UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
MESTRADO EM MATEMÁTICA

MANOEL VIEIRA DE MATOS NETO

ESTIMATIVAS DE AUTOVALORES EM SUBVARIEDADES COM CURVATURA MÉDIA LOCALMENTE LIMITADA

FORTALEZA

2009

MANOEL VIEIRA DE MATOS NETO

ESTIMATIVAS DE AUTOVALORES EM SUBVARIEDADES COM CURVATURA MÉDIA LOCALMENTE LIMITADA

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial

Orientador: Prof.Dr.Gregório Pacelli Feitosa Bessa

FORTALEZA

2009

M382e Matos Neto, Manoel Vieira de

Estimativas de Autovalores em Subvariedades com Curvatura Média Localmente Limitada / Manoel Vieira de Matos Neto. Fortaleza. 2009.

40 f.

Orientador: Prof. Dr. Gregório Pacelli Feitosa Bessa

Área de concentração: Geometria Diferencial

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Departamento de Matemática, Fortaleza, 2009.

CDD-510

A minha mãe Jane Lúcia.

Agradecimentos

Agradeço a minha família, em especial a minha mãe Jane Lúcia e minha noiva Samara, que sempre acreditaram em mim e que comigo sofreram nas dificuldades e vibraram nas vitórias. Ao professor G. Pacelli Bessa por sua paciência e disponibilidade, aos meus amigos Paulo César, Édio e Elizeth pelo apoio e pela conpreensão pela minha ausência durante esses dois anos. Aos meus colegas de curso Ernani, Halyson, Kelton e Adam pelo companheirismo e agradável convívio e pelas inúmeras ajudas neste laborioso período de estudos. E a Aurineide, Wilson e Rondinelle pela simpatia e amizade e à CAPES pelo apoio financeiro.

“Renunciar à liberdade é renunciar à qualidade de homem, aos direitos da humanidade e até aos deveres. Não há recompensa possível para quem a tudo renuncia.”

J. J. Rousseau

Abstract

We present a method to obtain lower bounds for first Dirichlet eigenvalue in terms of vector fields with positive divergence. Applying this to the gradient of a distance function we obtain estimates of eigenvalue of geodesic balls inside the cut locus and of domains in submanifolds with locally bounded mean curvature. For submanifolds of Hadamard manifolds with bounded mean curvature these lower bounds depend only on the dimension of the submanifold and the bound on its mean curvature.

Conteúdo

Introdução

Este trabalho tem como objetivo apresentar um método para a obtenção de estimativas inferiores para o tom fundamental de abertos em variedades Riemannianas e algumas aplicações geométricas. Esse método foi desenvolvido por Bessa e Montenegro em [2] sendo as estimativas expressas em termos da divergência de certos campos de vetores e está relacionado com a constante de Cheeger [4]. O Tom Fundamental de um aberto limitado coincide com o primeiro autovalor do Laplaciano. Como aplicação do método obtemos as estimativas de autovalores do Laplaciano em bolas normais devido a S. Y. Cheng [5] e obtemos uma prova simples do Teorema de McKean [8]. No entanto, a principal aplicação de [2] que apresentaremos aqui neste trabalho são as estimativas inferiores dos tons fundamentais de domínios de subvariedades com curvatura média localmente limitada. Em particular, observamos que as superfícies mínimas completas limitadas em $\mathbb{R}^3$ tem tom fundamental positivo. Também estendemos as estimativas do tom fundamental de subvariedades do espaço hiperbólico de Cheung-Leung [6] para subvariedades de Hadamard. Outras aplicações podem ser encontradas em [1], [3]. O trabalho foi dividido em três capítulos. Apresentamos no primeiro capítulo uma breve introdução a geometria do Laplaciano onde introduziremos os problemas de autovalores fechado e de Dirichlet, o Teorema Espectral e o Teorema de Rayleigh. No segundo capítulo apresentaremos as técnicas básicas para provar o Lema Principal, o Teorema de Comparação do Hessiano e finalmente no capítulo três apresentamos as aplicações do Lema Principal.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Tom Fundamental

Seja M uma variedade Riemanniana e $\Omega \subset M$ um aberto conexo. O tom fundamental $\lambda^*(\Omega)$ de Ω é definido por

$$\lambda^*(\Omega) = \inf \left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla f|^2}{\int_\Omega f^2} \ , \quad f \in L^2(\Omega) \backslash \{0\} \right\} \tag{1.1}$$

onde $L^2(\Omega)$ é o completamento de C^∞ com respeito a norma

$$\|\varphi\|_\Omega^2 = \int_\Omega \varphi^2 + \int_\Omega |\nabla \varphi|^2.$$

Se $\Omega_1 \subset \Omega_2$ são abertos, então

$$\lambda^*(\Omega_1) \geq \lambda^*(\Omega_2) \geq 0.$$

O tom fundamental $\lambda^*(M)$ de uma variedade Riemanniana completa tomando $M = \Omega$ em (1.1) pode ser dado por

$$\lambda^*(M) = \lim_{r \to \infty} \lambda^*(B_M(p, r)) \geq 0$$

onde $B_M(p, r)$ é a bola geodésica de raio r e centro p.

1.2 Primeiro Autovalor do Laplaciano

Seja Ω um aberto relativamente compacto com fronteira suave. O problema de autovalores de Dirichlet em Ω consiste em encontar todos os números reais λ para os quais existe uma solução $\phi \in C^2(M) \cap C^2(\overline{M}) \setminus \{0\}$ para a equação linear $\triangle\phi + \lambda\phi = 0$ em M e satisfazendo $\phi|_{\partial M} = 0$. O conjunto das soluções (para cada λ) forma um espaço vetorial chamado autoespaço associado ao autovalor λ. O conjunto de autovalores é descrito pelo teorema espectral.

Teorema 1.1 (**Espectral**) *O conjunto dos autovalores de Dirichlet em Ω consiste de uma sequência*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots + \infty$$

e cada autoespaço V_i associado ao autovalor λ_i tem dimensão finita. O espaço $L^2(\Omega)$ das funções de quadrado integrável se decompõe como soma direta dos autoespaços V_i, i.e. $L^2(\Omega) = \oplus_{i=1}^{\infty} V_i$. O autoespaço V_1 associado ao menor autovalor λ_1 tem dimensão 1.

O seguinte teorema caracteriza os autovalores do Laplaciano e é importante em várias aplicações geométricas.

Teorema 1.2 (***Lord Rayleigh***) *Para todo $f \in C_0^{\infty}(\Omega) \setminus \{0\}$, temos*

$$\lambda_1(\Omega) \leq \frac{\int_\Omega |\operatorname{grad} f|^2}{\int_\Omega f^2}$$

com a igualdade valendo se, e somente se, f é uma autofunção de λ_1.
Se $\{\phi_1, \phi_2, \ldots\}$ é uma base ortonormal completa de $L^2(M)$ tal que ϕ_i é uma autofunção para λ_i, então, para $f \in C_0^{\infty}(\Omega) \setminus \{0\}$ satisfazendo:

$$\langle f, \phi_1 \rangle = \ldots = \langle f, \phi_{k-1} \rangle = 0$$

temos a desigualdade

$$\lambda_k \leq \frac{\int_\Omega |\operatorname{grad} f|^2}{\int_\Omega f^2}$$

com a igualdade valendo se, e somente se, f é uma autofunção de λ_i.

Demonstração:

Seja $\{\phi_1, \phi_2, \ldots\}$ uma base ortonormal completa de $L^2(M)$ tal que ϕ_i é uma autofunção para λ_i.
Dado $f \in C_0^{\infty}(\Omega) \setminus \{0\}$, façamos $\alpha_i = \langle f, \phi_i \rangle$.

Consideremos o produto interno $\langle f, g\rangle = \int_\Omega fg$.

Definamos a forma bilinear D por

$$D[f,g] = \int_\Omega \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g\rangle.$$

Como

$$\int_\Omega \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g\rangle + \int_\Omega f\Delta g = 0 \quad se \quad f|_{\partial\Omega} = 0$$

então podemos escrever também

$$\langle f, \Delta g\rangle = \int_\Omega f\Delta g = -D[f,g].$$

Assim, para $i = k, k+1, \ldots, r$, temos

$$\begin{aligned}
0 &\leq D[f - \sum_{i=k}^{r} \alpha_i\phi_i, f - \sum_{i=k}^{r} \alpha_i\phi_i] \\
&= D[f,f] - 2\sum_{i=k}^{r} \alpha_i D[f,\phi_i] + \sum_{i,j=k}^{r} \alpha_i\alpha_j D[\phi_i,\phi_j] \\
&= D[f,f] + 2\sum_{i=k}^{r} \alpha_i \langle f, \triangle\phi_i\rangle - \sum_{i,j=k}^{r} \alpha_i\alpha_j \langle \phi_i, \triangle\phi_j\rangle.
\end{aligned}$$

Como

$$\langle f, \triangle\phi_i\rangle = \langle f, -\lambda_i\phi_i\rangle = -\lambda_i\langle f, \phi_i\rangle = -\lambda_i\alpha_i$$

e

$$\langle \phi_i, \triangle\phi_j\rangle = \langle \phi_i, -\lambda_j\phi_j\rangle = -\lambda_j\langle \phi_i, \phi_j\rangle = \begin{cases} -\lambda_i, & \text{se i=j;} \\ 0, & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

tem-se

$$\begin{aligned}
D[f,f] + 2\sum_{i=k}^{r} \alpha_i \langle f, \triangle\phi_i\rangle - \sum_{i,j=k}^{r} \alpha_i\alpha_j \langle \phi_i, \triangle\phi_j\rangle &= D[f,f] - 2\sum_{i=k}^{r} \lambda_i\alpha_i^2 + \sum_{i,j=k}^{r} \lambda_j\alpha_i\alpha_j \\
&= D[f,f] - 2\sum_{i=k}^{r} \lambda_i\alpha_i^2 + \sum_{i=k}^{r} \lambda_i\alpha_i^2 \\
&= D[f,f] - \sum_{i=k}^{r} \lambda_i\alpha_i^2.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
D[f,f] - \sum_{i=k}^{r} \lambda_i\alpha_i^2 \geq 0 \quad &\Longrightarrow \quad \sum_{i=k}^{r} \lambda_i\alpha_i^2 \leq D[f,f] \\
&\Longrightarrow \quad \sum_{i=k}^{r} \lambda_i\alpha_i^2 < \infty.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Parseval

$$\sum_{i=k}^{r} \lambda_i \alpha_i^2 \geq \lambda_k \sum_{i=k}^{r} \alpha_i^2$$

obtemos

$$D[f,f] \geq \sum_{i=k}^{r} \lambda_i \alpha_i^2 \geq \lambda_k \sum_{i=k}^{r} \alpha_i^2 = \lambda_k \|f\|^2$$

e a desigualdade segue facilmente.

