UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

José Tiago Nogueira Cruz

Aplicações de Cálculo Diferencial Exterior a Teoria Econômica

Fortaleza
2008

José Tiago Nogueira Cruz

Aplicações de Cálculo Diferencial Exterior a Teoria Econômica

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira.

Fortaleza
2008

folha de aprovação

Aos meus pais Jesualdo, Zezita e irmãos Tiarlos e Tiarlison e a minha noiva Leidmar.

AGRADECIMENTOS

A Deus por propiciar esse momento e por ter estado comigo em todos os momentos da minha vida, me dando força, perseverança e paciência.

Aos meus pais, pelo apoio, compreensão e amor. E aos meus irmãos, Tiarlos e Tiarlison, por estarem sempre ao meu lado.

A minha noiva Leidmar, pelo amor, dedicação, companheirismo e compreensão.

As minhas tias Socorro, Zezilma, Nilzete, Onete e Vânia, aos meus tios José Ilton e Nilson, pela ajuda, apoio e incetivo e aos meus primos Júnior, Jéssica, Mabel, Caroline, Lídia, Camile e Isac.

Ao meu orientador Jorge Herbert, pela grande paciência, compreensão, atenção e enorme ajuda para a apresentação de tal dissertação.

Agradeço aos meus grandes amigos Jocel Faustino e Erislânio Fernandes, pelo apoio e incentivo recebidos, bem como pelo companheirismo e bons conselhos passados. Agradeço também ao Flávio, pelo apoio e prestatividade durante o mestrado.

Aos meus amigos Camilo Carlos, Ícaro Carlos e Paulo Estevão pela amizade e fidelidade. Agradeço também a Rudinei, Luciano, Marcus, Geanderson, Tiago e Hiroito pelos momentos de diversão.

Aos meus professores de graduação Zelalber Gondim, Juscelino Silva, Fernando Luis, Hildênio, Geraldo, Alves, Helder, Carlos Humberto e Evandro.

Aos meus colegas de graduação Rennan, João Paulo, Zildemberg, Marias das Dores, Gerlânea, Edilanea, Erlânia, Mascarenhas, Marcos, Arlene, Elani, Lindemberg. Registro aqui a todos meus sinceros agradecimentos.

Aos companheiros da pós-graduação: Edinardo, João Franscisco, Thadeu, Adam Oliveira, Ernani, Hallyson, Manoel, Calvi, Paulo Alexandre, Jobson, Tiago Silva, Fabrício, Fagner, Murilo, Edno, Daniel, Denize, Wilker, Carpegiane, Darlan, Michel, David Carneiro, Elivaldo.

Aos professores Abdênago Barros, Luquésio Petrola, Lev Birbrair, Antônio Caminha, Robério Rogerio e Alexandre Fernandes pelos conhecimentos transmitidos durante as disciplinas de mestrado.

A Andréa, Erivan e ao Adriano, pela prestatividade e eficiência nos assuntos burocráticos da pós-graduação.

Ao CNPQ e FUNCAP, pelo suporte financeiro.

"Creio que educar é basicamente habilitar as novas gerações no exercício de uma visão não ingênua da realidade, de maneira que seu olhar tenha em conta o mundo, não como uma suposta realidade objetiva em si mesma, mas como o objeto de transformação ao qual o ser humano aplica sua ação."
Mario Luiz Rodrigues Cobos

RESUMO

Ao definir uma 1-forma diferencial em $\mathbb{R}^{n*}$ por $\omega_p = \sum_{i=1}^{n} x^i(p)\mathrm{d}p_i$, e ao consideramos uma função $x : \mathbb{R}^{n*} \to \mathbb{R}^{n*}$, satisfazendo a condição $\sum_{i=1}^{n} x^i(p)p_i = 1$. Investigamos condições necessárias e suficientes para a existência de funções reais $\lambda : \mathbb{R}^{n*} \to \mathbb{R}$ e $V : \mathbb{R}^{n*} \to \mathbb{R}$ tais que $\omega = \lambda\,\mathrm{d}V$. Investigamos, também, para dada uma 1-forma diferencial ω, encontrar funções reais diferenciáveis φ, ψ, U e V tais que $\omega = \varphi\,\mathrm{d}U + \psi\,\mathrm{d}V$, e encontrar, para uma dada 1-forma diferencial ω em um aberto $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$, funções côncavas u, v e funções positivas a, b tais que $\omega = a\,\mathrm{d}u + b\,\mathrm{d}v$.

ABSTRACTS

Sumário

Introdução

Em uma série de trabalhos iniciada em meados nos anos 90 próximos passados, Ivar Ekeland e colaboradores empregaram métodos de Geometria Diferencial no estudo de problemas analíticos em Microeconomia. O programa sugerido por I. Ekeland parte da premissa epistemológica de que métodos analíticos possam ser úteis na compreensão de fenômenos econômicos, reproduzindo, em alguma medida, a eficácia das ferramentas matemáticas em Física. Concretamente, trata-se de utilizar estratégias combinando equações diferenciais parciais, sobretudo em sua versão livre de coordenadas que denominamos correntemente sistemas diferenciais exteriores.

Um dos capítulos da Microeconomia, a Teoria do Consumidor tem por objetivo descrever e estabelecer fundamentos teóricos para a escolha racional de consumidores em um mercado, sujeita a restrições orcamentárias. A questão abordada, neste ponto, é o de encontrar-se condições necessárias e suficientes para uma certa aplicação representar a demanda por um conjunto dado de bens, a preços fixados, fixada uma função utilidade que ordena quantitativamente as preferências de um consumidor tomado isoladamente.

A solução deste problema é uma perfeita ilustração de como um resultado clássico em Geometria Diferencial, o Teorema de Frobenius, pode ser reinterpretado em termos da linguagem de Análise Econômica como a igualmente clássica condição de Slutsky.

No Capítulo 2, descrevemos como a obtenção da demanda x, a partir de uma função de utilidade indireta V é reformulada como a existência de soluções para a equação diferencial exterior

$$\omega = \lambda \, dV, \tag{1}$$

onde $\omega = x^i dp_i$ e λ é um multiplicador de Lagrange positivo. Neste caso, V é uma função com certas propriedades de concavidade.

As duas versões do Teorema de Frobenius, enunciadas e demonstradas neste capítulo nos Teoremas 1 e 2, redundam no Teorema 3, em que a condição de integrabilidade de Frobenius é reescrita como a condição de Slutsky sobre o jacobiano de x.

Pela manifesta proximidade dos problemas de otimização de que tratamos com a notação usual em Geometrias Simplética e de Contato, dedicamos uma breve seção do Capítulo 1 a apresentação de condições de resolução da equação eiconal, expostas no Teorema 4, utilizando o método das características apresentado, aqui, na linguagem do cálculo exterior.

Outro resultado fundamental da teoria de sistemas diferenciais exteriores, o Teorema de Pfaff, que estabelece, na apresentação particular que lhe é conferida no Teorema 5 do Capítulo 3, condições suficientes e necessárias para escrever-se uma dada forma ω como combinação linear de diferenciais exatas, a exemplo de

$$\omega = f\,dU + g\,dV, \tag{2}$$

é utilizado, após sucessivas modificações, na dedução das condições necessárias encontradas por Chiappori e Ekeland. Este conjunto de condições permite decidir quando uma dada função x representa, desta vez, a demanda agregada de dois consumidores de um conjunto de bens públicos, a preços discriminados.

Um refinamento deste resultado, o Teorema 6 do Capítulo 3, obtido empregando-se o Teorema de Cartan-Kaehler, garante que, se ω é analítica real, as funções f, g, u e v na decomposição acima são positivas e, ademais, as duas últimas são côncavas. Estas restrições tornam o problema relevante, do ponto de vista de aplicações a Economia, pois, deste modo, as funções representam utilidades e o problema de otimização subjacente reduz-se a encontrar um ótimo no sentido de Pareto.

O Capítulo 1 agrupa diversas noções e fatos básicos sobre formas diferenciais. Omitimos, em parte por questões de brevidade, uma exposição pormenorizada do instrumental básico de Otimização de que fizemos uso. Uma outra omissão refere-se ao Teorema de Cartan-Kaehler, cuja complexidade técnica seria, certamente, objeto de um outro texto, de dimensão ainda superior a este.

Os artigos de pesquisa em que nos baseamos para a elaboração desta dissertação, em sua maioria assinados por Ekeland e colaboradores, estão devidamente enumerados nas referências e ao longo do texto.

Capítulo 1

Formas Diferenciais

1.1 Vetores e Covetores

1.1.1 Vetores

Denotamos o espaço euclidiano n-dimensional por $\mathbb{R}^n$, ou seja, definimos

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x^1, \ldots, x^n) : x^i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}. \tag{1.1}$$

O *espaço tangente* a $\mathbb{R}^n$ em um dado ponto $x \in \mathbb{R}^n$ é, por definição, o espaço vetorial

$$T_x\mathbb{R}^n = \{(x, v) : v \in \mathbb{R}^n\}. \tag{1.2}$$

Dizemos que (x, v) é um vetor tangente a $\mathbb{R}^n$ em x. Intuitivamente, $(x, v) \in T_x\mathbb{R}^n$ pode ser entendido como o vetor com origem em x obtido pela translação do vetor $v \in \mathbb{R}^n$ para o ponto x. Em vista disto, denotamos

$$v_x = (x, v)$$

e, por vezes, omitimos o índice x. As operações vetoriais em $T_x\mathbb{R}^n$ são definidas como

$$(x, v) + (x, w) = (x, v + w), \quad \alpha(x, v) = (x, \alpha v), \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \quad x, v, w \in \mathbb{R}^n. \tag{1.3}$$

Com respeito as coordenadas naturais $x^1, \ldots, x^n$ em $\mathbb{R}^n$, destaca-se a base canônica

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n} \tag{1.4}$$

em $\mathbb{R}^n$, definida por

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = (0, \ldots, \underbrace{1}_{i}, \ldots, 0), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Esta coleção de vetores determina, em cada ponto $x \in \mathbb{R}^n$, uma base de $T_x\mathbb{R}^n$, a saber

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_x = (x, \frac{\partial}{\partial x^i}). \tag{1.5}$$

Deste modo, se $v \in \mathbb{R}^n$ é decomposto na base canônica como

$$v = v^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + v^n \frac{\partial}{\partial x^n},$$

o vetor correspondente em $T_x\mathbb{R}^n$ é escrito em componentes como

$$v_x = v^1 \frac{\partial}{\partial x^1}|_x + \ldots + v^n \frac{\partial}{\partial x^n}|_x.$$

A razão para denotar-se como acima a base canônica provém do fato de que cada um dos vetores na base correspondente em $T_x\mathbb{R}^n$ pode ser visto como uma *derivação*: dada uma função real, diferenciável em uma vizinhança aberta de $x \in \mathbb{R}^n$, definimos

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_x[f] = \frac{\partial f}{\partial x^i}|_x. \tag{1.6}$$

Mais geralmente, dado $v_x = (x, v) \in T_x\mathbb{R}^n$, pomos

$$v_x[f] = \frac{\partial f}{\partial v}|_x, \tag{1.7}$$

onde o lado direito denota a derivada direcional de f no ponto x relativamente a direção v_x. Como sabemos do Cálculo,

$$\frac{\partial f}{\partial v}|_x = v^1 \frac{\partial f}{\partial x^1}|_x + \ldots + v^n \frac{\partial f}{\partial x^n}|_x. \tag{1.8}$$

Sabemos, igualmente, que a derivada direcional acima pode ser calculada como a taxa de variação de f ao longo de uma curva

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad \gamma(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t)),$$

com $\gamma(0) = x, x^i{}'(0) = v^i$, ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial v}|_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0} f(\gamma(t)). \tag{1.9}$$

É natural definirmos o vetor velocidade desta curva em $t = 0$ como o vetor tangente $\gamma'(0) \in T_x\mathbb{R}^n$ dado por

$$\gamma'(0) = \sum_{i=1}^{n} x^i{}'(0) \frac{\partial}{\partial x^i}|_x,$$

que, por construção, coincide com v_x.

Portanto, concluímos que um dado vetor $v_x \in T_x\mathbb{R}^n$ pode ser alternativamente considerado como uma derivação de funções reais ou como vetor velocidade de uma curva passando por x em $t = 0$.

Utilizando as coordenadas cartesianas e as bases fixadas acima, podemos associar a cada vetor $v_x = (x, v) \in T_x\mathbb{R}^n$ um ponto em $\mathbb{R}^{2n}$ segundo a regra

$$(x, v) \in T_x\mathbb{R}^n \mapsto (x^1, \ldots, x^n, v^1, \ldots, v^n), \quad \text{se} \quad v = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{1.10}$$

o que permite identificar globalmente o *fibrado tangente*

$$T\mathbb{R}^n = \bigsqcup_{x \in \mathbb{R}^n} T_x\mathbb{R}^n = \big\{(x, v) : x \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^n\big\} \tag{1.11}$$

ao espaço vetorial $\mathbb{R}^{2n}$. Segundo este formalismo, um *campo vetorial* em $\mathbb{R}^n$ é visto como uma aplicação diferenciável

$$X : \mathbb{R}^n \to T\mathbb{R}^n \tag{1.12}$$

satisfazendo a propriedade

$$X(x) \in T_x\mathbb{R}^n.$$

A diferenciabilidade, por definição, requer que as componentes $v^i(x)$, $1 \leq i \leq n$, definidas por

$$X(x) = \sum_{i=1}^{n} v^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}|_x,$$

sejam diferenciáveis. Equivalentemente, diz-se que X é diferenciável quando, dada uma função real diferenciável f, a função Xf definida por

$$x \mapsto Xf(x) = X(x)[f]$$

é também diferenciável.

1.1.2 Covetores

Fixado $x \in \mathbb{R}^n$, ao espaço tangente $T_x\mathbb{R}^n$ é associado um espaço vetorial dual $T_x^*\mathbb{R}^n$, cujos elementos, ditos 1-*formas* ou *covetores* são, por definição, os funcionais lineares

$$\omega : T_x\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \tag{1.13}$$

em $T_x\mathbb{R}^n$.

Um exemplo fundamental de covetor em $x \in \mathbb{R}^n$ é a diferencial de uma função diferenciável f no ponto x, definida por

$$\mathrm{d}f(x) \cdot v = v_x[f]. \tag{1.14}$$

Em particular, dada a função coordenada $x^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, que associa a um ponto de $\mathbb{R}^n$ sua i-ésima coordenada, temos

$$\mathrm{d}x^i(x) \cdot v = v_x[x^i].$$

Todavia, caso

$$v_x = \sum_{j=1}^{n} v^j \frac{\partial}{\partial x^j},$$

segue que

$$\mathrm{d}x^i(x) \cdot v = \sum_{j=1}^{n} v^j \frac{\partial}{\partial x^j}[x^i] = \sum_{j=1}^{n} v^j \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \sum_{j=1}^{n} v^j \delta_j^i = v^i.$$

Logo, em suma, a diferencial $\mathrm{d}x^i$ em $T_x^*\mathbb{R}^n$ associa a cada vetor $v_x \in T_x\mathbb{R}^n$ sua i-ésima componente na base $\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_x\}_{i=1}^n$. Isto significa que as diferenciais

$$\mathrm{d}x^1, \ldots, \mathrm{d}x^n$$

constituem, em x, uma base em $T_x^*\mathbb{R}^n$, dual a base $\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_x\}_{i=1}^n$ em $T_x\mathbb{R}^n$. Dado um covetor $\omega \in T_x^*\mathbb{R}^n$, escrito nesta base como

$$\omega = a_1 \mathrm{d}x^1 + \ldots + a_n \mathrm{d}x^n,$$

temos

$$\omega(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathrm{d}x^j(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \sum_{j=1}^{n} a_j \delta_i^j = a_i.$$

Por fim, aplicando ω a v, obtemos um número real (um *escalar*)

$$\omega \cdot v = a_1 v^1 + \ldots + a_n v^n = \sum_{i=1}^{n} a_i v^i. \tag{1.15}$$

Esta operação é igualmente denominada *contração* ou *emparelhamento* e denotamo-la também por

$$\langle \omega | v \rangle.$$

De maneira análoga a que expusemos acima, consideramos o *fibrado cotangente*

$$T^*\mathbb{R}^n = \bigsqcup_{x \in \mathbb{R}^n} T_x^*\mathbb{R}^n = \big\{(x, \omega) : x \in \mathbb{R}^n,\, \omega \in T_x^*\mathbb{R}^n\big\}. \tag{1.16}$$

Uma 1-*forma diferencial* em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação diferenciável

$$x \in \mathbb{R}^n \mapsto \omega(x) \in T_x^*\mathbb{R}^n, \tag{1.17}$$

de modo que, escrevendo-se em coordenadas

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \mathrm{d}x^i(x), \tag{1.18}$$

as funções componentes

$$x \mapsto a_i(x), \quad 1 \leq i \leq n, \tag{1.19}$$

são diferenciáveis. Equivalentemente, para cada campo vetorial X em $\mathbb{R}^n$, a função real $\langle \omega | X \rangle$ definida por

$$x \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle \omega(x) | X(x) \rangle$$

é diferenciável.

É possível definirmos, no espaço vetorial $T_x^*\mathbb{R}^n$, uma álgebra, dita exterior ou de Grassmann. Definimos o *produto exterior* de 1-formas

$$\omega^1, \ldots, \omega^k \tag{1.20}$$

como a operação multi-linear

$$\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^k (v_1, \ldots, v_k) = \begin{Vmatrix} \langle \omega^1 | v_1 \rangle & \ldots & \langle \omega^1 | v_k \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \omega^k | v_1 \rangle & \ldots & \langle \omega^k | v_k \rangle \end{Vmatrix}, \tag{1.21}$$

definida sobre vetores $v_1, \ldots, v_k$ em $T_x\mathbb{R}^n$. Observamos que $\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^k$, além de multi-linear, é alternante, ou seja, dada uma permutação σ de k elementos, temos

$$\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^k(v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_k}) = (-1)^\sigma \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^k(v_1, \ldots, v_k), \tag{1.22}$$

onde $(-1)^\sigma$ indica o sinal da permutação. Observamos que a multilinearidade e a alternância refletem apenas as conhecidas propriedades de determinantes quanto a combinação linear e a permutação de linhas. Estas propriedades implicam, em particular, que

$$\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^k = 0$$

quando as formas ω^i, $1 \leq i \leq k$, são linearmente dependentes em $T_x^*\mathbb{R}^n$. Concluímos que o produto exterior de k formas é nulo quando $k > n$.

No caso particular em que

$$\omega^1 = \mathrm{d}x^{i_1}, \ldots, \omega^k = \mathrm{d}x^{i_k},$$

para um dado multi-índice

$$I = (i_1, \ldots, i_k), \quad 1 \leq i_j \leq n,\ 1 \leq j \leq k,$$

o produto exterior

$$\mathrm{d}x^I = \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$$

tem uma importante interpretação geométrica. De fato, dados vetores

$$v^1 = \sum_{j=1}^n v_1^j \frac{\partial}{\partial x^j}|_x, \ldots, v^k = \sum_{j=1}^n v_k^j \frac{\partial}{\partial x^j}|_x$$

em $T_x\mathbb{R}^n$, o determinante

$$\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}(v_1, \ldots, v_k) = \left\| \begin{matrix} v_1^1 & \ldots & v_k^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^k & \ldots & v_k^k \end{matrix} \right\| \tag{1.23}$$

corresponde, a menos de sinal, ao k-volume do paralelepípedo gerado pelas projeções

$$\hat{v}^1 = \sum_{j=1}^k v_1^j \frac{\partial}{\partial x^j}|_x, \ldots, \hat{v}^k = \sum_{j=1}^k v_k^j \frac{\partial}{\partial x^j}|_x$$

dos vetores $v^1, \ldots, v^k$ no subespaço linear k-dimensional em $T_x\mathbb{R}^n$ gerado por

$$\frac{\partial}{\partial x^1}|_x, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^k}|_x.$$

Deduzimos que, caso as projeções $\hat{v}^1, \ldots, \hat{v}^k$ sejam linearmente dependentes, o k-volume é nulo, o que condiz com o fato de que o determinante é também nulo.

