UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Elivaldo Rodrigues Macedo

SOBRE A APLICAÇÃO DE GAUSS DE HIPERSUPERFÍCIES COM CURVATURA ESCALAR CONSTANTE EM ESFERAS

Fortaleza
2006

Elivaldo Rodrigues Macedo

SOBRE A APLICAÇÃO DE GAUSS DE HIPERSUPERFÍCIES COM CURVATURA ESCALAR CONSTANTE EM ESFERAS

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Gervasio Colares.

Fortaleza
2006

Ao meu tio mestre Leonardo Santos (in memorian).
À minha mãe Valdenice R. Macedo.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus e Nossa Senhora da Penha por mais uma conquista na minha vida.

À minha família pelo apoio em todos os momentos dessa jornada.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Antonio Gervasio Colares, pela orientação e conselhos de suma importância para o desenvolvimento não só deste trabalho, mas para minha formação profissional.

À Andrea Costa Dantas pelo desempenho com relação à serviço burocráticos e sua simpatia.

Agradeço eternamente a Marcos Rodrigues, Marcelo Rêgo, Marcelo Melo, Jeanne, Ulisses e Anderson Fabian pela amizade e a aprendizagem que obtivemos desta à escola de verão 2003.

À todos os alunos da gós-graduação, estendo meus sinceros agradecimentos.

Aos meus conterrâneos e compadre; Marcos Roberto, Roberto Maluf, Bispo, Onofre, Welbeth, Kleber, Jorginho, Arturo, Mário, George, Nathan e Sergio Luís pela sólida amizade que serviu de apoio e incentivo nessa jornada.

Agradeço ao Francisco Carpegianni pela amizade e paciência durante as correções deste trabalho.

Agradeço aos professores do departamento de matemática da Universidade Federal do Maranhão pelo apoio e incentivo. Em especial a Maxwell Mariano de Barros, Marcos Antonio, Mairton, Conceição Brandão, Luís Fernando e Hilkias pela formação que me possibilitou um grande êxito no mestrado.

Aos professores Luquésio, Lucas, Othon, Jorge Herbert e Lev Birbrair pelos conhecimentos adqueridos nas disciplinas que me foram de suma importância.

Agradeço a Fernando Espinoza e Feliciano Vitório pelas valiosas contribuições que me foram essenciais no desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço a Fernanda, Erivan e Rocilda pela ajuda e o bom trabalho desempenhado na Biblioteca da Matemática.

À CAPES que viabilizou esse Mestrado.

"Um passo à frente e você não está mais no mesmo lugar."

Chico Science

RESUMO

O propósito da Dissertação é caracterizar hipersuperfícies na esfera euclidiana com curvatura média de ordem superior constante. Provamos que se M é uma variedade Riemanniana de dimensão n e a imagem da aplicação de Gauss de M está contida num hemisfério fechado da esfera de dimensão $n+1$, então M é totalmente umbílica.

Sumário

O trabalho aqui realizado baseia-se num artigo publicado de autoria de Hilário Alencar, Harold Rosenberg e Walcy Santos.

Seja $x : M^n \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1}(1)$ uma hipersuperfície compacta e orientável na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+1}(1)$. Denotando por N,∇ e $\widetilde{\nabla}$, campo vetorial unitário normal, conexões Riemannianas de M e $\mathbb{S}^{n+1}$, respectivamente, são relacionadas por

$$\widetilde{\nabla}_X\, Y = \nabla_X Y + \langle AX, Y\rangle N,$$

onde A é o operador linear associado à segunda forma fundamental, definido por

$$\widetilde{\nabla}_X\, N = -AX.$$

Definimos a **aplicação de Gauss** $\phi : M^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ por

$$\phi(p) = N(p) \in \mathbb{S}^{n+1}.$$

O conjunto $\phi(M)$ denotaremos por **imagem da aplicação de Gauss** de M. O objetivo principal deste trabalho é estendermos para r-curvatura média constante o seguinte teorema provado por K. Nomizu e B. Smith [9].

Teorema (Nomizu-Smith). Seja M uma variedade compacta, conexa e orientável de dimensão $n \geq 2$ imersa na esfera $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura média constante. Se a imagem da aplicação de Gauss de M estiver contida num hemisfério fechado de $\mathbb{S}^{n+1}$. Então M está contida em uma hiperesfera em $\mathbb{S}^{n+1}$.

Começaremos com um teorema para o caso $H_r = 0$.

Teorema A: Seja $M \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ hipersuperfície compacta e conexa de $\mathbb{S}^{n+1}$ com $H_r = 0$ para algum $r = 1, \cdots, n-1$. Suponha que a imagem da aplicação de Gauss de M esteja contida num hemisfério fechado e H_{r-1} não muda de sinal em M. Então M é totalmente geodésica.

Em seguida para o caso $H_r > 0$.

Teorema B: Seja $M \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ hipersuperfície compacta e conexa de $\mathbb{S}^{n+1}$ com H_{r+1} constante positiva para algum $r = 0, \cdots, n-2$. Suponha que a imagem da aplicação de Gauss de M esteja contida num hemisfério fechado, $H_r \geq 0$ e a seguinte desigualdade vale

$$H_1 H_r \geq H_{r+1}.$$

Então M é totalmente umbílica.

No caso de curvatura escalar, parte das hipóteses dos teoremas acima são trivialmente satisfeitas, e obtemos o seguinte resultado.

Teorema C: Seja $M \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ hipersuperfície compacta e orientável de $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura escalar constante $H_2 \geq 0$. Se a imagem da aplicação de Gauss de M estiver sobre um hemisfério fechado de $\mathbb{S}^{n+1}$. No caso $H_2 = 0$, suponha também que H_1 não muda de sinal. Então M é totalmente umbílica.

Capítulo 1

Preliminares

Neste trabalho iremos sempre considerar M^n uma variedade Riemanniana de dimensão n e de classe C^∞, $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M, $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M, ∇ conexão Riemanniana e T_pM o espaço tangente a M em p. A meta deste capítulo é apresentar conceitos, propriedades e notações a serem usadas nesta dissertação.

1.1 Curvaturas

Definição 1.1.1 *O* **tensor curvatura** *R de uma variedade Riemanniana M^n é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ uma aplicação do tipo $R(X,Y) : \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ dada por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z$$

$\forall Z \in \mathcal{X}(M)$.

Proposição 1.1.1 *O* **tensor curvatura** *R satisfaz as seguintes propriedades para todo $X, Y, Z, T \in \mathcal{X}(M)$:*

a) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle + \langle R(Y,Z)X, T\rangle + \langle R(Z,X)Y, T\rangle = 0$;

b) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = -\langle R(Y,X)Z, T\rangle$;

c) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = -\langle R(X,Y)T, Z\rangle$;

d) $\langle R(X,Y)Z, T\rangle = \langle R(Z,T)X, Y\rangle$.

Definição 1.1.2 *Seja $\sigma \subset T_pM$ um plano do espaço tangente gerado pelos vetores x e y linearmente independentes. Então*

$$K(x,y) = \frac{\langle R(x,y)x,y\rangle}{|x\wedge y|^2}$$

onde $|x\wedge y|^2 = \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle - \langle x,y\rangle^2$. K é denominada a **curvatura seccional** *de M em p segundo σ.*

Seja agora $v \in T_pM$ um vetor unitário e $\{e_1, \cdots, e_{n-1}, e_n = v\}$ uma base ortonormal de T_pM.

Definição 1.1.3 *A* **curvatura de Ricci** *de M na direção de v em p é definida por:*

$$Ric_p(v) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\langle R(v,e_i)v,e_i\rangle.$$

Definição 1.1.4 *A* **curvatura escalar** *de M em p é definida por:*

$$K_p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Ric_p(e_i) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i,j}^{n}\langle R(e_i,e_j)e_i,e_j\rangle.$$

1.2 Gradiente, Divergente, Laplaciano e Hessiano

Definição 1.2.1 *Seja $f \in \mathcal{D}(M)$. O* **gradiente** *de f é um campo de vetores em M dado pela seguinte condição:*

$$\langle gradf, X\rangle = X(f)$$

$\forall X \in \mathcal{X}(M)$.
Obviamente da definição tem-se $\forall f, g \in \mathcal{D}(M)$;

a) $grad(f+g) = gradf + gradg$;

b) $grad(f \cdot g) = f \cdot gradg + g \cdot gradf$.

Definição 1.2.2 *Dado $X \in \mathcal{X}\ (M)$ defina*

$$divX : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$p \mapsto divX(p) := tr(Y \to \nabla_Y X(p)),$$

ou seja, o **divergente** *de X é o traço do operador linear $(Y \to \nabla_Y X)$. Decorre da definição que para qualquer $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ e qualquer $f \in \mathcal{D}(M)$:*

a) $div(X+Y) = div(X) + div(Y)$;

b) $div(f \cdot X) = f \cdot div(X) + \langle gradf, X\rangle$.

Teorema 1.2.1 *(Da divergência) Seja $X \in C^1(M)$, M compacta com bordo. Então*

$$\int_M divX dM = \int_{\partial M} \langle X, \nu\rangle dS$$

onde ν é o vetor conormal exterior de ∂M.