1.3 Fórmulas Básicas

Se $f : M \to R$ é uma função diferenciável, então temos

$$\text{grad}\, f^2 = 2f\, \text{grad}\, f.$$

Agora, seja $\rho : M \longrightarrow R$ a função distância a $p \in M$ então

$$\text{grad}\, \rho^\alpha = \alpha \rho^{\alpha-1} \text{grad}\, \rho \quad com \quad \|\text{grad}\, \rho^\alpha\| = \alpha\rho^{\alpha-1}$$

e

$$\begin{aligned}
\triangle \rho^\alpha &= \text{div}\, (\text{grad}\, \rho^\alpha) \\
&= \alpha \langle \text{grad}\, \rho^{\alpha-1}, \text{grad}\, \rho\rangle + \alpha\rho^{\alpha-1} \triangle \rho \\
&= \alpha(\alpha-1)\rho^{\alpha-2}\langle \text{grad}\, \rho, \text{grad}\, \rho\rangle + \alpha\rho^{\alpha-1}\triangle\rho.
\end{aligned}$$

No caso particular de $\alpha = 2$, temos $\triangle\rho^2 = 2n$ onde $n = dim M$.

Seja $X = f^2 \text{grad}\, \rho^\alpha$, temos que

$$\begin{aligned}
\text{div}\, X &= \text{div}\, (f^2 \text{grad}\, \rho^\alpha) \\
&= \langle \text{grad}\, f^2, \text{grad}\, \rho^\alpha\rangle + f^2 \triangle \rho^\alpha \\
&= \langle 2f \text{grad}\, f, \alpha\rho^{\alpha-1}\text{grad}\, \rho\rangle \\
&\quad + f^2 \left[\alpha(\alpha-1)\rho^{\alpha-2}\langle \text{grad}\, \rho, \text{grad}\, \rho\rangle + \alpha\rho^{\alpha-1}\triangle\rho\right] \\
&= 2f\alpha\rho^{\alpha-1}\langle \text{grad}\, f, \text{grad}\, \rho\rangle + f^2\alpha(\alpha-1)\rho^{\alpha-2} \\
&\quad + f^2\alpha\rho^{\alpha-1}\triangle\rho
\end{aligned}$$

desde que $\|\text{grad}\, \rho\| = 1$.

Segue que

$$\begin{aligned}
|\text{div}\, (f^2 \text{grad}\, \rho^\alpha)| &\leq 2|f|^2\rho^{\alpha-1}|\langle \text{grad}\, f, \text{grad}\, \rho\rangle| + \alpha|f|^2(\alpha-1)\rho^{\alpha-2} \\
&\quad + \alpha|f|^2\rho^{\alpha-1}\triangle\rho \\
&\leq 2|f|^2|\text{grad}\, f|\rho^{\alpha-1} + \alpha|f|^2(\alpha-1)\rho^{\alpha-2} \qquad (1.2) \\
&\quad + \alpha|f|^2\rho^{\alpha-1}\triangle\rho.
\end{aligned}$$

1.4 Teorema de Comparação do Hessiano

Sejam M e N variedades Riemannianas e $\varphi : M \hookrightarrow N$ uma imersão isométrica, isto é:

$$\langle X, Y\rangle_p = \langle d\varphi(X), d\varphi(Y)\rangle_{\varphi(p)} \quad \forall p \in M \;\; e \;\; \forall X, Y \in T_pM.$$

No intuito de aplicar o nosso lema principal, que será mostrado adiante, precisamos encontrar campos de vetores $X\colon M \to TM$, $(X\colon N \to TN)$ cujas divergências tenham ínfimo positivo.

Um campo de vetores natural que podemos considerar é o gradiente da função distância (ambiente), que dependendo da geometria de M e N, tem divergência estritamente positiva. Verifiquemos algumas fórmulas básicas relacionando a divergência do gradiente da função distância, seus limites inferiores, a curvatura média e o limite superior das curvaturas seccionais de N. Identifiquemos $X \in T_pM$ com $d\varphi(X) \in T_{\varphi(p)}N$.

Seja $g : N \longrightarrow R$ uma aplicação diferenciável e consideremos a composição $f : M \longrightarrow R$ dada por $f = g \circ \varphi$.
Então temos

$$\langle \operatorname{grad} f, X\rangle = df(X) = dg(X) = \langle \operatorname{grad} g, X\rangle \quad \forall p \in M \;\; e \;\; \forall\, X \in T_pM$$

pois

$$\operatorname{grad} g = \operatorname{grad} f + (gradg)^{\perp}$$

onde $(\operatorname{grad} g)^{\perp}$ é perpendicular a T_pM e $\langle (\operatorname{grad} g)^{\perp}, X\rangle = 0$.

Denote por ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões Riemannianas de M e N respectivamente.

Definição 1.1 *Seja $f : M \longrightarrow R$. Definimos a forma Hessiana de f por*

$$\operatorname{Hess}(f)(X, Y) = \langle \nabla_X \operatorname{grad} f, Y\rangle \quad em \;\; p \in M, \quad para \;\; X, Y \in T_pM.$$

Definição 1.2 *Seja $\varphi : M \longrightarrow N$ uma imersão. Definimos a segunda forma fundamental $\alpha : T_pM \times T_pM \longrightarrow (T_pM)^{\perp}$ da imersão φ por*

$$\alpha(X, Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y \quad em \;\; p \in M \quad para \;\; X, Y \in T_pM.$$

Calculemos agora o Hessiano de $f = g \circ \varphi$.

Proposição 1.1 *Pelas definições acima e para todo $X, Y \in T_pM$, temos*

$$\mathrm{Hess}\,(f)(X,Y) = \mathrm{Hess}\,(g(\varphi))(X,Y) + \langle \mathrm{grad}\, g, \alpha(X,Y)\rangle. \tag{1.3}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}\,(f)(X,Y) &= \langle \nabla_X \mathrm{grad}\, f, Y\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_X \mathrm{grad}\, f - \alpha(X, \mathrm{grad}\, f), Y\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_X \mathrm{grad}\, f, Y\rangle - \langle \alpha(X, \mathrm{grad}\, f), Y\rangle.
\end{aligned}$$

Usando

$$X\langle Y, \mathrm{grad}\, f\rangle = \langle \overline{\nabla}_X \mathrm{grad}\, f, Y\rangle + \langle \overline{\nabla}_X Y, \mathrm{grad}\, f\rangle$$

e sabendo que

$$\langle \alpha(X, \mathrm{grad}\, f), Y\rangle = 0 \quad \textit{pois} \;\; Y \in T_pM,$$

tem-se

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}\,(f)(X,Y) &= \langle \overline{\nabla}_X \mathrm{grad}\, f, Y\rangle \\
&= X\langle \mathrm{grad}\, f, Y\rangle - \langle \overline{\nabla}_X Y, \mathrm{grad}\, f\rangle \\
&= X\langle \mathrm{grad}\, g, Y\rangle - \langle \overline{\nabla}_X Y, \mathrm{grad}\, f\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_X \mathrm{grad}\, g, Y\rangle + \langle \overline{\nabla}_X Y, \mathrm{grad}\, g\rangle - \langle \overline{\nabla}_X Y, \mathrm{grad}\, f\rangle \\
&= \mathrm{Hess}\,(g)(X,Y) + \langle \overline{\nabla}_X Y, (\mathrm{grad}\, g)^{\perp}\rangle \\
&= \mathrm{Hess}\,(g)(X,Y) + \langle (\overline{\nabla}_X Y)^{\perp}, \mathrm{grad}\, g\rangle \\
&= \mathrm{Hess}\,(g)(X,Y) + \langle \mathrm{grad}\, g, \alpha(X,Y)\rangle.
\end{aligned}$$

Calculando o traço em (1.3) em relação a uma base ortonormal $\{e_1, e_2, \ldots\}$ para T_pM, temos

$$\begin{aligned}
\triangle f &= \mathrm{Tr}\,\mathrm{Hess}\,(f)(e_i, e_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Hess}\,(f)(e_i, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Hess}\,(g)(e_i, e_i) + \langle \mathrm{grad}\, g, \sum_{i=1}^{n} \alpha(e_i, e_i)\rangle.
\end{aligned}$$

