



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

FERNANDO DE MENEZES BELCHIOR

CORREÇÕES RADIATIVAS NO MODELO BUMBLEBEE-STUECKELBERG

FORTALEZA

2021

FERNANDO DE MENEZES BELCHIOR

CORREÇÕES RADIATIVAS NO MODELO BUMBLEBEE-STUECKELBERG

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante.

FORTALEZA
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária

- B372c Belchior, Fernando de Menezes .
Correções radiativas no modelo Bumblebee-Stueckelberg / Fernando de Menezes Belchior. - 2021.
71 f. : il.
- Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Física, Fortaleza, 2021.
Orientação: Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante.
1. Modelo Bumblebee; 2. Campo de Stueckelberg; 3. Função de dois pontos; 4. Violação de Lorentz. I. Título.

CDD 530

FERNANDO DE MENEZES BELCHIOR

CORREÇÕES RADIATIVAS NO MODELO BUMBLEBEE-STUECKELBERG

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física. Área de Concentração: Física da Matéria Condensada.

Aprovada em 15/09/2021.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Manoel Messias Ferreira Júnior
Universidade Federal do Maranhão (UFMA)

A toda minha Família

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus pelo dom da vida.

Aos meus pais, Francisco das Chagas Belchior e Rosa de Menezes Belchior.

Ao meu orientador, Roberto Vinhaes Maluf Cavalcante, pelas discussões ao longo do mestrado.

Aos professores da banca, Carlos Alberto e Manoel Messias, pelas sugestões e correções desse trabalho.

Ao Laboratório de Simulação de Sistemas Coerentes-LASSCO e seus integrantes, por todo o conhecimento e incentivo proporcionado para minha formação e realização deste trabalho. Aos colegas do LASSCO, Alan, Barbara, Michel e José Fernandes.

Ao financiamento de bolsa dado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e a todos os funcionários do departamento de física.

RESUMO

A simetria de Lorentz tem um papel fundamental na construção da Relatividade Geral e Teoria Quântica de Campos. Todavia, a fim de compreender a física além do modelo padrão, os físicos têm considerado que a simetria de Lorentz pode ser violada em uma teoria mais fundamental. Nesse trabalho, iniciamos introduzindo o formalismo de integrais de trajetória e então falamos sobre a possibilidade de Violação de simetria de Lorentz e destacamos o mecanismo de violação espontânea proposto por Kosteletsky e Samuel. Feito isso, estudamos as correções radiativas a um loop em um modelo vetorial com violação espontânea da simetria de Lorentz, conhecido na literatura como modelo Bumblebee. Primeiro, consideramos o modelo Bumblebee com um potencial suave de auto interação, que é responsável pela violação espontânea de Lorentz. O espectro desse modelo exibe um modo não-massivo transversal, que é identificado como modo de Nambu-Goldstone, e um modo massivo longitudinal. Além da quebra da simetria de Lorentz, esse modelo também exibe violação da simetria de calibre. Calculamos a função de dois pontos empregando a prescrição PV e o resultado é não transversal, levando a um modo massivo excitado. A fim de restaurar a simetria de calibre, introduzimos o campo de Stueckelberg e calculamos a função de dois pontos. Nosso resultado também é não transversal.

Palavras-chave: Modelo Bumblebee; Campo de Stueckelberg; Função de dois pontos; Violação de Lorentz.

ABSTRACT

The Lorentz Symmetry plays a fundamental role in the building of General Relativity and Quantum Field Theory. However, in order to understand the Physics beyond Standard Model, the physicists have considered that the Lorentz symmetry could be violated in a fundamental theory. In this work, we start by introducing the Path integral formalism and then we talk about the possibility of Lorentz symmetry violation and study radiative corrections in a vector model with Spontaneous Lorentz violation, known in the literature as Bumblebee model. First, we consider the Bumblebee model with self interaction smooth potential, which is responsible for Spontaneous Lorentz violation. The spectrum of this model displays a transversal non massive mode, which is identified as Nambu-Goldstone, and a longitudinal massive mode. Besides the Lorentz symmetry, this model also exhibits gauge symmetry violation. We calculate the two point function by employing the PV prescription and the result is non transversal, leading to an excited massive mode. In order to restore the gauge symmetry, we introduce the Stueckelberg field and calculate the two point function. Our result is also non-transversal.

Keywords: Bumblebee model; Stueckelberg Field; Two point function; Lorentz violation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Diagrama um loop Polarização do vácuo na EDQ	14
Figura 2 – Possíveis trajetórias clássicas da partícula	16
Figura 3 – Diagrama tadpole modelo $\lambda\phi^4$	25
Figura 4 – Diagrama tadpole EQD escalar (gráfico a)	30
Figura 5 – Diagrama polarização do vácuo EQD escalar (gráfico b)	30
Figura 6 – Transformação de observador	36
Figura 7 – Transformação de partícula	36
Figura 8 – Representação para a densidade de energia para (a) Vácuo eletromagnético (b) campo escalar no Mecanismo de Higgs (c) campo vetorial no Mecanismo de Kostelecky e Samuel	40
Figura 9 – Diagrama tadpole Bumblebee puro (gráfico a)	47
Figura 10 – Diagrama um loop Bumblebee puro (gráfico b)	47
Figura 11 – Diagrama tadpole Bumblebee puro (gráfico a)	58
Figura 12 – Diagrama tadpole Bumblebee-Stueckelberg (gráfico b)	59
Figura 13 – Diagrama um loop Stueckelberg (gráfico c)	59
Figura 14 – Diagrama um loop Bumblebee puro (gráfico d)	60
Figura 15 – Diagrama um loop Bumblebee-Stueckelberg (gráfico e)	61

LISTA DE SÍMBOLOS

$\eta_{\mu\nu}$	Métrica do espaço de Minkowsky
ϕ	Campo escalar
Φ	Campo escalar carregado
ψ	Campo de Dirac
A^μ	Campo de Maxwell
B^μ	Campo Bumblebee
b^μ	Valor esperado no vácuo do Campo Bumblebee
β^μ	Flutuação do Campo Bumblebee
$Z[J]$	Funcional gerador das funções de Green completas
$W[J]$	Funcional gerador das funções de Green conexas
$\Gamma[\phi_c]$	Funcional gerador da função 1PI (Ação efetiva)
J	Fonte externa
ϕ_c	Campo clássico
$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$	Função de Green de n-pontos
$\Pi^{\mu\nu}$	Função de dois pontos de um campo vetorial (A^μ ou β^μ)
$D(k)$	Propagador do campo escalar
$S(k)$	Propagador do campo de Dirac
$\Delta(k)$	Propagador do campo vetorial
γ	Fator de Lorentz
$\Lambda_{\mathbf{v}}^\mu$	Transformação de Lorentz

LISTA DE SIGLAS

CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
TQC	Teoria Quântica de Campos
EDQ	Eletrodinâmica Quântica
VEV	Valor esperado no vácuo
MP	Modelo Padrão
MPE	Modelo Padrão Estendido
CFJ	Carrol-Field-Jackiw
VL	Violação de Lorentz

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	AÇÃO EFETIVA E FORMALISMO DE INTEGRAIS DE TRAJETÓRIA	15
2.1	Funcional Gerador	17
2.2	Teoria Livre	18
2.2.1	<i>Campo escalar</i>	18
2.2.2	<i>Campo de Dirac</i>	20
2.2.3	<i>Campo de Maxwell</i>	21
2.3	Interação: Abordagem perturbativa	23
2.4	Correções radiativas na Eletrodinâmica Quântica escalar	28
3	VIOLAÇÃO DA INVARIÂNCIA DE LORENTZ	32
3.1	Simetria de Lorentz e Simetria CPT	32
3.2	Transformação de observador e Transformação de partícula	35
3.3	Modelo Padrão Estendido	37
3.3.1	<i>Setor de Gauge</i>	37
3.3.2	<i>Setor de férmions</i>	38
3.4	Quebra espontânea: Mecanismo de Kostelecky e Samuel	39
4	MODELO BUMBLEBEE	42
4.1	Lagrangeana	42
4.2	Propagador do campo β_μ	43
4.3	Modos de propagação do campo β_μ	44
4.4	Correções à 1-loop	46
5	MODELO BUMBLEBEE COM O CAMPO DE STUECKELBERG	51
5.1	Procedimento de Stueckelberg	51
5.2	Propagadores	52
5.3	Relação de dispersão	53
5.4	Correções radiativas	55
6	CONCLUSÃO	63
	REFERÊNCIAS	64
	APÊNDICE A – MECANISMO DE HIGGS	67
	APÊNDICE B – CAMPO DE STUECKELBERG	69
	APÊNDICE C – GAUGE AXIAL E PRESCRIÇÃO PV	71

1 INTRODUÇÃO

A Natureza pode ser fundamentalmente descrita e compreendida em termos de simetrias de calibre e simetrias espaço-temporais, como a invariância de Lorentz que é um dos pilares da Relatividade especial e é contemplada pela Teoria Quântica de Campos, fornecendo o Modelo Padrão de partículas que descreve todas interações não-gravitacionais (eletromagnética, nuclear fraca e nuclear forte).

Apesar do Modelo Padrão (MP) ser uma teoria física bem testada e consolidada na comunidade científica, o mesmo possui lacunas como, por exemplo, falta de uma explicação consistente para a matéria escura e a massa dos neutrinos. Além disso, ainda não existe uma Teoria Quântica de gravidade, ou seja, uma conciliação entre o MP e a teoria da Relatividade geral, que descreve a interação gravitacional.

Nesse cenário, a possibilidade de quebra da invariância de Lorentz tem recebido atenção significativa em diversos trabalhos. Teorias com violação de simetria de Lorentz estão sob intensa investigação desde o trabalho seminal de Kostelecky e Samuel [1]. Contextos como Teoria de cordas [1], teorias não-comutativas [2], Horava Lifshitz [3] são exemplos onde a violação de lorentz pode ser observada. Esses estudos levaram ao desenvolvimento de um arcabouço teórico conhecido como Modelo Padrão Estendido (MPE) [4, 5]. O MPE é uma teoria de campos efetiva que contém os termos do MP e todos os termos possíveis que violam a simetria de Lorentz.

Como é conhecido na literatura, existem duas formas distintas de implementar a quebra de simetria de Lorentz. A primeira é a quebra explícita de simetria que ocorre quando um campo de fundo (background) é introduzido diretamente na lagrangiana da teoria, tal como ocorre no modelo Carrol-Field-Jackiw (CFJ) que consiste em um termo tipo Chern Simons¹ quadridimensional [6] com o acrescimo de um vetor constante à lagrangeana original de Chern Simons. A presença desse vetor constante leva à anisotropia, ou seja, o espaço tempo assume uma direção preferencial (direção do vetor constante). Além da simetria de Lorentz, o modelo CFJ também viola a simetria CPT². Em [7], Kostelecky e Mewes desenvolveram uma eletrodinâmica que viola a simetria de Lorentz, mas preserva a simetria CPT. Essas novas eletrodinâmicas trazem novos efeitos físicos no vácuo como, por exemplo, a birrefringência. A outra forma é a quebra espontânea de simetria, cuja principal motivação vem da Teoria das cordas onde campos vetoriais e tensoriais podem adquirir um valor esperado no vácuo diferente de

¹Termo topologicamente massivo no espaço tempo tridimensional.

²A simetria CPT consiste na operação conjunta e simultânea de três simetrias discretas: conjugação de carga (C), inversão espacial (P) e inversão temporal (T)

zero, levando a uma direção privilegiada no espaço-tempo.

O mecanismo de violação explícita de Lorentz é bem consistente quando estudado em espaço tempo flat. Entretanto, no setor gravitacional a questão torna-se mais complicada, pois a inclusão direta de parâmetros constantes quebra o difeomorfismo³ e as identidades de Bianchi, que são dois ingredientes fundamentais na construção da Relatividade Geral. Uma solução para esse problema é utilizar o mecanismo de violação espontânea, onde o vácuo da teoria é instável [8, 9]. Em especial, tal mecanismo é um conceito importante no estudo de interações fundamentais. Por exemplo, o mecanismo de Higgs [10], que leva em consideração a ideia de quebra espontânea de simetria, é responsável pela geração de massa para os campos de calibre.

No contexto de violação espontânea de simetria de Lorentz, existe um modelo vetorial conhecido na literatura como modelo Bumblebee, que foi introduzido pela primeira vez em [1], e tem sido investigado em vários contextos, como Buracos negros [11–14], Wormholes [15, 16], espalhamento de partículas [17], aspectos quânticos [18–21] e soluções Gödel [22, 23]. Esse modelo é o mais simples que exhibe quebra espontânea de Lorentz, onde tal violação é desencadeada por um campo vetorial que possui um valor esperado no vácuo diferente de zero.

Também é possível construir outro modelo com quebra espontânea de Lorentz considerando um campo tensorial antisimétrico conhecido como campo de Kalb Ramond [24–26]. Os modelos Bumblebee e Kalb Ramond são construídos com um termo cinético e um potencial que é responsável por desencadear o mecanismo de violação espontânea de Lorentz. O potencial pode assumir várias formas como potencial suave [18] multiplicador de Lagrange [27] e potencial não polinomial [28]. Esses modelos são caracterizados pelo aparecimento de um modo não massivo transversal que pode ser identificado como um modo de Nambu-Goldstone e um modo massivo longitudinal que surge da violação de Lorentz e não representa um modo físico propagante.

Nesse trabalho, iremos lidar apenas com o modelo Bumblebee e uma extensão onde o campo Bumblebee é acoplado ao campo de Stueckelberg. Tal acoplamento foi proposto em [21] a fim de quantizar a teoria e lidar com os problemas relacionados à instabilidades.

Apesar do modelo Bumblebee ter grande ênfase no setor gravitacional, ainda existem tópicos a serem trabalhados no espaço tempo flat, como correções radiativas. Tal tópico tem um grande desenvolvimento em modelos com violação explícita de Lorentz [29–33]. Entretanto, apenas [18] abordou esse tópico com violação espontânea de Lorentz, considerando o modelo Bumblebee em espaço tempo flat.

Correções radiativas podem ser entendidas como correções quânticas (além do nível

³Um difeomorfismo é uma transformação de partícula, nos quais os mapeamentos $x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu$ levam às transformações nos campos dinâmicos.

de árvore) advindas dos termos de interação de um dado modelo. Um exemplo bem conhecido é a correção ao propagador do fóton na Eletrodinâmica Quântica.

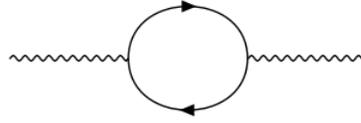


Figura 1: Diagrama um loop Polarização do vácuo na EDQ

O diagrama de Feynman acima corresponde à criação de um par (elétron-pósitron) que é aniquilado em seguida. Esse gráfico é conhecido como Tensor de polarização no vácuo. Nesse trabalho, abordaremos o tópico de correções radiativas considerando o modelo Bumblebee acoplado com o campo de Stueckelberg.

Esse trabalho está organizado da seguinte forma. No capítulo 2, apresentamos conceitos fundamentais de Teoria Quântica de Campos que serão utilizados ao longo desse trabalho. Fornecemos uma breve revisão sobre métodos funcionais e discutimos a Ação efetiva no contexto de teorias com interação.

No capítulo 3, fornecemos uma visão geral sobre a simetria de Lorentz e os mecanismos que levam a violação da mesma. Daremos atenção ao mecanismo de Kostecky e Samuel que serve de base para o desenvolvimento do modelo Bumblebee.

No capítulo 4, estudaremos aspectos do modelo Bumblebee em espaço-tempo plano. Obtemos o propagador para o campo β_μ que representa uma pequena flutuação em torno do valor esperado do vácuo do campo Bumblebee. Em seguida, estudamos os modos de propagação e mostramos que o modelo tem uma excitação não massiva transversal, que pode ser indentificada como um modo de Nambu-Goldstone, e uma excitação massiva de propagação longitudinal. Essa excitação massiva tem natureza não-física e via correções radiativas, verificamos se os termos de interação produzem correções para a massa. Por fim, mostramos que a função de dois pontos do campo β_μ não é transversal, ou seja, temos de fato um modo massivo excitado.

No capítulo 5, introduzimos o campo de Stueckelberg para restaurar a simetria de calibre. Nesse modelo, obtemos os propagadores para o campo β_μ e para o campo de Stueckelberg. Ainda, mostramos que é possível escolher um conjunto adequado de vetores que evitam instabilidades no modelo Bumblebee-Stueckelberg. Por fim, estudamos as correções radiativas no modelo Bumblebee-Stueckelberg. Como resultado, mostramos que a função de dois pontos do campo β_μ também não é transversal.

Nesse trabalho, adotaremos o sistema de unidades naturais $c = \hbar = 1$ e a métrica com a seguinte assinatura $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$

2 AÇÃO EFETIVA E FORMALISMO DE INTEGRAIS DE TRAJETÓRIA

O objetivo deste capítulo é apresentar uma introdução aos métodos funcionais no contexto de Teoria Quântica de Campos (TQC). Em relação ao Formalismo canônico, o Formalismo de integrais de trajetória tem a vantagem de ser invariante de Lorentz em todas as etapas. Na abordagem canônica, afim de quantizar o campo, deformamos a álgebra do campo ao promove-lo a operador que obedece certas regras de comutação, e que atua no espaço de Fock [34,35]. Em contrapartida, no Formalismo de Integrais de Trajetória, o campo permanece com a álgebra do campo clássico.

Esse Formalismo é uma ferramenta (quase) indispensável para estudar TQC e é utilizado para:

- calcular as funções de green de n-pontos $G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | \mathcal{T} \phi(x_1) \dots \phi(x_n) | 0 \rangle$
- demonstrar identidades quântica no contexto da renormalização, como as identidades de Ward
- demonstrar as equações do grupo de renormalização
- estudar correções quânticas (ação efetiva)
- quantizar teorias com vínculos (teorias de calibre)
- provar a equivalência no nível quântico de teorias de calibre (dualidade)

Tal Formalismo foi desenvolvido pelo físico Richard Feynman em 1948 [36], no contexto da mecânica quântica não-relativística. Até esse período, haviam duas Formulações da mecânica quântica: Formulação de Heisenberg [37] e Formulação de Schrodinger [38]. Ambos tinham suas raízes na formulação Hamiltoniana. A Formulação de Feynman, ao contrário das anteriores, era baseada no Formalismo Lagrangeano. As três formulações da Mecânica Quântica são equivalente.