Ilustrações deste fato geral são tomadas de empréstimo a Álgebra Vetorial em $\mathbb{R}^3$. Lembramos que o volume do paralelepípedo (possivelmente degenerado) determinado por vetores u, v, w em $\mathbb{R}^3$, tangentes a um dado ponto x, é calculado pelo chamado produto misto

$$[u, v, w] = \left\| \begin{array}{ccc} u^1 & v^1 & w^1 \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ u^3 & v^3 & w^3 \end{array} \right\|,$$

expressão que, facilmente, vê-se ser igual a

$$\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3(u, v, w).$$

1.2 Aplicações Diferenciáveis

Uma aplicação $F : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, definida em um aberto U de $\mathbb{R}^m$, é escrita em termos de coordenadas cartesianas $\{x^i\}_{i=1}^m$ e $\{y^j\}_{j=1}^n$ em $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$, respectivamente, como uma lista de n funções reais de m variáveis

$$y^1 = F^1(x^1, \ldots, x^m), \ldots, y^n = F^n(x^1, \ldots, x^m). \tag{1.24}$$

Dizemos que F é diferenciável quando cada uma das funções coordenadas F^i, $1 \leq i \leq n$, o for. Neste caso, a *diferencial* de F em um dado ponto $x \in U$ é, por definição, a aplicação linear $\mathrm{d}F(x) : T_x\mathbb{R}^m \to T_{F(x)}\mathbb{R}^n$, cuja matriz nas bases canônicas $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1}^m$ e $\{\frac{\partial}{\partial y^j}\}_{j=1}^n$ de $T_x\mathbb{R}^m$ e $T_{F(x)}\mathbb{R}^n$, respectivamente, é a matriz jacobiana

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^n}{\partial x^m} \end{bmatrix},$$

as derivadas parciais sendo calculadas em x. Geometricamente, dado um vetor tangente $v_x \in T_x\mathbb{R}^m$, velocidade em $t = 0$ de uma dada curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ com $\gamma(0) = x$, temos

$$\mathrm{d}F(x) \cdot v = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0} F(\gamma(t)).$$

Denotamos, em várias ocasiões, $\mathrm{d}F(x) = F_*(x)$.

Distinguimos três casos com respeito ao posto da aplicação $F_*(x)$. Sendo bijetiva, necessariamente temos $m = n$ e, neste caso, existem vizinhanças abertas U' e V', respectivamente em torno de x e $F(x)$, tais que a restrição $F|_{U'} : U' \to V'$ é um difeomorfismo, ou seja, possui uma inversa também diferenciável. Diz-se, então, que (1.24) define uma mudança (local) de coordenadas. Portanto, aplicações diferenciáveis em que $F_*(x)$ é bijetiva, para todo ponto x em U, são *difeomorfismos locais*.

Se a diferencial $F_*(x)$ é injetiva, para todo ponto $x \in U$, dizemos que F é uma *imersão*. A imagem $S = F(U)$ é, então, uma *subvariedade* m-dimensional imersa em $\mathbb{R}^n$. Ocorre que, para cada $x \in U$, existem um aberto V de $\mathbb{R}^n$ contendo a imagem $F(x) \in S$ e um difeomorfismo $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ sobre um aberto $W = \varphi(V)$ contendo a origem tais que

$$\varphi(V \cap S) = W \cap \{u \in \mathbb{R}^n : u^{m+1} = \ldots = u^n = 0\}.$$

Dizemos que $F : U \subset \mathbb{R}^m \to S \subset \mathbb{R}^n$ é uma *parametrização* de S. O espaço tangente a S em um ponto $y = F(x)$ é, por definição, o subespaço m-dimensional

$$T_yS = F_*(x) \cdot T_x\mathbb{R}^m \subset T_y\mathbb{R}^n. \tag{1.25}$$

Geometricamente, T_yS consiste das velocidades em $t = 0$ de curvas em $\mathbb{R}^n$ da forma $t \mapsto F(\gamma(t))$, onde $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ é uma curva passando por $x \in U$ em $t = 0$. Abreviadamente, dizemos que curvas deste tipo são curvas em S, uma vez que seu traço é um subconjunto de S.

Campos vetoriais ao longo de F são aplicações da forma

$$X(x) = \sum_{i=1}^{n} a^i(x) \frac{\partial}{\partial y^i}|_{F(x)}, \quad x \in U,$$

em que as componentes $a^i : U \to \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis. No caso em que

$$X(x) \in T_{F(x)}S, \quad x \in U,$$

dizemos que X é um campo vetorial (tangente) em S e indicamos esta condição por $X \in \mathfrak{X}(S)$. Neste caso, podemos escrever

$$X(x) = \sum_{i=1}^{m} u^i(x) F_*(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}|_x.$$

É conveniente, doravante, denotarmos

$$\partial_i = F_*(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}|_x, \quad 1 \leq i \leq m,$$

de sorte que um campo vetorial X tangente a S pode ser expresso por

$$X(x) = \sum_{i=1}^{m} u^i(x) \partial_i.$$

Definimos o fibrado tangente

$$TS = \bigsqcup_{y \in S} T_y S = \bigsqcup_{y \in S} \{(y, v) : y \in S,\, v \in T_y S\}. \tag{1.26}$$

Em cada ponto $y \in S$, o espaço cotangente $T_y^* S$ é o espaço dos funcionais lineares em $T_y S$. Denotamos

$$T^* S = \bigsqcup_{y \in S} T_y^* S. \tag{1.27}$$

Consideramos a decomposição em soma direta $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$. O *gráfico* de uma função $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-m}$, expressa em coordenadas por

$$y^{m+1} = f^1(y^1, \ldots, y^m), \ldots, y^n = f^{n-m}(y^1, \ldots, y^m),$$

é a subvariedade definida por

$$S_f = \{(y^1, \ldots, y^m, f^1(y^1, \ldots, y^m), \ldots, f^{n-m}(y^1, \ldots, y^m)) : (y^1, \ldots, y^m) \in U\}.$$

Os espaços tangentes a S_f são gerados, em cada ponto, pelos vetores

$$\frac{\partial}{\partial y^i} + \sum_{j=m+1}^{m+n} \frac{\partial f^j}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial y^j}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Fixado um ponto y em uma subvariedade imersa S, supomos, sem perda de generalidade, que T_yS tem projeção bijetiva sobre o subespaço m-dimensional de $T_y\mathbb{R}^n$ gerado por

$$\frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^m}.$$

Sendo assim, demonstra-se que, escrevendo-se

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m},$$

existem uma vizinhança de y na forma $U_1 \times U_2$ e uma função $f : U_1 \to U_2$ tais que

$$S \cap U_1 \times U_2 = S_f.$$

Supomos, por fim, que a diferencial $F_*(x)$ seja sobrejetiva, para todo $x \in U$. Sendo assim, fixado um ponto $y \in F(U)$, o conjunto de nível

$$S^y = \{x \in U : F(x) = y\}$$

é uma subvariedade $(m-n)$-dimensional imersa em $U \subset \mathbb{R}^m$. Observamos que, dada uma curva $\gamma : \mathbb{R} \to S$, com $\gamma(0) = x$, temos $F(\gamma(t)) = y$, para todo valor do parâmetro $t \in \mathbb{R}$. Deste modo, concluímos que

$$F_*(x) \cdot \gamma'(0) = 0. \tag{1.28}$$

Portanto, o espaço tangente a S^y em um ponto x está contido no núcleo de $F_*(x)$. Comparando-se as dimensões dos dois espaços, constatamos que, de fato,

$$T_xS^y = \ker F_*(x). \tag{1.29}$$

Em componentes, vemos que vetores $v \in T_xS^y$ são soluções do seguinte sistema de equações lineares

$$\mathrm{d}F^1(x) \cdot v = 0, \ \ldots, \ \mathrm{d}F^n(x) \cdot v = 0, \tag{1.30}$$

cujo posto é n.

Em vários trechos da exposição, consideramos subvariedades imersas em $\mathbb{R}^n$ não necessariamente parametrizadas por uma única imersão. Assim, é indispensável verificarmos que os conceitos e resultados a seguir sejam independentes das parametrizações e, portanto, das coordenadas utilizadas.

1.2.1 Fluxos e Derivadas de Lie

Um campo vetorial X em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é gerador de um fluxo, o qual, por definição, é uma aplicação diferenciável $\Upsilon : I \times V \to U$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto centado em 0 e V é um subconjunto aberto de U, de modo que a curva definida por

$$t \mapsto \Upsilon(t, x)$$

é uma curva integral de X com condição inicial $\Upsilon(0, x) = x$. Isto significa que

$$\frac{\partial}{\partial t}\Upsilon(t, x) = X(\Upsilon(t, x)).$$

É conveniente denotarmos

$$\Upsilon_t(x) = \Upsilon(t, x).$$

Estas definições podem ser reescritas para campos vetoriais *tangentes* em S. Dados dois campos vetoriais $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$, seja Υ o fluxo gerado por X. Definimos a *derivada de Lie* de Y com respeito a X por

$$\pounds_X Y(y) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \Upsilon_{-t\,*}(\Upsilon_t(y)) \cdot Y(\Upsilon_t(y)),$$

isto é, inicialmente restringimos Y à curva integral $t \mapsto \Upsilon_t(y)$ de X com condição inicial y - isto define $Y(\Upsilon_t(y))$; em seguida, aplicamos o "push-forward" a $Y(\Upsilon_t(y))$ transladando-o para o espaço tangente $T_y S$ via a aplicação linear

$$\Upsilon_{-t\,*}(\Upsilon_t(y)) : T_{\Upsilon_t(y)}\bar{M} \to T_y S.$$

A curva resultante

$$t \mapsto \Upsilon_{-t\,*}(\Upsilon_t(y)) \cdot Y(\Upsilon_t(y))$$

está contida no espaço vetorial $T_y S$ e, sendo assim, pode ser diferenciada da maneira usual, componente a componente.

Para fixarmos notação, definimos a derivada de Lie de funções como

$$\pounds_X f(y) = df(y) \cdot X(y).$$

A função $\pounds_X f$ obtida por este procedimento é denotada simplesmente por Xf.

Uma maneira equivalente de definir $\pounds_X Y$ é

$$\pounds_{\pounds_X Y} f = \pounds_X Y f = XYf - YXf,$$

isto é, $\pounds_X Y$ mede a falha de comutatividade das segundas derivadas de f quando calculadas com respeito a X e Y. Em termos de coordenadas, escrevemos

$$X = \sum_{i=1}^{m} u^i \partial_i, \quad Y = \sum_{i=1}^{m} v^i \partial_i,$$

donde segue que

$$\pounds_X Y = \sum_{i=1}^{m} \big(Xv^i - Yu^i\big)\partial_i = \sum_{i,j=1}^{m} \big(u^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} - v^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j}\big)\partial_i$$

Denotamos, doravante,

$$\pounds_X Y = [X, Y],$$

o *colchete de Lie* de X e Y. Observamos que

$$[\partial_i, \partial_j] = 0.$$

1.3 Formas Diferenciais em $\mathbb{R}^n$

Fixado $1 \leq k \leq n$, consideramos o espaço vetorial $\Lambda^k T_x^* \mathbb{R}^n$ de dimensão $n!/(n-k)!k!$ gerado por

$$\mathrm{d}x^I = \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n. \tag{1.31}$$

Portanto, um elemento arbitrário $\omega \in \Lambda^k T_x^* \mathbb{R}^n$, que denominamos uma *$k$-forma* ou k-covetor, é uma combinação linear da forma

$$\omega = \sum_I a_{i_1 \ldots i_k} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} = \sum_I a_I \mathrm{d}x^I,$$

cuja ação sobre listas de k vetores é definida de modo óbvio. As componentes de ω são dadas por

$$a_{i_1 \ldots i_k} = \omega(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}). \tag{1.32}$$

Dados uma permutação σ de k elementos e vetores $v_1, \ldots, v_k$ em $T_x^*\mathbb{R}^n$, temos

$$\omega(v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_k}) = \sum_I a_{i_1 \ldots i_k} \left\| \begin{array}{ccc} \langle \mathrm{d}x^{i_1} | v_{\sigma_1} \rangle & \ldots & \langle \mathrm{d}x^{i_1} | v_{\sigma_k} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathrm{d}x^{i_k} | v_{\sigma_1} \rangle & \ldots & \langle \mathrm{d}x^{i_k} | v_{\sigma_k} \rangle \end{array} \right\|.$$

Portanto, permutando-se as colunas do determinante, deduz-se que

$$\begin{aligned} \omega(v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_k}) &= (-1)^\sigma \sum_I a_{i_1 \ldots i_k} \left\| \begin{array}{ccc} \langle \mathrm{d}x^{i_1} | v_1 \rangle & \ldots & \langle \mathrm{d}x^{i_1} | v_k \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathrm{d}x^{i_k} | v_1 \rangle & \ldots & \langle \mathrm{d}x^{i_k} | v_k \rangle \end{array} \right\| \\ &= (-1)^\sigma \omega(v_1 \ldots, v_k). \end{aligned}$$

Um cálculo similar permite verificar que, dado $v \in T_x^*\mathbb{R}^n$,

$$\omega(\ldots, v, \ldots, v, \ldots) = 0.$$

Em particular, se o multi-índice $J = (j_1, \ldots, j_k)$ resulta de uma permutação de $I = (i_1, \ldots, i_k)$, temos

$$\omega(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{j_k}}) = (-1)^\sigma \omega(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}) \tag{1.33}$$

e, caso J tenha índices repetidos, ou seja, caso $j_p = j_q$ para $1 \leq p, q \leq k$ distintos, temos

$$\omega(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{j_k}}) = 0. \tag{1.34}$$

Neste ponto, é conveniente introduzirmos o *delta de Kronecker generalizado*: dados dois multi-índices

$$I = (i_1, \ldots, i_k), \quad J = (j_1, \ldots, j_k),$$

denotamo-lo por

$$\delta^I_J = \delta^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_k} \tag{1.35}$$

e definimo-lo, no caso em que I e J não têm índices repetidos e J é obtido a partir de I por uma permutação, como o sinal da permutação. Nos casos em que um dos dois multi-índices tenha índices repetidos ou em que J não resulta de uma permutação de I, pomos

$$\delta^I_J = 0.$$

Verifica-se que

$$\delta^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_k} = \left\| \begin{array}{ccc} \langle \mathrm{d}x^{i_1} | \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \rangle & \ldots & \langle \mathrm{d}x^{i_1} | \frac{\partial}{\partial x^{j_k}} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathrm{d}x^{i_k} | \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \rangle & \ldots & \langle \mathrm{d}x^{i_k} | \frac{\partial}{\partial x^{j_k}} \rangle \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} \delta^{i_1}_{j_1} & \ldots & \delta^{i_1}_{j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{i_k}_{j_1} & \ldots & \delta^{i_k}_{j_k} \end{array} \right\|. \tag{1.36}$$

Observamos que, se escrevemos uma k-forma

$$\omega = \sum_I a_{i_1\ldots i_k} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \mathrm{d}x^{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$$

com respeito ao conjunto de geradores

$$\mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_k}, \quad 1 \leq j_l \leq n, \;\; 1 \leq l \leq k,$$

em que os índices no multi-índice J não estão necessariamente ordenados, devemos ter

$$\omega = \frac{1}{k!} \sum_J a_{j_1\ldots j_k} \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_k},$$

onde

$$a_{j_1\ldots j_k} = \omega(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{j_k}}). \tag{1.37}$$

De fato, em vista de (1.34), descartamos as parcelas correspondentes a multi-índices J com índices repetidos. Agrupamos os termos restantes, em multi-índices J obtidos por permutação de um mesmo multi-índice I em ordem crescente, o que resulta em

$$\omega = \sum_I \big(\frac{1}{k!} \sum_J a_{j_1\ldots j_k} \delta^{j_1\ldots j_k}_{i_1\ldots i_k}\big) \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k},$$

onde consideramos, a partir da segunda igualdade, apenas multi-índices I em ordem crescente. Por outro lado, (1.33) implica que

$$a_{j_1\ldots j_k} = a_{i_1\ldots i_k} \delta^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_k}.$$

Uma vez que δ^I_J e δ^J_I são os sinais de permutações inversas uma da outra, concluímos que

$$\frac{1}{k!} \sum_J a_{i_1\ldots i_k} \delta^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_k} \delta^{j_1\ldots j_k}_{i_1\ldots i_k} = \frac{k!}{k!} a_{i_1\ldots i_k} = a_{i_1\ldots i_k},$$

visto que a cardinalidade do conjunto de permutações de k elementos é $k!$.

Fixados $x \in \mathbb{R}^n$ e um inteiro k entre 1 e n, as operações vetoriais em $\Lambda^k T_x^*\mathbb{R}^n$ são naturalmente definidas por

$$(\omega + \alpha\eta)\big(v_1, \ldots, v_k\big) = \omega\big(v_1, \ldots, v_k\big) + \alpha\eta(v_1, \ldots, v_k),$$

para $\omega, \eta \in \Lambda^k T_x^*\mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v_i \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq k$. Denotamos a soma direta destes espaços por

$$\Lambda T_x^*\mathbb{R}^n = \Lambda^0 T_x^*\mathbb{R}^n \oplus \ldots \oplus \Lambda^n T_x^*\mathbb{R}^n, \tag{1.38}$$

em que, por convenção, definimos $\Lambda^0 T_x^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$. Dadas

$$\omega = \frac{1}{k!}\sum_I a_I \mathrm{d}x^I \in \Lambda^k T_x^*\mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad \eta = \frac{1}{l!}\sum_J b_J \mathrm{d}x^J \in \Lambda^l T_x^*\mathbb{R}^n$$

(note que consideramos multi-índices arbitrários desta vez), o *produto exterior* $\omega \wedge \eta$ é, por definição, $(k+l)$-forma em x dada por

$$\omega \wedge \eta = \frac{1}{k!l!}\sum_{I,J} a_{i_1\ldots i_k} b_{j_1\ldots j_l} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_l}. \tag{1.39}$$

Reagrupando os multi-índices em ordem crescente, escrevemos

$$\begin{aligned}\omega \wedge \eta = \frac{1}{k!l!}\sum_P \sum_{I,J} a_{i_1\ldots i_k} b_{j_1\ldots j_l} \delta^{p_1\ldots p_{k+l}}_{i_1\ldots i_k j_1\ldots j_l} \mathrm{d}x^{p_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{p_k} \wedge \\ \wedge \mathrm{d}x^{p_{k+1}} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{p_{k+l}}.\end{aligned}$$

Por outro lado, agrupando os multi-índices I e J a cada vez como permutações de multi-índices em ordem crescente, temos

$$\begin{aligned}\omega \wedge \eta &= \frac{1}{k!l!}\sum_{P,Q,R}\sum_{I,J} a_{q_1\ldots q_k} b_{r_1\ldots r_l} \delta^{i_1\ldots i_k}_{q_1\ldots q_k} \delta^{j_1\ldots j_l}_{r_1\ldots r_l} \delta^{p_1\ldots p_{k+l}}_{i_1\ldots i_k j_1\ldots j_l} \mathrm{d}x^{p_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{p_k} \\ &\quad \wedge \mathrm{d}x^{p_{k+1}} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{p_{k+l}} \\ &= \sum_{P,Q,R} a_{q_1\ldots q_k} b_{r_1\ldots r_l} \delta^{p_1\ldots p_{k+l}}_{q_1\ldots q_k r_1\ldots r_l} \mathrm{d}x^{p_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{p_k} \\ &\quad \wedge \mathrm{d}x^{p_{k+1}} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{p_{k+l}}.\end{aligned}$$

Portanto, se escrevemos $\omega \wedge \eta$ em componentes

$$\omega \wedge \eta = \sum_P c_{p_1\ldots p_{l+k}} \mathrm{d}x^{p_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{p_{k+l}},$$

então

$$c_{p_1\ldots p_{k+l}} = \sum_{Q,R} a_{q_1\ldots q_k} b_{r_1\ldots r_l} \delta^{p_1\ldots p_{k+l}}_{q_1\ldots q_k r_1\ldots r_l}. \tag{1.40}$$

De maneira livre de coordenadas, o produto exterior pode ser definido como

$$\omega \wedge \eta(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_k} \omega(v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_k}) \eta(v_{\sigma_{k+1}}, \ldots, v_{\sigma_{k_l}}).$$

De fato, as definições são equivalentes, posto que

$$(\omega \wedge \eta)(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{i_{k+l}}}) = \frac{1}{k\,!\,l\,!} \sum_{P,Q} \delta^{PQ}_I \omega(\frac{\partial}{\partial x^{p_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{p_k}})\, \eta(\frac{\partial}{\partial x^{q_1}} \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{q_l}})$$

$$= \frac{1}{k\,!\,l\,!} \sum_{P,Q} \delta^{p_1\ldots p_k q_1\ldots q_l}_{i_1\ldots i_{k+l}} a_{p_1\ldots p_k} b_{q_1\ldots q_l} \tag{1.41}$$

onde $I = (i_1, \ldots, i_{k+l})$ e $P = (p_1, \ldots, p_k)$, $Q = (q_1, \ldots, q_l)$ são multi-índices e, por definição, $PQ := (p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_l)$.