Definição 1.2.3 *Seja $f \in \mathcal{D}(M)$. O operador $\Delta : \mathcal{D}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ chamado* **laplaciano** *de f, é definido por:*

$$\Delta f = div(gradf).$$

Decorre das propriedades do gradiente e do divergente que:

a) $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$;

b) $\Delta(f \cdot g) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle gradf, gradg\rangle$, para quaisquer $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Observação 1.2.1 (Referencial Móvel) *Seja M^n uma variedade Riemanniana de dimensão n, e $p \in M$. Então existe uma vizinhança $\mathcal{U} \subset M$ de p e n campos de vetores linearmente indenpendentes $e_1, \cdots, e_n \in \mathcal{X}(M)$ ortogonais, tais que, $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}, \forall i, j = 1, \cdots, n$.*

Proposição 1.2.1 *Se $\{e_1, \cdots, e_n\}$ é um referencial ortonormal local em M, então*

$$gradf = \sum_{i=1}^{n} e_i(f)e_i.$$

Dem.: *Escrevendo* $gradf = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, *temos que*

$e_j(f) = \langle gradf, e_j\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, e_j\rangle = \alpha_j.$

Logo,

$$gradf = \sum_{i=1}^{n} e_i(f)e_i. \tag{1.1}$$

$\square$

Proposição 1.2.2 *Se* $X = \sum_{i=1}^{n} X_i e_i$, *onde* $\{e_1, \cdots, e_n\}$ *é um referencial ortonormal local em* M, *então*

$$divX = \sum_{i=1}^{n}(e_i(X_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X\rangle).$$

Dem.: *Temos,*

$$\begin{aligned} divX &= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{e_i} X, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{e_i}(\sum_{j=1}^{n} X_j e_j), e_i\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n}\langle e_i(X_j) e_j, e_i\rangle + \sum_{i,j=1}^{n} X_j \langle \nabla_{e_i} e_j, e_i\rangle. \end{aligned}$$

Como $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$, *tem-se que*
$0 = e_i\langle e_i, e_j\rangle = \langle \nabla_{e_i} e_i, e_j\rangle + \langle e_i, \nabla_{e_i} e_j\rangle$, *ou seja,* $\langle \nabla_{e_i} e_j, e_i\rangle = -\langle \nabla_{e_i} e_i, e_j\rangle$.
Daí,

$$\begin{aligned} divX &= \sum_{i=1}^{n} e_i(X_i) - \sum_{i,j=1}^{n} X_j \langle \nabla_{e_i} e_i, e_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} e_i(X_i) - \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{e_i} e_i, \sum_{j=1}^{n} X_j e_j\rangle. \end{aligned}$$

Logo,

$$divX = \sum_{i=1}^{n}(e_i(X_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X\rangle). \tag{1.2}$$

$\square$

Proposição 1.2.3 *Se $\{e_1, \cdots, e_n\}$ é um referencial ortonormal local em M, então*

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} (e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)(f)).$$

Dem.: *De fato, por* (1.1)

$$\Delta f = div(\sum_{i=1}^{n} e_i(f) e_i),$$

e por (1.2)

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} (e_i(e_i(f)) - \langle \nabla_{e_i} e_i, gradf \rangle).$$

Finalmente, pela propriedade do $gradf$, segue-se que

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} (e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i)(f)). \tag{1.3}$$

□

Definição 1.2.4 *Seja $f \in \mathcal{X}(M)$. Definimos o* **Hessiano** *de f em $p \in M$ como o operador $Hessf : T_pM \longrightarrow T_pM$, dado por:*

$$(Hessf)Y = \nabla_Y gradf \quad , \forall Y \in T_pM.$$

Podemos considerar $Hessf$ como um tensor tal que para cada par de campos $X, Y \in \mathcal{X}$(M), temos

$$Hessf(X, Y) = \langle \nabla_X gradf, Y \rangle.$$

1.3 Imersão Isométrica

Considere $(M^n, \langle , \rangle)$ e $(\overline{M}^{n+k}, (,))$ variedades diferenciáveis. Dizemos que uma aplicação diferenciável $f : M \longrightarrow \overline{M}$ é uma **imersão**, se a diferencial $df_p : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}\overline{M}$ é **injetiva** $\forall p \in M$. Observamos que $df_p(T_pM)$ é um subespaço vetorial do $T_{f(p)}\overline{M}$ e tem dimensão n.

O teorema da forma local das imersões estabelece que se f é uma imersão, então dado $p \in M$ existe um aberto $\mathcal{U} \ni p$ de M tal que $f|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \overline{M}$ é um **mergulho**, ou seja, $f(\mathcal{U})$ é uma **subvariedade** de $\overline{M}$; por este resultado é natural identificar os pontos de $\mathcal{U}$ com os pontos de $f(\mathcal{U})$ pensando f com uma **inclusão**. Com esta identificação, o T_pM é identificado com $df_p(T_pM)$, ou seja, identificamos $v \in T_pM$ com $df_p(v)$.

Quando a $\overline{M}$ é uma variedade Riemanniana com métrica $\langle , \rangle$ definimos a métrica induzida em M por:

$$\langle v, w \rangle_p = \langle df_p(v), df_p(w) \rangle_{f(p)}.$$

Tomando a métrica induzida em M, f torna-se uma **isometria local** e $f|_{\mathcal{U}}$ torna-se isometria sobre $f(\mathcal{U})$. Com isto a aplicação df_p pode ser considerada como a inclusão ou T_pM ser considerado como subespaço euclidiano do espaço euclidiano $T_{f(p)}\overline{M}$. Para cada $p \in M$ tem-se,

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp},$$

onde $(T_pM)^{\perp}$ é o **complemento ortogonal** de T_pM em $T_p\overline{M}$. Com isto, se $X \in T_p\overline{M}$, então $X = v + w$ sendo $v \in T_pM$ e $w \in (T_PM)^{\perp}$ de forma única.

Denote que M com a métrica induzida é variedade Riemanniana e portanto tem uma conexão Riemanniana ∇, $\overline{\nabla}$ a conexão Riemanniana de $\overline{M}$, nesse mesmo contexto prova-se que $\nabla = \overline{\nabla}^{\top}$, ou seja, se $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, $\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^{\top}$ é uma cenexão Riemanniana relativa à métrica induzida de M.

Se $X, Y \in TM$, temos que a aplicação $\alpha : TM \times TM \longrightarrow (TM)^{\perp}$, dada por;

$$\alpha(X, Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y,$$

e, em cada ponto, $\alpha(X, Y)$ é um campo local em $\overline{M}$ normal a M, um tensor, isto é, α é bilinear e simétrica. Então α é chamada de 2^a forma quadrática de f ou de M em $\overline{M}$.

Se ξ é campo normal unitário num aberto $\mathcal{U} \subset M$ e $X, Y \in \mathcal{X}\ (\mathcal{U})$, definimos uma forma bilinear e simétrica $H_\xi : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$H_\xi(X, Y) = \langle \alpha(X, Y), \xi \rangle.$$

A forma quadrática II_ξ, definida em T_pM por

$$II_\xi(X) = H_\xi(X, Y)$$

é chamada segunda forma fundamental da imersão f segundo o vetor normal ξ; à forma H_ξ está associada a um operador linear auto-adjunto $A_\xi : T_pM \longrightarrow T_pM$ por

$$\langle A_\xi(X), Y \rangle = H_\xi(X, Y).$$

Obviamente temos se $p \in M$, $X \in T_pM$ e $\xi \in (T_pM)^{\top}$, segue-se que:

$$A_\xi(X) = -(\overline{\nabla}_X \xi)^{\top}.$$

Além disso, a componente normal de $\overline{\nabla}_X \xi$ é uma conexão normal $\nabla^{\top}$ da imersão. Isto é,

$$\nabla_X^{\perp} \xi = (\overline{\nabla}_X \xi)^N = \overline{\nabla}_X \xi - (\overline{\nabla}_X \xi)^{\top} = \overline{\nabla}_X \xi + A_\xi(X).$$

Observação 1.3.1 *Se a codimensão for um podemos dispensar o índice ξ. Então,*

$$A(X) = -(\overline{\nabla}_X \xi)^{\top},$$

onde A é chamado **operador forma.**

Observação 1.3.2 *Se a codimensão é um e $\overline{M} = \mathbb{R}^{n+1}$, então ξ pode ser pensado com uma aplicação de $M \longrightarrow \mathbb{S}^n(1)$ e $d\xi_p X = \overline{\nabla}_X \xi$. Logo,*

$$A(X) = d\xi,$$

onde A é a **aplicação normal de Gauss.**

Proposição 1.3.1 (Equação de Gauss)

$$(\overline{R}(X,Y)Z)^{\top} = R(X,Y)Z + A_{\alpha(Y,Z)}X - A_{\alpha(X,Z)}Y,$$

$\forall\ X, Y, Z \in TM$.