Agora, vamos discutir um pouco sobre a Formulação do Feynman. Partindo da mecânica quântica não-relativística, onde a função de onda $\Psi(x, t)$ é dada por

$$\Psi(x, t) = \langle x, t | \Psi \rangle, \quad (2.1)$$

e um estado inicial $\Psi(x_i, t_i)$ é relacionado com um estado final $\Psi(x_f, t_f)$ da seguinte forma

$$\langle x_f, t_f | \Psi \rangle = \int dx_i \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle \langle x_i, t_i | \Psi \rangle, \quad (2.2)$$

onde o kernel dessa integral é a chamada de amplitude de probabilidade de transição entre o estado inicial e o estado final, e é onde está a informação sobre a evolução temporal da partícula. Então, para encontrar o estado final, precisamos calcular essa amplitude de transição. O problema é que, para muitos casos, esse não é um problema trivial.

A ideia do Feynman é dividir a trajetória da partícula em várias etapas com intervalos de tempos ϵ , ou seja, para evoluir do estado inicial ao estado final, a partícula passa por vários estados intermediários separados por um intervalo de tempo ϵ . Assim, a amplitude de transição pode ser escrita

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \int dx_{N-1} \dots dx_2 dx_1 \langle x_f, t_f | x_{N-1}, t_{N-1} \rangle \dots \langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle \langle x_1, t_1 | x_i, t_i \rangle, \quad (2.3)$$

de tal forma que os estados intermediários podem ser escritos como

$$\langle x_{n+1}, t_{n+1} | x_n, t_n \rangle = \langle x_{n+1} | e^{iH\epsilon/\hbar} | x_n \rangle, \quad (2.4)$$

ou no espaço dos momentos

$$\langle x_{n+1}, t_{n+1} | x_n, t_n \rangle = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{ip_n(x_{n+1}-x_n)/\hbar} e^{iH\epsilon/\hbar}. \quad (2.5)$$

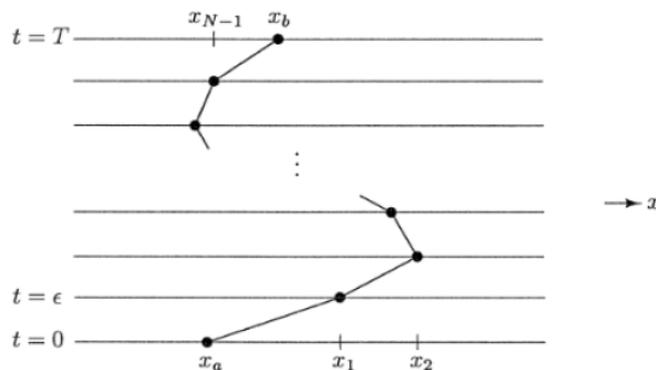


Figura 2: Possíveis trajetórias clássicas da partícula

O próximo passo consiste em somar sobre todas as trajetórias possíveis da partícula, assim a amplitude de transição ganha uma fase que é proporcional a ação clássica da partícula

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^{N-1} dx_n \int \prod_{m=0}^{N-1} \frac{dp_m}{2\pi\hbar} \exp \left[\frac{i\epsilon}{\hbar} \sum_{n=0}^{N-1} \left(p_n \frac{x_{n+1} - x_n}{\epsilon} - H \right) \right]. \quad (2.6)$$

Podemos definir os seguintes elementos de integração

$$\mathcal{D}x \equiv \prod_{n=1}^{N-1} dx_n, \quad (2.7)$$

$$\mathcal{D}p \equiv \prod_{m=0}^{N-1} \frac{dp_m}{2\pi\hbar}, \quad (2.8)$$

e passando (2.6) para o caso contínuo $N \rightarrow \infty$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle &= \int \mathcal{D}x \mathcal{D}p \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int dt \left(p \frac{dx}{dt} - H \right) \right] \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}x \exp \left[\frac{i}{\hbar} \mathcal{S} \right], \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde o elemento de integração $\mathcal{D}x$ significa que estamos somando sobre todas as configurações clássicas da partícula. A constante \mathcal{N} é uma constante de normalização e está relacionada com o caminho da partícula. Nessa próxima seção, vamos estender esse formalismo para teoria de campos.

2.1 Funcional Gerador

Nosso ponto de partida é o funcional gerador do campo escalar real massivo [34, 35, 39–41], que é definido como

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + J\phi \right) \right], \quad (2.10)$$

onde $Z[J] = \langle 0|0 \rangle_J$ é a amplitude vácuo-vácuo na presença de uma fonte J . Nesse caso, permitimos um acoplamento mínimo entre a fonte e o campo escalar. Quando essa fonte é zero, o funcional gerador deve ser normalizado, ou seja, $\langle 0|0 \rangle = 1$. A integral sobre o elemento de integração $\mathcal{D}\phi$ significa dizer que estamos somando sobre todas as configurações de campos clássicos possíveis. Com isso, a constante de normalização é dada por

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \right]}. \quad (2.11)$$

Além disso, podemos expressar o valor esperado no vácuo do produto de campos da seguinte forma

$$\langle 0 | \mathcal{T} \phi(x_1) \dots \phi(x_n) | 0 \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi [\phi(x_1) \dots \phi(x_n)] \exp \left[i \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + J\phi \right) \right] \quad (2.12)$$

Por outro lado, o funcional gerador (2.10) também pode ser expresso em um somatório que contém as funções de Green de n-pontos

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \dots J(x_n), \quad (2.13)$$

onde

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | \mathcal{T} \phi(x_1) \dots \phi(x_n) | 0 \rangle. \quad (2.14)$$

Agora, vamos definir a chamada derivada funcional de um dado funcional $F[f(y)]$

$$\frac{\delta F[f(y)]}{\delta f(x)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F[f(y) + \varepsilon \delta(x-y)] - F[f(y)]}{\varepsilon}, \quad (2.15)$$

e aplicando n derivadas funcionais em (2.13), obtemos a seguinte relação entre o funcional gerador e as funções de green de n-pontos

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = (-i)^n \frac{\delta^{(n)} Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Bigg|_{J=0}. \quad (2.16)$$

2.2 Teoria Livre

Nesta seção vamos quantizar e mostrar como calcular as funções de Green para teoria livre do campo escalar, campo de Dirac e campo de Maxwell através do Formalismo de Integrais de Trajetória.

2.2.1 Campo escalar

Com o intuito de calcular as funções de Green, vamos reescrever o funcional gerador em termos da função de Green da equação de Klein-Gordon. Então, após integração por partes no campo ϕ , o funcional (2.10) é lido como

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -i \left[\int d^4x \frac{1}{2} \phi (\square + m^2) \phi - J\phi \right] \right\}. \quad (2.17)$$

Aqui é conveniente definir o operador de onda $M = \square + m^2$, de tal forma que (2.17) é dada por

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-i \left(\int d^4x \frac{1}{2} \phi M \phi - J\phi \right) \right]. \quad (2.18)$$

Agora, vamos considerar o seguinte shift no campo $\phi \rightarrow \phi + M^{-1}J$. Nesse caso, o elemento de integração não muda, ou seja, $\mathcal{D}\phi \rightarrow \mathcal{D}\phi$. Então, abrindo a expressão (2.18) temos

$$\begin{aligned} Z[J] &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x \left(\frac{1}{2} \phi M \phi - \frac{1}{2} J M^{-1} J \right) \right] \\ &= \exp \left[\frac{i}{2} \int d^4x J M^{-1} J \right] \underbrace{\mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x \frac{1}{2} \phi M \phi \right]}_1 \\ &= \exp \left[\frac{i}{2} \int d^4x J M^{-1} J \right]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

A expressão (2.19) pode ser modificada reescrevendo $(M^{-1}J)(x)$ como segue

$$\begin{aligned} (M^{-1}J)(x) &= \int d^4y \langle x | M^{-1} J | y \rangle \\ &= \int d^4y \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \langle x | M^{-1} | k \rangle \langle k | J | y \rangle \\ &= \int d^4y \frac{d^4k}{(2\pi)^4} M^{-1}(k) J(y) \langle x | k \rangle \langle k | y \rangle, \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde definimos

$$M^{-1}(k) = \frac{-1}{k^2 - m^2}$$

e lembrando que $\langle x | k \rangle = e^{-ix \cdot k}$ e $\langle y | k \rangle = e^{iy \cdot k}$, podemos escrever (2.20) na base dos momentos

$$(M^{-1}J)(x) = -i \int d^4y \left[\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} e^{-i(x-y) \cdot k} \right] J(y), \quad (2.21)$$

que, de forma compactada, torna-se

$$(M^{-1}J)(x) = - \int d^4y D(x-y) J(y), \quad (2.22)$$

onde $D(x-y)$ é a solução da equação

$$(\square + m^2)D(x-y) = -i\delta(x-y). \quad (2.23)$$

Logo, substituindo (2.22) em (2.19), obtemos

$$Z[J] = \exp \left[\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) D(x-y) J(y) \right]. \quad (2.24)$$

Uma vez escrito o funcional apenas em termos da corrente J e de $D(x-y)$, podemos calcular as funções de Green. A expressão (2.16) para $n=2$ diz que a função de 2-ponto é

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = (-i)^2 \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_2)} \Big|_{J=0}. \quad (2.25)$$

Partindo de (2.15), é possível mostrar que derivadas funcionais possuem as mesmas propriedades de uma derivada ordinária. Além disso, temos a seguinte propriedade:

$$\frac{\delta J(x)}{\delta J(x_1)} = \delta^{(4)}(x - x_1). \quad (2.26)$$

Então, aplicando essas propriedades no funcional gerador, temos que a função de 2-ponto coincide com a função de Green da equação, ou seja

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = D(x_1 - x_2), \quad (2.27)$$

e assim, o propagador do campo escalar no espaço dos momenta fica

$$D_F(k) = \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (2.28)$$

A função de 4-ponto, por outro lado, é dada por

$$\begin{aligned} G^{(4)}(x_1, \dots, x_n) &= (-i)^4 \frac{\delta^{(4)} Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_4)} \Big|_{J=0} \\ &= \Delta(x_1 - x_2) \Delta(x_3 - x_4) + \Delta(x_1 - x_3) \Delta(x_2 - x_4) + \Delta(x_1 - x_4) \Delta(x_2 - x_3), \end{aligned} \quad (2.29)$$

que está de acordo com o teorema de Wick definido no formalismo canônico [35].

2.2.2 Campo de Dirac

Agora vamos definir um funcional gerador para o campo de Dirac

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[i \int d^4x \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta \right], \quad (2.30)$$

onde η e $\bar{\eta}$ representam fontes externas que são acopladas aos campos $\bar{\psi}$ e ψ , respectivamente. Novamente, definimos o operador de onda $M = i\gamma^\mu \partial_\mu - m$. Agora, considerando o seguinte shift:

$$\psi \rightarrow \psi - \bar{\eta} M^{-1}, \quad (2.31)$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} - M^{-1} \eta, \quad (2.32)$$

e substituindo em (2.30), obtemos

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[i \int d^4x \bar{\psi} M \psi - \bar{\eta} M^{-1} \eta \right]$$

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \exp \left[-i \int d^4x \bar{\eta} M^{-1} \eta \right]. \quad (2.33)$$

Seguindo o mesmo procedimento do campo escalar ($M^{-1}\eta$) é dada por

$$(M^{-1}\eta)(x) = \int d^4y S(x-y)\eta(y), \quad (2.34)$$

onde $S(x-y)$ satisfaz

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)S(x-y) = i\delta(x-y). \quad (2.35)$$

Logo o funcional (2.30) torna-se

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \exp \left[-i \int d^4x d^4y \bar{\eta}(x) S(x-y) \eta(y) \right]. \quad (2.36)$$

A função de Green de dois pontos para o campo de Dirac é

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = (-i)^2 \frac{\delta}{\delta \eta(x_2)} \frac{\delta Z[J]}{\delta \bar{\eta}(x_1)} \Big|_{\eta, \bar{\eta}=0}$$

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = S(x_1 - x_2). \quad (2.37)$$

Logo o propagador do campo de Dirac no espaço dos momenta é dado por

$$S(k) = \frac{i}{\not{k} - m}. \quad (2.38)$$

2.2.3 Campo de Maxwell

O campo de Maxwell possui simetria de gauge que dificulta definir um funcional gerador já que o elemento de intergração $\mathcal{D}A_\mu$ leva a ambiguidade na teoria. A fim de contornar esse problema, faz-se necessário a introdução de um termo de fixação de gauge $-\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2$. O Funcional gerador bem definido para esse campo é dado por

$$Z[J^\mu] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A_\mu \exp \left\{ i \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 - A_\mu J^\mu \right] \right\}, \quad (2.39)$$

que integrando por partes torna-se

$$Z[J^\mu] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A_\mu \exp \left[i \int d^4x \left(\frac{1}{2} A_\mu \mathcal{O}^{\mu\nu} A_\nu - A_\mu J^\mu \right) \right], \quad (2.40)$$

onde definimos o operador de onda

$$\mathcal{O}^{\mu\nu} = \square\eta^{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\mu \partial^\nu. \quad (2.41)$$

De forma analoga ao campo escalar e campo de Dirac, o funcional pode ser escrito

$$Z[J^\mu] = \exp \left[\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J^\mu(x) \Delta_{\mu\nu}(x-y) J^\nu(y) \right], \quad (2.42)$$

onde $\Delta_{\mu\nu}(x-y)$ satisfaz a seguinte equação

$$\mathcal{O}^{\mu\nu} \Delta_{\nu\rho}(x-y) = i\delta_\rho^\mu \delta^{(4)}(x-y), \quad (2.43)$$

que no espaço dos momenta torna-se

$$\mathcal{O}^{\mu\nu}(k) \Delta_{\nu\rho}(k) = i\delta_\rho^\mu, \quad (2.44)$$

onde usamos as seguintes transformadas de Fourier

$$\Delta_{\nu\rho}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \Delta_{\nu\rho}(k), \quad (2.45)$$

$$\delta^{(4)}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)}, \quad (2.46)$$

de tal forma que o operador bilinear (2.41) é dado por

$$\mathcal{O}^{\mu\nu}(k) = -k^2 \eta^{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k^\mu k^\nu \quad (2.47)$$

Por fim, devemos inverter tensorialmente a equação (2.44). Nesse sentido, apresentamos um ansatz contendo a métrica e produto entre os momenta, ou seja,

$$\Delta_{\nu\rho}(k) = A\eta_{\nu\rho} + Bk_\nu k_\rho. \quad (2.48)$$

Logo, substituindo (2.47) e (2.48) em (2.44) e resolvendo o sistema de equação, obtemos o seguinte propagador para o campo A_μ

$$\Delta_{\nu\rho}(k) = -\frac{i}{k^2} \left[\eta_{\nu\rho} - (1 - \xi) \frac{k_\nu k_\rho}{k^2} \right]. \quad (2.49)$$

O propagador (2.47) possui um polo não massivo $k^2 = 0$ que representa uma propagação transversal. Além disso, tal propagador é gauge-dependente, ou seja, precisamos de uma escolha adequada para ξ de forma a obter informações físicas acerca desse propagador. Uma escolha

possível é $\xi = 1$, também conhecido como gauge de Feynman, no qual (2.47) torna-se

$$\Delta_{\nu\rho}(k) = -\frac{i}{k^2}\eta_{\nu\rho}. \quad (2.50)$$

Utilizaremos o propagador (2.48) para calcular a auto energia do campo A_μ à 1-loop na eletrodinâmica quântica escalar. Outra escolha é $\xi = 1$, também conhecido como gauge de Landau, onde (2.47) é dado por

$$\Delta_{\nu\rho}(k) = -\frac{i}{k^2}\left(\eta_{\nu\rho} - \frac{k_\nu k_\rho}{k^2}\right), \quad (2.51)$$

que é caracterizado pela condição de transversalidade. Assim como campo escalar e campo de Dirac, a função de 2-pontos coincide com o propagador

$$\begin{aligned} G_{\rho\sigma}^{(2)}(x_1, x_2) &= (-i)^2 \frac{\delta}{\delta J^\rho(x_1)} \frac{\delta Z[J]}{\delta J^\sigma(x_2)} \Big|_{J=0} \\ &= \Delta_{\rho\sigma}(x_1 - x_2). \end{aligned} \quad (2.52)$$

2.3 Interação: Abordagem perturbativa

Nesta seção, vamos estudar o formalismo, que já foi apresentado, agora no contexto de teorias com interação. Considerando uma interação do tipo $\frac{\lambda}{4!}\phi^4$, temos a seguinte equação de movimento

$$(\square + m^2)\phi = -\frac{\lambda}{6}\phi^3. \quad (2.53)$$

A equação (2.53) é não linear e não possui uma solução exata. Nesse caso, precisamos de algum procedimento com validade física. Assim, aparece os métodos perturbativos (baseado na mecânica quântica) para tratar esse problema. Para fazer cálculos perturbativos, temos duas maneiras que podem ser derivadas usando o formalismo de integrais de trajetória: fórmula de Gell Man-Low e cálculos diretos no funcional gerador.

O formalismo de integrais de trajetória permite obter a fórmula de Gell Man-Low de maneira direta. Então, seja o funcional gerador, agora escrito com um termo de interação,

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp\left(i \int d^4x \mathcal{L}_{int}\right) \exp\left(i \int d^4x \mathcal{L}_{free} + J\phi\right), \quad (2.54)$$

onde \mathcal{L}_{free} é a lagrangeana livre e \mathcal{L}_{int} é a lagrangeana de interação. Agora, o valor esperado no vácuo do ordenamento temporal do campo pode ser escrito, usando a expressão (2.12), como

$$\begin{aligned} \langle 0 | \mathcal{T} \phi(x_1) \dots \phi(x_n) | 0 \rangle &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi [\phi(x_1) \dots \phi(x_n)] \exp \left(i \int d^4x \mathcal{L}_{int} \right) \\ &\exp \left[i \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + J\phi \right) \right], \end{aligned} \quad (2.55)$$

que pode ser reescrita

$$\langle 0 | \mathcal{T} \phi(x_1) \dots \phi(x_n) | 0 \rangle = \frac{{}^0 \langle 0 | \mathcal{T} \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \exp(i \int d^4x \mathcal{L}_{int}) | 0 \rangle^0}{{}^0 \langle 0 | \exp(i \int d^4x \mathcal{L}_{int}) | 0 \rangle^0}. \quad (2.56)$$

A fórmula de Gell Man-Low (2.56) é o ponto central para estudar cálculos perturbativos. Como é conhecido no formalismo canônico, essa fórmula consiste em relacionar o valor esperado no vácuo do ordenamento temporal do campo da teoria com interação com o valor esperado no vácuo do ordenamento temporal do campo da teoria livre.