A álgebra exterior em $x \in \mathbb{R}^n$ a que aludimos acima consiste do espaço vetorial $\Lambda T^*_x\mathbb{R}^n$, munido do produto exterior. Entre as propriedades fundamentais deste produto, mencionamos

Proposição 1. *As seguintes propriedades são válidas para o produto exterior:*

i. $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$,

ii. $\omega \wedge (\eta \wedge \theta) = (\omega \wedge \eta) \wedge \theta$,

iii. $\omega \wedge (\eta + \theta) = \omega \wedge \eta + \omega \wedge \theta$,

onde $\omega \in \Lambda^k T^*_x\mathbb{R}^n$, $\eta \in \Lambda^l T^*_x\mathbb{R}^n$ *e* $\theta \in \Lambda^r T^*_x\mathbb{R}^n$.

A exemplo das seções anteriores, definimos o símile global de k-formas. Para tanto, definimos o *fibrado exterior*

$$\Lambda T^*\mathbb{R}^n = \bigsqcup_{x \in \mathbb{R}^n} \Lambda T^*_x\mathbb{R}^n = \{(x, \omega) : x \in \mathbb{R}^n,\, \omega \in \Lambda T^*_x\mathbb{R}^n\}. \tag{1.42}$$

Uma k-forma diferencial em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma correspondência

$$x \in U \mapsto \omega|_x = \frac{1}{k!} \sum_I a_I(x) \mathrm{d}x^I \in \Lambda^k T^*_x\mathbb{R}^n,$$

em que as funções componentes $a_I : U \to \mathbb{R}$ são diferenciáveis. Dito de outro modo, ω é uma secção local do fibrado

$$\Lambda^k T^*\mathbb{R}^n = \bigsqcup_{x\in\mathbb{R}^n} \Lambda^k T_x^*\mathbb{R}^n.$$

O módulo de k-formas diferenciais sobre $C^\infty(U)$ em U é denotado por $\Omega^k(U)$.

Voltando ao exemplo da seção anterior, uma 2-forma em $\mathbb{R}^3$ pode ser equiparada ao produto vetorial. Dados vetores u, v tangentes a um dado ponto de $\mathbb{R}^3$, temos

$$\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3(u,v) = \left\| \begin{matrix} u^2 & v^2 \\ u^3 & v^3 \end{matrix} \right\|, \quad \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1(u,v) = \left\| \begin{matrix} u^3 & v^3 \\ u^1 & v^1 \end{matrix} \right\|$$

e

$$\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2(u,v) = \left\| \begin{matrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{matrix} \right\|,$$

que correspondem as três componentes do produto vetorial $u \times v$, de modo que, dada a 2-forma

$$\omega = w_1 \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + w_2 \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1 + w_3 \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2,$$

segue que

$$\omega(u,v) = [u,v,w],$$

onde w é o vetor dual a ω, isto é, com mesmas componentes que ω:

$$w = w^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + w^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + w^3 \frac{\partial}{\partial x^3}.$$

1.3.1 "Pull-backs"

Dadas uma aplicação diferenciável $F : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e uma k-forma diferencial ω em $\mathbb{R}^n$, definimos o pull-back de ω por F a k-forma diferencial definida em U por

$$F^*\omega(X_1, \ldots, X_k) = \omega(F_*X_1, \ldots, F_*X_k), \tag{1.43}$$

onde $X_1, \ldots, X_k$ são campos vetoriais em U.

Em coordenadas, calculamos

$$F^*\omega(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}) = \omega(F_*\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \ldots, F_*\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}) = \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_1}} \omega(\frac{\partial}{\partial y^{j_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^{j_k}})$$

Esta operação de pull-back permite, em particular, restringir formas diferenciais em $\mathbb{R}^n$ a subvariedades m-dimensionais S imersas em $\mathbb{R}^n$. Caso $S = F(U)$, definimos

$$i^*\omega(\partial_{i_1}, \ldots, \partial_{i_k}) = F^*\omega(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}) \tag{1.44}$$

onde $i : S \to \mathbb{R}^n$ é a inclusão natural de S em $\mathbb{R}^n$.

Definimos, então, $\Lambda^k(T_yS)$, $\Lambda^k(T^*S)$ e $\Omega^k(S)$ de modo análogo ao exposto acima. Denotamos, ainda,

$$\Omega^*(S) = \Omega^0(S) \oplus \ldots \oplus \Omega^n(S), \tag{1.45}$$

onde $\Omega^0(S) = C^\infty(S)$ é o anel das funções diferenciáveis em S.

É fácil verificarmos que

$$F^*(\omega \wedge \eta) = F^*\omega \wedge F^*\eta,$$

o que assegura a naturalidade das definições acima e a consequente invariância por mudanças de coordenadas.

A noção de derivada de Lie pode ser estendida a formas diferenciais. Definimos, para tanto, dada uma k-forma diferencial, sua derivada de Lie com respeito a um campo vetorial X por

$$\pounds_X\omega(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\Upsilon_t^*\omega(\Upsilon_t(x)). \tag{1.46}$$

Em particular, calculamos

$$\begin{aligned}
\pounds_X\omega(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\omega(\Upsilon_{t*} \cdot \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \ldots, \Upsilon_{t*} \cdot \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0}\left(\frac{\partial \Upsilon_t^{j_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial \Upsilon_t^{j_k}}{\partial x^{i_k}}\omega(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{j_k}})\right) \\
&= \delta_{i_1}^{j_1} \ldots \delta_{i_k}^{j_k} \frac{d}{dt}|_{t=0}\omega_{j_1 \ldots j_k}(\Upsilon_t(x)) \\
&\quad + \sum_{r=1}^{k} \delta_{i_1}^{j_1} \ldots \frac{d}{dt}|_{t=0}\frac{\partial \Upsilon_t^{j_r}}{\partial x^{i_r}} \ldots \delta_{i_k}^{j_k}\omega_{j_1 \ldots j_k}(x) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0}\omega_{i_1 \ldots i_k}(\Upsilon_t(x)) + \sum_{r=1}^{k} \delta_{i_1}^{j_1} \ldots \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\frac{d\Upsilon_t^{j_r}}{dt}|_{t=0} \ldots \delta_{i_k}^{j_k}\omega_{j_1 \ldots j_k}(x) \\
&= \pounds_X(\omega_{i_1 \ldots i_k}) + \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial X^{j_r}}{\partial x^{i_1}}\omega_{i_1 \ldots j_r \ldots i_k}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\omega(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\ldots,[X,\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}],\ldots,\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}) = -\frac{\partial X^{j_r}}{\partial x^{i_r}}\omega(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^{j_r}},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^{i_k}})$$

e, portanto,

$$\pounds_X\omega(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}) = \pounds_X(\omega_{i_1\ldots i_k}) - \sum_{r=1}^{k}\omega(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\ldots,[X,\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}],\ldots,\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}).$$

Observamos que

$$\begin{aligned}\pounds_X\omega(\ldots,fY,\ldots) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\Upsilon_t^*\omega(\ldots,fY,\ldots) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\omega(\ldots,\Upsilon_{t*}\cdot fY,\ldots)\\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}f\omega(\ldots,\Upsilon_{t*}\cdot Y,\ldots) = f\frac{d}{dt}|_{t=0}\omega(\ldots,\Upsilon_{t*}\cdot Y,\ldots)\end{aligned}$$

e, deste modo,

$$\pounds_X\omega(\ldots,fY,\ldots) = f\pounds_X\omega(\ldots,Y,\ldots). \tag{1.47}$$

Assim, concluímos que

$$\pounds_X\omega(X_1,\ldots,X_k) = X_1^{i_1}\ldots X_k^{i_k}\pounds_X\omega(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^{i_k}})$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}&\pounds_X\omega(X_1,\ldots,X_k) =\\ &= \pounds_X(X_1^{i_1}\ldots X_k^{i_k}\omega_{i_1\ldots i_k}) - \sum_{r=1}^{k}X_1^{i_1}\ldots X(X_r^{i_r})\ldots X_k^{i_k}\omega_{i_1\ldots i_k}\\ &\quad -\sum_{r=1}^{k}X_1^{i_1}\ldots X_k^{i_k}\omega(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\ldots,[X,\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}],\ldots,\frac{\partial}{\partial x^{i_k}})\\ &= \pounds_X(\omega(X_1,\ldots,X_k)) - \sum_{r=1}^{k}\omega(X_1,\ldots,X(X_r^{i_r})\frac{\partial}{\partial x^{i_r}},\ldots,X_k)\\ &\quad -\sum_{r=1}^{k}\omega(X_1,\ldots,X_r^{i_r}[X,\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}],\ldots,X_k)\\ &= \pounds_X(\omega(X_1,\ldots,X_k)) - \sum_{r=1}^{k}\omega(X_1,\ldots,[X,X_r],\ldots,X_k).\end{aligned}$$

1.3.2 Derivada Exterior

Dada uma forma diferencial de grau k, expressa localmente por

$$\omega = \sum_I a_{i_1 \dots i_k} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k},$$

definimos, segundo as mesmas coordenadas,

$$\mathrm{d}\omega = \sum_I \mathrm{d}a_{i_1 \dots i_k} \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \tag{1.48}$$

ou, equivalentemente,

$$\mathrm{d}\omega = \sum_I \sum_i \frac{\partial a_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}. \tag{1.49}$$

Verificamos a seguir que as expressões (1.48) e (1.49) não dependem, de fato, das coordenadas locais adotadas. Para tanto, escrevemos, em um outro sistema de coordenadas,

$$\omega = \sum_J \tilde{a}_{j_1 \dots j_k} \mathrm{d}y^{j_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}y^{j_k}.$$

Uma vez que ω é um tensor covariante, suas componentes nos dois sistemas de coordenadas são relacionadas por

$$\tilde{a}_{j_1 \dots j_k} = a_{i_1 \dots i_k} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial y^{j_k}} \tag{1.50}$$

Além disso, é certo que

$$\mathrm{d}y^{j_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}y^{j_k} = \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{l_1}} \cdots \frac{\partial y^{j_k}}{\partial x^{l_k}} \mathrm{d}x^{l_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{l_k} \tag{1.51}$$

Em vista destas equações, calculamos, em termos das coordenadas $(y^j)_{j=1}^n$,

$$\mathrm{d}\omega = \sum_J \sum_j \frac{\partial \tilde{a}_{j_1 \dots j_k}}{\partial y^j} \mathrm{d}y^j \wedge \mathrm{d}y^{j_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}y^{j_k}.$$

Todavia, usando a relação (1.50)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{a}_{j_1 \dots j_k}}{\partial y^j} &= \frac{\partial a_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial y^{j_k}} \\ &+ a_{i_1 \dots i_k} \sum_{m=1}^k \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{j_1}} \cdots \frac{\partial^2 x^{i_m}}{\partial y^{j_m} \partial y^j} \cdots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial y^{j_k}}. \end{aligned}$$

Substituindo esta equação na expressão imediatamente anterior, obtemos dois somatórios

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega &= \sum_{I,J}\sum_{i,j}\frac{\partial a_{i_1\ldots i_k}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial y^{j_k}}\mathrm{d}y^j\wedge\mathrm{d}y^{j_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}y^{j_k} \\ &+ \sum_{I,J}\sum_{i,j}a_{i_1\ldots i_k}\sum_{m=1}^{k}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{j_1}}\cdots\frac{\partial^2 x^{i_m}}{\partial y^{j_m}\partial y^j}\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial y^{j_k}}\mathrm{d}y^j\wedge\mathrm{d}y^{j_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}y^{j_k}, \end{aligned}$$

o segundo dos quais é nulo, uma vez que a hessiana é simétrica nos índices j e j_m, ao passo que o produto exterior é anti-simétrico com respeito a estes mesmos índices. Resta, portanto,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega &= \sum_{I,J}\sum_{i,j}\frac{\partial a_{i_1\ldots i_k}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial y^{j_k}}\mathrm{d}y^j\wedge\mathrm{d}y^{j_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}y^{j_k} \\ &= \sum_{I}\sum_{i}\frac{\partial a_{i_1\ldots i_k}}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}, \end{aligned}$$

o que assegura que as expressões de $\mathrm{d}\omega$ coincidem nos dois sistemas de coordenadas.

Mencionamos algumas propriedades importantes da diferencial exterior

Proposição 2. *A diferenciação exterior determina um operador $\mathbb{R}$-linear*

$$\mathrm{d}:\Omega^k(U)\to\Omega^{k+1}(U) \tag{1.52}$$

satisfazendo as seguintes propriedades

i. $\mathrm{d}f$ *é a diferencial de* f*, caso* f *seja uma* 0*-forma.*

ii. $\mathrm{d}^2\omega=\mathrm{d}\mathrm{d}\omega=0$.

iii. $\mathrm{d}(\omega\wedge\eta)=\mathrm{d}\omega\wedge\eta+(-1)^k\omega\wedge\mathrm{d}\eta$.

iv. $\mathrm{d}(\omega+\lambda\eta)=\mathrm{d}\omega+\lambda\mathrm{d}\eta$.

Além disso, estas propriedades definem por completo o operador d.

Fixado um campo vetorial $X\in\mathfrak{X}(U)$, definimos a contração ι_X sobre formas diferenciais $\omega\in\Omega^k(U)$ segundo a regra

$$\iota_X\omega(X_1,\ldots,X_{k-1})=\omega(X,X_1,\ldots,X_{k-1}),\quad X_i\in\mathfrak{X}(U), \tag{1.53}$$

Informações importantes são obtidas relacionando-se a derivada exterior, a derivada covariante e a derivada de Lie de formas diferencias.

Proposição 3. *As seguintes propriedades são válidas para formas diferenciais $\omega \in \Omega^k(U), \eta \in \Omega^l(U)$ e campos vetoriais $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$:*

i. $\iota_X(\omega \wedge \eta) = \iota_X\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \iota_X \eta$,

ii. $\pounds_X \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\pounds_X \omega$,

iii. $\pounds_X \iota_Y \omega - \iota_Y \pounds_X \omega = \iota_{[X,Y]}$,

iv. $\pounds_X \omega = \mathrm{d}\iota_X \omega + \iota_X \mathrm{d}\omega$

v. $\pounds_X(\omega \wedge \eta) = \pounds_X \omega \wedge \eta + \omega \wedge \pounds_X \eta$.

vi. $\pounds_X \pounds_Y - \pounds_Y \pounds_X = \pounds_{[X,Y]}$.

Expressamos a invariância da diferencial exterior também invocando a seguinte fórmula livre de coordenadas:

Proposição 4. *Dados uma forma diferencial $\omega \in \Omega^k(U)$ e campos vetoriais $X_1, \dots, X_{k+1}$ em U, temos*

$$\mathrm{d}\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i\big(\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1})\big)$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1}).$$

Aplicada a 1-formas, esta fórmula equivale a

$$\mathrm{d}\omega(X, Y) = X\omega Y - Y\omega X - \omega[X, Y], \quad X, Y \in \mathfrak{X}(U). \tag{1.54}$$

As operações de "pull-back" e diferenciação exterior comutam no seguinte sentido: dada uma k-forma diferencial ω em $\mathbb{R}^n$, temos

$$\mathrm{d}F^*\omega = F^*\mathrm{d}\omega, \tag{1.55}$$

onde $F : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação diferenciável.

Capítulo 2

Teorema de Frobenius

Uma *distribuição* $\mathcal{D}$ de posto k definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma correspondência

$$x \in U \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathcal{D}_x \subset T_x\mathbb{R}^n, \tag{2.1}$$

em que $\mathcal{D}_x$ é um subespaço linear k-dimensional de $T_x\mathbb{R}^n$, de modo que, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, existem campos vetoriais $X_1, \ldots, X_k$ definidos em uma vizinhança $V \subset U$ de x tais que

$$\mathcal{D}_y = [X_1(y), \ldots, X_k(y)], \quad y \in V. \tag{2.2}$$

Em outros termos, $\mathcal{D}$ é uma aplicação diferenciável $\mathcal{D} : U \subset \mathbb{R}^n \to G_{k,n}$, com imagens na grassmaniana $G_{k,n}$, variedade dos subpespaços k-dimensionais de $\mathbb{R}^n$.

Uma distribuição $\mathcal{D}$ é dita *involutiva* quando, dados campos vetoriais X, Y em U tais que $X(x), Y(x) \in \mathcal{D}_x$, para todo $x \in U$, então

$$[X, Y]|_x \in \mathcal{D}_x. \tag{2.3}$$

Uma subvariedade m-dimensional $S \subset \mathbb{R}^n$ é uma *variedade integral* de $\mathcal{D}$ quando

$$T_xS \subset \mathcal{D}_x, \quad x \in U. \tag{2.4}$$

Dizemos que $\mathcal{D}$ é (completamente) *integrável* quando, para cada $x \in U$, existe uma variedade integral k-dimensional S contendo x. Neste caso, nos referimos também a S como uma folha integral da distribuição.

