UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Flávio França Cruz

IMERSÕES EM ESPAÇOS DE EINSTEIN: APLICAÇÕES À RELATIVIDADE GERAL

Fortaleza
2007

Flávio França Cruz

IMERSÕES EM ESPAÇOS DE EINSTEIN: APLICAÇÕES À RELATIVIDADE GERAL

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Herbert Soares de Lira.

Fortaleza
2007

Aos meus amados irmãos Fabiano, Fagner e Fabrício.

AGRADECIMENTOS

À Deus por conceder essa conquista.

Aos meus pais, pelo apoio incondicional e pelo amor.

Aos meus amados irmãos Fabiano (In Memorian), Fagner e Fabrício, por estarem sempre ao meu lado e pelo amor sincero e verdadeiro. Ao meu sobrinho Raul, por nos trazer mais alegria.

Ao professor Jorge Herbert, pela participação essencial e efetiva na elaboração deste trabalho, por sua paciência com minhas deficiências, pelo seu apoio e pela orientação.

À minha tia Maria Saraiva (tia Mãezinha) e ao meu primo-irmão Gilberto (Bebel), pela ajuda essencial durante a graduação e por me adotarem em sua família. As minhas primas Elizângela (Lili) e Micaeli (Lalá), pela amizade e pelo carinho com que sempre me trataram.

Ao meu tio Rosival, pelo apoio e incentivo.

Aos meus amigos Juliano Brandão, Fernanda Aprígio, Vanderli, Alex Coelho, Anderson William, Esaú Romualdo, Daniele e Marilze, pelo companheirismo e por suas sinceras amizades. Aos meus ex-professores Aparecido Luiz Bento, Katia Nassif, José Alberto, Paulo César, Mario de Assis e Carlos Humberto, por me incentivarem a continuar estudando matemática.

Aos professores Francisco Eduardo, Wilson Hugo e Augusto, os meus maiores incentivadores durante o período em que estive na URCA. Em especial ao professor Francisco de Assis de Brito, pelo apoio e incentivo durante a iniciação científica.

Ao meu amigo Juscelino Silva, pelos ensinamentos, pela amizade e pelo companheirismo. A Alana e ao Victor Hugo, por estarem sempre perto.

Aos amigos Paulo Alexandre, Jonatan, Sibério, Jobson, Tiago Caúla, Fabrício, Denize, Wilker, Carpegiane, Darlan, Gláucio, Michel, Joserlan, David Carneiro, Marcus Samuel, Elivaldo, Marcílio, Tony, Marcelo, Marcelo Melo, Marcos Melo, Henrique Fernandes, Serginho e Jânio, pelo convívio saudável durante o mestrado.

Aos professores Abdênago Barros, Antônio Caminha, Luquésio Petrola, Lev Birbrair e Francisco Pimentel, pelos ensinamentos durante as disciplinas de mestrado.

À Andrea, Erivan e ao Adriano, pela prestatividade e eficiência no tocante aos assuntos burocráticos da Pós-graduação.

À Silvana Alcântara, pelo apoio durante a escola de verão 2006.

Aos meus conterrâneos e companheiros Junior Calvi, Bruno Borges e Adriano Delfino, pela amizade e pelos momentos de descontração no Jamacaru.

Ao meu amigo Damião Júnio, pelo convívio durante o mestrado e por esta sempre perto nos bons e maus momentos dessa caminhada.

Ao meu grande amigo Jocel Faustino, companheiro desde os tempos de iniciação científica na graduação, sempre paciente, calmo e leal. Devo muito pelo aprendizado durante todos esses anos de convivência.

À CAPES, pelo suporte financeiro.

"O essencial é invisível aos olhos"
Antoine de Saint-Exupéry

Sumário

Introdução

Dada uma variedade semi-riemanniana M^n, a existência de uma imersão isométrica de M em uma variedade ambiente $\bar{M}^N$ é equivalente, em termos de sistemas de coordenadas, a possibilidade de resolver um sistema sobre-determinado de $\frac{n(n+1)}{2}$ EDP's cujas variáveis são as N componentes da imersão. Naturalmente, ocorrem condições de compatibilidade, as quais, em Geometria Diferencial, correspondem às equações de Gauss, Codazzi e Ricci.

Neste contexto, o famoso Teorema de Janet-Cartan (v. [14], vol. V, p. 216) assegura a existência de imersões locais no caso em que M é analítica e riemanniana e $\bar{M}$ é o espaço euclidiano de dimensão $\frac{n(n+1)}{2}$. A demonstração deste teorema, protótipo da teoria de sistemas diferenciais exteriores desenvolvida por Cartan e Kaehler, é firmemente baseada no Teorema de Cauchy-Kowalewskaya. Um outro resultado (v. [14], p. 609), de divulgação muito mais restrita, conhecido como Teorema de Campbell-Magaard, afirma que qualquer variedade riemanniana de dimensão n pode ser localmente imersa numa variedade Ricci-flat de dimensão $n+1$. Observamos que a codimensão do espaço ambiente neste caso é bem menor que no teorema de Janet-Cartan. Curiosamente, poucas menções são feitas a este teorema na literatura clássica em Geometria Diferencial. Uma notável exceção é a enciclopédica referência [14]. A demonstração original, exposta no livro [3], foi retomada e corrigida por Magaard em sua tese de doutorado, vinda à lume mais tarde.

A despeito disto, na literatura recente em Relatividade Geral e Cosmologia, o Teorema de Campbell-Magaard adquiriu grande relevância na investigação da consistência matemática da teoria da matéria induzida e de outras teorias de imersão do espaço-tempo. A idéia de acrescentar dimensoões extras ao espaço-tempo tem perpassado toda a história da Relatividade Geral, tendo como versão pioneira a Teoria de Kaluza-

Klein, unificando gravitação e eletromagenetismo em uma estrutura de dimensão cinco. Recentes teorias da gravitação que postulam a existência de uma dimensão extra motivaram a busca por generalizações do Teorema de Campbell-Magaard. Como exemplo de tais teorias, pode-se citar os chamados modelos de Randall-Sundrum, onde o espaço imersor corresponde a um espaço de Einstein. Preocupados em estender o resultado original de Campbell e sua reformulação por Magaard, C. Romero e F. Dahia obtiveram o seguinte teorema de imersão em espaços de Einstein:

Teorema. *([6], Theorem 3, p. 5813) Seja M^n, $n > 1$, uma variedade semi-riemanniana cuja métrica é expressa por uma matriz analítica (h_{ij}) em um sistema de coordenadas x^i. Então, M pode ser local, isométrica e analiticamente imersa em um espaço de Einstein de dimensão $n+1$ e constante cosmológica Λ.*

Neste trabalho, apresentamos alguns resultados sobre a existência de imersões locais em espaços de Einstein, obtidos por Carlos Romero e colaboradores e publicados em [1], [4] e [6]. De fato, pesquisa desenvolvida por estes autores permitiu obter resultados ainda mais abrangentes do que os expostos presentemente.

A dissertação é estruturada do seguinte modo: no Capítulo 1, apresentamos preliminares de Geometria Diferencial e algumas fórmulas clássicas de Cálculo Tensorial que serão utilizadas no decorrer do trabalho. No Capítulo 2, obtemos as equações de Einstein como equações de Euler-Lagrange para a ação de Einstein-Hilbert. Como explanação prévia sobre o tensor de energia-momento, mostramos, ainda, alguns exemplos de lagrangianas sobre campos. No Capítulo 3, é feito um breve estudo sobre imersões isométricas de codimensão 1. Em particular, obtêm-se as equações fundamentais (equações de Gauss e Codazzi), as quais são utilizadas para deduzir-se uma apresentação conveniente das equações de Einstein. Neste formalismo, as equações de campo aparecem como duas equações dinâmicas envolvendo a métrica e a segunda forma fundamental de uma hipersuperfície; e n equações de vínculo. Mostramos que tais equações são as equações canônicas da formulação Hamiltoniana e (formalismo ADM) da Relatividade Geral. No capítulo 4, apresentamos, finalmente, um estudo interpretativo da prova dada por C. Romero e F. Dahia para o teorema citado acima e abordamos, ainda, resultados obtidos por C. Romero e colaboradores sobre imersões mínimas em espaços de Einstein.

Capítulo 1

Noções de Cálculo em Variedades

Neste capítulo, iremos apresentar as noções básicas do cálculo em variedades e introduziremos as ferramentas que serão utilizadas nos demais capítulos.

1.1 Campos Tensoriais

Um *tensor* do tipo (r, s) em um ponto q de uma variedade diferenciável $\bar{M}^{n+1}$ é uma aplicação multilinear

$$T : \underbrace{T_q^*\bar{M} \times \dots T_q^*\bar{M}}_{r} \times \underbrace{T_q\bar{M} \times \dots \times T_q\bar{M}}_{s} \to \mathbb{R}.$$

Em particular, uma 1-forma $\omega \in T_q^*\bar{M}$ é um tensor do tipo $(0, 1)$, ao passo que um vetor tangente $v \in T_q\bar{M}$ é um tensor do tipo $(1, 0)$ definido por

$$v(\omega) = \omega(v).$$

Em geral, um tensor do tipo (r, s) pode ser escrito em termos de coordenadas locais $q^0, \dots, q^n$ em $\bar{M}$ na forma

$$T = T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \frac{\partial}{\partial q^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial q^{i_r}} \otimes \mathrm{d}q^{j_1} \otimes \dots \otimes \mathrm{d}q^{j_s}.$$

O símbolo $\otimes$ denota o *produto tensorial* definido do seguinte modo: dados tensores T, S de tipos (r, s) e (r', s'), o tensor $T \otimes S$, de tipo $(r + r', s + s')$, é dado por

$$\begin{aligned}
&T \otimes S(\omega^1, \ldots, \omega^{r+r'}, v_1, \ldots, v_{s+s'}) = \\
&T(\omega^1, \ldots, \omega^r, v_1, \ldots, v_s)\, S(\omega^1, \ldots, \omega^{r'}, v_1, \ldots, v_{s'}).
\end{aligned}$$

Um *campo tensorial* de tipo (r, s) em $\bar{M}$ é uma correspondência que associa a cada ponto $q \in \bar{M}$ um tensor do tipo (r, s) em $T_q\bar{M}$, de modo que os componentes locais $T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}$ são funções diferenciáveis. Sob mudança de coordenadas

$$(q^0, \ldots, q^n) \mapsto (\tilde{q}^0, \ldots, \tilde{q}^n),$$

tais componentes transformam-se segundo a regra

$$\tilde{T}^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} = T^{k_1 \ldots k_r}_{l_1 \ldots l_s} \frac{\partial \tilde{q}^{i_1}}{\partial q^{k_1}} \cdots \frac{\partial \tilde{q}^{i_r}}{\partial q^{k_r}} \frac{\partial q^{l_1}}{\partial \tilde{q}^{j_1}} \cdots \frac{\partial q^{l_s}}{\partial \tilde{q}^{j_s}}.$$

Campos vetoriais e 1-formas diferenciais correspondem, respectivamente, a campos tensoriais do tipo $(1, 0)$ e do tipo $(0, 1)$. Um operador linear em $T_q\bar{M}$ pode ser visto como um tensor do tipo $(1, 1)$.

Uma *métrica* g em $\bar{M}$ é um campo tensorial do tipo $(0, 2)$, cuja ação sobre campos vetoriais V, W denotamos por $\langle V, W \rangle$, satisfazendo as seguintes condições:

1. simetria, isto é, $\langle V, W \rangle = \langle W, V \rangle$,

2. não-degenerescência, ou seja, caso $\langle V, W \rangle = 0$, para todo campo vetorial W, então $V = 0$.

Em coordenadas, a métrica é descrita por uma matriz simétrica e não-singular (g_{ij}). A inversa desta matriz é usualmente representada por (g^{ij}). Denotamos

$$|g| = |\det(g_{ij})|. \tag{1.1}$$

O par (M, g) é denominado uma variedade semi-riemanniana. A métrica é dita *riemanniana*, caso a matriz (g_{ij}) seja definida. Trataremos adiante de métricas *lorentzianas*, em que a matriz (g_{ij}) tem índice 1.

Uma 1-forma diferencial ω é *metricamente equivalente* a um campo vetorial V se, dado um campo vetorial W qualquer, obtém-se

$$\omega(W) = \langle V, W \rangle.$$

Neste caso, expressando localmente o campo vetorial por $V = v^i \frac{\partial}{\partial q^i}$, temos

$$\omega = g_{ij}\, v^i \,\mathrm{d}q^j =: v_j \,\mathrm{d}q^j.$$

A métrica pode ser estendida a 1-formas definindo-se

$$\langle \omega, \omega \rangle = \langle V, V \rangle.$$

A matriz (g^{ij}) corresponde as componentes da métrica atuando em 1-formas. De fato,

$$\langle \omega, \omega \rangle = g^{ij} \omega_i \omega_j =: \omega^j \omega_j.$$

Como exemplo, dada uma função real u definida em $\bar{M}$, o campo *gradiente*

$$\bar{\nabla} u = g^{ij} u_i \frac{\partial}{\partial q^j} = u^j \frac{\partial}{\partial q^j},$$

é metricamente equivalente a diferencial $\mathrm{d}u = u_i \,\mathrm{d}q^i$ de u, onde $u_i = \partial_i u$.

A extensão da métrica a campos tensoriais arbitrários é feita de modo natural. As operações algébricas $v_j = g_{ij}\, v^i$ e $\omega^j = g^{ij}\omega_i$, denominadas *rebaixamento* e *levantamento* de índices, podem igualmente ser estendidas a campos tensoriais.

Dado um campo vetorial V em $\bar{M}$, a métrica determina a *derivada covariante* de V dada por

$$\bar{\nabla} V = \bar{\nabla}_i V^j \,\mathrm{d}q^i \otimes \frac{\partial}{\partial q^j}, \tag{1.2}$$

onde

$$\bar{\nabla}_i V^j = \partial_i V^j + \bar{\Gamma}^j_{ik} V^k, \tag{1.3}$$

sendo os *símbolos de Christoffel* $\bar{\Gamma}^j_{ik}$ completamente determinados pela métrica, segundo a expressão

$$\bar{\Gamma}^j_{ik} = \frac{1}{2}\, g^{jl} \big(\partial_i\, g_{lk} + \partial_k\, g_{il} - \partial_l\, g_{ik} \big). \tag{1.4}$$

Usualmente, denotamos $\bar{\nabla}_i V = \bar{\nabla} V(\frac{\partial}{\partial q^i})$. Dado um campo vetorial W, definimos

$$\bar{\nabla}_W V = W^i \bar{\nabla}_i V. \tag{1.5}$$

Esta operação de derivação pode ser estendida a campos tensoriais quaisquer pela fórmula

$$\begin{aligned}
&\bar{\nabla}_W T\big(V_1,\ldots,V_r,\theta^1,\ldots,\theta^s\big) = W\big(T(V_1,\ldots,V_r,\theta^1,\ldots,\theta^s)\big) \\
&-T\big(\bar{\nabla}_W V_1,\ldots,V_r,\theta^1,\ldots,\theta^s\big) - \ldots - T\big(V_1,\ldots,\bar{\nabla}_W V_r,\theta^1,\ldots,\theta^s\big) \\
&-T\big(V_1,\ldots,V_r,\bar{\nabla}_W \theta^1,\ldots,\theta^s\big) - \ldots - T\big(V_1,\ldots,V_r,\theta^1,\ldots,\bar{\nabla}_W \theta^s\big).
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Fixando $W = \frac{\partial}{\partial q^j}$, as componentes do campo tensorial $\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial q^j}} T$ são denotadas por

$$\bar{\nabla}_j T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} \tag{1.7}$$

ou

$$T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s;j}. \tag{1.8}$$

Em particular, dado um campo tensorial K do tipo $(1,1)$, calculamos

$$\bar{\nabla}_j K^i_l = \partial_j K^i_l + \bar{\Gamma}^i_{jm} K^m_l - \bar{\Gamma}^m_{jl} K^i_m. \tag{1.9}$$

Uma outra noção de derivada covariante é a *derivada de Lie*, que prescinde da existência de uma métrica em $\bar{M}$. Consideramos um campo vetorial arbitrário V em $\bar{M}$ e o fluxo $\Phi_\lambda = \Phi(\lambda,\cdot)$ gerado por V, isto é, tal que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\,\Phi(\lambda,q) = V(\Phi(\lambda,q)), \quad q \in \bar{M}.$$

Cada aplicação Φ_λ é um difeomorfismo, o qual atua sobre campos da seguinte forma

$$\Phi_{\lambda *} W|_{\Phi_\lambda(q)} = \mathrm{d}\Phi_\lambda(q)\cdot W(q)$$

e atua sobre 1-formas diferenciais ω por *pull-back*

$$\Phi_\lambda^* \omega(W) = \omega(\Phi_{\lambda *} W).$$

Definimos, ainda, sua ação sobre campos escalares

$$\Phi_\lambda^* u = u \circ \Phi_\lambda.$$

Definimos a derivada de Lie de campos escalares e vetoriais respectivamente por

$$\pounds_V\, u = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\lambda} = \mathrm{d}u(V)$$

e

$$\pounds_V W|_q = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}|_{\lambda=0}\, \Phi_{-\lambda\,*} V(\Phi_\lambda(q)) = [V, W],$$

a extensão a campos arbitrários seguindo regra análoga a que vimos acima.

Registramos o fato de que a diferença de duas derivadas covariantes $\bar\nabla$ e $\tilde\nabla$ em uma variedade (correspondendo, por exemplo, a duas métricas diferentes) constitui um campo tensorial C do tipo $(1, 2)$. De fato, calculamos

$$\begin{aligned} C(V, uW) &= \bar\nabla_V uW - \tilde\nabla_V uW \\ &= \mathrm{d}u(V)W - \mathrm{d}u(V)W + u\big(\bar\nabla_V W - \tilde\nabla_V W\big) = u\, C(V, W), \end{aligned}$$

as demais relações de linearidade sendo trivialmente verificadas.