Dem.: Sabemos que $\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X,Y)$ e $\nabla^{\perp}_X \xi = \overline{\nabla}_X \xi + A_{\xi}(X)$. Como

$$\overline{R}(X,Y)Z = \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z + \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z,$$

calculando separadamente os membros da equação acima, obtemos:

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z &= \overline{\nabla}_Y (\nabla_X Z + \alpha(X,Z)) \\
&= \overline{\nabla}_Y \nabla_X Z + \overline{\nabla}_Y \alpha(X,Z) \\
&= \nabla_Y \nabla_X Z + \alpha(\nabla_X Z, Y) + \nabla^{\perp}_Y \alpha(X,Z) - A_{\alpha(X,Z)} Y,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z &= \overline{\nabla}_X (\nabla_Y Z + \alpha(Y,Z)) \\
&= \overline{\nabla}_X \nabla_Y Z + \overline{\nabla}_X \alpha(Y,Z) \\
&= \nabla_X \nabla_Y Z + \alpha(\nabla_Y Z, X) + \nabla^{\perp}_X \alpha(Y,Z) - A_{\alpha(Y,Z)} X,
\end{aligned}$$

e

$$\overline{\nabla}_{[X,Y]Z} = \nabla_{[X,Y]} Z + \alpha([X,Y],Z).$$

Daí, obtemos:

$$\begin{aligned}
\overline{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z + \alpha(\nabla_X Z, Y) + \nabla^{\perp}_Y \alpha(X,Z) - \qquad (1.4)\\
&- A_{\alpha(X,Z)} Y - \alpha(\nabla_Y Z, X) - \nabla^{\perp}_X \alpha(Y,Z) + \qquad (1.5)\\
&+ A_{\alpha(Y,Z)} X + \alpha([X,Y],Z). \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\overline{R}(X,Y)Z = (\overline{R}(X,Y)Z)^{\top} + (\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp}.$$

Portanto,

$$(\overline{R}(X,Y)Z)^{\top} = R(X,Y)Z + A_{\alpha(Y,Z)}X - A_{\alpha(X,Z)}Y.$$

□

Proposição 1.3.2 (Equação de Codazzi)

$$(\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (D_Y\alpha)(X,Z) - (D_X\alpha)(Y,Z).$$

Dem.: De (1.4), (1.5) e (1.6), temos

$$(\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp} = \alpha(\nabla_X Z, Y) + \nabla^{\perp}_Y \alpha(X,Z) - \alpha(\nabla_Y Z, X) - \nabla^{\perp}_X \alpha(Y,Z) + \alpha([X,Y],Z).$$

Observe que

$$\alpha([X,Y],Z) = \alpha(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) = \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(\nabla_Y X, Z).$$

Assim,

$$\begin{aligned} (\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp} &= \{\nabla^{\perp}_Y \alpha(X,Z) - \alpha(\nabla_Y Z, X) - \alpha(\nabla_Y X, Z)\} - \\ &- \{\nabla^{\perp}_X \alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla_X Z, Y) - \alpha(\nabla_X Y, Z)\} \\ &= (D_Y\alpha)(Y,Z) - (D_X\alpha)(Y,Z). \end{aligned}$$

□

Observação 1.3.3 *Se o espaço ambiente $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante, a equação de Codazzi se reduz a:*

$$(D_Y\alpha)(X,Z) = (D_X\alpha)(Y,Z).$$

1.4 Os polinômios de Newton

Definição 1.4.1 *Seja A um operador auto-adjunto. O r-***ésimo polinômio simétrico** *associado a A, é a função $S_r(A) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definido como*

$$S_r(A)(\kappa_1, \cdots, \kappa_n) = \begin{cases} 1, & se \quad r = 0 \\ \displaystyle\sum_{1 \le i_1, < \cdots < i_r \le n} \kappa_{i_1} \cdots \kappa_{i_r}, & se \quad r \in \{1, \cdots, n\} \\ 0, & se \quad r > n, \end{cases}$$

onde $\kappa_1, \cdots, \kappa_n$ são os auto-valores do operador auto-adjunto A.

Observação 1.4.1 *Se A não estiver diagonalizada, definimos $A(i_1, \cdots, i_r)$ uma submatriz de $A = (h_{ij})$ constituida pelos h_{ij} tais que $i, j \in \{i_1, \cdots, i_r\}$. Então*

$$S_r = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n} det A(i_1, \cdots, i_r) = F(a_{ij})$$

Definição 1.4.2 *Seja $x : M^n \hookrightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica e A a segunda forma fundamental de x.Definimos os polinômios de Newton $P_r(A) : T_pM \longrightarrow T_pM$,para cada $r \in \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$, são definidos como sendo:*

$$\begin{aligned} P_0(A) &= I \\ P_1(A) &= S_1 I - A \\ &\vdots \\ P_r(A) &= S_r I - A P_{r-1}(A) \,, \quad r > 1 \end{aligned}$$

Observação 1.4.2 *Cada P_r comuta com A e se e_i um auto-vetor de A associado a curvatura principal k_i, então*

$$P_1(e_1) = \mu_i e_i = (S_1 - \kappa_i) e_i.$$

Proposição 1.4.1 *Seja $x : M^n \hookrightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica entre duas variedades Riemannianas e seja A o operador linear associado à uma segunda forma fundamental. Os polinômios de Newton associado a A satisfazem:*

a) $P_r(e_i) = S_r(A_i)e_i$; *para cada* $1 \leq i \leq n$ *onde* A_i *é a restrição da transformação* A *ao subespaço normal a* e_i;

b) $traço(P_r) = (n-r)S_r = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} S_r(A_i)$;

c) $traço(AP_r) = -(r+1)S_{r+1} = -\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa_i S_r(A_i)$;

d) $traço(A^2P_r) = S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \kappa_i^2 S_r(A_i)$.

Prova: a) Faremos a prova por indução sobre r. Para $r = 1$, temos $P_1 = S_1 I - A$.
Portanto,

$$
\begin{aligned}
P_1(e_i) &= S_1 e_i - Ae_i \\
&= S_1 e_i - \kappa_i e_i \\
&= (S_1 - \kappa_i)e_i \\
&= (\kappa_1 + \cdots + \hat{\kappa}_i + \cdots + \kappa_n) \\
&= S_1(A_i)e_i.
\end{aligned}
$$

Suponhamos que vale para $r-1$. Então

$$
\begin{aligned}
P_r(e_i) &= S_r e_i - AP_{r-1}(e_i) \\
&= S_r e_i - A(S_{r-1}(A_i)e_i) \\
&= (S_r - S_{r-1}(A_i)\kappa_i)e_i \\
&= S_r(A_i)e_i.
\end{aligned}
$$

b) Considere S_r e $S_r(A_i)$ como polinômios homogêneos nas variáveis κ_i. Então.

$$\begin{aligned}
\text{traço}(P_r) &= S_r(A_1) + \cdots + S_r(A_r) \\
&= \sum_{\substack{i_1 < \cdots < i_r \\ 1 \notin \{i_1, \cdots, i_n\}}} \kappa_{i_1} \cdots \kappa_{i_r} + \cdots + \sum_{\substack{i_1 < \cdots < i_r \\ n \notin \{i_1, \cdots, i_n\}}} \kappa_{i_1} \cdots \kappa_{i_r} \\
&= (n - r)S_r
\end{aligned}$$

Exemplo 1.4.1 *Considere as seguintes matrizes:*

$$A = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_3 \end{pmatrix} \quad , \quad P_0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} \kappa_2 + \kappa_3 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_1 + \kappa_3 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_1 + \kappa_2 \end{pmatrix} \quad e \quad P_2 = \begin{pmatrix} \kappa_2\kappa_3 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_1\kappa_3 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_1\kappa_2 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$\textit{traço}(P_1) = 2(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3) = 2S_1$$

$$\textit{traço}(P_2) = \kappa_2\kappa_3 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_1\kappa_2 = S_2$$

c) Decorre da identidade $AP_r(A) = -S_{r+1}(A)I + P_{r+1}(A)$. Tem-se:

$$\begin{aligned}
\text{traço}(AP_r(A)) &= -\text{traço}(S_{r+1}(A)I) + \text{traço}(P_{r+1}(A)) \\
&= -nS_{r+1}(A) + \text{traço}(P_{r+1}(A)).
\end{aligned}$$

Usando a parte (b) obtemos

$$\begin{aligned}
\text{traço}(AP_r(A)) &= -nS_{r+1}(A) + [(n - (r + 1))S_{r+1}(A)] \\
&= (n - n - r - 1)S_{r+1}(A) \\
&= -(r + 1)S_{r+1}(A).
\end{aligned}$$

d) Decorre novamente de $AP_r(A) = -S_{r+1}(A)I + P_{r+1}(A)$. Temos que

$$A^2P_r(A) = S_{r+1}(A)A + AP_{r+1}(A).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\text{traço}(A^2P_r(A)) &= S_{r+1}(A)\text{traço}(A) + \text{traço}(AP_{r+1}(A)) \\
&= S_{r+1}(A)S_1(A) - [(r+1)+1]S_{(r+1)+1}(A) \\
&= S_{r+1}(A)S_1(A) - (r+2)S_{r+2}(A),
\end{aligned}$$

o que completa a demonstração da proposição.