Teorema 1.3 (***Teorema de Comparação do Hessiano***) *Seja M uma variedade Riemanniana e $x_0, x_1 \in M$ tais que existe uma geodésica mínima $\gamma : [0, \rho(x_1)] \longrightarrow M$ ligando x_0 e x_1, onde $\rho(x)$ é a função distância $d_M(x, x_0)$. Seja K as curvaturas seccionais radiais ao longo de γ e $\mu_0(\rho)$ e $\mu_1(\rho)$ as funções definidas por*

$$\mu_0(\rho) = \begin{cases} k_0 \coth(k_0\rho), & se \inf_\gamma K = -k_0^2 \\ \dfrac{1}{\rho}, & se \inf_\gamma K = 0 \\ k_0 \cot(k_0\rho), & se \inf_\gamma K = k_0^2 \end{cases}$$

e

$$\mu_1(\rho) = \begin{cases} k_1 \coth(k_1\rho), & se \sup_\gamma K = -k_1^2 \\ \dfrac{1}{\rho}, & se \sup_\gamma K = 0 \\ k_1 \cot(k_1\rho), & se \sup_\gamma K = k_1^2. \end{cases}$$

Então os Hessianos de ρ e ρ^2 satisfazem

$$\mu_0(\rho)\|X\|^2 \geq \mathrm{Hess}\,(\rho)(X,X) \geq \mu_1(\rho)\|X\|^2 \quad com\ \ \mathrm{Hess}\,(\rho)(\gamma', \gamma') = 0$$

e

$$2\rho\mu_0(\rho)\|X\|^2 \geq \mathrm{Hess}\,(\rho^2)(X,X) \geq 2\rho\mu_1(\rho)\|X\|^2 \quad com\ \ \mathrm{Hess}\,(\rho^2)(\gamma', \gamma') = 2$$

onde X é qualquer vetor em T_xM perpendicular a $\gamma'(\rho(x))$. Tomando o traço temos as seguintes desigualdades:

$$(n-1)\mu_0(\rho) \geq \triangle\rho \geq (n-1)\mu_1(\rho),$$

$$2(n-1)\rho\mu_0(\rho) + 2 \geq \triangle\rho^2 \geq 2(n-1)\rho\mu_1(\rho) + 2,$$

onde $n = dim M$.

Demonstração:

Fixemos $p \in M$. Para $x \in M - \mathrm{Cut}(p)$, seja γ uma geodésica minimizante ligando p a x e parametrizada pela distância, tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(r) = x$. Seja $X \in T_pM$ tal que $\langle X, \dfrac{\partial}{\partial r}\rangle(x) = 0$. Como x não é um ponto conjugado de p, podemos estender X a um campo de Jacobi $\overline{X}$ ao longo de γ com $\overline{X}(\gamma(0)) = 0$ e $\overline{X}(\gamma(r)) = X$, onde $[\overline{X}, \frac{\partial}{\partial r}] = 0$. Assim,

$$\mathrm{Hess}\,(\rho)(X,X) = \langle \nabla_{\overline{X}} \mathrm{grad}\,\rho, \overline{X}\rangle = \langle \nabla_{\mathrm{grad}\,\rho}\overline{X}, \overline{X}\rangle$$

pois $[\overline{X}, \text{grad}\,\rho] = 0$. Segue que

$$\begin{aligned}
\text{Hess}\,(\rho) &= \int_0^r \frac{d}{dt}\langle \overline{X}, \nabla_{\text{grad}\,\rho}\overline{X}\rangle dt \\
&= \int_0^r (\langle \nabla_{\text{grad}\,\rho}\overline{X}, \nabla_{\text{grad}\,\rho}\overline{X}\rangle + \langle \overline{X}, \nabla_{\text{grad}\,\rho}\nabla_{\text{grad}\,\rho}\overline{X}\rangle) dt \\
&= \int_0^r (|\nabla_{\text{grad}\,\rho}\overline{X}|^2 + \langle \overline{X}, \nabla_{\text{grad}\,\rho}\nabla_{\text{grad}\,\rho}\overline{X}\rangle) dt.
\end{aligned}$$

Sendo $\overline{X}$ um campo de Jacobi, temos que

$$\nabla_{\text{grad}\,\rho}\nabla_{\text{grad}\,\rho}\overline{X} + R(\overline{X}, \text{grad}\,\rho)\text{grad}\,\rho = 0.$$

Logo

$$\text{Hess}\,(\rho)(X,X) = \int_0^r (|\nabla_{\text{grad}\,\rho}\overline{X}|^2 - \langle R(\overline{X}, \text{grad}\,\rho)\text{grad}\,\rho, \overline{X}\rangle) dt$$

onde R é a curvatura Riemanniana de M e o segundo membro acima é a forma índice.

Demonstremos a versão geral do Teorema de Comparação do Hessiano. Sejam M_1 e M_2 variedades Riemannianas de dimensão n e $\gamma_i : [0,a] \longrightarrow M_i$ com $i = 1, 2$, duas geodésicas parametrizadas pelo comprimento de arco, onde γ_i não intersecta o cut locus de $\gamma_i(p)$. Seja ρ_i a função distância de $\gamma_i(0)$ sobre M_i e K_i a curvatura seccional de M_i. Supondo que em $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)$ com $0 \leq t \leq a$, tenhamos

$$K_1(X_1, \frac{\partial}{\partial \gamma_1}) \geq K_2(X_2, \frac{\partial}{\partial \gamma_2})$$

onde X_i é um vetor unitário qualquer em $T_{\gamma_i(t)}M_i$, perpendicular a $\frac{\partial}{\partial \gamma_i}$, então

$$\text{Hess}\,(\rho_1)(X_1, X_1) \leq \text{Hess}\,(\rho_2)(X_2, X_2)$$

onde $X_i \in T_{\gamma_i(a)}M_i$, com $\langle X_i, \dfrac{\partial}{\partial \gamma_i}\rangle(\gamma_i(a)) = 0$ e $|X_i| = 1$.
De fato, seja $E_1^i, \ldots, E_n^i$ um sistema de campo de vetores ortonormais paralelo ao longo de γ_i com $E_n^i = \dfrac{\partial}{\partial \gamma_i}$.
Assim,

$$\text{Hess}\,(\rho_i)(X_i, X_i) = \int_0^a (|\frac{\partial}{\partial \gamma_i}\overline{X}_i|^2 - \langle R(\overline{X}_i, \frac{\partial}{\partial \gamma_i})\frac{\partial}{\partial \gamma_i}, \overline{X}_i\rangle) dt, \tag{1.4}$$

sendo $\overline{X}_i$ um campo de Jacobi ao longo de γ_i com $\overline{X}_i(\gamma_i(0)) = 0$ e $\overline{X}_i(\gamma_i(a)) = X$.

Como $\langle \overline{X}_i, \dfrac{\partial}{\partial \gamma_i} \rangle = 0$, temos que $\overline{X}_i$ é perpendicular a E_n^i em cada ponto de γ_i.
Considere

$$\overline{X}_2 = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i(t) E_i^2.$$

Tomemos $E_1^1, \ldots, E_n^1$ tal que

$$X_1 = \overline{X}_1(a) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i(a) E_i^1(\gamma 1(a)).$$

Definamos agora um campo de vetor Z ao longo de γ_1 por

$$Z = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i(t) E_i^1.$$

Então Z assume os mesmo valores de $\overline{X}_i$ em $t = 0$ e $t = a$.
Além disso,

$$|Z| = |\overline{X}_2|$$

e

$$|\nabla_{\frac{\partial}{\partial \gamma_2}} \overline{X}_2| = |\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i'(t) E_i^2| = |\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i'(t) E_i^1| = |\nabla_{\frac{\partial}{\partial \gamma_1}} Z|.$$

Como o campo de Jacobi minimiza a forma índice entre todos os campo de vetores ao longo da mesma geodésica com os mesmos valores de fronteira, então teremos

$$\begin{aligned}
\text{Hess}\,(\rho_1)(X_1, X_1) &= \int_0^a (|\frac{\partial}{\partial \gamma_1} \overline{X}_1|^2 - \langle R(\overline{X}_1, \frac{\partial}{\partial \gamma_1}) \frac{\partial}{\partial \gamma_1}, \overline{X}_1 \rangle) dt \\
&\leq \int_0^a (|\nabla_{\frac{\partial}{\partial \gamma_1}} Z|^2 - \langle R(Z, \frac{\partial}{\partial \gamma_1}) \frac{\partial}{\partial \gamma_1}, Z \rangle) dt \\
&= \int_0^a (|\nabla_{\frac{\partial}{\partial \gamma_2}} \overline{X}_2|^2 - K_1(Z, \frac{\partial}{\partial \gamma_1})) dt \\
&\leq \int_0^a (|\nabla_{\frac{\partial}{\partial \gamma_2}} \overline{X}_2|^2 - K_2(\overline{X}_2, \frac{\partial}{\partial \gamma_2})) dt \\
&= \text{Hess}\,(\rho_2)(X_2, X_2),
\end{aligned}$$

e segue a desigualdade desejada.

Seja $X \in T_{\gamma'(p)} M$ e $X \perp \gamma'(p)$ e denotemos por $X(t)$ o campo de vetores obtido pela estensão paralela de X ao longo de γ.

