) P_n(x) P_n(y) dx dy \tag{5.16}$$

onde $n! P_n(x) = \dfrac{d^n}{dx^n} \left[x^n (1-x)^n \right]$.

Vamos mostrar que

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(-\frac{\log xy}{1-xy} \right) P_n(x) P_n(y) dx dy = \left(A_n + B_n \zeta(3) \right) d_n^{-3} \tag{5.17}$$

para algum $A_n, B_n \in \mathbb{Z}$.

Como $P_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ e $P_n(y) \in \mathbb{Z}[y]$, segue-se que,

$$P_n(x) P_n(y) = \sum_{0 \leqslant j_1, j_2 \leqslant n} C_{j_1 j_2} x^{j_1} y^{j_2}, \, C_{j_1 j_2} \in \mathbb{Z}$$

Daí

$$\int_0^1\int_0^1\left(-\frac{\log xy}{1-xy}\right)P_n(x)P_n(y)dxdy=\sum_{0\leqslant j_1,j_2\leqslant n}C_{j_1j_2}\int_0^1\int_0^1\left(-\frac{\log xy}{1-xy}\right)x^{j_1}y^{j_2}dxdy$$

Pelos ítens **(b)** e **(d)** do Lema 5.1, obtemos:

$$\int_0^1\int_0^1\left(-\frac{\log xy}{1-xy}\right)\frac{x^{j_1}y^{j_2}}{1-xy}dxdy=\begin{cases}\dfrac{p_r}{q_s},\ \text{se}\ j_1\neq j_2,\ onde\, r=min\,\{j_1,j_2\}\ \text{e}\ s=max\,\{j_1,j_2\}\\ 2\left(\zeta(3)-\dfrac{1}{1^3}-\ldots-\dfrac{1}{j_1^3}\right),\ \text{se}\ j_1=j_2\end{cases}$$

Logo

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1\left(-\frac{\log xy}{1-xy}\right)P_n(x)P_n(y)dxdy &= \sum_{\substack{0\leqslant j_1,j_2\leqslant n\\ j_1=j_2}}C_{j_1j_2}2\left(\zeta(3)-\frac{1}{1^3}-\frac{1}{2^3}-\ldots-\frac{1}{j_1^3}\right)+\\ &+\sum_{\substack{0\leqslant j_1,j_2\leqslant n\\ j_1\neq j_2}}C_{j_1j_2}\frac{p_r}{q_s}=\\ &=\left(2\sum_{\substack{0\leqslant j_1,j_2\leqslant n\\ j_1=j_2}}C_{j_1j_2}\right)\zeta(3)-2\sum_{\substack{1\leqslant j_1,j_2\leqslant n\\ j_1=j_2}}\frac{C_{j_1j_2}l_{j_1}}{[1^3,2^3,\ldots,j_1^3]}+\\ &+\sum_{\substack{o\leqslant j_1,j_2\leqslant n\\ j_1\neq j_2}}C_{j_1j_2}\frac{p_r}{q_s}\end{aligned}$$

onde $l_{j_1}\in\mathbb{Z}$.

Para todo $j_1=1,\ldots,n$, temos:

$$[1^3,2^3,\ldots,j_1^3]\,|\,[1^3,2^3,\ldots,n^3]\ \text{e}\ [1^3,2^3,\ldots,n^3]\,|d_n^3\Rightarrow$$
$$[1^3,2^3,\ldots,j_1^3]\,|d_n^3\Rightarrow d_n^3=k_{j_1}\,[1^3,2^3,\ldots,j_1^3]\,;\ \text{onde}\,k_{j_1}\in\mathbb{Z}$$

Pelo item **(a)** do Lema 5.1,

$$q_s|d_s^3,\ \forall s=1,\ldots,n$$

além disso

$$d_s^3 | d_n^3,\ \forall s = 1, \ldots, n$$

Portanto $q_s | d_n^3$ para todo $s = 1, \ldots, n$ o que implica $d_n^3 = k_s q_s$ onde $k_s \in \mathbb{Z}$. Assim