□

1.5 O operador $\mathbb{L}_r$

Considere o operador $Lu = a^{ij}(x)D_{ij}u + b^i(x)D_iu + c(x)u$, com $a^{ij} = a^{ji}$, onde $x = (x_1, \cdots, x_n)$ em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, sendo $n \geq 2$, $u \in C^2(\Omega)$, $D_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ e $D_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

Definição 1.5.1 *Dizemos que L é um* **operador**

i) **elíptico em um ponto** $x \in \Omega$ *se o coeficiente da matriz $(a^{ij}(x))$ é positivo, i.e., se $\lambda(x)$ e $\Lambda(x)$ denotam, respectivamente, o menor e o maior dos autovalores de $(a^{ij}(x))$, então $0 < \lambda(x)|\xi|^2 \leq a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x)|\xi|^2$, para todo $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$;*

ii) **elíptico** *em Ω se $\lambda > 0$ em Ω;*

iii) **estritamente elíptico** *se $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ para alguma constante λ_0;*

iv) **uniformemente elíptico** *em Ω se é estritamente elíptico e além dissoΛ/λ é limitado em Ω.*

Definição 1.5.2 *Seja $x : M^n \hookrightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica e A sua segunda forma fundamental. Dada uma função diferenciável $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $r \in \mathbb{N}$ com $0 \leq r \leq n-1$ definimos o operador diferencial de segunda ordem $\mathbb{L}_r$ em M^n por:*

$$\mathbb{L}_r(f)(p) = \textit{traço}[(P_r A Hess(f))(p)].$$

Observação 1.5.1 *Se $r = 0$, $\mathbb{L}_0$ é o laplaciano que é sempre um operador elíptico.*

As duas proposições a seguir dão condições para que o operador $\mathbb{L}_r$ seja elíptico e suas demonstrações podem ser encontradas em [1] e [7], respectivamente. Antes, apresentaremos a definição de H_r.

Definição 1.5.3 *Definimos a r-ésima curvatura média da imersão x em um ponto por*

$$H_r = \frac{1}{\binom{n}{r}} \sum_{i_1 < \cdots < i_r} \kappa_{i_1} \cdots \kappa_{i_r} \frac{1}{\binom{n}{r}} S_r,$$

onde S_r é o r-ésima função simétrica do $\kappa_1, \cdots, \kappa_n$. Assim, definimos $H_0 = 1$ e $H_r = 0$, para todo $r \geq n+1$, para $r = 1$, $H_1 = H$ é a curvatura média da imersão, no caso $r = 2$, H_2 é a curvatura escalar e para $r = n$, H_n é a curvatura de Gauss-Kronecker.

Proposição 1.5.1 *Seja M^n uma variedade Riemanniana conexa, compacta sem bordo e orientável e seja $x : M^n \hookrightarrow \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica com H_{r+1} constante. Se M^n tem um ponto onde todas as curvaturas principais são positivas, então $\mathbb{L}_r$ é um operador elíptico.*

Proposição 1.5.2 *Seja M uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^{n+1}$ ou S^{n+1} com $H_r = 0$, $2 \leq r < n$. Então o operador $\mathbb{L}_{r-1}(f) = div(P_{r-1}\nabla f)$ é elíptico em $p \in M$ se e somente se $H_{r+1}(p) \neq 0$.*

Proposição 1.5.3 *Seja M uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{S}^{n+1}$ e $\mathbb{H}^{n+1}$ as r-ésima curvaturas média de M são simetricas atravês da n-upla das curvaturas principais de M, elas são relatadas pela seguinte desigualdade algebrica:*

$$H_{i-1}H_{i+1} \leq H_i^2, \quad \forall i, \quad 1 \leq i < n \tag{1.7}$$

$$H_1 \geq H_2^{1/2} \geq H_3^{1/3} \geq \cdots \geq H_i^{1/i}, \tag{1.8}$$

Se $H_1, H_2, \cdots, H_i$ sejam naõ-negativos. Além disso, a igualdade em (1.7) e (1.8) vale apenas se $\kappa_1 = \kappa_2 = \cdots = \kappa_n$.
Para uma demonstração ver [8].

Capítulo 2

Uma fórmula integral

Neste capítulo apresentaremos uma fórmula integral de suma importância,que servirá de base para resultados posteriores. Antes, temos a seguinte proposição:

Proposição 2.0.4 *Seja $x : M^n \hookrightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$ uma imersão, onde $\overline{M}^{n+1}(c)$ representa $\mathbb{R}^{n+1}$, a esfera euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}(1)$ ou o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n(-1)$. Considere $\alpha \in \mathbb{R}^{n+2}$, um vetor fixo, N um campo de vetroes unitário normal a M e as funções $f, g : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por:*

$$f(p) = \langle N(p), \alpha\rangle \quad e \quad g(p) = \langle x(p), \alpha\rangle$$

Então,

$$L_r(g) = -(r+1)S_{r+1}f - (n-r)S_r g \tag{2.1}$$

$$L_r(f) = -[S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}]f - (r+1)S_{r+1}g \tag{2.2}$$

onde na última equação, S_{r+1} é constante.

Prova: Faremos a prova para o caso em que $\overline{M}^{n+1}(c)$, representa a esfera euclidiana $\mathbb{S}^{n+1}(1)$. Seja $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ referencial ortonormal tangente a M numa vizinhança de um ponto $p \in M$. Como,

$$M \overset{x}{\hookrightarrow} \mathbb{S}^{n+1} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^{n+2}$$

Temos,

$$\mathbb{R}^{n+2} = T_pM \oplus [N] \oplus [x].$$

Portanto, $\alpha \in \mathbb{R}^{n+2}$ é escrito como $\alpha = \alpha^{\top} + bN + cx$ É fácil ver que $a = \langle N, \alpha\rangle$ e $b = \langle x, \alpha\rangle$, isto é

$$\alpha = \alpha^{\top} + fN + gx.$$

onde x é o vetor posição de $\mathbb{S}^{n+1}$. Denotando a conexão em $\mathbb{R}^{n+2}$ por $\overline{\nabla}$ e derivando a função g e usando o fato que α é um vetor fixo. Para todo $X \in \mathcal{X}\ (M)$, obtemos

$$\begin{aligned} X(g) &= X\langle x, \alpha\rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_X x, \alpha\rangle + \langle x, \overline{\nabla}_X \alpha\rangle \\ &= \langle X, \alpha\rangle, \end{aligned}$$

Fazendo, $\alpha = \alpha^{\top} + \alpha^{\perp}$ e substituindo na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned} X(g) &= \langle X, \alpha\rangle \\ &= \langle X, \alpha^{\top} + \alpha^{\perp}\rangle \\ &= \langle X, \alpha^{\top}\rangle + \langle X, \alpha^{\perp}\rangle \\ &= \langle X, \alpha^{\top}\rangle. \end{aligned}$$

Por definição, temos que $X(g) = \langle grad(g), X\rangle$, usando isso, temos que

$$grad(g) = \alpha^{\top} = \alpha - fN - gx.$$

Sejam X e $Y \in \mathcal{X}\ (M)$ e $N \in \mathcal{X}\ (M)^{\perp}$ as conexões Riemannianas ∇ e $\tilde{\nabla}$ de M e $\mathbb{S}^{n+1}$, respectivamente, são relacionadas por

$$\tilde{\nabla}_X\ Y = \nabla_X Y + \langle AX, Y\rangle N \tag{2.3}$$

e

$$\overline{\nabla}_X Y = \tilde{\nabla}_X\ Y - \langle X, Y\rangle x, \tag{2.4}$$

Substituindo (2.3) em (2.4), temos

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle AX, Y\rangle N - \langle X, Y\rangle x. \tag{2.5}$$

Fazendo $Y = \alpha^\top$ em (2.5), obtemos

$$\overline{\nabla}_X \alpha^\top = \nabla_X \alpha^\top + \langle AX, \alpha^\top \rangle N - \langle X, \alpha^\top \rangle x. \tag{2.6}$$

Então, para α fixo e usando (2.6), temos

$$\begin{aligned} 0 = \overline{\nabla}_X \alpha &= \overline{\nabla}_X (\alpha^\top + fN + gx) \\ &= \overline{\nabla}_X \alpha^\top + X(f)N + f\overline{\nabla}_X N + X(g)x + \overline{\nabla}_X x \\ &= \nabla_X \alpha^\top + \langle AX, \alpha^\top \rangle N - \langle X, \alpha^\top \rangle x + X(f)N - fAX + X(g)x + gX, \end{aligned}$$

Assim, a parte tangente nos dá

$$\nabla_X \alpha^\top = \nabla_X grad(g) = fAX - gX. \tag{2.7}$$

Por definição, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_r(g) &= \text{traço}[P_r Hess(g)] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle (P_r Hess(g)) e_i, e_i \rangle, \end{aligned}$$

Como, $(Hess(g))e_i = \nabla_{e_i} grad(g)$, temos

$$\mathbb{L}_r(g) = \sum_{i=1}^{n} \langle P_r \nabla_{e_i} grad(g), e_i \rangle.$$

Fazendo, $X = e_i$ em (2.7), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_r(g) &= \sum_{i=1}^{n} \langle (P_r(fAe_i - ge_i), e_i \rangle \\ &= f \sum_{i=1}^{n} \langle P_r Ae_i, e_i \rangle - g \sum_{i=1}^{n} \langle P_r e_i, e_i \rangle \\ &= f \sum_{i=1}^{n} \langle AP_r e_i, e_i \rangle - g \sum_{i=1}^{n} \langle P_r e_i, e_i \rangle \\ &= f\text{traço}(AP_r) - \text{traço}(P_r). \end{aligned}$$