O *divergente* de um campo tensorial V é definido por

$$\mathrm{div} V = \mathrm{tr}\big(\bar\nabla V\big) = V^i_{;i}. \tag{1.10}$$

Em termos de coordenadas, escrevemos

$$\mathrm{div} V = \partial_i V^i + \bar\Gamma^i_{ij} V^j. \tag{1.11}$$

Todavia, observamos que

$$\sum_i \bar\Gamma^i_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i,k} g^{ik}\,\partial_j g_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{i,k} g^{ik}\big(\partial_i g_{kj} - \partial_k g_{ij}\big) = \frac{1}{2}\sum_{i,k} g^{ik}\,\partial_j g_{ik}.$$

Por outro lado, utilizando a expansão de $\det(g_{ij})$ em termos de cofatores C^{ij} e a regra de Cramer para inversão de uma matriz, temos

$$\partial_k |g| = \frac{\partial |g|}{\partial g_{ij}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} = \pm \frac{\partial}{\partial g_{ij}} \sum_l g_{il} C^{il}\,\partial_k g_{ij} = \pm C^{ij} \partial_k g_{ij} = |g| g^{ij} \partial_k g_{ij}.$$

Concluímos que

$$\sum_i \bar\Gamma^i_{ij} = \frac{1}{2}\frac{1}{|g|}\partial_j |g| = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\partial_j \sqrt{|g|}.$$

Assim, deduzimos a seguinte fórmula

$$\mathrm{div} V = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\partial_i\big(\sqrt{|g|} V^i\big).$$

O *laplaciano* de um campo escalar é o operador dado por

$$\Delta u = \operatorname{div} \bar{\nabla} u,$$

cuja expressão em coordenadas é

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \, \partial_i \big(\sqrt{|g|} \, u^i \big).$$

No caso lorentziano, denotamos

$$\Delta u = \Box u.$$

Podemos definir adequadamente o divergente de um tensor simétrico T com componentes T^{ij} segundo a fórmula

$$\operatorname{div} T = \bar{\nabla}_i T^{ij} \, \frac{\partial}{\partial q^j}.$$

O cálculo com campos tensoriais é facilitado pelo emprego de coordenadas normais, que definiremos adiante. Nestas coordenadas, podemos fixar, em um ponto q,

$$g_{ij}|_q = \eta_{ij}, \quad \bar{\Gamma}^k_{ij}|_q = 0,$$

onde $\big(\eta_{ij}\big)$ denota a métrica

$$\eta = \operatorname{diag}\big(\underbrace{-1, \ldots, -1}_{\nu}, 1, \ldots, 1 \big),$$

onde ν representa o índice de g. Os casos $\nu = 0$ e $\nu = 1$ correspondem às métricas euclidiana e de Minkowski em $\mathbb{R}^{n+1}$. No caso $n = 3$, a métrica de Minkowski constitui o cenário geométrico da Relatividade Especial.

Esta aproximação de primeira ordem de uma métrica arbitrária é, em Relatividade, o sucedâneo do conceito de referencial inercial. Todavia, o anulamento dos efeitos de uma métrica não-euclidiana não pode ser tornado local. De fato, uma obstrução, necessariamente de segunda ordem, para que uma métrica seja localmente euclidiana é a curvatura, que passamos a definir.

O *tensor de curvatura* em $\bar{M}$ associado a derivada covariante $\bar{\nabla}$ é

$$\bar{R}(V, W)Z = \bar{\nabla}_W \bar{\nabla}_V Z - \bar{\nabla}_V \bar{\nabla}_W Z + \bar{\nabla}_{[V,W]} Z, \tag{1.12}$$

uma versão covariante sendo definida por

$$\bar{R}(V, W, Z, Y) = \langle \bar{R}(V, W)Z, Y \rangle.$$

Em coordenadas locais,

$$\begin{aligned}
\bar{R}(\partial_i, \partial_j)\partial_k &= \bar{\nabla}_j \bar{\nabla}_i \partial_k - \bar{\nabla}_i \bar{\nabla}_j \partial_k = \bar{\nabla}_j \bar{\Gamma}^l_{ik} \partial_l - \bar{\nabla}_i \bar{\Gamma}^l_{jk} \partial_l \\
&= \left(\partial_j \bar{\Gamma}^l_{ik} - \partial_i \bar{\Gamma}^l_{jk} + \bar{\Gamma}^m_{ik} \bar{\Gamma}^l_{jm} - \bar{\Gamma}^m_{jk} \bar{\Gamma}^l_{im} \right) \partial_l =: \bar{R}^l_{ijk}\, \partial_l.
\end{aligned}$$

O *tensor de Ricci* é definido como a contração

$$\bar{R}(V, Z) = \mathrm{tr}\big(W \mapsto \bar{R}(V, W)Z\big).$$

Temos

$$\bar{R}(\partial_i, \partial_k) = \mathrm{tr}\big(\partial_j \mapsto \bar{R}^l_{ijk}\, \partial_l\big) = \bar{R}^j_{ijk}.$$

Portanto

$$\bar{R}_{ik} = \bar{R}^j_{ijk}.$$

Em coordenadas,

$$\bar{R}_{ik} = \partial_j \bar{\Gamma}^j_{ik} - \partial_i \bar{\Gamma}^j_{jk} + \bar{\Gamma}^m_{ik} \bar{\Gamma}^j_{jm} - \bar{\Gamma}^m_{jk} \bar{\Gamma}^j_{im}.$$

A *curvatura escalar* é dada por

$$\bar{R} = g^{ik} \bar{R}_{ik} = \bar{R}^i_i.$$

1.2 Formas Diferenciais

Uma *k-forma* exterior ω em $T_q\bar{M}$ é uma aplicação multilinear

$$\omega : T_q\bar{M} \times \ldots \times T_q\bar{M} \to \mathbb{R}$$

totalmente anti-simétrica, isto é, tal que, dados vetores v_i em $T_q\bar{M}$, temos

$$\omega(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}) = \delta^{1\ldots k}_{i_1 \ldots i_k}\, \omega(v_1, \ldots, v_k),$$

onde o delta de Kronecker generalizado $\delta^{j_1 \ldots j_k}_{i_1 \ldots i_k}$ corresponde ao sinal da permutação σ no caso em que

$$i_1 = \sigma(j_1), \ldots, i_k = \sigma(j_k).$$

Caso contrário, pomos $\delta^{j_1\dots j_k}_{i_1\dots i_k} = 0$.

Em particular, dada a base dual $\mathrm{d}q^0, \dots, \mathrm{d}q^n$ em $T_q\bar{M}$, definimos a k-forma

$$\mathrm{d}q^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}q^{i_k}(v_1, \dots, v_k) = \begin{vmatrix} \mathrm{d}q^{i_1}(v_1) & \dots & \mathrm{d}q^{i_1}(v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{d}q^{i_k}(v_1) & \dots & \mathrm{d}q^{i_k}(v_k) \end{vmatrix} \tag{1.13}$$

Caso os vetores coordenados sejam ortonormais em q, interpretamos geometricamente este determinante como o volume orientado da projeção, no subespaço gerado pelos vetores coordenados

$$\frac{\partial}{\partial q^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial q^{i_k}},$$

do paralelepípedo (possivelmente degenerado) determinado pelos vetores tangentes $v_1, \dots, v_k$.

Verifica-se que, considerando apenas multi-índices tais que $i_1 < \dots < i_k$, estas formas constituem base para o espaço vetorial das k-formas em $T_q\bar{M}$, que denotamos $\Lambda^k(T_q\bar{M})$. Deste modo, uma k-forma arbitrária pode ser escrita como

$$\omega = \sum_{0 \le i_1 < \dots < i_k \le n} a_{i_1 \dots i_k}\, \mathrm{d}q^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}q^{i_k}.$$

As formas básicas $\mathrm{d}q^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}q^{i_k}$ são apenas localmente definidas, correspondendo a uma anti-simetrização do produto tensorial visto acima:

$$\mathrm{d}q^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}q^{i_k} = \delta^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_k}\, \mathrm{d}q^{j_1} \otimes \dots \otimes \mathrm{d}q^{j_k}.$$

Também indicamos que $\wedge$ pode ser estendido linearmente a formas quaisquer, gerando um *produto exterior*.

Uma *k-forma diferencial* em $\bar{M}$ é uma correspondência que associa a cada ponto q uma k-forma em $\omega \in \Lambda^k(T_q\bar{M})$, cuja expressão em coordenadas tem componentes $a_{i_1 \dots i_k} = a_{i_1 \dots i_k}(q^0, \dots, q^n)$ diferenciáveis.

Uma n-forma μ em $\bar{M}$ é um *elemento de volume* se $\mu(q) \neq 0$, para todo $q \in \bar{M}$. Verifica-se que $\bar{M}$ admite um elemento de volume se e somente se é *orientável*. Isto significa que $\bar{M}$ admite uma coleção de sistemas de coordenadas tais que os jacobianos das mudanças de coordenadas são positivos. Por sua vez, esta condição implica que podemos orientar todos os espaços tangentes $T_q\bar{M}$ de modo coerente, a saber: uma base $\{v_0, \ldots, v_n\}$ de $T_q\bar{M}$ é positiva se

$$\mu(v_0, \ldots, v_n) > 0.$$

Dados dois sistemas de coordenadas q^i e $\tilde{q}^j$ em $\bar{M}$, temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}q^0 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}q^n &= \frac{\partial q^0}{\partial \tilde{q}^{i_0}} \cdots \frac{\partial q^n}{\partial \tilde{q}^{i_n}} \, \mathrm{d}\tilde{q}^{i_0} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\tilde{q}^{i_n} \\
&= \delta^{i_0 \ldots i_n}_{0 \ldots n} \frac{\partial q^0}{\partial \tilde{q}^{i_0}} \cdots \frac{\partial q^n}{\partial \tilde{q}^{i_n}} \, \mathrm{d}\tilde{q}^0 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\tilde{q}^n \\
&= J(q^0, \ldots, q^n) \, \mathrm{d}\tilde{q}^0 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\tilde{q}^n,
\end{aligned}$$

onde

$$J(q^0, \ldots, q^n) = \det\left(\frac{\partial q^i}{\partial \tilde{q}^j}\right) = \epsilon_{i_0 \ldots i_n} \frac{\partial q^0}{\partial \tilde{q}^{i_0}} \cdots \frac{\partial q^n}{\partial \tilde{q}^{i_n}}$$

é o jacobiano da transformação de coordenadas e, nesta expressão, $\epsilon_{i_0 \ldots i_n} = \delta^{i_0 \ldots i_n}_{0 \ldots n}$ é o "tensor" de Levi-Civitá (v. [9], p. 67).

Portanto, dadas as expressões locais

$$\omega = a(q^0, \ldots, q^n) \, \mathrm{d}q^0 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}q^n$$

e

$$\omega = \tilde{a}(\tilde{q}^0, \ldots, \tilde{q}^n) \, \mathrm{d}\tilde{q}^0 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\tilde{q}^n,$$

temos

$$\tilde{a} = a \, J.$$

Como apontamos acima, a existência de um elemento de volume μ em $\bar{M}$ acarreta que possamos supor $J > 0$.

O *suporte* de uma k-forma diferencial ω é o fecho em $\bar{M}$ do conjunto de pontos q tais que $\omega(q) \neq 0$. Suponhamos que o suporte de ω esteja contido em uma região aberta de $\bar{M}$ parametrizada por coordenadas $q^0, \ldots, q^n$. Neste caso, a *integral* de ω é definida por

$$\int_{\bar{M}} \omega = \int a(q^0, \ldots, q^n) \, \mathrm{d}q^0 \ldots \mathrm{d}q^n, \tag{1.14}$$

se $\omega = a \, \mathrm{d}q^0 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}q^n$ em coordenadas. Nesta expressão, e ao longo destas notas, o sinal de integral sem subscrito indica integração em (um aberto do) espaço euclidiano.

Considerando outro sistema de coordenadas, $\tilde{q}^0, \ldots, \tilde{q}^n$ que cubra o suporte de ω, temos

$$\begin{aligned}\int_{\bar{M}} \omega &= \int \tilde{a}(\tilde{q}^0, \ldots, \tilde{q}^n)\, \mathrm{d}\tilde{q}^0 \ldots \mathrm{d}\tilde{q}^n = \int a\, J\, |J^{-1}|\, \mathrm{d}q^0 \ldots \mathrm{d}q^n \\ &= \int a\, \mathrm{d}q^0 \ldots \mathrm{d}q^n,\end{aligned}$$

onde utilizamos o teorema de mudança de variáveis para integração em $\mathbb{R}^{n+1}$ e o fato de que $J > 0$. Este cálculo mostra a consistência da definição da integral de formas.

Se o suporte (compacto) de ω não é coberto por um único sistema de coordenadas, utiliza-se uma partição da unidade para a definição da integral.

A *derivada exterior* de uma k-forma diferencial

$$\omega = \sum_{0 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} a_{i_1 \ldots i_k}\, \mathrm{d}q^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}q^{i_k}$$

é, por definição, a $(k+1)$-forma diferencial dada por

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{0 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \mathrm{d}a_{i_1 \ldots i_k} \wedge \mathrm{d}q^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}q^{i_k}.$$

Dados um campo vetorial V e uma k-forma diferencial ω, definimos a *contração* ou *produto interior*

$$\iota_V \omega(W_1, \ldots, W_{k-1}) = \omega(V, W_1, \ldots, W_{k-1}).$$

As fórmulas

$$\mathrm{d}\, \pounds = \pounds\, \mathrm{d}$$

e

$$\pounds_V \omega = \mathrm{d}\iota_V \omega + \iota_V\, \mathrm{d}\omega$$

permitem obter uma expressão livre de coordenadas da derivada exterior, a saber

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega(V_1, \ldots, V_{k+1}) &= \sum_i V_i\big(\omega(V_1, \ldots, \widehat{V}_i, \ldots, V_k)\big) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j}\, \omega([V_i, V_j], V_1, \ldots, \widehat{V}_i, \ldots, \widehat{V}_j, \ldots, V_k).\end{aligned}$$

Esta fórmula pode ser alternativamente escrita em termos de derivada covariante.

Ademais, utilizando a noção de derivada de Lie aplicada a formas, demonstra-se a seguinte fórmula de derivação de integais

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}|_{\lambda=0} \int_{\Phi_\lambda(\bar{M})} \omega = \int_{\bar{M}} \pounds_V \omega. \tag{1.15}$$

Propriedades fundamentais da derivada exterior são

$$\mathrm{d}\big(\omega \wedge \eta\big) = \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{d}\eta$$

e

$$\mathrm{d}^2\omega = 0.$$

O *Lema de Poincaré* afirma que, dada uma k-forma fechada ω, isto é, tal que $\mathrm{d}\omega = 0$, existe localmente uma $(k-1)$-forma η tal que $\mathrm{d}\eta = \omega$.

Seja $U \subset M$ um aberto em M cuja fronteira ∂U é uma subvariedade n-dimensional. Suponhamos que o fecho de U é compacto. O *Teorema de Stokes* afirma que, dada uma n-forma ω definida em um aberto V contendo o fecho de U, vale

$$\int_U \mathrm{d}\omega = \int_{\partial U} \omega. \tag{1.16}$$

Tendo em conta a métrica (g_{ij}), podemos definir um elemento de volume natural, que denotamos $\mathrm{d}\bar{M}$. Localmente, definimos

$$\mathrm{d}\bar{M} = \sqrt{|g|}\, \mathrm{d}q^0 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}q^n,$$

onde $|g| = |\det(g_{ij})|$. Portanto, as componentes deste elemento de volume semi-riemanniano são $\sqrt{|g|}\, \epsilon_{i_0 \ldots i_n}$. Neste contexto, a integral de uma função u com suporte compacto em $\bar{M}$ é definida por

$$\int_{\bar{M}} u \, \mathrm{d}\bar{M},$$

cabendo as mesmas observações que fizemos acima.

1.2.1 Integração por Partes

O Teorema de Stokes permite estender o artifício de integração por partes ao Cálculo em variedades.

Dado um campo vetorial V definido em $\bar{M}$, temos o *Teorema da Divergência*

$$\int_U \operatorname{div} V \, \mathrm{d}\bar{M} = \int_{\partial U} \langle V, N \rangle, \mathrm{d}M \tag{1.17}$$

onde N é o campo vetorial normal unitário ao longo da subvariedade $M = \partial U$, apontando para fora. Isto significa que fixamos em $M = \partial U$ o elemento de volume

$$\mathrm{d}M = \iota_N \, \mathrm{d}\bar{M}.$$

O Teorema da Divergência segue do Teorema de Stokes aplicado a n forma

$$\omega = \iota_V \mathrm{d}\bar{M}.$$

De fato, calculamos em coordenadas

$$\iota_V \, \mathrm{d}\bar{M} = \sum_i (-1)^i v^i \sqrt{|g|} \, \mathrm{d}q^0 \wedge \mathrm{d}q^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}q^i} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}q^n$$

e, portanto,

$$\mathrm{d}(\iota_V \mathrm{d}\bar{M}) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \big(v^i \sqrt{|g|}\big) \sqrt{|g|} \mathrm{d}q^0 \wedge \mathrm{d}q^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}q^n = \mathbf{div} V \, \mathrm{d}\bar{M}.$$

A demonstração resume-se, a partir deste ponto, em mostrar que

$$\iota_V \, \mathrm{d}\bar{M} = \langle V, N \rangle \iota_N \mathrm{d}\bar{M} = \langle V, N \rangle \, \mathrm{d}M.$$

Uma consequência notável deste teorema é a integração por partes

$$\int_U u \operatorname{div} V + \int_U \langle \nabla u, V \rangle = \int_{\partial U} \langle V, N \rangle, \tag{1.18}$$

fórmula amplamente utilizada no Cálculo de Variações.

Uma situação particular é a seguinte

$$\int u v_i = \int u \operatorname{div}\big(v \frac{\partial}{\partial q^i}\big) \, \mathrm{d}q = \int \operatorname{div}\big(uv \frac{\partial}{\partial q^i}\big) \, \mathrm{d}q - \int \langle \nabla u, v \frac{\partial}{\partial q^i} \rangle = \int u_i v,$$

as integrações sendo efetuadas no espaço vetorial euclidiano.

Capítulo 2

Equações de Campo

2.1 Ação de Einstein-Hilbert

Nesta seção, iremos obter as equações de Einstein (no vácuo) de um ponto de vista variacional, utilizando a ação de Einstein-Hilbert.

Como antes, $\bar{M}$ denota uma variedade orientada de dimensão $n+1$ munida de métrica semi-riemanniana $g = (g_{ij})$. A densidade lagrangiana para a relatividade geral é dada por

$$\bar{R}\,\sqrt{|g|},$$

onde $\bar{R}$ denota a curvatura escalar e $\mathrm{d}\bar{M} = \sqrt{|g|}\,\mathrm{d}q$ a forma elemento de volume em $\bar{M}$, ambas associadas a métrica $g = (g_{ij})$. A ação de Einstein-Hilbert é definida por

$$S_{eh}(g) = \int_{\bar{M}} \bar{R}\,\mathrm{d}\bar{M}.$$

Em coordenadas (q^i), que cobrem um aberto $U \subset \bar{M}$, à ação de Einstein-Hilbert é expressa por

$$S_{eh}(g) = \int \bar{R}\,\sqrt{|g|}\,\mathrm{d}q,$$

onde $\mathrm{d}q = \mathrm{d}q^0 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}q^n$.