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 \left(-\frac{\log xy}{1-xy} \right) P_n(x) P_n(y) dx dy &= \left(2d_n^3 \sum_{\substack{0 \leqslant j_1, j_2 \leqslant n \\ j_1 = j_2}} C_{j_1 j_2} \right) \frac{\zeta(3)}{d_n^3} - 2 \sum_{\substack{1 \leqslant j_1, j_2 \leqslant n \\ j_1 = j_2}} \frac{C_{j_1 j_2} l_{j_1} k_{j_1}}{d_n^3} + \\ &+ \sum_{\substack{0 \leqslant j_1, j_2 \leqslant n \\ j_1 \neq j_2}} C_{j_1 j_2} \frac{p_r k_s}{d_n^3} = \\ &= \frac{B_n \zeta(3)}{d_n^3} + \frac{A_n}{d_n^3}\end{aligned}$$

com $B_n = 2d_n^3 \sum\limits_{\substack{0 \leqslant j_1, j_2 \leqslant n \\ j_1 = j_2}} C_{j_1 j_2}$ e $A_n = -2 \sum\limits_{\substack{0 \leqslant j_1, j_2 \leqslant n \\ j_1 = j_2}} C_{j_1 j_2} l_{j_1} k_{j_1} + \sum\limits_{\substack{0 \leqslant j_1, j_2 \leqslant n \\ j_1 \neq j_2}} C_{j_1 j_2} p_r k_s$, isto é,

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(-\frac{\log xy}{1-xy} \right) P_n(x) P_n(y) dx dy = \left(A_n + B_n \zeta(3) \right) d_n^{-3}$$

para alguns $A_n, B_n \in \mathbb{Z}$.

Observe que

$$-\frac{\log xy}{1-xy} = \int_0^1 \frac{1}{1-(1-xy)z} dz$$

Basta tomar $u = 1 - (1-xy)z$ o que implica $du = (xy-1)dz$.Logo

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1-(1-xy)z} dz &= \int_1^{xy} \frac{1}{u} \frac{du}{(xy-1)} \\ &= \frac{\log u\big|_1^{xy}}{xy-1} = \frac{\log xy - \log 1}{xy-1} = -\frac{\log xy}{1-xy}\end{aligned}$$

Assim podemos reescrever (5.16) da seguinte maneira:

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(-\frac{\log xy}{1-xy} \right) P_n(x) P_n(y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{P_n(x) P_n(y)}{1-(1-xy)z} dx dy dz \tag{5.18}$$

Vamos integrar por partes n-vezes com respeito a x a integral à direita em (5.18).

Observação 5.4 *Usaremos o símbolo* $\displaystyle\int$ *para indicar a integral tripla em (5.18).*

Analogamente à prova de $\zeta(2)$, por indução, integrando por partes n vezes com respeito a x, segue-se que

$$\int \frac{P_n(x)P_n(y)}{1-(1-xy)z}dxdydz = \int \frac{x^n y^n z^n (1-x)^n P_n(y)}{(1-(1-xy)z)^{n+1}}dxdydz \tag{5.19}$$

Fazendo

$$w = \frac{1-z}{1-(1-xy)z} \Rightarrow z = \frac{1-w}{1-(1-xy)w}$$

assim, $dz = \dfrac{(-xy)}{(1-(1-xy)w)^2}dw$. Substituindo z e dz em $\dfrac{x^n y^n z^n (1-x)^n P_n(y)}{(1-(1-xy)z)^{n+1}}dxdydz$ na integral à direita em (5.19), temos

$$\frac{x^n y^n \left(\dfrac{1-w}{1-(1-xy)w}\right)^n (1-x)^n P_n(y)}{\left[1-(1-xy)\left(\dfrac{1-w}{1-(1-xy)w}\right)\right]^{n+1}} \cdot \frac{(-xy)}{(1-(1-xy)w)^2}dxdydw =$$