Pela proposição 1.4.1, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_r(g) &= f\text{traço}(AP_r) - g\text{traço}(P_r) \\ &= -f(r+1)S_{r+1} - g(n-r)S_r \\ &= -(r+1)S_{r+1} f - (n-r)S_r g, \end{aligned}$$

o que prova o resultado para a função g, agora iremos porvar para a função f, derivando a função f, obtemos para cada $X \in \mathcal{X}\ (M)$ e $\alpha \in \mathbb{R}^{n+2}$ vetor fixo

$$\begin{aligned}
\langle grad(f), X\rangle = X(f) &= X\langle N, \alpha\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_X N, \alpha\rangle \\
&= \langle \widetilde{\nabla}_X\ N + \langle X, N\rangle x, \alpha\rangle \\
&= \langle -AX, \alpha\rangle \\
&= \langle -AX, \alpha^{\top} + fN + gx\rangle \\
&= \langle -AX, \alpha^{\top}\rangle \\
&= \langle X, -A(\alpha^{\top})\rangle.
\end{aligned}$$

Logo,

$$grad(f) = -A(\alpha^{\top}).$$

Usando, derivada covariante para tensores e Codazzi, temos

$$\begin{aligned}
\nabla_X grad(f) &= -\nabla_X(A(\alpha^{\top})) \\
&= -(\nabla_X A)\alpha^{\top} - A\nabla_X\alpha^{\top} \\
&= -(\nabla_{\alpha^{\top}} A)X - A\nabla_X\alpha^{\top} \\
&= -(\nabla_{\alpha^{\top}} A)X - fA^2X + gAX. \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

Por definição, temos que $\mathbb{L}_r(f) = \sum_{i=1}^{n}\langle P_r\nabla_{e_i} grad(f), e_i\rangle$, usando (2.8), temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}_r(f) &= -\sum_{i=1}^{n}\langle P_r(\nabla_{\alpha^{\top}} A)e_i, e_i\rangle - f\sum_{i=1}^{n}\langle P_r A^2 e_i, e_i\rangle + g\sum_{i=1}^{n}\langle P_r A e_i, e_i\rangle \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\langle P_r(\nabla_{\alpha^{\top}} A)e_i, e_i\rangle - f\sum_{i=1}^{n}\langle A^2 P_r e_i, e_i\rangle + g\sum_{i=1}^{n}\langle A P_r e_i, e_i\rangle \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\langle P_r(\nabla_{\alpha^{\top}} A)e_i, e_i\rangle - f\text{traço}(A^2P_r) + g\text{traço}(AP_r),
\end{aligned}$$

Pela proposição (1.4.1), obtemos

$$\mathbb{L}_r(f) = -\text{traço}(P_r\nabla_{\alpha^{\top}} A) - [S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}]f - (r+1)S_{r+1}g. \qquad (2.9)$$

Afirmamos que traço$(P_r\nabla_{\alpha^\top}A) = \nabla_{\alpha^\top}(\text{traço}(AP_r))$. Com efeito, por definição e derivada covariante para tensores, temos

$$\begin{aligned}
\text{traço}(P_r\nabla_{\alpha^\top}A) &= \sum_{i=1}^{n}\langle (P_r\nabla_{\alpha^\top}A)e_i, e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle P_r\nabla_{\alpha^\top}A)e_i - P_rA\nabla_{\alpha^\top}e_i, e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\{\nabla_{\alpha^\top}\langle P_rAe_i, e_i\rangle - \langle P_rAe_i, \nabla_{\alpha^\top}e_i\rangle\} - \sum_{i=1}^{n}\langle P_rA\nabla_{\alpha^\top}e_i, e_i\rangle \\
&= \nabla_{\alpha^\top}\sum_{i=1}^{n}\langle P_rAe_i, e_i\rangle - 2\sum_{i=1}^{n}\langle P_rAe_i, e_i\rangle \\
&= \nabla_{\alpha^\top}\sum_{i=1}^{n}\langle AP_re_i, e_i\rangle - 2\sum_{i=1}^{n}\kappa_i\langle P_re_i, e_i\rangle \\
&= \nabla_{\alpha^\top}(\text{traço}(AP_r)) - 2\sum_{i=1}^{n}\kappa_i\langle S_re_i, e_i\rangle \\
&= \nabla_{\alpha^\top}(\text{traço}(AP_r)) - 2\sum_{i=1}^{n}\kappa_iS_r\langle e_i, e_i\rangle \\
&= \nabla_{\alpha^\top}(\text{traço}(AP_r)).
\end{aligned}$$

onde na última parte usarmos o seguinte resultado

$$\langle e_i, e_i\rangle = 1 \Rightarrow \alpha^\top\langle e_i, e_i\rangle = 0 \Rightarrow 2\langle\nabla_{\alpha^\top}e_i, e_i\rangle = 0.$$

o que prova a afirmação. Assim, (2.9) se escreve como

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}_r(f) &= -\nabla_{\alpha^\top}\text{traço}(AP_r) - [S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}]f - (r+1)S_{r+1}g \\
&= (r+1)\nabla_{\alpha^\top}S_{r+1} - [S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}]f - (r+1)S_{r+1}g.
\end{aligned}$$

Já que S_{r+1} é constante, isto implica que $\nabla_{\alpha^\top}S_{r+1}$ é zero. Portanto,

$$\mathbb{L}_r(f) = -[S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}]f - (r+1)S_{r+1}g.$$

□

Observação 2.0.2 *Nas condições desta proposição, se tivermos $r = 0$, então:*

$$\Delta(g) = L_0(g) = -S_1f - nS_0g = -S_1f - ng \qquad (2.10)$$

$$\Delta(f) = L_0(f) \quad = \quad -(S_1^2 - 2S_2)f - S_1 g = -\|A\|^2 f - S_1 g \qquad (2.11)$$

Proposição 2.0.5 *(Fórmula Integral)Seja $x : M^n \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície isometricamente imersa em $\mathbb{S}^{n+1}$ compacta e orientável, com H_{r+1} constante, para algum r com $0 \leq r < n-2$. Então:*

$$\int_M [(n-r-1)S_1 S_{r+1} - n(r+2)S_{r+2}] f dM = 0, \qquad (2.12)$$

Prova: Por hipótese H_{r+1} é constante, isso implica que S_{r+1} é constante. Por (2.2) e (2.17), obtemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}_r(f) - \frac{(r+1)}{n} S_{r+1}\Delta g &= -(S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})f - (r+1)S_{r+1} g + \\
&+ \frac{(r+1)}{n} S_{r+1} S_1 f + (r+1) S_{r+1} g \\
&= -S_1 S_{r+1} f + (r+2) S_{r+2} f - (r+2) S_{r+2} g + \\
&+ \frac{(r+1)}{n} S_{r+1} S_1 f + (r+1) S_{r+1} g \\
&= \frac{1}{n}[-n S_1 S_{r+1} f + n(n+2) S_{r+2} f + (r+1) S_{r+1} S_1 f] \\
&= \frac{1}{n}[(-n+r+1) S_1 S_{r+1} f + n(n+2) S_{r+2} f] \\
&= -\frac{1}{n}[(n-r-1) S_1 S_{r+1} f - n(n+2) S_{r+2}] f
\end{aligned}$$

Podemos ainda escrever:

$$(r+1)S_{r+1}\Delta g - nL_r(f) = [(n-r-1)S_{r+1}S_1 - n(r+2)S_{r+2}]f$$

Integrando, tem-se que:

$$\int_M [(r+1)S_{r+1}\Delta g - nL_r f] dM = \int_M [(n-r-1)S_{r+1}S_1 - n(r+2)S_{r+2}] f dM$$

Por outro lado, o teorema da divergência nos dá:

$$\begin{aligned}
\int_M [(r+1)S_{r+1}\Delta g - nL_r f] dM &= \int_M (r+1)S_{r+1} div(\nabla g) - n div(P_r \nabla f)] dM \\
&= \int_M div((r+1)S_{r+1}\nabla g - nP_r \nabla f) dM \\
&= \int_{\partial M} \langle (r+1)S_{r+1}\nabla g - nP_r\nabla f, \nu\rangle dS \overset{\partial M = \varnothing}{=} 0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_M [(n-r-1)S_{r+1}S_1 - n(r+2)S_{r+2}]fdM = 0$$

$\square$

Capítulo 3

Caracterização de hipersuperfícies umbílicas através da aplicação de Gauss

Neste capítulo iremos provar teoremas de caracterização de hipersuperfície com r-curvatura média constante na esfera. Como nos capítulos anteriores as conexões Riemannianas de M, $\mathbb{S}^{n+1}$ e $\mathbb{R}^{n+2}$ são denotadas por ∇, $\widetilde{\nabla}$ e $\overline{\nabla}$, respectivamente.

Na demonstração do próximo teorema necessitaremos o seguinte

Proposição 3.0.6 *Seja $M^n \overset{\psi}{\hookrightarrow} \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta e conexa de $\mathbb{S}^{n+1}$. Suponha que a imagem da aplicação de Gauss de M esteja contida num hemisfério fechado tal que existe $\alpha \in \mathbb{R}^{n+2}$ satisfazendo*

$$f = \langle N, \alpha \rangle \equiv 0.$$

Então M é totalmente geodésica.