Uma abordagem alternativa é realizar os cálculos diretamente do funcional gerador. Para esse proposito, devemos fazer a seguinte derivada funcional

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}_{free} + J\phi) \right] = i\phi \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}_{free} + J\phi) \right], \quad (2.57)$$

de tal forma podemos considerar a seguinte associação

$$\phi \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)}, \quad (2.58)$$

e então podemos escrever

$$Z[J] = \mathcal{N}_i \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_{int} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \right] \mathcal{N}_f \int \mathcal{D}\phi \exp \left(i \int d^4x \mathcal{L}_{free} + J\phi \right), \quad (2.59)$$

ou

$$Z[J] = \frac{\exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_{int} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \right] Z_0[J]}{\exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_{int} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \right] Z_0[J] \Big|_{J=0}}, \quad (2.60)$$

onde $Z_0[J]$ representa o funcional gerador da teoria livre. Agora podemos expandir a exponencial em ordem de λ . Em primeira ordem, obtemos

$$Z[J] = \frac{\left[1 + i \int d^4x \mathcal{L}_{int} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) + \dots \right] Z_0[J]}{\left[1 + i \int d^4x \mathcal{L}_{int} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) + \dots \right] Z_0[J] \Big|_{J=0}}, \quad (2.61)$$

e escolhendo a interação $\mathcal{L}_{int} = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4$

$$Z[J] = \frac{\left[1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4 + \dots\right] Z_0[J]}{\left[1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4x \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^4 + \dots\right] Z_0[J] \Big|_{J=0}}. \quad (2.62)$$

Calculando as derivadas funcionais, o numerador dessa expressão fica

$$\left\{1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4z \left(3i[\Delta(0)]^2 + 6\Delta(0) \left[\int d^4x \Delta(z-x)J(x)\right]^2 + \left[\int d^4x \Delta(z-x)J(x)\right]^4\right) + \right\} Z_0[J], \quad (2.63)$$

enquanto o denominador é dado por

$$\left\{1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4z (3i[\Delta(0)]^2) + \right\}. \quad (2.64)$$

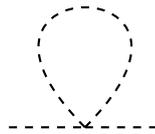
Esse termo é responsável por eliminar as bolhas de vácuo, ou seja, ela vai normalizar o funcional gerador. Assim nosso funcional gerador fica

$$Z[J] = \left\{1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4z \left(6\Delta(0) \left[\int d^4x \Delta(z-x)J(x)\right]^2 + \left[\int d^4x \Delta(z-x)J(x)\right]^4\right) + \right\} Z_0[J]. \quad (2.65)$$

De posse da expressão acima, podemos então calcular as funções de Green. A função de 2-pontos é dada por

$$\begin{aligned} G^{(2)}(x_1, x_2) &= (-i)^2 \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_2)} \Big|_{J=0} \\ &= \Delta(x_1 - x_2) - \frac{i\lambda}{2} \Delta(0) \int d^4z \Delta(z-x_1) \Delta(z-x_2), \end{aligned} \quad (2.66)$$

que consiste do propagador da teoria livre do campo escalar mais uma correção que pode ser representado diagramaticamente da seguinte forma



$$(2.67)$$

Figura 3: Diagrama tadpole modelo $\lambda\phi^4$

A expressão 2.50 corresponde ao mesmo resultado obtido usando a formula de Gell Man-Low. Nesse caso, o fator de simetria aparece naturalmente. Agora, podemos escrever a

função de green no espaço dos momenta, onde a parcela correspondente a interação é dada por

$$\frac{\lambda}{2}\Delta(0) \int d^4x \Delta(z-x_1)\Delta(z-x_2) = \frac{\lambda}{2}\Delta(0) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x_1-x_2)}}{(p^2-m^2)^2}, \quad (2.68)$$

de tal forma que (2.65) torna-se

$$G^{(2)}(x_1-x_2) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ip(x_1-x_2)}}{p^2-m^2} \left[1 - \frac{\frac{\lambda}{2}\lambda\Delta(0)}{p^2-m^2} \right]. \quad (2.69)$$

Vamos usar a seguinte aproximação

$$\left[1 + \frac{\frac{\lambda}{2}\lambda\Delta(0)}{p^2-m^2} \right]^{-1} = \left[1 - \frac{\frac{\lambda}{2}\lambda\Delta(0)}{p^2-m^2} \right], \quad (2.70)$$

para então escrever função de 2-pontos como

$$G^{(2)}(x_1-x_2) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ip(x_1-x_2)}}{p^2-m_f^2}, \quad (2.71)$$

onde $m_f = m^2 + \frac{\lambda}{2}\Delta(0)$ é a massa física, ou seja, o termo extra que aparece na função de 2-pontos é uma correção quântica na massa do campo. Eliminando as pernas externas, ficamos com a seguinte integral

$$I = -\frac{i\lambda}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2-m^2}, \quad (2.72)$$

que é uma integral com divergência quadrática. Nesse caso, precisaríamos fazer uma regularização dimensional e usar um esquema de renormalização para eliminar essa divergência.

Agora podemos calcular a função de 4-pontos e encontrar o vertice de interação da teoria $\lambda\phi^4$

$$\begin{aligned} G^{(4)}(x_1, \dots, x_n) &= (-i)^4 \frac{\delta^{(4)}Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_4)} \Big|_{J=0} \\ &= -i\lambda \int d^4x \Delta(x_1-z)\Delta(x_2-z)\Delta(x_3-z)\Delta(x_4-z). \end{aligned} \quad (2.73)$$

Em ordens mais altas de λ , vão aparecer gráficos desconexos. Nesse caso, é conveniente definir um novo funcional gerador $W[J]$ que será o gerador das funções de green conexas. Ele é definido como

$$Z[J] = \exp iW[J],$$

$$W[J] = -i \ln Z[J]. \quad (2.74)$$

De maneira análoga ao funcional $Z[J]$, podemos escrever o funcional $W[J]$ como sendo

$$W[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n-1}}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n G_{con}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \dots J(x_n), \quad (2.75)$$

onde $G_{con}^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ é a função de Green conexa que é escrita

$$G_{con}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = (-i)^{n-1} \left. \frac{\delta^{(n)} W[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \right|_{J=0}. \quad (2.76)$$

Em primeira ordem de λ , a função de Green conexa coincide com a função de Green do funcional (2.65). Então, no espaço dos momentos, obtemos

$$G_{con}^{(2)}(p) = \frac{i}{p^2 - m_f^2}. \quad (2.77)$$

Além disso, um outro funcional gerador que é de extrema importância para a TQC é a ação efetiva, que é o funcional gerador das funções 1PI (one-particle-irreducible), que são as funções de green irredutíveis a uma partícula. Esse funcional é definido da seguinte forma

$$\Gamma[\phi] = W[J] - \int d^4z J(z) \phi(z). \quad (2.78)$$

Essa expressão diz que a ação efetiva pode ser calculada por uma transformada de legandre do funcional $W[J]$. Agora, calculando a derivada funcional de (2.78) em relação ao campo

$$\frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x)} = \frac{\delta W[J]}{\delta \phi(x)} - \int d^4z \frac{\delta J(z)}{\delta \phi(x)} \phi(z) - \int d^4z J(z) \frac{\delta \phi(z)}{\delta \phi(x)}, \quad (2.79)$$

e de $W[J]$

$$\frac{\delta W[J]}{\delta \phi(x)} = \int d^4z \frac{\delta W[J]}{\delta J(z)} \frac{\delta J(z)}{\delta \phi(x)}. \quad (2.80)$$

Agora, definindo o campo clássico como

$$\phi_c(z) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(z)}, \quad (2.81)$$

e assim temos a seguinte relação

$$J(x) = -\frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x)}. \quad (2.82)$$

Podemos definir o seguinte

$$\Gamma[\phi] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \phi(x_1) \dots \phi(x_n), \quad (2.83)$$

onde

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \left. \frac{\delta^{(n)} \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x_1) \dots \delta \phi(x_n)} \right|_{\phi=0}, \quad (2.84)$$

é a função de green 1PI e está relacionada com a função conexa da seguinte maneira.

$$G_{con}^{(2)}(p) \Gamma^{(2)}(p) = i, \quad (2.85)$$

logo

$$\Gamma^{(2)}(p) = p^2 - m_f^2. \quad (2.86)$$

A ação efetiva é uma ferramenta fundamental para a Teoria Quântica de Campos. Fisicamente, a ação efetiva (ou ação quântica) consiste na ação clássica acrescida de todas as correções quânticas (em todas as ordens) possíveis.

2.4 Correções radiativas na Eletrodinâmica Quântica escalar

Nessa seção, iremos estudar correções radiativas à 1-loop para a função de dois pontos do campo A_μ na Eletrodinâmica Quântica escalar. Nosso ponto de partida é analisar partículas escalares carregadas que são descritas pela seguinte Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi, \quad (2.87)$$

onde m é a massa da partícula carregada de spin-0. Essa Lagrangiana é invariante sob a seguinte transformação local $\Phi'(x) = e^{i\theta(x)} \Phi(x)$, onde $\theta(x)$ é um parâmetro de transformação que é uma função real. Por outro lado, partículas escalares carregadas minimamente acopladas ao campo eletromagnético são descritas pela Eletrodinâmica Quântica (EDQ) escalar, cuja lagrangiana é dada por

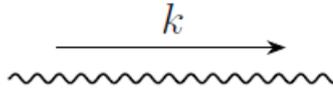
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \overline{\nabla}_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi, \quad (2.88)$$

onde ∇_μ é a derivada covariante, definida como $\nabla_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$, que é responsável pelo acoplamento entre o campo A_μ e o campo ϕ . O campo A_μ possui simetria de gauge, logo é transformado da seguinte forma

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \theta. \quad (2.89)$$

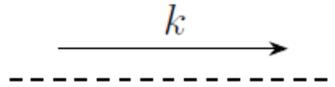
Usando o Formalismo de integrais de trajetória discutidos anteriormente, podemos extrair as regras de Feynman da EDQ escalar no gauge de Feynman ($\xi = 0$) que estão sumari- zadas abaixo

- Propagador do campo A_μ



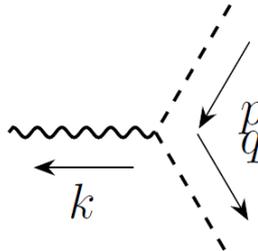
$$\Delta_F^{\mu\nu}(k) = -\frac{i}{k^2}\eta^{\mu\nu}, \quad (2.90)$$

- Propagador do campo Φ



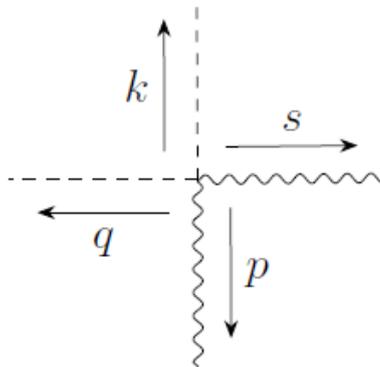
$$D(k) = \frac{i}{k^2 - m^2}, \quad (2.91)$$

- Um campo A_μ trocando dois campos Φ



$$V_1^\alpha(p, q) = -ie\eta^{\alpha\mu}(p_\mu - q_\mu), \quad (2.92)$$

- Dois campos A_μ trocando dois campos Φ



$$V_2^{\alpha\beta}(p, q) = 2ie^2\eta^{\alpha\beta}. \quad (2.93)$$

À 1-loop, existem dois gráficos de Feynman que contribuem para a auto energia (ou função de dois pontos) do campo A_μ . Portanto, escrevemos a auto energia $\Pi^{\mu\nu}$ como sendo

$$\Pi^{\mu\nu} = \Pi_a^{\mu\nu} + \Pi_b^{\mu\nu}, \quad (2.94)$$

onde $\Pi_a^{\mu\nu}$ e $\Pi_b^{\mu\nu}$ representam as amplitudes seguintes gráficos de Feynman.

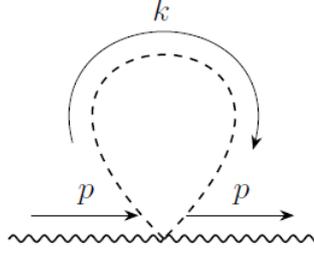


Figura 4: Diagrama tadpole EQD escalar (gráfico a)

A amplitude do gráfico a é

$$\begin{aligned} \Pi_a^{\mu\nu} &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} V_2^{\mu\nu} D(k) \\ &= 2ie^2 \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\eta^{\mu\nu}}{k^2 - m^2}. \end{aligned} \quad (2.95)$$

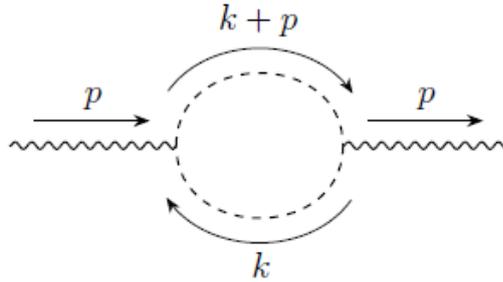


Figura 5: Diagrama polarização do vácuo EQD escalar (gráfico b)

A amplitude do gráfico b é

$$\begin{aligned} \Pi_b^{\mu\nu} &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} V_1^\mu D(k) V_1^\nu D(k+p) \\ &= ie^2 \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(2k^\mu - p^\mu)(2k^\nu - p^\nu)}{(k^2 - m^2)[(k+p)^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Essas amplitudes podem ser calculadas empregando a regularização dimensional. Usando as

integrais tabeladas em [40] e somando as amplitudes, obtemos a seguinte expressão

$$\Pi^{\mu\nu}(p) = \frac{e^2}{48\pi^2} (p^\mu p^\nu - p^2 \eta^{\mu\nu}) \left(\frac{1}{\varepsilon} + \ln \frac{4\pi\mu^2}{\lambda^2} \right). \quad (2.97)$$

É fácil verifica que a auto energia do campo A_μ (2.97) é transversal, ou seja, $p_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0$. O primeiro termo da expressão fornece a parte divergente no ultravioleta, enquanto o segundo termo é a parte finita. O propagador geral do fóton, ou seja, em todas as ordens da constante de acoplamento é dado por

$$\langle 0|TA^\mu(x)A^\nu(y)|0\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-y)} \Delta^{\mu\nu}(k) \quad (2.98)$$

A expressão (2.97) fornece uma correção ao propagador livre do fóton (2.90), de tal forma

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu}(k) &= -\frac{i\eta^{\mu\nu}}{k^2} + \frac{i\eta^{\mu\alpha}}{k^2} \Pi_{\alpha\beta} \frac{i\eta^{\beta\nu}}{k^2} + \mathcal{O} \\ &= \frac{i\left(\eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right)}{1 - \Pi(k)}, \end{aligned} \quad (2.99)$$

onde definimos

$$\Pi(k) = \frac{e^2}{48\pi^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \ln \frac{4\pi\mu^2}{\lambda^2} \right). \quad (2.100)$$

A expressão (2.99) mostra que o fóton continua com um polo $k^2 = 0$ (partícula sem massa), mesmo após correções radiativas.

3 VIOLAÇÃO DA INVARIÂNCIA DE LORENTZ

Nesse capítulo falaremos sobre a simetria de Lorentz e a possibilidade de violação da mesma. Destacaremos os setores de gauge e férmions do Modelo Padrão Estendido. Por fim, mostramos como funciona o mecanismo de violação espontânea de Lorentz proposto por Kostelecky e Samuel.

3.1 Simetria de Lorentz e Simetria CPT

Em meados do século XIX, a Física tinha um grande problema de compatibilidade entre duas teorias bem estabelecidas: mecânica clássica e o eletromagnetismo. Como é conhecido, a mecânica clássica se baseia na chamada a simetria de Galileu, e a mesma está relacionada com a ideia de tempo absoluto. Entretanto, o uso da simetria de Galileu não se encaixa no eletrodinâmica de Maxwell. Quando aplicado a simetria de Galileu nas equações das ondas eletromagnéticas, a mesma não preserva sua forma padrão em outro referencial. Na simetria de Galileu, dois referenciais \mathcal{S}' e \mathcal{S} estão relacionados através das transformações de Galileu

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{v}t, \quad (3.1)$$

$$t' = t, \quad (3.2)$$

onde (3.2) explicita o tempo como uma quantidade absoluta. Além disso, é fácil ver que as transformações acima não deixam as equações de Maxwell invariantes. Nesse contexto, o físico Lorentz foi o primeiro a desenvolver transformações que deixam as equações de Maxwell invariantes. Antes de estudar mais sobre essas transformações, precisamos definir um invariante que trata o tempo em pé de igualdade com o espaço, que é

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (3.3)$$

e que pode ser compactado como

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (3.4)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é conhecida como métrica de Minkowski dada por

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

As transformações de Lorentz estabelecem uma relação entre as coordenadas $x'^{\mu} = (t', \vec{x}')$ de um referencial \mathcal{S}' com as coordenadas $x^{\mu} = (t, \vec{x})$ de um referencial \mathcal{S} da seguinte forma:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}. \quad (3.6)$$

Partindo do invariante, podemos escrever

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = \eta_{\rho\sigma} dx^{\rho} dx^{\sigma}, \quad (3.7)$$

e assim podemos relacionar a métrica da seguinte forma

$$\eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\sigma}, \quad (3.8)$$

que em forma matricial pode ser lido como

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda, \quad (3.9)$$

onde Λ^{μ}_{ν} é a matriz de transformação que pertence ao grupo de simetria de Lorentz (ou grupo $SO(1,3)$). Tal matriz tem as propriedades de $\det(\Lambda) = 1$ e ortogonalidade, e pode ser escrita da seguinte forma:

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \cosh \alpha & -\sinh \alpha & 0 & 0 \\ -\sinh \alpha & \cosh \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Agora, fazendo as substituições $\cosh \alpha = \gamma$ e $\sinh \alpha = \beta\gamma$, obtemos:

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

onde γ é o fator de Lorentz e β é o parâmetro de velocidade. A equação 3.6 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

que se reduz as transformações de Lorentz:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right). \end{aligned}$$

As transformações de Lorentz representaram uma grande mudança de paradigma na Física. O tempo, que antes era tratado como uma quantidade absoluta, passou a ser tratado como um parâmetro junto com o espaço dando origem ao chamado espaço-tempo. Lorentz também mostrou que essas transformações deixam as equações de Maxwell invariantes. Uma outra simetria importante é a chamada simetria CPT que discutiremos a seguir.