Seja $\overline{X}(t)$ o campo de Jacobi ao longo de γ com $\overline{X}(0) = 0$ e $\overline{X}(p) = X$ da forma

$$\overline{X}(t) = f(t)X(t)$$

onde a função $f(t)$ satisfaz a equação de Jacobi

$$f(t)'' + Kf(t) = 0 \tag{1.5}$$

com as condições $f(0) = 0$ e $f(\rho) = 1$.
Seja $\left\{\frac{\partial}{\partial\gamma}, X_1, \ldots, X_{n-1}\right\}$ é uma base ortonormal de $T_{\gamma(p)}M$ e paralela ao longo de γ.
Usando o campo de Jacobi

$$\overline{X}_i(t) = f(t)X_i(t)$$

com $\overline{X}_i(0) = 0$, $\overline{X}_i(\gamma(p)) = X_i$ e $|X_i| = 1$ em (1.4), obtemos

$$\begin{aligned}
\text{Hess}\,(\rho)(X_i, X_i) &= \int_0^\rho (|\frac{\partial}{\partial\gamma}\overline{X_i}|^2 - \langle R(\overline{X_i}, \frac{\partial}{\partial\gamma})\frac{\partial}{\partial\gamma}, \overline{X_i}\rangle)dt \\
&= \int_0^\rho (|\frac{\partial}{\partial\gamma}(f(t)X_i(t))|^2 - f(t)^2\langle R(X_i, \frac{\partial}{\partial\gamma})\frac{\partial}{\partial\gamma}, X_i\rangle)dt \\
&= \int_0^\rho (|\frac{\partial f(t)}{\partial t}|^2 - Kf(t)^2)dt.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Assim, para $K = -k^2$, a solução de (1.5) será

$$f(t) = \frac{\text{senh}\,(\text{kt})}{\text{senh}\,(\text{k}\rho)},$$

e de (1.6) segue

$$\begin{aligned}
\text{Hess}\,(\rho)(X_i, X_i) &= \int_0^\rho \left(\frac{k^2\cosh^2(kt)}{\text{senh}^2(\text{k}\rho)} - \frac{k^2\,\text{senh}^2(\text{kt})}{\text{senh}^2(\text{k}\rho)}\right)dt \\
&= \frac{k^2}{\text{senh}^2(\text{k}\rho)}\int_0^\rho \cosh(2kt)dt \\
&= \frac{k}{2\,\text{senh}^2(\text{k}\rho)}\int_0^\rho \frac{d}{dt}(\text{senh}\,(2\text{kt}))\text{dt} \\
&= \frac{k}{2\,\text{senh}^2(\text{k}\rho)}\text{senh}\,(2\text{k}\rho) \\
&= \frac{k\,\text{senh}\,(\text{k}\rho)\cosh(\text{k}\rho)}{\text{senh}^2(\text{k}\rho)} \\
&= k\coth(k\rho).
\end{aligned}$$

Logo

$$\text{Hess}\,(\rho)(X_i, X_i) = k\coth(k\rho).$$

Para $K=0$, a solução de (1.5) será

$$f(t)=\frac{t}{\rho},$$

e de (1.6) obtemos

$$\text{Hess}\,(\rho)(X_i,X_i)=\int_0^\rho |f'(t)|dt=\frac{1}{\rho^2}\int_0^\rho dt=\frac{1}{\rho}.$$

Para $K=k^2$, a equação (1.5) tem como solução

$$f(t)=\frac{\text{sen}\,(\text{kt})}{\text{sen}\,(\text{k}\rho)}.$$

Substituindo em (1.6), resulta em

$$\begin{aligned}
\text{Hess}\,(\rho)(X_i,X_i) &= \int_0^\rho \left(\frac{k^2\cos^2(kt)}{\text{sen}^2(k\rho)}-\frac{k^2\,\text{sen}^2(\text{kt})}{\text{sen}^2(\text{k}\rho)}\right)dt\\
&= \frac{k^2}{\text{sen}^2(\text{k}\rho)}\int_0^\rho \cos(2kt)dt\\
&= \frac{k}{2\,\text{sen}^2(\text{k}\rho)}\int_0^\rho \frac{d}{dt}(\text{sen}\,(2\text{kt}))\text{dt}\\
&= \frac{k}{2\,\text{sen}^2(\text{k}\rho)}2\,\text{sen}\,(\text{k}\rho)\cos(\text{k}\rho)\\
&= k\cot(k\rho),
\end{aligned}$$

ou seja:

$$\text{Hess}\,(\rho)(X_i,X_i)=k\cot(k\rho).$$

Como

$$\triangle\rho=\sum_{i=1}^{n-1}\text{Hess}\,(\rho)(X,X)=(n-1)\text{Hess}\,(\rho)(X,X),$$

tem-se

$$\triangle\rho=\begin{cases}(n-1)k\coth(k\rho), & \text{se } K=-k^2\\ \frac{(n-1)}{\rho}, & \text{se } K=0\\ (n-1)k\cot(k\rho), & \text{se } K=k^2.\end{cases}$$

Assim, podemos definir $\mu_i(\rho)$ por

$$\mu_i(\rho)=\begin{cases}k_i\coth(k_i\rho)\\ \frac{1}{\rho}\\ k_i\cot(k_i\rho),\end{cases}$$

com $i=0$ quando considerarmos o $\inf_\gamma k$ e $i=1$ para o $\sup_\gamma k$.

Denotemos $\mathbb{M}^n(k)$ o espaço forma n-dimensional simplesmente conexo de curvatura seccional constante k. Isto é:
i) A esfera $\mathbb{S}^n(k)$ de curvatura $k > 0$;
ii) O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ de curvatura $k = 0$;
iii) O espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n(k)$ de curvatura $k < 0$.

Considerando M restrita a geodésica γ, teremos

$$\inf_{\gamma} k \leq K \leq \sup_{\gamma} k.$$

Denotemos por $M^0_{\inf_\gamma k}$ e $M^1_{\sup_\gamma k}$ os espaços formas de curvaturas $\inf_\gamma k$ e $\sup_\gamma k$ respectivamente.
Aplicando a versão geral do teorema de comparação do Hessiano, mencionada no início da demonstração, segue que

$$\mathrm{Hess}\,(\rho_0)(X_i, X_i) \leq \mathrm{Hess}\,(\rho)(X_i, X_i) \leq \mathrm{Hess}\,(\rho_1)(X_I, X_i) \tag{1.7}$$

onde ρ_0, ρ e ρ_1 são as funções distâncias sobre $M^0_{\inf_\gamma k}$, M e $M^0_{\sup_\gamma k}$ respectivamente.
De (1.7) deriva

$$\mu_0(\rho)\|X_i\|^2 \geq \mathrm{Hess}\,(\rho)(X_i, X_i) \geq \mu_1(\rho)\|X_i\|^2.$$

Somando em i de 1 a n-1 temos

$$\sum_{i=1}^{n-1} \mu_0(\rho)\|X_i\|^2 \geq \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Hess}\,(\rho)(X_i, X_i) \geq \sum_{i=1}^{n-1} \mu_1(\rho)\|X_i\|^2,$$

que implica em

$$(n-1)\mu_0(\rho) \geq \triangle\rho \geq (n-1)\mu_1(\rho).$$

Para ρ^2 tem-se

$$\mathrm{Hess}\,(\rho_0^2)(X_i, X_i) \geq \mathrm{Hess}\,(\rho^2)(X_i, X_i) \geq \mathrm{Hess}\,(\rho_1^2)(X_i, X_i)$$

do qual resulta

$$2\rho\mu_0(\rho)\|X\|^2 \geq \mathrm{Hess}\,(\rho^2)(X, X) \geq 2\rho\mu_1(\rho)\|X\|^2.$$

Sabendo que $\triangle\rho^2 = 2(\rho\triangle\rho + \|\mathrm{grad}\,\rho^2\|)$ e que $\|\mathrm{grad}\,\rho^2\| = 1$, tem-se

$$\triangle\rho^2 = 2\rho\triangle\rho + 2,$$

e obtemos

$$2(n-1)\rho\mu_0(\rho) + 2 \geq \triangle\rho^2 \geq 2(n-1)\rho\mu_1(\rho) + 2.$$

1.5 Coordenadas Geodésicas

Seja M uma variedade Riemanniana e $p \in M$. Para cada vetor $\xi \in T_pM$, consideremos γ a única geodésica satisfazendo $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = \xi$ e

$$c(\xi) := \sup\{t > 0; t\xi \in TM \ e \ d(p, \gamma(t)) = t\},$$

ou seja, $c(\xi)$ é a distância de p ao seu ponto mínimo ao longo de γ.
Consideremos $D_p = \{t\xi;\ 0 \leq t \leq c(\xi),\ \xi \in S_p\}$ o maior subconjunto aberto de T_pM tal que, para qualquer $\xi \in D_p$, a geodésica $\gamma(t) = \exp_p(D_p)$ minimiza a distância de p a $\gamma(t)$ para todo $t \in [0, c(\xi)]$. Assim, podemos também definir o cut locus de p por

$$Cut(p) = \left\{\exp_p(c(\xi)\xi),\ \xi \in T_pM \ e \ |\xi| = 1\right\},$$

e fazermos $M = \exp_p(D_p) \cup C(p)$.
A aplicação exponencial $\exp_p : D_p \longrightarrow \exp_p(D_p)$ é um difeomorfismo e é chamada de coordenadas geodésicas de $M \backslash C(p)$.
Fixe um vetor $\xi \in T_pM$ com $|\xi| = 1$ e denote por $\xi^\perp$ o complemento ortogonal de $\{R\xi\}$ em T_pM e considere

$$P_t : T_pM \longrightarrow T_{\exp_p(t\xi)}M$$

o transporte paralelo ao longo de γ.
Defina o caminho das transformações lineares $A(t, \xi) : \xi^\perp \longrightarrow \xi^\perp$ por

$$A(t, \xi)\eta = P_t^{-1}Y(t)$$

onde $Y(t)$ é o campo de Jacobi ao longo de γ definida pelas condições iniciais $Y(0) = 0$ e $Y'(0) = \eta$.
Agora defina a aplicação $R(t) : \xi^\perp \longrightarrow \xi^\perp$ por

$$R(t)\eta = P_t^{-1}R(\gamma', P\eta)\gamma'$$

onde R é o tensor curvatura de Riemann.
Temos que $R(t)$ é uma aplicação autoadjunta e o caminho das transformações lineares $A(t, \xi)$ satisfaz a equação de Jacobi

$$A'' + RA = 0$$

com as condições iniciais $A(0,\xi) = 0$ e $A'(0,\xi) = I$.
No conjunto $\exp_p(D_p)$, a métrica Riemanniana de M pode ser expressa por

$$ds^2(\exp_p(t\xi)) = dt^2 + |A(t,\xi)d\xi|^2.$$

Fazendo $\sqrt{g(t,\xi)} = detA(t,\xi)$, temos, pelo teorema de comparação de Rauch, o seguinte teorema de comparação:

Teorema 1.4 (***Bishop***) *Se a curvatura seccional radial ao longo de γ satisfaz*

$$\langle R(\gamma', v)\gamma', v\rangle \leq k|v|^2 \quad \forall\, t \in (0,r)$$

e se $S_k(t)$ não se anula em $(0,r)$, então

$$\left[\frac{g(t,\xi)}{S_k^{n-1}(t)}\right]' \geq 0 \quad em\ (0,r)$$

e

$$\sqrt{g(t,\xi)} - S_k^{n-1}(t) \geq 0 \quad em\ (0,r).$$

Além disso, a igualdade ocorre em uma dessas duas desigualdades acima no ponto $t_0 \in (0,r)$ se, e somente se, $R = kI$ e $A = S_k I$ em todo $[0,t_0]$.
onde $C_k(t) = S_k'(t)$ e $S_k(t)$ é dado por

$$S_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}}\operatorname{sen}(\sqrt{\mathrm{k}}\mathrm{t}) & se\ k > 0 \\ t & se\ k = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-k}}\operatorname{senh}(\sqrt{-\mathrm{k}}\mathrm{t}) & se\ c < 0 \end{cases}$$

Uma parametrização em D_p é dada por

$$\exp_p^{-1}|_{D_p\backslash\{p\}} : D_p\backslash\{p\} \longrightarrow D_p\backslash\{,p\}$$

e a medida Riemanniana em D_p por

$$dV(t\xi) = \sqrt{g(t,\xi)}dtd\mu_p(\xi)$$

onde $\sqrt{g}$ está definida em D_p e $d\mu_p(p)$ denota a medida Riemanniana de S_p induzida pela medida Euclidiana de Lesbesgue sobre M_p.
Para o espaço Euclidiano R^n, com respeito as coordenadas esféricas, temos:

$$dV(t\xi) = t^{n-1}dtd\mu_{n-1}(\xi)$$

onde $d\mu_{n-1}$ denota a medida Riemanniana de S^{n-1}.
Se M tem curvatura constante K, então, em coordenadas esféricas geodésicas, para qualquer ponto $p \in M$, temos

$$\sqrt{g(t,\xi)} = S_k^{n-1}(t).$$

Capítulo 2

Lema Principal

Definição 2.1 *Seja* $\Omega \in M$ *um aberto em uma variedade Riemanniana* C^∞. *Denotemos por* $\boldsymbol{X}(\Omega)$ *o conjunto de todos os campos de vetores* X *em* Ω *com* $\|X\|_\infty = \sup_\Omega |X| < \infty$ *e* $\inf \operatorname{div} X > 0$.
Define-se $c(\Omega)$ *por*

$$c(\Omega) = \sup\left\{\frac{\inf \operatorname{div} X}{\|X\|_\infty}, X \in \boldsymbol{X}(M)\right\}.$$

Observação 2.1 *Para mostrar que* $\boldsymbol{X}(\Omega) \neq \emptyset$ *se* Ω *é limitado com fronteira não vazia considere o problema de valor de fronteira com* $\triangle u = 1$ *em* Ω *e* $u = 0$ *em* $\partial\Omega$, *sendo* $X = \operatorname{grad} u$. *Então*

$$\operatorname{div} X = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \triangle u = 1 \ \ e \ \ \|X\|_\infty < \infty.$$

Lema 2.1 *Seja* $\Omega \in M$ *um aberto em uma variedade Riemanniana. Então*

$$\lambda^*(\Omega) \geq \frac{c(\Omega)^2}{4} > 0.$$

Demonstração:
Seja $X \in \mathbf{X}(\Omega)$ e $f \in C_0^\infty(\Omega)$. O campo vetorial f^2X tem suporte compacto em Ω. Temos que

$$\operatorname{div}(f^2X) \ = \ \langle \operatorname{grad} f^2, X\rangle + f^2 \operatorname{div} X.$$

Como

$$f^2 \operatorname{div} X \geq f^2 \inf \operatorname{div} X \quad e \quad |\langle \operatorname{grad} f^2, X\rangle| \leq |\operatorname{grad} f^2||X|,$$

segue que

$$\operatorname{div}(f^2X) = \langle \operatorname{grad} f^2, X\rangle + f^2 \operatorname{div} X \geq -|\operatorname{grad} f^2||X| + f^2 \inf \operatorname{div} X.$$

Como

$$|\operatorname{grad} f^2|^2 = \langle \operatorname{grad} f^2, \operatorname{grad} f^2\rangle = 4f^2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f\rangle = 4f^2|\operatorname{grad} f|$$

ou seja,

$$|\operatorname{grad} f^2| = 2|f|.|\operatorname{grad} f|,$$

tem-se

$$-|\operatorname{grad} f^2||X| + f^2 \inf \operatorname{div} X \geq -2|f||\operatorname{grad} f| \sup|X| + f^2 \inf \operatorname{div} X$$

pois $-|X| \geq -\sup|X|$.
Temos ainda que

$$\begin{aligned}
(\epsilon|f| - |\operatorname{grad} f|)^2 \geq 0 \quad &\Longrightarrow \quad \epsilon^2|f|^2 - 2\epsilon|f|.|\operatorname{grad} f| + |\operatorname{grad} f|^2 \geq 0 \\
&\Longrightarrow \quad -2\epsilon|f||\operatorname{grad} f| \geq -\epsilon^2|f|^2 - |\operatorname{grad} f|^2 \\
&\Longrightarrow \quad -2|f||\operatorname{grad} f| \geq -\epsilon|f|^2 - \frac{1}{\epsilon}|\operatorname{grad} f|^2 \qquad \forall \epsilon > 0.
\end{aligned}$$

assim,

$$\operatorname{div}(f^2X) \geq \sup|X|(-\epsilon|f|^2 - \tfrac{1}{\epsilon}|\operatorname{grad} f|^2) + f^2 \inf \operatorname{div} X.$$

Integrando a última expressão sobre um domínio normal $D \supset \Omega$ temos

$$\begin{aligned}
0 \quad &= \quad \int_D \operatorname{div}(f^2X) \geq \sup|X| \int_D (-\epsilon|f|^2 - \frac{1}{\epsilon}|\operatorname{grad} f|^2) + \inf \operatorname{div} X \int_D f^2 \\
\Longrightarrow \quad & \int_D |\operatorname{grad} f|^2 \geq \frac{\epsilon}{\sup|X|}(\inf \operatorname{div} X - \epsilon \sup|X|) \int_D f^2.
\end{aligned}$$

Fazendo $\epsilon = \frac{\inf \operatorname{div} X}{2 \sup|X|}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\operatorname{grad} f|^2 \quad &= \quad \int_D |\operatorname{grad} f|^2 \\
&\geq \quad \left[\frac{\inf \operatorname{div} X}{2\sup|X|}\right]^2 \int_D f^2 \\
&= \quad \left[\frac{\inf \operatorname{div} X}{2\sup|X|}\right]^2 \int_\Omega f^2,
\end{aligned}$$

e segue que

$$\frac{\int_\Omega |\operatorname{grad} f|^2}{\int_\Omega f^2} \geq \frac{1}{4}\left[\frac{\inf \operatorname{div} X}{\|X\|_\infty}\right]^2. \tag{2.1}$$

Considerando em (2.1) o supremo de todos os campos de vetores $X \in \mathbf{X}(\Omega)$, resulta em

$$\begin{aligned} \lambda^*(\Omega) &= \inf_{\Omega} \left\{ \frac{\int |\mathrm{grad}\, f|^2}{\int_\Omega f^2} \right\} \\ &\geq \sup \frac{1}{4} \left[\frac{\inf \mathrm{div}\, X}{\|X\|_\infty} \right]^2 \\ &= \frac{c(\Omega)^2}{4}. \end{aligned}$$

Observação 2.2 *Na demonstração acima necessitamos somente considerar campos de vetores X suaves quase em todos os pontos de Ω tal que*

$$\int_\Omega \mathrm{div}\,(f^2 X) = 0 \qquad \forall f \in C^\infty(\Omega).$$

Corolário 2.1 *Seja $\Omega \subset M$ um domínio normal com fecho compacto em uma variedade Riemanniana M. Considere o problema de valor de fronteira $\triangle u = 1$ em Ω e $u = 0$ em $\partial\Omega$.*
Então

$$\lambda^*(\Omega) \geq \frac{1}{4\|\mathrm{grad}\, u\|_\infty^2}.$$

Demonstração:
Considerando $X = \mathrm{grad}\, u$, temos

$$\inf \mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\, u) = \inf \triangle u = 1 \quad e \quad \|X\|_\infty = \|\mathrm{grad}\, u\|_\infty.$$

Logo

$$\lambda^*(\Omega) \geq \frac{c(\Omega)^2}{4} = \frac{1}{4}\left[\sup \frac{1}{\|\mathrm{grad}\, u\|_\infty}\right]^2 \geq \frac{1}{4\|\mathrm{grad}\, u\|_\infty^2}.$$

Corolário 2.2 *Não existem campos de vetores diferenciáveis limitado $X : M \longrightarrow TM$ com $\inf_M \mathrm{div}\, X > 0$ em variedades completas não-compactas com $\lambda^*(M) = 0$. Em particular, não existem tais campos de vetores em R^n.*

Para domínios normais, o lema (2.1) é um corolário do teorema de Cheeger, já que pode ser mostrado que $c(\Omega) \leq h(\Omega)$, onde

$$h(\Omega) = \inf_{A \subset \Omega} \frac{vol \partial A}{vol A}$$

é a constante de Cheeger.