$$= \frac{x^n y^n \left(\dfrac{1-w}{1-(1-xy)w}\right)^n (1-x)^n P_n(y)}{\left[\dfrac{1-(1-xy)w-(1-xy)(1-w)}{1-(1-xy)w}\right]^{n+1}} \cdot \frac{(-xy)}{(1-(1-xy)w)^2}dxdydw =$$

$$= \frac{x^n y^n (1-w)^n (1-x)^n P_n(y)(-xy)[1-(1-xy)w]^{n+1} P_n(y)}{(xy)^{n+1}(1-(1-xy)w)^n (1-(1-xy)w)^2} =$$

$$= -\frac{(1-x)^n (1-w)^n P_n(y)}{1-(1-xy)w}dxdydw$$

Daí

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{P_n(x)P_n(y)}{1-(1-xy)z}dxdydz = \int_1^0\int_0^1\int_0^1 \frac{(-1)(1-x)^n(1-w)^nP_n(y)}{1-(1-xy)w}dxdydw$$

assim

$$\int \frac{P_n(x)P_n(y)}{1-(1-xy)z}dxdydz = \int \frac{(1-x)^n(1-w)^nP_n(y)}{1-(1-xy)w}dxdydw \qquad (5.20)$$

De maneira análoga a (5.18), integrando-se por partes n-vezes com respeito a y a integral à direita em (5.20), obtemos que

$$\int \frac{P_n(x)P_n(y)}{1-(1-xy)z}dxdydz = \int \frac{x^n(1-x)^ny^n(1-y)^nw^n(1-w)^n}{(1-(1-xy)w)^{n+1}}dxdydw \qquad (5.21)$$

Vamos mostrar que

$$\frac{x(1-x)y(1-y)w(1-w)}{1-(1-xy)w} \leqslant (\sqrt{2}-1)^4,\ \forall\, 0 \leqslant x,y,w \leqslant 1 \qquad (5.22)$$

Considere $f(x,y,w) = \dfrac{x(1-x)y(1-y)w(1-w)}{1-(1-xy)w}$.

Observação 5.5 *Como a integral tripla em (5.18) é imprópria, nosso intervalo de integração é de ε à $1-\varepsilon$, assim $\varepsilon \leqslant x,y,w \leqslant 1-\varepsilon$.*

Vamos calcular o máximo de f em $\Omega = \{(x,y,w) \in \mathbb{R}^3;\ \varepsilon \leqslant x,y,w \leqslant 1-\varepsilon\}$. Veja que

$$f_x = y(1-y)w(1-w)\left\{\frac{(1-2x-w+2xw-x^2yw)}{(1-(1-xy)w)^2}\right\}$$
$$f_y = x(1-x)w(1-w)\left\{\frac{(1-2y-w+2yw-xy^2w)}{(1-(1-xy)w)^2}\right\}$$
$$f_w = x(1-x)y(1-y)\left\{\frac{(1-2w+w^2-xyw^2)}{(1-(1-xy)w)^2}\right\}$$

Tomamos $f_x, f_y, f_w = 0$ para encontrar os pontos críticos de f, assim

$$\begin{cases} y(1-y)w(1-w)(1-2x-w+2xw-x^2yw)=0 \\ x(1-x)w(1-w)(1-2y-w+2yw-xy^2w)=0 \\ x(1-x)y(1-y)(1-2w+w^2-xyw^2)=0 \end{cases}$$

Dessa forma, $x=y=w=1$ e $x=y=w=0$, o que podemos esquecer, já que

$$f(1,1,1)=f(0,0,0)=0<f(x,y,w);\, \forall\, (x,y,w)\in\Omega$$

logo

$$\begin{cases} 1-2x-w+2xw-x^2yw=0\,(I) \\ 1-2y-w+2yw-xy^2w=0\,(II) \\ 1-2w+w^2-xyw^2=0\,(III) \end{cases}$$

Subtraindo (I) de (II) concluímos que

$$(x-y)(2-2w+xyw)=0 \Rightarrow x=y\,\text{ou}\,2-2w+xyw=0$$

Se $2-2w+xyw=0$ de (III) obtemos:

$$0=1-2w+w^2-xyw^2+w(2-2w+xyw)=1-w^2$$

Daí $w=\pm1$, o que não é solução. Portanto $x=y$.