A simetria CPT está na raiz da teoria de campos relativísticos e surge como uma operação conjunta e simultânea de três simetrias discretas. Existem basicamente três simetrias discretas: conjugação de carga (\mathcal{C}), inversão espacial (\mathcal{P}) e inversão temporal (\mathcal{T}).

1. A conjugação de carga (\mathcal{C}) diz respeito aos graus de liberdade de partículas e anti-partículas. Basicamente, o operador (\mathcal{C}) atua em um campo com o intuito de transformar partículas em anti-partículas e vice-versa. A operação (\mathcal{C}) ocorre em um campo de gauge da seguinte forma:

$$\mathcal{C}A^\mu(\vec{x}, t)\mathcal{C}^{-1} = -A_\mu(\vec{x}, t). \quad (3.11)$$

2. A inversão espacial (\mathcal{P}) está relacionada a inversão das coordenadas espaciais de um determinado campo. A operação (\mathcal{P}) ocorre em um campo de gauge da seguinte forma:

$$\mathcal{P}A^\mu(\vec{x}, t)\mathcal{P}^{-1} = A_\mu(-\vec{x}, t). \quad (3.12)$$

3. A inversão temporal (\mathcal{T}) está relacionada a inversão da coordenada temporal de um

determinado campo. A operação (\mathcal{T}) ocorre em um campo de gauge da seguinte forma:

$$\mathcal{T}A^\mu(\vec{x}, t)\mathcal{T}^{-1} = A_\mu(\vec{x}, -t). \quad (3.13)$$

Por fim, temos a operação \mathcal{CPT} que é a operação simultânea dos operadores \mathcal{C} , \mathcal{P} e \mathcal{T} . Em relação aos campos e potenciais eletromagnéticos, temos as seguintes relações:

$$\vec{E} \xrightarrow{\mathcal{CPT}} \vec{E}, \quad (3.14)$$

$$\vec{B} \xrightarrow{\mathcal{CPT}} \vec{B}, \quad (3.15)$$

$$\phi \xrightarrow{\mathcal{CPT}} -\phi, \quad (3.16)$$

$$\vec{A} \xrightarrow{\mathcal{CPT}} -\vec{A}. \quad (3.17)$$

Um ponto importante é: se a simetria CPT for violada, automaticamente a simetria de Lorentz também será violada, mas, se a simetria de Lorentz for violada, não necessariamente a simetria CPT será violada.

3.2 Transformação de observador e Transformação de partícula

A simetria de Lorentz é uma simetria notável na natureza além de ser um pilar essencial para as duas grandes teorias da Física: Relatividade Geral e a Teoria Quântica de Campos que serve de base teórica para o desenvolvimento do Modelo Padrão de partículas. Ambas as teorias são bem testadas e bem sucedidas na predição de uma vasta gama de efeitos físicos. Entretanto, existem lacunas a serem preenchidas. Talvez a mais notável seja a falta de uma descrição quântica para a gravidade. Nesse sentido, acredita-se que a Relatividade Geral e o Modelo Padrão sejam o limite de baixa energia para uma teoria mais fundamental que incorpora efeitos de gravidade quântica. Agora vale a seguinte pergunta: será que a simetria de Lorentz poderia ser violada em uma teoria mais fundamental?

Essa questão é de fato mais do que uma simples especulação, pois existem algumas teorias que comportam violação de Lorentz como Teorias de cordas, Gravitação Quântica em loops e Horava Lifshitz.

Após definir a simetria de Lorentz, precisamos compreender como pode ocorrer a violação dessa simetria. Para isso, é importante definir as chamadas Transformação de observador e Transformação de partícula [42]. Em nossa análise, iremos nos restringir apenas a rotações no plano xy .

A figura a seguir representa a Transformação de observador. Nessa transformação, o sistema físico (campos dinâmicos) é mantido intacto, enquanto o sistema de coordenadas é rotacionado. Como representado na figura, o ponto p , que representa o sistema físico permanece in-

tacto quando fazemos uma rotação no sistema de coordenadas. Nessa situação, Transformação de observador tem um efeito de uma rotação passiva.

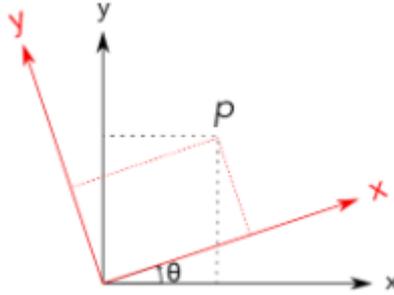


Figura 6: Transformação de observador

Por outro lado, na Transformação de partícula, que está representada na próxima figura, o sistema físico p sofre uma rotação, enquanto o sistema de coordenadas é mantido fixo. Nesse caso, a Transformação de partícula tem um efeito de uma rotação passiva.

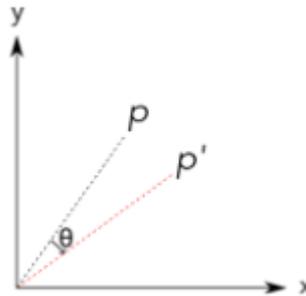


Figura 7: Transformação de partícula

Agora, vamos ver como podemos violar a simetria de Lorentz. Uma teoria de campos com violação de simetria de Lorentz tem uma lagrangeana \mathcal{L}_{VL} escrita de forma genérica

$$\mathcal{L}_{VL} \supset k^\mu \mathcal{O}_\mu(\phi, \psi, A), \quad (3.18)$$

onde k^μ representa um vetor constante (campo de fundo) e $\mathcal{O}_\mu(\phi, \psi, A)$ representa o termo que contém os campos dinâmicos, que podem ser escalares, espinoriais, vetoriais, etc. Quando consideramos uma transformação de observador, tanto o vetor k^μ quanto \mathcal{O}_μ se transformam de forma usual, de tal forma que a lagrangeana \mathcal{L}_{VL} se mantém invariante. Entretanto, quando consideramos uma transformação de partícula, apenas \mathcal{O}_μ se transforma de forma usual, enquanto k^μ permanece intacto. Nesse caso, dizemos que o sistema tem uma direção preferencial do vetor k^μ , e isso quebra a simetria de Lorentz.

3.3 Modelo Padrão Estendido

O Modelo Padrão, desenvolvido com base na simetria de Lorentz, se mostrou uma teoria física bem testada e consolidada na comunidade científica. Entretanto, o Modelo Padrão não consegue explicar os efeitos gravitacionais, que fica a cargo da Relatividade Geral. Ainda não foi possível encontrar uma teoria (com verificação experimental) que descrevesse todas as interações fundamentais e, nesse contexto, encontra-se a promissora Teoria das cordas. Com a possibilidade da simetria de Lorentz ser quebrada na teoria das cordas, Kostelecky e colaboradores desenvolveram um conjunto de pesquisas sobre a possibilidade da quebra de simetria de Lorentz em outros sistemas físicos e esses trabalhos deram origem a uma teoria efetiva conhecida com Modelo Padrão Estendido.

O Modelo Padrão Estendido (MPE) consiste dos termos do Modelo Padrão original acrescido de todos os termos possíveis que violam a simetria de Lorentz e CPT, mas a simetria $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ é mantida intacta. O MPE é uma teoria efetiva que tenta explorar a Física emergente de uma teoria mais fundamental localizada em uma escala de altas energias chamada escala de Planck, que é a escala no qual os efeitos gravitacionais se manifestam. Como é sabido, uma teoria mais fundamental enfreta grandes obstáculos que estão relacionados com a discrepância entre as escalas de energias. A escala de energia do Modelo Padrão é de 10^3 GeV, enquanto que a escala de Planck é de 10^{19} GeV. Tal discrepância é denominada de Hierarchy de gauge. Nesse sentido, uma teoria efetiva como o MPE surge como uma esperança para acessar essa física mais fundamental.

De maneira geral, temos que a lagrangeana do Modelo Padrão Estendido \mathcal{L}_{MPE} pode ser escrita como

$$\mathcal{L}_{MPE} = \mathcal{L}_{MP} + \mathcal{L}_{VL}, \quad (3.19)$$

onde \mathcal{L}_{MP} é a lagrangeana original do Modelo Padrão e \mathcal{L}_{VL} representa a lagrangeana com os termos que violam a simetria de Lorentz. A seguir, destacaremos o Setor de Gauge e Setor de férmions do MPE.

3.3.1 Setor de Gauge

Os físicos Carroll, Field e Jackiw, motivados pelas ideias de Kostelecky, desenvolveram uma modificação da eletrodinâmica de Maxwell que ficou conhecida como a Eletrodinâmica de Carroll-Field-Jackiw [6]. Tal modificação consiste de um termo de Chern Simons quadridimensional com um vetor constante. De forma geral, o setor de gauge do MPE consiste na lagrangeana de Maxwell com o acréscimo de dois termos: CPT-ímpar e CPT-par. O termo CPT-ímpar (termo de Carroll-Field-Jackiw) é violador da simetria de Lorentz e simetria CPT, enquanto que o termo CPT-par é violador da simetria de Lorentz, mas a simetria CPT é mantida.

O termo CPT-par foi desenvolvido por Kostelecky e Mewes[7].

A lagrangeana para o setor de gauge é dado por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho}(K_{AF})_{\mu}A_{\nu}F_{\sigma\rho} - \frac{1}{4}(K_F)_{\mu\nu\sigma\rho}F^{\mu\nu}F^{\sigma\rho}, \quad (3.20)$$

onde o primeiro termo é o conhecido termo de Maxwell, enquanto o segundo e o terceiro é o termo de Carroll-Field-Jackiw e o termo CPT-par, respectivamente. Os parâmetros $(K_{AF})_{\mu}$ e $(K_F)_{\mu\nu\sigma\rho}$ funcionam como campos de fundos que violam as transformações de Lorentz de partícula.

Uma consequência interessante dessas modificações é o efeito de birrefringência da luz no vácuo que é a decomposição da luz propagando-se em um meio anisotrópico em duas diferentes componentes (dois modos de propagação).

3.3.2 Setor de férmions

A extensão da teoria de Dirac com violação de Lorentz foi desenvolvido pela primeira vez por Kostelecky [43]. A lagrangeana para o setor de férmions é dada por

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\Gamma^{\mu}\partial_{\mu} - M)\psi, \quad (3.21)$$

onde

$$\Gamma^{\mu} = \gamma^{\mu} + c^{\mu\nu}\gamma_{\nu} + d^{\mu\nu}\gamma_5\gamma_{\nu} + e^{\mu} + if^{\mu} + \frac{1}{2}g^{\kappa\lambda\mu}\sigma_{\kappa\lambda}, \quad (3.22)$$

$$M = m + a_{\mu}\gamma^{\mu} + b_{\mu}\gamma_5\gamma^{\mu} + \frac{1}{2}H_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}, \quad (3.23)$$

e onde os coeficientes de acoplamento a_{μ} e b_{μ} tem dimensão canônica de massa, $c^{\mu\nu}$, $d^{\mu\nu}$ são adimensionais e podem ter ambas componentes simétricas e anti-simétricas, enquanto $H_{\mu\nu}$ tem dimensão de massa e é anti-simétrico. Esses coeficientes surgem como valores esperados no vácuo de quantidades vetoriais e tensoriais definidos em uma teoria fundamental.

Vale ressaltar que o termo $b_{\mu}\gamma_5\gamma^{\mu}$ sozinho é capaz de gerar radiativamente o termo de Carroll-Field-Jackiw [30]. Além desses termos do setor fermionico, que já estão consolidados, também é possível construir um modelo no qual a violação de Lorentz é introduzida via acoplamento não-mínimo com um termo de dimensão de massa cinco. Um exemplo de acoplamento não-mínimo foi estudando em [44, 45], onde a derivada covariante é dada por

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} + ieA_{\mu} + \frac{\lambda}{2}(K_F)_{\mu\nu\sigma\rho}\gamma^{\nu}F^{\sigma\rho}, \quad (3.24)$$

onde $(K_F)_{\mu\nu\sigma\rho}$ é o parâmetro CPT-par e λ é uma constante de dimensão de massa negativa.

Foi mostrado em [46] que esse termo é capaz de gerar radiativamente o termo CPT-par do setor de gauge.

3.4 Quebra espontânea: Mecanismo de Kostelecky e Samuel

Nas lagrangeanas (3.17) e (3.18), temos exemplo de violação explícita, ou seja, os parâmetros que violam a simetria de Lorentz são adicionados diretamente na lagrangeana. Agora veremos o mecanismo de quebra espontânea de simetria de Lorentz que foi desenvolvido por Kostelecky e Samuel [1]. O espírito de uma quebra espontânea consiste em construir uma teoria no qual a lagrangeana é invariante sobre tal simetria, porém o vácuo da teoria não preserva tal simetria.

No setor gravitacional, o mecanismo de quebra espontânea da simetria de Lorentz é bem consistente com a geometria de Riemann ao contrário da violação explícita que viola o Difeomorfismo e as identidades de Bianchi.

Os efeitos de violação que estamos procurando ocorrem nas transformações de Lorentz do ponto de vista da partícula. Nesse caso, qualquer teoria que incorpore violação de simetria de Lorentz irá preservar o princípio de covariância, ou seja, a simetria da transformação de observador é mantida.

Vamos considerar um campo $\phi(x)$ que pode ser qualquer campo físico. Da teoria de campos, sabemos que um campo transforma-se como

$$\phi'(x) = e^{-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}}\phi(x), \quad (3.25)$$

onde $\omega^{\mu\nu}$ é o parâmetro de transformação e $M_{\mu\nu}$ representa o gerador de transformação. Tomando o valor esperado no vácuo desse campo, obtemos

$$\begin{aligned} \langle 0|\phi'(0)|0\rangle &= \langle 0|e^{-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}}\phi(0)|0\rangle \\ &= \langle 0|\left(1 - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu} + \dots\right)\phi(0)|0\rangle, \end{aligned} \quad (3.26)$$

que torna-se

$$\langle 0|\phi'(0)|0\rangle - \langle 0|\phi(0)|0\rangle = -\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}\langle 0|\phi(0)|0\rangle + \mathcal{O}(\omega^2). \quad (3.27)$$

O caso mais simples que podemos analisar é o campo escalar onde $M_{\mu\nu}=0$, então mesmo se o campo escalar adquirir um valor esperado no vácuo, a simetria de Lorentz é preservada $\langle 0|\phi'(0)|0\rangle = \langle 0|\phi(0)|0\rangle$, mas a simetria de gauge é violada. Essa é a idéia por trás do Mecanismo de Higgs (apêndice A). Nesse sentido, a idéia de Kostelecky e Samuel foi fazer uma

extensão desse mecanismo para campos vetoriais e tensoriais. Para esses campos os geradores $M_{\mu\nu}$ são não nulos o que implica $\langle 0|\phi'(0)|0\rangle \neq \langle 0|\phi(0)|0\rangle$ se $\langle 0|\phi(0)|0\rangle \neq 0$. Esse resultado traz um campo de fundo que viola a simetria de Lorentz de forma espontânea.

Para uma compreensão mais simples sobre esses mecanismos, temos três situações que estão esquematizadas abaixo

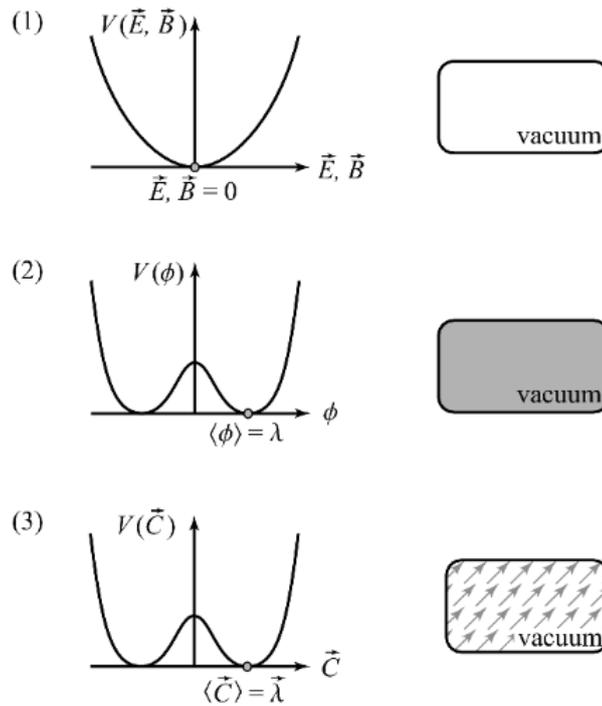


Figura 8: Representação para a densidade de energia para (a) Vácuo eletromagnético (b) campo escalar no Mecanismo de Higgs (c) campo vetorial no Mecanismo de Kostelecky e Samuel

Na primeira situação temos o vácuo da teoria eletromagnética que é invariante de gauge já que campos elétricos e magnéticos são invariantes sob transformações de gauge. Temos então que a densidade de energia do campo eletromagnético em unidades naturais é dada por

$$V = \frac{1}{2}(E^2 + B^2). \quad (3.28)$$

A expressão acima nos diz que a densidade de energia é nula somente se os campos forem nulos. Portanto não temos quantidades vetoriais ou tensoriais assumindo valor esperado no vácuo. Nessa situação temos tanto a simetria de Lorentz quanto a simetria de Gauge.

Na segunda situação temos o chamado mecanismo de Higgs que consiste em considerar um acoplamento entre um campo vetorial e um campo escalar que tem um potencial da

seguinte forma

$$V = g(\phi^2 - \lambda^2)^2, \quad (3.29)$$

onde g é uma constante adimensional. O potencial acima faz com que o campo ϕ assumira um valor esperado no vácuo diferente de zero, ou seja, $\langle \phi \rangle = \lambda$. Como destacamos anteriormente, o fato de ser um campo escalar indica que não existe a definição de uma direção privilegiada no espaço tempo, ou seja, a simetria de Lorentz é preservada, porém a simetria de Gauge é violada devido ao aparecimento de termos massivos relacionados ao campo vetorial.

Por fim, temos o mecanismo de Kibble e Samuel que, como já dito anteriormente, consiste em uma extensão do mecanismo de Higgs considerando um campo vetorial ou tensorial com um potencial tipo Higgs

$$V = g(A_\mu A^\mu - \lambda^2)^2, \quad (3.30)$$

que leva o campo a assumir um valor esperado no vácuo diferente de zero, ou seja, $\langle A_\mu \rangle = \lambda_\mu$. No momento que um campo vetorial ou tensorial assume valor esperado no vácuo não nulo o mesmo define uma direção privilegiada no espaço tempo violando assim a simetria de Lorentz. Nessa situação também há a violação da simetria de Gauge.