Para verificarmos isto, consideremos $X \in \mathbf{X}(\Omega)$ e $A \subset \Omega$ um subdomínio normal de Ω.Então

$$\begin{aligned} \inf_{\Omega} \operatorname{div} X.volA &= \inf_{\Omega} \operatorname{div} X. \int_A dV \\ &\leq \int_A \operatorname{div} X dV \\ &= \int_{\partial A} \langle X, \eta \rangle \\ &\leq \|X\|_\infty vol(\partial A). \end{aligned}$$

Logo

$$\frac{\inf_{\Omega} \operatorname{div} X}{\|X\|_\infty} \leq \frac{vol(\partial A)}{volA}.$$

Cada membro da desigualdade acima é independente um do outro. Para alguns casos é possivel mostrar que $c(\Omega) = h(\Omega)$, como no caso de bolas do espaço euclidiano, por exemplo.

A vantagem de introduzir $c(\Omega)$ é a possibilidade de calcularmos limites inferiores para $\lambda(\Omega)$ por meio do limite inferior de $c(\Omega)$. Além disso, pode ser aplicado em domínios arbitrários.

Capítulo 3

Aplicações do lema Principal

PRIMEIRA APLICAÇÃO: UMA PROVA DO TEOREMA DE MCKEAN

Teorema 3.1 *Seja M uma variedade Riemanniana simplesmente conexa completa e não-compacta com curvatura seccional $K_M \leq -k^2 < 0$, com $k > 0$, então*

$$\lambda^*(M) \geq \frac{(m-1)^2k^2}{4}.$$

Demonstração:
Seja $\Omega \subset M$ um domínio normal e $\rho : M \longrightarrow R$ a função distância de um ponto $p \in M \backslash \Omega$.
Considere $X = \operatorname{grad} \rho$. Pelo teorema 2.7, temos que

$$\operatorname{div} X = \triangle\rho \geq (n-1)\mu_1(\rho) = (n-1)k\coth(k\rho) \geq (n-1)k.$$

Pelo lema 2.1, segue que

$$\lambda^*(\Omega) \geq \left(\frac{\inf \operatorname{div} X}{2\|X\|_\infty}\right)^2 \geq \left[\frac{(n-1)k}{2}\right]^2,$$

pois $\|X\|_\infty = 1$.
logo

$$\lambda^*(M) \geq \frac{[(n-1)k]^2}{4}.$$

SEGUNDA APLICAÇÃO: ESTIMATIVA DE AUTOVALORES EM BOLAS GEODÉSICAS

Seja M uma variedade Riemanniana completa n-dimensional com curvatura seccional $K_M < k$ e M_k uma variedade Riemanniana simplesmente conexa n-dimensional de curvatura seccional constante k.
Consideremos o

Teorema 3.2 *[Cheng] Seja M a variedade Riemanniana descrita acima com $Ric(M) \geq (n-1)k$ e $dim M = n$. Denotemos por $B_{M_k}(r)$ a bola geodésica de raio r e centro p. Seja $B_M(p,r)$ uma bola de raio r em um espaço forma de curvatura k. Então, com respeito as condições de fronteira de Dirichlet, teremos*

$$\lambda_1(B_{M_k}(r)) \leq \lambda_1(B_M(p,r)).$$

O teorema acima mostra que $\lambda_1(B_{M_k(r)}) \leq \lambda_1(B_M(p,r))$ desde que $r < inj(p)$, onde $\lambda_1(B_{M_k(r)})$ é o menor autovalor de Dirichlet da bola geodésica $B_{M_k}(r)$.
De fato, no teorema de Cheng é necessário somente termos

$$\sup\{K_M(x);\ x \in B_M(r)\} \leq k.$$

As estimativas de Cheng são as melhores possíveis, significando que M pode ser M_k. Mas elas dependem de estimativas locais em espaços forma. Embora existam estimativas locais conhecidas em espaços forma, devemos aplicar nosso método para obter diretamente estimativas menores para o primeiro autovalor de bolas geodésicas $B_M(p,r)$ com $r < inj(p)$.
Surpreendentemente, as estimativas locais obtidas para $\lambda_1(B_M(p,r))$ quando r é suficientemente pequeno e $\sup\{k_M(x),\ x \in B_M(p,r)\} \leq -k^2 < 0$ ou $\sup\{k_M(x);\ x \in B_M(p,r)\} \geq k^2 > 0$ são de aproximações melhores que as estimativas conhecidas.
É sabido que

$$\lambda_1(B_{R^n}(r)) \geq \left(\frac{c(n)}{r}\right)^2$$

onde $c(n)$ é o primeiro zero da função de Bessel $J_{\frac{n}{2}-1}$. É também conhecido que $c(n) > \frac{n}{2}$, mas assintoticamente, resulta que

$$\frac{2c(n)}{n} \longrightarrow 1 \quad quando\ n \longrightarrow \infty.$$

Portanto, nossa estimativa é:

$$\lambda_1(B_M(p,r)) \geq \left(\frac{n}{2r}\right)^2.$$

Teorema 3.3 *Seja M uma variedade Riemanniana completa e $B_M(p,r)$ uma bola geodésica com raio $r < inj(p)$. Seja $k(p,r) = \sup\{k_M(x);\ x \in B_M(p,r)\}$ onde k_M são as curvaturas seccionais de M em x. Então, para $k > 0$ temos*

$$\lambda_1(B_M(p,r)) \geq \begin{cases} \dfrac{1}{4}\max\left\{\dfrac{n^2}{r^2}, [(n-1)k\coth(k\rho)]^2\right\} & \text{se} \quad k(p,r) = -k^2 \\[2ex] \dfrac{n^2}{4r^2} & \text{se} \quad k(p,r) = 0 \\[2ex] \dfrac{[(n-1)kr\cot(kr)+1]^2}{4r^2} & \text{se} \quad k(p,r) = k^2 \ \ e \ \ r < \dfrac{\pi}{2k}. \end{cases}$$

Demonstração:

Para os casos $k(p,r) = 0$ e $k(p,r) = k^2$ com $r < \dfrac{\pi}{2k}$, consideremos o campo de vetores $X = \operatorname{grad}\rho^2$ onde $\rho(x) = d_M(x,p)$.
Aplicando o lema 2.1 junto com a desigualdade

$$2(n-1)\rho\mu_0(\rho) + 2 \geq \triangle\rho^2 \geq 2(n-1)\rho\mu_1(\rho) + 2$$

obtemos:
i) Para $k(p,r) = 0$,

$$\begin{aligned} \lambda_1(B_M(p,r)) &\geq \left(\frac{\inf \operatorname{div}(\operatorname{grad}\rho^2)}{2\|\operatorname{grad}\rho^2\|_\infty}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\inf \triangle\rho^2}{4\rho}\right)^2 \\ &\geq \left(\frac{\inf[2(n-1)\rho.\frac{1}{\rho}+2]}{4\rho}\right)^2 \\ &= \frac{n^2}{4\rho^2} \geq \frac{n^2}{4r^2}. \end{aligned}$$

ii) Para $k(p,r) = k^2$,

$$\begin{aligned} \lambda_1(B_M(p,r)) &\geq \left(\frac{\inf \operatorname{div}(\operatorname{grad}\rho^2)}{2\|\operatorname{grad}\rho^2\|}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\inf \triangle\rho^2}{4\rho}\right)^2 \\ &\geq \left(\frac{\inf[2(n-1)\rho k\cot(k\rho)+2]}{4\rho}\right)^2 \\ &\geq \frac{[(n-1)kr\cot(kr)+1]^2}{4r^2}. \end{aligned}$$

iii) Para o caso $k(p,r) = -k^2$ com $k > 0$, se considerarmos ainda $X = \operatorname{grad}\rho^2$, obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda_1(B_M(p,r)) &\geq \left(\frac{\inf \triangle \rho^2}{2\|\operatorname{grad}\rho^2\|}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\inf(2n)}{4\rho}\right)^2 \\
&\geq \frac{n^2}{4r^2}.
\end{aligned}$$

Mas, se fizermos $X = \operatorname{grad}\rho^\alpha$, $1 < \alpha < 2$, com X suave em $B_M(p,r)\backslash\{p\}$ e contínua em $B_M(p,r)$, teremos

$$\int_{B_M(p,r)} \operatorname{div}(f^2X) = 0, \quad \forall f \in C^\infty(B_M(p,r)). \tag{3.1}$$

Assim, podemos aplicar a observação 2.2 e a desigualdade

$$(n-1)\mu_0(\rho) \geq \triangle\rho \geq (n-1)\mu_1(\rho)$$

e obtermos

$$\begin{aligned}
\lambda_1(B_M(p,r)) &\geq \left(\frac{\inf \triangle \rho^\alpha}{2\|\operatorname{grad}\rho^\alpha\|}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{\inf\{\alpha(\alpha-1)\rho^{\alpha-1} + \alpha\rho^{\alpha-1}\triangle\rho\}}{\alpha\rho^{\alpha-1}}\right] \\
&\geq \frac{1}{4}\left[\frac{\inf\{\alpha(\alpha-1)\rho^{\alpha-1} + \alpha(n-1)k\rho^{\alpha-1}\coth(k\rho)\}}{\alpha\rho^{\alpha-1}}\right].
\end{aligned}$$

A expressão de $\triangle\rho^2$ pode ser obtida a partir de (1.2) fazendo $f = 1$.
Se $\alpha \longrightarrow 1$, então

$$\lambda_1(B_M(p,r)) \geq \frac{1}{4}\left[(n-1)k\coth(kr)\right]^2.$$

Logo, concluimos que

$$\lambda_1(B_M(p,r)) \geq \max\left\{\frac{n^2}{4r^2}, \frac{[(n-1)k\coth(kr)]^2}{4}\right\}.$$

Agora provemos (3.1):
Seja $B_M(p,\epsilon)$ uma bola geodésica com raio $\epsilon < r$ e χ_ϵ é a função característica de $B_M(p,r)\backslash B_M(p,\epsilon)$ com $f_\epsilon = \chi_\epsilon \operatorname{div}(f^2X)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{B_M(p,r)} f_\epsilon &= \int_{B_M(p,r)} \chi_\epsilon \operatorname{div}(f^2X) \\
&= \int_{B_M(p,r)\backslash B_M(p,\epsilon)} \operatorname{div}(f^2X) \\
&= \int_{\partial B_M(p,\epsilon)} \langle f^2X, \eta\rangle
\end{aligned} \tag{3.2}$$

onde η é um vetor unitário normal a $\partial B_M(p,\epsilon)$.