Seja, então, χ um tensor simétrico $(0,2)$ de suporte compacto. Tomemos $\varepsilon > 0$ um parâmetro real, suficientemente pequeno, tal que $g + s\chi$ é uma métrica com mesmo índice para todo $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Definimos, então, a variação da ação S_{eh} como sendo

$$\delta S_{eh} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} S_{eh}(g + s\chi)\big|_{s=0}.$$

Devemos calcular a derivada funcional $\frac{\delta S}{\delta g^{ij}}$ dada por

$$\delta S_{eh} = \int \frac{\delta S_{eh}}{\delta g^{ij}} \, \delta g^{ij}. \tag{2.1}$$

Usando a regra de derivação sob o sinal de integração (1.15), obtemos

$$\begin{aligned}
\delta S_{eh} &= \delta\left(\int \bar{R}\sqrt{|g|}\,\mathrm{d}q\right) = \delta\left(\int g^{ik}\bar{R}_{ik}\sqrt{|g|}\,\mathrm{d}q\right) \qquad (2.2)\\
&= \int \left(\bar{R}_{ik}\sqrt{|g|}\delta(g^{ik}) + g^{ik}\bar{R}_{ik}\delta(\sqrt{|g|})\right)\mathrm{d}q + \int g^{ik}\sqrt{|g|}\delta(\bar{R}_{ik})\mathrm{d}q
\end{aligned}$$

Calculamos separadamente $\delta(g^{ik})$, $\delta(\sqrt{|g|})$ e $\delta(\bar{R}_{ik})$. O cálculo de $\delta(g^{ik})$ é efetuado observando que a identidade $g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j$ implica $\delta(g^{ik}g_{kj}) = 0$ e, portanto,

$$\delta(g^{ik})g_{kj} = -g^{ik}\delta(g_{kj})$$

logo

$$\delta(g^{im}) = -g^{ik}\delta(g_{kj})g^{jm}.$$

Podemos efetuar o cálculo de outra forma, em termos do parâmetro s. De fato, para $\tilde{g}_{ij} = g_{ij} + s\chi_{ij}$ temos

$$\begin{aligned}
\delta^i_j &= \tilde{g}^{ik}\tilde{g}_{kj} = \tilde{g}^{ik}(g_{kj} + s\chi_{kj}) = (g^{ik} + s\hat{\chi}^{ik} + O(s^2))(g_{kj} + s\chi_{kj})\\
&= g^{ik}g_{kj} + (g^{ik}\chi_{kj} + \hat{\chi}^{ik}g_{kj})s + O(s^2)\\
&= \delta^i_j + (g^{ik}\chi_{kj} + \hat{\chi}^{ik}g_{kj})s + O(s^2).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$(g^{ik}\chi_{kj} + \hat{\chi}^{ik}g_{kj})s + O(s^2) = 0.$$

Logo, derivando a expressão acima em $s = 0$, obtemos

$$\hat{\chi}^{ik}g_{kj} = -g^{ik}\chi_{kj}$$

e, assim, deduzimos que

$$\hat{\chi}^{im} = -g^{ik}\chi_{kj}g^{jm}.$$

Uma vez que $\delta(g^{im}) = s\hat{\chi}^{im}$, obtemos como anteriormente a expressão

$$\delta(g^{im}) = -g^{ik}\delta(g_{kj})g^{jm}. \tag{2.3}$$

Calculemos $\delta(\sqrt{|g|})$. Temos

$$\delta(\sqrt{|g|}) = \frac{1}{2\sqrt{|g|}}\delta(|g|). \tag{2.4}$$

Lembramos que o determinante de uma matriz $A = (a^i_j)$ é, por definição,

$$\det A = \sum_\sigma (-1)^\sigma \, a_1^{\sigma(1)} a_2^{\sigma(2)} ... a_n^{\sigma(n)} = \epsilon_{i_1 ... i_n} \, a_1^{i_1} a_2^{i_2} ... a_n^{i_1}$$

onde σ denota uma permutação de $1, ..., n$. Agora, observamos que

$$\tilde{g}_{ij} = g_{ij} + s\chi_{ij} = g_{ij} + \delta g_{ij} = g_{ik}(\delta^k_j + g^{kl}(\delta g_{lj})).$$

Assim

$$\det(\tilde{g}_{ij}) = \det(g_{ij}) \det(\delta^k_j + g^{kl}(\delta g_{lj})).$$

Tendo em conta que l é um índice mudo na expressão acima, expandimos, usando a definição de determinante,

$$\det(\delta^k_j + g^{kl}(\delta g_{lj})) = \sum_\sigma (-1)^\sigma \big(\delta_0^{\sigma(0)} + g^{\sigma(0)l}(\delta g_{l0})\big) \dots \big(\delta_n^{\sigma(n)} + g^{\sigma(n)l}(\delta g_{ln})\big)$$
$$= \sum_\sigma (-1)^\sigma \delta_0^{\sigma(0)} \dots \delta_n^{\sigma(n)} + \sum_i \sum_\sigma (-1)^\sigma \delta_0^{\sigma(0)} \dots g^{\sigma(i)l}(\delta g_{li}) \dots \delta_n^{\sigma(n)}$$
$$+ O\big((\delta g_{lj})^2\big) = 1 + \sum_{i,l} g^{il}(\delta g_{li}) + O\big((\delta g_{lj})^2\big).$$

Deste modo, obtemos

$$\det(\tilde{g}_{ij}) = \det(g_{ij})\big(1 + \sum_{i,l} g^{il}(\delta g_{li}) + O\big((\delta g_{lj})^2\big)\big),$$

o que implica

$$\delta(\det(\tilde{g}_{ij})) = \det(g_{ij}) g^{il}(\delta g_{il}).$$

Substituindo a expressão acima em (2.4), encontramos

$$\delta(\sqrt{|g|}) = \frac{1}{2\sqrt{|g|}}\,|g|g^{il}(\delta g_{il}) = \frac{1}{2}\sqrt{|g|}\,g^{il}(\delta g_{il}). \tag{2.5}$$

Remetendo à expressão $g^{il}(\delta g_{il}) = -\delta(g^{il})g_{il}$ que obtemos anteriormente, podemos reescrever a equação acima na seguinte forma

$$\delta(\sqrt{|g|}) = -\frac{1}{2}\sqrt{|g|}\,\delta(g^{il})g_{il}. \tag{2.6}$$

Finalmente, calculamos $\delta(\bar{R}_{ik})$. Sabemos que

$$R_{ik} = R^{j}_{ijk} = \frac{\partial\bar{\Gamma}^{j}_{ik}}{\partial x^{j}} - \frac{\partial\bar{\Gamma}^{j}_{jk}}{\partial x^{i}} + \bar{\Gamma}^{l}_{ik}\bar{\Gamma}^{j}_{jl} - \bar{\Gamma}^{l}_{jk}\bar{\Gamma}^{j}_{il}$$

Supomos, por ora, que os cálculos são efetuados em coordenadas normais em torno de $q \in \bar{M}$. Como os termos algébricos em $\bar{\Gamma}^{i}_{jk}$ na expressão acima são quadráticos e temos $\bar{\Gamma}^{i}_{jk}|_{q} = 0$, segue que, em termos destas coordenadas

$$\delta\bar{R}_{ik}|_{q} = \delta\partial_{j}\,\bar{\Gamma}^{j}_{ik} - \delta\partial_{i}\bar{\Gamma}^{j}_{jk} = \partial_{j}\delta\,\bar{\Gamma}^{j}_{ik} - \partial_{i}\delta\bar{\Gamma}^{j}_{jk},$$

onde usamos o fato de que

$$\partial_{j}\tilde{\Gamma} = \partial_{j}\big(\Gamma + \delta\Gamma\big) = \partial_{j}\Gamma + \partial_{j}\delta\Gamma$$

e portanto

$$\delta\partial_{j}\Gamma = \partial_{j}\delta\Gamma.$$

Assim, uma vez que derivadas covariantes de um tensor em q coincidem com derivadas usuais, a fórmula acima passa a ser

$$\delta\bar{R}_{ik}|_{q} = \bar{\nabla}_{j}\delta\,\bar{\Gamma}^{j}_{ik} - \bar{\nabla}_{i}\delta\bar{\Gamma}^{j}_{jk}, \tag{2.7}$$

uma identidade tensorial, dita de Palatini, válida em qualquer sistema de coordenadas, em qualquer ponto.

O ponto capital deste argumento é baseado no fato de que $\delta\Gamma$ é tensorial. Isto decorre explicitamente da expressão

$$\delta\bar{\Gamma}^{k}_{ij} = \frac{1}{2}g^{kl}\big(\bar{\nabla}_{i}\delta g_{lj} + \bar{\nabla}_{j}\delta g_{il} - \bar{\nabla}_{l}\delta g_{ij}\big)$$

deduzida do seguinte modo

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{kl}\big(\partial_i \tilde{g}_{lj} + \partial_j \tilde{g}_{il} - \partial_l \tilde{g}_{ij}\big) = \frac{1}{2}\big(g^{kl} + \delta g^{kl}\big)\big(\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}\big)\\
&+\frac{1}{2}\big(g^{kl} + \delta g^{kl}\big)\big(\partial_i \delta g_{lj} + \partial_j \delta g_{il} - \partial_l \delta g_{ij}\big)\\
&= \bar{\Gamma}^k_{ij} + \frac{1}{2}g^{kl}\big(\partial_i \delta g_{lj} + \partial_j \delta g_{il} - \partial_l \delta g_{ij}\big) - \frac{1}{2}g^{km}\delta g_{mn} g^{nl}\big(\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}\big)\\
&+O(s^2)\\
&= \bar{\Gamma}^k_{ij} + \frac{1}{2}g^{kl}\big(\partial_i \delta g_{lj} + \partial_j \delta g_{il} - \partial_l \delta g_{ij}\big) - g^{km}\delta g_{mn}\bar{\Gamma}^n_{ij} + O(s^2)\\
&= \bar{\Gamma}^k_{ij} + \frac{1}{2}g^{kl}\big(\bar{\nabla}_i \delta g_{lj} + \bar{\Gamma}^m_{il}\delta g_{mj} + \bar{\Gamma}^m_{ij}\delta g_{lm} + \bar{\nabla}_j \delta g_{il} + \bar{\Gamma}^m_{ji}\delta g_{ml} + \bar{\Gamma}^m_{jl}\delta g_{im}\\
&-\bar{\nabla}_l \delta g_{ij} - \bar{\Gamma}^m_{li}\delta g_{mj} - \bar{\Gamma}^m_{lj}\delta g_{im}\big) - g^{km}\delta g_{mn}\bar{\Gamma}^n_{ij} + O(s^2)\\
&= \bar{\Gamma}^k_{ij} + \frac{1}{2}g^{kl}\big(\bar{\nabla}_i \delta g_{lj} + \bar{\nabla}_j \delta g_{il} - \bar{\nabla}_l \delta g_{ij} + 2\bar{\Gamma}^m_{ij}\delta g_{lm}\big) - g^{km}\delta g_{mn}\bar{\Gamma}^n_{ij} + O(s^2)\\
&= \bar{\Gamma}^k_{ij} + \frac{1}{2}g^{kl}\big(\bar{\nabla}_i \delta g_{lj} + \bar{\nabla}_j \delta g_{il} - \bar{\nabla}_l \delta g_{ij}\big) + O(s^2).
\end{aligned}
$$

A partir da fórmula (2.7), obtemos

$$g^{ik}\,\delta \bar{R}_{ik} = g^{ik}\bar{\nabla}_j \delta\,\bar{\Gamma}^j_{ik} - g^{ik}\bar{\nabla}_i \delta \bar{\Gamma}^j_{jk} = \bar{\nabla}_j g^{ik}\delta\,\bar{\Gamma}^j_{ik} - \bar{\nabla}_j g^{jk}\delta\bar{\Gamma}^i_{ik} =: \bar{\nabla}_j W^j = \operatorname{div} W,$$

onde W é o campo vetorial dado por

$$W^j = g^{ik}\delta\bar{\Gamma}^j_{ik} - g^{jk}\delta\bar{\Gamma}^i_{ik}.$$

Calculam-se, facilmente, as componentes de W:

$$W^j \;=\; g^{jl}g^{ik}\bar{\nabla}_k \delta g_{il} - g^{jk}g^{il}\bar{\nabla}_k \delta g_{il}.$$

A 1-forma metricamente equivalente a W tem componentes

$$W_j = g_{jm}W^m = g^{ik}\bar{\nabla}_k \delta g_{ij} - g^{il}\bar{\nabla}_j \delta g_{il}.$$

Reunindo estas expressões, voltamos a determinação da equação de campo. Deduzimos que

$$
\begin{aligned}
\delta S_{eg} &= \int \left(\bar{R}_{ij} - \frac{1}{2}\,g^{kl}\bar{R}_{kl}g_{ij}\right)\delta g^{ij}\sqrt{|g|}\,\mathrm{d}q + \int \bar{\nabla}_j W^j \sqrt{|g|}\,\mathrm{d}q\\
&= \int \left(\bar{R}_{ij} - \frac{1}{2}\bar{R}\,g_{ij}\right)\delta g^{ij}\sqrt{|g|}\,\mathrm{d}q + \int_{\bar{M}} \operatorname{div} W
\end{aligned}
$$

Portanto, se χ tem suporte compacto contido em U, então $\delta\Gamma = 0$ próximo a ∂U e, deste modo, $W = 0$ em ∂U. Assim, concluímos que as equações de campo são

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S_{eh}}{\delta g^{ij}} = G_{ij}, \tag{2.8}$$

onde

$$G_{ij} = \bar{R}_{ij} - \frac{1}{2} \bar{R} g_{ij} \tag{2.9}$$

é o *tensor de Einstein*

Como aplicação destes cálculos, supomos que $\bar{M}$ é uma superfície. Dadas duas métricas riemannianas g e $\tilde{g}$ em $\bar{M}$, o caminho

$$(1 - s)\, g + s\, \tilde{g}$$

define uma variação da métrica g. Calcula-se facilmente $R = 2K_g$, a curvatura gaussiana (M, g). Portanto, $G_{ij} = 0$. Assim, obtemos

$$\int_{\bar{M}} K_g = \int_{\bar{M}} K_{\tilde{g}}.$$

Demonstra-se, deste modo, o seguinte fato central em Geometria Diferencial.

Proposição 1. *($\frac{1}{2}$-Gauss Bonnet) Em uma superfície riemanniana $(\bar{M}, g)$, a curvatura total*

$$\int_{\bar{M}} K_g \, \mathrm{d}\bar{M} \tag{2.10}$$

é invariante por mudanças de métrica.

Como costumeiro em Cálculo de Variações, o divergente (e, portanto, o termo de fronteira) encerra informações importantes, como quantidades conservadas. No presente caso, trata-se do termo advindo de um multiplicador de Lagrange envolvendo a curvatura média K da fronteira (v. Capítulo 3 para definição de K). Tal termo contribui para análise quando consideramos variações mais gerais δg_{ij}, que apenas fixam a métrica do bordo ([16], Appendix E).

2.2 Campos Materiais

Consideramos, agora, um fibrado vetorial $\mathcal{E}$ de posto N sobre $\bar{M}$ e denotamos por $\psi : \bar{M} \to \mathcal{E}$ uma secção de $\mathcal{E}$. Como exemplos, podemos mencionar um campo tensorial, caso $\mathcal{E}$ seja um fibrado tensorial. Campos de espinores são exemplos não-tensoriais. Denotamos por $\nabla^{\mathcal{E}}\psi$ a diferencial covariante de ψ, com respeito a uma dada conexão em $\mathcal{E}$.

Uma lagrangiana em $\bar{M}$ é um funcional da forma

$$\psi \mapsto L(q, \psi, \nabla^{\mathcal{E}}\psi)$$

e, dado um elemento de volume semi-riemanniano $\mathrm{d}\bar{M}$ em $\bar{M}$, a densidade lagrangiana correspondente é, por definição,

$$\mathcal{L} = L\sqrt{|g|}.$$

Definimos, então, a *ação*

$$S = \int_{\bar{M}} L \,\mathrm{d}\bar{M} = \int \mathcal{L}\,\mathrm{d}q.$$

Como antes, consideramos um aberto com fecho compacto $U \subset \bar{M}$ coberto por um sistema de coordenadas $q^0, q^1, \ldots, q^n$. Escrevemos localmente $\mathcal{E} = U \times \mathbb{R}^N$ e representamos a secção por

$$\psi : U \to \mathbb{R}^N,$$

aplicação diferenciável cujas componentes (coordenadas cartesianas, não necessariamente componentes tensoriais) denotamos

$$\psi^{(i)} = \psi^{(i)}(q^0, q^1, \ldots, q^n).$$

Denotamos, ainda,

$$\psi^{(i)}_{,j} = \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial q^j}.$$

As expressões locais da lagrangiana e da ação S são, respectivamente,

$$L = L(q, \psi^{(i)}, \psi^{(i)}_{,j}).$$

e

$$S = \int L(q, \psi^{(i)}, \psi^{(i)}_{,j})\sqrt{|g|}\,\mathrm{d}q.$$

As variáveis $\psi^{(i)}$ são denotadas variáveis de campo (internas). Consideramos uma variação

$$\psi_s^{(i)} = \psi^{(i)} + s\,\delta\psi^{(i)}$$

destas variáveis, mantendo-se fixos os parâmetros q e o elemento de volume; e tal que $\delta\psi^{(i)} = 0$ sobre ∂U. Se um campo $\psi = \psi(q)$ extremiza S, então, em termos das coordenadas locais q, valem as equações (de campo) de Euler-Lagrange

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\frac{\delta S}{\delta\psi^{(i)}} \equiv \frac{\partial L}{\partial\psi^{(i)}} - \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial q^j}\left(\sqrt{|g|}\,\frac{\partial L}{\partial\psi^{(i)}_{,j}}\right) = 0.$$

De fato, utilizando a notação δ, segue que

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int \frac{\delta S}{\delta\psi^{(i)}}\,\delta\psi^{(i)} = \int\left(\frac{\partial L}{\partial\psi^{(i)}}\,\delta\psi^{(i)} + \frac{\partial L}{\partial\psi^{(i)}_{,j}}\,\delta\psi^{(i)}_{,j}\right)\sqrt{|g|}\,\mathrm{d}q \\
&= \int\left(\frac{\partial L}{\partial\psi^{(i)}}\,\delta\psi^{(i)} + \frac{\partial L}{\partial\psi^{(i)}_{,j}}\,\partial_j\,\delta\psi^{(i)}\right)\sqrt{|g|}\,\mathrm{d}q \\
&= \int\left(\frac{\partial L}{\partial\psi^{(i)}}\,\delta\psi^{(i)}\sqrt{|g|} + \frac{\partial}{\partial q^j}\Big(\sqrt{|g|}\frac{\partial L}{\partial\psi^{(i)}_{,j}}\,\delta\psi^{(i)}\Big)\right. \\
&\quad \left. -\frac{\partial}{\partial q^j}\Big(\sqrt{|g|}\frac{\partial L}{\partial\psi^{(i)}_{,j}}\Big)\,\delta\psi^{(i)}\right)\mathrm{d}q \\
&= \int\left(\frac{\partial L}{\partial\psi^{(i)}} - \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\frac{\partial}{\partial q^j}\Big(\sqrt{|g|}\frac{\partial L}{\partial\psi^{(i)}_{,j}}\Big)\right)\delta\psi^{(i)}\sqrt{|g|}\,\mathrm{d}q \\
&+ \int\frac{\partial}{\partial q^j}\Big(\sqrt{|g|}\frac{\partial L}{\partial\psi^{(i)}_{,j}}\,\delta\psi^{(i)}\Big)\,\mathrm{d}q
\end{aligned}$$

Visto que o último integrando é um divergente envolvendo o campo variacional $\delta\psi$, concluímos que a equação de Euler-Lagrange é dada pela expressão acima. Aqui, utilizamos o formato da integração por partes exibido em na Seção 1.2.