Como apontamos na Seção 1.2 acima, dado um ponto x em uma variedade integral k-dimensional S de $\mathcal{D}$, existem um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ contendo x e um difeomorfismo $\varphi : V \to W \subset \mathbb{R}^n$ tais que

$$\varphi(V \cap S) = W \cap \{u \in \mathbb{R}^n : u^{k+1} = \ldots = u^n = 0\}. \tag{2.5}$$

Denotando também por u^i as funções coordenadas $u^i : V \to \mathbb{R}$, deduzimos que esta forma local das variedades integrais acarreta, em particular, que

$$\mathcal{D}_x = \bigcap_{i=k+1}^{n} \ker du^i(x) \quad x \in V \cap S, \tag{2.6}$$

uma vez que as diferenciais $du^{k+1}, \ldots, du^n$ são linearmente independentes. Uma outra consequência é que dados campos vetoriais X, Y tangentes a S, podemos escrever localmente

$$X(x) = \sum_{i=1}^{k} v^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \quad Y(x) = \sum_{i=1}^{k} w^i \frac{\partial}{\partial u^i},$$

o que nos permite concluir que

$$[X, Y]|_x = \sum_{i=1}^{k} \big(X(w^i) - Y(v^i)\big) \frac{\partial}{\partial u^i} \in \mathcal{D}_x, \quad x \in S,$$

ou seja, uma distribuição integrável é involutiva.

Um fato verdadeiramente surpreendente é o de que a involutividade de uma distribuição implica sua integrabilidade.

Teorema 1. (Frobenius) *Uma distribuição é involutiva se, e somente se, é integrável.*

Demonstração. Fixamos, em uma vizinhança V de $x \in U$, campos vetoriais $Y_1, \ldots, Y_k$ tais que

$$\mathcal{D}_y = [Y_1(y), \ldots, Y_k(y)], \quad y \in V.$$

Escrevemos, em termos de coordenadas arbitrárias $x^1, \ldots, x^n$,

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n} a_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Uma vez que, em cada ponto $y \in U$, os vetores $Y_1(y), \dots, Y_k(y)$ são linearmente independentes, existe um menor $k \times k$ não-singular da matriz $(a_i^j)_{i,j=1}^{k,n}$, o qual, sem perda de generalidade, podemos considerar como sendo

$$(a_i^j)_{i,j=1}^{k}.$$

Denotando-se a matriz inversa deste menor por $(b_i^j)_{i,j=1}^{k}$, definimos

$$\begin{aligned} X_i &= \sum_{j=1}^{k} b_i^j Y_j = \sum_{j,l=1}^{k} b_i^j a_j^l \frac{\partial}{\partial x^l} + \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=k+1}^{n} b_i^j a_j^l \frac{\partial}{\partial x^l} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{l=k+1}^{n} c_i^l \frac{\partial}{\partial x^l}, \end{aligned}$$

o que resulta em novos campos vetoriais $X_1, \dots, X_k$, tais que, em cada ponto $x \in U$,

$$\mathcal{D}_x = [X_1(x), \dots, X_k(x)],$$

uma vez que estes vetores são obtidos a partir de $Y_1(x), \dots, Y_k(x)$ por uma combinação linear não-singular.

Com estes novos geradores locais da distribuição, todavia, calcula-se mais facilmente o colchete. De fato, temos

$$[X_i, X_j] = [\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{l=k+1}^{n} c_i^l \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{r=k+1}^{n} c_j^r \frac{\partial}{\partial x^r}] = \sum_{r=k+1}^{n} \left(\frac{\partial c_j^r}{\partial x^i} - \frac{\partial c_i^r}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^r}.$$

Por outro lado, em vista da hipótese de involutividade, existem funções reais c_{ij}^l, $l = 1, \dots, k$, tais que

$$[X_i, X_j] = \sum_{l=1}^{k} c_{ij}^l X_l,$$

ou seja, temos

$$[X_i, X_j] = \sum_{l=1}^{k} c_{ij}^l \frac{\partial}{\partial x^l} + \sum_{l=1}^{k} \sum_{r=k+1}^{n} c_{ij}^l c_l^r \frac{\partial}{\partial x^r}.$$

Comparando-se estas duas expansões do colchete, concluímos que

$$c_{ij}^l = 0$$

e, deste modo, que

$$[X_i, X_j] = 0.$$

Portanto, a involutividade implica que existem k campos vetoriais $X_1, \ldots, X_k$, tangentes à distribuição, os quais comutam dois a dois. Verificamos, a seguir, que isto implica que seus fluxos também comutam.

Fixados $1 \leq i, j \leq k$, denotamos, por comodidade, $X = X_i$ e $Y = X_j$. Sejam Υ e Ψ, respectivamente, os fluxos locais de X e Y. Devemos demonstrar que

$$\Upsilon_t \circ \Psi_s = \Psi_s \circ \Upsilon_t. \tag{2.7}$$

A identidade (2.7) equivale, por definição, ao fato de que, fixados $x \in U$ e $s \in \mathbb{R}$, a curva

$$t \mapsto \Psi_s(\Upsilon_t(x))$$

é curva integral de X passando por $\Psi_s(x)$ em $t = 0$. Temos

$$\Psi_s(\Upsilon_0(x)) = \Psi_s(x).$$

Além disso,

$$\frac{d}{dt}|_{t=t_0} \Psi_s(\Upsilon_t(x)) = \Psi_{s*}(\Upsilon_{t_0}(x)) \cdot \frac{d}{dt}|_{t=t_0} \Upsilon_t(x) = \Psi_{s*}(\Upsilon_{t_0}(x)) \cdot X(\Upsilon_{t_0}(x)). \tag{2.8}$$

Para concluirmos, basta demonstrarmos que

$$\Psi_{s*}(\Upsilon_{t_0}(x)) \cdot X(\Upsilon_{t_0}(x)) = X(\Psi_s(\Upsilon_{t_0}(x))),$$

ou, em outros termos, que o campo X é invariante ao longo das linhas de fluxo de Y. Calculamos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}|_{s=s_0} \Psi_{s*} \cdot X &= \lim_{s \to 0} \frac{\Psi_{(s_0+s)*} \cdot X - \Psi_{s_0*} \cdot X}{s} \\
&= \lim_{s \to 0} \Psi_{s_0*} \frac{\Psi_{s*} \cdot X - X}{s} \\
&= \Psi_{s_0*} \cdot [Y, X] = 0,
\end{aligned}$$

do que concluímos a comutatividade (2.7) dos fluxos.

Tendo em conta que os campos $X_1, \ldots, X_k$ comutam dois a dois, fixado $x \in U$, definimos a aplicação

$$F : U' \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n \tag{2.9}$$

por

$$F(t^1,\ldots,t^k) = \Psi^1_{t_1} \circ \ldots \circ \Psi^k_{t_k}(x), \tag{2.10}$$

onde U' é uma vizinhança suficientemente pequena da origem, e Ψ^i é o fluxo local de X_i, $i = 1,\ldots,k$. Observamos que

$$F_*(0)\cdot\frac{\partial}{\partial t^i} = \frac{d}{dt^i}|_{t^i=0}\Psi^1_0\circ\ldots\circ\Psi^i_{t^i}\circ\ldots\circ\Psi^k_0(x) = \frac{d}{dt^i}|_{t^i=0}\Psi^i_{t^i}(x) = X_i(x) \tag{2.11}$$

e portanto

$$F_*(0)\cdot\mathbb{R}^k = \mathcal{D}_x.$$

Em geral, a comutatividade dos fluxos implica que

$$\begin{aligned} F_*(t^1,\ldots,t^k)\cdot\frac{\partial}{\partial t^i} &= \frac{d}{dt^i}\Psi^i_{t^i}\circ\Psi^1_{t_1}\circ\ldots\circ\Psi^{i-1}_{t^{i-1}}\circ\Psi^{i+1}_{t^{i+1}}\circ\ldots\circ\Psi^k_{t^k}(x) \\ &= X_i(\Psi^i_{t^i}\circ\Psi^1_{t_1}\circ\ldots\circ\Psi^{i-1}_{t^{i-1}}\circ\Psi^{i+1}_{t^{i+1}}\circ\ldots\circ\Psi^k_{t^k}) \\ &= X_i(\Psi^1_{t^1}\circ\ldots\circ\Psi^i_{t^i}\circ\ldots\circ\Psi^k_{t^k}) \\ &= X_i(F(t^1,\ldots,t^k)), \end{aligned}$$

o que assegura que

$$F_*(t^1,\ldots,t^k)\cdot\mathbb{R}^k = \mathcal{D}_{F(t^1,\ldots,t^k)}.$$

Sendo assim, o conjunto $S = F(U')$ é uma subvariedade integral k-dimensional de $\mathcal{D}$.

□

2.1 Formulação Dual do Teorema de Frobenius

Um subespaço linear $I \subset \Omega^*(S)$ de formas diferenciais em S é um *ideal algébrico* se, dados $\alpha \in I$ e uma forma diferencial $\omega \in \Omega^*(S)$ em S, temos $\alpha \wedge \omega \in I$.

Um ideal algébrico I é gerado por uma coleção de formas $\alpha^1,\ldots,\alpha^l$ se, para toda forma $\alpha \in I$, existem formas $\beta^1,\ldots,\beta^l$ em S tais que

$$\alpha = \sum_{i=1}^{l}\alpha^i\wedge\beta^i.$$

Neste caso, denotamos

$$I = [\alpha^1, \ldots, \alpha^l]_{\text{alg}}. \tag{2.12}$$

O ideal I é um *ideal diferencial* se é fechado com respeito a diferenciação exterior, isto é, se dada uma forma $\alpha \in I$, temos $d\alpha \in I$. O ideal diferencial gerado por $\alpha^1, \ldots, \alpha^k$ é, por definição, o ideal algébrico gerado por

$$\alpha^1, \ldots, \alpha^l, \mathrm{d}\alpha^1, \ldots, \mathrm{d}\alpha^l.$$

Naturalmente, este ideal é fechado segundo diferenciação exterior. Denotamos o ideal diferencial gerado por $\alpha^1, \ldots, \alpha^l$ por

$$[\alpha^1, \ldots, \alpha^l]_{\text{dif}}. \tag{2.13}$$

Verificamos facilmente que, dadas formas diferenciais linearmente independentes $\alpha^1, \ldots, \alpha^l$ e uma forma diferencial ω qualquer,

$$\omega \in [\alpha^1, \ldots, \alpha^l]_{\text{alg}}$$

se e somente se

$$\omega \wedge \alpha^1 \wedge \ldots \wedge \alpha^l = 0.$$

De fato, supondo válida esta última equação, concluímos que as formas

$$\omega, \alpha^1, \ldots, \alpha^l$$

são linearmente dependentes em cada ponto. Portanto, existem funções a_i, $0 \leq i \leq l$, não todas nulas, tais que

$$a_0\omega + a_1\alpha^1 + \ldots + a_l\alpha^l = 0.$$

A função a_0 jamais se anula, uma vez que as formas $\alpha^1, \ldots, \alpha^l$ são linearmente independentes e, deste modo,

$$\omega = -\frac{a_1}{a_0}\alpha^1 - \ldots - \frac{a_l}{a_0}\alpha^l \in [\alpha^1, \ldots, \alpha^l]_{\text{alg}}.$$

A prova da afirmação recíproca é imediata.

Ainda supondo $\alpha^1, \ldots, \alpha^l$ linearmente independentes, o ideal algébrico $I = [\alpha^1, \ldots, \alpha^l]_{\text{alg}}$ é um ideal diferencial se e somente se

$$\mathrm{d}\alpha^i \in [\alpha^1, \ldots, \alpha^l]_{\text{alg}}$$

ou seja, se e somente se, existem formas β^i_j para as quais vale

$$\mathrm{d}\alpha^i = \sum_{j=1}^{l} \beta^i_j \wedge \alpha^j. \tag{2.14}$$

Alternativamente, devemos ter

$$d\alpha^i \wedge \alpha^1 \wedge \ldots \wedge \alpha^l = 0. \tag{2.15}$$

Dada uma coleção de 1-formas linearmente independentes

$$\alpha^1, \ldots, \alpha^l,$$

definimos uma *distribuição* de posto $k = n - l$ em $U \subset \mathbb{R}^n$ por

$$\mathcal{D}_x = \bigcap_{i=1}^{l} \ker \alpha^i(x), \quad x \in U \subset \mathbb{R}^n$$

ou seja, um vetor $v \in T_x\mathbb{R}^n$ satisfaz $v \in \mathcal{D}_x$ se e somente se

$$\alpha^1(v) = 0, \ldots, \alpha^l(v) = 0,$$

o que determina um sistema de l equações linearmente independentes em n variáveis. Portanto, a correspondência

$$x \in U \mapsto \mathcal{D}_x \in T_x\mathbb{R}^n$$

define uma distribuição diferenciável de subespaços afins k-dimensionais em $\mathbb{R}^n$. A diferenciabilidade advém do fato de que as formas $\alpha^1, \ldots, \alpha^l$ definindo esta distribuição tem componentes diferenciáveis.

Reciprocamente, dada uma distribuição de posto k em $U \subset \mathbb{R}^n$, definimos o ideal anulador de $\mathcal{D}$ por

$$I = \{\omega \in \Omega^*(U) : \omega_x(v) = 0,\ v \in \mathcal{D}_x,\ x \in U\}. \tag{2.16}$$

Podemos verificar que I é ideal algébrico localmente gerado por $l = n - k$ formas diferenciais de grau 1. De fato, dados campos $X_1, \ldots, X_k$ geradores locais de $\mathcal{D}$, estendemos esta coleção de campos a $X_1, \ldots, X_k, X_{k+1}, \ldots, X_{k+l}$

de modo que, em cada ponto y de uma vizinhança V de $x \in U$, estes campos vetoriais determinam uma base de $T_y\mathbb{R}^n$. Deste modo, considerando as formas duais $\alpha^1, \ldots, \alpha^k, \alpha^{k+1}, \ldots, \alpha^{k+l}$, temos

$$I = [\alpha^{k+1}, \ldots, \alpha^{k+l}]_{\text{alg}}$$

em pontos de V.

Dada uma subvariedade integral k-dimensional S de $\mathcal{D}$, temos, por definição,

$$i^*\alpha^{k+1} = 0, \ldots, i^*\alpha^{k+l} = 0,$$

onde $i : S \to \mathbb{R}^n$ é a inclusão natural. Sendo assim, infere-se que

$$i^*d\alpha^{k+1} = di^*\alpha^{k+1} = 0, \ldots, i^*d\alpha^{k+l} = di^*\alpha^{k+l} = 0,$$

ou seja, que o ideal I é um ideal diferencial. Portanto, localmente, escrevemos

$$I = [\alpha^{k+1}, \ldots, \alpha^{k+l}]_{\text{alg}} = [\alpha^{k+1}, \ldots, \alpha^{k+l}]_{\text{dif}}, \tag{2.17}$$

condição que, como vimos, é expressa pela existência de formas β^i_j tais que

$$\mathrm{d}\alpha^{k+i} = \sum_{j=1}^{l} \beta^i_j \wedge \alpha^{k+j}, \quad i = 1, \ldots, l. \tag{2.18}$$

Vimos, desta forma, que a condição

$$I = [\alpha^{k+1}, \ldots, \alpha^{k+l}]_{\text{alg}} = [\alpha^{k+1}, \ldots, \alpha^{k+l}]_{\text{dif}}, \tag{2.19}$$

ou, sucintamente, que

$$dI \subset I, \tag{2.20}$$

é necessária para a integrabilidade da distribuição. Reciprocamente, supomos que dada uma 1-forma $\omega \in I$, temos

$$d\alpha \in I.$$

Assim, dados X, Y campos vetoriais em $\mathcal{D}$, resulta que

$$d\alpha(X, Y) = 0.$$

Por outro lado,

$$d\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]) = -\alpha([X, Y]),$$

donde deduzimos que

$$\alpha([X,Y]), \quad \alpha \in I.$$

Isto implica que $[X,Y]$ é também um campo em $\mathcal{D}$, ou seja, que esta distribuição é involutiva.

Provamos, então, a seguinte formulação dual do Teorema de Frobenius:

Teorema 2. *Dadas* 1*-formas diferenciais* $\alpha^1, \ldots, \alpha^l$ *linearmente independentes em cada ponto de* $U \subset \mathbb{R}^n$*, a distribuição de posto* $k = n - l$

$$\mathcal{D} = \bigcap_{i=1}^{l} \ker \alpha^i \tag{2.21}$$

é integrável se e somente se a condição de Frobenius

$$d\alpha^i \in [\alpha^1, \ldots, \alpha^l]_{alg}, \quad i = 1, \ldots, l, \tag{2.22}$$

é satisfeita.

Demonstração. Para efeito de ilustração, apresentamos uma prova alternativa do Teorema de Frobenius, inteiramente em termos de formas diferenciais.

A noção de integrabilidade é reformulada como a existência de coordenadas locais $u^1, \ldots, u^n$ em uma vizinhança aberta de $x \in U$, para as quais

$$[\alpha^1, \ldots, \alpha^l]_{\mathrm{alg}} = [du^{k+1}, \ldots, du^{k+l}]_{\mathrm{alg}}, \tag{2.23}$$

onde $k = n - l$. Observamos que, nestes termos, uma subvariedade integral é descrita nestas coordenadas como um *slice* da forma

$$u^{k+1} = c^{k+1}, \ldots, u^{k+l} = c^{k+l},$$

onde c^i são constantes.

A demonstração procede por indução sobre k. Para $k = 1$, temos $n - 1$ formas $\alpha^1, \ldots, \alpha^{n-1}$, linearmente independentes em cada ponto, de modo que as formas

$$\alpha^1, \ldots, \alpha^{n-1}, \alpha^n := \alpha^1 \wedge \ldots \wedge \alpha^{n-1}$$

determinam, em cada ponto $x \in U$, base em $T_x^*\mathbb{R}^n$. Consideramos campos vetoriais $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}$ de sorte que

$$\langle \alpha^i | X_j \rangle = \delta^i_j.$$

Sendo assim, o campo $\xi := X_{n+1}$ determina o campo de direções em U dado pela distribuição $\mathcal{D}$, uma vez que

$$\langle \alpha^i | \xi \rangle = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

O fluxo local Ψ gerado por ξ permite definir coordenadas tais como no enunciado do teorema. De fato, consideramos coordenadas $x^1, \ldots, x^n$ em uma vizinhança V de $x \in U$ de forma que a hipersuperfície $S = \{y \in V : x^n(y) = x^n(x)\}$ satisfaz

$$\xi(x) \notin T_x S,$$

ou seja, de modo que

$$\mathcal{D}_x \oplus T_x S = T_x \mathbb{R}^n.$$

Consideramos, assim, a seguinte aplicação

$$F(x^1, \ldots, x^{n-1}, t) = \Psi_t(x^1, \ldots, x^{n-1}, 0).$$

Logo, calcula-se

$$F_*(0,0) \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{d}{dx^i} \Psi_0(0, \ldots, x^i, \ldots, 0, 0) = \frac{\partial}{\partial x^i}|_x$$

e

$$F_*(0,0) \cdot \frac{\partial}{\partial t} = \frac{d}{dt} \Psi_t(0, \ldots, 0, 0) = \xi_x.$$

Concluímos que $F_*(0,0)$ é um isomorfismo linear. Pelo Teorema da Aplicação Inversa,

$$u^1 = x^1, \ldots, u^{n-1} = x^{n-1}, u^n = t$$

são coordenadas em uma vizinhança de $x \in U$, com a propriedade

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^n} &= \frac{\partial}{\partial t} F(x^1, \ldots, x^{n-1}, t) = \frac{d}{dt} \Psi_t(x^1, \ldots, x^{n-1}, t) = \xi(\Psi_t(x^1, \ldots, x^{n-1}, t)) \\ &= \xi(u^1, \ldots, u^{n-1}, u^n), \end{aligned}$$

ou seja, curvas integrais de ξ são determinadas por

$$du^1(\xi) = \ldots = du^{n-1}(\xi) = 0.$$

Isto encerra a demonstração para o caso $k = 1$.