De forma geral, um modelo com violação espontânea de Lorentz tem um termo cinético e um potencial que é responsável pela violação de Lorentz. Então, escrevemos \mathcal{L} como segue

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{kin} - \frac{\lambda}{4} (B^2 - b^2)^2, \quad (3.31)$$

onde \mathcal{L}_{kin} é o termo cinético, B^2 pode ser $B_\mu B^\mu$ para um campo vetorial ou $B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$ para um campo tensorial e b é valor esperado no vácuo do campo vetorial $\langle B_\mu \rangle = b_\mu$ ou campo tensorial $\langle B_{\mu\nu} \rangle = b_{\mu\nu}$.

No próximo capítulo, estudaremos o modelo de um campo vetorial que apresenta quebra espontânea de simetria de Lorentz, o chamado Modelo Bumblebee que foi desenvolvido por Kibble e Samuel.

4 MODELO BUMBLEBEE

Esse capítulo é dedicado a estudar aspectos do campo Bumblebee em espaço tempo flat. Nesse modelo, a violação de Lorentz é consequência da dinâmica de campo vetorial B_μ que possui um valor esperado no vácuo (vev) igual a b_μ , onde tal vev constitui um 4-vector que define uma direção privilegiada no espaço tempo.

4.1 Lagrangeana

Nosso ponto de partida é a densidade lagrangeana que descreve a dinâmica do campo Bumblebee e é dada por [18, 21]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{4}(B_\mu B^\mu - b^2)^2, \quad (4.1)$$

onde $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ é o field strength e λ é uma constante adimensional. O primeiro termo corresponde ao setor cinético da teoria de Maxwell, enquanto o segundo termo é um potencial suave que é responsável pela violação espontânea de Lorentz. Vale notar que o potencial também quebra a simetria de calibre do modelo. Como o campo Bumblebee possui um vácuo não trivial, podemos considerar uma pequena perturbação em torno desse vev

$$B_\mu = b_\mu + \beta_\mu. \quad (4.2)$$

Com esse deslocamento no campo B_μ , a lagrangeana (4.1) pode ser escrita em termos da flutuação β_μ como segue

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{free} + \mathcal{L}_{int}, \quad (4.3)$$

com

$$\mathcal{L}_{free} = -\frac{1}{4}\beta_{\mu\nu}\beta^{\mu\nu} - \lambda b_\mu b_\mu \beta^\mu \beta^\nu, \quad (4.4)$$

$$\mathcal{L}_{int} = -\lambda \beta_\mu \beta^\mu \beta_\nu b^\nu - \frac{\lambda}{4} \beta_\mu \beta^\mu \beta_\nu \beta^\nu, \quad (4.5)$$

onde o primeiro termo corresponde a lagrangeana bilinear que contém um termo tipo Proca com uma matriz de massa $m_{\mu\nu} = 2\lambda b_\mu b_\nu$, enquanto o segundo termo corresponde a lagrangeana de interação com um termo trilinear e outro quadrilinear. Na próxima seção, vamos obter o propagador do campo β_μ através da lagrangeana (4.4).

4.2 Propagador do campo β_μ

Para o calculo do propagador do campo β_μ , usaremos procedimentos semelhantes aos mostrado na seção 2.3. Como o modelo não exhibe a simetria de calibre, então não precisamos adicionar termo de fixação de calibre. Para tal prosósito, expressamos a lagrangeana (4.4) na forma explicitamente bilinear

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\beta_\mu(\square\eta^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu - 2\lambda b^\mu b^\nu)\beta_\nu, \quad (4.6)$$

onde o termo entre parenteses é o operador $\mathcal{O}^{\mu\nu}$, em termos do qual a lagrangiana (4.6) é representada na forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\beta_\mu\mathcal{O}^{\mu\nu}\beta_\nu, \quad (4.7)$$

que por sua vez fornece a seguinte equação de movimento para o campo β_μ

$$\mathcal{O}^{\mu\nu}\beta_\nu = 0. \quad (4.8)$$

O propagador referente à lagrangiana (4.4) é encontrado através de

$$\mathcal{O}^{\mu\nu}\Delta_{\nu\rho}(x-y) = i\delta_\rho^\mu\delta^{(4)}(x-y), \quad (4.9)$$

onde $\Delta_{\nu\rho}(x-y)$ é a função de Green. Agora, precisamos escrever a equação (4.9) no espaço dos momenta

$$\mathcal{O}^{\mu\nu}(k)\Delta_{\nu\rho}(k) = i\delta_\rho^\mu, \quad (4.10)$$

onde usamos as seguintes transformadas de Fourier

$$\Delta_{\nu\rho}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)}\Delta_{\nu\rho}(k), \quad (4.11)$$

$$\delta^{(4)}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)}, \quad (4.12)$$

de tal forma que o operador bilinear é dado por

$$\mathcal{O}^{\mu\nu}(k) = -k^2\eta^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu - 2\lambda b^\mu b^\nu. \quad (4.13)$$

O próximo passo é inverter tensorialmente a equação (4.10). Nesse sentido, apresentamos um ansatz contendo a métrica, o produto entre os momenta, o produto entre bs e um mistura entre

k e b. Portanto, nosso ansatz mais geral é

$$\Delta_{\nu\rho}(k) = A\eta_{\nu\rho} + Bk_\nu k_\rho + Cb_\nu b_\rho + D(k_\nu b_\rho + b_\nu k_\rho), \quad (4.14)$$

logo, substituindo (4.13) e (4.14) em (4.12), e resolvendo o sistema de equações resultante, obtemos

$$\begin{aligned} A &= -\frac{i}{k^2}, \\ B &= \frac{k^2 + 2\lambda b^2}{2\lambda k^2 (b \cdot k)^2}, \\ C &= 0, \\ D &= \frac{i}{k^2 (b \cdot k)}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

de forma que chegamos ao propagador do campo β_μ

$$\Delta^{\mu\nu} = -\frac{i}{k^2} \left[\eta^{\mu\nu} - \frac{(k^\mu b^\nu + k^\nu b^\mu)}{b \cdot k} + \frac{(k^2 + 2\lambda b^2)}{2\lambda (b \cdot k)^2} k^\mu k^\nu \right] \quad (4.16)$$

O propagador acima exibe uma forma similar ao propagador do campo de calibre no gauge axial. O propagador tem um polo do tipo $k^2 = 0$ que leva a uma excitação não massiva. Essa excitação é transversal e pode ser associada ao um modo de Nambu-Goldstone. Além disso, a violação de Lorentz leva a um polo duplo $(b \cdot k) = 0$ que pode ser interpretado como um modo não-físico pois tem uma relação de dispersão que leva à instabilidades.

4.3 Modos de propagação do campo β_μ

Agora, vamos analisar os modos de propagação de β_μ . Para esse fim, definiremos o projetor longitudinal $P_{\mu\nu}^{\parallel}$ e projetor transversal $P_{\mu\nu}^{\perp}$, onde

$$P_{\mu\nu}^{\parallel} = \frac{b_\mu b_\nu}{b^2}, \quad (4.17)$$

$$P_{\mu\nu}^{\perp} = \eta_{\mu\nu} - \frac{b_\mu b_\nu}{b^2}. \quad (4.18)$$

Uma vez definidos os projetores ortogonais, podemos decompor o campo β_μ em modo transversal A_μ e modo longitudinal $\beta \hat{b}_\mu$

$$\beta_\mu = A_\mu + \beta \hat{b}_\mu, \quad (4.19)$$

onde

$$A_\mu = P_{\mu\nu}^\perp \beta^\nu, \quad (4.20)$$

$$\widehat{\beta} b_\mu = P_{\mu\nu}^\parallel \beta^\nu. \quad (4.21)$$

A lagrangeana livre (4.4) fornece a seguinte equação de movimento

$$\partial^\mu \beta_{\mu\nu} - 2\lambda \beta^\mu b_\mu b_\nu = 0, \quad (4.22)$$

que, considerando (4.19), torna-se

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} - \square \beta b_\mu - \partial_\nu \partial^\mu \beta b_\nu - 2\lambda \beta b_\mu b_\mu b_\nu = 0, \quad (4.23)$$

onde definimos $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Agora, aplicando ∂^ν na equação acima, obtemos o seguinte vínculo

$$b_\nu \partial^\nu \beta = 0, \quad (4.24)$$

que podemos usar junto com os projetores ortogonais para desacoplar uma equação para A_μ e β

$$\square A_\mu - \partial_\nu \partial^\mu A_\mu + \frac{1}{b^2} b_\mu b^\nu \partial_\nu \partial^\lambda A_\lambda = 0, \quad (4.25)$$

$$\square \beta - 2\lambda b^2 \beta - \frac{1}{b^\alpha b_\alpha} b^\mu \partial_\mu \partial^\nu A_\nu = 0. \quad (4.26)$$

A presença do vínculo impõe uma condição no espaço dos momenta

$$b_\nu k^\nu = 0, \quad (4.27)$$

onde esse vínculo leva a uma relação de dispersão para o modo β

$$p^2 + 2\lambda b^2 = 0, \quad (4.28)$$

que representa um modo massivo, com massa dada por

$$M^2 = -2\lambda b^2. \quad (4.29)$$

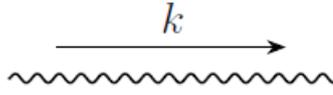
Agora vamos analisar essa relação de dispersão. Vamos inicialmente considerar um vetor b^μ tipo tempo, ou seja, $b^\mu = (b^0, 0)$. Substituindo esse vetor em obtemos $M^2 = -2\lambda b^0 b_0$, que é claramente um modo taquiônico. Considerando um b^μ tipo espaço, $b^\mu = (0, 0, 0, b)$, obtemos $M^2 = 2\lambda |\vec{b}|^2$ e quando considerando soluções do tipo onda plana, a amplitude dessa onda deve ser zero, pois ela deve ser nula nas condições de contorno $z = \pm\infty$. Disso, concluímos que o modo longitudinal é, de fato, não-físico.

4.4 Correções à 1-loop

Uma vez estudado a parte livre do modelo, podemos verificar via correções radiativas se os termos de interação são capazes de modificar a natureza não física do modo longitudinal estudado anteriormente. Para esse fim adotaremos a abordagem perturbativa que consiste em obter as regras de Feynman e calcular as amplitudes dos gráficos de Feynman que contribuem para função de dois pontos do campo β_μ à 1-loop.

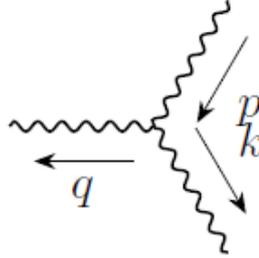
Com base nas técnicas funcionais discutidas ao longo do capítulo 2, podemos extrair as regras de Feynman para o modelo Bumblebee. Logo, as regras de Feynman são

- Propagador do campo β_μ



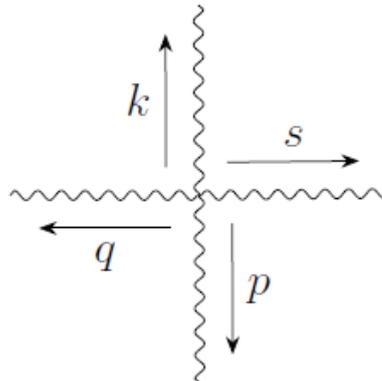
$$\Delta^{\mu\nu} = -\frac{i}{k^2} \left[\eta^{\mu\nu} - \frac{(k^\mu b^\nu + k^\nu b^\mu)}{b \cdot k} + \frac{(k^2 + 2\lambda b^2)}{2\lambda (b \cdot k)^2} k^\mu k^\nu \right], \quad (4.30)$$

- Tri-vértice de autointeração do campo β_μ



$$V_1^{\mu\nu\lambda} = -2i\lambda b_\theta (\eta^{\mu\nu} \eta^{\theta\lambda} + \eta^{\mu\theta} \eta^{\nu\lambda} + \eta^{\mu\lambda} g^{\theta\lambda}), \quad (4.31)$$

- Quadri-vértice de autointeração do campo β_μ



$$V_2^{\mu\nu\theta\lambda} = -2i\lambda(\eta^{\mu\nu}\eta^{\theta\lambda} + \eta^{\mu\theta}\eta^{\nu\lambda} + \eta^{\mu\lambda}\eta^{\theta\lambda}). \quad (4.32)$$

De posse das regras de Feynman do modelo Bumblebee, podemos estudar as correções radiativas à 1-loop para a função de dois pontos do campo β_μ . À 1-loop, existem dois gráficos que contribuem de acordo com o grau de divergência. Então, a função de dois pontos do campo β_μ pode ser escrita como

$$\Pi^{\mu\nu} = \Pi_a^{\mu\nu} + \Pi_b^{\mu\nu}, \quad (4.33)$$

onde $\Pi_a^{\mu\nu}$ e $\Pi_b^{\mu\nu}$ representam as amplitudes dos seguintes gráficos de Feynman

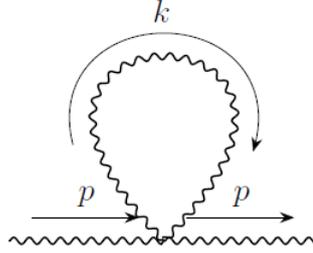


Figura 9: Diagrama tadpole Bumblebee puro (gráfico a)

A amplitude do gráfico a é dada por

$$\begin{aligned} \Pi_a^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} V_2^{\mu\nu\theta\lambda} \Delta_{\theta\lambda}(k) \\ &= -i\lambda \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [\eta^{\mu\nu} \Delta_p^\rho(k) + 2\Delta^{\mu\nu}(k)] \\ &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left[\eta^{\mu\nu} \left(-\frac{\lambda b^2}{(b \cdot k)^2} - \frac{k^2}{2(b \cdot k)^2} - \frac{\lambda D}{k^2} \right) + \frac{2\lambda k^{(\mu} b^{\nu)}}{k^2 (b \cdot k)} - \frac{k^\mu k^\nu (2b^2 \lambda + k^2)}{k^2 (b \cdot k)^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.34)$$

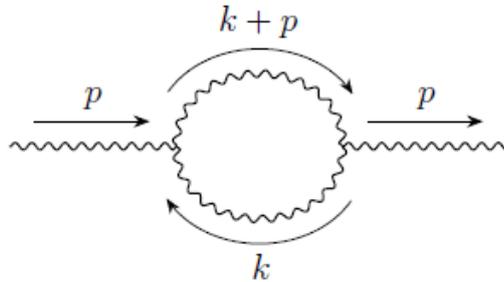


Figura 10: Diagrama um loop Bumblebee puro (gráfico b)

A amplitude do gráfico b é dada por

$$\begin{aligned}
\Pi_b^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} V_1^{\mu\rho\lambda}(k) \Delta_{\rho\theta}(k) V_1^{\nu\sigma\theta}(k+p) \Delta_{\lambda\sigma}(k+p) \\
&= -2\lambda b_\delta b_\gamma \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [\Delta^{\mu\nu}(k) \Delta^{\delta\gamma}(k+p) + \Delta^{\mu\gamma}(k) \Delta^{\delta\nu}(k+p) + \Delta^{\sigma\nu}(k) \Delta_\sigma^\delta(k+p) \eta^{\mu\nu} \\
&\quad + \Delta^{\mu\delta}(k) \Delta_\sigma^\delta(k+p) \eta^{\sigma\nu} + k \leftrightarrow k+p] + \Delta^{\rho\sigma}(k) \Delta_{\rho\sigma}(k+p) \eta^{\mu\delta} \eta^{\gamma\nu}.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Substituindo o propagador (4.30) na expressão acima temos

$$\begin{aligned}
\Pi_b^{\mu\nu} &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} [\eta^{\mu\nu} \Pi_\eta + k^\mu k^\nu \Pi_{kk} + p^\mu p^\nu \Pi_{pp} + b^\mu b^\nu \Pi_{bb} \\
&\quad + b^{(\mu} k^{\nu)} \Pi_{bk} + k^{(\mu} p^{\nu)} \Pi_{kp} + b^{(\mu} p^{\nu)} \Pi_{bp}],
\end{aligned} \tag{4.36}$$

onde

$$\Pi_\eta = \frac{\lambda}{k^2} + \frac{\lambda}{(k+p)^2}, \tag{4.37}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{kk} &= \frac{1}{2(b \cdot k)^2} + \frac{1}{2[b \cdot (k+p)]^2} + \frac{1}{(b \cdot k)[b \cdot (k+p)]} \\
&\quad + \frac{\lambda b^2}{k^2(b \cdot k)^2} + \frac{\lambda b^2}{(k+p)^2[b \cdot (k+p)]^2},
\end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\Pi_{pp} = \frac{1}{[b \cdot (k+p)]^2} + \frac{\lambda b^2}{(k+p)^2[b \cdot (k+p)]^2}, \tag{4.39}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{bb} &= \frac{[k \cdot (k+p)]^2}{2(b \cdot k)^2 [b \cdot (k+p)]^2} + \frac{\lambda k^2}{(b \cdot k)^2 (k+p)^2} + \frac{\lambda (k+p)^2}{k^2 [b \cdot (k+p)]^2} \\
&\quad - \frac{4\lambda [k \cdot (k+p)]}{k^2 (b \cdot k) [b \cdot (k+p)]} - \frac{4\lambda [k \cdot (k+p)]}{(b \cdot k) (k+p)^2 [k \cdot (k+p)]} \\
&\quad + \frac{\lambda b^2 [k \cdot (k+p)]}{(b \cdot k) k^2 [b \cdot (k+p)]^2} + \frac{\lambda b^2 [k \cdot (k+p)]^2}{(b \cdot k)^2 (k+p)^2 [b \cdot (k+p)]^2} \\
&\quad + \frac{2\lambda^2 (D-2)}{k^2 (k+p)^2} + \frac{\lambda (k+p)^2}{k^2 [b \cdot (k+p)]} + \frac{2\lambda^2 b^2}{k^2 [b \cdot (k+p)]^2} + \frac{2\lambda^2 b^2}{(b \cdot k)^2 (k+p)^2} \\
&\quad + \frac{2\lambda^2 b^4 [k \cdot (k+p)]^2}{k^2 (b \cdot k)^2 (k+p)^2 [b \cdot (k+p)]^2} - \frac{4\lambda^2 b^2 [k \cdot (k+p)]}{k^2 (k+p)^2 (b \cdot k) [b \cdot (k+p)]},
\end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\Pi_{kp} = \frac{\lambda b^2}{(k+p)^2 [b \cdot (k+p)]^2} + \frac{1}{2(b \cdot k) [b \cdot (k+p)]} + \frac{1}{2[b \cdot (k+p)]^2}, \tag{4.41}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{kb} = & -\frac{2\lambda}{k^2(b \cdot k)} - \frac{2\lambda}{(k+p)^2[b \cdot (k+p)]} + \frac{\lambda b^2[k \cdot (k+p)]}{(b \cdot k)(k+p)^2[b \cdot (k+p)]^2} \\
& + \frac{\lambda b^2[k \cdot (k+p)]}{(b \cdot k)^2 k^2 [b \cdot (k+p)]^2} + \frac{[k \cdot (k+p)]}{2(b \cdot k)^2 [b \cdot (k+p)]} \\
& + \frac{[k \cdot (k+p)]}{2(b \cdot k)[b \cdot (k+p)]^2} + \frac{\lambda}{(b \cdot k)(k+p)^2} + \frac{\lambda}{k^2 [b \cdot (k+p)]},
\end{aligned} \tag{4.42}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{bp} = & \frac{\lambda}{k^2 [b \cdot (k+p)]} - \frac{2\lambda}{(k+p)^2 [b \cdot (k+p)]} \\
& + \frac{\lambda b^2 [k \cdot (k+p)]}{(b \cdot k)(k+p)^2 [b \cdot (k+p)]^2} + \frac{[k \cdot (k+p)]}{(b \cdot k)[b \cdot (k+p)]^2}.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Como podemos observar, o gráfico a é um gráfico tipo tadpole, enquanto o gráfico b é um gráfico tipo Polarização no vácuo. Agora precisamos de uma prescrição adequada para lidar com os polos do tipo $(b \cdot k)$ presentes nas integrais acima. No contexto de quantização da Teoria de Yang Mills no gauge axial foi desenvolvido uma prescrição para lidar com tais polos. Tal prescrição ficou conhecida como prescrição PV (apêndice C) e é consistente com as propriedades de renormalizabilidade e unitariedade da Teoria de Yang Mills além de preservar as identidades de Slavnov-Taylor a 1-loop. Tal prescrição é definida como