Além disso,

$$\begin{aligned} |\int_{\partial B_M(p,\epsilon)} \langle f^2X,\eta\rangle| &\leq \int_{\partial B_M(p,\epsilon)} |\langle f^2X,\eta\rangle| \\ &\leq \int_{\partial B_M(p,\epsilon)} |f^2X|.|\eta| \\ &= \int_{\partial B_M(p,\epsilon)} |f|^2.|X| \\ &\leq \sup|f|^2\int_{\partial B_M(p,\epsilon)} |\mathrm{grad}\,\rho^\alpha| \\ &= \alpha\sup|f|^2\int_{\partial B_M(p,\epsilon)} \rho^{\alpha-1} \\ &= \alpha\sup|f|^2\epsilon^{\alpha-1}\int_{\partial B_M(p,\epsilon)} dV \\ &= \alpha\sup|f|^2\epsilon^{\alpha-1}vol(\partial B_M(p,\epsilon)). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Usando (3.2) e (3.3), resulta que

$$\begin{aligned} |\int_{B_M(p,r)} f_\epsilon| &= |\int_{\partial B_M(p,\epsilon)} \langle f^2X,\eta\rangle| \\ &\leq \alpha\sup|f|^2\epsilon^{\alpha-1}vol(\partial B_M(p,\epsilon)). \end{aligned}$$

Fazendo $\epsilon\to 0$, obtemos

$$|\lim_{\epsilon\to 0}\int_{B_M(p,r)} f_\epsilon| \leq 0.$$

Logo

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{B_M(p,r)} f_\epsilon = 0.$$

Como $f_\epsilon = \chi_\epsilon \mathrm{div}\,(f^2X)\to \mathrm{div}\,(f^2X)$ em quase todos os pontos de Ω quando $\epsilon\to 0$ e $|f_\epsilon(x)|\leq|\mathrm{div}\,(f^2X)(x)| \quad \forall x\in B_M(p,r)\backslash\{p\}$, resta mostrar que $\mathrm{div}\,(f^2X)$ é integrável em $B_M(p,r)$.

Em pontos $x\neq p$, temos que

$$|\mathrm{div}\,(f^2X)|\leq 2|f||\mathrm{grad}\,f|\alpha\rho^{(\alpha-1)}+|f|^2\alpha(\alpha-1)\rho^{(\alpha-2)}+\alpha|f|^2\rho^{(\alpha-1)}\triangle\rho,$$

Logo, se mostrarmos que $\rho^{(\alpha-2)}$ e $\rho^{(\alpha-1)}\triangle\rho$ são integráveis em $B_M(p,r)$, teremos que $\mathrm{div}\,(f^2X)$ é integrável.

De fato, para qualquer $p\in M$ e função integrável f definida em M, temos

$$\begin{aligned} \int_M f dV &= \int_{D_p} f(exp t\xi)\sqrt{g(t,\xi)}dt d\mu_p(\xi) \\ &= \int_{S_p} d\mu_p(\xi)\int_0^{c(\xi)} f(exp t\xi)\sqrt{g(t,\xi)}dt \end{aligned}$$

onde $d\mu_p(\xi)$ é a medida Riemanniana sobre S_p induzida pela medida de Lebesgue euclidiana sobre M.

Agora consideremos a seguinte definição:

Definição 3.1 *Dada uma constante real k, denotemos por S_k a solução da equação diferencial ordinária*

$$\psi'' + K\psi = 0$$

satisfazendo as condições iniciais $S_k(0) = 0$ e $S_k'(0) = 1$.

Naturalmente, teremos

$$S_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{sen}(\sqrt{\mathrm{k}}\mathrm{t}) & \text{se } k > 0 \\ t & \text{se } k = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-k}} \operatorname{senh}(\sqrt{-\mathrm{k}}\mathrm{t}) & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

. Se M é um espaço forma de curvatura k, então em coordenadas geodésicas esféricas teremos, para qualquer $p \in M$ que

$$\sqrt{g(t,\xi)} = S_k^{(n-1)}(t).$$

Se $-k_0^2 = \inf\{K_M(x);\ \ x \in B_M(p,r)\}$, com $k_0 > 0$, então

$$\begin{aligned} \int_{B_M(p,r)} \rho^{(\alpha-2)} &= \int_{S_p} d\mu_p(\xi) \int_0^r t^{(\alpha-2)} \sqrt{g(t,\xi)} dt \\ &\leq \int_{S_p} d\mu_p(\xi) \int_0^r t^{(\alpha-2)} \left(\frac{1}{k_0} senh(k_0 t)\right)^{n-1} dt < \infty \end{aligned}$$

onde a primeira desigualdade é a desigualdade de Bishop. Segue que

$$\begin{aligned} \int_{B_M(p,r)} \rho^{\alpha-1} \triangle\rho &\leq \int_{B_M(p,r)} (n-1)\rho^{\alpha-1} k_0 \coth(k_0\rho) \\ &= \int_{S_p} d\mu_p(\xi) \int_0^r (n-1) t^{\alpha-1} k_0 \coth(k_0\rho) \sqrt{g(t,\xi)} dt \\ &\leq \int_{S_p} d\mu_p(\xi) \int_0^r (n-1) t^{\alpha-1} k_0 \coth(k_0\rho) (\frac{1}{k_0} senh(k_0 t))^{n-1} dt < \infty. \end{aligned}$$

A primeira desigualdade é devido $\triangle\rho \leq (n-1)\mu_0(\rho)$, com $\mu_0(\rho) = k_0 coth(k_0\rho)$ para $\inf_\gamma K = -k_0^2$, e a segunda desigualdade é novamente a desigualdade de Bishop.

Logo $\rho^{\alpha-1}$ e $\rho^{\alpha-1}\triangle\rho$ são integráveis em $B_M(p,r)$.

Agora aplicando o teorema da convergência dominada, temos

$$\int_{B_M(p,r)} \operatorname{div}(f^2 X) = \int_{B_M(p,r)} \lim_{\epsilon \to 0} f_\epsilon = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{B_M(p,r)} f_\epsilon = 0$$

e obtemos o resultado desejado.

TERCEIRA APLICAÇÃO: ESTIMATIVAS DE AUTOVALORES EM SUBVARIEDADES COM CURVATURA MÉDIA LOCALMENTE LIMITADA

Definição 3.2 *Uma imersão isométrica $\varphi : M \longrightarrow N$ tem curvatura média localmente limitada H se para qualquer $p \in M$ e $r > 0$, o número $h(p,r)$ definido por*

$$h(p,r) = \sup\{|H(x)|;\ \ x \in \varphi(M) \cap B_N(p,r)\}$$

for finito.

Teorema 3.4 *Sejam $\varphi :\longrightarrow N$ uma imersão isométrica com curvatura média localmente limitada H e Ω qualquer componente conexa de $\varphi^{-1}\overline{B_M(p,r)}$, onde $p \in N\backslash\varphi(M)$ e $r > 0$. Escolhendo r adquadamente, podemos estimar o tom fundamental de Ω como segue:*

i) Se $k(p,inj(p)) = k^2 < \infty$, escolha $r < \min\left\{inj(p), \frac{\pi}{2k}cotg^{-1}\left[h(p, \frac{inj(p)}{(m-1)k})\right]\right\}$ então

$$\lambda^*(\Omega) \geq \frac{[(m-1)kcotg(kr) - h(p,r)]^2}{4}.$$

ii) Se $\lim_{r\to\infty} k(p,r) = \infty$, considere $r(s) = \min\left\{\frac{\pi}{2\sqrt{k(p,s)}}, \frac{\coth^{-1}\left[\frac{h(p,s)}{(m-1)k(p,s)}\right]}{k(p,s)}\right\}$, $s > 0$. Escolha $r = \max\ r(s)$, com $s > 0$, então

$$\lambda^*(\Omega) \geq \frac{[(m-1)\sqrt{k(p,r)}cotg(r\sqrt{k(p,r)}) - h(p,r)]^2}{4}.$$

*iii) Se $k(p,in(p)) = 0$, escolha $r < \min\left\{inj(p), \frac{m}{h(p,inj(p))}\right\}$.
Considere $\frac{m}{h(p,inj(p))} = \infty$ se $h(p,inj(p)) = 0$, então*

$$\lambda^*(\Omega) \geq \frac{1}{4}\left[\frac{m}{r} - h(p,r)\right].$$

iv) Se $k(p,inj(p)) = -k^2$ com $h(p,inj(p)) < (m-1)k$, e escolhermos $r < inj(p)$, então

$$\lambda^*(\Omega) \geq \frac{[(m-1)k - h(p,r)]^2}{4}.$$

v) Se $k(p,inj(r)) = -k^2$ com $h(p,inj(p)) \geq (m-1)k$, e escolhermos $r < \left\{inj(p), \frac{1}{k}cotg^{-1}\left[\frac{h(p,inj(p))}{(m-1)k}\right]\right\}$, então

$$\lambda^*(\Omega) \geq \frac{[(m-1)k + \frac{1}{r} - h(p,r)]^2}{4}.$$

Em ii), se $r(s) > 0$ para s pequeno, então $r > 0$.