Suponhamos, agora, que o teorema é válido para distribuições de posto $k-1$. Dada uma distribuição de posto k, correspondente ao ideal anulador das 1-formas diferenciais

$$\alpha^1, \ldots, \alpha^{n-k},$$

fixamos uma diferencial exata du de uma dada função $u : U \to \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha^1 \wedge \ldots \wedge \alpha^{n-k} \wedge du \neq 0.$$

Assim, o ideal

$$I' = [\alpha^1, \ldots, \alpha^{n-k}, du]_{\text{alg}}$$

define uma distribuição $\mathcal{D}'$ de posto $k-1$. Pela hipótese de indução, existem coordenadas locais $y^1, \ldots, y^n$ tais que

$$I' = [dy^1, \ldots, dy^{n-k}, dy^{n-k+1}]_{\text{alg}},$$

as variedades integrais $(k-1)-$dimensionais de $\mathcal{D}'$ sendo localmente descritas como *slices* da forma

$$y^1 = c^1, \ldots, y^{n-k} = c^{n-k}, y^{n-(k-1)} = c^{n-(k-1)}.$$

Sendo assim, existem funções c^i_j, a_j, $i = 1, \ldots, n-k$, $j = 1, \ldots, n-k+1$, tais que

$$\begin{aligned} \alpha^i &= \sum_{j=1}^{n-k} c^i_j dy^j + c^i_{n-k+1} dy^{n-k+1}, \\ du &= \sum_{j=1}^{n-k} a_j dy^j + a_{n-k+1} dy^{n-k+1}, \end{aligned}$$

onde supomos, reindexando coordenadas, sem perda de generalidade, que $a_{n-k+1} \neq 0$. Logo, podemos escrever

$$\alpha^i = \sum_{j=1}^{n-k} c^i_j dy^j + \frac{c^i_{n-k+1}}{a_{n-k+1}} \big(du - \sum_{j=1}^{n-k} a_j dy^j\big) =: \sum_{j=1}^{n-k} \bar{c}^i_j dy^j + b^i du,$$

onde a matriz $(\bar{c}^i_j)^{n-k}_{i,j=1}$ é invertível, com inversa $(b^i_j)^{n-k}_{i,j=1}$. Logo, podemos definir um novo conjunto de geradores de I por

$$\bar{\alpha}^i = \sum_{r=1}^{n-k} b^i_r \alpha^r = dy^i + \bar{b}^i du,$$

o que garante, utilizando a hipótese de que I satisfaz (2.22), que

$$d\bar{b}^i \wedge du = d\bar{\alpha}^i \in I.$$

Assim, existem funções $\bar{a}^i, \bar{b}^i_j$, $i = 1, \dots, n-k$, $j = 1, \dots, n-k$, tais que

$$d\bar{b}^i = \bar{a}^i du + \sum_{j=1}^{n-k} \bar{b}^i_j dy^j,$$

o que implica que as funções b^i dependem apenas das variáveis $u, y^1, \dots, y^{n-k}$. Logo, as formas $\bar{\alpha}^i$ dependem igualmente apenas destas variáveis. Todavia, uma vez que

$$du \in I' = [dy^1, \dots, dy^{n-k+1}]_{\text{alg}},$$

concluímos que as formas $\bar{\alpha}^i$ dependem apenas das coordenadas $y^1, \dots, y^{n-k+1}$. Portanto, formas em I são completamente expressas em termos apenas destas coordenadas.

Consideramos, por fim, a subvariedade S' de dimensão $n-k+1$ dada por

$$y^{n-k+2} = c^{n-k+2}, \dots, y^n = c^n.$$

O ideal $I|_{S'}$ define uma distribuição de codimensão um satisfazendo a condição de Frobenius. De fato, denotando a inclusão natural de S' em $\mathbb{R}^n$ por i, temos

$$I|_{S'} = [i^*\alpha^1, \dots, i^*\alpha^k]_{\text{alg}}$$

e, portanto,

$$di^*\alpha^j = i^*d\alpha^j = i^* \sum_l \beta^j_l \wedge \alpha^l = \sum_l i^*\beta^j_l \wedge i^*\alpha^l.$$

Como vimos no início da demonstração, isto garante a existência de coordenadas $\hat{y}^1, \dots, \hat{y}^{n-k+1}$ em S', de modo que

$$I|_S = [d\hat{y}^1, \dots, d\hat{y}^{n-k}]_{\text{alg}}.$$

Concluímos que

$$\hat{y}^1, \dots, \hat{y}^{n-k+1}, y^{n-k+2}, \dots, y^n$$

é o sistema de coordenadas desejado.

De fato, as componentes das formas $\alpha^1, \ldots, \alpha^k$ não variam ao mudarmos de um *slice* $(n-k+1)$-dimensional S' para outro. O ideal anulador determinado pela restrição destas formas a um destes *slices* define aí um campo de direções, com curvas integrais dadas pela curva coordenada, $\hat{y}^{n-k+1} = t$, digamos. Variando-se de um *slice* para outro, obtemos subvariedades de dimensão $k = 1 + (n - (n-k+1))$.

$\square$

A versão mais apropriada aos nossos propósitos do Teorema de Frobenius pode ser formulada como segue. Escrevemos

$$\omega = a_1 \mathrm{d}x^1 + \ldots + a_n \mathrm{d}x^n,$$

com $a_n \neq 0$. Portanto, $\ker\omega$ define uma distribuição $(n-1)-$dimensional. Neste caso, folhas integrais desta distribuição são gráficos da forma

$$x^n = f(x^1, \ldots, x^{n-1}),$$

com vetores tangentes dados por

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^n}$$

Então,

$$\omega(\partial_i) = a_i + a_n \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0$$

o que produz o sistema de equações de primeira ordem

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = -\frac{a_i}{a_n}.$$

As condições de compatibilidade

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}$$

para este sistema implicam que

$$\frac{\partial a_i}{\partial x^j} + \frac{\partial a_n}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial a_j}{\partial x^i} + \frac{\partial a_n}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}$$

e, portanto,

$$a_n \frac{\partial a_i}{\partial x^j} - \frac{\partial a_n}{\partial x^j} a_i = a_n \frac{\partial a_j}{\partial x^i} - \frac{\partial a_n}{\partial x^i} a_j$$

ou, equivalentemente,

$$a_n\Big(\frac{\partial a_i}{\partial x^j} - \frac{\partial a_j}{\partial x^i}\Big) = \frac{\partial a_n}{\partial x^j}a_i - \frac{\partial a_n}{\partial x^i}a_j,$$

equação que pode ser reescrita como

$$a_n \mathrm{d}\omega(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) = \mathrm{d}a_n(\frac{\partial}{\partial x^i})\omega(\frac{\partial}{\partial x^j}) - \mathrm{d}a_n(\frac{\partial}{\partial x^j})\omega(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \mathrm{d}a_n \wedge \omega(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$$

e, deste modo,

$$\mathrm{d}\omega = \frac{\mathrm{d}a_n}{a_n} \wedge \omega,$$

o que equivale à condição de Frobenius.

Uma aplicação importante do Teorema de Frobenius diz respeito a sistemas de equações diferenciais parciais de primeira ordem da forma

$$\frac{\partial y}{\partial x^i} = \alpha_i(x^1, \ldots, x^n, y), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Soluções $y = f(x^1, \ldots, x^n)$ descrevem gráficos os quais, por sua vez, são folhas integrais da distribuição $\mathcal{D} = \ker\theta$, onde

$$\theta = dy - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i dx^i.$$

Diferenciando exteriormente, obtemos, módulo o ideal gerado por θ

$$\begin{aligned} d\theta &= -\sum_{i=1}^{n} d\alpha_i \wedge dx^i = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \alpha^i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} dy \wedge dx^i \\ &= -\sum_{i,j=1}^{n} \Big(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} + \alpha^j \frac{\partial \alpha_i}{\partial y}\Big) dx^j \wedge dx^i. \end{aligned}$$

Portanto, a condição de Frobenius

$$d\theta \in [\theta]_{\mathrm{alg}}$$

é equivalente à simetria da matriz

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} + \alpha^j \frac{\partial \alpha_i}{\partial y}$$

ou seja, à condição

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} + \alpha^j \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} - \alpha^i \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} = 0$$

Um exemplo de distribuição não-integrável aparece, deste modo, vinculada a não-existência de soluções para o sistema de equações diferenciais parciais em $\mathbb{R}^{2n}$

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = y^i, \quad \frac{\partial f}{\partial y^i} = -x^i,$$

relacionado a forma de contato em $\mathbb{R}^{2n+1}$ definida por

$$\theta = dz + \sum_{i=1}^{n} \big(- x^i dy^i + y^i dx^i \big).$$

2.2 Uma Aplicação

Nesta seção, identificamos os espaços vetoriais $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^{n**}$, indicando esta identificação ao denotar pontos em $\mathbb{R}^{n*}$ por p e suas coordenadas por

$$p_1, \ldots, p_n,$$

o que realça o cárater covariante das coordenadas.

Consideramos uma função $x : \mathbb{R}^{n*} \to \mathbb{R}^{n*}$, satisfazendo a condição

$$\sum_{i=1}^{n} x^i(p) p_i = 1. \tag{2.24}$$

Definimos, então, uma 1-forma diferencial em $\mathbb{R}^{n*}$ por

$$\omega_p = \sum_{i=1}^{n} x^i(p) \mathrm{d}p_i. \tag{2.25}$$

Investigamos, doravante, condições necessárias e suficientes para a existência de funções reais $\lambda : \mathbb{R}^{n*} \to \mathbb{R}$ e $V : \mathbb{R}^{n*} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\omega = \lambda \, \mathrm{d}V. \tag{2.26}$$

Observamos que, em função de (2.24), a forma ω jamais se anula e, portanto, o coeficiente λ não tem zeros. Da mesma forma, a diferencial $\mathrm{d}V$ é sempre não-nula, o que implica, em particular, sua sobrejetividade.

Iniciamos supondo que existam λ e V como desejado. Sendo assim, ao longo das subvariedades de nível

$$S^y = \{p \in \mathbb{R}^{n*} : V(p) = y\}, \tag{2.27}$$

temos

$$\iota^* \mathrm{d}V = 0$$

e, portanto,

$$\iota^* \omega = 0,$$

o que acarreta, como sabemos,

$$\iota^* \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\iota^* \omega = 0.$$

Isto implica existir uma 1-forma diferencial α tal que

$$\mathrm{d}\omega = \alpha \wedge \omega, \tag{2.28}$$

o que pode ser facilmente verificado diferenciando (2.26), do que resulta

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\lambda \wedge \mathrm{d}V + \lambda \mathrm{d}^2 V = \frac{1}{\lambda}\mathrm{d}\lambda \wedge \omega = \alpha \wedge \omega,$$

onde denotamos $\alpha = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}$.

A equação (2.28) é justamente a condição de Frobenius que vimos acima no Teorema 2. Logo, é uma condição suficiente para resolver-se o problema (2.26). Escrevamo-la em termos das componentes de ω, ou seja, em termos da função x.

A hipótese (2.24) pode ser reescrita como

$$\omega(P) = 1, \tag{2.29}$$

onde P é o (co)vetor

$$P = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Combinando (2.29) e (2.28), temos, para um vetor arbitrário ξ,

$$\mathrm{d}\omega(P, \xi) = \alpha(P)\omega(\xi) - \alpha(\xi)\omega(P) = \alpha(P)\omega(\xi) - \alpha(\xi).$$

Portanto,

$$\alpha(\xi) = \alpha(P)\omega(\xi) - \mathrm{d}\omega(P, \xi)$$

e, pela arbitrariedade de ξ, segue que

$$\alpha = (\iota_P \alpha)\omega - \iota_P \mathrm{d}\omega.$$

Uma vez que

$$\alpha \wedge \omega = \big(\alpha - (\iota_P \alpha)\omega\big) \wedge \omega,$$

concluímos ser possível substituir α por

$$\alpha_0 = \alpha - (\iota_P \alpha)\omega = -\iota_P \mathrm{d}\omega$$

na expressão (2.28). Temos, por definição,

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial p_j} \mathrm{d}p_j \wedge \mathrm{d}p_i$$

e, em particular,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega(P,\xi) &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial p_j} \big(\mathrm{d}p_j(P)\mathrm{d}p_i(\xi) - \mathrm{d}p_j(\xi)\mathrm{d}p_i(P)\big) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial p_j} \big(p_j \xi^i - \xi^j p_i\big). \end{aligned}$$

Com isto, calculamos, em um par de vetores ξ, η arbitrariamente fixado,

$$\alpha_0 \wedge \omega(\xi,\eta) = -\mathrm{d}\omega(P,\xi)\omega(\eta) + \mathrm{d}\omega(P,\eta)\omega(\xi),$$

obtendo

$$\begin{aligned} \alpha_0 \wedge \omega(\xi,\eta) &= -\sum_{j,k=1}^{n} \big(\frac{\partial x^j}{\partial p_k} p_k \xi^j - \frac{\partial x^k}{\partial p_j} \xi^j p_k\big) \sum_{i=1}^{n} \eta_i x^i \\ &\quad + \sum_{i,k=1}^{n} \big(\frac{\partial x^i}{\partial p_k} p_k \eta^i - \frac{\partial x^k}{\partial p_i} \eta^i p_k\big) \sum_{j=1}^{n} \xi_j x^j \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{n} \big(\frac{\partial x^i}{\partial p_k} p_k x^j + \frac{\partial x^k}{\partial p_j} p_k x^i - \frac{\partial x^j}{\partial p_k} p_k x^i - \frac{\partial x^k}{\partial p_i} p_k x^j\big) \xi^j \eta^i. \end{aligned}$$

Todavia, diferenciando a expressão (2.24), verificamos que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x^k}{\partial p_j} p_k + x^j = 0,$$

o que assegura que

$$\begin{aligned}\alpha_0 \wedge \omega(\xi,\eta) &= \sum_{i,j,k=1}^{n} \big(\frac{\partial x^i}{\partial p_k} p_k x^j - x^i x^j - \frac{\partial x^j}{\partial p_k} p_k x^i + x^i x^j\big)\xi^j \eta^i \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{n} \big(\frac{\partial x^i}{\partial p_k} p_k x^j - \frac{\partial x^j}{\partial p_k} p_k x^i\big)\xi^j \eta^i.\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega(\xi,\eta) &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial p_j}\big(\xi^j \eta^i - \eta^j \xi^i\big) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \big(\frac{\partial x^i}{\partial p_j} - \frac{\partial x^j}{\partial p_i}\big)\xi^j \eta^i.\end{aligned}$$

Comparando estas expressões, deduzimos que a condição (2.28) equivale ao conjunto de equações

$$\frac{\partial x^i}{\partial p_j} - \frac{\partial x^i}{\partial p_k} p_k x^j = \frac{\partial x^j}{\partial p_i} - \frac{\partial x^j}{\partial p_k} p_k x^i \tag{2.30}$$

ou, equivalentemente, ao fato de que a matriz *de substituição*

$$\sigma^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial p_j} - \frac{\partial x^i}{\partial p_k} p_k x^j \tag{2.31}$$

é simétrica.

É ilustrativo refazermos estes cálculos de modo livre de coordenadas. A condição (2.24), como mencionamos há pouco, pode ser escrita como

$$\iota_P \omega = \langle \omega, P \rangle = 1.$$

Utilizando a fórmula (*iv*) na Proposição 3, concluímos que

$$\iota_P \mathrm{d}\omega = \pounds_P \omega - \mathrm{d}\iota_P \omega = \pounds_P \omega.$$

Entretanto, o fluxo gerado pelo campo P é facilmente determinado pela fórmula

$$\psi_t(p) = e^t p, \quad t \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{R}^{n*}.$$

Daí, calculamos explicitamente a derivada de Lie de ω. Temos, dado $\xi \in T_p^*\mathbb{R}^{n*}$,

$$\begin{aligned}(\psi_t^*\omega_{\psi_t(p)}) \cdot \xi &= \omega_{\psi_t(p)} \cdot \psi_{t*}(\xi) = \omega_{\psi_t(p)} \cdot (e^t\xi) = e^t\omega_{\psi_t(p)} \cdot \xi \\ &= e^t \sum_{i=1}^n x^i(\psi_t(p))\xi_i.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\pounds_P\omega_p \cdot \xi &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\psi_t^*\omega_{\psi_t(p)} \cdot \xi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}e^t \sum_{i=1}^n x^i(\psi_t(p))\xi_i \\ &= \sum_{i=1}^n x^i(p)\xi_i + \sum_{i=1}^n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}x^i(\psi_t(p))\xi_i \\ &= \omega_p \cdot \xi + \sum_{i=1}^n P_p[x^i]\xi_i \\ &= \omega_p \cdot \xi + (x_*(p) \cdot P)_\flat \cdot \xi,\end{aligned}$$

onde

$$(x_*(p) \cdot P)_\flat = P[x^i]\mathrm{d}p_i = p_k \frac{\partial x^i}{\partial p_k}\mathrm{d}p_i$$

é a 1-forma metricamente equivalente ao vetor $x_*(p) \cdot P$. Concluímos, deste modo, que

$$\alpha_0 = -\iota_P\mathrm{d}\omega = -\omega - (x_*(p) \cdot P)_\flat.$$

A condição de Frobenius

$$\mathrm{d}\omega - \alpha_0 \wedge \omega = 0$$

passa a ser, então, reescrita como

$$\mathrm{d}\omega + (x_*(p) \cdot P)_\flat \wedge \omega = 0.$$

Esta última equação é expressa em coordenadas como

$$\sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial x^i}{\partial p_j} + \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial x^j}{\partial p_k} x^i\right)\mathrm{d}p_j \wedge \mathrm{d}p_i = 0,$$

equação que, por sua vez, é automaticamente verificada se

$$\sigma^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial p_j} + \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial x^j}{\partial p_k} x^i$$

é um tensor (cartesiano) simétrico.

2.2.1 Condição de Slutsky

Esta seção concerne um problema de otimização procedente da Economia Matemática. Consideramos uma função U continuamente diferenciável e fortemente quase-côncava definida em

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^i \geq 0\}, \tag{2.32}$$

e definimos

$$V(p) = \max_{x \in \mathbb{R}^n_+} U(x), \quad p \cdot x = 1. \tag{2.33}$$

No jargão da Microeconomia, um vetor $x = (x^1, \ldots, x^n)$ representa a escolha por um consumidor de quantidades de n bens. O vetor $p = (p_1, \ldots, p_n)$ discrimina o preço unitário de cada um destes bens. Fixada a renda da consumidor em uma unidade monetária, o conjunto de vetores de consumo viáveis é

$$\{x \in \mathbb{R}^n_+ : x \cdot p \leq 1\}.$$

A função U representa uma medida ordinal da utilidade conferida pelo consumidor a cada escolha x. O problema posto acima é, portanto, a maximização da utilidade tendo em conta a restrição orçamentária imposta pela renda do consumidor. A cada vetor de preços fixado, a escolha ótima define a função de utilidade indireta V.

Utilizando multiplicadores de Lagrange, verificamos facilmente que, fixada a renda 1, temos, a cada valor do parâmetro preço p, uma *escolha ótima* $x = x(p)$. A existência e a unicidade desta escolha provêm do fato de que U é quase-côncava. A escolha ótima é implicitamente determinada pela condição

$$\frac{\partial U}{\partial x^i}|_{x=x(p)} = \mu(p)p_i. \tag{2.34}$$

De fato, considerando, para p fixado, a Lagrangiana

$$L(x, \lambda) = U(x) - \mu(p \cdot x - 1), \tag{2.35}$$

calculamos, no ponto crítico,

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{\partial U}{\partial x^i} - \mu p_i. \tag{2.36}$$

Geometricamente, na escolha ótima $x = x(p)$, o hiperplano orçamentário

$$H(x, p) = x \cdot p - 1 = 0 \tag{2.37}$$

é tangente a subvariedade de nível $U(x) = U(x(p)) = V(p)$, dita subvariedade de indiferença.