Prova: De fato, derivando a equação $\langle N, \alpha \rangle \equiv 0$ sobre M, obtemos, para todo $X \in TM$:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \overline{\nabla}_X N, \alpha \rangle \\ &= \langle \widetilde{\nabla}_X N - \langle X, N \rangle x, \alpha \rangle \\ &= -\langle AX, \alpha \rangle. \end{aligned}$$

Seja $g = \langle x, \alpha \rangle$. Já que $\tilde{\nabla}_X \ N = -AX$, $\langle X, N \rangle = 0$ e $grad(g) = \alpha^\top = \alpha - gx$, segue que $\langle AX, grad(g) \rangle = 0$ para todo $X \in TM$. Pela simetria de A(i.e.,$\langle AX, grad(g) \rangle = \langle X, A(grad(g)) \rangle = 0$), temos

$$\alpha^\top \in \mathrm{Ker}A.$$

Além disto,

$$\begin{aligned}
\nabla_X grad(g) &= \tilde{\nabla}_X \ grad(g) - \langle AX, grad(g) \rangle N \\
&= \tilde{\nabla}_X \ grad(g) \\
&= \overline{\nabla}_X grad(g) + \langle X, grad(g) \rangle x \\
&= \overline{\nabla}_X \alpha - gx + \langle X, grad(g) \rangle x \\
&= -\langle x, \alpha \rangle \overline{\nabla}_X x - \langle X, \alpha \rangle x + \langle X, grad(g) \rangle x \\
&= -\langle x, \alpha \rangle X - \langle X, \alpha \rangle x + \langle X, \alpha \rangle x \\
&= -\langle x, \alpha \rangle X \\
&= -gX. \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

Das equações de Codazzi, temos

$$\begin{aligned}
(\nabla_{grad(g)} A)X &= (\nabla_X A) grad(g) \\
&= \nabla_X (A(grad(g))) - A \nabla_X grad(g) \\
&= -A(-gX) \\
&= gAX,
\end{aligned}$$

Para cada $X \in TM$; isto é,

$$\nabla_{grad(g)} A = gA. \qquad (3.2)$$

Em particular,

$$grad(g)(\text{traço}(A)) = \text{traço}(\nabla_{grad(g)} A) = g\text{traço}(A). \qquad (3.3)$$

Seja $\{e_1, e_2, \cdots, e_n, N, x\}$ uma base de $\mathbb{R}^{n+2}$ tal que

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \langle \alpha, e_i \rangle e_i + \langle x, \alpha \rangle x,$$

onde $e_i \in T_pM$ e $grad(g) = \sum_{i=1}^{n} \langle \alpha, e_i \rangle e_i$. Observamos que os zeros de $grad(g)$ ocorrem nos pontos onde α é ortogonal ao $d\psi_p(T_pM) \approx T_pM$.

Se $grad(g) = 0$ sobre M, segue que $\psi(M)$ mergulha em hiperesferas determinadas por hiperplanos de $\mathbb{R}^{n+2}$, e por compacidade de M, concluirmos que M é uma hiperesfera grande de $\mathbb{S}^{n+1}$.
Suponhmos $grad(g) \neq 0$ sobre M. Então, por (3.1), temos $\nabla_{grad(g)} grad(g) = -\langle x, \alpha \rangle grad(g)$, e além disto

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{grad(g)}{||grad(g)||}} \frac{grad(g)}{||grad(g)||} &= \frac{1}{||grad(g)||} \nabla_{grad(g)} \frac{grad(g)}{||grad(g)||} \\
&= \frac{1}{||grad(g)||} \{grad(g)(\frac{1}{||grad(g)||}) grad(g) + \\
&+ \frac{1}{||grad(g)||} \nabla_{grad(g)} grad(g)\} \\
&= \frac{1}{||grad(g)||^2} \nabla_{grad(g)} grad(g) - \\
&- \frac{1}{||grad(g)||} \frac{1}{||grad(g)||^2} \frac{1}{||grad(g)||} \langle \nabla_{grad(g)} grad(g), grad(g) \rangle grad(g) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto $\frac{grad(g)}{||grad(g)||}$ é um campo vetorial geodésico sobre o conjunto $\mathcal{U}$ dos pontos $p \in M$ onde $grad(g) \neq 0$. Sejam $p_0 \in \mathcal{U}$ um ponto fixo e γ uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco s e estendível indefinitivamente em ambas direções ao longo de M partindo de p_0 tangente ao $grad(g(p_0))$. Pela observação acima, $grad(g)$ é tangente a γ ao longo de γ.

Seja h uma função real definida sobre $\mathbb{R}$ por

$$h(s) = \langle \gamma'(s), grad(g(\gamma(s))) \rangle,$$

onde $\gamma'(s)$ é o vetor de $\gamma(s)$. Seja (a, b) um intervalo maximal contendo 0 da qual $\gamma((a, b))$ mergulha numa componente conexa de $\mathcal{U}$ contendo p_0. Então

$$\begin{aligned}
\frac{dh}{ds} &= \gamma'(s) \langle \gamma'(s), grad(g(\gamma(s))) \rangle \\
&= \langle \nabla_{\gamma'(s)} \gamma'(s), grad(g(\gamma(s))) \rangle + \langle \gamma'(s), \nabla_{\gamma'(s)} grad(g(\gamma(s))) \rangle.
\end{aligned}$$

Como $\gamma(s)$ é uma geodésica ,isto é, $\nabla_{\gamma'(s)}\gamma'(s) \equiv 0$, temos

$$\begin{aligned} \frac{dh}{ds} &= \langle \gamma'(s), -\langle x, \alpha\rangle \gamma'(s)\rangle \\ &= -g(\gamma(s)), s \in (a,b). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Derivando novamente, temos

$$\begin{aligned} \frac{d^2h}{ds^2} &= -\frac{d}{ds}\langle x(\gamma(s)), \alpha\rangle \\ &= \langle \nabla_{\gamma'(s)} x(\gamma(s)), \alpha\rangle + \langle x(\gamma(s)), \nabla_{\gamma'(s)}\alpha\rangle \\ &= -\langle \gamma'(s), \alpha\rangle \\ &= -\langle \gamma'(s), grad(g(\gamma(s))) + \langle x(\gamma(s)), \alpha\rangle \gamma(s)\rangle \\ &= -\langle \gamma'(s), grad(g(\gamma(s)))\rangle \\ &= -h(s), s \in (a,b). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Assim, a solução geral é:

$$h(s) = c_1 \cos(s + s_0) + c_2 \text{sen}(s + s_0).$$

Para satisfazer as condições iniciais $h'(o) = -g(\gamma(0)) = -g_0$ e $h(0) = \sqrt{1 - g_0^2} = f_0$, devemos ter

$$c_1 \cos s_0 + c_2 \text{sen} s_0 = f_0$$

e

$$-c_1 \text{sen} s_0 + c_2 \cos s_0 = -g_0.$$

Resolvendo o sistema de equações, obtemos

$$c_1 = g_0 \text{sen} s_0 + f_0 \cos s_0$$

e

$$c_2 = -g_0 \cos s_0 + f_0 \text{sen} s_0.$$

onde $s_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ é determinada por $\text{sen} s_0 = g_0$. Por outro lado,

$$\cos^2 s_0 = 1 - \text{sen}^2 s_0 = 1 - g_0^2 \Rightarrow \cos s_0 = f_0.$$

Então,

$$c_1 = 1$$

e

$$c_2 = 0.$$

Assim, a solução da equação diferencial que satisfaz as condições iniciais prefixadas é:

$$h(s) = \cos(s + s_0), s \in (a, b). \tag{3.6}$$

Além disto, segue de (3.4) que

$$g(\gamma(s)) = \text{sen}(s + s_0), s \in (a, b) \tag{3.7}$$

e de (3.6),temos

$$grad(g(\gamma(s))) = \cos(s + s_0)\gamma'(s), s \in (a, b) \tag{3.8}$$

Como $h(0)$ é positivo. Afirmamos que h é positiva em (a, b). De fato, suponhamos que existe $\overline{s} \in (a, b)$ tal que $h(\overline{s}) < 0$, resulta do Teorema do Valor Intermediário que deve existir $\widetilde{s} \in (a, b)$ tal que $h(\widetilde{s}) = 0$.
Segue-se daí e (3.8) que

$$\begin{aligned} grad(g(\gamma(\widetilde{s}))) &= \cos(\widetilde{s} + s_0)\gamma'(\widetilde{s}) \\ &= h(\widetilde{s})\gamma'(\widetilde{s}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

que é uma contradição, pois $\gamma(\widetilde{s}) \in \mathcal{U}$. Portanto por (3.6), temos que (a, b) é um intervalo finito ,isto é, $a > -\infty$ e $b < +\infty$, caso contrário teríamos $\cos(s + s_0) < 0$, que é uma contradição, pois virmos que h é positiva em (a, b). Pela condição maximal sobre (a, b) temos que $grad(g(\gamma(a))) = 0$ e $grad(g(\gamma(b))) = 0$. Por (3.8) e continuidade, temos

$$\cos(a + s_0) = \cos(b + s_0) = 0. \tag{3.9}$$

De (3.2), temos

$$grad(g)(\text{traço}A^2) = \text{traço}\nabla_{grad(g)}A^2 = 2g\text{traço}A^2. \tag{3.10}$$