2.3 Aplicações Harmônicas

Como exemplo de lagrangianas sobre campos, consideramos a densidade de energia

$$L(u) = -\frac{1}{2}\,|\mathrm{d}u|^2, \tag{2.11}$$

onde $\mathrm{d}u$ é a diferencial de uma aplicação $u : \bar{M} \to \mathbb{R}^N$. Fixadas coordenadas arbitrárias $\tilde{q}^k$ em $\mathbb{R}^N$, temos

$$\mathrm{d}u = u^{(k)}_{,i} \frac{\partial}{\partial \tilde{q}^k} \otimes \mathrm{d}q^i$$

onde $u^{(k)}_{,i} = \frac{\partial u^{(k)}}{\partial q^i}$ e, omitindo por ora parênteses e vírgulas,

$$|\mathrm{d}u|^2 = \langle \mathrm{d}u, \mathrm{d}u \rangle = g^{ij}|_q \, \langle \mathrm{d}u \cdot \partial_i, \mathrm{d}u \cdot \partial_j \rangle = g^{ij} u^k_i u^l_j \tilde{g}_{kl}|_{u(q)},$$

onde

$$\tilde{g}_{kl}|_{u(q)} = \langle \frac{\partial}{\partial \tilde{q}^k}, \frac{\partial}{\partial \tilde{q}^l} \rangle|_{u(q)}$$

é a expressão local da métrica em $\mathbb{R}^N$ ao longo da aplicação u. Calculamos

$$\frac{\partial L}{\partial u^m} = -\frac{1}{2} g^{rs} \, u^k_r u^l_s \frac{\partial \tilde{g}_{kl}}{\partial \tilde{q}^m}|_{u(q)}$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial u^m_i} = -\frac{1}{2} g^{is} u^l_s \, \tilde{g}_{ml} - \frac{1}{2} g^{ri} u^k_r \tilde{g}_{km} = -g^{ij} u^k_j \tilde{g}_{mk}.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial q^i}\left(\sqrt{|g|} \, \frac{\partial L}{\partial u^m_i}\right) = -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial q^i}\left(\sqrt{|g|} \, g^{ij} u^k_j\right) \tilde{g}_{mk} \\
&-\frac{1}{2} g^{is} u^l_s \, \frac{\partial}{\partial q^i} \tilde{g}_{ml} - \frac{1}{2} g^{ri} u^k_r \frac{\partial}{\partial q^i} \tilde{g}_{km} \\
&= -\tilde{g}_{km} \, \Delta u^k - \frac{1}{2} g^{is} u^l_s u^n_i \, \frac{\partial \tilde{g}_{ml}}{\partial \tilde{q}^n} - \frac{1}{2} g^{ri} u^k_r u^n_i \frac{\partial \tilde{g}_{km}}{\partial \tilde{q}^n}.
\end{aligned}$$

Deste modo, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial L}{\partial u^m} - \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial q^i}\left(\sqrt{|g|} \, \frac{\partial L}{\partial u^m_i}\right) \\
&= \tilde{g}_{km} \Delta u^k + \frac{1}{2} g^{rs} u^k_r u^l_s \Big(\frac{\partial \tilde{g}_{ml}}{\partial \tilde{q}^k} + \frac{\partial \tilde{g}_{km}}{\partial \tilde{q}^l} - \frac{\partial \tilde{g}_{kl}}{\partial \tilde{q}^m} \Big).
\end{aligned}$$

Portanto, as equações de campo são, neste caso, a equação de uma aplicação *harmônica*

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta u^r} = \Delta u^r + \tilde{\Gamma}^r_{kl} u^k_i u^l_j g^{ij} = 0, \tag{2.12}$$

onde $r = 1, \ldots, N$. Uma variante da ação que consideramos, fixando-se $N = 1$, é

$$S(u) = -\int_{\bar{M}} \frac{1}{2}\,|\mathrm{d}u|^2 + V(u), \tag{2.13}$$

onde V é uma função real, dita potencial. Definindo, por exemplo,

$$V(u) = \frac{m^2}{2}\,u^2,$$

onde m é um parâmetro real, temos a ação S_{kg} de Klein-Gordon.

Do fato de que, trivialmente, $\tilde{\Gamma} = 0$, deduz-se que equação de campo escalar correspondente a ação (2.13) é

$$\Delta u - V'(u) = 0 \tag{2.14}$$

Em particular, para a ação de Klein-Gordon em métricas lorentzianas, obtém-se

$$\Box\, u - m^2 u = 0,$$

uma equação de auto-valor.

2.3.1 Geodésicas

Um outro exemplo interessante ocorre quando $\bar{M}$ tem dimensão 1. Por exemplo, seja $\bar{M} = \mathbb{R}$, munida da métrica usual $\mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}t$. Neste caso, extremizantes u são denominadas geodésicas e satisfazem a equação

$$\tilde{\nabla}_{\dot{u}}\dot{u} = 0,$$

onde $\dot{u} = \mathrm{d}u \cdot \frac{\partial}{\partial t}$. Em termos de coordenadas, as equações (de movimento) de Euler-Lagrange são

$$\ddot{u}^k + \tilde{\Gamma}^k_{ij}\,\dot{u}^i\dot{u}^j = 0. \tag{2.15}$$

Dado $q \in \tilde{M}$, o problema de valor inicial

$$\tilde{\nabla}_{\dot{u}}\dot{u} = 0,$$

com dados iniciais

$$u(0) = q, \quad \dot{u}(0) = v \in T_q\tilde{M},$$

pode ser resolvido, apelando-se ao teorema de existência e unicidade de EDO's. Denotando-se a solução por $u_{q,v}$, a aplicação exponencial

$$q \mapsto \exp_q(v) = u_{q,v}(1),$$

é definida em um aberto estrelado U_0 de $T_q\tilde{M}$ em torno da origem. A possibilidade de definirmos uma tal aplicação é dada pela homogeneidade

$$u_{q,v}(t) = u_{q,tv}(1)$$

das geodésicas. A imagem U de U_0 pela aplicação exponencial é o que denominamos uma vizinhança normal de q. Restringindo-se U_0 a um aberto próprio, podemos assegurar que $\exp_q|_{U_0} : U_0 \to U$ é um difeomorfismo. Dado um ponto q' em U, seja $v \in T_q\tilde{M}$ tal que

$$\exp_q v = q'.$$

Fixamos eixos ortonormais em $T_q\tilde{M}$ e com respeito a estes eixos, definimos coordenadas lineares $v^0, \ldots, v^n$ para v. A correspondência

$$q \mapsto (v^0, \ldots, v^n)$$

define as *coordenadas normais* em U. Por definição, temos

$$\tilde{g}_{ij}|_q = \eta_{ij}.$$

Do fato de que geodésicas radiais são expressas como retas neste sistema de coordenadas, segue que

$$\tilde{\Gamma}^k_{ij}|_q = 0.$$

2.3.2 Imersões Mínimas

Consideramos, agora, o caso em que $u : \bar{M} \to \tilde{M} \subset \mathbb{R}^N$, onde $\tilde{M}$ é uma subvariedade de $\mathbb{R}^N$. Neste caso, (h_{kl}) é a métrica induzida em $\tilde{M}$ pela imersão em $\mathbb{R}^N$.

Na próxima seção, diremos que u é uma imersão isométrica se

$$g_{ij} = \frac{\partial u^k}{\partial q^i}\frac{\partial u^l}{\partial q^j}\, h_{kl}.$$

Supondo satisfeita esta condição, a densidade de energia reduz-se a

$$L = -\frac{1}{2}\, g^{ij} g_{ij} = \frac{n+1}{2}$$

e a ação a um múltiplo do volume da subvariedade imersa $u(\bar{M})$ em $\tilde{M}$:

$$S = -\frac{n+1}{2} \int_{\bar{M}} \mathrm{d}\bar{M}.$$

Calculamos, denotando $\mathrm{d}u \cdot \frac{\partial}{\partial q^i} = \frac{\partial u}{\partial q^i}$,

$$\begin{aligned}
&\tilde{\nabla}_{\frac{\partial u}{\partial q^i}} \frac{\partial u}{\partial q^j} = \tilde{\nabla}_{\frac{\partial u}{\partial q^i}} u^l_j \frac{\partial}{\partial \tilde{q}^l} = \frac{\partial^2 u^l}{\partial q^i \partial q^j} \frac{\partial}{\partial \tilde{q}^l} + \frac{\partial u^k}{\partial q^i} \frac{\partial u^l}{\partial q^j} \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \tilde{q}^k}} \frac{\partial}{\partial \tilde{q}^l} \\
&= u^l_{i,j} \frac{\partial}{\partial \tilde{q}^l} + u^k_i u^l_j \tilde{\Gamma}^m_{kl} \frac{\partial}{\partial \tilde{q}^m} = \left(u^l_{i;j} + \Gamma^m_{ij} u^l_m\right) \frac{\partial}{\partial \tilde{q}^l} + u^k_i u^l_j \tilde{\Gamma}^m_{kl} \frac{\partial}{\partial \tilde{q}^m}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&g^{ij}\, \tilde{\nabla}_{\frac{\partial u}{\partial q^i}} \frac{\partial u}{\partial q^j} = \left(g^{ij} u^m_{i;j} + g^{ij} u^k_i u^l_j \tilde{\Gamma}^m_{kl}\right) \frac{\partial}{\partial \tilde{q}^m} + g^{ij} \Gamma^m_{ij} u^l_m \frac{\partial}{\partial \tilde{q}^l} \\
&= g^{ij} \Gamma^m_{ij} u^l_m \frac{\partial}{\partial \tilde{q}^l}.
\end{aligned}$$

Concluímos

$$\left(g^{ij}\, \tilde{\nabla}_{\frac{\partial u}{\partial q^i}} \frac{\partial u}{\partial q^j}\right)^{\perp} = 0,$$

onde $\perp$ indica a projeção sobre o fibrado normal da subvariedade $u(\bar{M})$ em $T\tilde{M}$.

Todavia, a fórmula (de Weingarten)

$$K\big(\frac{\partial u}{\partial q^i}, \frac{\partial u}{\partial q^j}\big) = \left(\tilde{\nabla}_{\frac{\partial u}{\partial q^i}} \frac{\partial u}{\partial q^j}\right)^{\perp} \tag{2.16}$$

define uma forma bilinear em $\bar{M}$ com valores no fibrado normal da imersão u. Denominamo-la adiante, no caso de codimensão 1, segunda forma fundamental. Mostramos, deste modo, que o traço K desta forma bilinear é nulo. Concluímos que imersões isométricas mínimas (isto é, extremizantes do funcional volume) são caracterizadas por

$$K = 0. \tag{2.17}$$

2.4 Tensor de Energia-Momento

Supomos, ao longo desta seção, que a lagrangiana não depende explicitamente de q.

De outro modo, supomos que S é invariante sob ação do grupo de difeomorfismos que preservam orientação em $\bar{M}$ (ou seja, do grupo GL^{+}_{n+1}). Esta é a expressão matemática do Princípio de Covariância, visto que difeomorfismos correspondem a mudanças de coordenadas.

Consideramos um campo vetorial arbitrário V em M e o fluxo $\Phi(\lambda, \cdot)$ gerado por V. Supõe-se que cada difeomorfismo Φ_λ preserva orientação. Sob ação dos difeomorfismos Φ_λ, temos uma família de variedades semi-riemannianas

$$M_\lambda = \Phi_\lambda(M),$$

com coordenadas locais q^i_λ em $\mathbb{R}^{n+1}$ e métricas

$$g_\lambda = \Phi^*_\lambda\, g,$$

sujeitas a regra tensorial de mudança de coordenadas

$$g_{ij}|_q = (g_\lambda)_{kl}|_{q_\lambda} \frac{\partial q^k_\lambda}{\partial q^i} \frac{\partial q^l_\lambda}{\partial q^j}.$$

Por hipótese, $S(\psi, g)$ é um escalar, ou seja,

$$S(\Phi^*_\lambda \psi, g_\lambda) = S(\psi, g).$$

Portanto

$$\pounds_V S = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\lambda} = 0.$$

Por outro lado, supondo que ψ satisfaz a equação de campo

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta S}{\delta \psi} = \frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial q^j} \left(\sqrt{|g|}\, \frac{\partial L}{\partial \psi_{,j}} \right) = 0$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
0 &= \pounds_V S = \int \pounds_V \Big(L\big(\psi, \mathrm{d}\psi, (g_{ij})\big) \sqrt{|g|} \Big) \,\mathrm{d}q \\
&= \int \bigg(\frac{\delta S}{\delta \psi} \delta\psi + \Big(\frac{\partial L}{\partial g_{ij}} \sqrt{|g|} + L \frac{\delta \sqrt{|g|}}{\delta g_{ij}} \Big) \delta g_{ij} \bigg) \,\mathrm{d}q \\
&= \int \bigg(\frac{\partial L}{\partial g_{ij}} \sqrt{|g|} + \frac{1}{2} \, L \sqrt{|g|} \, g^{ij} \bigg) \delta g_{ij} \,\mathrm{d}q \\
&= \frac{1}{2} \int \bigg(2 \frac{\partial L}{\partial g_{ij}} + L \, g^{ij} \bigg) \delta g_{ij} \, \sqrt{|g|} \,\mathrm{d}q
\end{aligned}
$$

Definimos

$$
T^{ij} = -2 \frac{\partial L}{\partial g_{ij}} - L \, g^{ij},
$$

o tensor de energia-momento associado a S, o qual é automaticamente simétrico, uma vez que, por definição

$$
T^{ij} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \, \frac{\delta S}{\delta g_{ij}}.
$$

O tensor covariante correspondente é dado por

$$
T_{ij} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \, \frac{\delta S}{\delta g^{ij}} = -2 \frac{\partial L}{\partial g^{ij}} + L \, g_{ij}.
$$

Calculando

$$
\begin{aligned}
\delta g_{ij} &= \frac{\mathrm{d}(g_\lambda)_{ij}}{\mathrm{d}\lambda}|_q = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} (\Phi^* g)_{ij}|_q = \pounds_V g_{ij} \\
&= \langle \bar{\nabla}_V \partial_i, \partial_j \rangle + \langle \partial_i, \bar{\nabla}_V \partial_j \rangle - \langle [V, \partial_i], \partial_j \rangle - \langle \partial_i, [V, \partial_j] \rangle \\
&= \langle \bar{\nabla}_{\partial_i} V, \partial_j \rangle + \langle \bar{\nabla}_{\partial_j} V, \partial_i \rangle = V^k_{;i} g_{jk} + V^k_{;j} g_{ik} = V_{j;i} + V_{i;j}.
\end{aligned}
$$

e utilizando a simetria de T^{ij}, obtemos

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2} \int T^{ij} \, \delta g_{ij} \, \sqrt{|g|} \,\mathrm{d}q = \frac{1}{2} \int T^{ij} \big(V_{i;j} + V_{j;i} \big) \sqrt{|g|} \,\mathrm{d}q = \int T^{ij} V_{i;j} \sqrt{|g|} \,\mathrm{d}q \\
&= \int \big(T^{ij} V_i \big)_{;j} \sqrt{|g|} \,\mathrm{d}q - \int T^{ij}_{\ ;j} \, V_i \sqrt{|g|} \,\mathrm{d}q = - \int T^{ij}_{\ ;j} \, V_i \sqrt{|g|} \,\mathrm{d}q,
\end{aligned}
$$

onde usamos o teorema da divergência, aplicado ao campo $J^j = T^{ij}V_i$. Assim pela arbitrariedade de V, obtemos

$$\bar{\nabla}_j T^{ij} = 0. \tag{2.18}$$

Portanto, o tensor de energia-momento tem divergente nulo. Este tipo de cálculo, aplicado a ação de Einstein-Hilbert, permite mostrar, em particular, a equação crucial

$$\bar{\nabla}_i G^{ij} = 0. \tag{2.19}$$

No caso particular em que V é um campo de Killing, ou seja, quando

$$\pounds_V g = 0,$$

temos

$$J^j_{;j} = T^{ij}_{;j} V_i + T^{ij} V_{i;j} = T^{ij} V_{i;j} = -T^{ij} V_{j;i} = -T^{ji} V_{j;i} = -J^i_{;i}.$$

Portanto, o campo J tem divergente nulo.

Restringindo-nos a campos escalares $u : \bar{M} \to \mathbb{R}$ e à densidade de energia

$$L = -\frac{1}{2}\, g^{ij} u_i u_j,$$

definida acima, obtemos

$$T_{ij} = -2\frac{\partial L}{\partial g^{ij}} + L g_{ij} = u_i u_j - \frac{1}{2} g^{kl} u_k u_l\, g_{ij}.$$

De modo livre de coordenadas, escrevemos

$$T = \mathrm{d}u \otimes \mathrm{d}u - \frac{1}{2}|\mathrm{d}u|^2\, g.$$

A lei de conservação é, neste exemplo, dada pelo traço da derivada covariante

$$T_{ij;l} = u_{i;l} u_j + u_i u_{j;l} - \frac{1}{2} u^k_{\ ;l} u_k\, g_{ij} - \frac{1}{2} u^k u_{k;l}\, g_{ij},$$

obtido levantando-se um índice

$$T^i_{j;l} = u^i_{\ ;l} u_j + u^i u_{j;l} - \frac{1}{2} u^k_{\ ;l} u_k\, \delta^i_j - \frac{1}{2} u^k u_{k;l}\, \delta^i_j$$

e, em seguida, contraindo índices

$$T^i_{j;i} = u^i_{\ ;i} u_j + u^i u_{j;i} - \frac{1}{2} u^k_{\ ;i} u_k\, \delta^i_j - \frac{1}{2} u^k u_{k;i}\, \delta^i_j = \Delta u\, u_j = 0,$$

visto que u satisfaz a equação de campo $\Delta u = u^i_{\ ;i} = 0$.

2.5 Equação de Einstein

Agrupando as construções que expomos acima, consideramos, finalmente, uma ação da forma

$$\hat{S} = S_{eh} - 2\kappa\, S$$

onde κ é uma constante universal e

$$S(\psi, g) = \int_{\bar{M}} L\big(\psi, \mathrm{d}\psi, (g_{ij})\big)\sqrt{|g|}\,\mathrm{d}q$$

é uma ação que combina campos materiais ψ e a métrica (g_{ij}). A equação de campo para $\hat{S}$, relativamente a variações δg^{ij} da métrica ambiente corresponde as equações de campo

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\frac{\delta S_{eh}}{\delta g^{ij}} - 2\kappa\,\frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\frac{\delta S}{\delta g^{ij}} = 0$$

as quais, escritas em termos dos tensores definidos nas seções anteriores, são denominadas equação de Einstein

$$G_{ij} = \kappa\, T_{ij}. \tag{2.20}$$

A constante universal κ é determinada por inspeção de campos gravitacionais fracos, assimilando-a a constante de gravitação universal newtoniana e a constantes de acoplamente específicas da natureza do campo ψ.