$$\frac{1}{(b \cdot k)^\beta} = \frac{1}{2} \lim_{\mu \rightarrow 0} \left[\frac{1}{(b \cdot k + i\mu)^\beta} + \frac{1}{(b \cdot k - i\mu)^\beta} \right], \tag{4.44}$$

com $\mu > 0$ e $\beta = 1, 2, \dots, N$. Iremos utilizar regularização dimensional no contexto da prescrição PV para isolar as partes divergentes referentes aos gráficos a e b. Usando as integrais tabeladas na referência [47] e somando todas as contribuições obtemos a seguinte expressão para $\Pi^{\mu\nu}$

$$\Pi^{\mu\nu} = \frac{8\lambda}{3} \left(\frac{b \cdot p}{b^2} (b^\mu p^\nu + b^\nu p^\mu) - \frac{b^2 p^2 + (b \cdot p)^2}{b^4} b^\mu b^\nu \right) I_{div}, \tag{4.45}$$

onde $I_{div} = i/8\pi^2 \varepsilon$ com $\varepsilon = 4 - D$ e D representa a dimensão do espaço-tempo.

Como podemos verificar, a função de dois pontos do campo β_μ não é transversal $p_\mu \Pi^{\mu\nu} \neq 0$, ao contrário da eletrodinâmica quântica escalar discutida na seção 2.5 e da teoria de Yang-Mills no gauge axial [48]. Isso mostra que o modo massivo é naturalmente excitado pelos termos de interação via correções radiativas, ou seja, o modo massivo longitudinal que tem natureza não-física permanece como um modo propagante mesmo em nível quântico e isso pode estar ligado ao fato de que o Modelo Bumblebee não é invariante de gauge ao contrário da teoria de Yang-Mills no gauge axial que é invariante de Gauge. Esse resultado foi obtido em [21] via formalismo canônico, considerando apenas a parte livre da teoria.

Também podemos analisar a renormalização do modelo Bumblebee. A lagrangeana

livre (4.4) em termos dos modos, expressão (4.13), é escrita como

$$\mathcal{L}_{free} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}F^{\mu\nu}\partial_{[\mu}\beta\widehat{b}_{\nu]} - \frac{1}{2}\partial_{\mu}\beta\partial^{\mu}\beta + \frac{1}{2}\partial^{\mu}\beta\partial^{\nu}\beta\widehat{b}_{\mu}\widehat{b}_{\nu} - \lambda b^2\beta_{\mu}\beta^{\mu}, \quad (4.46)$$

logo o termo divergente que contribui para a ação efetiva é

$$\mathcal{L}_{div} = \frac{\lambda}{3\pi^2\varepsilon} \left[-\frac{1}{2}F^{\mu\nu}\partial_{[\mu}\beta\widehat{b}_{\nu]} - \frac{1}{2}\partial_{\mu}\beta\partial^{\mu}\beta + \frac{1}{2}\partial^{\mu}\beta\partial^{\nu}\beta\widehat{b}_{\mu}\widehat{b}_{\nu} \right]. \quad (4.47)$$

Isso mostra que o modelo Bumblebee pode ser renormalizável via contra termos oriundos da lagrangiana bilinear.

5 MODELO BUMBLEBEE COM O CAMPO DE STUECKELBERG

Nesse capítulo, estudamos o modelo teórico resultante do acoplamento entre o campo Bumblebee e o campo de Stueckelberg. Introduzimos o procedimento de Stueckelberg e destacamos nossos resultados que dizem respeito ao cálculo dos propagadores e a autoenergia da flutuação β_μ .

5.1 Procedimento de Stueckelberg

Como destacado na seção 4.1, a lagrangeana do campo Bumblebee contem um termo tipo-Proca que quebra a simetria de gauge. A fim de recuperar essa simetria, podemos introduzir um novo campo conhecido na literatura como campo de Stueckelberg. Esse procedimento é aplicado em modelos de campos vetoriais massivos, como é o exemplo do modelo de Maxwell-Proca, onde existe uma incompatibilidade entre renormalizabilidade por contagem de potencia e estados de norma negativa que estão presentes no espectro da teoria.

Em [49], o Procedimento de Stueckelberg foi estudado no contexto da unitariedade do modelo CFJ. Já em [21], tal Procedimento foi usado para resolver problemas de instabilidades e quantizar o modelo Bumblebee. O campo de Stueckelberg é introduzido através do seguinte deslocamento

$$\beta_\mu \rightarrow \beta_\mu - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \partial_\mu \phi, \quad (5.1)$$

onde ϕ é o campo de Stueckelberg que funciona como um campo auxiliar, ou seja, não representa um grau de liberdade físico no espectro da teoria. Além disso, é fácil verificar que o deslocamento (5.1) é invariante sob as seguintes transformações de gauge

$$\beta_\mu \rightarrow \beta_\mu + \partial_\mu \theta, \quad (5.2)$$

$$\phi \rightarrow \phi + \sqrt{\lambda} \theta, \quad (5.3)$$

onde θ é o parâmetro de gauge. Então, temos transformações de gauge tanto para β_μ quanto para ϕ . Como a simetria de Gauge foi restaurada, precisamos de um fixador de Gauge. Baseado no fixador de Gauge da teoria Proca-Stueckelberg (ver apêndice B), um fixador de Gauge conveniente pode ser

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2\xi} \left(b^\mu b^\nu \partial_\mu \beta_\nu - 2\xi \sqrt{\lambda} \phi \right)^2, \quad (5.4)$$

onde ξ é um parametro que pode ser escolhido convenientemente. Um ponto importante desse fixador de Gauge é que ele cancela os termos de mistura entre β_μ e ϕ . Portanto, substituindo

(5.1) e (5.3) na lagrangeana (4.3), obtemos

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{free} + \mathcal{L}_{3I} + \mathcal{L}_{4I} \quad (5.5)$$

onde

$$\mathcal{L}_{free} = -\frac{1}{4}\beta_{\mu\nu}\beta^{\mu\nu} - \lambda b_\mu b_\nu \beta^\mu \beta^\nu + \frac{1}{2\xi} b^\mu b^\nu b^\rho b^\sigma \beta_\mu \partial_\rho \partial_\sigma \beta_\nu - b_\mu b_\nu \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - 2\xi \lambda \phi^2, \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{3I} = & -\lambda \beta_\mu \beta^\mu \beta_\nu b^\nu + \sqrt{\lambda} \beta_\mu \beta^\mu b^\nu \partial_\nu \phi + 2\sqrt{\lambda} \beta_\mu \beta_\nu b^\nu \partial^\mu \phi - \\ & \beta_\mu b^\nu \partial^\mu \phi \partial_\nu \phi - \beta_\nu b^\nu \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} b^\nu \partial_\nu \phi \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi, \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{4I} = & -\frac{\lambda}{4} \beta_\mu \beta^\mu \beta_\nu \beta^\nu + \sqrt{\lambda} \beta_\mu \beta^\mu \beta_\nu \partial^\nu \phi - \frac{1}{2} \beta_\mu \beta^\mu \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi - \\ & \beta_\mu \beta_\nu \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \beta_\mu \partial^\mu \phi \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi - \frac{1}{4\lambda} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi, \end{aligned} \quad (5.8)$$

onde \mathcal{L}_{free} é a lagrangeana bilinear com o campo β_μ e para o campo de Stueckelberg, \mathcal{L}_{3I} representa a lagrangeana com termos trilineares e \mathcal{L}_{4I} é a lagrangeana com termos quadrilineares. Como podemos observar nas lagrangianas acima, não existem termos de misturas entre β_μ e ϕ e, novamente, a lagrangeana bilinear será usada para extrair os propagadores, enquanto as lagrangianas de interação serão usadas para extrair os vértices que usaremos na seção 5.4 para construir os diagramas de Feynman à 1-loop para a função de dois pontos do campo β_μ .

5.2 Propagadores

A fim de calcular o propagador para o campo β_μ e para o campo de Stueckelberg, escrevemos a lagrangeana (5.6) na forma quadrática

$$\mathcal{L}_{free} = \frac{1}{2} \beta_\mu \mathcal{O}_\beta^{\mu\nu} \beta_\nu + \frac{1}{2} \phi \mathcal{O}_\phi \phi, \quad (5.9)$$

onde definimos os seguintes operadores

$$\mathcal{O}_\beta^{\mu\nu} = \square \eta^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu - 2\lambda b^\mu b^\nu + \frac{1}{\xi} b^\mu b^\nu b^\rho b^\sigma \partial_\rho \partial_\sigma, \quad (5.10)$$

$$\mathcal{O}_\phi = 2b_\mu b_\nu \partial^\mu \partial^\nu - 4\xi \lambda. \quad (5.11)$$

Para o campo β_μ , a equação para função de Green é dada por

$$\mathcal{O}^{\mu\nu}\Delta_{\nu\rho}(x-y) = i\delta_\rho^\mu\delta^{(4)}(x-y), \quad (5.12)$$

que, no espaço dos momenta, é lido como

$$\mathcal{O}^{\mu\nu}\Delta_{\nu\rho}(k) = i\delta_\rho^\mu\delta^{(4)}(k). \quad (5.13)$$

Vamos inverter a equação acima considerando o mesmo ansatz usado na seção 4.2

$$\Delta_{\nu\rho} = A\eta_{\nu\rho} + Bk_\nu k_\rho + Cb_\nu b_\rho + D(k_\nu b_\rho + b_\nu k_\rho), \quad (5.14)$$

e o operador no espaço dos momenta

$$\mathcal{O}_\beta^{\mu\nu} = -k^2\eta^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu - 2\lambda b^\mu b^\nu + \frac{1}{\xi}b^\mu b^\nu (b \cdot k)^2. \quad (5.15)$$

Substituindo (5.14) e (5.15) em (5.13), obtemos o propagador para o campo β_μ

$$\Delta_F^{\mu\nu}(k) = \frac{i}{k^2} \left[-\eta^{\mu\nu} + \frac{k^\mu b^\nu + k^\nu b^\mu}{(b \cdot k)} - \frac{b^2 k^\mu k^\nu}{(b \cdot k)^2} \right] - i\xi \frac{k^\mu k^\nu}{(b \cdot k)^2 [(b \cdot k)^2 + 2\xi\lambda]}. \quad (5.16)$$

Agora, tomando $\xi = 0$, o propagador acima recai no propagador da teoria de Yang Mills no gauge axial [48, 50]. Para o campo de Stueckelberg, temos a seguinte equação da função de Green

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_\phi D &= i\delta^{(4)}(x), \\ (b_\mu b_\nu \partial^\mu \partial^\nu - 2\xi\lambda) &= i\delta^{(4)}(x). \end{aligned} \quad (5.17)$$

A inversão dessa equação é direta e assim obtemos o propagador para o campo de Stueckelberg

$$D(k) = \frac{-i}{(b \cdot k)^2 + 2\xi\lambda}. \quad (5.18)$$

5.3 Relação de dispersão

Analisando os polos dos propagadores, temos as seguintes relações de dispersão

- Campo β_μ

$$k^2 = 0, \quad (5.19)$$

$$(b \cdot k) = 0, \quad (5.20)$$

$$(b \cdot k)^2 + 2\xi\lambda = 0, \quad (5.21)$$

- Campo de Stueckelberg

$$(b \cdot k)^2 + 2\xi\lambda = 0. \quad (5.22)$$

As relações de dispersão acima mostram que temos um modo de Nambu-Goldstone devido a presença do polo $k^2 = 0$. Os modos não físicos (2.20) e (2.21) levam a instabilidades na teoria. Contudo, essas instabilidades podem ser contornadas usando uma escolha adequada para os modos de β_μ . Essa escolha é capaz de reduzir o espaço de fase do modelo Bumblebee-Stueckelberg para um espaço de fase que é equivalente ao Eletrodinâmica de Maxwell em um gauge não linear. De fato, se escolhermos o $\xi = 0$ no propagador 5.14, obtemos o propagador do modelo de Maxwell com um gauge não linear. Em [20], foi estudado a equivalência quântica entre essas teorias. Para β_μ , as soluções para podem ser escritas da seguinte forma

$$\beta_\mu^{(0)}(\vec{p}) = \left(\frac{\vec{b} \cdot \vec{p}}{b_0} + \frac{\sqrt{-2\xi k}}{b_0}, \vec{p} \right), \quad (5.23)$$

$$\beta_\mu^{(i)}(\vec{p}) = \varepsilon_\mu^{(i)}(\vec{p}), \quad i = 1, 2 \quad (5.24)$$

$$\beta_\mu^{(3)}(\vec{p}) = \left(\frac{\vec{b} \cdot \vec{p}}{b_0}, \vec{p} \right), \quad (5.25)$$

onde $\varepsilon_\mu^{(i)}(\vec{p})$ são dois quadrivetores tipo espaço e são ortogonais tanto a $p_\mu^{(i)}(|\vec{p}|, \vec{p})$ quanto a b_μ . Usando as propriedades de $\varepsilon_\mu^{(i)}(\vec{p})$ podemos derivar a seguinte expressão

$$\sum_{i=1}^2 \varepsilon_\mu^{(i)} \varepsilon_\nu^{(i)} = \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{b \cdot \vec{p}} (b_\mu \bar{p}_\nu + b_\nu \bar{p}_\mu) - \frac{1}{(b \cdot \vec{p})^2} \bar{p}_\mu \bar{p}_\nu. \quad (5.26)$$

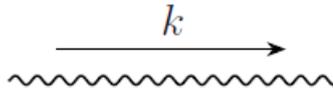
É fácil observar que o projetor acima é o mesmo projetor que aparece no propagador para o campo β_μ e, como já descamos, esse propagador é idêntico ao propagador da Eletrodinâmica de Maxwell em um gauge não linear. Na próxima seção, estudaremos as correções radiativas à 1-loop no modelo Bumblebee-Stueckelberg.

5.4 Correções radiativas

Nessa seção, vamos verificar se a introdução do campo de Stueckelberg é capaz de tornar a teoria renormalizável e eliminar os modos não-físico do espectro. Para isso, verificaremos se a função de 2-pontos do campo de gauge é transversal ou tem modo massivo excitado. Assim como no capítulo 4, adotaremos a abordagem perturbativa.