Substituindo em (III) segue-se que

$$1-2w+w^2-x^2w^2=0$$
$$(xw)^2-(w-1)^2=0 \Rightarrow x=1-\frac{1}{w}\,\text{e}\,x=-1+\frac{1}{w}$$

Substituindo $y=x$ e $w=\dfrac{1}{x+1}$ em $f(x,y,w)$, temos:

$$G(x)=\frac{(x-x^2)^2}{(x+1)^2} \Rightarrow G'(x)=\frac{(x-x^2)(-2x^2-4x+2)}{(x+1)^3}$$

Portanto os pontos críticos são: $-1, 1, 0, \sqrt{2}-1, -\sqrt{2}-1$. Como $G''(R) = \dfrac{R - R^2(-4R-4)(R+1)^3}{(R+1)^6}$ onde $R = \sqrt{2}-1$

$$G''(R) = \frac{(R-R^2)(-4)(R+1)}{(R+1)^3} = \frac{R(1-R)(-4)}{(R+1)^2} \Rightarrow G''(R) < 0$$

Portanto $x = \sqrt{2}-1$ é ponto de máximo de $G(x)$, assim $x = y = \sqrt{2}-1$ e $w = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e assim $\left(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ é ponto de máximo de $f(x,y,w)$ em Ω.

Facilmente vemos que $f\left(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = (\sqrt{2}-1)^4$. Daí

$$\frac{x(1-x)y(1-y)w(1-w)}{(1-(1-xy)w)} \leqslant (\sqrt{2}-1)^4;\ \forall\,(x,y,w) \in \Omega$$

Para $\varepsilon \leqslant x, y, w \leqslant 1-\varepsilon$, concluímos que

$$\frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n w^n(1-w)^n}{(1-(1-xy)w)^{n+1}} > 0 \tag{5.23}$$

Por (5.23), inferimos que

$$\int \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n w^n(1-w)^n}{(1-(1-xy)w)^{n+1}} dxdydw > 0 \tag{5.24}$$

Seguindo de (5.17), (5.18) e (5.21), temos:

$$(A_n + B_n\zeta(3))\, d_n^{-3} = \int \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n w^n(1-w)^n}{(1-(1-xy)w)^{n+1}} dxdydw$$

De (5.22) e (5.24), deduzimos que:

$$\begin{aligned}
0 < |A_n + B_n\zeta(3)|\, d_n^{-3} &= \left| \int \left[\frac{x(1-x)y(1-y)w(1-w)}{(1-(1-xy)w)}\right]^n \cdot \frac{1}{(1-(1-xy)w)} dxdydz \right| \\
&= \int \left[\frac{x(1-x)y(1-y)w(1-w)}{(1-(1-xy)w)}\right]^n \cdot \frac{1}{(1-(1-xy)w)} dxdydw \\
&\leqslant (\sqrt{2}-1)^{4n} \int \frac{1}{(1-(1-xy)w)} dxdydw \\
&= (\sqrt{2}-1)^{4n} \int_0^1 \int_0^1 \left(-\frac{\log xy}{1-xy}\right) dxdy \\
&= (\sqrt{2}-1)^{4n} 2\zeta(3)
\end{aligned}$$

ou seja,

$$0 < |A_n + B_n\zeta(3)| \leqslant (\sqrt{2}-1)^{4n} 2\zeta(3) d_n^3$$

Pelo Teorema 1.2.4, $d_n < 3^n$, assim

$$\begin{aligned} 0 < |A_n + B_n\zeta(3)| &< (\sqrt{2}-1)^{4n} 2\zeta(3) 3^{3n} \\ &= 2\zeta(3)\left[27(\sqrt{2}-1)^4\right]^n \end{aligned}$$