Deste modo, temos o sistema de equações

$$G_{ij} = \kappa\, T_{ij}, \quad \frac{\delta S}{\delta \psi^{(i)}} = 0. \tag{2.21}$$

Um exemplo deste sistema é a interação do "campo" gravitacional com um campo escalar, como estudado na seção precedente. Temos

$$G_{ij} = \kappa u_i u_j - \kappa\big(\frac{1}{2}u^k u_k + V(u)\big)\, g_{ij}, \tag{2.22}$$

$$u^i_{\ ;i} = V'(u). \tag{2.23}$$

Nos referimos adiante a variedades semi-riemannianas cujas métricas satisfazem este sistema de equações como *geradas por um campo escalar.*

Um caso particular, de que trataremos adiante, é a introdução de uma constante cosmológica Λ nas equações de campo para o vácuo. Isto corresponde a tomarmos $u \equiv 0$ e $V = -\Lambda/\kappa$ no exemplo acima, o que resulta em

$$G_{ij} = \Lambda\, g_{ij}. \tag{2.24}$$

Capítulo 3

Formulação Hamiltoniana

3.1 Equações Fundamentais

Doravante, M^n e $\bar{M}^{n+1}$ denotam variedades semi-riemannianas munidas de métricas representadas por h e g, respectivamente. Uma *imersão isométrica* é uma aplicação $u : M \to \bar{M}$ satisfazendo

1. a diferencial $\mathrm{d}u|_x$ é injetiva, para todo ponto x em M; e
2. $h(V, W) = g(\mathrm{d}u \cdot V, \mathrm{d}u \cdot W)$, para campos vetoriais quaisquer em M.

Representando localmente as métricas em M e $\bar{M}$ respectivamente por (h_{ij}) e (g_{kl}), temos

$$h_{ij}|_x = g_{kl}|_{u(x)} \frac{\partial u^k}{\partial x^i} \frac{\partial u^l}{\partial x^j}. \tag{3.1}$$

Indicamos, sem distinção, as métricas em M e $\bar{M}$ por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Um campo vetorial V ao longo de u é uma aplicação $V : M \to T\bar{M}$ tal que $V(x) \in T_{u(x)}\bar{M}$.

Supondo M e $\bar{M}$ orientadas, mostramos que é possível obter um campo vetorial *normal* unitário N ao longo de M, isto é, tal que $N(x) \perp T_{u(x)}\bar{M}$, com $|\langle N, N \rangle| = 1$. De fato, basta considerarmos N definido por

$$\mathrm{d}M = \iota_N \mathrm{d}\bar{M},$$

onde os elementos de volume $\mathrm{d}M$ e $\mathrm{d}\bar{M}$ determinam as orientações em M e $\bar{M}$.

Um campo vetorial V ao longo de M pode ser decomposto em componentes normal e tangente a M. A componente normal é dada por

$$V^{\perp} = \varepsilon \langle V, N \rangle N, \tag{3.2}$$

onde $\varepsilon = \langle N, N \rangle$. Segue que a componente tangencial é a projeção sobre $T_{u(x)}u(M)$ do vetor $V(x)$:

$$V^{\top} = V - V^{\perp}.$$

A derivada covariante em M induzida pela imersão é dada por

$$u_* \nabla_V W = \left(\bar{\nabla}_{u_* V} \, u_* W \right)^{\top}$$

Em algumas circunstâncias, identificamos M e sua imagem pela imersão, uma *hipersuperfície* em $\bar{M}$. Deste modo, campos vetoriais tangentes a M são identificados a sua imagem pela aplicação u_*.

A projeção $\top$ corresponde a um operador linear Π com componentes h^i_j, levantamento efetuado com respeito a métrica ambiente g. De fato,

$$h_{ij} = \langle \Pi \partial_i, \Pi \partial_j \rangle = \langle \Pi \partial_i, \partial_j \rangle = \Pi^k_i g_{kj}. \tag{3.3}$$

Adaptamos coordenadas $x^0, x^1, \ldots, x^n$ à hipersuperfície M de modo que, localmente, esta corresponda ao lugar geométrico $x^0 = 0$.

Por exemplo, podemos considerar *coordenadas gaussianas normais* (um caso particular de coordenadas de Fermi): cada ponto q em uma vizinhança tubular de M em $\bar{M}$ pode ser ligado a M por uma única geodésica extremizante partindo de $x \in M$ com velocidade unitária (necessariamente) igual a $N(x)$. Assim, se $x \in M$ é determinado por coordenadas $x^1, \ldots, x^n$ arbitrárias em M, o ponto q corresponde às coordenadas $x^0, x^1, \ldots, x^n$, onde

$$q = \exp_x x^0 N(x). \tag{3.4}$$

Neste caso, dizemos que as geodésicas normais são observadores sincronizados. As linhas de mundo destes observadores atravessam perpendicularmente as hipersuperfícies de nível $x^0 = cte$, as quais correspondem a coleções de eventos simultâneos em $\bar{M}$.

Voltando a situação geral, consideramos então um sistema de coordenadas locais $x^0, x^1, \ldots, x^n$ em $\bar{M}$ de modo que M é dada por $x^0 = 0$. O campo coordenado ∂_0 não é necessariamente ortogonal as folhas $x^0 = cte$.

A falha de sincronização e o difeomorfismo local gerado pela projeção tangente do campo ∂_0 sobre as folhas são mensurados pelo *lapso* ϕ e *desvio* β, definidos pela expressão

$$\partial_0 = \varepsilon \langle \partial_0, N \rangle N + \partial_0^{\top} =: \phi N + \beta. \tag{3.5}$$

Portanto, a métrica em $\bar{M}$ em uma vizinhança de M pode ser expressa na forma

$$\mathrm{d}\bar{s}^2 = (\varepsilon\phi^2 + \langle \beta, \beta \rangle)(\mathrm{d}x^0)^2 + 2\, g_{i0}\, \mathrm{d}x^0 \mathrm{d}x^i + g_{ij}\, \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j, \tag{3.6}$$

onde $g_{i0} = \langle \beta, \partial_i \rangle$, com a condição de que

$$g_{ij}|_{x^0=0} = h_{ij}. \tag{3.7}$$

No intuito de simplificar os cálculos a seguir, supomos $\beta = 0$. Observamos oportunamente (seção 3.2) que tal suposição não altera significativamente os resultados obtidos. Ressaltamos que não estamos considerando coordenadas gaussianas, visto que não necessariamente impomos $\phi = 1$.

No que segue, exploramos a relação entre as curvaturas de M e $\bar{M}$. Iniciamos definindo a curvatura extrínseca de M. A *aplicação de Weingarten* é definida por

$$K(V) = -\bar{\nabla}_V N, \tag{3.8}$$

onde V é um campo tangente a M e N é o campo normal satisfazendo $\langle N, N \rangle = \varepsilon$ fixado acima. A *equação de Weingarten* (3.10) relaciona as derivadas covariantes em $\bar{M}$ e M:

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_V W &= \left(\bar{\nabla}_V W\right)^T + \varepsilon \langle \bar{\nabla}_V W, N \rangle N \\
&= \nabla_V W - \varepsilon \langle \bar{\nabla}_V N, W \rangle N \\
&= \nabla_V W + \varepsilon \langle K(V), W \rangle N.
\end{aligned}$$

Definindo por

$$K(V, W) = \langle K(V), W \rangle, \tag{3.9}$$

a (segunda) forma quadrática associada ao operador K pela métrica, temos

$$\bar{\nabla}_V W = \nabla_V W + \varepsilon\, K(V, W)\, N. \tag{3.10}$$

Utilizando a equação (3.10), escrevemos

$$
\begin{aligned}
&\bar{R}(V,W)Z = \bar{\nabla}_W\bar{\nabla}_V Z - \bar{\nabla}_V\bar{\nabla}_W Z + \bar{\nabla}_{[V,W]}Z \\
&= \bar{\nabla}_W\big(\nabla_V Z + \varepsilon\langle K(V), Z\rangle\, N\big) - \bar{\nabla}_V\big(\nabla_W Z + \varepsilon\langle K(W), Z\rangle\, N\big) \\
&+\nabla_{[V,W]}Z + \varepsilon\langle K([V,W]), Z\rangle\, N \\
&= \nabla_W\nabla_V Z - \nabla_V\nabla_W Z + \nabla_{[V,W]}Z \\
&+\varepsilon\langle K(W), \nabla_V Z\rangle\, N - \varepsilon\langle K(V), \nabla_W Z\rangle\, N + \varepsilon\langle K([V,W]), Z\rangle\, N \\
&+\bar{\nabla}_W\big(\varepsilon\langle K(V), Z\rangle\, N\big) - \bar{\nabla}_V\big(\varepsilon\langle K(W), Z\rangle\, N\big) \\
&= R(V,W)Z + \varepsilon\langle K(W), \nabla_V Z\rangle\, N - \varepsilon\langle K(V), \nabla_W Z\rangle\, N + \varepsilon\langle K([V,W]), Z\rangle\, N \\
&+\varepsilon\langle(\nabla_W K)V + K(\nabla_W V), Z\rangle\, N + \varepsilon\langle K(V), \nabla_W Z\rangle\, N - \varepsilon\langle K(V), Z\rangle\, K(W) \\
&-\varepsilon\langle(\nabla_V K)W + K(\nabla_V W), Z\rangle\, N - \varepsilon\langle K(W), \nabla_V Z\rangle\, N + \varepsilon\langle K(W), Z\rangle\, K(V) \\
&= R(V,W)Z - \varepsilon\langle K(V), Z\rangle\, K(W) + \varepsilon\langle K(W), Z\rangle\, K(V) \\
&-\varepsilon\langle(\nabla_V K)W - (\nabla_W K)V, Z\rangle\, N.
\end{aligned}
$$

A componente tangente desta expressão corresponde a *equação de Gauss*

$$
R(V,W)Z = \big(\bar{R}(V,W)Z\big)^{\top} + \varepsilon\langle K(V), Z\rangle\, K(W) - \varepsilon\langle K(W), Z\rangle\, K(V). \quad (3.11)
$$

A componente normal é dada por

$$
-\langle(\nabla_V K)W - (\nabla_W K)V, Z\rangle = \langle\bar{R}(V,W)Z, N\rangle = -\langle\bar{R}(V,W)N, Z\rangle.
$$

Pela arbitrariedade de Z e visto que $\bar{R}(V,W)N$ é tangente a M, obtemos a *equação de Codazzi*

$$
(\nabla_V K)W - (\nabla_W K)V = \bar{R}(V,W)N. \quad (3.12)
$$

Quanto a derivada covariante, observamos que

$$
\begin{aligned}
&\nabla_V K(W,Z) = V\big(K(W,Z)\big) - K(\nabla_V W, Z) - K(W, \nabla_V Z) \\
&= V\langle K(W), Z\rangle - \langle K(\nabla_V W), Z\rangle - \langle K(W), \nabla_V Z\rangle \\
&= \langle(\nabla_V K)W + K(\nabla_V W), Z\rangle + \langle K(W), \nabla_V Z\rangle - \langle K(\nabla_V W), Z\rangle \\
&-\langle K(W), \nabla_V Z\rangle \\
&= \langle(\nabla_V K)W, Z\rangle.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\nabla_V K(W,Z) - \nabla_W K(V,Z) = \langle(\nabla_V K)W - (\nabla_W K)V, Z\rangle.
$$

Logo, a equação de Codazzi pode ser escrita na forma

$$\nabla_V K(W,Z) - \nabla_W K(V,Z) = \langle \bar{R}(V,W)N, Z\rangle. \tag{3.13}$$

Em coordenadas, escrevemos $K\partial_i = K_i^j\,\partial_j$ e $K(\partial_i,\partial_j) = K_{ij}$. As equações de Gauss e Codazzi têm, portanto, as seguintes expressões locais

$$R^l_{ijk} = \bar{R}^l_{ijk} + \varepsilon\left(K_{ik}K^l_j - K^l_i K_{jk}\right) \tag{3.14}$$

e

$$\nabla_i K^k_j - \nabla_j K^k_i = \frac{1}{\phi}\,\bar{R}^k_{ij0}, \tag{3.15}$$

onde usamos o fato de que $N = \frac{1}{\phi}\,\partial_0$.

Uma expressão útil para a segunda forma quadrática é obtida da seguinte maneira

$$\begin{aligned} K_{ij} &= -\langle \bar{\nabla}_i N, \partial_j\rangle = -\langle \bar{\nabla}_i \frac{1}{\phi}\,\partial_0, \partial_j\rangle = -\frac{1}{\phi}\langle \bar{\nabla}_i\partial_0, \partial_j\rangle \\ &= -\frac{1}{\phi}\big(\partial_0\langle\partial_i,\partial_j\rangle - \langle\partial_i, \bar{\nabla}_j\partial_0\rangle\big) = -\frac{1}{\phi}\big(\partial_0\, g_{ij} - \phi\langle\partial_i, \bar{\nabla}_j N\rangle\big) \\ &= -\frac{1}{\phi}\partial_0\, g_{ij} - K_{ij}. \end{aligned}$$

Além disso, verifica-se facilmente que

$$\pounds_{\partial_0} g_{ij} = \partial_0\, g_{ij}.$$

Portanto

$$K_{ij} = -\frac{1}{2\phi}\partial_0 g_{ij} = -\frac{1}{2\phi}\,\pounds_{\partial_0}\, g_{ij}. \tag{3.16}$$

Determinaremos a seguir as componentes do tensor de Ricci de $\bar{M}$ nas coordenadas definidas acima. Neste sentido, realizamos contrações em (3.14) e (3.15) que resultam em

$$\begin{aligned} R_{ik} &= R^j_{ijk} = \bar{R}^j_{ijk} + \varepsilon\left(K_{ik}K^j_j - K^j_i K_{jk}\right) \\ &= \bar{R}_{ik} - \bar{R}^0_{i0k} + \varepsilon\left(K_{ik}K - K^j_i K_{jk}\right) \end{aligned} \tag{3.17}$$

e

$$\nabla_i K - \nabla_j K^j_i = \frac{1}{\phi}\bar{R}^j_{ij0} + \frac{1}{\phi}R^0_{i00} = \frac{1}{\phi}\bar{R}_{i0}, \tag{3.18}$$

onde $K = K_i^i$ é o traço do operador de Weingarten, ou seja, a curvatura média da imersão. Note que utilizamos acima o fato de que

$$\bar{R}_{i0} = \bar{R}^j_{ij0} + \bar{R}^0_{i00} = \bar{R}^j_{ij0},$$

expressão, por sua vez, derivada de

$$0 = \langle \bar{R}(\partial_i, \partial_0)\partial_0, \partial_0\rangle = \bar{R}^0_{i00}\langle \partial_0, \partial_0\rangle + \bar{R}^k_{i00}\langle \partial_k, \partial_0\rangle = \varepsilon\phi^2\,\bar{R}^0_{i00}.$$

Devemos então calcular $\bar{R}^0_{i0k}$ presente na fórmula (3.17). Antes de passarmos ao cálculo efetivo de $\bar{R}^0_{i0k}$, calculemos separadamente $\bar{\nabla}_i\partial_0$ e $\bar{\nabla}_0\partial_0$. Temos,

$$\bar{\nabla}_i\partial_0 = \bar{\nabla}_i\phi N = \phi_i\, N - \phi K_i^j\partial_j = \frac{\phi_i}{\phi}\,\partial_0 - \phi K_i^j\partial_j \tag{3.19}$$

e, ainda,

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}^i_{00} &= g^{ij}\langle \bar{\nabla}_0\partial_0, \partial_j\rangle = -g^{ij}\langle \partial_0, \bar{\nabla}_j\partial_0\rangle = -\varepsilon\phi\phi_j g^{ij} = -\varepsilon\phi\phi^i, &(3.20)\\
\bar{\Gamma}^0_{00} &= g^{00}\langle \bar{\nabla}_0\partial_0, \partial_0\rangle = g^{00}\frac{1}{2}\partial_0\langle \partial_0, \partial_0\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon\frac{1}{\phi^2}\partial_0(\varepsilon\phi^2) = \frac{\phi_0}{\phi}, &(3.21)
\end{aligned}$$

donde obtemos

$$\bar{\Gamma}^i_{00} = -\varepsilon\phi\phi^i \;\;,\;\; \bar{\Gamma}^0_{00} = \frac{\phi_0}{\phi}. \tag{3.22}$$

Deste modo, determina-se

$$\bar{\nabla}_0\partial_0 = \varepsilon\phi\phi^0\partial_0 - \varepsilon\phi\phi^i\,\partial_i. \tag{3.23}$$

Por fim, calculamos a componente $\bar{R}^0_{i0k}$ do tensor de curvatura. Temos,

$$\begin{aligned}
&\bar{R}(\partial_i, \partial_0)\partial_k = \bar{\nabla}_0\bar{\nabla}_i\partial_k - \bar{\nabla}_i\bar{\nabla}_0\partial_k = \bar{\nabla}_0\big(\nabla_i\partial_k + \frac{\varepsilon}{\phi}K_{ik}\,\partial_0\big) - \bar{\nabla}_i\big(\phi_k N - \phi K_k^j\partial_j\big)\\
&= \partial_0(\Gamma^j_{ik})\partial_j + \Gamma^j_{ik}\bar{\nabla}_0\partial_j + \big(-\frac{\varepsilon}{\phi^2}\phi_0 K_{ik} + \frac{\varepsilon}{\phi}\partial_0 K_{ik}\big)\,\partial_0 + \frac{\varepsilon}{\phi}K_{ik}\bar{\nabla}_0\partial_0\\
&-\phi_{i,k}N + \phi_k K_i^j\partial_j + \phi_i K_k^j\partial_j + \phi\bar{\nabla}_i(K_k^j\partial_j)\\
&= \partial_0(\Gamma^j_{ik})\partial_j - \phi\bar{\Gamma}^j_{ik}K_j^l\partial_l + \frac{\phi_j}{\phi}\Gamma^j_{ik}\partial_0 + \big(-\frac{\varepsilon}{\phi^2}\phi_0 K_{ik} + \frac{\varepsilon}{\phi}\partial_0 K_{ik}\big)\,\partial_0 + \frac{\varepsilon\phi_0}{\phi^2}K_{ik}\partial_0\\
&-\phi^j K_{ik}\partial_j - \phi_{i,k}N + \phi_k K_i^j\partial_j + \phi_i K_k^j\partial_j + \phi\partial_i(K_k^j)\partial_j + \phi K_k^j\Gamma^l_{ij}\partial_l + \phi K_k^j\bar{\Gamma}^0_{ij}\partial_0,
\end{aligned}$$

onde $\phi_{i,k} = \partial_i \partial_k \phi$. Todavia, temos

$$K_{ij} = \langle \bar{\nabla}_{\partial_i} \partial_j, N \rangle = \bar{\Gamma}^0_{ij} \varepsilon \phi \tag{3.24}$$

e, portanto, $\bar{\Gamma}^0_{ij} = \frac{\varepsilon}{\phi} K_{ij}$. Deste modo, deduzimos que

$$\begin{aligned} \bar{R}^0_{i0k} &= -\frac{\varepsilon}{\phi^2} \phi_0 K_{ik} + \frac{\varepsilon}{\phi} \partial_0 (K_{ik}) + \phi^0 K_{ik} - \frac{\phi_{ik}}{\phi} + \phi K^j_k \bar{\Gamma}^0_{ij} + \frac{\phi_j}{\phi} \Gamma^j_{ik} \\ &= \frac{\varepsilon}{\phi} \partial_0 K_{ik} - \frac{1}{\phi} \phi_{i;k} + \varepsilon K_{ij} K^j_k, \end{aligned} \tag{3.25}$$

onde $\phi_{i;k} = \phi_{i,k} - \phi_j \phi \Gamma^j_{ik}$.