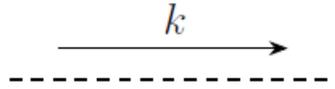
Na seção 5.2, extraímos os propagadores para β_μ e ϕ a partir da lagrangiana bilinear. Os vértices podem ser obtidos a partir da lagrangiana de interação. Então, de forma sumarizada, as regras de Feynman do modelo são

- Propagador do campo β_μ



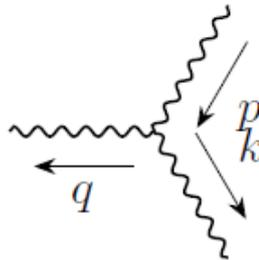
$$\Delta_F^{\mu\nu}(k) = \frac{i}{k^2} \left[-\eta^{\mu\nu} + \frac{k^\mu b^\nu + k^\nu b^\mu}{(b \cdot k)} - \frac{b^2 k^\mu k^\nu}{(b \cdot k)^2} \right], \quad (5.27)$$

- Propagador do campo ϕ



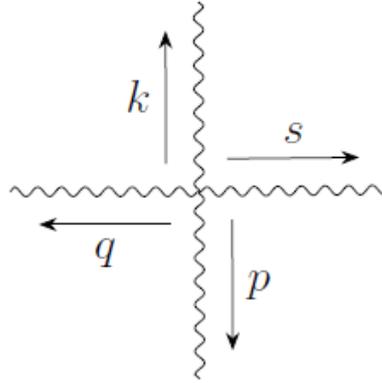
$$D(k) = \frac{-i}{(b \cdot k)^2}, \quad (5.28)$$

- Tri-vértice de autointeração do campo β_μ



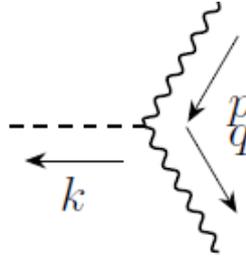
$$V_1^{\mu\nu\lambda} = -2i\lambda b_\theta (\eta^{\mu\nu} \eta^{\theta\lambda} + \eta^{\mu\theta} \eta^{\nu\lambda} + \eta^{\mu\lambda} \eta^{\theta\nu}), \quad (5.29)$$

- Quadri-vértice de autointeração o campo β_μ



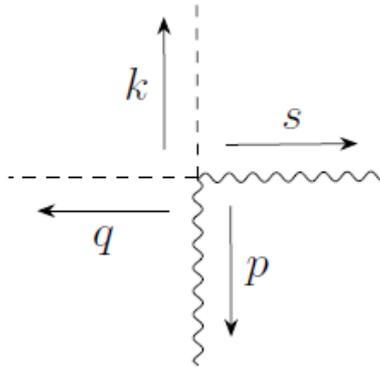
$$V_2^{\mu\nu\theta\lambda} = -2i\lambda(\eta^{\mu\nu}\eta^{\theta\lambda} + \eta^{\mu\theta}\eta^{\nu\lambda} + \eta^{\mu\lambda}\eta^{\theta\nu}), \quad (5.30)$$

- Dois campos β_μ trocando um campo ϕ



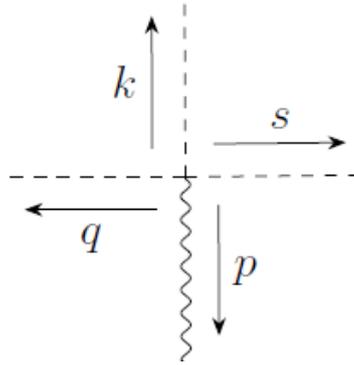
$$V_3^{\mu\nu}(k) = 2i\sqrt{\lambda}[\eta^{\mu\nu}(b \cdot k) + k^\mu b^\nu + b^\mu k^\nu], \quad (5.31)$$

- Dois campos β_μ trocando dois campos ϕ



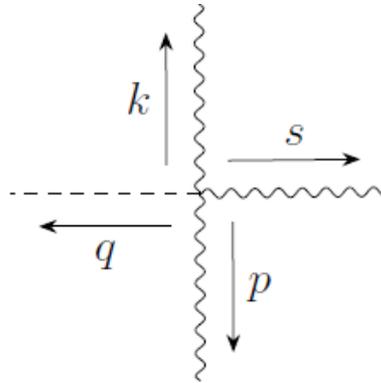
$$V_4^{\mu\nu}(k, q) = 2i[\eta^{\mu\nu}(k \cdot q) + k^\mu q^\nu + q^\mu k^\nu], \quad (5.32)$$

- Um campo β_μ trocando três campos ϕ



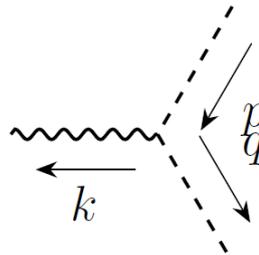
$$V_5^\mu(k, q) = \frac{2i}{\sqrt{\lambda}} [s^\mu(k \cdot q) + k^\mu(s \cdot q) + q^\mu(s \cdot k)], \quad (5.33)$$

- Três campos β_μ trocando um campos ϕ



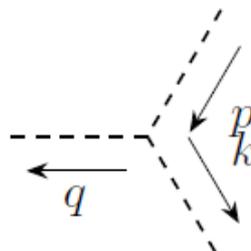
$$V_6^{\mu\nu\lambda}(q) = q_\theta(\eta^{\mu\nu}\eta^{\theta\lambda} + \eta^{\mu\theta}\eta^{\nu\lambda} + \eta^{\mu\lambda}\eta^{\theta\nu}), \quad (5.34)$$

- Um campo β_μ trocando dois campos ϕ



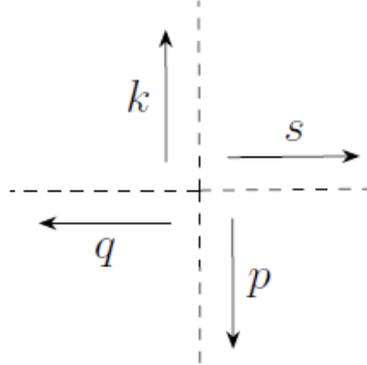
$$V_7^\mu(k, q) = 2i[b^\mu(k \cdot q) + k^\mu(b \cdot q) + q^\mu(b \cdot k)], \quad (5.35)$$

- Tri-vértice de autointeração do campo ϕ



$$V_8 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} [(k \cdot p)(b \cdot q) + (q \cdot p)(b \cdot k) + (k \cdot q)(b \cdot p)], \quad (5.36)$$

- Quadri-vértice de autointeração o campo ϕ



$$V_9 = -\frac{1}{\lambda} (k \cdot p)(s \cdot q) + (q \cdot p)(s \cdot k) + (k \cdot q)(s \cdot p)]. \quad (5.37)$$

Aqui escolhemos $\xi = 0$. De posse das regras de Feynman, temos que o grau de divergência do modelo é

$$D(G) = 4 - N_\beta - N_\phi - V_1 - V_3 - V_7 - V_8 + \sum \omega_i V_i. \quad (5.38)$$

Uma vez obtidas as regras de Feynman para o modelo, o próximo passo é estudar as correções radiativas à 1-loop para a função de dois pontos do campo β_μ . Analisando o grau de divergência superficial, existem cinco gráficos que contribuem para $\Pi^{\mu\nu}$, de tal forma que podemos escrever $\Pi^{\mu\nu}$ da seguinte forma

$$\Pi^{\mu\nu} = \Pi_a^{\mu\nu} + \Pi_b^{\mu\nu} + \Pi_c^{\mu\nu} + \Pi_d^{\mu\nu} + \Pi_e^{\mu\nu}. \quad (5.39)$$

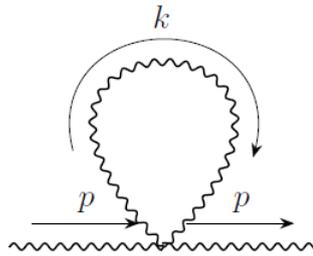


Figura 11: Diagrama tadpole Bumblebee puro (gráfico a)

A amplitude do gráfico a é

$$\begin{aligned}
 \Pi_a^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} V_2^{\mu\nu\theta\lambda} D_{\theta\lambda}(k) \\
 &= -i\lambda \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} [\eta^{\mu\nu} D_\rho^\rho(k) + 2D^{\mu\nu}(k)] \\
 &= \lambda \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left\{ \frac{-\eta^{\mu\nu} D}{k^2} - \left(1 + \frac{2}{D}\right) \frac{\eta^{\mu\nu} b^2}{(b \cdot k)} + \frac{2(k^\mu b^\nu + k^\nu b^\mu)}{k^2 (b \cdot k)} \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.40}$$

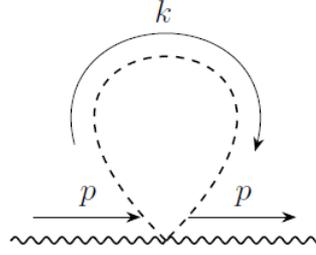


Figura 12: Diagrama tadpole Bumblebee-Stueckelberg (gráfico b)

A amplitude do gráfico b é

$$\begin{aligned}
 \Pi_b^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} V_4^{\mu\nu} D(k) \\
 &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(\eta^{\mu\nu} k^2 + 2k^\mu k^\nu)}{(b \cdot k)^2} \\
 &= \left(1 + \frac{2}{D}\right) \eta^{\mu\nu} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^2}{(b \cdot k)^2}.
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

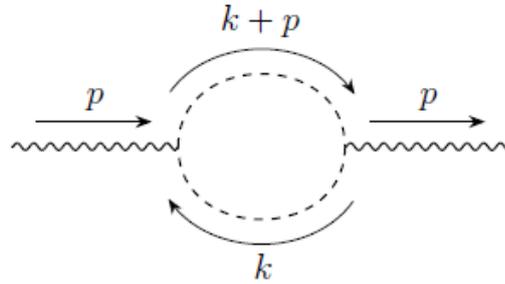


Figura 13: Diagrama um loop Stueckelberg (gráfico c)

A amplitude do gráfico c é

$$\begin{aligned}
\Pi_c^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} V_7^\mu(k, k+p) D(k) V_7^\nu(k, k+p) D(k+p) \\
&= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} [k^\mu k^\nu \Pi_{kk} + p^\mu p^\nu \Pi_{pp} + b^\mu b^\nu \Pi_{bb} + b^{(\mu} k^{\nu)} \Pi_{bk} \\
&\quad + k^{(\mu} p^{\nu)} \Pi_{kp} + b^{(\mu} p^{\nu)} \Pi_{bp}].
\end{aligned} \tag{5.42}$$

onde

$$\Pi_{pp} = \frac{2}{[b \cdot (k+p)]^2}, \tag{5.43}$$

$$\Pi_{bp} = \frac{2[k \cdot (k+p)]}{(b \cdot k)[b \cdot (k+p)]^2}, \tag{5.44}$$

$$\Pi_{bb} = \frac{2[k \cdot (k+p)]^2}{(b \cdot k)^2 [b \cdot (k+p)]^2}, \tag{5.45}$$

$$\Pi_{kp} = \frac{2}{[b \cdot (k+p)]^2} + \frac{2}{(b \cdot k)[b \cdot (k+p)]}, \tag{5.46}$$

$$\Pi_{bk} = \frac{2(k+p)^2}{(b \cdot k)[b \cdot (k+p)]^2} + \frac{2[k \cdot (k+p)]}{(b \cdot k)[b \cdot (k+p)]^2}, \tag{5.47}$$

$$\Pi_{kk} = \frac{2}{(b \cdot k)^2} + \frac{4}{(b \cdot k)[b \cdot (k+p)]} + \frac{2}{[b \cdot (k+p)]^2}. \tag{5.48}$$

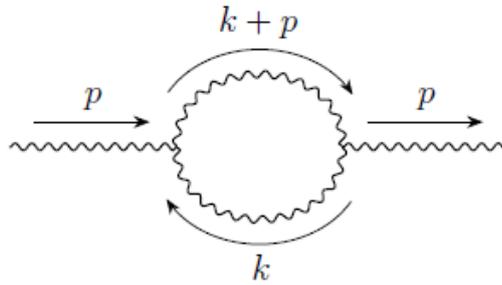


Figura 14: Diagrama um loop Bumblebee puro (gráfico d)

A amplitude do gráfico d é

$$\begin{aligned}
\Pi_d^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} V_1^{\mu\rho\lambda}(k) \Delta_{\rho\theta}(k) V_1^{\nu\sigma\theta}(k+p) \Delta_{\lambda\sigma}(k+p) \\
&= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} b^\mu b^\nu \Pi_{bb},
\end{aligned} \tag{5.49}$$

onde

$$\begin{aligned} \Pi_{bb} = & \frac{2\lambda^2(D-2)}{k^2(k+p)^2} + \frac{2\lambda^2 b^2}{k^2[b \cdot (k+p)]^2} + \frac{2\lambda^2 b^2}{(b \cdot k)^2(k+p)^2} \\ & - \frac{4\lambda^2 b^2 [k \cdot (k+p)]}{k^2(b \cdot k)(k+p)^2 [b \cdot (k+p)]} + \frac{2\lambda^2 b^4 [k \cdot (k+p)]^2}{k^2(b \cdot k)^2(k+p)^2 [b \cdot (k+p)]^2}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

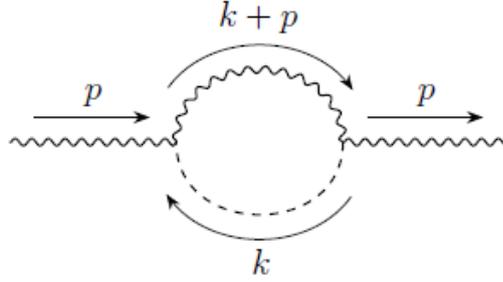


Figura 15: Diagrama um loop Bumblebee-Stueckelberg (gráfico e)

A amplitude do gráfico e é

$$\begin{aligned} \Pi_e^{\mu\nu} = & \frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} V_3^{\mu\rho}(k) D(k) V_3^{\nu\sigma}(k+p) \Delta_{\rho\sigma}(k+p) \\ = & \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} [\eta^{\mu\nu} \Pi_\eta + k^\mu k^\nu \Pi_{kk} + p^\mu p^\nu \Pi_{pp} + b^\mu b^\nu \Pi_{bb} \\ & + b^{(\mu} k^{\nu)} \Pi_{bk} + k^{(\mu} p^{\nu)} \Pi_{kp} + b^{(\mu} p^{\nu)} \Pi_{bp}], \end{aligned} \quad (5.51)$$

onde

$$\Pi_\eta = \frac{2\lambda}{(k+p)^2}, \quad (5.52)$$

$$\Pi_{kk} = \frac{2\lambda b^2}{(k+p)^2 [b \cdot (k+p)]^2}, \quad (5.53)$$

$$\Pi_{pp} = \frac{2\lambda b^2}{(k+p)^2 [b \cdot (k+p)]^2}, \quad (5.54)$$

$$\Pi_{bb} = \frac{2\lambda k^2}{(b \cdot k)^2 (k+p)^2} - \frac{8\lambda [k \cdot (k+p)]}{(b \cdot k)(k+p)^2 [k \cdot (k+p)]} + \frac{2\lambda b^2 [k \cdot (k+p)]}{(b \cdot k)^2 (k+p)^2 [b \cdot (k+p)]^2}, \quad (5.55)$$

$$\Pi_{kp} = \frac{2\lambda b^2 [k \cdot (k+p)]}{(k+p)^2 [b \cdot (k+p)]^2}, \quad (5.56)$$

$$\Pi_{kb} = -\frac{4\lambda}{(k+p)^2[b \cdot (k+p)]} + \frac{2\lambda}{(b \cdot k)^2[b \cdot (k+p)]} + \frac{2\lambda b^2[k \cdot (k+p)]}{(b \cdot k)(k+p)^2[b \cdot (k+p)]^2}, \quad (5.57)$$

$$\Pi_{bp} = -\frac{4\lambda}{(k+p)^2[b \cdot (k+p)]} + \frac{2\lambda b^2[k \cdot (k+p)]}{(b \cdot k)(k+p)^2[b \cdot (k+p)]^2}. \quad (5.58)$$

Para avaliar as integrais acima usamos novamente a prescrição PV. Avaliando as integrais acima e somando todas as amplitudes, obtemos

$$\Pi^{\mu\nu} = -\frac{4\lambda}{3} \left(\frac{b \cdot p}{b^2} (b^\mu p^\nu + b^\nu p^\mu) + \frac{5[(b \cdot p)^2 - 2b^2 p^2]}{b^4} b^\mu b^\nu \right) I_{div}. \quad (5.59)$$

Assim como no modelo Bumblebee, a função de dois pontos não é transversal, implicando em um modo massivo excitado no modelo Bumblebee-Stueckelberg. Isso significa que o modo massivo longitudinal continua um modo propagante a um loop mesmo em uma teoria invariante de Gauge como é o caso do modelo teórico trabalhado neste capítulo. Futuramente, podemos verificar se essa não transversabilidade persiste no quando tratamos com o setor de matéria. Nesse sentido, para dar continuidade ao nosso trabalho, pretendemos investigar a função de dois quando consideramos acoplamento entre o campo Bumblebee e campos de matéria (escalar e espinorial).

6 CONCLUSÃO

Nessa dissertação, inicialmente introduzimos as técnicas de integração funcional onde analisamos teorias livres e teorias com interação. Feito isso, revisamos a violação de simetria de Lorentz e estudamos correções radiativas. Como modelo teórico, partimos do modelo Bumblebee com auto interação devido a um potencial suave que viola simetria de Lorentz. Nesse modelo, obtemos o propagador, analisamos os modos de propagação e, por fim, estudamos as correções a um loop para a função de dois pontos.

Como é característico de modelos com violação de uma simetria global, temos o aparecimento de um modo transversal não massivo que pode ser indentificado como um modo de Nambu-Goldstone. Por outro lado, temos também o aparecimento de um modo longitudinal massivo que tem natureza não física. Além disso, mostramos que a auto energia do campo β_μ não é transversal implicando que o modo massivo é excitado pelos termos de auto interação do campo Bumblebee.

Um ponto importante do Modelo Bumblebee é que o potencial de auto interação, além de violar a simetria de Lorentz, também viola a simetria de calibre. Para recuperar essa simetria foi introduzido o Campo de Stueckelberg. Com esse acoplamento, obtemos o propagador tanto para o campo β_μ quanto para o campo de Stueckelberg. A partir dos polos dos propagadores, obtemos as relações de dispersão. Conseguimos um conjunto de vetores para β_μ que evitam instabilidade.

Como resultado, extraímos as regras de Feynman e calculamos a função de dois pontos do campo no modelo Bumblebee-Stueckelberg e mostramos que, assim como no modelo Bumblebee original, a auto energia não é transversal. Outro resultado importante é que, no modelo Bumblebee-Stueckelberg, o propagador para o campo β_μ torna-se idêntico ao propagador da Eletrodinâmica no gauge não linear. No modelo Bumblebee sem a presença do campo de Stueckelberg, o propagador acaba dependendo da constante de acoplamento e tem uma forma similar ao propagador da Teoria de Maxwell no gauge não linear.

Como perspectiva futura, pretendemos estudar as correções radiativas no modelo Bumblebee-Stueckelberg considerando acoplamento com matéria e discutir um esquema de renormalização para essa teoria. Também podemos discutir uma equivalência em nível quântico entre o modelo Bumblebee-Stueckelberg e a Eletrodinâmica de Maxwell no gauge não linear. Por fim, outra perspectiva consiste em considerar o modelo de Kalb Ramond com violação espontânea de Lorentz, que é uma generalização natural do modelo Bumblebee.