Tomando $l(s) = (\text{traço}A^2)\gamma(s)$, podemos reescrever (3.10) como

$$\begin{aligned} \cos(s + s_0)\gamma^{'}(s)(\text{traço}A^2)\gamma(s) &= 2g(\gamma(s))(\text{traço}A^2)\gamma(s) \\ &= 2\text{sen}(s + s_0)l(s). \end{aligned}$$

Daí,

$$\cos(s+s_0)\frac{dl}{ds} = 2\mathrm{sen}(s+s_0)l(s).$$

Para esta equação o fator intergrante μ é dada por

$$\begin{aligned}\mu(s) &= e^{-\int 2\mathrm{tg}(s+s_0)ds} \\ &= \cos^2(s+s_0), s+s_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\end{aligned}$$

Assim, a solução geral é dada por

$$l(s) = \frac{C}{\cos^2(s+s_0)}, s+s_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),$$

Para alguma constante C.
Temos uma contradição a menos que C seja zero, e portanto l é zero; então $A=0$ sobre $\mathcal{U}$. Já que $f \equiv 0$ e $grad(g) \equiv 0$ em $M-\mathcal{U}$, temos

$$\begin{aligned}0 &= \langle grad(g), grad(g)\rangle \\ &= \langle \alpha - gx, \alpha - gx\rangle \\ &= \langle \alpha, \alpha\rangle - g\langle \alpha, x\rangle - g\langle x, \alpha\rangle + g^2 \\ &= 1 - 2g^2 + g^2 \\ &= 1 - g^2.\end{aligned}$$

Portanto, $g^2 = 1$ em $M-\mathcal{U}$; por (3.2), $A=0$ em $M-\mathcal{U}$. Pela compacidade de M, implica que M mergulha numa hiperesfera grande.

□

Teorema 3.0.1 *(Teorema A da Introdução) Seja $M^n \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta e conexa de $\mathbb{S}^{n+1}$ com $H_r = 0$ para algum $r = 1, \cdots, n-1$. Suponha que a imagem da aplicação de Gauss de M esteja contida num hemisfério fechado e H_{r-1} não muda sinal em M. Então M é totalmente geodésica.*

Prova: Usando (1.7) e o fato que $H_r = 0$, segue-se que

$$H_{r-1}H_{r+1} \leq 0,$$

Então, já que H_{r-1} não muda de sinal em M, concluímos também que H_{r+1} não muda de sinal em M. Pela hipótese da imagem da aplicação de

Gauss de M está contida num hemisfério fechado de $\mathbb{S}^{n+1}$, existe α em $\mathbb{R}^{n+2}$ tal que

$$f = \langle N, \alpha \rangle,$$

é não-negativa ao longo de M.
Segue-se daí que $f \cdot S_{r+1}$ não muda de sinal ao longo de M. Por outro lado, a equação (2.19) em nosso caso vale

$$\int_M [(n-r)S_1 S_r - n(r+1)S_{r+1}] f dM = 0,$$

Mas,

$$H_r = 0 \Longrightarrow S_r = 0.$$

Então, a equação acima reduz a:

$$\int_M f \cdot S_{r+1} dM = 0,$$

Como $f \cdot S_{r+1}$ tem sinal fixo, temos

$$f \cdot S_{r+1} = 0. \tag{3.11}$$

Seja $\mathcal{A}$ o conjunto dos pontos de M onde $S_{r+1} \neq 0$. Mas, virmos que S_{r+1} não muda de sinal em M; logo $S_{r+1} \equiv 0$ em $M - \mathcal{A}$. Em particular; $S_{r+1} \equiv 0$ em $M - \overline{\mathcal{A}}$. Por outro lado, $f \equiv 0$ em $\mathcal{A}$; logo pela continuidade de f, $f \equiv 0$ em $\overline{\mathcal{A}}$. Daí, em $M - \overline{\mathcal{A}}$

$$H_r = H_{r+1} = 0.$$

Portanto, vale a igualdade em (1.7). Logo, todos os pontos em $M - \overline{\mathcal{A}}$ são umbílicos; isto é,

$$\kappa_1 = \kappa_2 = \cdots = \kappa_n = a.$$

Então,

$$0 = S_r = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} \kappa_{i_1} \cdots \kappa_{i_r} = a^r.$$

Isto implica $M - \overline{\mathcal{A}}$ é totalmente geodésico e, além disto,

$$\partial_i[f] \quad = \quad \langle \tilde{\nabla}_{\partial i} N, \alpha \rangle + \langle N, \overline{\nabla}_{\partial i} \alpha \rangle.$$

Mas,

$$\tilde{\nabla}_{\partial i} N = -A(\partial i) = 0.$$

e

$$\overline{\nabla}_{\partial i}\alpha = 0$$

Então,

$$\partial_i[f] \equiv 0.$$

Portanto, f é constante ao longo de cada componente conexa de $M - \overline{\mathcal{A}}$. Já que ao longo da fronteira desses conjuntos, $f \equiv 0$. Logo $f \equiv 0$ sobre M; logo pela proposição acima, M é totalmente geodésica.

□

Teorema 3.0.2 *(Teorema B da Introdução) Seja $M^n \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ hipersuperfície compacta e conexa de $\mathbb{S}^{n+1}$ com H_{r+1} = constante > 0, para algum $r = 0, \cdots, n-2$. Suponha que a imagem da aplicação de Gauss de M esteja contida num hemisfério fechado, $H_r \geq 0$ e a seguinte desigualdade vale*

$$H_1 H_r \geq H_{r+1}, \tag{3.12}$$

Então M é totalmente umbílica.

Prova: Pela proposição 2.0.2, temos para um $\alpha \in \mathbb{R}^{n+2}$ fixo, a função $f(p) = \langle N(p), \alpha\rangle$ satisfazendo

$$\int_M [(n-r-1)S_{r+1}S_1 - n(r+2)S_{r+2}]f dM = 0. \tag{3.13}$$

Mostraremos inicialmente que o integrando tem sinal fixo, para algum vetor $\alpha \in \mathbb{R}^{n+2}$. Já que a imagem da aplicação de Gauss de M, está contida num hemisfério fechado, existe um vetor $\alpha \in \mathbb{R}^{n+2}$ tal que

$$f(p) = \langle N(p), \alpha\rangle \geq 0 \ , \forall p \in M.$$

Afirmamos que se $H_1 H_r \geq H_{r+1}$, então $H_1 H_{r+1} \geq H_{r+2}$. De fato, por (1.7), tem-se que

$$H_r H_{r+2} \leq H_{r+1}^2 \leq H_r H_1 H_{r+1}. \tag{3.14}$$

Note que $H_r \neq 0$; caso contrário teremos $H_{r+1} = 0$, que é uma contradição. Já que, $H_r > 0$ e podemos dividir (3.14) por H_r, obtemos

$$H_1 H_{r+1} \geq H_{r+2}. \tag{3.15}$$

o que prova a afirmação. Então, por definição de H_i e (3.15), tem-se

$$\frac{S_1}{n}\frac{S_{r+1}}{\binom{n}{r+1}} \geq \frac{S_{r+2}}{\binom{n}{r+2}}.$$

Daí,

$$(n-r-1)S_1S_{r+1} - n(r+2)S_{r+2} \geq 0. \tag{3.16}$$

De (3.16) e o fato que $f \geq 0$ em M, temos

$$[(n-r-1)S_1S_{r+1} - n(r+2)S_{r+2}]f \geq 0.$$

o que mostra que o integrando tem sinal fixo.
Segue-se daí e (3.13) que

$$[(n-r-1)S_1S_{r+1} - n(r+2)S_{r+2}]f \equiv 0.$$

Se $f \equiv 0$, pela proposição anterior, concluímos que M é totalmente geodésica, e portanto $H_r = 0$ que é uma contradição. Suponhamos $\mathcal{B}$ um conjunto aberto não-vazio de M onde $f(p) > 0$,$\forall p \in M$. Assim, ao longo de $\mathcal{B}$, temos

$$(n-r-1)S_1S_{r+1} - n(r+2)S_{r+2} \equiv 0.$$

Isto é, vale a igualdade em (3.16). Equivalentemente, $H_1H_{r+1} = H_{r+2}$. Daí, em (3.14), temos

$$H_{r+2} \leq \frac{H_{r+1}^2}{H_r} \leq H_{r+2},$$

Donde,

$$\frac{H_{r+1}^2}{H_r} = H_{r+2} \Longrightarrow H_{r+1}^2 = H_rH_{r+2}.$$

Isto significa que vale também a igualdade em (1.7), já que esta desigualdade foi usada para obter (3.16). Portanto, todos os pontos de $\mathcal{B}$ são umbílicos. Por outro lado, $M - \overline{\mathcal{B}}$ também é um conjunto aberto de M. Afirmamos que $M - \overline{\mathcal{B}}$ é vazio. De fato, seja $x_0 \in M - \overline{\mathcal{B}}$. Então, já que $M - \overline{\mathcal{B}}$ é aberto, existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de x_0 contida em $M - \overline{\mathcal{B}}$ tal que $f(x) = 0$,$\forall x \in \mathcal{U}$, segue que $A \equiv 0$ em $\mathcal{U}$, que implica $H_r = 0$,$\forall r$, que é uma contradição, o que prova a afirmação. Assim, $M = (M - \overline{\mathcal{B}}) \cup \overline{\mathcal{B}} = \overline{\mathcal{B}}$, o que implica que $\mathcal{B}$ é denso em M, isto é, $\forall p \in M$, existe uma sequência $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ tal que

$$p_i \longrightarrow p$$

Já que $\mathcal{B}$ é uma subvariedade totalmente umbílica, então

$$\kappa_1(p_i) = \kappa_2(p_i) = \cdots = \kappa_n(p_i).$$

Sendo κ_i funções contínuas, temos

$$\begin{aligned} \kappa_1(p) &= \kappa_1(\lim p_i) \\ &= \lim \kappa_1(p_i) \\ &= \lim \kappa_n(p_i) \\ &= \kappa_n(\lim p_i) \\ &= \kappa_n(p). \end{aligned}$$

Isto mostra que $p \in \mathrm{int}\mathcal{B}$. Portanto, $\mathcal{B}$ é fechado. Já que é aberto, então é a variedade M.