Utilizando agora a expressão (3.25) em (3.17), obtemos

$$R_{ik} = \bar{R}_{ik} + \varepsilon \left(K_{ik} K - 2 K_{ij} K^j_k \right) - \frac{\varepsilon}{\phi} \partial_0 K_{ik} + \frac{1}{\phi} \phi_{i;k}. \tag{3.26}$$

A componente $\bar{R}_{00}$ do tensor de Ricci é dada por

$$\bar{R}_{00} = \bar{R}^0_{000} + \bar{R}^j_{0j0} = \bar{R}^j_{0j0},$$

uma vez que $\bar{R}^0_{000} = 0$ (pelas anti-simetrias do tensor de Riemann, por exemplo). Calculamos

$$\bar{\nabla}_j \bar{\nabla}_0 \partial_0 = \varepsilon \bar{\nabla}_j \big(\phi \phi^0 \partial_0 - \phi \phi^k \partial_k \big) = \varepsilon \partial_j (\phi \phi^0) \partial_0 + \varepsilon \phi \phi^0 \big(\frac{\phi_j}{\phi} \partial_0 - \phi K^k_j \partial_k \big)$$
$$- \varepsilon \phi_j \phi^k \partial_k - \varepsilon \phi \bar{\nabla}_j \phi^k \partial_k$$

e

$$\bar{\nabla}_0 \bar{\nabla}_j \partial_0 = \bar{\nabla}_0 \big(\frac{\phi_j}{\phi} \partial_0 - \phi K^k_j \partial_k \big) = \partial_0 \big(\frac{\phi_j}{\phi} \big) \partial_0 + \frac{\phi_j}{\phi} \big(\varepsilon \phi \phi^0 \partial_0 - \varepsilon \phi \phi^k \, \partial_k \big)$$
$$- \phi_0 K^k_j \partial_k - \phi \partial_0 K^k_j \partial_k - \phi K^k_j \big(\frac{\phi_k}{\phi} \, \partial_0 - \phi K^l_k \, \partial_l \big).$$

Assim, tomando componentes

$$\begin{aligned} \bar{R}^j_{0j0} &= \big(\bar{R}(\partial_0, \partial_j) \partial_0 \big)^j = -\varepsilon \phi^2 \phi^0 K^j_j - \varepsilon \phi_j \phi^j - \varepsilon \phi \bar{\nabla}_j \phi^j + \varepsilon \phi^j \phi_j + \phi_0 K^j_j \\ &\quad + \phi \partial_0 K^j_j - \phi^2 K^k_j K^j_k \\ &= -\varepsilon \phi \, \phi^j_{;j} + \phi \, \partial_0 K - \phi^2 |K|^2, \end{aligned} \tag{3.27}$$

onde $\phi^i{}_{;i}$ denotam as componentes do hessiano de ϕ e $|K|^2 = K_j^k K_k^j$ é a norma ao quadrado da segunda forma fundamental.

Deste modo, obtemos das equações (3.18), (3.26) e (3.27), via simples substituições, as equações

$$\bar{R}_{ik} = R_{ik} - \varepsilon\left(K_{ik}K - 2K_{ij}K_k^j\right) + \frac{\varepsilon}{\phi}\,\partial_0 K_{ik} - \frac{1}{\phi}\phi_{i;k}, \tag{3.28}$$

$$\frac{1}{\phi}\,\bar{R}_{i0} = \nabla_i K - \nabla_j K_i^j, \tag{3.29}$$

$$\frac{1}{\phi^2}\,\bar{R}_{00} = \frac{1}{\phi}\,\partial_0 K - |K|^2 - \frac{\varepsilon}{\phi}\,\phi^j{}_{;j}. \tag{3.30}$$

Podemos ainda escrever (3.30) de outra forma, usando o tensor de Einstein. De fato, fazendo uso da expressão dada em (3.16) e contraindo a equação (3.28) com relação a métrica em M obtemos

$$\begin{aligned} g^{ik}\bar{R}_{ik} &= R - \varepsilon\big(K^2 - 2|K|^2\big) + \frac{\varepsilon}{\phi}\,g^{ik}\big(\partial_0 K_{ik}\big) - g^{ik}\frac{1}{\phi}\phi_{i;k} \\ &= R - \varepsilon\big(K^2 - 2|K|^2\big) + \frac{\varepsilon}{\phi}\,\partial_0 K - 2\varepsilon\,K^{ik}\,K_{ik} - \frac{1}{\phi}\phi^i{}_{;i} \\ &= R - \varepsilon\big(K^2 - 2|K|^2\big) + \frac{\varepsilon}{\phi}\,\partial_0 K - 2\varepsilon\,|K|^2 - \frac{1}{\phi}\phi^i{}_{;i} \\ &= R - \varepsilon K^2 + \frac{\varepsilon}{\phi}\,\partial_0 K - \frac{1}{\phi}\phi^i{}_{;i}, \end{aligned}$$

onde utilizamos a expressão

$$K^{ik} = \frac{1}{2\phi}\,\partial_0 g^{ik}.$$

Apartir de (3.30) deduz-se a expressão

$$\bar{R}_0^0 = g^{00}\bar{R}_{00} = \frac{\varepsilon}{\phi^2}\,\bar{R}_{00} = \frac{\varepsilon}{\phi}\,\partial_0 K - \varepsilon\,|K|^2 - \frac{1}{\phi}\,\phi^j{}_{;j}.$$

Assim, usando os resultados acima, obtemos

$$\begin{aligned} \bar{R} &= g^{00}\bar{R}_{00} + g^{ik}\bar{R}_{ik} \\ &= R - \varepsilon\big(K^2 + |K|^2\big) + \frac{2\varepsilon}{\phi}\,\partial_0 K - \frac{2}{\phi}\,\phi^i{}_{;i}. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Segue, então, da definição do tensor de Einstein e das expressões acima que

$$\bar{G}_0^0 = \bar{R}_0^0 - \frac{1}{2}\bar{R} = -\frac{1}{2}R + \frac{\varepsilon}{2}\big(K^2 - |K|^2\big). \tag{3.32}$$

Além disso, obtém-se facilmente

$$\bar{G}_i^0 = g^{00}\bar{R}_{i0} = \frac{\varepsilon}{\phi}\big(\nabla_i K - \nabla_j K_i^j\big). \tag{3.33}$$

Observamos que estas expressões são igualmente válidas em qualquer das hipersuperfícies M_t definidas por $x^0 = t$ na folheação local de $\bar{M}$ determinada pelo sistema de coordenadas $x^0, x^1, \ldots, x^n$.

3.2 Formulação Hamiltoniana

Consideramos, novamente, a imersão de M em $\bar{M}$ e o sistema de coordenadas adaptado $x^0, x^1, \ldots, x^n$. A adoção destas coordenadas corresponde a existência de um difeomorfismo local entre $\bar{M}$ e $\mathbb{R} \times M$. Por vezes, denotaremos $x^0 = t$. Com isto, representamos por M_t a hipersuperfície de nível $x^0 = t$.

Dado um campo expresso localmente por $\psi : \bar{M} \to \mathbb{R}^N$, denotamos

$$\dot{\psi}^{(i)} = \psi^{(i)}_{,0}.$$

Agora, passamos à formulação hamiltoniana das equações de campo. Definimos as *densidades de momento* por

$$\pi_{(i)} =: \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^{(i)}}. \tag{3.34}$$

Supomos que possamos resolver as equações acima, escrevendo $\dot{\psi}^{(i)}$ em termos dos momentos $\pi^{(i)}$. A densidade hamiltoniana é, por analogia com o caso discreto,

$$\mathcal{H}(\psi, \pi) =: \pi_{(i)}\,\dot{\psi}^{(i)} - \mathcal{L},$$

onde $\dot{\psi}^{(i)}$ é dada implicitamente como função de ψ e π, por resolução de (3.34). A hamiltoniana é, por definição,

$$H = \int_{M_t} \mathcal{H} = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}\,\mathrm{d}q^1 \ldots \mathrm{d}q^n. \tag{3.35}$$

Definindo
$$I = \int_{\mathbb{R}} H \, \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t \int_{M_t} \mathcal{H}, \tag{3.36}$$
temos
$$I = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t \int_{M_t} \pi_{(i)} \, \dot{\psi}^{(i)} - \int_{\bar{M}} \mathcal{L} = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t \int_{M_t} \pi_{(i)} \, \dot{\psi}^{(i)} - S.$$
Portanto, dada uma variação $\delta\psi$ do campo, com suporte compacto em $\mathbb{R}$, obtemos
$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t \int_{M_t} \frac{\delta H}{\delta \psi} \, \delta\psi + \frac{\delta H}{\delta \pi} \, \delta\pi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t \int_{M_t} \left(\pi \, \delta\dot{\psi} + \delta\pi \, \dot{\psi} \right) - \delta S \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t \int_{M_t} -\dot{\pi} \, \delta\psi + \dot{\psi} \, \delta\pi - \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t \int_{M_t} \frac{\delta S}{\delta \psi} \, \delta\psi. \end{aligned}$$
Concluímos que as equações de campo $\frac{\delta S}{\delta \psi} = 0$ são equivalentes às equações canônicas
$$\dot{\pi}_{(i)} = -\frac{\delta H}{\delta \psi^{(i)}}, \quad \dot{\psi}^{(i)} = \frac{\delta H}{\delta \pi_{(i)}}. \tag{3.37}$$

3.2.1 Formalismo ADM.

Lidamos, nesta seção, com o exemplo específico
$$\mathcal{L} = \bar{R} \sqrt{|g|},$$
tratado na Seção 2.1. Utilizaremos o sistema de coordenadas definido na Seção 3.1 e a consequente decomposição $n + 1$. Em termos destas coordenadas, o elemento de volume do ambiente é dado por
$$\mathrm{d}\bar{M} = \phi \, \mathrm{d}M,$$
onde $\mathrm{d}M$ é o elemento de volume da hipersuperfície M, descrita por $x^0 = 0$. Supomos M uma variedade riemanniana. Assim, obtemos
$$\sqrt{|g|} = \phi \sqrt{h}$$

Além disso, vimos acima que

$$\bar{R} = R - \varepsilon\big(K^2 + |K|^2\big) + \frac{2\varepsilon}{\phi}\,\pounds_{\partial_0} K - \frac{1}{\phi}\,\phi^i{}_{;i}.$$

Deste modo, a ação de Einstein-Hilbert é expressa por

$$S_{eh} = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t \int_M \Big(\phi\big(R - \varepsilon K^2 + \varepsilon|K|^2\big) + 2\varepsilon\,\pounds_{\partial_0} K - \phi^i{}_{;i}\Big)\sqrt{h}\,\mathrm{d}x$$

Todavia, os dois últimos termos são divergentes. Por exemplo, calculamos

$$\begin{aligned} \operatorname{div} KN &= \varepsilon\,\langle\bar{\nabla}_N KN, N\rangle + h^{ij}\langle\bar{\nabla}_{\partial_i} KN, \partial_j\rangle = N(K) - h^{ij} K\, K_i^l h_{lj} \\ &= \frac{1}{\phi}\pounds_{\partial_0} K - K^2. \end{aligned}$$

Portanto

$$2\varepsilon\,\pounds_{\partial_0} K = 2\varepsilon\phi\,\operatorname{div} KN + 2\varepsilon\phi\, K^2.$$

Assim, descartando os termos em forma divergente (os quais não afetam a análise variacional), obtemos

$$\hat{S}_{eh} = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}t \int_M \phi\big(R + \varepsilon K^2 - \varepsilon|K|^2\big)\sqrt{h}\,\mathrm{d}x$$

Podemos, de fato, considerar coordenadas adaptadas a M de modo que a métrica ambiente é expressa por (3.6). No caso geral em que $\beta \neq 0$. Denotamos, neste caso, $\beta_i = g_{0i}$. Salientamos que a expressão acima para a curvatura escalar permanece válida. Desta vez, entretanto, a segunda forma fundamental é dada por

$$K_{ij} = -\frac{1}{2\phi}\Big(\pounds_{\partial_0} h_{ij} - \beta_{i;j} - \beta_{j;i}\Big) \tag{3.38}$$

De fato, temos

$$\begin{aligned} \pounds_N g_{ij} &= N\langle\partial_i, \partial_j\rangle - \langle[N, \partial_i], \partial_j\rangle - \langle\partial_i, [N, \partial_j]\rangle \\ &= \langle\bar{\nabla}_N \partial_i - [N, \partial_i], \partial_j\rangle + \langle\bar{\nabla}_N \partial_j - [N, \partial_j], \partial_i\rangle \\ &= \langle\bar{\nabla}_i N, \partial_j\rangle + \langle\bar{\nabla}_j N, \partial_i\rangle = -2\,K_{ij}. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$N = \frac{1}{\phi}\,\partial_0 - \frac{1}{\phi}\,\beta.$$

Calculamos, a exemplo do que fizemos acima,

$$\pounds_\beta g_{ij} = \langle \bar{\nabla}_i \beta, \partial_j \rangle + \langle \bar{\nabla}_j \beta, \partial_i \rangle = \beta_{j;i} + \beta_{i;j}$$

e, dado que

$$[\frac{1}{\phi}\beta, \partial_i] = \frac{1}{\phi}[\beta, \partial_i] - \partial_i\big(\frac{1}{\phi}\big)\,\beta,$$

temos

$$\begin{aligned}
\pounds_{\frac{1}{\phi}\beta} g_{ij} &= \frac{1}{\phi}\pounds_\beta g_{ij} + \partial_i\big(\frac{1}{\phi}\big)\,\langle \beta, \partial_j\rangle + \partial_j\big(\frac{1}{\phi}\big)\,\langle \beta, \partial_i\rangle \\
&= \frac{1}{\phi}\pounds_\beta g_{ij} + \partial_i\big(\frac{1}{\phi}\big)\,\langle \partial_0, \partial_j\rangle + \partial_j\big(\frac{1}{\phi}\big)\,\langle \partial_0, \partial_i\rangle.
\end{aligned}$$

Concluímos que

$$\pounds_N g_{ij} \;=\; \pounds_{\frac{1}{\phi}\partial_0} g_{ij} - \pounds_{\frac{1}{\phi}\beta} g_{ij} = \frac{1}{\phi}\pounds_{\partial_0} g_{ij} - \frac{1}{\phi}\big(\beta_{j;i} + \beta_{i;j}\big)$$

e, portanto,

$$K_{ij} = -\frac{1}{2\phi}\Big(\pounds_0 g_{ij} - \beta_{i;j} - \beta_{j;i}\Big). \tag{3.39}$$

Logo, tomando as componentes da métrica

$$(h_{ij}, \phi, \beta_i) \tag{3.40}$$

como variáveis do campo ψ (note que, por hipótese, temos $\beta_i = 0$), temos a derivada temporal $\dot{\psi}$

$$(\dot{h}_{ij}, \dot{\phi}, \dot{\beta}_i), \tag{3.41}$$

com

$$\dot{h}_{ij} = -2\phi\, K_{ij} + \beta_{i;j} + \beta_{j;i}.$$

Deste modo, podemos escrever

$$\begin{aligned}
L(\psi, \dot{\psi}) &= R + \varepsilon K^2 - \varepsilon |K|^2 \\
&= R + \varepsilon\big(h^{ij}h^{kl} - h^{il}h^{jk}\big)\,K_{ij}K_{kl},
\end{aligned}$$

com densidade lagrangiana $\mathcal{L} = L\,\phi\sqrt{h}$. Sendo assim, calcula-se facilmente

$$\pi_{(rs)} = -\frac{1}{2\phi}\,\frac{\partial L}{\partial K_{rs}}\,\phi\sqrt{h} = \varepsilon\left(K^{rs} - h^{rs}K\right)\sqrt{h}. \tag{3.42}$$

Ademais, uma vez que a lagrangiana não depende de $\dot{\phi}$ e $\dot{\beta}_i$, temos

$$\pi_{(0)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = 0, \quad \pi_{(i)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}_i} = 0. \tag{3.43}$$

A partir destas expressões, podemos obter

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \pi_{(rs)}\dot{h}_{rs} - \mathcal{L} = \varepsilon\big(K^{rs} - K\,h^{rs}\big)\big(-2\phi K_{rs} + \beta_{r;s} + \beta_{s;r}\big)\sqrt{h} - \mathcal{L} \\
&= \varepsilon\big(2\phi K^2 - 2K\,\beta^r_{\ ;r} - 2\phi|K|^2 + 2K^{rs}\beta_{r;s}\big)\sqrt{h} - \phi\big(R + \varepsilon K^2 - \varepsilon|K|^2\big)\sqrt{h} \\
&= -\big(R - \varepsilon K^2 + \varepsilon|K|^2\big)\phi\sqrt{h} + 2\varepsilon\big(K_s - K^r_{s;r}\big)\beta^s\sqrt{h} \\
&\quad -2\varepsilon\big(K\beta^s - K^s_r\beta^r\big)_{;s}\sqrt{h}.
\end{aligned}$$

Descartando o último termo, na forma divergente, obtemos a hamiltoniana

$$H = \int_{M_t} \mathcal{H} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\phi\nu_0 + 2\varepsilon\beta^i\nu_i\right)\sqrt{h}\,\mathrm{d}x^1\ldots\mathrm{d}x^n, \tag{3.44}$$

onde

$$\nu_0 = R - \varepsilon K^2 + \varepsilon|K|^2, \tag{3.45}$$

$$\nu_i = \nabla_i K - \nabla_j K^j_i. \tag{3.46}$$

Uma vez que, como vimos acima, $\pi_{(0)} = 0$ e $\pi_{(i)} = 0$, obtemos trivialmente duas das equações canônicas

$$\frac{\delta H}{\delta \phi} = -\dot{\pi}_{(0)} = 0, \quad \frac{\delta H}{\delta \beta_i} = -\dot{\pi}_{(i)} = 0. \tag{3.47}$$

Por outro lado, por inspeção da expressão acima para H, temos

$$R - \varepsilon K^2 + \varepsilon|K|^2 = 0, \tag{3.48}$$

$$\nabla_i K - \nabla_j K^j_i = 0. \tag{3.49}$$

Dado que as componentes ϕ e β_i não desempenham papel dinâmico, podemos tomar estas duas equações como equações de vínculo, advindas de multiplicadores de Lagrange adequados. Por um lado, isto é consequência da covariância das ações que definimos, visto que ϕ e β_i podem ser ajustados livremente por difeomorfismos do ambiente. Por outro lado, os termos divergentes desprezados nos cálculos acima, combinados aos multiplicadores de Lagrange a que nos referimos permitem, por análise de termos de fronteira (espacial), inferir noções e informações apropriadas sobre a energia total de sistemas gravitacionais. Este é um dos pontos altos do formalismo ADM (v. [16], Appendix E).

Finalmente, as duas equações canônicas restantes

$$\frac{\delta H}{\delta \pi^{(ij)}} = \dot{h}_{ij}, \quad \frac{\delta H}{\delta h_{ij}} = -\dot{\pi}^{(ij)} \tag{3.50}$$

são de fato, equivalentes, respectivamente, a

$$\partial_0 h_{ij} = -2\phi\, K_{ij} + \beta_{i;j} + \beta_{j;i} \tag{3.51}$$

$$\frac{\varepsilon}{\phi}\, \partial_0 K_{ij} = -R_{ik} + \varepsilon\left(K_{ik}K - 2K_{ij}K^j_k\right) + \frac{1}{\phi}\phi_{i;k}. \tag{3.52}$$

Concluimos que as equações de Einstein no vácuo

$$\frac{\delta S_{eh}}{\delta g^{ij}} = 0,$$

ou seja,

$$G_{ij} = 0$$

correspondem às equações de Hamilton (3.51) e (3.52), com equações de vínculo (3.48) e (3.49).