Em iv), podemos ter uma estimativa melhor, ou seja:

$$\lambda^*(\Omega) \geq \frac{\left[(m-1)k + \frac{1}{r} - h(p,r)\right]^2}{4}$$

se escolhermos $X = \operatorname{grad}(\rho^2 \circ \varphi)$ na prova abaixo.

Demonstração:

Seja $\rho(x) = d_N(p,x)$ a função distância em N e $f_i : M \longrightarrow R$ a função definida por

$$f_i = \rho^i \circ \varphi \quad para \quad i = 1, 2$$

onde cada f_i é diferenciável em $\varphi^{-1}(B_N(p, inj(p)))$.

Seja Ω uma componente conexa de $\varphi^{-1}(\overline{B_N(p, inj(p))})$, e nesta componente considere $X_i = \operatorname{grad} f_i$.

Usando (1.3) obtem-se

$$\operatorname{div} X_i(x) = \triangle f_i(x) = \sum_{i=1}^{m-1} Hess\rho^i(\varphi(x))(e_i, e_i) + \langle \operatorname{grad} \rho^i, H\rangle \varphi(x)$$

onde $\{e_1, \ldots, e_2\}$ é uma base ortonormal de T_xM e H denota a curvatura média de N em $\varphi(x)$.

Temos que

$$|\langle \operatorname{grad} \rho^i, H\rangle| \leq |\operatorname{grad} \rho^i||H| \leq i\rho^{i-1}h(p,r).$$

Assim,

$$-i\rho^{i-1}h(p,r) \leq \langle \operatorname{grad} \rho^i, H\rangle \leq i\rho^{i-1}h(p,r).$$

Então

$$\operatorname{div} X_i = \triangle\rho^i(\varphi) + \langle \operatorname{grad} \rho^i, H\rangle(\varphi) \geq \triangle\rho^i(\varphi) - i\rho^{i-1}h(p,r),$$

ou seja:

$$\operatorname{div} X_i \geq \triangle\rho^i - i\rho^{i-1}h(p,r).$$

Aplicando o teorema de comparação do Hessiano, segue que:

Para $i = 1$ tem-se

$$\operatorname{div} X_1 \geq \triangle\rho - h(p,r) \geq (m-1)\mu(\rho) - h(p,r).$$

Para o caso $i = 2$, usemos o fato de $\triangle\rho^2 = 2\rho\triangle\rho + 2$. Assim,

$$\operatorname{div} X_2 = \triangle\rho^2 - 2\rho h(p,r) \geq 2(m-1)\rho\mu(\rho) + 2\rho h(p,r),$$

onde consideramos

$$\mu(\rho)=\begin{cases} k\cot(k\rho), & \text{se } k=K^2\\ \frac{1}{\rho}, & \text{se } k=0\\ k\coth(k\rho), & \text{se } k=-K^2.\end{cases}$$

Pelo lema (2.1) e desde que $\|X_1\|\le 1$ e $\|X_2\|\le 2r$, obtemos

$$\lambda^*(\Omega)\ge\frac{1}{4}\left[\frac{\inf \operatorname{div} X_1}{\|X_1\|}\right]\ge\frac{[(m-1)\mu(\rho)-h(p,r)]^2}{4}$$

para $i=1$.

Logo

$$\lambda^*(\Omega)\ge\begin{cases} \frac{[(m-1)k\cot(kr)-h(p,r)]^2}{4}, & \text{se } k=K^2\\ \frac{[(m-1)k\coth(kr)-h(p,r)]^2}{4}, & \text{se } k=-K^2.\end{cases}$$

Na expressão acima, para o caso $k=-K^2$, segue que

$$\begin{aligned}\lambda^*(\Omega) &\ge \frac{[(m-1)k\coth(kr)-h(p,r)]^2}{4}\\ &\ge \frac{[(m-1)k-h(p,r)]^2}{4}.\end{aligned}$$

Para $i=2$ e $k=0$ tem-se

$$\begin{aligned}\lambda^*(\Omega) &\ge \frac{1}{4}\left[\frac{\inf \operatorname{div} X_2}{\|X_2\|}\right]^2\\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{\inf[2(m-1)\rho\frac{1}{\rho}+2-2\rho h(p,r)]}{2r}\right]^2\\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{\inf(2m-2\rho h(p,r))}{2r}\right]^2\\ &\ge \frac{1}{4}\left[\frac{2m-2rh(p,r)}{2r}\right]^2\\ &\ge \frac{1}{4}\left[\frac{m}{r}-h(p,r)\right]^2.\end{aligned}$$

Para $i=2$ e $k=-K^2$ tem-se

$$\begin{aligned}\lambda^*(\Omega) &\ge \frac{1}{4}\left[\frac{\inf \operatorname{div} X_2}{\|X_2\|}\right]^2\\ &\ge \frac{1}{4}\left[\frac{\inf[2(m-1)\rho k\coth(k\rho)+2-2\rho h(p,r)}{2r}\right]^2\\ &\ge \frac{1}{4}\left[(m-1)r+\frac{1}{r}-h(p,r)\right]^2.\end{aligned}$$

Usando as condições do enunciado do teorema para $k(p,inj(p))$, $h(p,inj(p))$ e r, obtemos as estimativas dadas.

Teorema 3.5 *Seja M uma variedade Riemanniana completa não-compacta. Se $\lambda_1(M) > 0$, então existe uma função inteira de Green sobre M.*

Demonstração:
Encontra-se em [9] pag. 84.

Definição 3.3 *Uma variedade Riemanniana completa e simplesmente conexa com curvatura seccional não-positiva é chamada Variedade de Hadamard.*

Um fato padrão para variedades de Hadamard é que a aplicação exponencial em qualquer ponto é um difeomorfismo global.
Agora vejamos uma versão do limite inferior de Cheng para domínios sobre subvariedades com curvatura média localmente limitada.

Corolário 3.1 *Seja $\varphi : M \longrightarrow N$ uma imersão isométrica com curvatura média limitada H, onde M é uma variedade Riemanniana completa não-compacta m-dimensional e N é uma variedade Riemanniana simplesmente conexa n-dimensional com curvatura seccional k_N satisfazendo $k_N \leq -a^2$ para uma constante $a > 0$. Se $\|H\| \leq \beta < (m-1)a$, então*

$$\lambda^*(M) = \frac{[(m-1)a - \beta]^2}{4} > 0.$$

Em particular, existem funções inteiras de Green sobre M.

Demonstração:
Considere $\rho(x) = d_N(p, x)$ com $p \in N \backslash \varphi(M)$, $f = \rho \circ \varphi$ e $X = \operatorname{grad} f$.
Sendo N simplesmente conexa com curvatura negativa, temos que todo ponto de N é um polo, ou seja, não possui ponto conjugado. Logo $inj(p) = \infty$.
A estimativa para o caso $inj(p) = \infty$ e $h(p, r) < (m-1)a$ para $r > 0$ no teorema (3.4) não depende de r e é dada por

$$\lambda^*(\Omega) \geq \frac{[(m-1)k - h(p, r)]^2}{4}.$$

Como $\|H\| \leq \beta \leq (m-1)a$, temos que

$$(m-1)a - \beta \leq (m-1)a - h(p, r).$$

Assim

$$\lambda^*(\Omega) \geq \frac{[(m-1)a - \beta]^2}{4}.$$

Desde que qualquer domínio $\Omega \subset M$ esteja imerso em uma bola $B_M(p,r)$ para um r suficientemente grande, teremos

$$\lambda_1(\Omega_j) \geq \frac{(m-1-\beta)^2}{4}$$

para qualquer exaustão $\Omega_j \subset \Omega_{j+1}$ de M.
A existência de funções inteiras de Green sobre M é uma consequência direta do teorema (3.5).

Corolário 3.2 *Seja $\varphi : M \longrightarrow N$ uma imersão mínima de uma variedade Riemanniana completa não-compacta m-dimensional em uma variedade de Hadamard n-dimensional N com curvatura seccional $k_N \leq -a^2$. Então M é não-parabólica.*

Corolário 3.3 *Seja $\varphi : M \longrightarrow N$ uma imersão isométrica mínima de uma superfície completa. Suponha que $\varphi(M) \subset B_{R^3}(0,r)$. Então*

$$\lambda^*(M) \geq \frac{1}{4r^2}.$$

Bibliografia

[1] Barbosa, J. L., Bessa, G. P. & Montenegro, J. F.:*On Bernstein-Heinz-Chern-Flanders inequalities.* Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **144** (2008) 457–464.

[2] Bessa, G. P., Montenegro, J. F.: *Eigenvalues Estimates for Submanifolds with Locally Bounded Mean Curvature*, Ann. Global Anal. and Geom. 24, 279-290(2003)

[3] Bessa, G. P., Montenegro, J. F.: *On Cheng's eigenvalue comparison theorem.* Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **144** (2008) 673–682.

[4] Cheeger, J.: *A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian.* Problems in Analyis, 195–199. Princenton Univ. Press, Princenton, New Jersey, 1970.

[5] Cheng, S. Y.:*Eigenfunctions and Eigenvalues of the Laplacian*, Amer. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math. 27, Part II(1975), 185-193.

[6] Cheung, L. -F. and Leung, P. -F.:*Eingenvalues Estimates for Manifolds With Bounded Mean Curvature in the Hyperbolic Spaces*, Math. Z. 236(2001), 525-530.

[7] Jorge, L. and Koutrofiotis, D.:*An Estimates for the Curvature of Bounded Submanifolds*, Amer. J. Math. 103(4)(1980), 711-725.

[8] McKean, H. P.: *An Upper Bound for the Spectrum of the laplacian on a Manifold of Negative Curvature* J. Differential Geom. 4(1970), 359-366.

[9] Schoen, R. and Yau, S.T.: *Lectures on Differential Geometry*, Lectures Notes in Geom. Topol. 1. 1994