□

Observação 3.0.3 *O teorema acima poderia ser provado da seguinte forma: Já que $\mathcal{B}$ é uma subvariedade totalmente umbílica de M, isto é, $\forall p \in \mathcal{B}$, temos*

$$\kappa_1(p) = \cdots = \kappa_n(p) = a(p).$$

onde os a(p) são contantes positivas. Podemos concluir que M tem um ponto elíptico e $S_r =$ constante > 0. Então, pela proposição 1.5.1, operador $\mathbb{L}_r$ é elíptico. Daí, $\mathbb{L}_r$ tem as propriedade da continuação única forte. Analisando os seguintes casos:

i) $f > 0$ *em* $\mathcal{B}$

ii) $f \equiv 0$ *em* $M - \overline{\mathcal{B}}$

Por (ii), $H_r \equiv 0$ em $M - \overline{\mathcal{B}}$ e como $H_r > 0$ em M, segue-se que apenas o caso (i) pode ocorrer, ou seja, $f > 0$ em $\mathcal{B}$. Pela propriedade da continuação única forte, segue-se que $f > 0$ em M, logo $M = \mathcal{B}$.

□

Corolário 3.0.1 *(Teorema C da Introdução) Seja M^n uma hipersuperfície compacta e orientável de $\mathbb{S}^{n+1}$ com curvatura escalar constante $H_2 \geq 0$. Se a imagem da aplicação de Gauss de M estiver sobre um hemisfério fechado de $\mathbb{S}^{n+1}$. No caso $H_2 = 0$, suponha também que H_1 não mude de sinal. Então M é totalmente umbílica.*

Prova: No caso $H_2 = 0$, temos pelo teorema 3.1.1, que M é totalmente geodésica. Para o caso $H_2 > 0$, a hipótese (3.2) no teorema 3.1.2 vale

$$H_1^2 \geq H_2.$$

O que é sempre verdade por (1.7). A desigualdade acima também diz que H_1 é diferente de zero sobre M. Pela orientabilidade de M, podemos ter $H_1 > 0$, então o resultado segue do teorema 3.1.2

□

Proposição 3.0.7 *Se $H_i \geq 0$ para todo $i \in \{1, \cdots, r-1\}$, então*

$$H_1 H_{i+1} \geq H_{i+2} \quad , \forall i \in \{1, \cdots, r-1\}. \tag{3.17}$$

Além disso,

$$(n-i-1) S_1 S_{i+1} - n(i+2) S_{i+2} \geq 0 \quad , \forall i \in \{0, 1, \cdots, r-1\}. \tag{3.18}$$

Prova: Faremos a prova por indução sobre i. De fato, fazendo $i = 1$ em (1.7), temos

$$H_0 H_2 \leq H_1^2.$$

Mas, $H_0 = 1$, obtemos

$$H_1^2 \geq H_0 H_2 = H_2.$$

Portanto, (3.17) vale para $i = 0$. Para $i = 1$, teremos $H_1 H_2 \geq H_3$. De fato, fazendo $i = 2$ em (1.7), temos

$$H_1 H_3 \leq H_2^2 \leq H_1^2 H_2.$$

Se $H_1 = 0 \Longrightarrow H_2 \leq 0$. Já que $H_2 \geq 0$, implica que $H_2 = 0$. Daí,

$$H_1 = H_2 = 0 \Rightarrow S_1 = S_2 = 0 \Rightarrow ||A||^2 = S_1^2 - 2S_2 = 0.$$

Ou seja,

$$A \equiv 0 \Longrightarrow \kappa_1 = \cdots = \kappa_n = 0.$$

Neste caso (3.17) vale. Se $H_1 > 0 \Rightarrow H_3 \leq H_1H_2 \Rightarrow H_1H_2 \geq H_3$. Suponha que seja vale para um certo $i = k-1$, isto é

$$H_1H_k \geq H_{k+1}.$$

Mostraremos que vale também para $i = k$, isto é

$$H_1H_{k+1} \geq H_{k+2}.$$

De fato, usando (1.7) e a hipótese de indução, temos

$$H_kH_{k+2} \leq H_{k+1}^2 \leq H_{k+1}H_1H_k.$$

Se $H_k = 0 \Rightarrow H_{k+1} \leq 0$. Já que $H_{k+1} \geq 0 \Rightarrow H_{k+1} = 0$. Então, temos igualdade em (1.7), que implica que $\kappa_k = 0$. Portanto, (3.17) vale neste caso. Se $H_k > 0 \Rightarrow H_{k+2} \leq H_{k+1}H_1$, isto implica completa a prova de (3.17). Então, por (3.17), tem-se:

$$\frac{S_1}{n}\frac{S_{i+1}}{\binom{n}{i+1}} \geq \frac{S_{i+2}}{\binom{n}{i+2}}.$$

Isto implica que

$$(n-i-1)S_1S_{i+1} - n(i+2)S_{i+2} \geq 0 \quad, \forall i \in \{1, \cdots, r-1\}.$$

o que completa a demonstração da proposição.

$\square$

Corolário 3.0.2 *Seja $M^n \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta e conexa de $\mathbb{S}^{n+1}$ com r-média curvatura constante positiva H_r, para algum $r = 1, \cdots, n-1$. Suponha que a imagem da aplicação de Gauss de M esteja contida num hemisfério fechado e $H_i \geq 0 \;, \forall i = 1, \cdots, r-1$. Então M é totalmente umbílica.*

Prova: Como $H_i \geq 0 \;, \forall i = 1, \cdots, r-1$. Então, pela proposição anterior, $H_1H_{i+1} \geq H_{i+2} \;, \forall i = 1, \cdots, r-1$. Daí, pelo teorema 3.0.2, temos que M é totalmente umbílica.

$\square$

Proposição 3.0.8 *Seja M^n uma variedade Riemanniana compacta conexa e $x : M^n \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma imersão isométrica. Se $H_r > 0$ e $x(M)$ está sobre um hemisfério aberto de $\mathbb{S}^{n+1}$, então $H_i > 0 \;, \forall i = 1, \cdots, r-1$.*

Para uma demonstração ver proposição 3.2 em [3].

Corolário 3.0.3 *Seja $x : M^n \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma hipersuperfície compacta e conexa de $\mathbb{S}^{n+1}$ com r-média curvatura constante positiva H_r, para algum $r = 1, \cdots, n-1$. Suponha que a imagem da aplicação de Gauss de M esteja contida num hemisfério fechado e $x(M)$ esteja contida num hemisfério aberto de $\mathbb{S}^{n+1}$. Então M é totalmente umbílica.*

Prova: Decorre da proposição anterior e o corolário 3.0.2.

□

Bibliográficas

Referências Bibliográficas

[1] Alencar, H., do Carmo, M., Colares, A. *Stable Hypersurfaces com Constant Scalar Curvature*, Math. Z. 213, 1993, 117-131.

[2] Alencar, H., Rosenberg, H., Santos, W. *On The Map of Hypersurfaces com Constant Scalar Curvature in Spheres*. Proc. of The American Math. Society. v. 132, $n^0$12, 2004, 3731-3739.

[3] Barbosa, J. L., Colares, A. *Stability of Hypersurfaces com r-Mean Curvature*, Annals of Global Analysis and Geometry., 15, 1997, 277-297.

[4] Carmo, Manfredo P. *Geometria Riemanniana*. Rio de Janeiro, Projeto Euclides, IMPA, 2^a edição, 1988.

[5] Espinoza, F. E. E. *Imersões Isométricas k-umbílicas em Formas Espaciais*, Tese de Doutorado, UFC, Fortaleza, Brasil, 2004.

[6] Garofalo, N., Lin, F. H., *Monotonicity Properties of Variational Integrals A_p Weights and Unique Continuation*, Indiana Univ. Math. J. 35,1986, 245-286.

[7] Hounie, J., Leite, M. L. *Two-Ended Hypersurfaces com Zero Scalar Curvature*.Indiana Univ. Math. J. 48, 1999, 867-882.

[8] Hard, G., Litlewood, J., Polya, G. *Inequalities*, 2^a edição, Cambridge Univ. Press, 1989.

[9] Nomizu, K., Smyth, B. *On The Gauss Mapping for Hypersurfaces of Constant Mean Curvature in the Sphere*. Math. Helv. 44, 1969, 484-490.

[10] Rosenberg, H. *Hypersurfaces of Constant Curvature in Space Forms*,Bull. Sc. Math., 2^a série, 117, 1993, 211-239.