A formulação hamiltoniana esclarece, de certo modo, a natureza das equações fundamentais que obtivemos na seção anterior, combinando o tensor de Ricci e as equações de Gauss-Codazzi.

Capítulo 4

Imersões em Espaços de Einstein

Neste capítulo apresentaremos os principais teoremas deste trabalho. Em sua totalidade, são três teoremas sobre imersões locais que foram obtidos por C. Romero e colaboradores.

4.1 Espaços de Einstein

Voltamos a situação descrita na Seção 3.1. Novamente, consideramos um sistema de coordenadas locais $x^0, x^1, \ldots, x^n$ em $\bar{M}$, de modo que M é dada por $x^0 = 0$. Expressamos a métrica de $\bar{M}$ em pontos de M por

$$\mathrm{d}\bar{s}^2 = \varepsilon\phi^2(\mathrm{d}x^0)^2 + h_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j, \tag{4.1}$$

ou seja, novamente supomos que o *desvio* é nulo.

Como observamos acima, os cálculos e fórmulas resultantes são válidas para qualquer das folhas M_t definidas localmente por $x^0 = t$, de modo que é conveniente expressarmos a métrica ambiente em uma vizinhança de M por

$$\mathrm{d}\bar{s}^2 = \varepsilon\phi^2(\mathrm{d}x^0)^2 + g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j, \tag{4.2}$$

sendo que $g_{ij}|_{x^0=0} = h_{ij}$, a métrica induzida em M; e $g_{ij}|_{x^0=t}$ define a métrica induzida na folha M_t.

Vimos que são válidas as equações

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon}{\phi}\,\partial_0 K_{ik} &= \bar{R}_{ik} - R_{ik} + \varepsilon\left(K_{ik}K - 2K_{ij}K^j_k\right) + \frac{1}{\phi}\phi_{i;k}, &(4.3)\\
\varepsilon\phi\bar{G}^0_i &= \nabla_i K - \nabla_j K^j_i, &(4.4)\\
\bar{G}^0_0 &= -\frac{1}{2}R + \frac{\varepsilon}{2}(K^2 - |K|^2). &(4.5)
\end{aligned}$$

Supomos, neste capítulo, que $\bar{M}$ é um espaço de Einstein. Isto significa que a métrica em $\bar{M}$ satisfaz a equação tensorial

$$G_{\alpha\beta} = \Lambda g_{\alpha\beta}, \tag{4.6}$$

onde os índices gregos acima variam de 0 a n. Esta equação é equivalente a

$$\bar{R}_{\alpha\beta} = \left(\Lambda + \frac{1}{2}\bar{R}\right) g_{\alpha\beta}.$$

De fato, tomando traços acima, obtêm-se

$$\frac{1}{n+1}\bar{R} = \left(\Lambda + \frac{1}{2}\bar{R}\right),$$

o que nos permite escrever

$$\bar{R}_{\alpha\beta} = \frac{2\Lambda}{1-n}\, g_{\alpha\beta}. \tag{4.7}$$

Denotamos $\lambda = \frac{2\Lambda}{1-n}$. Concluímos que neste caso as equações (4.3) , (4.4) e (4.5) são equivalentes a

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon}{\phi}\,\partial_0 K_{ik} &= \lambda\, g_{ik} - R_{ik} + \varepsilon\left(K_{ik}K - 2K_{ij}K^j_k\right) + \frac{1}{\phi}\phi_{i;k} &(4.8)\\
\varepsilon\phi\bar{G}^0_i &= \nabla_i K - \nabla_j K^j_i = 0 &(4.9)\\
\bar{G}^0_0 &= -\frac{1}{2}R + \frac{\varepsilon}{2}(K^2 - |K|^2) = \Lambda. &(4.10)
\end{aligned}$$

4.2 Teoremas de Imersão

Nos enunciados a seguir, consideramos, via de regra, um sistema de coordenadas $x^1, \ldots, x^n$ em torno de um ponto $x \in M$, definido em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo a origem.

Um teorema devido a Magaard (v. [5], Teorema de Magaard) fornece condições necessárias e suficientes para a existência de imersões isométricas analíticas locais. Podemos interpretar seu enunciado como uma espécie de "forma local das imersões isométricas".

Teorema 1. *(Magaard) Seja M^n uma variedade semi-riemanniana, cuja métrica é expressa em coordenadas locais x^i, definidas em um aberto U do $\mathbb{R}^n$, pela matriz (h_{ij}). Uma condição necessária e suficiente para que M possa ser imersa local, isométrica e analiticamente em uma variedade $\bar{M}^{n+1}$ é a existência de uma matriz simétrica, não-singular*

$$g = \begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & \phi \end{pmatrix}$$

com componentes analíticas definidas em um aberto de $\mathbb{R} \times U$, satisfazendo

$$g_{ik}(0, x^1, ..., x^n) = h_{ik}(x^1, ..., x^n) \tag{4.11}$$

em pontos de U, de modo que a métrica de $\bar{M}$ em termos de coordenadas $x^0, x^1, \ldots, x^n$ em $\mathbb{R} \times U$ é dada por

$$\mathrm{d}s^2 = \varepsilon\phi^2(\mathrm{d}x^0)^2 + g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \tag{4.12}$$

Um outro resultado crucial na análise que empreendemos é o celebrado

Teorema 2. *(Cauchy-Kowaleswski) Considere o problema de Cauchy*

$$\begin{aligned} \partial_t^k u_A &= F_A(x, t, (\partial_x^\alpha \partial_t^j u_B)_{|\alpha|+j\leq k\,,\, j<k}) && (4.13) \\ \partial_t^j u_A(x, 0) &= \xi_j^A(x), \qquad (j < k) && (4.14) \end{aligned}$$

onde u é uma função desconhecida definida numa vizinhança da origem do $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ e $A, B = 1, \ldots, m$. Se as funções $\xi_0^A, \ldots, \xi_j^A$ forem analíticas na origem do $\mathbb{R}^n$ e F analítica em relação a cada um de seus argumentos calculados na origem então existe uma vizinhança da origem onde o problema de Cauchy acima possui uma única solução analítica.

Descrevemos brevemente nossa estratégia para garantir a existência da imersão num espaço de Einstein. As equações (4.8) , (4.9) e (4.10) formam um sistema de equações diferenciais parciais nas componentes g_{ik} e ϕ. Dada uma variedade semi-riemanniana (M, h) de dimensão n e, em particular, dadas as componentes h_{ik} da métrica num sistema de coordenadas x^i, provamos que existe um aberto do $\mathbb{R}^{n+1}$ onde, arbitrando-se a função ϕ, o referido sistema de E.D.P.s admite solução

$$g_{ik}(x^0, x^1, \ldots, x^n),$$

satisfazendo a condição inicial $g_{ik}(0, x^1, \ldots, x^n) = h_{ik}(x^1, \ldots, x^n)$. Provamos, ainda, que g_{ik} e ϕ satisfazem todas as condições de suficiência do Teorema de Magaard para assegurar a existência da imersão. Como g_{ik} e ϕ satisfazem (4.8) , (4.9) e (4.10), concluímos que a métrica determinada por estas funções representa a métrica de um espaço de Einstein.

Iniciamos a análise do sistema de equações, garantindo a existência de soluções locais para a equação tensorial (4.8). Enunciamos o resultado no lema abaixo.

Lema 1. *Sejam (h_{ik}) e (K_{ik}) matrizes analíticas e simétricas definidas em U. Seja, ainda, ϕ função analítica definida em um aberto de $\mathbb{R} \times U$. Supomos que a matriz*

$$\begin{pmatrix} h_{ij} & 0 \\ 0 & \phi \end{pmatrix}$$

é não-singular. Então existe uma matriz analítica, simétrica, não-singular (g_{ik}), definida em um aberto de $\mathbb{R} \times U$ satisfazendo a equação (4.8) e as condições iniciais

$$\begin{aligned} g_{ik}(0, x^1, \ldots, x^n) &= h_{ik}(x^1, \ldots, x^n) && (4.15) \\ \partial_0 g_{ik}(0, x^1, \ldots, x^n) &= -2\phi K_{ik}(x^1, \ldots, x^n). && (4.16) \end{aligned}$$

Prova. Iremos escrever a equação (4.8) em uma forma adequada à aplicação do Teorema de Cauchy-Kowaleswski, o que permite entendê-la como uma equação em (g_{ij}). Segue de um cálculo direto que (4.8) pode ser escrita como

$$\partial_0 K_{ik} = \lambda\varepsilon\phi g_{ik} + \phi(K_{ik}K - 2K_{ij}K_i^j) + \varepsilon\phi_{;i;k} - \varepsilon\phi R_{ik}. \tag{4.17}$$

Usando a expressão

$$K_{ik} = -\frac{1}{2\phi}\partial_0 g_{ik}, \tag{4.18}$$

reescrevemos a equação (4.17) acima como

$$\begin{aligned} \partial_0^2 g_{ik} = {} & -2\phi_0 K_{ik} - 2\lambda\varepsilon\phi^2 g_{ik} - 2\phi^2\big(K_{ik}K - 2K_{ij}K_k^j\big) \\ & -2\varepsilon\phi\phi_{;i;k} + 2\varepsilon\phi^2 R_{ik}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Sabemos que R_{ik} envolve apenas derivadas de primeira e segunda ordens de g_{ik} com respeito às variáveis $x^1, \ldots, x^n$, uma vez que

$$R_{ik} = \partial_j \Gamma^j_{ik} - \partial_i \Gamma^j_{jk} + \Gamma^m_{ik}\Gamma^j_{jm} - \Gamma^m_{jk}\Gamma^j_{im}.$$

Portanto (4.19) pode ser escrita na forma normal

$$\partial_0^2 g_{ik} = A_{ik}(x^0, x^1, \ldots, x^n, g_{jl}, \partial_j g_{lm}, \partial_j \partial_l g_{mn}, \partial_0 g_{jl}, \partial_j \phi, \partial_j \partial_l \phi, \partial_0 \phi). \quad (4.20)$$

Devido a condição de simetria $g_{ik} = g_{ki}$, podemos expressar (4.20) em termo das funções g_{ik} com $i \leq k$. Por hipótese, a função ϕ é dada e, portanto, (4.20) passa a constituir um sistema de E.D.P.s para as $\frac{n(n+1)}{2}$ funções $g_{ik},\ i \leq k$, a serem determinadas. Assim, uma vez que A_{ik} é analítica com relação a cada um de seus argumentos (por mera inspeção de (4.19)), podemos aplicar o Teorema de Cauchy-Kowalewski para obtermos solução deste sistema com os valores iniciais

$$\begin{aligned} g_{ik}(0, x^1, \ldots, x^n) &= h_{ik}(x^1, \ldots, x^n) && (4.21)\\ \partial_0 g_{ik}(0, x^1, \ldots, x^n) &= -2\phi K_{ik}(x^1, \ldots, x^n). && (4.22) \end{aligned}$$

Observamos, por fim, que o determinante da matriz (g_{ik}) permanece não-nulo em uma vizinhança de U em $\mathbb{R} \times U$, devido as condições iniciais e a continuidade da solução. Isto encerra a demonstração do lema.

O lema seguinte mostra que podemos reduzir o estudo do sistema formado pelas equações (4.8) , (4.9) e (4.10), a busca de soluções da equação *dinâmica* (4.8) em um aberto do $\mathbb{R} \times U$ e soluções do sistema de *equações de vínculo* (4.9) e (4.10) em um aberto de U.

Lema 2. *Seja uma matriz simétrica, analítica, não-singular*

$$g = \begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & \phi \end{pmatrix},$$

definida em um aberto do $\mathbb{R} \times U$, satisfazendo a equação (4.8). Se, além disso, as componentes g_{ij} e ϕ satisfazem as equações (4.8) , (4.9) e (4.10) em U, então também satisfazem as equações (4.9) e (4.10) em um aberto de $\mathbb{R} \times U$.

Prova. Nesta demonstração, índices gregos variam de 0 à n. Segue das hipóteses que a matriz g pode ser considerada como a expressão local de uma métrica em uma variedade de dimensão $n+1$. Definimos o tensor $F_{\alpha\beta} = \bar{G}_{\alpha\beta} - \Lambda\, g_{\alpha\beta}$, onde $\bar{G}_{\alpha\beta}$ é o tensor de Einstein associado a g e Λ é a constante cosmológica associada a hipersuperfície definida por $x^0 = 0$, uma vez que g_{ik} e ϕ satisfazem (4.8) , (4.9) e (4.10) em $x^0 = 0$, por hipótese. Vimos na Seção 2.4 que o tensor de Einstein é livre de divergência. Logo, o tensor $F_{\alpha\beta}$ possui divergência nula uma vez que a divergência da métrica é nula. Então temos

$$\mathrm{div} F = \bar{\nabla}_\alpha F^\alpha_\beta \, \mathrm{d}x^\beta = 0. \tag{4.23}$$

Entretanto,

$$\bar{\nabla}_\alpha F^\alpha_\beta = \partial_\alpha (F^\alpha_\beta) + \bar{\Gamma}^\alpha_{\alpha\lambda} F^\lambda_\beta - \bar{\Gamma}^\lambda_{\alpha\beta} F^\alpha_\lambda$$

e, portanto, podemos reescrever (4.23) como

$$\partial_0 F^0_\beta = -\partial_i F^i_\beta - \bar{\Gamma}^\alpha_{\alpha\lambda} F^\lambda_\beta + \bar{\Gamma}^\alpha_{\lambda\beta} F^\lambda_\alpha. \tag{4.24}$$

Como foi observado anteriormente, supomos que g satisfaz as equações (4.8) , (4.9) e (4.10) nos pontos da hipersuperfície definida por $x^0 = 0$. Logo, a métrica g sobre tal hipersuperfície representa a métrica de um espaço de Einstein e segue então que, restringindo-nos a $x^0 = 0$, temos $\bar{G}_{\alpha\beta} = \Lambda\, g_{\alpha\beta}$ e, assim, vale

$$F^\alpha_\beta\big|_{x^0=0} = 0. \tag{4.25}$$

Além disso, temos

$$\partial_i F^i_\beta\big|_{x^0=0} = \partial_i \left(F^i_\beta\big|_{x^0=0} \right) = 0. \tag{4.26}$$

Segue, então, de (4.24) que

$$\partial_0 F^0_\beta\Big|_{x^0=0} = 0. \tag{4.27}$$

Agora, analisamos (4.24) separadamente para $\beta = 0$ e $\beta = i$. Tendo em conta a variação dos índices α e λ no último termo de (4.24), obtém-se para $\beta = 0$ a expressão

$$\partial_0 F^0_0 = -\partial_i F^i_0 - \bar{\Gamma}^\alpha_{\alpha\lambda} F^\lambda_0 + \bar{\Gamma}^0_{\lambda 0} F^\lambda_0 + \bar{\Gamma}^j_{00} F^0_j + \bar{\Gamma}^j_{k0} F^k_j. \tag{4.28}$$

Por definição da curvatura escalar, temos

$$\bar{R} = g^{\alpha\beta} \bar{R}_{\alpha\beta} = \bar{R}^\alpha_\alpha = \bar{R}^0_0 + \bar{R}^k_k.$$

Segue, deste modo, da definição de tensor de Einstein que

$$\bar{R}_k^k + \bar{G}_0^0 = \bar{R}_k^k + \bar{R}_0^0 - \frac{1}{2}\bar{R} = \frac{1}{2}\bar{R}$$

donde obtemos a expressão

$$\bar{G}_j^k = \bar{R}_j^k - \delta_j^k(\bar{R}_k^k + \bar{G}_0^0). \tag{4.29}$$

Agora, uma vez que g satisfaz (4.8) em um aberto, digamos $V \subset \mathbb{R} \times U$, temos

$$\bar{R}_{jk} = \frac{2\Lambda}{1-n} g_{jk} = \lambda g_{jk}$$

nos pontos de V . Da definição de F, deduzimos que

$$\begin{aligned} F_j^k &= \bar{G}_j^k - \delta_j^k \Lambda = \bar{R}_j^k - \delta_j^k(\bar{R}_j^j + \bar{G}_0^0) - \Lambda \delta_j^k \\ &= \delta_j^k \left(\lambda - \lambda \delta_j^j - \bar{G}_0^0 - \Lambda\right) \\ &= -\delta_j^k(\bar{G}_0^0 - \Lambda) = -\delta_j^k F_0^0. \end{aligned}$$

Logo, no aberto V, é válida a igualdade $F_j^k = -\delta_j^k F_0^0$. Usando essa expressão, podemos reescrever (4.28) da seguinte forma

$$\partial_0 F_0^0 = -\partial_i F_0^i - \bar{\Gamma}_{\alpha\lambda}^{\alpha} F_0^{\lambda} + \bar{\Gamma}_{\lambda 0}^{0} F_0^{\lambda} + \bar{\Gamma}_{00}^{j} F_j^0 - \bar{\Gamma}_{j0}^{j} F_0^0. \tag{4.30}$$

Temos,

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\alpha\lambda}^{\alpha} F_0^{\lambda} &= \bar{\Gamma}_{kj}^{k} F_0^j + \bar{\Gamma}_{0j}^{0} F_0^j + \bar{\Gamma}_{k0}^{k} F_0^0 + \bar{\Gamma}_{00}^{0} F_0^0 \\ \bar{\Gamma}_{\lambda 0}^{0} F_0^{\lambda} &= \bar{\Gamma}_{j0}^{0} F_0^j + \bar{\Gamma}_{00}^{0} F_0^0. \end{aligned}$$

Substituindo essas expressões em (4.30), obtemos

$$\partial_0 F_0^0 = -\partial_i F_0^i - 2\bar{\Gamma}_{k0}^{k} F_0^0 - \bar{\Gamma}_{kj}^{k} F_0^j + \bar{\Gamma}_{00}^{j} F_j^0 \tag{4.31}$$

Para $\beta = i$, segue de (4.24) a expressão

$$\partial_0 F_i^0 = -\partial_k F_i^k - \bar{\Gamma}_{\alpha\lambda}^{\alpha} F_i^{\lambda} + \bar{\Gamma}_{\lambda i}^{0} F_0^{\lambda} + \bar{\Gamma}_{0i}^{l} F_l^0 + \bar{\Gamma}_{ji}^{l} F_l^j \tag{4.32}$$

e, dado que vale a igualdade $F_l^j = -\delta_l^j F_0^0$ em V, escrevemos (4.32) da seguinte forma

$$\partial_0 F_i^0 = \partial_i F_0^0 - \bar{\Gamma}_{\alpha\lambda}^{\alpha} F_i^{\lambda} + \bar{\Gamma}_{\lambda i}^{0} F_0^{\lambda} + \bar{\Gamma}_{0i}^{j} F_j^0 - \bar{\Gamma}_{ji}^{j} F_0^0. \tag{4.33}$$