Suponha que $\zeta(3) = \dfrac{p}{q}$ onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\begin{gathered} 0 < \left|A_n + B_n\frac{p}{q}\right| < 2\zeta(3)\left[27(\sqrt{2}-1)^4\right]^n \\ \Rightarrow 0 < |qA_n + B_n p| < 2q\zeta(3)\left[27(\sqrt{2}-1)^4\right]^n \end{gathered}$$

Como $0 < 27(\sqrt{2}-1)^4 < 1$. Fazendo $n \to \infty$, $2q\zeta(3)\left[27(\sqrt{2}-1)^4\right]^n \to 0$, isto é, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2q\zeta(3)\left[27(\sqrt{2}-1)^4\right]^n < 1$ para todo $n > n_0$.Logo $0 < |qA_n + B_n p| < 1$ para todo $n > n_0$

Absurdo, já que $|qA_n + B_n p| \in \mathbb{Z}$. Dessa forma, concluímos que $\zeta(3)$ é irracional. $\square$

Veja esses resultados em [1]. E para maiores detalhes sobre a irracionalidade de valores da função zeta veja [12], [14] e [17].

Referências Bibliográficas

[1] BEUKERS, F. A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$. **Bull. London Math Soc.**, v. 11, p. 268-272, 1979.

[2] HICKERSON, D. A proof of the mock theta functions conjectures. **Invent. Math.**, v. 94, p. 639-660, 1988.

[3] LIMA, E.L. **Curso de Analise**. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. 2v. (Projeto Eucllides).

[4] LIMA, E.L. **Curso de Analise**. 11. ed. Rio de Janeiro : IMPA, 2004. 2v. (Projeto Euclides)

[5] MARQUES, D. **Alguns resultados que geram numeros transcendentes**. Dissertação(Mestrado em Matemática). Departamento de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2007.

[6] MARQUES, D. **A generalization to Cantor series of Sondow's geometric proof that e is irrational and his measure of its irrationality**. (Preprint).

[7] MINGARELLI, A.B. **On the irracionality of Ramanujan's mock theta functions and other q-series at an infinite number of points**. (Preprint).

[8] NIVEN, I.M. **An introduction to the theory of numbers**. 4. ed. New York: John Wiley, 1966. 280 p.

[9] OPPENHEIM, A. Criteria for irrationality of certain classes of numbers. **Amer. Math. Monthly**, v. 61, p. 235-241, 1954.

[10] WALDSCHMIDT, M. **An introduction to irracionality and transcendence methods**. Arizona, Arizona Winter School, 2008.

[11] RIBENBOIM, P. **My numbers, my friends popular lectures on numbers theory**. New York: Springer-Verlag, 2000. 375 p.

[12] RIVOAL, T. La fonction zeta de Riemann prend infinite une de valeurs irrationneles aux entiers impairs. **C. R. Acad. Sci. Paris**. Sér. I, v. 331, n. 4, 2000.

[13] SELBERG, A. An elementary proof of the prime numbers teorema. **Ann. Math**, v. 50, p. 305-313. 1949.

[14] TITCHMARSH, E. C. **The theory of the Riemann zeta-function**. 2^{nd}ed. Oxford: Clarendon Press, 2001. 412 p.

[15] WATSON, G. N. The final problem : an account of mock theta functions. **J.London Math.Soc.**, v. 11, p. 55-80, 1936.

[16] ZWEGERS, S.P. Mock theta functions. Doctoral Dissertation. University of Utrecht, 2002.

[17] ZUDILIN, W. One of the numbers $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$ e $\zeta(11)$ is irrational. **Russian Math Surveys**., v. 56, n. 4, p. 149-150, 2001.