Definimos, então, a subvariedade das escolhas ótimas, ou, mais apropriadamente, subvariedade de preço-consumo

$$x = x(p). \tag{2.38}$$

Então

$$V(p) = U(x(p)). \tag{2.39}$$

Diferenciando, temos

$$\frac{\partial V}{\partial p_i} = \frac{\partial U}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial p_i}. \tag{2.40}$$

Consideramos, então, a função

$$\Phi(x,p) = U(x) - V(p), \tag{2.41}$$

em que $V(p)$ é definida por (2.39). Então, o lugar geométrico das escolhas ótimas é descrito por

$$\Phi(x,p) = 0,$$

uma subvariedade $x = x(p)$ dada de forma implícita. Observe que, por definição, $\Phi = 0$ define uma família de subvariedades de indiferença

$$U(x) = V(p)$$

parametrizadas por p. Observe que $x = x(p)$ é o envelope destas subvariedades. De fato, cada ponto da subvariedade está contida em uma subvariedade desta família. Além disso,

$$0 = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} = \frac{\partial U}{\partial x^k}|_{x=x(p)}\frac{\partial x^k}{\partial p_i} - \frac{\partial V}{\partial p_i}. \tag{2.42}$$

Por outro lado, segue da condição de otimização de primeira ordem que

$$\frac{\partial U}{\partial x^k} = \mu p_k.$$

Substituindo acima, temos

$$0 = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} = \mu p_k\frac{\partial x^k}{\partial p_i} - \frac{\partial V}{\partial p_i}.$$

Todavia, diferenciando a restrição

$$p_k x^k - 1 = 0,$$

com respeito a p_i nos pontos $x = x(p)$, temos

$$p_k \frac{\partial x^k}{\partial p_i} + x^i = 0,$$

ou seja,

$$p_k \frac{\partial x^k}{\partial p_i} = -x^i.$$

Substituindo acima, encontramos

$$0 = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} = -\mu x^i - \frac{\partial V}{\partial p_i}.$$

Concluímos, então, que

$$\frac{\partial V}{\partial p_i} = -\mu x^i.$$

Portanto

$$\nabla_p V = -\mu(p) x(p). \tag{2.43}$$

Considerando esta linguagem, demonstramos, na seção anterior, o seguinte teorema de Análise Econômica.

Teorema 3. *Seja $x : \mathbb{R}^{n*} \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo*

$$x(p) \cdot p = 1, \quad p \in \mathbb{R}^{n*}. \tag{2.44}$$

Tal função representa uma função de demanda inversa se e somente se safisfaz a condição de Slutsky, ou seja, se a matriz de substituição

$$\sigma^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial p_j} - \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial x^i}{\partial p_k} x^j \tag{2.45}$$

é simétrica e positiva-definida.

2.3 Equação Eiconal

A noção de envelope de curvas surge também na Ótica Geométrica e na Geometria Diferencial, vinculada a frentes de onda, ou seja, a superfícies de nível de soluções $u : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ da equação eiconal

$$F(x, du) = 0, \quad x \in U, \tag{2.46}$$

onde F é uma função diferenciável definida no fibrado cotangente $T^*\mathbb{R}^n$.

Consideramos em $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$ subvariedades n-dimensionais Λ dadas por gráficos

$$x \in U \mapsto (x, \Xi(x)), \quad \Xi(x) \in T_x^*\mathbb{R}^n.$$

Temos, então, o seguinte resultado fundamental

Lema 1. (Poincaré) *A subvariedade Λ é localmente o gráfico de du, para alguma função diferenciável $u : U \to \mathbb{R}$, se e somente se $d\Xi = 0$.*

Em $T^*\mathbb{R}^n$ definimos a seguinte 1-forma global

$$\varsigma = \sum_{i=1}^{n} p_i dx^i, \tag{2.47}$$

em termos das coordenadas naturais globais $(x^1, \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n)$ em $T^*\mathbb{R}^n$. A diferencial desta forma define a estrutura simplética canônica em $T^*\mathbb{R}^n$, a saber,

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dx^i. \tag{2.48}$$

Verifica-se que a 2-forma diferencial σ é fechada e não-degenerada, isto é,

$$d\sigma = 0$$

e, para todo $(x, v) \in T\mathbb{R}^n$, a aplicação

$$v \mapsto \sigma_x(v, \cdot) \in T_x^*\mathbb{R}^n$$

é não-singular. Ademais, o elemento de volume usual em $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$ é dado por

$$\underbrace{\sigma \wedge \ldots \wedge \sigma}_{n}$$

De posse destes conceitos, reapresentamos o Lema de Poincaré com o seguinte enunciado

Proposição 5. *A subvariedade Λ é localmente gráfico de uma diferencial exata du se e somente se é* lagrangiana*, isto é, se e somente se, tem dimensão n e satisfaz $\sigma|_\Lambda = 0$.*

Demonstração. Os campos vetoriais

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \Xi_l}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial p_l}$$

expandem, em cada ponto, o espaço tangente ao gráfico Λ. Calculamos, então,

$$\sigma(X_i, X_j) = \frac{\partial \Xi_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \Xi_i}{\partial x^j}.$$

□

No intuito de resolver a equação eiconal, fixamos uma subvariedade S de dimensão $n-1$, cuja projeção em $\mathbb{R}^n$ podemos supor contida no hiperplano $\mathbb{R}^{n-1} = \{x^n = 0\}$. Supomos, ainda, que S é o gráfico da diferencial exata $\xi = dv$ de uma função $v : V \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$.

Por fim, devemos impor a seguinte condição inicial

$$F|_S = F(x^1, \ldots, x^{n-1}, 0, p_1, \ldots, p_{n-1}, 0) = 0. \tag{2.49}$$

Além disso, exigimos a condição de que S seja não-característica, no sentido de que

$$\frac{\partial F}{\partial p_n} \neq 0 \tag{2.50}$$

em algum ponto de S.

A forma simplética σ permite associar à diferencial de F um campo H_F, chamado gradiente simplético de F, segundo a correspondência

$$\omega(X, H_F) = dF(X), \quad X \in \mathfrak{X}(T^*\mathbb{R}^n). \tag{2.51}$$

Um fato fundamental é de que o fluxo gerado por H_F preserva a forma simplética. Em coordenadas, se escrevemos uma linha de fluxo de H_F como

$$t \mapsto (x^1(t), \ldots, x^n(t), p_1(t), \ldots p_n(t)),$$

temos, ao longo desta linha de fluxo,

$$H_F = x^{i\prime} \frac{\partial}{\partial x^i} + p_i' \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Portanto,

$$\sigma(\frac{\partial}{\partial x^j}, H_F) = dF(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \frac{\partial F}{\partial x^j}, \quad \sigma(\frac{\partial}{\partial p_j}, H_F) = dF(\frac{\partial}{\partial p_j}) = \frac{\partial F}{\partial p_j}$$

e, por outro lado,

$$\sigma(\frac{\partial}{\partial x^j}, H_F) = p_i'\sigma(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial p_i}) = -p_j', \quad \sigma(\frac{\partial}{\partial p_j}, H_F) = x^{i'}\sigma(\frac{\partial}{\partial p_j}, \frac{\partial}{\partial x^i}) = x^{i'}.$$

Comparando as expressões acima, vemos que o fluxo gerado por H_F satisfaz as equações de Hamilton

$$x^{i'} = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad p_i' = -\frac{\partial F}{\partial x^i}.$$

A preservação de σ pelo fluxo de H_F é expressa por

$$\pounds_{H_F}\sigma = 0.$$

Usando a fórmula de Cartan (iv) na Proposição 3 acima, temos

$$\pounds_{H_F}\sigma = d\iota_{H_F}\sigma + \iota_{H_F}d\sigma.$$

Todavia, pela própria definição de H_F

$$d\iota_{H_F}\sigma = d\sigma(H_F, \cdot) = -ddF(\cdot) = 0$$

e, uma vez que σ é fechada, concluímos que

$$\pounds_{H_F}\sigma = 0.$$

Observamos, finalmente, que F é constante ao longo das linhas de fluxo de H_F, uma vez que

$$dF(H_F) = \sigma(H_F, H_F) = 0.$$

Voltando a construção acima, definimos a subvariedade Λ como a união das curvas integrais do campo H_F passando pela subvariedade $(n-1)$-dimensional S. A condição de que S é não-característica asssegura que H_F é transversal a S, de modo que, para valores suficientemente pequenos do parâmetro do fluxo de H_F, o conjunto Λ é, de fato, uma subvariedade n-dimensional. Podemos descrevê-la, para pontos próximos de S, como gráfico de uma função Ξ. Ademais, visto que F é constante ao longo das linhas de fluxo de H_F, temos $F = 0$ em Λ.

Demonstramos, então, o seguinte teorema sobre existência de soluções para um problema de valor inicial para a equação eiconal.

Teorema 4. *A subvariedade Λ construída acima é localmente gráfico de uma diferencial exata, solução de*

$$F(x, du) = 0.$$

com condição inicial

$$u|_S = v.$$

Demonstração. O fato de que Λ define uma subvariedade provém da condição (2.50). De fato, parametrizando S por

$$(x^1, \ldots, x^{n-1}) \mapsto (x^1, \ldots, x^{n-1}, 0, \frac{\partial v}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial x^{n-1}}, 0),$$

constatamos que o espaço tangente a S é gerado por

$$E_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2 v}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial}{\partial p_k}, \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

ao passo que o vetor tangente as linhas de fluxo é, obviamente,

$$H_F = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{\partial F}{\partial p_n} \frac{\partial}{\partial x^n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial p_k}.$$

Assim, em vista da condição (2.50), concluímos que os campos vetoriais $E_1, \ldots, E_{n-1}, H_F$ determinam, em cada ponto de S, vetores linearmente independentes. Além disso, o subespaço n-dimensional gerado por estes vetores projeta-se bijetivamente sobre $\mathbb{R}^n = \{x = (x^1, \ldots, x^n) : x^i \in \mathbb{R}\}$. Logo, Λ é uma subvariedade n-dimensional, ao menos em uma vizinhança de S. Nestes pontos, ademais, Λ é gráfico de uma função definida em um aberto de $\mathbb{R}^n$.

Verifacamos, por fim, que Λ é uma subvariedade lagrangiana. Para tanto, denotando o fluxo de H_F por Ψ, calculamos, utilizando o fato de que o fluxo preserva σ,

$$\begin{aligned}
\sigma(\Psi_{t*}E_i, \Psi_{t*}E_j) &= \Psi_t^* \sigma(E_i, E_j) = \sigma(E_i, E_j) \\
&= \sum_{r=1}^{n} dp_r \wedge dx^r \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial}{\partial p_k}, \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^j \partial x^l} \frac{\partial}{\partial p_l}\right) \\
&= \frac{\partial^2 v}{\partial x^i \partial x^r} \delta_j^r - \frac{\partial^2 v}{\partial x^j \partial x^r} \delta_i^r \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Além disso, usando o fato de que as linhas de fluxo preservam H_F

$$\begin{aligned}
\sigma(H_F, \Psi_{t*}E_i) &= \Psi_t^*\sigma(H_F, E_i) = \sigma(H_F, E_i) \\
&= \sum_{r=1}^{n} dp_r \wedge dx^r (\frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial x^k} - \frac{\partial F}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial p_k}, \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^i \partial x^l}\frac{\partial}{\partial p_l}) \\
&= \frac{\partial F}{\partial x^i}|_\Sigma - \frac{\partial^2 v}{\partial x^i \partial x^r}\frac{\partial F}{\partial x^r}|_\Sigma \\
&= 0,
\end{aligned}$$

onde utilizamos a condição inicial $F|_S = 0$.

Finalmente, temos

$$\sigma(H_F, H_F) = 0.$$

Concluímos, desta forma, que $\sigma|_\Lambda = 0$, ou seja, que Λ é lagrangiana. □

Em Geometria Riemanniana, a equação eiconal na forma

$$|\nabla u| = 1 \tag{2.52}$$

diz respeito a existência de funções distância. Neste caso, a s linhas de fluxo são geodésicas que atravessam perpendicularmente as subvariedades de nível de u.

Capítulo 3

Teorema de Pfaff

O problema abordado neste capítulo é o de, dada uma 1-forma diferencial ω, encontrar funções reais diferenciáveis φ, ψ, U e V tais que

$$\omega = \varphi \, \mathrm{d}U + \psi \, \mathrm{d}V. \tag{3.1}$$

Diferenciando exteriormente (3.1), obtemos

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\varphi \wedge \mathrm{d}U + \mathrm{d}\psi \wedge \mathrm{d}V$$

e, deste modo, resulta que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega \wedge \mathrm{d}\omega &= \big(\mathrm{d}\varphi \wedge \mathrm{d}U + \mathrm{d}\psi \wedge \mathrm{d}V\big) \wedge \big(\mathrm{d}\varphi \wedge \mathrm{d}U + \mathrm{d}\psi \wedge \mathrm{d}V\big) \\ &= 2 \, \mathrm{d}\varphi \wedge \mathrm{d}U \wedge \mathrm{d}\psi \wedge \mathrm{d}V. \end{aligned}$$

Tomando o produto exterior com ω, deduzimos

$$\omega \wedge \mathrm{d}\omega \wedge \omega = 0. \tag{3.2}$$

Esta equação implica que a forma diferencial $\mathrm{d}\omega \wedge \mathrm{d}\omega$ está contida no ideal algébrico gerado por ω. De fato, demonstra-se a seguinte

Proposição 6. *As seguintes condições sobre uma* 2*-forma diferencial são equivalentes:*

i. $\omega \wedge \mathrm{d}\omega \wedge \mathrm{d}\omega = 0$.

ii. Existe uma 3*-forma diferencial* α *tal que* $\mathrm{d}\omega \wedge \mathrm{d}\omega = \alpha \wedge \omega$.

iii. *Existem uma* 2*-forma diferencial* β *e uma* 1*-forma diferencial* γ *tais que* $\mathrm{d}\omega = \beta + \gamma \wedge \omega$ *e* $\beta \wedge \beta = 0$.

Estamos, então, aptos a enunciar e demonstrar o seguinte resultado clássico.

Teorema 5 (Pfaff). *Seja* ω *uma* 1*-forma diferencial definida em um aberto* $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ *satisfazendo as condições*

$$\begin{aligned} \omega \wedge \mathrm{d}\omega &\neq 0, && (3.3) \\ \omega \wedge \mathrm{d}\omega \wedge \mathrm{d}\omega &= 0. && (3.4) \end{aligned}$$

Então, existem um aberto $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ *e funções reais diferenciáveis* φ, ψ, U *e* V *definidas em* $\mathcal{V}$ *tais que*

$$\omega = \varphi\, \mathrm{d}U + \psi\, \mathrm{d}V. \tag{3.5}$$

Demonstração. A hipótese (3.3) assegura, pela Proposição 6, a existência de formas ω' e σ tais que

$$\mathrm{d}\omega = \omega \wedge \omega' + \sigma, \tag{3.6}$$

com

$$\sigma \wedge \sigma = 0.$$

Afirmamos que existem 1-formas γ, γ' tais que

$$\sigma = \gamma \wedge \gamma'. \tag{3.7}$$

De fato, seja ξ um vetor para o qual

$$\iota_\xi \sigma = \sigma(\xi, \cdot) \neq 0.$$

Assim, calculamos

$$0 = \iota_\xi\big(\sigma \wedge \sigma\big) = \iota_\xi \sigma \wedge \sigma - \sigma \wedge \iota_\xi \sigma = 2\iota_\xi \sigma \wedge \sigma,$$

ou seja,

$$\iota_\xi \sigma \wedge \sigma = 0.$$

Fixamos uma base $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ de 1-formas de modo que $\alpha^1 = \iota_\xi \sigma$. Escrevemos, com respeito a esta base,

$$\sigma = \sum_{1 \leq i < j \leq n} s_{ij} \alpha^i \wedge \alpha^j.$$

Uma vez que $\alpha^1 \wedge \sigma = 0$, temos

$$\sum_{2\leq i<j\leq 2}^{n} s_{ij}\alpha^i \wedge \alpha^j \wedge \alpha^1 = 0,$$

do que deduzimos que $s_{ij} = 0$ quando $i, j \leq 2$. Logo,

$$\sigma = \sum_{j=2}^{n} s_{1j}\alpha^1 \wedge \alpha^j = \alpha^1 \wedge \gamma' = \iota_\xi \sigma \wedge \gamma'.$$

Estas decomposições permitem escrever

$$\mathrm{d}\omega = \omega \wedge \omega' + \gamma \wedge \gamma'.$$

Consideramos, agora, o ideal algébrico J

$$J = [\alpha : \alpha \wedge \omega \wedge \mathrm{d}\omega = 0]_{\mathrm{alg}}$$

Demonstra-se que J é um ideal diferencial. De fato, calculamos

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{d}\big(\alpha \wedge \omega \wedge \mathrm{d}\omega\big) \\ &= \mathrm{d}\alpha \wedge \omega \wedge \mathrm{d}\omega - \alpha \wedge \mathrm{d}\omega \wedge \mathrm{d}\omega. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega \wedge \mathrm{d}\omega &= 2\omega \wedge \omega' \wedge \gamma \wedge \gamma' = 2\omega \wedge \omega' \wedge \big(\omega \wedge \omega' + \gamma \wedge \gamma'\big) \\ &= 2\omega \wedge \omega' \wedge \mathrm{d}\omega. \end{aligned}$$

Deste modo, segue que

$$\mathrm{d}\alpha \wedge \omega \wedge \mathrm{d}\omega = \alpha \wedge \mathrm{d}\omega \wedge \mathrm{d}\omega = 2\alpha \wedge \omega \wedge \mathrm{d}\omega \wedge \omega' = 0.$$

Portanto,

$$\mathrm{d}\alpha \wedge \omega \wedge \mathrm{d}\omega = 0,$$

o que significa que $\mathrm{d}\alpha \in J$. Concluímos que J é um ideal diferencial.

As formas ω, γ e γ' pertencem a J, uma vez que

$$\begin{aligned} \omega \wedge \omega \wedge \mathrm{d}\omega &= 0, \\ \gamma \wedge \omega \wedge \big(\omega \wedge \omega' + \gamma \wedge \gamma'\big) &= 0, \\ \gamma' \wedge \omega \wedge \big(\omega \wedge \omega' + \gamma \wedge \gamma'\big) &= 0. \end{aligned}$$

Logo, o subespaço vetorial gerado E por ω, γ, γ' está contido em J. Afirmamos que estas formas são linearmente independentes. De fato,

$$\gamma \wedge \gamma' = \sigma \neq 0.$$

Portanto, γ e γ' são linearmente independentes. Ademais

$$\omega \wedge \gamma \wedge \gamma' = \omega \wedge \big(\mathrm{d}\omega - \omega \wedge \omega'\big) = \omega \wedge \mathrm{d}\omega \neq 0,$$

o que prova a afirmação. Fixamos, então, uma base $\beta^1, \ldots, \beta^n$ de 1-formas de modo que

$$\beta^1 = \omega,\ \beta^2 = \gamma,\ \beta^3 = \gamma'.$$

Dada uma forma $\alpha \in J$, escrevemos, relativamente a esta base,

$$\alpha = s_i \beta^i$$

e, sendo assim,

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha \wedge \omega \wedge \mathrm{d}\omega = \sum_{i=1}^{n} s_i \beta^i \wedge \omega \wedge \gamma \wedge \gamma' \\ &= \sum_{i=4}^{n} \beta^i \wedge \omega \wedge \gamma \wedge \gamma'. \end{aligned}$$

Logo, $s_i = 0$, para $i \leq 4$, ou seja,

$$\alpha = s_1 \omega + s_2 \gamma + s_3 \gamma',$$

o que demonstra que as formas em J estão contidas em E. Portanto, $E = J$, ou seja, E é um ideal diferencial.