Considerando que

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}^{\alpha}_{\alpha\lambda}F^{\lambda}_{i} &= \bar{\Gamma}^{0}_{00}F^{0}_{i}+\bar{\Gamma}^{0}_{0j}F^{j}_{i}+\bar{\Gamma}^{j}_{j0}F^{0}_{i}-\bar{\Gamma}^{j}_{jl}F^{l}_{i}\\
&= (\bar{\Gamma}^{j}_{j0}+\bar{\Gamma}^{0}_{00})F^{0}_{i}-(\bar{\Gamma}^{j}_{ji}+\bar{\Gamma}^{0}_{0i})F^{0}_{0}\\
\bar{\Gamma}^{0}_{\lambda i}F^{\lambda}_{0} &= \bar{\Gamma}^{0}_{ji}F^{j}_{0}+\bar{\Gamma}^{0}_{0i}F^{0}_{0}
\end{aligned}$$

e substituindo essas expressões em (4.33), obtemos

$$\partial_0 F^0_i=\partial_i F^0_0+2\bar{\Gamma}^0_{0i}F^0_0-(\bar{\Gamma}^j_{j0}+\bar{\Gamma}^0_{00})F^0_i+\bar{\Gamma}^0_{ji}F^j_0+\bar{\Gamma}^j_{0i}F^0_j. \tag{4.34}$$

Expressamos, agora, (4.31) e (4.34) em termos das componentes F^0_0 e F^0_i. Observando que

$$F^j_0=g_{00}g^{ij}F^0_i=\varepsilon\phi^2g^{ij}F^0_i,$$

obtemos as expressões

$$\partial_0F^0_0=-\varepsilon\phi^2g^{ij}\partial_jF^0_i-2\bar{\Gamma}^i_{i0}F^0_0+\left(\bar{\Gamma}^i_{00}-\varepsilon\partial_j(\phi^2g^{ij})-\varepsilon\phi^2g^{ij}\bar{\Gamma}^k_{kj}\right)F^0_i \tag{4.35}$$

e

$$\partial_0F^0_i=\partial_iF^0_0+2\bar{\Gamma}^0_{0i}F^0_0+(\varepsilon\phi^2g^{lj}\bar{\Gamma}^0_{ji}+\bar{\Gamma}^l_{0i}-\bar{\Gamma}^\alpha_{\alpha 0}\delta^l_i)F^0_l. \tag{4.36}$$

Com estas equações, podemos provar por indução sobre r que

$$\left.\frac{\partial^rF^0_\beta}{\partial(x^0)^r}\right|_{x^0=0}=0. \tag{4.37}$$

De fato, para $r=1$ usamos (4.27). E, para o passo de indução, usamos as expressões (4.31) e (4.34). Uma vez que g é analítica por hipótese, existe um aberto em que F^0_β pode ser expressa como uma série de Taylor, ou seja,

$$\begin{aligned}
F^0_\beta(x^0,x^1,\dots,x^n) &= F^0_\beta(0,x^1,\dots,x^n)+\frac{\partial F^0_\beta}{\partial x^0}(0,x^1,\dots,x^n)x^0\\
&+ \frac{1}{2!}\frac{\partial^2F^0_\beta}{\partial(x^0)^2}(0,x^1,\dots,x^n,0)(x^0)^2+\dots\\
&\quad \dots+\frac{1}{r!}\frac{\partial^rF^0_\beta}{\partial(x^0)^r}(x^1,\dots,x^n,0)(x^0)^r+\dots
\end{aligned}$$

Como cada termo da série é nulo em V, conluímos que, neste aberto, $F^0_\beta=0$. Sabemos que $F^\alpha_\beta=\bar{R}^\alpha_\beta-\frac{1}{2}\bar{R}\delta^\alpha_\beta-\Lambda\delta^\alpha_\beta$ e portanto $F^0_\beta=0$ implica $\bar{R}^0_i=0$

e $\bar{G}_0^0 = \Lambda$. Destas igualdades, deduzimos que (4.9) e (4.10) são satisfeitas por g em um aberto. Isto encerra a prova do lema.

Usaremos os dois lemas acima para provarmos o teorema a seguir que, em suma, é demonstrado ao identificarmos as funções g_{ik} obtidas acima a componentes da métrica de uma variedade semi-riemanniana.

Teorema 3. *Seja M^n uma variedade semi-riemanniana, cuja métrica é expressa em coordenadas locais x^i, definidas em um aberto U de $\mathbb{R}^n$, pela matriz (h_{ij}). Então, M pode ser imersa local, isométrica e analiticamente em um espaço de Einstein de dimensão $n+1$ com constante cosmológica Λ se, e somente se, existe uma matriz simétrica, analítica (K_{ij}) em U satisfazendo o sistema de equações*

$$\nabla_i K - \nabla_j K_i^j = 0 \tag{4.38}$$
$$R - \varepsilon(K^2 - |K|^2) = -2\Lambda \tag{4.39}$$

Prova. Supomos que exista uma imersão isométrica, analítica, local de M em um certo espaço de Einstein $\bar{M}$ com constante cosmológica Λ. Segue do Teorema de Magaard que existe uma matriz g simétrica, analítica, não-singular em um aberto de $\mathbb{R} \times U$, com componentes g_{ij} e ϕ tais que

$$g_{ik}(0, x^1, \ldots, x^n) = h_{ij}(x^1, \ldots, x^n), \tag{4.40}$$

de modo que a métrica em $\bar{M}$ é localmente expressa por

$$\mathrm{d}\bar{s}^2 = \varepsilon\phi^2 \mathrm{d}x^0 \mathrm{d}x^0 + g_{ij}\mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j.$$

Portanto, g_{ik} e ϕ satisfazem as equações (4.8) , (4.9) e (4.10) num aberto e, em particular nos pontos de uma vizinhança da hipersuperfície M definida por $x^0 = 0$. Portanto, devido a condição (4.40), definindo as funções K_{ij} como as componentes da segunda forma fundamental da hipersuperfície M, estas necessariamente satisfazem (4.38) e (4.39) devido (4.18).

Passamos a demonstração da suficiência das hipóteses. Arbitramos, como antes, $\phi(x^0, x^1, \ldots, x^n) \neq 0$ analítica em um aberto do $\mathbb{R} \times U$. Segue do Lema 1 aplicado às matrizes (h_{ij}) e (K_{ij}) que existe uma única matriz simétrica, não-singular, analítica (g_{ik}) satisfazendo as equações (4.8) e (4.16) em um aberto de $\mathbb{R} \times U$ e, além disso, à condição inicial

$$g_{ij}(0, x^1, \ldots, x^n) = h_{ij}(x^1, \ldots, x^n).$$

Como por hipótese K_{ij} satisfaz (4.38) e (4.39), então a matriz (g_{ij}) satisfaz (4.8) em um aberto de $\mathbb{R} \times U$ e satisfaz (4.9) e (4.10) na hipersuperfície $x^0 = 0$. Aplicando o Lema 2, concluímos que (g_{ij}) satisfaz (4.38) e (4.39) numa vizinhança de $x^0 = 0$. Logo, a matriz g corresponde à expressão local da métrica de um espaço de Einstein com constante cosmológica Λ. Assim, encerramos a prova do teorema.

Para obtermos o resultado principal, resta garantirmos a existência da matriz (K_{ij}) satisfazendo às hipóteses do Teorema 3, dada a matriz (h_{ij}). Vemos, inicialmente, que (4.38) representa um sistema de n equações diferenciais parciais e (4.39), uma equação de vínculo para as $\frac{n(n+1)}{2}$ funções independentes K_{ij}. Logo, exceto para $n = 1$, o número de incógnitas é maior (ou igual, para $n = 2$) que o número de equações. A estratégia é escolher-se, de forma conveniente, apenas n funções K_{ij} como incógnitas. Posteriormente, supondo que as demais funções são conhecidas, utiliza-se o Teorema de Cauchy-Kowaleswki para garantir-se a existência de solução. Para tanto, destacamos a direção $i = 1$ em M, de modo que a hipersuperfície $x^1 = 0$ seja não-característica para o sistema formado pelas equações

$$
\begin{aligned}
\nabla_l K - \nabla_j K_l^j &= 0, & (4.41)\\
\frac{\varepsilon}{2}\big(K^2 - |K|^2\big) &= \Lambda + \frac{1}{2}R. & (4.42)
\end{aligned}
$$

Necessitamos adotar uma convenção a fim de facilitar enormemente a notação desta seção. Supomos, doravante, que o índice i varia (apenas) de 2 a n. Feito isso, lembramos que

$$\nabla_k K_l^j = \partial_k K_l^j + \Gamma_{km}^j K_l^m - \Gamma_{lk}^m K_m^j.$$

Os dois últimos termos do lado direito da equação acima dependem somente da métrica h e de suas derivadas primeiras. Em particular, a equação (4.41) pode ser escrita na forma

$$\partial_l K - \partial_j K_l^j - \Gamma_{jk}^j K_l^k + \Gamma_{lj}^k K_k^j = 0.$$

Note que usamos acima o fato que K é um escalar e, portanto

$$\nabla_l K = \partial_l K_j^j + \sum_{j,k} \Gamma_{lk}^j K_j^k - \sum_{j,k} \Gamma_{lj}^k K_k^j = \partial_l K_j^j = \partial_l K.$$

Tomando $l = 1$ e $l > 1$ em (4.41), obtemos, respectivamente

$$\nabla_1 K_2^2 + \ldots + \nabla_1 K_n^n - \nabla_2 K_1^2 - \ldots - \nabla_n K_1^n = 0 \tag{4.43}$$

e

$$\nabla_i K_1^1 + \nabla_i K_2^2 + \ldots + \nabla_i K_n^n - \nabla_1 K_i^1 - \nabla_2 K_i^2 - \ldots - \nabla_n K_i^n = 0.$$

Esta última equação pode ser reescrita como

$$\nabla_1 K_i^1 = \nabla_i K_1^1 + \nabla_i K_2^2 + \ldots + \nabla_i K_n^n - \nabla_2 K_i^2 - \ldots - \nabla_n K_i^n. \tag{4.44}$$

Supomos que os dados iniciais da métrica satisfazem (Lema de Gauss) $g_{11} = h_{11} = 1$ e $g_{1i} = h_{1i} = 0$. Uma vez que $K_j^1 = g^{11} K_{1j}$, deduzimos da observação acima que (4.44) pode ser posta na forma normal

$$\partial_1 K_{1i} = F_i(x^1, \ldots, x^n, h_{jk}, \partial_l h_{jk}, K_{jk}, \partial_l K_{jk}). \tag{4.45}$$

onde, do lado direito, não há termos da forma $\partial_1 K_{jk}$. Por outro lado, lembrando que $K = K_j^j$ e $|K|^2 = K_k^j K_j^k$, podemos escrever a equação (4.42) na forma

$$(K_1^1)^2 + 2K_1^1\big(K_2^2 + \ldots + K_n^n\big) - (K_1^1)^2 = A + \Lambda + \frac{1}{2}\,R$$

onde A é uma expressão algébrica das componentes K_k^j da matriz K tais que $j \neq 1$ ou $k \neq 1$. Assim,

$$2K_1^1 \underbrace{\big(K_2^2 + \ldots + K_n^n\big)}_{K - K_1^1} = A + \Lambda + \frac{1}{2}\,R.$$

Logo

$$2\big(\nabla_1 K_1^1 (K - K_1^1) + K_1^1 \nabla_1 (K - K_1^1)\big) = \nabla_1 (A + \Lambda + \frac{1}{2} R).$$

Podemos escolher, sem perda de generalidade, $K - K_{11} \neq 0$ e, deste modo, podemos reescrever a última equação como

$$\nabla_1 K_1^1 = \frac{1}{2(K - K_1^1)} [\nabla_1 (A + \Lambda + \frac{1}{2} R) - K_1^1 \nabla_1 (K - K_1^1)]. \tag{4.46}$$

Assim, combinando esta equação e (4.43), temos

$$\nabla_1 K_1^1 = \frac{1}{2(K - K_1^1)}[\nabla_1(A + \Lambda + \frac{1}{2}R) + K_1^1(\nabla_2 K_1^2 + \ldots + \nabla_n K_1^n)]. \quad (4.47)$$

Desta forma, obtemos um conjunto de equações diferenciais parciais

$$\begin{aligned} \partial_1 K_{1i} &= A_i(x^1, \ldots, x^n, h_{jk}, \partial_l h_{jk}, K_{jk}, \partial_l K_{jk}). \\ \partial_1 K_{11} &= A_1(x^1, \ldots, x^n, h_{jk}, \partial_l h_{jk}, K_{jk}, \partial_l K_{jk}). \end{aligned}$$

onde, novamente, o lado direito das equações não dependem da derivada de K_{11} e K_{1i}, $i > 1$, com respeito a coordenada x^1. De fato, nos termos provenientes de A em (4.47) em que, eventualmente, surgem derivadas da forma $\partial_1 K_{1i}$, , $i > 1$, podem ser substituidos utilizando-se a forma normal (4.45).

Considerando as funções K_{jk} com $(j,k) \neq (1,1)$ e $j > 1$ como funções analíticas dadas e satisfazendo a condição $K - K_1^1 \neq 0$, podemos aplicar o Teorema de Cauchy-Kowalewskaya a este sistema de equações diferenciais, tomando as funções K_{1i} e K_{11} como as funções a serem determinadas.

Em resumo, a condição de suficiência no Teorema 3 é sempre satisfeita, ou seja, dada uma métrica (h_{ij}), podemos sempre garantir a existência das funções K_{ij} como descritas no Teorema 3, satisfazendo, em particular, às equações (4.22) , (4.38) e (4.39). Isto prova o teorema principal, que ora enunciamos.

Teorema 4. *([6], Theorem 3, p. 5813) Seja M^n, $n > 1$, uma variedade semi-riemanniana cuja métrica é expressa por uma matriz analítica (h_{ij}) em um sistema de coordenadas x^i. Então, M pode ser local, isométrica e analiticamente imersa em um espaço de Einstein de dimensão $n + 1$ e constante cosmológica Λ.*

Este teorema é enunciado como uma extensão do Teorema de Campbell-Magaard (v.[13]), pois se $\Lambda = 0$, então nos restrigimos ao caso em que o ambiente é uma variedade Ricci-flat.

Uma variante da escolha de funções K_{ij} permite mostrar, seguindo as mesmas linhas da exposição acima, a existência de imersões mínimas. Na Seção 2.3, vimos que imersões mínimas são imersões isométricas harmônicas. São caracterizadas por terem curvatura média $K = 0$.

Teorema 5. *([1], p. 175) Toda variedade semi-riemanniana de dimensão $n \geq 3$ e métrica analítica pode ser imersa local, analítica e minimamente em um espaço de Einstein de dimensão $n+1$.*

Prova. A demonstração consiste, basicamente, em resolver em U o sistema $n+2$ de equações

$$\nabla_l K - \nabla_j K^l_j = 0, \tag{4.48}$$

$$\frac{\varepsilon}{2}\big(K^2 - |K|^2\big) = \Lambda + \frac{1}{2}\,R, \tag{4.49}$$

$$K = 0. \tag{4.50}$$

Uma vez que $n \geq 3$, podemos isolar as $n+2$ distintas componentes $K_{11}, K_{22}, \ K_{33}$ e K_{1i}, $i > 1$ da matriz $\big(K_{ij}\big)$ como incóginitas.

Tomando $l = 1$ e $l \neq 1$ em (4.48), obtemos, respectivamente,

$$\nabla_1 K^1_1 = -\nabla_2 K^2_1 - \ldots - \nabla_n K^n_1$$

e

$$\nabla_1 K^1_i = -\nabla_2 K^2_i - \ldots - \nabla_n K^n_i.$$

Diferenciando ambos os lados da equação $K = 0$ com respeito a x^1, temos

$$\nabla_1 K^2_2 = -\nabla_1 K^1_1 - \ldots - \nabla_1 K^n_n.$$

Por fim, expandindo $|K|^2$ como polinômio em K^3_3 e derivando a equação (4.49) com respeito a x^1 chegamos a

$$-\varepsilon\, K^3_3 \nabla_1 K^3_3 = \nabla_1\big(A + \Lambda + \frac{1}{2}\,R\big),$$

onde o termo algébrico A não depende da derivada $\nabla_1 K^3_3$.

Procedendo como na demonstração do teorema anterior, concluímos a prova.

Finalmente, métricas satisfazendo a equação de Einstein acoplada a um campo escalar também permitem teoremas de imersão. Como exemplo, citamos

Teorema 6. *([4], Corollary 1, p. 5114) Seja M^n, $n > 1$, uma variedade semi-riemanniana cuja métrica é expressa por uma matriz analítica (h_{ij}) em um sistema de coordenadas x^i. Então, M pode ser local, isométrica e analiticamente imersa em um espaço gerado por um campo escalar.*

Referências Bibliográficas

[1] ANDERSON, ; DAHIA, F. ; ROMERO, C. *Embeddings in space-times sourced by scalar fields.* Journal of Mathematical Physics, New York, v. 44, n. 11, p. 5108-5119, 2003.

[2] BAEZ, J. ; MUNIAIN, J. *Gauge fields, knots and gravity*. Singapore: World Scientific, c1994. 465 p. (Series on knots and everything ; 4).

[3] CAMPBELL, J. *A course of differential geometry.* Oxford : Oxford University Press, 1926.

[4] CHERVON, S. ; DAHIA, F. ; ROMERO, C., *Harmonic maps and isometric embeddings of the spacetime,* PhysICS Letter A, Amsterdam, v. 326, n. 3-4, p. 171-177, 2004.

[5] DAHIA, F. *Imersão do espaço-tempo e a generalização do teorema de Campbell-Magaard.* 2001. Tese (Doutorado em Física)- Universidade Federal da Paraiba.

[6] DAHIA, F. ; ROMERO, C. *The embedding of the space-time in five dimensions: an extension of Campbell-Magaard theorem*. Journal of Mathematical Physics, New York, v. 43, n. 11, p. 5804-5814 , 2002.

[7] DURBROVIN, B. ; FOMENKO, A. ;NOVIKOV, S. *Modern geometry - methods and applications.*New York : Springer-Verlag, 1984. 2v.

[8] FOLLAND, G. B. *Introduction to partial differential equations*. 2^{nd} ed. Princeton : Princeton University Press, 1995. 324 p.

[9] FRANKEL, T. *The geometry of physics.* Cambridge : Cambridge University Press, 1997. 666 p.

[10] GOURGOULHON, E. *3+1 Formalism and Bases of Numerical Relativity.* gr-qc/0703035v1.

[11] MAGAARD, L. *Zur einbettung riemannscher Raume in Einstein-Raume und konformeuclidische Raume.* 1963. 46 F. Tese (Doutorado em Matemática). Fakultat Christian-Albrechts, Universitat zu Kiel, Kiel.

[12] O'NEIL, B. *Semi-riemannian geometry with applications to relativity*. Orlando : Academic Press,1983. 468 p.

[13] ROMERO, C. *Imersão isométrica de variedades pseudo-riemannianas e diemnsões extras do espaço-tempo.* 2004. Manuscrito não publicado.

[14] SPIVAK, M., *A comprehensive introduction to differential geometry*. Boston, Mass : Publish or Perish, 2005. 5v.

[15] TAYLOR, M. *Partial differential equations.* New York : Springer-Verlag, 1997.

[16] WALD, R. M. *General relativity*. Chicago ; London : The University of Chicago Press, 1984. 491 p.