REFERÊNCIAS

- [1] KOSTELECKÝ, V. A.; SAMUEL, S. Spontaneous breaking of lorentz symmetry in string theory. *Physical Review D*, APS, v. 39, n. 2, p. 683, 1989.
- [2] CARROLL, S. M. et al. Noncommutative field theory and lorentz violation. *Physical Review Letters*, APS, v. 87, n. 14, p. 141601, 2001.
- [3] HOŘAVA, P. Quantum gravity at a lifshitz point. *Physical Review D*, APS, v. 79, n. 8, p. 084008, 2009.
- [4] COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. Lorentz-violating extension of the standard model. *Physical Review D*, APS, v. 58, n. 11, p. 116002, 1998.
- [5] COLLADAY, D.; KOSTELECKÝ, V. A. Cpt violation and the standard model. *Physical Review D*, APS, v. 55, n. 11, p. 6760, 1997.
- [6] CARROLL, S. M.; FIELD, G. B.; JACKIW, R. Limits on a lorentz-and parity-violating modification of electrodynamics. *Physical Review D*, APS, v. 41, n. 4, p. 1231, 1990.
- [7] KOSTELECKÝ, V. A.; MEWES, M. Signals for lorentz violation in electrodynamics. *Physical Review D*, APS, v. 66, n. 5, p. 056005, 2002.
- [8] BLUHM, R.; KOSTELECKÝ, V. A. Spontaneous lorentz violation, nambu-goldstone modes, and gravity. *Physical Review D*, APS, v. 71, n. 6, p. 065008, 2005.
- [9] BLUHM, R. Explicit versus spontaneous diffeomorphism breaking in gravity. *Physical Review D*, APS, v. 91, n. 6, p. 065034, 2015.
- [10] HIGGS, P. W. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. *Physical Review Letters*, APS, v. 13, n. 16, p. 508, 1964.
- [11] MALUF, R.; NEVES, J. C. Black holes with a cosmological constant in bumblebee gravity. *Physical Review D*, APS, v. 103, n. 4, p. 044002, 2021.
- [12] KANZI, S.; SAKALLI, I. Gup modified hawking radiation in bumblebee gravity. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 946, p. 114703, 2019.
- [13] LI, Z.; ÖVGÜN, A. Finite-distance gravitational deflection of massive particles by a kerr-like black hole in the bumblebee gravity model. *Physical Review D*, APS, v. 101, n. 2, p. 024040, 2020.
- [14] CASANA, R. et al. Exact schwarzschild-like solution in a bumblebee gravity model. *Physical Review D*, APS, v. 97, n. 10, p. 104001, 2018.
- [15] ÖVGÜN, A.; JUSUFI, K.; SAKALLI, İ. Exact traversable wormhole solution in bumblebee gravity. *Physical Review D*, APS, v. 99, n. 2, p. 024042, 2019.
- [16] OLIVEIRA, R. et al. Quasinormal modes of bumblebee wormhole. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 36, n. 10, p. 105013, 2019.

- [17] MALUF, R. et al. Matter-gravity scattering in the presence of spontaneous lorentz violation. *Physical Review D*, APS, v. 88, n. 2, p. 025005, 2013.
- [18] MALUF, R.; SILVA, J.; ALMEIDA, C. Radiative corrections in bumblebee electrodynamics. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 749, p. 304–308, 2015.
- [19] MALUF, R. et al. Einstein-hilbert graviton modes modified by the lorentz-violating bumblebee field. *Physical Review D*, APS, v. 90, n. 2, p. 025007, 2014.
- [20] ESCOBAR, C.; MARTIN-RUIZ, A. Equivalence between bumblebee models and electrodynamics in a nonlinear gauge. *Physical Review D*, APS, v. 95, n. 9, p. 095006, 2017.
- [21] HERNASKI, C. Quantization and stability of bumblebee electrodynamics. *Physical Review D*, APS, v. 90, n. 12, p. 124036, 2014.
- [22] SANTOS, A. et al. Gödel solution in the bumblebee gravity. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, v. 30, n. 02, p. 1550011, 2015.
- [23] JESUS, W.; SANTOS, A. Gödel-type universes in bumblebee gravity. *International Journal of Modern Physics A*, World Scientific, v. 35, n. 09, p. 2050050, 2020.
- [24] MALUF, R. et al. Antisymmetric tensor propagator with spontaneous lorentz violation. *EPL (Europhysics Letters)*, IOP Publishing, v. 124, n. 6, p. 61001, 2019.
- [25] LESSA, L. et al. Modified black hole solution with a background kalb–ramond field. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 80, n. 4, p. 1–9, 2020.
- [26] ALTSCHUL, B.; BAILEY, Q. G.; KOSTELECKÝ, V. A. Lorentz violation with an antisymmetric tensor. *Physical Review D*, APS, v. 81, n. 6, p. 065028, 2010.
- [27] BLUHM, R.; FUNG, S.-H.; KOSTELECKÝ, V. A. Spontaneous lorentz and diffeomorphism violation, massive modes, and gravity. *Physical Review D*, APS, v. 77, n. 6, p. 065020, 2008.
- [28] ALTSCHUL, B.; KOSTELECKÝ, V. A. Spontaneous lorentz violation and nonpolynomial interactions. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 628, n. 1-2, p. 106–112, 2005.
- [29] PÉREZ-VICTORIA, M. Exact calculation of the radiatively induced lorentz and cpt violation in qed. *Physical Review Letters*, APS, v. 83, n. 13, p. 2518, 1999.
- [30] JACKIW, R.; KOSTELECKÝ, V. A. Radiatively induced lorentz and cpt violation in electrodynamics. *Physical Review Letters*, APS, v. 82, n. 18, p. 3572, 1999.
- [31] KOSTELECKÝ, V. A.; PICKERING, A. G. Vacuum photon splitting in lorentz-violating quantum electrodynamics. *Physical review letters*, APS, v. 91, n. 3, p. 031801, 2003.
- [32] NASCIMENTO, J. R. et al. Lorentz-cpt violation, radiative corrections and finite temperature. *Journal of High Energy Physics*, IOP Publishing, v. 2007, n. 06, p. 016, 2007.
- [33] FERRARI, A.; NASCIMENTO, J.; PETROV, A. Y. Radiative corrections and lorentz violation. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 80, p. 1–13, 2020.
- [34] SREDNICKI, M. *Quantum field theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007.

- [35] PESKIN, M. *An introduction to quantum field theory*. [S.l.]: CRC press, 2018.
- [36] FEYNMAN, R. *The Principle of Least Action in Quantum Mechanics*. Tese (Doutorado) — Université de Princeton, 1942.
- [37] HEISENBERG, W. *The physical principles of the quantum theory*. [S.l.]: Courier Corporation, 1949.
- [38] SCHRÖDINGER, E. An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules. *Physical review*, APS, v. 28, n. 6, p. 1049, 1926.
- [39] POPOV, V. N. *Functional integrals in quantum field theory and statistical physics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2001. v. 8.
- [40] RYDER, L. H. *Quantum field theory*. [S.l.]: Cambridge university press, 1996.
- [41] GOMES, M. O. C. *Teoria Quântica dos Campos Vol. 39*. [S.l.]: Edusp, 2002.
- [42] FERRARI, A. A busca por violações da simetria de lorentz: testando os princípios da relatividade restrita na escala de planck. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 41, n. 4, 2019.
- [43] KOSTELECKÝ, V. A.; LANE, C. D.; PICKERING, A. G. One-loop renormalization of lorentz-violating electrodynamics. *Physical Review D*, APS, v. 65, n. 5, p. 056006, 2002.
- [44] CASANA, R. et al. Effects of a c p t-even and lorentz-violating nonminimal coupling on electron-positron scattering. *Physical Review D*, APS, v. 86, n. 12, p. 125033, 2012.
- [45] CASANA, R. et al. New c p t-even and lorentz-violating nonminimal coupling in the dirac equation. *Physical Review D*, APS, v. 87, n. 4, p. 047701, 2013.
- [46] CASANA, R. et al. Radiative generation of the cpt-even gauge term of the sme from a dimension-five nonminimal coupling term. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 726, n. 4-5, p. 815–819, 2013.
- [47] GAUGES, N. *Quantization of Yang-Mills and Chern-Simons Theory in Axial Type Gauges*. [S.l.]: World Scientific (Singapore), 1994.
- [48] LEIBBRANDT, G. Light-cone gauge in yang-mills theory. *Physical Review D*, APS, v. 29, n. 8, p. 1699, 1984.
- [49] JR, M. M. F. et al. Unitarity in stueckelberg electrodynamics modified by a carroll-field-jackiw term. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 804, p. 135379, 2020.
- [50] CAPPER, D.; LEIBBRANDT, G. Ward identities in a general axial gauge. i. yang-mills theory. *Physical Review D*, APS, v. 25, n. 4, p. 1002, 1982.
- [51] RUEGG, H.; RUIZ-ALTABA, M. The stueckelberg field. *International Journal of Modern Physics A*, World Scientific, v. 19, n. 20, p. 3265–3347, 2004.
- [52] STUECKELBERG, E. Forces of interaction in electrodynamics and in the field theory of nuclear forces.(parts ii and iii). *Helv. Phys. Acta*, v. 11, p. 299–328, 1938.

APÊNDICE A – MECANISMO DE HIGGS

No contexto atual de Teorias de campos, existem cinco maneiras de gerar massa para um campo vetorial: mecanismo de Higgs, procedimento de Proca, procedimento de Stueckelberg, massa topológica de Chern Simons e altas derivadas. Nesse apêndice discutiremos o mecanismo de Higgs que o método mais conhecido de geração de massa para campos vetoriais. Tal mecanismo foi concebido no contexto do modelo padrão e é baseado a violação espontânea da simetria de gauge. Na teoria eletrofraca, por exemplo, o mecanismo de Higgs é responsável por fornecer massa para os bosons vetoriais W^+ , W^- e Z^0 . Em nossa discussão, iremos nos restringir a simetria local $U(1)$ que para um campo ϕ temos a seguinte transformação

$$\phi'(x) = e^{-iq\theta} \phi(x), \quad (\text{A.1})$$

onde o parametro q é um número real. O fator de estarmos tratando com uma simetria local implica que o parâmetro depende do ponto no espaço tempo, ou seja, $\theta = \theta(x)$. Agora iremos considerar um acoplamento entre o campo ϕ e o campo A_μ através do acoplamento mínimo $\nabla_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$. Para o campo A_μ , temos a seguinte transformação de gauge

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \theta. \quad (\text{A.2})$$

Esse modelo vetorial é descrito pela seguinte lagrangeana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \overline{\nabla_\mu \phi} \nabla^\mu \phi - V(\phi), \quad (\text{A.3})$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o field strength do campo A_μ e $V(\phi)$ é o potencial de Higgs. Tal potencial assume a seguinte forma

$$V = \frac{m^2}{2v^2}(\phi\phi - v^2)^2, \quad (\text{A.4})$$

onde v é identificado como o valor esperado no vácuo do campo ϕ , ou seja, $\langle \phi \rangle = v$. Podemos considerar um flutuação em torno de v

$$\phi(x) = v + \frac{1}{\sqrt{2}}h(x). \quad (\text{A.5})$$

Então, a lagrangiana (A.3) é escrita em termos de h como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{free}^A + \mathcal{L}_{free}^h + \mathcal{L}_{int}, \quad (\text{A.6})$$

onde

$$\mathcal{L}_{free}^A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + q^2v^2A_\mu A^\mu, \quad (\text{A.7})$$

$$\mathcal{L}_{free}^h = \frac{1}{2}\partial_\mu h \partial^\mu h - m^2 h^2, \quad (\text{A.8})$$

$$\mathcal{L}_{int} = \sqrt{2}vq^2hA_\mu A^\mu - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{m^2}{v}h^3 - \frac{m^2}{8v^2}h^4. \quad (\text{A.9})$$

O primeiro termo \mathcal{L}_{free}^A representa a lagrangiana bilinear do campo A_μ . Essa lagrangiana tem um termo tipo Proca indicando uma massa $\sqrt{2}qv$ para o campo A_μ . O termo \mathcal{L}_{free}^h representa a lagrangiana bilinear do campo h . E por fim, o termo \mathcal{L}_{int} representa a lagrangiana com termos de interação entre A_μ e h e termos de auto interação do campo h

APÊNDICE B – CAMPO DE STUECKELBERG

Nesse apêndice, faremos uma breve revisão sobre o procedimento de Stueckelberg que foi usado no capítulo 5 para restaurar a simetria de calibre. Para um maior aprofundamento, recomendamos ao leitor a seguinte referencia [51]. Vamos partir da lagrangiana de Proca que descreve ftons massivos

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu, \quad (\text{B.1})$$

e que fornece a seguinte equação de movimento

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2A^\nu = 0. \quad (\text{B.2})$$

A lagrangiana pode ser escrita na forma bilinear

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}A_\mu [(\square + m^2) - \partial^\mu \partial^\nu] A_\nu, \quad (\text{B.3})$$

fornecendo o seguinte propagador para o campo A_μ

$$\Delta_F^{\mu\nu}(k) = \frac{-i}{k^2 - m^2} \left[\eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{m^2} \right]. \quad (\text{B.4})$$

A presença do termo $\frac{k^\mu k^\nu}{m^2}$ no propagador acima leva a divergências quadraticas no ultravioleta. Contudo, essas divergências não podem ser eliminadas por um processo de renormalização, ou seja, o modelo de Proca é não-renormalizável.

O termo massivo em A.1 quebra a simetria de calibre da teoria. No contexto de trabalhos sobre estabilidade nuclear [52], Stueckelberg desenvolveu um modelo para ftons massivos que preserva a simetria de calibre. Esse modelo, assim como o modelo de Proca, leva a um potencial do tipo Yukawa. Stueckelberg partiu do modelo de Proca e introduziu o seguinte deslocamento no campo A_μ

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{m} \partial_\mu \phi, \quad (\text{B.5})$$

e o seguinte fixador de calibre

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu - \xi m \phi)^2, \quad (\text{B.6})$$

e substituindo em A.1 obtemos a seguinte lagrangeana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu + \frac{1}{2\xi}A_\mu\partial^\mu\partial^\nu A_\nu + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}\xi m^2\phi^2. \quad (\text{B.7})$$

Essa lagrangeana fornece o seguinte propagador para o campo A_μ

$$\Delta_F^{\mu\nu}(k) = \frac{-i}{k^2 - m^2} \left[\eta^{\mu\nu} - \frac{(1 - \xi)k^\mu k^\nu}{k^2 - \xi m^2} \right]. \quad (\text{B.8})$$

Para esse propagador, existem três possibilidades para ξ . Primeira é quando $\xi \rightarrow 0$, onde temos uma teoria renormalizável, enquanto que para $\xi = 1$, recobrimos o propagador da teoria de Proca. A última situação é quando temos $\xi = 0$, onde temos a condição de transversalidade do propagador. Para o campo de Stueckelberg, obtemos o seguinte propagador

$$D(k) = \frac{i}{k^2 - \xi m^2}. \quad (\text{B.9})$$

Os propagadores para A_μ e ϕ possuem o mesmo polo do tipo $k^2 - \xi m^2 = 0$. Esse polo tem dependência do fixador de gauge.

APÊNDICE C – GAUGE AXIAL E PRESCRIÇÃO PV

Nesse apêndice, falaremos sobre Gauge axial e a Prescrição utilizada para avaliar as integrais presentes nesse trabalho. A condição de gauge axial é dada por

$$n^\mu A_\mu^a = 0, \quad (\text{C.1})$$

onde $n^\mu = (n_0, \mathbf{n})$ e o fixador de gauge é dado por

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\alpha} (n \cdot A^a)^2. \quad (\text{C.2})$$

Considerando a condição acima, o propagador do campo A_μ^a na teoria de Yang-Mills no gauge axial é escrito como

$$\Delta_{\mu\nu}^{ab}(k) = \frac{i\delta^{ab}}{k^2 + i\epsilon} \left[-\eta_{\mu\nu} + \frac{k_\mu b_\nu + k_\nu b_\mu}{(b \cdot k)} - \frac{b^2 k_\mu k_\nu}{(b \cdot k)^2} \right], \quad (\text{C.3})$$

onde há um polo $k^2 = 0$ e um polo $(b \cdot k) = 0$. Na quantização de teorias de Yang-Mills foi desenvolvido uma prescrição para lidar com os polos do tipo $(b \cdot k)$. Essa prescrição é conhecida como Prescrição PV. Nosso ponto de partida é a seguinte relação

$$\frac{1}{x \pm i\mu} = PV \frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x), \quad (\text{C.4})$$

que implica diretamente em

$$PV \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \lim_{\mu \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x + i\mu} + \frac{1}{x - i\mu} \right], \quad (\text{C.5})$$

e chamado $x = (b \cdot k)$

$$PV \frac{1}{(b \cdot k)} = \frac{1}{2} \lim_{\mu \rightarrow 0} \left[\frac{1}{(b \cdot k + i\mu)} + \frac{1}{(b \cdot k - i\mu)} \right]. \quad (\text{C.6})$$

Essa expressão pode ser generalizada para tratar com polos do tipo $(b \cdot k)^\beta$

$$PV \frac{1}{(b \cdot k)^\beta} = \frac{1}{2} \lim_{\mu \rightarrow 0} \left[\frac{1}{(b \cdot k + i\mu)^\beta} + \frac{1}{(b \cdot k - i\mu)^\beta} \right] \quad (\text{C.7})$$

da relação acima podemos escrever

$$PV \frac{1}{(b \cdot k)} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{b \cdot k}{(b \cdot k)^2 + \mu^2} \quad (\text{C.8})$$

$$\begin{aligned}
PV \frac{1}{(b \cdot k)^2} &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{(b \cdot k)^2 - \mu^2}{[(b \cdot k)^2 - \mu^2]^2} \\
&= \lim_{\mu \rightarrow 0} \left(1 + 2\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} \right) \frac{1}{(b \cdot k)^2 + \mu^2}
\end{aligned} \tag{C.9}$$

Agora, veremos como avaliar integrais empregando essa prescrição. Vamos considerar a seguinte integral

$$I = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu}{(k-p)^2 (b \cdot k)}, \tag{C.10}$$

que usando a relação B.8 torna-se

$$I = \lim_{\mu \rightarrow 0} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu (b \cdot k)}{(k-p)^2 [(b \cdot k)^2 + \mu^2]}. \tag{C.11}$$

Agora, usando a parametrização de Schwinger

$$\frac{1}{A^N} = \frac{1}{\Gamma(N)} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{N-1} e^{-\alpha A}, \tag{C.12}$$

podemos escrever

$$\frac{1}{(b \cdot k)^2 + \mu^2} \int_0^\infty \alpha^{N-1} e^{-\alpha [(b \cdot k)^2 + \mu^2]}. \tag{C.13}$$

Com essa parametrização, podemos inverter a ordem de integração e integrar primeiro em k com a ajuda da seguinte relação

$$\int d^D k k_\mu e^{-\alpha k^2 - 2\beta k \cdot p - \gamma (b \cdot k)^2} = - \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^{\frac{D}{2}} \frac{\beta \alpha^{-1/2}}{(\alpha + \gamma b^2)^{1/2}} \left[p_\mu - b_\mu \frac{\gamma (b \cdot k)}{\alpha + \gamma b^2} \right] e^{\frac{\beta^2 p^2}{\alpha} - \frac{\gamma \beta^2 (b \cdot k)^2}{\alpha(\alpha + \gamma b^2)}}. \tag{C.14}$$

Por fim, fazendo a integração em α , obtemos

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu}{(k-p)^2 (b \cdot k)} = \frac{2(b \cdot k)}{b^2} \left[p_\mu - b_\mu \frac{(b \cdot k)}{b^2} \right] I_{div}, \tag{C.15}$$

onde I_{div}  a parte divergente da integral I

$$I_{div} = \frac{i}{8\pi^2 \epsilon}. \tag{C.16}$$