Pelo Teorema de Frobenius, existem coordenadas locais $u^1, \ldots, u^n$ tais que

$$[\omega, \gamma, \gamma']_{\mathrm{alg}} = [du^1, du^2, du^3]_{\mathrm{alg}}.$$

Em particular, existem funções λ_1, λ_2 e λ_3, tais que

$$\omega = \lambda_1 du^1 + \lambda_2 du^2 + \lambda_3 du^3.$$

Supomos $\lambda_1 \neq 0$, sem perda de generalidade. Neste caso, o ideal gerado por ω e dy^1 é dado por

$$[\omega, dy^1]_{\mathrm{alg}} = [\alpha : \alpha \wedge \omega \wedge dy^1 = 0]_{\mathrm{alg}} =: J'.$$

Verifica-se, como antes, que J' é um ideal diferencial. Portanto, aplicando-se novamente o Teorema de Frobenius, garante-se a existência de coordenadas locais $v^1, \ldots, v^n$ satisfazendo

$$[\omega, dy^1]_{\text{alg}} = [dv^1, dv^2]_{\text{alg}}.$$

Sendo assim, temos

$$dy^1 = \mu_1 dv^1 + \mu_2 dv^2$$

e

$$\lambda_2 dy^2 + \lambda_3 dy^3 = \omega - \lambda_1 dy^1 = \nu_1 dv^1 + \nu_2 dv^2,$$

para certas funções μ_1, μ_2, ν_1 e ν_2. Logo, deduzimos que existem funções f, g tais que

$$\omega = f dv^1 + g dv^2.$$

Isto encerra a demonstração. $\square$

3.1 Teorema de Chiappori-Ekeland

Lidamos, nesta seção, com o problema de encontrar, para uma dada 1-forma diferencial ω em um aberto $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$, funções côncavas u, v e funções positivas a, b tais que

$$\omega = a\,\mathrm{d}u + b\,\mathrm{d}v. \tag{3.8}$$

Deduzimos, como na seção anterior, algumas condições necessárias à solução deste problema. Iniciamos observando que

$$\begin{aligned} \omega \wedge \mathrm{d}\omega &= (a\,\mathrm{d}u + b\,\mathrm{d}v) \wedge (\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}u + \mathrm{d}b \wedge \mathrm{d}v) \\ &= (a\,\mathrm{d}b - b\,\mathrm{d}a)\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v \neq 0. \end{aligned}$$

Entretanto

$$\begin{aligned} \omega \wedge \mathrm{d}\omega \wedge \mathrm{d}\omega &= (a\,\mathrm{d}u + b\,\mathrm{d}v) \wedge (\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}u + \mathrm{d}b \wedge \mathrm{d}v) \wedge (\mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}u + \mathrm{d}b \wedge \mathrm{d}v) \\ &= (a\,\mathrm{d}u + b\,\mathrm{d}v) \wedge (\mathrm{d}b \wedge \mathrm{d}a - \mathrm{d}a \wedge \mathrm{d}b) \wedge \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = 0. \end{aligned}$$

Portanto, as condições

$$\omega \wedge \mathrm{d}\omega \neq 0, \tag{3.9}$$

$$\omega \wedge \mathrm{d}\omega \wedge \mathrm{d}\omega = 0 \tag{3.10}$$

são necessárias para a solução da equação (3.8).

Um dos resultados clássicos na teoria de Sistemas Diferenciais Exteriores, o Teorema de Pfaff, assegura, como vimos, que tais condições são, de fato, suficientes para a existência de uma decomposição de ω nos moldes de (3.8). Todavia, o teorema, em sua versão usual, nada garante sobre a positividade de a e b ou a concavidade de u e v.

Com a finalidade de assegurar estas condições sobre a, b, u e v, essenciais a aplicações em Microeconomia, P.-A. Chiappori e I. Ekeland demonstraram em [6] o seguinte resultado, nomeado pelos autores Teorema de Darboux Convexo.

Teorema 6. (Chiappori-Ekeland) *Considere uma* 1*-forma analítica*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, \mathrm{d}x^i, \tag{3.11}$$

definida em um aberto $\mathcal{U}$ *de* $\mathbb{R}^n$*, satisfazendo*

$$\begin{aligned} \omega \wedge \mathrm{d}\omega &\neq 0, & (3.12)\\ \omega \wedge \mathrm{d}\omega \wedge \mathrm{d}\omega &= 0. & (3.13) \end{aligned}$$

Seja Ω *a matriz dada por*

$$\Omega_{i,j} = \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}, \tag{3.14}$$

sobre a qual supomos que

$$\Omega = Q + R, \tag{3.15}$$

onde Q *é uma matriz simétrica e negativa-definida e* R *é uma matriz de posto dois.*

Então, existem um aberto $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$*, e funções analíticas côncavas* u, v *e funções analíticas positivas* a *e* b *tais que, em pontos de* $\mathcal{V}$*, temos*

$$\omega = a \, \mathrm{d}u + b \, \mathrm{d}v. \tag{3.16}$$

A prova deste teorema segue de uma elaborada aplicação da teoria de Cartan-Kaehler. Precisamos enunciar e demonstrar uma série de lemas para apresentar sua demonstração. Em particular, um lema fundamental para as etapas seguintes é o seguinte.

Lema 2. *Suponha as condições (3.9) e (3.10) satisfeitas. Então, existem 1-formas analíticas ω', σ e σ' tais que*

$$\mathrm{d}\omega = \omega \wedge \omega' + \sigma \wedge \sigma'. \tag{3.17}$$

Demonstração. A primeira parte da prova do Teorema de Pfaff consiste deste lema. Basta verificarmos que todos os procedimentos garantem a analiticidade das formas na decomposição.

□

3.1.1 O Sistema Diferencial Exterior Associado

Seja ω uma 1-forma definida em um aberto $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ satisfazendo

$$\omega \wedge \mathrm{d}\omega \neq 0, \tag{3.18}$$

$$\omega \wedge \mathrm{d}\omega \wedge \mathrm{d}\omega = 0. \tag{3.19}$$

Supomos que, dadas 1-formas α e β, é possível decompor ω como

$$\omega = \lambda\alpha + \mu\beta. \tag{3.20}$$

Diferenciando esta equação, obtemos

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\lambda \wedge \alpha + \mathrm{d}\mu \wedge \beta + \lambda \mathrm{d}\alpha + \mu \mathrm{d}\beta.$$

Se α e β são exatas, isto é, caso existam funções U e V tais que

$$\alpha = \mathrm{d}U, \quad \beta = \mathrm{d}V,$$

temos

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\lambda \wedge \alpha + \mathrm{d}\mu \wedge \beta. \tag{3.21}$$

As equações (3.20) e (3.21) implicam que ω e $\mathrm{d}\omega$ são algebricamente geradas por α e β, ou seja,

$$\omega \wedge \alpha \wedge \beta = 0, \tag{3.22}$$

$$\mathrm{d}\omega \wedge \alpha \wedge \beta = 0, \tag{3.23}$$

onde a segunda equação deriva, como vimos, do fato de que α e β são formas exatas. Em particular, temos

$$\mathrm{d}\alpha = 0, \quad \mathrm{d}\beta = 0. \tag{3.24}$$

Formulamos, então, o problema de decomposição de ω como a obtenção de soluções para o sistema diferencial exterior

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\alpha &= 0, && (3.25)\\ \mathrm{d}\beta &= 0, && (3.26)\\ \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n &\neq 0, && (3.27) \end{aligned}$$

onde a última linha expressa a condição de inpendendência das variáveis $x^1, \ldots, x^n$, que denotamos doravante simplesmente por $\mathrm{d}x \neq 0$. Impomos as seguintes restrições ao espaço em que procuramos soluções: considera-se um par (α, β) de 1-formas *admissível* quando

$$\begin{aligned} \omega \wedge \alpha \wedge \beta &= 0, && (3.28)\\ \mathrm{d}\omega \wedge \alpha \wedge \beta &= 0. && (3.29) \end{aligned}$$

Escrevemos em coordenadas locais

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{d}x^i, \tag{3.30}$$

$$\beta = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mathrm{d}x^j. \tag{3.31}$$

Localmente, o espaço dos pares de formas (α, β) corresponde ao espaço euclidiano $3n$-dimensional

$$E = \{(\alpha_i, \beta_j, x^k) : 1 \leq i, j, k \leq n\}. \tag{3.32}$$

Em termos de coordenadas locais, a restrição (3.28) acima é escrita como

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i,j,k=1}^{n} \omega_k \alpha_i \beta_j \mathrm{d}x^k \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \\ &= \sum_{1 \leq r < p < q \leq n} \left(\sum_{1 \leq i,j,k \leq n} \delta^{ijk}_{pqr} \omega_k \alpha_i \beta_j \right) \mathrm{d}x^r \wedge \mathrm{d}x^p \wedge \mathrm{d}x^q = 0 \end{aligned}$$

ou, componente a componente,

$$\sum_{1 \leq i,j,k \leq n} \delta^{ijk}_{pqr} \omega_k \alpha_i \beta_j = 0, \quad 1 \leq r < p < q \leq n, \tag{3.33}$$

o que corresponde a um conjunto de C_n^3 equações independentes. A segunda restrição (3.29) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{1\leq i,j,k,l\leq n} \frac{\partial \omega^k}{\partial x^l} \alpha_i \beta_j \mathrm{d}x^l \wedge \mathrm{d}x^k \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \\ &= \sum_{1\leq s<r<p<q\leq n} \left(\sum_{1\leq i,j,k,l\leq n} \delta^{ijkl}_{pqrs} \Omega_{k,l} \alpha_i \beta_j \right) \mathrm{d}x^s \wedge \mathrm{d}x^r \wedge \mathrm{d}x^p \wedge \mathrm{d}x^q, \end{aligned}$$

o que, expresso em componentes

$$\sum_{1\leq i,j,k,l\leq n} \delta^{ijkl}_{pqrs} \Omega_{k,l} \alpha_i \beta_j = 0, \quad 1 \leq s < r < p < q \leq n, \tag{3.34}$$

produz outras C_n^4 equações independentes. Visto que as restrições (3.28) e (3.29) são linearmente independentes, segue que, de fato, temos um conjunto de $C_n^3 + C_n^4 = C_{n+1}^4$ equações.

Dentro do conjunto M de pares de formas admissíveis $(\alpha(x), \beta(x))$, $x \in \mathcal{U}$, consideramos o aberto

$$\mathcal{A} = \{(\alpha, \beta, x) \in M : \alpha \neq \omega,\ \beta \neq \omega\}. \tag{3.35}$$

Denotamos, por fim,

$$\mathcal{M} = M \cap \mathcal{A}. \tag{3.36}$$

Temos, então, o seguinte teorema de estrutura.

Lema 3. *O conjunto $\mathcal{M}$ é uma subvariedade $(n+5)$-dimensional em E definida pelas equações*

$$\begin{aligned} \omega \wedge \alpha \wedge \beta &= 0, &(3.37)\\ \omega \wedge \sigma \wedge \sigma' \wedge \alpha &= 0, &(3.38)\\ \omega \wedge \sigma \wedge \sigma' \wedge \beta &= 0. &(3.39) \end{aligned}$$

Em particular, as restrições (3.28)-(3.29) e as restrições (3.37)-(3.39) definem igualmente a variedade $\mathcal{M}$.

Demonstração. A equação (3.28) implica que existem funções f e g tais que

$$\beta = f\alpha + g\omega. \tag{3.40}$$

Supomos, inicialmente, válidas as equações (3.38) e (3.39). Neste caso, temos, em vista do Lema 2,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega \wedge \alpha \wedge \beta &= (\omega \wedge \omega' + \sigma \wedge \sigma') \wedge \alpha \wedge \beta \\
&= (\omega \wedge \omega' + \sigma \wedge \sigma') \wedge \alpha \wedge (f\alpha + g\omega) \\
&= g(\omega \wedge \omega' + \sigma \wedge \sigma') \wedge \alpha \wedge \omega \\
&= g\sigma \wedge \sigma' \wedge \alpha \wedge \omega \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Podemos obter a mesma conclusão, utilizando (3.39) ao invés de (3.38).

Inversamente, suponhamos válida a equação (3.29). Sendo assim, efetuamos, a partir do fato de que ω é algebricamente gerada por α e β, ou seja, que existem funções s e t tais que

$$\omega = s\alpha + t\beta,$$

o seguinte cálculo

$$\begin{aligned}
\sigma \wedge \sigma' \wedge \alpha \wedge \omega &= (\omega \wedge \omega' + \sigma \wedge \sigma') \wedge \alpha \wedge \omega \\
&= \omega \wedge \mathrm{d}\omega \wedge \alpha \\
&= (s\alpha + t\beta) \wedge \mathrm{d}\omega \wedge \alpha \\
&= t\beta \wedge \mathrm{d}\omega \wedge \alpha \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De modo similar, calculamos

$$\begin{aligned}
\sigma \wedge \sigma' \wedge \beta \wedge \omega &= (\omega \wedge \omega' + \sigma \wedge \sigma') \wedge \beta \wedge \omega \\
&= \omega \wedge \mathrm{d}\omega \wedge \beta \\
&= (s\alpha + t\beta) \wedge \mathrm{d}\omega \wedge \beta \\
&= s\alpha \wedge \mathrm{d}\omega \wedge \beta \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Estes cálculos demonstram a equivalência entre as restrições (3.28)-(3.29) e o conjunto de restrições (3.37)-(3.39).

Por fim, observamos que a equação (3.63) implica que

$$\begin{aligned}
0 &= \mathrm{d}\omega \wedge \alpha \wedge \beta = \mathrm{d}\omega \wedge \alpha \wedge (f\alpha + g\omega) \\
&= g\mathrm{d}\omega \wedge \alpha \wedge \omega.
\end{aligned}$$

Similarmente, escrevendo, para certas funções h, k,

$$\alpha = h\beta + k\omega, \tag{3.41}$$

obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{d}\omega \wedge \alpha \wedge \beta = \mathrm{d}\omega \wedge (h\beta + k\omega) \wedge \beta \\ &= k\,\mathrm{d}\omega \wedge \omega \wedge \beta. \end{aligned}$$

Portanto, a não ser no caso em que α e β são linearmente dependentes (ou seja, quando $g = k = 0$), concluímos que

$$\mathrm{d}\omega \wedge \omega \wedge \alpha = 0, \tag{3.42}$$

$$\mathrm{d}\omega \wedge \omega \wedge \beta = 0. \tag{3.43}$$

Observamos que o sistema (3.37), (3.42) e (3.43) equivale ao sistema (3.37)-(3.39). De fato, novamente a partir do Lema 2, depreende-se que

$$\begin{aligned} \sigma \wedge \sigma' \wedge \alpha \wedge \omega = \mathrm{d}\omega \wedge \alpha \wedge \omega, \\ \sigma \wedge \sigma' \wedge \beta \wedge \omega = \mathrm{d}\omega \wedge \beta \wedge \omega. \end{aligned}$$

Investigando, desta vez, a dimensão de $\mathcal{M}$, observamos que a equação (3.38) implica que α é gerado algebricamente por σ, σ' e ω. Além disso, dado α, a forma β é gerada por α e ω, graças à equação (3.63). Contando dimensões, concluímos que $\mathcal{M}$ é, como afirmado, $(n+5)$-dimensional. □

O sistema diferencial exterior em $\mathcal{M}$

$$\mathrm{d}\alpha = 0, \tag{3.44}$$

$$\mathrm{d}\beta = 0, \tag{3.45}$$

$$\mathrm{d}x \neq 0 \tag{3.46}$$

é fechado, visto que $\mathrm{d}^2 = 0$. Devemos, em seguida, determinar a existência de elementos integrais. Para tanto, é mister escrever o sistema (3.44)-(3.46) em uma forma equivalente.

Lema 4. *Existem 1-formas analíticas linearmente independentes $\lambda, \mu, \nu, \theta, \gamma$ tais que o sistema (3.44)-(3.46) é equivalente a*

$$\lambda \wedge \omega + \mu \wedge \sigma + \nu \wedge \alpha = 0, \tag{3.47}$$

$$\theta \wedge \omega + \gamma \wedge \alpha = 0, \tag{3.48}$$

$$\mathrm{d}x \neq 0. \tag{3.49}$$

Demonstração. Segundo a demonstração do Lema 3, vimos que o conjunto de restrições (3.28)-(3.29) é equivalente a

$$\omega \wedge \alpha \wedge \beta = 0, \tag{3.50}$$
$$\mathrm{d}\omega \wedge \omega \wedge \alpha = 0, \tag{3.51}$$
$$\mathrm{d}\omega \wedge \omega \wedge \beta = 0. \tag{3.52}$$

Diferenciamos a equação (3.51), obtendo

$$\begin{aligned} 0 &= -\mathrm{d}\omega \wedge \mathrm{d}\omega \wedge \alpha + \mathrm{d}\omega \wedge \omega \wedge \mathrm{d}\alpha \\ &= -(\omega \wedge \omega' + \sigma \wedge \sigma') \wedge (\omega \wedge \omega' + \sigma \wedge \sigma') \wedge \alpha + (\omega \wedge \omega' + \sigma \wedge \sigma') \wedge \omega \wedge \mathrm{d}\alpha \\ &= \omega' \wedge \omega \wedge \sigma \wedge \sigma' \wedge \alpha + \sigma \wedge \sigma' \wedge \omega \wedge \alpha \wedge \omega' + \sigma \wedge \sigma' \wedge \omega \wedge \mathrm{d}\alpha \\ &= \sigma \wedge \sigma' \wedge \omega \wedge \mathrm{d}\alpha. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathrm{d}\alpha = \lambda \wedge \omega + \mu \wedge \sigma + \mu' \wedge \sigma'. \tag{3.53}$$

Entretanto, (3.38) assegura que σ' é gerado algebricamente por ω, σ e α. Assim, concluímos que

$$\mathrm{d}\alpha = \lambda \wedge \omega + \mu \wedge \sigma + \nu \wedge \alpha. \tag{3.54}$$

Agora, diferenciamos a equação (3.50), o que resulta em

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{d}\omega \wedge \alpha \wedge \beta - \omega \wedge \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + \omega \wedge \alpha \wedge \mathrm{d}\beta \\ &= (\omega \wedge \omega' + \sigma \wedge \sigma') \wedge \alpha \wedge \beta - \omega \wedge \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + \omega \wedge \alpha \wedge \mathrm{d}\beta \\ &= \sigma \wedge \sigma' \wedge \alpha \wedge \beta - \omega \wedge \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + \omega \wedge \alpha \wedge \mathrm{d}\beta. \end{aligned}$$

Todavia, as formas α e β são algebricamente geradas por ω, σ e σ' em função das equações (3.38) e (3.39). Portanto, concluímos que

$$-\omega \wedge \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + \omega \wedge \alpha \wedge \mathrm{d}\beta = 0.$$

Ademais, a equação (3.50) implica que β é gerada algebricamente por α e ω e que, portanto, vale a equação (3.63). Deste modo,

$$-\omega \wedge \mathrm{d}\alpha \wedge f\alpha + \omega \wedge \alpha \wedge \mathrm{d}\beta = 0,$$

ou seja,

$$\omega \wedge \alpha \wedge (\mathrm{d}\beta - f\mathrm{d}\alpha) = 0.$$

Portanto,

$$\mathrm{d}\beta - f\mathrm{d}\alpha = \theta \wedge \omega + \gamma \wedge \alpha,$$

donde deduzimos que

$$\mathrm{d}\beta = f\mathrm{d}\alpha + \theta \wedge \omega + \gamma \wedge \alpha. \tag{3.55}$$

Isto encerra a demonstração do lema. □

A forma equivalente do sistema diferencial exterior (3.44)-(3.46) exposta no Lema 4 permite demonstrar a existência de elementos integrais e o cômputo da dimensão do espaço de elementos integrais na grassmaniana G_n de n-planos em $\mathcal{M}$.

Com este propósito, escrevemos a diferencial exterior das funções a_i e b_j em (3.30) e (3.31) como

$$\mathrm{d}\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}\,\mathrm{d}x^j, \tag{3.56}$$

$$\mathrm{d}\beta_i = \sum_{j=1}^{n} B_{i,j}\,\mathrm{d}x^j. \tag{3.57}$$

Empregando esta notação, vemos que as equações (3.44) e (3.45) no sistema diferencial exterior são expressas respectivamente por

$$\sum_{i,j} A_{i,j}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j = 0, \tag{3.58}$$

$$\sum_{i,j} B_{i,j}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j = 0. \tag{3.59}$$

Deste modo, um par de vetores v, w tangentes a um dado ponto $(\alpha, \beta, x) \in \mathcal{M}$ faz parte de um elemento integral do sistema neste ponto se

$$\mathrm{d}\alpha(v, w) = 0, \quad \mathrm{d}\beta(v, w) = 0. \tag{3.60}$$

Completamos o conjunto linearmente independente $\{\omega, \sigma, \alpha\}$ a uma base $\{\omega = \omega^1, \sigma = \omega^2, \alpha = \omega^3, \omega^4, \ldots, \omega^n\}$ do espaço cotangente $\mathbb{R}^{n*}$, de modo que, decompondo $\lambda, \mu, \nu, \theta$ e γ nesta base, obtemos a partir de (3.47)

$$(\lambda_2 - \mu_1)\sigma \wedge \omega + (\lambda_3 - \nu_1)\alpha \wedge \omega + (\mu_3 - \nu_2)\alpha \wedge \sigma + \sum_{i=4}^{n} \lambda_i \omega^i \wedge \omega$$
$$+ \sum_{i=4}^{n} \mu_i \omega^i \wedge \sigma + \sum_{i=4}^{n} \nu_i \omega^i \wedge \alpha = 0,$$

o que resulta em $3 + 3(n - 3) = 3n - 6$ equações. De modo similar, a equação (3.48), quando expandida nesta base, equivale a um conjunto de $2n - 3$ equações. Uma vez que as equações (3.47) e (3.49) são linearmente independetes, equivalem a um sistema de $5n - 9$ equações cujas soluções descrevem um elemento integral na grassmaniana de n-planos em $\mathcal{M}$. Esta grassmaniana tem dimensão $5n$, visto que $\mathcal{M}$ tem dimensão $n+5$. Portanto, a variedade de elementos integrais na grassmaniana tem dimensão $5n-(5n-9) = 9$.

Um argumento similar àqueles apresentados em [7] e [10] permite mostrar que os elementos integrais são regulares, no sentido da Definição 7.1.11 em [3].

Deste modo, aplicando-se o teste de Cartan (Theorem 7.4.1 em [3]) e, em seguida, o Teorema de Cartan-Kaehler (Theorem 7.3.1 e Theorem 7.3.2 em [3]), garantimos a existência de uma variedade integral deste sistema, passando por um ponto $(\bar{x}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in \mathcal{M}$ arbitrário.

Em virtude da condição (3.49), uma variedade integral é descrita localmente como gráfico de uma aplicação da forma

$$x \mapsto (\alpha(x), \beta(x)).$$

Temos, então,

$$d\alpha = 0, \quad d\beta = 0.$$

O Lema de Poincaré assegura a existência local de funções u, v tais que

$$\alpha = du, \quad \beta = dv.$$

Uma vez que $\mathcal{M}$ é definida pela condição

$$\omega \wedge \alpha \wedge \beta = 0,$$

concluímos que existem funções a, b tais que

$$\omega = adu + bdv. \tag{3.61}$$

Para finalizarmos a demonstração, consideramos, agora, funções f, g, h e k e definimos

$$\begin{aligned} \alpha &= f\omega + gdu, && (3.62)\\ \beta &= h\omega + kdu. && (3.63) \end{aligned}$$

Estas formas satisfazem as condições que definem formas em $\mathcal{M}$, a saber (3.37)-(3.39). Assim, as matrizes

$$A = (A^i_j)^n_{i,j=1} = (\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j})^n_{i,j=1}, \quad B = (B^i_j)^n_{i,j=1} = (\frac{\partial \beta_i}{\partial x^j})^n_{i,j=1} \tag{3.64}$$

definem um plano n-dimensional em $\mathcal{M}$ no ponto $(x, \alpha(x), \beta(x))$. Este plano é um elemento integral do sistema diferencial exterior se e somente se as matrizes A e B são simétricas.

Diferenciando (3.62)-(3.63), obtemos

$$A^i_j = f\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} + g\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial f}{\partial x^j}\omega_i + \frac{\partial g}{\partial x^j}\frac{\partial u}{\partial x^i}, \tag{3.65}$$

$$B^i_j = h\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} + k\frac{\partial^2 v}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial h}{\partial x^j}\omega_i + \frac{\partial k}{\partial x^j}\frac{\partial u}{\partial x^i}. \tag{3.66}$$

Pela hipótese no enunciado do teorema, temos

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} = Q_{ij} + R_{ij},$$

onde Q é uma matriz simétrica, negativa-definida e R é uma matriz de posto dois. Portanto,

$$A^i_j = fQ_{ij} + g\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + fR_{ij} + \frac{\partial f}{\partial x^j}\omega_i + \frac{\partial g}{\partial x^j}\frac{\partial u}{\partial x^i}, \tag{3.67}$$

$$B^i_j = hQ_{ij} + k\frac{\partial^2 v}{\partial x^i \partial x^j} + hR_{ij} + \frac{\partial h}{\partial x^j}\omega_i + \frac{\partial k}{\partial x^j}\frac{\partial u}{\partial x^i}. \tag{3.68}$$

Calculamos

$$d\omega = \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i})dx^j \wedge dx^i = \sum_{i,j} R_{ij} dx^j \wedge dx^i \tag{3.69}$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned} d\omega &= da \wedge du + db \wedge dv = da \wedge du + \frac{db}{b} \wedge (\omega - a du) && (3.70) \\ &= \frac{db}{b} \wedge \omega + (da - \frac{db}{b}) \wedge du \\ &= \Big(\frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x^j}\omega_i + (\frac{\partial a}{\partial x^j} - \frac{a}{b}\frac{\partial b}{\partial x^j})\frac{\partial u}{\partial x^i}\Big) dx^j \wedge dx^i. && (3.71) \end{aligned}$$

Comparando-se estas duas expressões, temos

$$R_{ij} = \frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x^j}\omega_i + (\frac{\partial a}{\partial x^j} - \frac{a}{b}\frac{\partial b}{\partial x^j})\frac{\partial u}{\partial x^i}. \tag{3.72}$$

Portanto, cumpre escolhermos f, g, h e k de modo que

$$\begin{aligned} 0 &= fR_{ij} + \frac{\partial f}{\partial x^j}\omega_i + \frac{\partial g}{\partial x^j}\frac{\partial u}{\partial x^i} \\ &= f\Big(\frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x^j} + \frac{\partial f}{\partial x^j}\Big)\omega_i + f\Big((\frac{\partial a}{\partial x^j} - \frac{a}{b}\frac{\partial b}{\partial x^j}) + \frac{\partial g}{\partial x^j}\Big)\frac{\partial u}{\partial x^i} \end{aligned} \tag{3.73}$$

e

$$\begin{aligned} 0 &= hR_{ij} + \frac{\partial f}{\partial x^j}\omega_i + \frac{\partial k}{\partial x^j}\frac{\partial u}{\partial x^i} \\ &= h\Big(\frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x^j} + \frac{\partial h}{\partial x^j}\Big)\omega_i + h\Big((\frac{\partial a}{\partial x^j} - \frac{a}{b}\frac{\partial b}{\partial x^j}) + \frac{\partial k}{\partial x^j}\Big)\frac{\partial u}{\partial x^i}. \end{aligned} \tag{3.74}$$

Para tanto, basta fixarmos

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial h}{\partial x^i} = -\frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial x^i} \tag{3.75}$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial x^i} = \frac{\partial k}{\partial x^i} = -\frac{\partial a}{\partial x^i} - \frac{a}{b}\frac{\partial b}{\partial x^i}. \tag{3.76}$$

Com estas escolhas e fixando-se $f(x) = h(x) = 1$ e $g(x) = -k(x) = \varepsilon$, obtemos, no ponto x,

$$A = Q + \varepsilon U, \tag{3.77}$$

$$B = Q - \varepsilon U. \tag{3.78}$$

Uma vez que Q é negativa-definida, o mesmo é válido para A e B caso escolhamos ε suficientemente pequeno. Ademais, substituindo estas escolhas de valores para f, g, h e k no ponto x nas expressões (3.62) e (3.63), chegamos a

$$\alpha(x) = \omega(x) + \varepsilon du(x), \tag{3.79}$$

$$\beta(x) = \omega(x) - \varepsilon du(x), \tag{3.80}$$

o que implica a independência linear de $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ e

$$\omega(x) = \frac{1}{2}\big(\alpha(x) + \beta(x)\big),$$

o que permite concluir a prova do teorema. □

3.2 Uma Aplicação: Demanda Agregada

Fixamos $p \in \mathbb{R}^n_+$. Consideramos funções U_1, U_2 definidas em $\mathbb{R}^n_+$ e uma função real $\mu : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$. Formulamos, então, o seguinte problema de otimização

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n_+} \big(U_1(x) + \mu(p)U_2(x)\big) \tag{3.81}$$

sujeito a

$$p \cdot x \leq 1, \quad p \in \mathbb{R}^n_+. \tag{3.82}$$

Seja $V \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto. Uma aplicação $\hat{X} : V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n_+$ é dita admissível quando existe uma função $\lambda : V \to \mathbb{R}$ tal que

- $p \cdot \hat{X}(p) = 1$,
- $\frac{\partial}{\partial x^i}\big(U_1 + \mu(p)U_2\big)|_{\hat{X}} = \lambda(p)p_i, \quad i = 1, \dots, n$,
- $\hat{X}^i(p) > 0, \quad j = 1, \dots, n$, e $\lambda(p) \neq 0$.

Estas são condições necessárias para que $\hat{X}(p)$ seja solução do problema de maximização descrito acima. São, ademais, condições suficientes caso U_1, U_2 sejam côncavas e o multiplicador μ seja positivo.

Proposição 7 (Condição de Chiappori-Ekeland). *Se existem U_1, U_2, μ, V e $\hat{X}$ admissível, então a matriz de Slutsky associada a $\hat{X}$ é soma de uma matriz simétrica e uma matriz com posto um.*

Demonstração. Vide Seção 2.2.

Lema 5. *Seja $\hat{X} : V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n_+$. Se existem funções (U_1, U_2, μ) com $\hat{X}$ admissível, então existem funções diferenciáveis φ, ψ, f e g tais que*

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{X}^i dp_i = \varphi\, df + \psi\, dg. \tag{3.83}$$

Reciprocamente, se existem abertos V e $W \subset \mathbb{R}^n_+$ e um difeomorfismo local $\hat{X} : V \to W$ tais que (3.83) é válido para dadas funções φ, ψ, f e g e caso

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{X}^i(p)p_i = 1, \quad p \in V, \tag{3.84}$$

então existem funções U_1, U_2 tais que $\hat{X}$ é (U_1, U_2, μ, V)-admissível.

Demonstração. Supomos que $\hat{X}$ é admissível. Então, definindo-se

$$\hat{U}_i(p) = U_i(\hat{X}(p)), \quad i = 1, 2 \tag{3.85}$$

e

$$\hat{U}(p) = \hat{U}_1(p)+\mu(p)\hat{U}_2(p) = \max_{x\in\mathbb{R}^n} \big(U_1(x)+\mu(p)U_2(x)+\lambda(p)(1-x\cdot p)\big). \tag{3.86}$$

Pelo Teorema do Envelope, temos

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial p_i} = \frac{\partial \mu}{\partial p_i}\hat{U}_2 - \lambda \hat{X}^i, \tag{3.87}$$

o que implica que

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{X}^i p_i = -\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \hat{U}}{\partial p_i} p_i + \frac{\hat{U}_2}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mu}{\partial p_i} p_i, \tag{3.88}$$

ou, ainda,

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{X}^i dp_i = \frac{\hat{U}_2}{\lambda} d\mu - \frac{1}{\lambda} d\hat{U}, \tag{3.89}$$

o que assegura a necessidade da condição no enunciado, se definimos

$$f = \mu, \quad \varphi = \frac{\hat{U}_2}{\lambda}, \quad g = \hat{U}, \quad \psi = -\frac{1}{\lambda}. \tag{3.90}$$

Reciprocamente, dadas funções f, g, φ e ψ tais que

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{X}^i dp_i = \varphi df + \psi dg,$$

com

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{X}^i p_i = 1,$$

definimos

$$\lambda = -\frac{1}{\psi}, \quad \hat{U} = g, \quad \hat{U}_2 = -\frac{\varphi}{\psi}, \quad \mu = f \tag{3.91}$$

e

$$\hat{U}_1 = \hat{U} - \mu \hat{U}_2. \tag{3.92}$$

Por fim, utilizando o difermorfismo local $\hat{X}$, definimos

$$U_i(x) = \hat{U}_i(\hat{X}^{-1}(x)), \quad i = 1, 2. \tag{3.93}$$

Devemos, então, demonstrar que $\hat{X}$ é (U_1, U_2, μ, V)-admissível. Por definição, temos

$$\begin{aligned} \hat{U}(p) &= U_1(\hat{X}(p)) + \mu(p) U_2(\hat{X}(p)) + \lambda(p)(1 - \hat{X}(p) \cdot p) \\ &= \hat{U}_1(p) + \mu(p)\hat{U}_2(p) + \lambda(p)(1 - \hat{X}(p) \cdot p), \end{aligned}$$

equação que, diferenciada, resulta em

$$d\hat{U} = d\hat{U}_1 + \mu d\hat{U}_2 + \hat{U}_2 d\mu - \lambda \hat{X}^i dp_i - \lambda p_i \frac{\partial \hat{X}^i}{\partial p_j} dp_j + (1 - \hat{X}(p) \cdot p) d\lambda. \tag{3.94}$$

Por outro lado, temos

$$d\hat{U} = dg = \frac{1}{\psi}\Big(\sum_{i=1}^{n} \hat{X}^i dp_i - \varphi df\Big) = -\lambda \sum_{i=1}^{n} \hat{X}^i dp_i + \hat{U}_2 d\mu. \tag{3.95}$$

Comparando-se estas expressões, obtém-se

$$d\hat{U}_1 + \mu d\hat{U}_2 - \lambda p_i \frac{\partial \hat{X}^i}{\partial p_j} dp_j = 0 \tag{3.96}$$

ou seja,

$$\frac{\partial \hat{U}_1}{\partial p_j} + \mu \frac{\partial \hat{U}_2}{\partial p_j} - \lambda p_i \frac{\partial \hat{X}^i}{\partial p_j} = 0, \tag{3.97}$$

donde concluímos que

$$\frac{\partial U_1}{\partial x^i} \frac{\partial \hat{X}^i}{\partial p_j} + \mu \frac{\partial U_2}{\partial x^i} \frac{\partial \hat{X}^i}{\partial p_j} - \lambda p_i \frac{\partial \hat{X}^i}{\partial p_j} = 0, \tag{3.98}$$

o que resulta, finalmente, em

$$\frac{\partial U_1}{\partial x^i} + \mu \frac{\partial U_2}{\partial x^i} - \lambda p_i = 0, \tag{3.99}$$

uma das condições de admissibilidade de $\hat{X}$. As demais condições são facilmente verificadas. $\square$

Combinando a Proposição 7 e o Lema 5 acima, deduzimos que a Condição de Chiappori-Ekeland é necesária para a existência de uma aplicação diferenciável (U_1, U_2, μ, V)-admissível $\hat{X}$.

Reciprocamente, o Teorema de Pfaff implica a existência de uma decomposição nos moldes de 3.83 e, portanto, o Lema 5 garante a existência de tal aplicação. Assim, a Condição de Chiappori-Ekeland é também suficiente.

De fato, esta condição, escrita na forma

$$\sigma^{ij} = s^{ij} + a^i b^j,$$

implica que

$$\Big(\frac{\partial X^i}{\partial p_j} - \sum_k \pi_k \frac{\partial X^i}{\partial p_k} X^j\Big) dp_i \wedge dp_j = \sigma^{ij} dp_i \wedge dp_j = a_i dp_i \wedge b_j dp_j. \qquad (3.100)$$

Portanto, denotando-se

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} X^i dp_i,$$

deduzimos que

$$d\omega = \gamma \wedge \omega + a \wedge b, \qquad (3.101)$$

onde

$$\gamma = -\pi_k \frac{\partial X^i}{\partial p_k} dp_i, \quad a = a^i dp_i, \quad b = b^j dp_j.$$

Todavia, a equação 3.101 implica que

$$\omega \wedge d\omega \wedge d\omega = 0. \qquad (3.102)$$

Com isto, aplicamos o Teorema de Pfaff ou o Teorema de Chiappori-Eekeland, seguidos de Lema 7, para concluirmos a suficiência da condição de Chiappori-Ekeland.

Referências Bibliográficas

[1] BRYANT, R. et al. Exterior differential systems. New York : Springer-Verlag, c1991. 475 p.

[2] CARTAN, E., Les systemes differentiels exterieures et leurs applications géométriques. Paris : Hermann, 1945. 214 p.

[3] IVEY, T. A. ; LANDSBERG, J. M., Cartan for beginners: differential geometry via moving frames and exterior differential systems. Providence, R. I., 2003. 378 p.

[4] MAS-COLLEY, A. Microeconomic theory. New York : Oxford University Press, 1995. 981 p.

[5] VARIAN, H., Análisis microeconômico. Barcelona : Antoni Bosch, 1992.

[6] CHIAPPORI, P.-A. ; EKELAND, I. A convex Darboux theorem. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., v. 25, n. 4, p. 287-297, 1997.

[7] CHIAPPORI, P.-A. ; EKELAND, I., Aggregation and market demand: an exterior differential calculus viewpoint. Econometrica, v. 67, p. 1435-1458, 1999

[8] DJITT'E, N. ; EKELAND, I., An inverse problem in the economic theory of demand. Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. non-linéaire, v. 23, p. 269-281, 1999.

[9] IZMAILOV, A. ; SOLODOV, M. Otimização. Rio de Janeiro : IMPA, 2005. v.1

[10] EKELAND, I., Applying exterior differential calculus to economics: a presentation and some new results. Japan and the World Economy, v. 163, p. 363-385, 2004.

[11] MORITA, S. Geometry of differential forms. Providence, R. I., AMS, 2001. Translations of Mathematical Monographs, 201.

[12] SPIVAK, M. A comprehensive introduction to differential geometry. Houston : Publish or Perish, 2007.

[13] TAYLOR, M. Partial differential equations New York : Springer, 1996. 3v.